universität wien

DIPLOMARBEIT

Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie im fächerübergreifenden Unterricht Mathematik – Bewegung und Sport

mit einer Ausarbeitung zur Spielerbeobachtung im Basketball

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin:	Daniela Kaindl
Matrikel-Nummer:	0201709
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	Lehramtstudium Mathematik, Bewegung und Sport A 190 406 482
Betreuer:	Prof. Dr. Peter Raith

Wien, am 10. November 2008

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und außer den im Literaturverzeichnis angeführten Quellen bei der Verfassung keine Unterstützung in Anspruch genommen habe.

Die Arbeit wurde weder im Inland noch im Ausland einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Bad Vöslau, November 2008

Hinweis

Alle in der vorliegenden Diplomarbeit verwendeten Bezeichnungen sind geschlechtsneutral zu verstehen. Aus Gründen der einfacheren Lesbarkeit wurde die grammatikalisch näherliegende Form verwendet. Dies stellt keine Bevorzugung seitens der Autorin dar.

Danksagung

Ich widme meine Diplomarbeit all jenen, die zum erfolgreichen Abschluss meines Studiums einen wesentlichen Beitrag geleistet haben.

Dazu sage ich zu Beginn all jenen „Danke“, die mich im Laufe meiner Schulzeit und während der Zeit meines Studiums unterstützt haben, allen voran meiner Familie, die mir nicht nur finanziell sondern auch bei schulischen und persönlichen Problemen immer zur Seite stand und mich in schwierigen Zeiten immer wieder aufbaute und aufs Neue motivierte. Für die Motivation gebührt auch ein großer Dank meinen beiden Studienkolleginnen Birgit Zoisl und Karoline Eidenberger, mit denen ich mir den Weg durch Sport- und Mathematikstudium bahnte. Viele Übungen, Vorlesungen und Seminare besuchten wir zusammen und verbrachten viel Zeit mit gemeinsamem Lernen.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Freundinnen Isy und Nina sowie meinen Freunden Alex und Benji, die es während meiner Studienzeit nicht immer leicht mit mir hatten, jedoch alle Höhen und Tiefen mit mir meisterten und immer für mich da waren.

Mein spezieller Dank gilt Hr. Prof. Dr. Peter Raith für die ausgezeichnete Betreuung und Unterstützung während der Recherche und Verfassung meiner Diplomarbeit. Er stand mir bei all meinen Fragen mit wertvollen Tipps und Hinweisen zur Seite ohne mich jemals in meinem Thema einzuschränken. Selbst außerhalb der Sprechstunde und in den Ferien hatte er stets ein offenes Ohr für mich. Danke!!!

Vorwort

Die Statistik nimmt in der heutigen Gesellschaft einen enormen Stellenwert ein. Tagtäglich werden wir mit zahlreichen statistischen Informationen aus Medien wie Fernsehen, Internet, Radio, Zeitungen, usw. konfrontiert. Meist ist uns das überhaupt nicht mehr bewusst. Sagen diese Graphiken immer die Wahrheit?

Im 20. Jahrhundert wurde, angeblich vom britischen Premierminister Sir Winston Churchill, die Aussage: „Ich traue keiner Statistik, die ich nicht selbst verfälscht habe.“, getätigt (http://www.statistik.baden-wuerttemberg.de/Veroeffentl/Monatshefte/essay.asp?xYear=2004 &xMonth=11&eNr=11). Damit soll darauf aufmerksam gemacht werden, dass wir allzu oft mit (bewusst) manipulierten Darstellungen getäuscht werden.

„Die Gefahr der Manipulation bei der Interpretation von statistisch erhobenem Datenmaterial ist sehr groß und besonders leicht zu führen, wenn man die Einzelschritte der Analyse nicht nachvollziehen, bzw. verstehen kann.“, warnt Hochstädter, (1996, S. 1).

Umso wichtiger erscheint ein früher Statistikunterricht, in dem die Schüler lernen, mathematische Darstellungen und Zusammenhänge kritisch zu betrachten, nicht alle „Tatsachen“ unreflektiert anzunehmen und überdies hinaus eigenständig einfache Probleme des Alltags zu lösen.

Nachdem ich in meiner eigenen Schulzeit im Mathematikunterricht leider nicht über das Zeichnen von Baumdiagrammen hinaus kam, entdeckte ich das Kapitel der Stochastik an der Universität für mich und es wurde mir ein Anliegen, ein sehr praxisorientiertes Thema in meiner Diplomarbeit zu behandeln, um mich selbst noch einmal intensiv mit dem Lehrstoff der Statistik zu befassen und mir einen Überblick über die Möglichkeiten im Unterricht zu verschaffen.

Leider werden von sehr vielen Lehrern gerade in der (beurteilenden) Statistik die meisten Kürzungen vorgenommen. Vermutlich aus dem Grund, da die beurteilende Statistik Lehrstoff der 7. und 8. Klasse ist und sich sowohl Schüler als auch Lehrer im „Maturastress“ befinden und die Intergralrechnung, die ja Hauptbestandteil der 8. Klasse ist, wichtiger erscheint, auch wenn sie einen wesentlich geringeren Praxisbezug aufweist.

Als Lehramtstudentin der Fächer „Mathematik“ und „Bewegung und Sport“ bot sich mir eine Theorie zum fächerübergreifenden Unterricht an. Die Möglichkeit, eine gesamte Klasse in

Mathematik, sowie zumindest den weiblichen Teil in „Bewegung und Sport“ zu unterrichten, sofern der Unterricht nicht koedukativ, oder wie in Sportschulen gemischtgeschlechtlich in Sparten der verschiedenen Sportarten gehalten wird, ist gegeben. Darüber hinaus ist eine Zusammenarbeit mit anderen Sportlehrern mit Sicherheit auch einfach zu arrangieren.

Ich stelle in meiner Arbeit also ein Modell vor, in dem die Schüler anhand für sie sehr praxisorientierter Beispiele aus dem Sport, die Inhalte der beurteilenden Statistik kennen lernen.

Interessant wäre vielleicht, dieses Modell während meiner Recherchen zu testen, doch dazu reicht der zeitliche Rahmen, der mir zur Verfügung steht, leider nicht aus. Deshalb hoffe ich sehr auf eine Möglichkeit (vielleicht schon während meines Probejahres), um meine Ideen in der Wirklichkeit zu testen. Die Schüler sollen dabei keinesfalls als „Versuchskaninchen“ dienen. Ich denke, dass der eher sportbezogene Mathematikunterricht, durchzogen von Praxisbeispielen, sowohl den Schülern, als auch mir und anderen (sportinteressierten) Lehrperson mehr Spaß bereiten könnte.

So beobachtete ich während meiner Recherchen an mir selbst, dass ich, sobald ich in Richtung Sport zu forschen begann, wesentlich mehr Spaß und vor allem Interesse an der Materie hatte.

Nachdem ich selbst ein Bundesoberstufenrealgymnasium (BORG) mit sportlichem Schwerpunkt besucht habe und ich mir für meine Zukunft als Lehrerin wünsche, selbst einmal in einem Sportgymnasium zu unterrichten, stelle ich mir für mein „Projekt“ Schüler einer Schule mit sportlichem Schwerpunkt vor, sodass man auch auf einem fächerübergreifenden Unterricht in „Mathematik“, „Bewegung und Sport“ und „Sportkunde“ aufbauen kann, sofern alle beteiligten Lehrer zur Zusammenarbeit bereit sind.

Meine Intention ist es also, statistische Inhalte möglichst sportbezogen aufzubereiten, Beispiele zu geben und zu einer Vertiefung (im Sportkunde Unterricht oder Wahlpflichtfach) anzuregen. Die genaue Auswahl der Inhalte sollte jeder Lehrer für sich selbst treffen.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungen

Tabellen

1 Einleitung

Die Statistik ist aus der Zeit der modernen Informationsgesellschaft, in der wir uns bewegen, nicht mehr wegzudenken. Hudec und Neumann (http://www.stat4u.at/main.asp?kat1=11&kat2=305&kat3=&Text=1318) sprechen von „statistischer Kultur“ und meinen damit jene Fertigkeiten und Fähigkeiten, die es uns erst möglich machen, am gesellschaftlichen Leben teilzuhaben.

Sie gehen auch der Frage nach, warum die Statistik unter den Schülern und Studenten prinzipiell abgelehnt wird. Als zwei mögliche Auslöser nennen sie das Image einer sehr trockenen Materie und die weit verbreitete Skepsis gegenüber Statistiken.

Albert und Cochran (in Albert, Bennett & Cochran, 2005, S. 5) sind ähnlicher Meinung:

> „Teaching introductory statistics is a challenging endeavor because the students have little prior knowledge about the discipline of statistics and many of them are anxious about mathematics and computation. (…). These students regard „statistics“ as a collection of numbers and they believe that the class will consist of a series of computations on these numbers.“

„Mit einer fundierten statistischen Grundausbildung in den Schulen könnten in diesem Bereich heute vorhandene Berührungsängste mit der Statistik und grundlegende Verständnisprobleme in Zukunft von vornherein abgebaut bzw. ausgeschaltet werden.“ (http://www.stat4u.at/main.asp?kat1=11& kat2=305&kat3=&Text=1318), so die Meinung einiger Wissenschaftler, die ebenso denken, dass sich das Unterrichtsfach „Bewegung und Sport“ sehr gut für eine interdisziplinäre Zusammenarbeit mit der Statistik eignet, da im Sportunterricht viele Daten erhoben werden können, deren Auswertungen, egal in welchem Schwierigkeitsgrad, interessante Ergebnisse bringen können.

Als angehende Mathematik- und Sportlehrerin möchte ich ein fächerübergreifendes Unterrichtsmodell für die beurteilende Statistik in der Oberstufe erstellen, und mit der Einbeziehung von Beispielen aus dem Sport eine höhere Motivation und infolgedessen erhöhte Aufnahmebereitschaft seitens der Schüler zu erzielen.

Ein Zitat aus Albert, et al. (2005, S. 5) ermutigte mich in meinem Vorhaben: „Many people are involved in sports, either as a participant or a fan, and so are naturally interested in statistical problems that are framed within the context of sports.“. Des Weiteren bestätigen sie den Erfolg des fächerübergreifenden Unterrichts: „Sports examples have been used successfully by many statistics instructors and now compromise the entire basis of many introductory statistic courses.“, und betonen, dass selbst sportdesinteressierte Studenten einen weitaus höheren Bezug zu den gestellten Sportbeispielen und -aufgaben herstellen konnten, als zu den herkömmlichen.

Im Laufe meiner Überlegungen zu diesem Thema stellten sich mir folgende Fragen, die im Zuge meiner Nachforschungen behandelt werden sollen:

- Mit Hilfe welcher statistischen Inhalte aus dem Bereich des Sports kann ich den Statistikunterricht für die Schüler interessant gestalten?
- Kann ich Praxiselemente aus dem Sport in den Mathematikunterricht einbeziehen und umgekehrt: kann ich die Theorie in der Praxis anwenden und gebrauchen?
- Welche Unterrichtsformen eignen sich für den fächerübergreifenden Unterricht Bewegung und Sport/ Mathematik?
- Welche Sportart eignet sich zur Vertiefung statistischer Analysesysteme im Sport?

Mit meinen Vorstellungen und Ideen entwickelte ich ein grobes Konzept. Als Einstieg, zur Wiederholung der Beschreibenden Statistik, sollen die Schüler im Sportunterricht Daten eines Fünfkampfes erheben um sie anschließend mit Hilfe eines Merkblattes im Gruppenunterricht darzustellen und bearbeiten, teilweise auch am Computer. Die anschließende Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und beurteilende Statistik stellt wahrscheinlich ein doch eher trockenes Thema dar, das jedoch durch interessante, aus dem sportlichen Umfeld der Jugendlichen stammende Beispiele untermalt werden soll.

Als Erweiterung für das Mathematik Wahlpflichtfach oder den Sportkunde Unterricht möchte ich ein statistisches Analysesystem aus dem Sport vorstellen, dessen Inhalte selbst im Sportunterricht erprobt werden sollen.

Um mein Vorhaben in die Tat umzusetzen überlegte ich mir folgende methodische Vorgehensweise: nach dem Selektieren einiger Diplomarbeiten zu statistischen Themen, währenddessen ich mir einen Überblick über die Möglichkeiten an Themen und Richtungen verschaffen konnte, begann ich mich mit Lehrbüchern und Lehrplänen der Unter- und Oberstufe zu beschäftigen. Nachdem die Inhalte des statistischen Lehrstoffs soweit gefestigt waren, beschäftigte ich mich mit der Statistik in der Geschichte und in der Gesellschaft, insbesondere im Sport. Sportbeispiele für Theorie und Praxis sollten entwickelt werden sowie Ansätze und

Ideen für die Wahl der Unterrichtsform. Im Zuge der Forschungen über Statistik im Sport durfte die Erweiterung „statistisches Analysesystem im Sport“ nicht vergessen werden. Notizen sollten gemacht und gleichzeitig mit der Bearbeitung des Kernbereiches bearbeitet und vertieft werden.

Die Kapitel beinhalten meist ein Beispiel sowie einige Aufgaben, deren Ideen teilweise aus Lehr- und Fachbüchern stammen oder aber auch frei erfunden sind. Wichtige Merksätze, Formeln und Definitionen werden in Kästen dargestellt.

1.1 Bemerkungen zur Statistik

Der italienische Wissenschaftler Schmeitzel leitete den Begriff Statistik Anfang des 18. Jahrhunderts vom italienischen *statista*, zu Deutsch Staatsmann oder Staatsfrau, ab. Er meinte damit jenes Wissen, das ein Staatsmann seiner Meinung nach besitzen sollte.

Statistik ist die geordnete Menge von Informationen in Form empirischer Zahlen (Statistiken) sowie jene Methoden, nach denen empirische Zahlen gewonnen, dargestellt, verarbeitet und analysiert werden, um Prognosen und Entscheidungen treffen zu können.

„Danach gehören zur Statistik die Daten, die an theoretische Konzeptionen orientiert und aus der Realität nach bestimmten Messvorschriften gewonnen sind, sowie die Verfahren, die zu solchen Daten führen und die solche Daten zum Gegenstand haben.“, wird in Brockhaus (1973d, S. 30) beschrieben.

Bös, Hänsel und Schott (2000, S. 10) verallgemeinern die Definition: „Statistik ist eine auf Methoden ausgerichtete Wissenschaft, die keinen eigenen inhaltlichen Gegenstandsbereich hat, sondern bei der Lösung unterschiedlichster Probleme in Wissenschaft, Wirtschaft und Technik angewandt wird.“

Statistische Methoden lassen sich in folgende Klassen einteilen, die sich meist überschneiden: Gewinnung, Verarbeitung, Beschreibung, Analyse, Schätzung, Hypothesenprüfung, Prognose und Entscheidung.

Statistische Daten werden durch Experimente oder Erhebung statistischer Massen gewonnen.

Unter statistischen Erhebungen verstehen Url, Raubik, u.a. (2002, S. 187) die Befragung von Personen oder Zählung gewisser Sachverhalte und Umstände unter bestimmten Gesichtspunkten. Die Anzahl der Messwerte gibt den Umfang der Erhebung an.

Einen Spezialfall stellt dabei die Erhebung mittels Stichproben dar, anhand derer auf die Grundgesamtheit geschlossen wird. Sie hat den Vorteil, dass Kosten und Zeit gespart werden.

Generell kann alles, was messbar ist Gegenstand statistischer Datenerhebung sein. Das gemessene Merkmal wird als die statistische Einheit bezeichnet. Fügt man diese statistischen Einheiten zusammen, so spricht man von einer Stichprobe.

Verarbeitet werden die gewonnenen Daten heutzutage fast ausschließlich in elektronischer Form. Bei Erhebungen wird das Urmaterial in Datenbanken stets abrufbereit abgespeichert oder in Tabellenform aufbereitet, sodass statistische Kennzahlen ausgearbeitet und berechnet werden können.

Die Beschreibung gilt als Ergebnis für diverse administrative Zwecke und dient der Repräsentation in der Öffentlichkeit mittels Diagramme und Tabellen.

Früher war die Verarbeitung statistischen Datenmaterials, die über eine einfache Beschreibung hinausgeht als statistische Datenanalyse bekannt. Sie beschäftigte sich vor allem mit statistischer Ursachenforschung, zu deren Hilfe die Korrelationsanalyse hinzugezogen wurde. Heute aber konzentriert sich die statistische Datenanalyse in erster Linie auf die Schätzung und Hypothesenprüfung, sie werden in Kapitel 5 der Beurteilenden Statistik behandelt.

Die Schätzung verfolgt im Gegensatz zur Beschreibung rein wissenschaftliche Interessen. Von der Stichprobe soll auf den „echten“ Parameter oder einen Zusammenhang geschlossen werden. Handelt es sich bei dem Parameter um eine einzelne Zahl, so spricht man von einer Punktschätzung, handelt es sich um die Schätzung zweier Grenzen, innerhalb derer sich der gesuchte Parameter mit bestimmter Wahrscheinlichkeit befindet, so spricht man von Intervallschätzung, zu dessen Verfahren die Konfidenzmethode zählt. Zu jeder Schätzung gibt es einen Schätzfehler, der üblicherweise mit Hilfe der Stichprobe berechnet werden kann (Kapitel 5.2.2.3).

„Statt zur Schätzung kann man die als Stichproben interpretierten statistischen Ergebnisse auch dazu benutzen, zuvor aufgestellte Hypothesen auf ihre (wahrscheinliche) Richtigkeit hin zu überprüfen.“, so Brockhaus (1973d, S. 31).

Als die wichtigsten Methoden der Hypothesenprüfung gelten Signifikanztests. Wird die Validität von Alternativhypothesen getestet so können zwei Fehler auftreten. Beim Fehler erster Art wird eine gültige Hypothese fälschlicherweise abgelehnt, beim Fehler zweiter Art wird eine ungültige Hypothese angenommen (Kapitel 5.2.2.4).

1.2 Geschichte der Statistik

Erste Aufzeichnungen über statistische Tätigkeiten reichen bis ins dritte Jahrtausend vor Christus zurück, als in Ägypten um 2600 v. Chr. erste statistische Untersuchungen im Sinne von Volkszählungen geführt wurden. Das Zahlenmaterial wurde anschließend nach Geschlecht, Alter, usw. sortiert. (Bös, 2000).

Auch während der römischen Kaiserzeit und in der vorspanischen Inkakultur fanden Zählungen statt. Im 16. bis 18. Jahrhundert setzte sich die systematische Staatenbeschreibung vor allem in Italien, den Niederlanden und Deutschland durch. Statistische Ermittlungen im Handelsbereich wurden bereits im 17. Jahrhundert getätigt, allerdings vorwiegend geheim gehalten.

Institutionalisiert wurde die Wissenschaft der Statistik erstmals 1660, als Hermann Conring an der Universität Helmstedt eine Schule für Universitätsstatistik gründete. Die Statistik jener Zeit, die sogenannte Staatenkunde verzichtete weitgehend auf quantitative Aussagen, sodass diese Form mit jener der heutigen Zeit nur noch wenig gemeinsam hat. Laut Reichel (1992) diente sie dazu, die Merkmale zu beschreiben, die den „(Gesamt-)Zustand“ eines Staates charakterisieren (Bevölkerung, Wirtschaft, Finanzen,…).

Durch die wachsende Anzahl statistischer Ämter Anfang des 19. Jahrhunderts zerfiel diese Richtung weitgehend, überlebte aber durch die Verbindung zur „Politischen Arithmetik“. „Im Gegensatz zur deskriptiv orientierten Universitäts-Statistik war die Politische Arithmetik auf der Suche nach Regelmäßigkeiten im Wirtschafts- und Sozialleben.“ (Brockhaus, 1976d, S. 33).

Während die damaligen Bevölkerungsverhältnisse noch ohne Heranziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung untersucht wurden, verdankt die heutige Statistik ihre Bedeutung der Verbindung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Grundlagen vor allem von Pascal und Fermat etwa Mitte des 17. Jahrhunderts im Zusammenhang mit Glücksspielen geschaffen wurden. Bös et al. (2000, S. 9) schreiben: „Vor allem mit dem Begriff der theoretischen Verteilung (z.B. GAUSS´sche Normalverteilung) wurde die Basis geschaffen, über rein beschreibende statistische Verfahren hinaus auch zu Schlussfolgerungen über die Zufälligkeit bzw. Überzufälligkeit von Zusammenhängen und Unterschieden zu gelangen“.

Bernoulli, Moivre, Euler und Bayes verhalfen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 18. Jahrhundert schließlich zu ihrer Blütezeit.

Im 19. Jahrhundert entwickelten die Mathematiker Tschebyschew (Russland), Galton (England) und Lexis (Deutschland) drei verschiedene Richtungen, von denen sich die englische unter ihrem Vertreter R. A. Fisher als die Zukunftsweisende erwies. Die von ihm Anfang bis Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelte Methodik ist auch heute noch die Vorherrschende. Neyman und Pearson widmeten sich schließlich dem testtheoretischen Bereich.

Etwa ab Mitte des 20. Jahrhunderts begannen Wissenschaftler auf Grundlage der - historisch gesehen älteren - Wahrscheinlichkeitsrechnung Methoden zur Analyse statistischen Datenmaterials und Prüfung statistischer Hypothesen zu entwickeln. (Brockhaus, 1976d).

1.3 Statistik in Gesellschaft, Schule und Sport

Ben-Zvi und Garfield (2004, S. 3) schreiben, dass sich im letzten Jahrhundert die Nachfrage nach statistischer Bildung mit Fokus auf statistische Fertigkeiten, Begründungen und Denkweisen, stark erhöht hat. Sie finden vielfache Anwendung in nahezu allen Lebensgebieten. Die Notwendigkeit eines adäquaten Statistikunterrichts sehen sie zum einen im Problem, dass das Hauptaugenmerk im Unterricht zumeist auf Prozeduren und Rechenvorgängen liegt, nicht aber im kritischen Betrachten und Begründen des eigentlichen Problems, zum Anderen wissen die meisten Menschen unseres Umfeldes nicht mit den vielen quantitativen Informationen umzugehen, mit denen wir tagtäglich in den Medien konfrontiert werden. Sie glauben fest an die Glaubhaftigkeit von Statistiken und vertrauen auf ihre Aussagen.

„Yet many research studies indicate, that adults in mainstream society cannot think statistically about important issues that affect their lives.“, führen Ben-Zvi und Garfield (2004, S. 3) aus.

Des Weiteren nennen sie einige Gründe für die ablehnende Haltung von Studenten und Schülern gegenüber der Statistik. Viele statistische Ideen und Regeln erscheinen ihnen äußerst komplex und zu schwierig, sodass es für die Lehrer eine große Herausforderung darstellt, die Lernenden zu motivieren. Bei Manchen beginnen die Probleme schon bei der zugrundeliegenden Mathematik, also zum Beispiel bei der Bruch- und Prozentrechnung. Damit wird die Aufnahmebereitschaft und –fähigkeit für neue Inhalte natürlich gehemmt.

Die meisten aller Schüler bevorzugen es, nach einem klaren Schema zu rechnen. Zum einen, da es bequemer erscheint und weil zumeist nach diesem Prinzip unterrichtet wird. Sie setzen Statistik mit Mathematik gleich und erwarten Zahlen und Berechnungen mittels klar definierter Formeln, an dessen Ende eine richtige Antwort steht. Die Datenvielfalt an sich, die Vielfalt an Methoden zur Verarbeitung, sowie die verschiedenen möglichen Interpretationen basierend auf unterschiedlichen Annahmen und Vermutungen lassen schnell Unsicherheiten entstehen.

Wie viele Wissenschaftler sind Ben-Zvi und Garfield (2004) für eine Reform des Statistikunterrichts in allen Schulstufen- und formen. Einerseits wegen der oben beschriebenen wachsenden Unfähigkeit der Schüler statistisch zu denken und zu begründen, andererseits wegen der Fortschritte in der statistischen Forschung, insbesondere der neuen Techniken der Datenbeschreibung und der Steigerung des Einsatzes der Technik in der Praxis. Dazu zählt auch die steigende Verfügbarkeit jener technischen Hilfsgeräte in der Schule und zuhause.

Im englischen Sprachraum, vor allem in den Vereinigten Staaten, wird Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik schon in der Grundschule gelehrt, weshalb auch in Österreich der Wunsch nach einer früheren altersadäquaten Einführung in die Statistik besteht. Erste Unterrichtsmodelle bestehen bereits, sind aber noch nicht feste Bestandteile des österreichischen Lehrplans (http://www.stat4u.at/main.asp?kat1=11& kat2=305&kat3=&Text=1318).

Ben-Zvi und Garfield sprechen in ihrem Buch von *statistical literacy, statistical reasoning* und *statistical thinking*. Obwohl die explizite Unterscheidung für die Behandlung meines Themas eher unrelevant erscheint, möchte ich zwecks der Vertiefung des Grundverständnisses über die Statistik eine kurze Zusammenfassung jener Definitionen geben.

Statistical literacy beschreibt Basisfertigkeiten und spezielle Fertigkeiten im Verständnis statistischer Informationen und Forschungsresultate. Dazu zählen die Fertigkeiten Daten zu sortieren, Tabellen zu erstellen und Daten auf verschiedene Weise zu repräsentieren, sowie das Verstehen der verschiedenen statistischen Methoden, Begriffe und Symbole.

Unter *statistical reasoning* verstehen die beiden Autoren (2004, S. 7) die Art des vernünftigen Umgangs mit statistischen Ideen und Informationen: „Reasoning means understanding and being able to explain statistical processes and being able to fully interpret statistical results.“

Das Verständnis der wesentlichsten Punkte, die statistische Untersuchungen ausmachen wird als *statistical thinking* bezeichnet. Es beinhaltet damit zum Beispiel Wissen über Stichproben, über Rückschlüsse von Stichproben auf die Grundgesamtheit, über die Notwendigkeit geplanter Experimente um Zusammenhänge aufzudecken, usw. Zusammengefasst verfügen statistische Denker über die Fähigkeit, statistische Untersuchungen oder bereits gelöste Probleme kritisch zu betrachten und zu evaluieren.

Im Sport stellen Statistiken zentrale Elemente dar, die dazu dienen bereits erbrachte sportliche Leistungen zu erfassen, zu analysieren sowie Prognosen über zu erwartete Leistungen der Zukunft anzustellen. Tabellen und Ranglisten gelten als beliebte Darstellungsformen. Zur Festhaltung von Leistungen innerhalb der Karriere eines Sportlers werden in erster Linie Datensätze verwendet. Um Sportstatistiken zu verfassen ist es vonnöten, dass sportliche Bewegungen in Zahlen erfasst werden können. Man spricht von einer Quantifizierung sportlicher Leistung, ohne die es manchmal nicht möglich wäre, den Sieger eines Wettkampfes zu ermitteln. Eine Fußball EM-Qualifikation könnte - ebenso wie jeder beliebige Ligenbetrieb - ohne den Einsatz von Tabellen nur schwer realisiert werden, Statistiken in Einzelwettkämpfen wie zum Beispiel in der Leichtathletik oder dem Gerätturnen gestatten einen direkten Leistungsvergleich vor Ort.

Doch Statistiken sind nicht nur für die Athleten und Trainer im Sinne der Leistungserfassung interessant, sondern dienen ebenso der medialen Darstellung sportlicher Wettkämpfe für Sportinteressierte. Damit werden sportliche Ereignisse und Leistungen auch für jene konsumierbar, die das Geschehen nicht unmittelbar vor Ort oder in den Medien miterleben konnten. Schlagen wir den Sportteil der Tageszeitung auf so kommen wir nicht an einer Flut von Daten und Informationen in Form von Zahlen vorbei.

Als sportliche Ereignisse können neben Wettkämpfen und Turnieren beispielsweise auch die spanischen Stierkämpfe genannt werden, die in Spanien als Volkssport gelten und mit großem Interesse verfolgt werden.

Sportstatistiken haben in verschiedenen Sportarten und Nationen ganz unterschiedliche Prioritäten. So gibt es aufgrund der großen Rolle, die Sportstatistiken im amerikanischen Raum spielen, zahlreiche Ansätze zur statistischen Beurteilung einzelner Spieler und Spielzüge zum Beispiel im Basketball, Baseball und American Football, aber nur sehr wenige Aufzeichnungen über Analysesysteme im Fußball. Im Wesentlichen gelten Tabellen, Ranglisten, Ergebnislisten, Spielerdatensätze und Boxscores, eine Darstellungsform kurzer Spielverläufe in Teamsportarten, als die gängigsten statistischen Modelle des Sports (http://de.wikipedia.org/wiki/Statistik_%28Sport%29).

1.4 Statistik im Lehrplan

Obwohl ich in meiner Diplomarbeit vorrangig den Schulstoff zur Statistik der Oberstufe behandeln werde, möchte ich auch einen Einblick in den Mathematik Lehrplan der Unterstufe bieten, da sich dessen Inhalte bis in die Oberstufe durchziehen und ich denke, dass ein generelles Wissen um die Statistik im österreichischen Lehrplan niemals falsch sein kann. Durch die genauere Betrachtung des Lehrplans werden uns Lehrern immer wieder neue, vielfältige Zugänge für den Unterricht vor Augen geführt, welche die Gestaltung und Planung des Unterrichts jedes Mal aufs Neue zu einer interessanten Tätigkeit machen.

Der fächerübergreifende Unterricht lässt sich in Bezug auf den Lehrplan „Bewegung und Sport" in der AHS Oberstufe ohne weiteres umsetzen, da der Lehrstoff sehr weit gefasst ist. Auf Grundlage der könnens- und leistungsorientierten Bewegungshandlungen können die Schüler durch Einbeziehung der Mathematik das eigene Leisten nicht nur erfahren, sondern auch reflektieren. „Theoriegeleitete Inhalte (…) sind in Verbindung mit dem Bewegungshandeln zu vermitteln und auch in fächerübergreifenden Lehr- und Lernverfahren zu vertiefen." (http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs_lehrplaene_oberstufe.xml)

Im österreichischen Lehrplan wird die Stochastik in die beschreibende Statistik, die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die beurteilende Statistik unterteilt. In der Volksschule und der 5. Schulstufe ist soweit kein Stochastikunterricht vorgesehen, erst in der 6. Schulstufe lernen die Schüler Häufigkeiten zu bestimmen und mit Graphiken zu arbeiten. Die 7. Schulstufe enthält soweit keine neuen Inhalte, in der 8. Schulstufe werden die statistischen Kennzahlen behandelt. Der Lehrplan der Oberstufe empfiehlt für die 10. Schulstufe eine Wiederholung der deskriptiven Statistik und die Einführung der Begriffe „Zufallsversuch" und „Wahrscheinlichkeit". In der 11. und 12. Schulstufe werden schließlich diskrete und stetige Zufallsvariable mit ihren Verteilungen, Beispiele zur Normalverteilung sowie Hypothesentests und Konfidenzintervalle behandelt
(http://www.bmukk.gv/schulen/unterricht/lp/Lehrplaene_AHS1539.xml).

Nach Meinung zahlreicher Experten und Lehrpersonen findet der Unterricht in Statistik und Wahrscheinlichkeit viel zu spät statt, da die Schüler heutzutage durch die Medien bzw. schon beim einfachen „Mensch-ärgere-dich-nicht-spielen" sehr früh in Kontakt mit stochastischen

Inhalten kommen. Teilkapitel der beschreibenden Statistik ließen sich durchaus schon in der Volksschule, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende Statistik in der Unterstufe unterrichten. Dass nicht alle Schüler des österreichischen Schulsystems eine Oberstufe besuchen und damit nie Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilender Statistik kennen lernen, ist ein weiterer Grund für einen früheren Einsatz stochastischer Inhalte im Lehrplan.

1.4.1 Statistik in der Unterstufe

Der österreichische Mathematik-Lehrplan der AHS Unterstufe fordert als Bildungs- und Lehraufgabe die Erfüllung einiger Punkte. Im Hinblick auf den Statistikunterricht scheinen mir die Folgenden als die Wichtigsten: die Schüler sollen durch vielfältige Vorstellungen und Zugänge die Mathematik als beziehungsreichen Tätigkeitsbereich verstehen, ihr mathematisches Wissen aus verschiedenen Bereichen ihrer Lebenswelt nutzen und durch Hinzuziehen von Informationsquellen weiter entwickeln. Produktives geistiges Arbeiten und Argumentieren sowie exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellung und Interpretation mathematischen Datenmaterials sollen in Bezug auf die jeweiligen Lernziele geschult werden. Außerdem müssen gewisse Technologien, wie zum Beispiel Computer eingesetzt und benützt werden können.

Der Punkt „kritisches Denken“ wird wie folgt näher erläutert: „Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen; Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle; Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen; Überlegen von Bedeutungen mathematischer Methoden und Denkweisen;“, und beschreibt damit einige wichtige Aspekte der Statistik, ebenso wie der Punkt „Darstellung und Interpretation“: „verbales, formales oder graphisches Darstellen von Sachverhalten; (…); Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen; Erstellen und Interpretieren von mathematischen Modellen außermathematischer Sachverhalte.“
(http://www.bmukk.gv/schulen/unterricht/lp/Lehrplaene_AHS1539.xml)

Das sehr umfangreiche Kapitel der Statistik leistet seinen Beitrag in nahezu allen weiteren Bildungsbereichen, allen voran aber in „Natur und Technik“, „Mensch und Gesellschaft“ und – für den fächerübergreifenden Unterricht Bewegung und Sport/ Mathematik nicht uninteressant – „Gesundheit und Bewegung“ (Kalorientabellen, Energieverbrauch, usw.).

In der Planung meines „Unterrichtsmodells“ zur Wiederholung der deskriptiven Statistik und Einführung in die beurteilende Statistik habe ich vor allem die folgenden didaktischen Grundsätze des Lehrplans beachtet:

- Systematisches und situationsbezogenes Lernen, verständnisvolles Lernen

Durch verständnisvolles Lernen, also durch selbstständiges aktives Arbeiten, Erforschen, Darstellen und Reflektieren sollen die Schüler ein konstruktives Verhältnis zur Mathematik aufbauen. Es gilt auf eine Ausgewogenheit zwischen systematischem und situationsbezogenem Lernen unter Beachtung von Fragestellungen aus der Praxis zu achten.

- Unterrichtsformen

„Einzelarbeit, Partnerarbeit, Gruppenarbeit und projektorientierter Unterricht sollen die bestimmenden Unterrichtsformen des Mathematikunterrichts sein.“
(http://www.bmukk.gv/schulen/unterricht/lp/Lehrplaene_AHS1539.xml)
Durch den fächerübergreifenden Unterricht werden diese Unterrichtsformen nicht vernachlässigt, auch wenn die klassische Form des Frontalunterrichts in manchen Situationen und bei Behandlung gewisser Kapitel als durchaus angebracht und zeitsparend erscheint.

- Motivierung der Schüler

Die Schüler sollen die Nützlichkeit der Mathematik in unterschiedlichen Wissens- und Lebensbereichen durch Problemstellungen aus ihren Interessensgebieten kennen lernen. Auch wenn nicht alle Schüler sportlich interessiert sind, so stellen Beispiele und Aufgaben aus diesem Bereich für die meisten mit Sicherheit einen größeren Anreiz dar, als wenn lediglich Schulnoten und Körpergrößen graphisch dargestellt werden, beziehungsweise die Längen von Nägeln und Schrauben untersucht werden.

- Unterrichten in Phasen, Vernetzung, Querverbindung

„Querverbindungen zu anderen Unterrichtsgegenständen sowie zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler sind herzustellen.“
(http://www.bmukk.gv/schulen/unterricht/lp/Lehrplaene_AHS1539.xml)

- Individualisierung und Differenzierung

Mathematische Probleme aus dem Alltag sollen mit Hilfe thematischer Schwerpunkte gelöst werden. Der Lehrer hat die Aufgabe vielfältige mathematische und didaktische Zugänge zu schaffen. Durch die Erfassung und Verarbeitung der Fünfkampfdaten in der Kleingruppe werden sich automatisch unterschiedliche Darstellungs- und Lösungswege ergeben, die anschließend auch in der Klasse hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile diskutiert werden sollen.

- Lesen mathematischer Texte, Fachsprache

In der vorliegenden Arbeit trifft man immer wieder auf Aufgaben, bei denen Schüler selbst (Text-)Aufgaben erfinden oder Erklärungstexte verfassen sollen. Ziel dieser Aufgaben ist es, die Schüler im Umgang mit der mathematischen Sprache und Symbolik zu schulen, sodass mathematische Sachverhalte schneller verstanden und präzise formuliert werden können. Gleichzeitig soll der Nutzen von Formelsammlungen und Tabellen erkannt und der Umgang mit ihnen erlernt werden.

- Arbeiten mit dem Taschenrechner und dem Computer

Laut Lehrplan sind bereits ab der 1. Klasse vielfältige Einsatzmöglichkeiten für den Computer im Unterricht gegeben. Einerseits als Informationsquelle, andererseits auch zur Bearbeitung mathematischer Fragestellungen. Der Computer soll im Bereich der Statistik zur Analyse und kritischen Betrachtung statistischer Darstellungsformen, sowie zur Berechnung der Lagekennzahlen in der beschreibenden Statistik mit Hilfe des Office Programms Excel eingesetzt werden.

- Historische Betrachtungen

Die Schüler sollen einige Persönlichkeiten aus der Geschichte der Mathematik kennen lernen. Das erscheint mir sehr wichtig, da die Mathematik für viele Kinder und Jugendliche ein scheinbar ungreifbares, vom Himmel gefallenes Phänomen darzustellen scheint. Durch die Behandlung von Biographien kann man den Schülern einen persönlicheren Zugang bieten, sodass sie erkennen, dass auch die Mathematik nicht „vom Himmel gefallen“ ist, sondern von Menschen entdeckt und erforscht wurde (und wird).

Der Lehrstoff „Arbeiten mit Modellen, Statistik“ der AHS Unterstufe soll an dieser Stelle skizziert werden (http://www.bmukk.gv/schulen/unterricht/lp/Lehrplaene_AHS1539.xml).

1. Klasse

- Direkte Proportionalität
- Berechnungen durchführen, Fragestellungen finden
- Modelle mit realen Gegebenheiten vergleichen
- Überlegungen zum Sinn von Modellen für die Praxis
- Anwendung von graphischen Darstellungen und Tabellen

2. Klasse

- Kennzahlen direkter/ indirekter Proportionalitäten an Beispielen
- Formulierung, graphische Darstellung und Lösung einfacher Fragestellungen
- Ermittlung relativer Häufigkeiten
- Anfertigung und kritische Betrachtung graphischer Darstellungen
- Erkennen von Manipulationsmöglichkeiten

3. Klasse

- Untersuchung linearer Wachstums- und Abnahmeprozesse mit Hilfe elektronischer Rechenhilfsmittel
- Erkennen funktionaler Abhängigkeiten, graphische und formelmäßige Darstellung
- Darstellung und Untersuchung von Datenmengen

4. Klasse

- Untersuchung von Wachstums- und Abnahmeprozessen mit Hilfe elektronischer Rechenhilfsmittel
- Untersuchung und Darstellung funktionaler Abhängigkeiten

- Untersuchung und Darstellung von Datenmengen mit Hilfe statistischer Kennzahlen (Mittelwert, Median, Quartile, relative Häufigkeit, Streudiagramm, …)

1.4.2 Statistik in der Oberstufe

Bildungs- und Lehraufgabe des Mathematikunterrichts in der AHS Oberstufe ist es, den Schülern die Wichtigkeit des „Lernens fürs Leben“ zu vermitteln. Die Vermittlung analytisch-folgerichtigen Denkens und mathematischer Kompetenzen ist damit unumgänglich. „Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende tiefe Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.“

(http://www.bmukk.gv/schulen/unterricht/lp/ahs_lehrplaene_oberstufe.xml)

Was sind mathematische Kompetenzen?

Im Lehrplan wird von Kompetenzen gesprochen, die sich auf Kenntnisse beziehen, also jene, die sich durch die Vertrautheit mit mathematischen Inhalten aus allen Bereichen auszeichnen, von Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen, sich durch die Verbindung mathematischer Begriffe mit entsprechenden Grundvorstellungen definieren und von Kompetenzen über mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten.

Letztere äußern sich zum Beispiel durch darstellend-interpretierendes Arbeiten („Übersetzung“ der Alltagssprache in eine mathematische und umgekehrt), experimentell-heuristisches Arbeiten oder kritisch-argumentatives Arbeiten.

In Bezug auf die didaktischen Grundsätze ergänze ich zu jenen der Unterstufe einige Punkte, die mir für den Statistikunterricht relevant erscheinen:

Durch praxisorientierte Inhalte kann die Nützlichkeit der Mathematik im Alltag hervorgehoben werden. Für den Erwerb neuer Fähigkeiten und neuen Wissens ist deshalb ein fächerübergreifender Unterricht – zumindest sequenzweise – anzustreben.

Da der Unterricht zum Teil fächerübergreifend erfolgt, im Sport erhobene Daten im Mathematikunterricht bearbeitet und analysiert werden, andererseits auch während des Sportunterrichts die eine oder andere Frage zum Thema Statistik auftreten und behandelt werden kann, wird sich wahrscheinlich ein eher konstruktives Klima zwischen den Schülern sowie teilweise auch zwischen Lehrern und Schülern einstellen. Damit ergäbe sich, entsprechend dem didaktischen Grundsatz „Lernen im sozialen Umfeld“, ein situationsbezogener Wechsel der Sozialform.

Im Zuge des Sportunterrichts können auch (während des Aufwärmens oder Cool Down zum Beispiel) Vor- und Nachteile verschiedener Zugänge und Methoden der Datenerhebung erläutert, diskutiert und eventuell auch ausprobiert werden. Dieses Vorgehen entspricht der minimalen Realisierung des im Lehrplan beschriebenen didaktischen Grundsatzes „Lernen unter vielfältigen Aspekten“.

(http://www.bmukk.gv.at/schulen/ unterricht/lp/ahs_lehrplaene_ oberstufe.xml)

Computer sollten von den Schülern einerseits zur Internetrecherche herangezogen werden um selbst nach Tabellen und Statistiken zu suchen, andererseits sollten sie im Unterricht unter Verwendung des MS Excel Programms ihren Nutzen finden. Die Schüler sollen in der Lage sein, einfache Graphen und Tabellen zu erstellen sowie die wichtigsten Lagekennzahlen mit Hilfe des Programms zu berechnen. Des Weiteren sollen Zeitungen und Fernsehberichte nach statistischen Angaben durchforstet werden um den Schülern den Bezug der Statistik zum Alltag zu verdeutlichen. Mit den eben angeführten Anforderungen werden auch die letzten beiden der didaktischen Grundsätze des Mathematik Lehrplans für die AHS Oberstufe, „Lernen mit medialer und technischer Unterstützung“, erfüllt.

Skizzierung des Lehrstoffes „Stochastik“ in der AHS Oberstufe
(http://www.bmukk.gv.at/schulen/ unterricht/lp/ahs_lehrplaene_ oberstufe.xml):

5. Klasse

- Keine Inhalte zu diesem Kapitel vorgesehen. Diese wurden in die 6. Klasse verlegt, um den „Roten Faden“ der Statistik von der 6. bis 8. Klasse durchzuziehen und diesen nicht zu unterbrechen da sonst voraussetzende Inhalte vergessen werden können http://www.gemeinsamlernen.at

6. Klasse

- Beschreibende Statistik: Darstellungsformen und Kennzahlen
- Beschreibung von Ereignissen durch Mengen, Kenntnis des Begriffs Zufallversuch
- Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil, als relative Häufigkeit und subjektives Vertrauen
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe gegebener Wahrscheinlichkeiten, Additions- und Multiplikationsregel, Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes (optional)

7. Klasse

- Diskrete Zufallsvariable, diskrete Verteilung
- Zusammenhänge:
    - relative Häufigkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsverteilung
    - Mittelwert und Erwartungswert
    - Empirische Varianz und Varianz

8. Klasse

- Kennen der Begriffe stetige Zufallsvariable und stetige Verteilung
- Arbeiten mit der Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen
- Kennen und Interpretieren von statistischen Hypothesentests und von Konfidenzintervallen

2 Beschreibende Statistik

Vor Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Beurteilenden Statistik sollen die wesentlichen Begriffe der deskriptiven Statistik noch einmal wiederholt und geübt werden.

Wegen der besseren Übersicht werden die wichtigsten Definitionen und Merksätze genannt und explizit in einem Rahmen dargestellt. Ähnlich wie in den meisten Lehrbüchern wird zu Beginn jedes Kapitels ein Beispiel zur Veranschaulichung angeführt, im Anschluss wird eine Reihe an sportbezogenen Aufgaben geboten, aus denen sich jeder Lehrer selbst die für sie wesentlichsten aussuchen kann. Im Anhang findet sich eine Zusammenfassung der wichtigsten Formeln der deskriptiven Statistik in Form eines Merkblattes.

Der zeitliche Rahmen des Mathematikunterrichts würde die Behandlung aller Kapitel und Beispiele der deskriptiven Statistik zum Zweck der Wiederholung vor Beginn der Wahrscheinlichkeitstheorie sprengen, weshalb zum Beispiel die Behandlung der Quartile im Vorhinein ausgelassen wurde. Drei bis vier Unterrichtseinheiten inklusive Hausübungen sollten zur Wiederholung ausreichend sein.

Steht ein Computerraum zur Verfügung, in dem die Schüler alleine oder höchstens zu zweit an einem Computer arbeiten können, so empfiehlt sich neben dem Theorieteil auch die Wiederholung einfacher Darstellungsmöglichkeiten mit Hilfe des Excel Programms (siehe Kapitel 3), das den Vorteil hat, dass die Schüler den Umgang damit meist gewohnt sind, sodass zeitaufwändige Programmerklärungen wegfallen und sie graphische Darstellungen deshalb leicht selbst in Präsentationen und Referaten einbauen können.

Um den Unterricht möglichst praxisnah zu gestalten, sollen am besten schon während des Theorieteils, im Zuge des Sportunterrichts, die Daten eines 5–Kampfes erhoben und anschließend im Mathematikunterricht, dem Lehrplan entsprechend, dargestellt und analysiert werden. Der Unterricht erfolgt teilweise in Gruppenarbeit.

Oberstes Bildungsziel der beschreibenden Statistik ist das Verstehen und Beherrschen eines gewissen Maßes an statistischen Grundkenntnissen, ohne das die Schüler Probleme bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Beurteilenden Statistik haben werden. Sie sollen in der Lage sein die wichtigsten Begriffe (Mittelwert, Varianz, usw.) auch anderen erklären zu können, einfache Tabellen und graphische Darstellungen anhand qualitativer und quantitativer Merkmale erstellen und Kennzahlen der Lage und Streuung benennen und berechnen können.

Eine Zusammenfassung der grundlegenden Formeln ist in Anhang 2 zu finden. Des Weiteren werden grundlegende Kenntnisse in der Klasseneinteilung, der MS Excel-Anwendung und hinsichtlich der Abhängigkeit zweier Merkmale gefordert.

Ein weiteres nicht außer Acht zu lassendes Ziel ist die Motivation der Schüler zur Wahrscheinlichkeit und beurteilenden Statistik. Sie sollen Möglichkeiten und Grenzen der beschreibenden Statistik in dem Sinne erfahren, als dass sie die Wahrscheinlichkeitsrechnung sozusagen als „den Schlüssel" zur Behandlung weiterer statistischer Fragestellungen erkennen.

2.1 Begriffserklärungen

Man geht von **Merkmalen** wie zum Beispiel Lieblingssportart, Haarfarbe, Einkommen, usw. aus und unterteilt diese in qualitative und quantitative Merkmale. Die möglichen Werte all dieser Merkmale bezeichnet man als **Merkmalsausprägungen**. Merkmalsausprägungen des Merkmals Lieblingssportart wären beispielsweise Leichtathletik, Skifahren, Eishockey, usw. Erhobene Merkmalsausprägungen werden **statistische Daten** genannt und in der sogenannten **Urliste** festgehalten, die meist in Form einer Tabelle mit Strichlisten dargestellt wird. Mit Hilfe dieser Strichliste kann auf einfache Weise eine Häufigkeitstabelle erstellt werden (siehe Kap. 2.2.1).

Qualitative Merkmale (z.B. Augenfarbe, Beruf, usw.) weisen keine zahlenmäßigen Angaben auf. Um mit diesen Daten trotzdem statistisch arbeiten zu können müssen ihre Merkmalsausprägungen verschlüsselt werden. Zum Beispiel: Blutgruppe 0 = 0, Blutgruppe A = 1, Blutgruppe B = 2, Blutgruppe AB = 3.

Doch auch wenn die Daten nun in Form von Zahlen vorliegen macht es wenig Sinn, damit numerisch zu rechnen. (Denn was haben wir davon zu wissen, dass die durchschnittliche Blutgruppe 1,57 beträgt!?).

Quantitative Merkmale (z.B. Gewicht, 100m-Laufzeit, usw.) sind durch Angaben in Zahlen bestimmt. Sie werden weiter in diskrete und stetige Merkmale unterteilt. Diskrete Merkmale nehmen ganzzahlige Werte an, da ihre Merkmalsausprägungen durch Abzählen entstehen, stetige Merkmale können innerhalb eines bestimmten Wertebereichs jeden Wert beliebig oft annehmen.

Willimczik (1999) nennt als eine Aufgabe der beschreibenden Statistik das Ordnen und übersichtliche Darstellen statistischer Einzeldaten mit Hilfe „charakteristischer Maßzahlen“ durch Graphiken und Tabellen. Dazu werden Kennzahlen, auch Parameter genannt, wie Mittelwert, mittlere Abweichung, Streuung, etc. ermittelt und nach möglichen Zusammenhängen untersucht. Sie liefern Informationen über den gesamten Stichprobenumfang, meist gehen dabei allerdings Informationen über das gesammelte Datenmaterial, die Urliste verloren.

Den Lesern können Informationen statistischer Graphiken und Aussagen durch entsprechende Manipulationen vorenthalten werden. Außerdem können Graphiken so dargestellt werden, dass die Betrachter zu Fehlinterpretationen verleitet werden. Grundlegende Kenntnisse über statistische Darstellungsformen und Interpretationsmöglichkeiten können also vor Leichtgläubigkeit schützen, indem sie es den Lesern ermöglichen, Graphiken kritischer zu betrachten und statistische Aussagen aus den Medien nicht unreflektiert anzunehmen.

Für Reichel (1992, S. 11) ergeben sich daraus folgende Fragestellungen für die mathematische Statistik:

- Was lässt sich mit Hilfe von Daten aus Erhebungen tatsächlich beweisen?
- Wie „genau“ sind Angaben, die man aus Erhebungen erhalten kann?

Aus der Behandlung dieser Fragen, die über den Aufgabenbereich der deskriptiven Statistik hinausgeht, das heißt es werden Schlussfolgerungen gezogen, Beurteilungen und Vergleiche angestellt, ergibt sich der Zusammenhang zur beurteilenden/ Interferenzstatistik.

Die Autoren von Reichel (1992, S. 12) beschreiben den Zusammenhang zwischen beschreibender Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilender Statistik wie folgt: „(…) trägt aber eine Vorauskenntnis und Vertrautheit der einfachsten Grundlagen und Probleme der beschreibenden Statistik Wesentliches zu einem besseren (und „wirklichen“) Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffes und seiner elementaren Theorie bei.“

Aus diesem Grund verfolgen weitgehend alle Lehrbücher der AHS Oberstufe diesen systematischen Aufbau.

2.2 Darstellungsformen und Häufigkeitsverteilungen

Eine Datenmenge kann mittels absoluter Häufigkeiten, relativer Häufigkeiten und prozentueller Häufigkeiten ausgewertet werden.
Die Gesamtzahl aller Beobachtungen wird als **Stichprobenumfang** bezeichnet, die **absolute Häufigkeit** (h) gibt darüber Auskunft, wie oft ein bestimmtes Ereignis in einer Beobachtungsserie auftritt.
Die **relative Häufigkeit** (r) ist der Quotient aus absoluter Häufigkeit und Gesamtzahl der Beobachtungen: relative Häufigkeit $r = \dfrac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Stichprobenumfang}}$
Die **prozentuelle Häufigkeit** gibt die Häufigkeit in Prozent an.

Gegeben sei eine Liste von insgesamt n Werten, von denen m verschieden sind. Diese Werte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ treten mit den absoluten Häufigkeiten $h_1, h_2, \ldots, h_m$ und den relativen Häufigkeiten $r_1, r_2, \ldots, r_m$ auf.
Es gilt: $h_1 + h_2 + \ldots + h_m = n$ und $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = 1$

Beispiel 1:

Die Schüler der 7S müssen bei der Anmeldung für den Schulskikurs die Wahl der Sportart angeben. Die Sportlehrerin trägt die Anzahl der Anmeldungen pro Sportart in eine Tabelle ein:

Tabelle 1: Wahl der Wintersportart

	Strichliste	absolute HK	relative HK	prozentuelle HK
Ski Alpin	IIII			
Ski + Snowb.	IIIII II			
Snowboard	IIIII IIIII II			
Langlauf	II			

a) Wie viele Schüler fahren insgesamt auf Skikurs (=Stichprobenumfang)?

b) Trage die Anzahl der Schüler pro gewählter Sportart (absolute Häufigkeit) in die Tabelle ein.

c) Trage den Anteil an der Gesamtschülerzahl in die Tabelle ein (relative Häufigkeit).

d) Berechne die prozentuellen Häufigkeiten und trage sie in die Tabelle ein.

e) Welche Sportart wurde am häufigsten gewählt?

f) Stelle die absoluten Häufigkeiten in einem **Balkendiagramm** dar.

g) Stelle die prozentuellen Häufigkeiten in einem **Kreisdiagramm** dar!

Lösung:

a) Gesamtzahl: 25

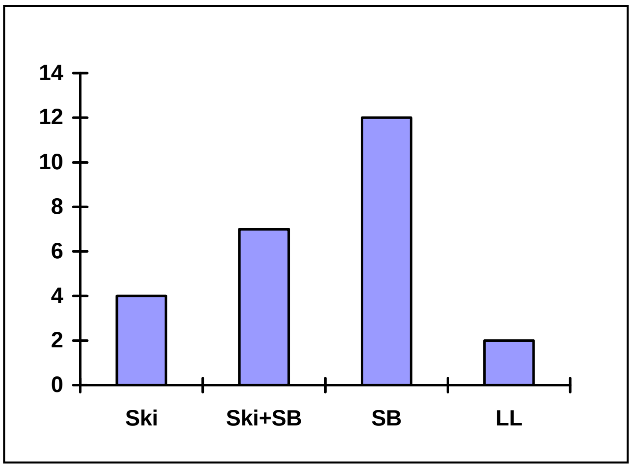
b) c) d)

Tabelle 2: Häufigkeiten der Wahl der Wintersportart

	Strichliste	absolute HK	relative HK	prozentuelle HK
Ski Alpin	IIII	4	4/25	4/25 = 0,16 = 16 %
Ski + Snowb.	IIIII II	7	7/25	7/25 = 0,28 = 28 %
Snowboard	IIIII IIIII II	12	12/25	12/25 = 0,48 = 48 %
Langlauf	II	2	2/25	2/25 = 0,08 = 8 %

e) Die am häufigsten gewählte Sportart ist Snowboard.

f) Balkendiagramm:



Die Länge der Balken beim Säulendiagramm muss proportional zur dargestellten Häufigkeit sein.

Abbildung 1: Balkendiagramm der gewählten Wintersportarten

g) Kreisdiagramm:

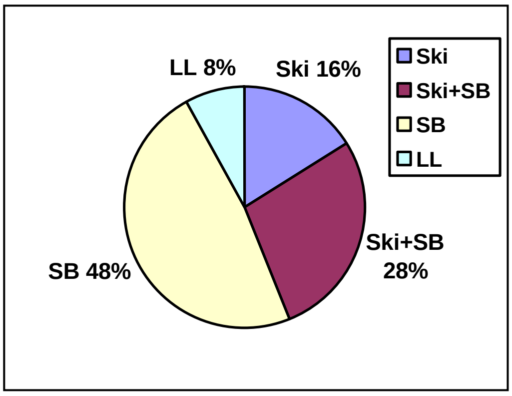


Abbildung 2: Kreisdiagramm der gewählten Wintersportarten

Die Größe des Mittelpunktwinkels α des zur Häufigkeit $h_n(x_i)$ gehörenden Kreissektors des Kreisdiagramms lässt sich durch $\alpha_i = h_n(x_i).2\pi$ oder $\alpha_i = h_n(x_i).360°$ berechnen.

Aufgabe 1:

Führt zu Beginn der nächsten Sportstunde eine kleine Umfrage über eure Lieblings-Ballsportart durch. Es kann gewählt werden zwischen B für Basketball, F für Fußball, V für Volleyball, H für Handball und T für Tennis.

a) Erstelle zu deiner Befragung die zugehörige Urliste und fertige eine Tabelle an!

b) Ermittle absolute, relative und prozentuelle Häufigkeiten der einzelnen Ballsportarten!

c) Zeichne ein Balkendiagramm und ein Kreisdiagramm. Welche Darstellungsform würdest du bevorzugen? Begründe deine Entscheidung!

Aufgabe 2:

a) Fußball-Europameisterschaft 08: Versuche die folgende Tabelle 3 in wenigen Sätzen zu erklären.

b) Errechne am Beispiel Niederlande absolute, relative und prozentuelle Häufigkeiten von Sieg, Unentschieden und Niederlage gemessen an der Gesamtzahl der Spiele und erstelle ein beliebiges Kreisdiagramm. Warum gibt es bei anderen Nationen Probleme und wie könnte man sie lösen?

Tabelle 3: Ewige Endrunden-Tabelle (http://www.oefb.at/show_page.php?pid=539)

Rang	Verband	Teilnahmen	Spiele	Siege	Unentschieden	Niederlagen	Tore	Punkte
1.	Deutschland	10	38	19	10	10	55:38	67
2.	Niederlande	8	32	17	8	7	55:32	59
3.	Spanien	8	30	14	8	8	38:31	50
4.	Frankreich	7	28	14	7	7	46:34	49
5.	Italien	7	27	11	11	5	27:18	44
6.	Tschechien	7	25	12	5	9	38:30	41
7.	Portugal	5	23	12	4	7	34:22	40
8.	England	7	23	7	7	9	31:28	28
9.	GUS*	6	16	7	4	5	18:16	25
10.	Dänemark	7	24	6	6	12	26:38	24

Aufgabe 3:

Der Betreuungsarzt eines Handballteams erstellt für den Zeitraum eines Jahres folgende Tabelle:

Tabelle 4: Verletzungen eines Handballteams in einem Jahr

Verletzungsbereich	Anzahl der Verletzungen
Untere Extremitäten	12
Rumpf	9
Obere Extremitäten	8
Kopf	7

a) Bestimme die relativen Häufigkeiten gemessen an der Gesamtzahl aller Verletzungen.

b) Wie viel Prozent der Verletzungen entfallen auf die Extremitäten?

Aufgabe 4:

Bei der Kontrolle von 220 neuen Leichtathletik Speeren lagen 4 über dem zulässigen Gewicht von 800g. Die Speere stammten aus einer Produktion von 1300 Stück. Schätze, wie viele Speere der Gesamtproduktion vermutlich über dem zulässigen Gewicht liegen.

> In einem **Piktogramm** werden Häufigkeiten graphisch durch Symbole oder Bilder dargestellt, wobei jedes für eine gewisse Anzahl oder Größe steht.

Beispiel 2:

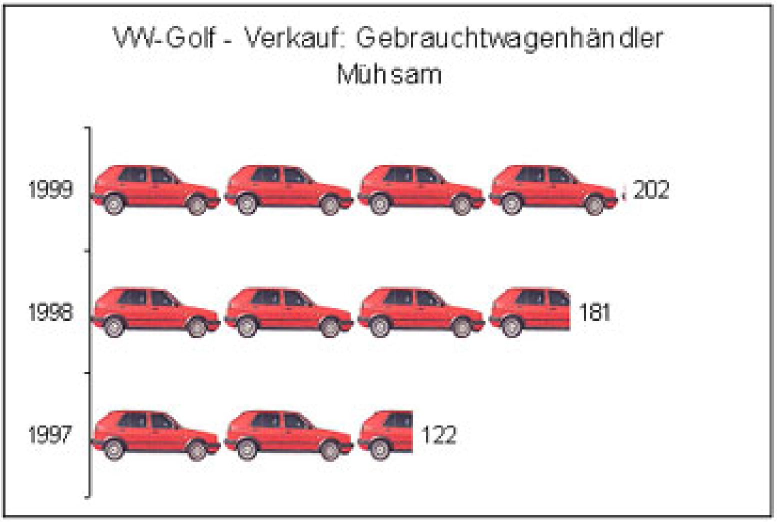


Abbildung 3: Beispiel eines Piktogramms
http://www.stat4u.at/main.asp?VID=1&kat1=54&kat2=338&kat3=246)

Betrachte das Piktogramm aus Abbildung 3.

a) Diskutiert Kritikpunkte dieser Darstellungsform.

b) Welche Angaben entsprechen in etwa welchen Häufigkeiten?

c) Zeichne zum Vergleich ein Balkendiagramm.

Lösung:

a) Kritikpunkte:

- Autos sind schlechte Darstellungsformen, weil beim schnellen Hinschauen der Eindruck erweckt wird, es würden auch halbe Autos verkauft werden.

- Die Zahlenangaben geben mehr Aufschluss als die Graphik, ein einfaches Balkendiagramm (vgl. c) hätte gereicht.
- usw.

b) ein Auto steht für etwa 50 verkaufte Wagen

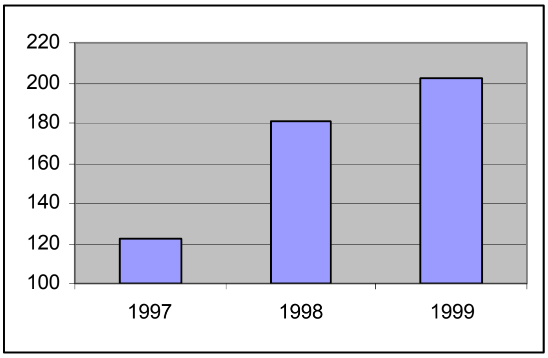
c) 

Abbildung 4: Balkendiagramm verkaufter Autos

Aufgabe 5:

In folgender Tabelle werden die Zuschauerzahlen der Fußball-EM dargestellt.

a) Stelle die Anzahl der Besucher von 1980 und 1984 in einem Piktogramm dar.

b) Stelle die Anzahl der Besucher von 2004 und 2008 in einem Piktogramm dar.

Wo treten Schwierigkeiten auf? Diskutiert alternative Darstellungsformen!

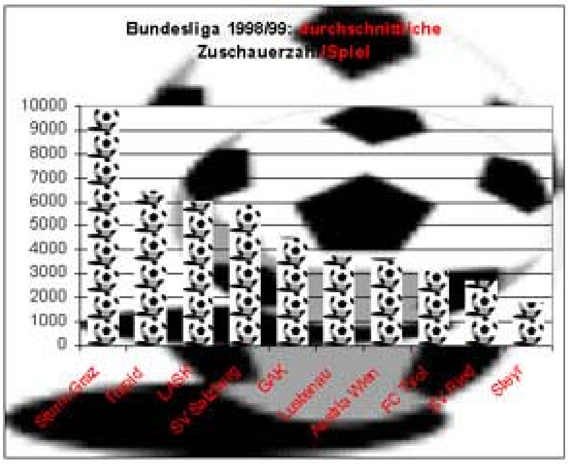
Tabelle 5: Zuschauerzahlen der Fußball-EM (http://www.news.at/?/articles/0826/270/210829.shtml)

Gesamtbilanz		204	7,634.469	37.424
1960	Frankreich	4	78.958	19.740
1964	Spanien	4	156.253	39.063
1968	Italien	5	192.119	38.424
1972	Belgien	4	106.510	26.628
1976	Jugoslawien	4	106.087	26.522
1980	Italien	14	350.655	25.047
1984	Frankreich	15	599.655	39.977
1988	Deutschland	15	935.681	62.379
1992	Schweden	15	429.623	28.642
1996	England	31	1,269.894	40.964
2000	Belgien/Niederlande	31	1,102.850	35.576
2004	Portugal	31	1,165.192	37.587
2008	Österreich/Schweiz	31	1,140.992	36.806

Aufgabe 6:

Welche Eindrücke erzeugen die folgenden Darstellungsformen?

Erarbeite Kritikpunkte und Möglichkeiten zur Verbesserung.



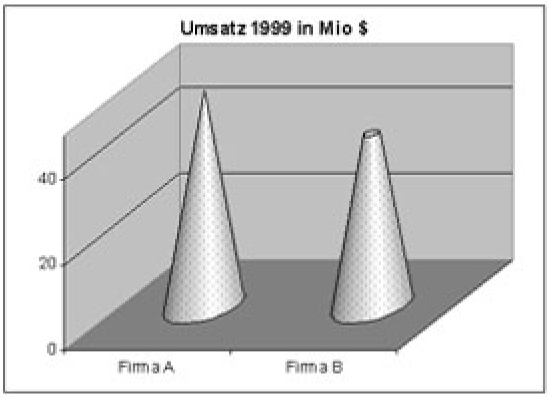


Abbildung 5: Zuschauerzahlen Bundesliga **Abbildung 6: Umsätze zweier Firmen**
(http://www.stat4u.at/main.asp?kat1=54&kat2=338&kat3=251&vid=1)

Aufgabe 7:

a) Erstelle das passende Piktogramm zu Aufgabe 1.

b) Vergleiche anschließend mit deinen Sitznachbarn. Wie unterscheiden sich die Piktogramme, was haben sie gemeinsam?

c) Diskutiert Vor-/Nachteile eines Piktogramms gegenüber anderer Diagramme.

2.3 Mittelwert (arithmetisches Mittel)

Mittelwert (arithmetisches Mittel) $= \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind die einzelnen Werte, n gibt die Anzahl aller Werte an.

Beispiel 3:

Der Trainer einer Leichtathletikmannschaft muss für die Buchhaltung Aufzeichnungen über die Vereinsausgaben bei Wettkämpfen machen. Bei den vergangenen Wettkämpfen kamen für

Transport, Unterkunft, Verpflegung und Nenngebühren Ausgaben in etwa folgender Höhe zusammen:

679€, 915€, 783€, 860€, 832€, 965€;

a) Stelle die ausgegebenen Beträge in einem Balkendiagramm dar.

b) Berechne den Mittelwert!

c) Berechne die Abweichungen vom arithmetischen Mittel und zeige, dass die Summe der Abweichungen unter dem Mittelwert der Summe der Abweichungen über dem Mittelwert entspricht.

Lösung: a)

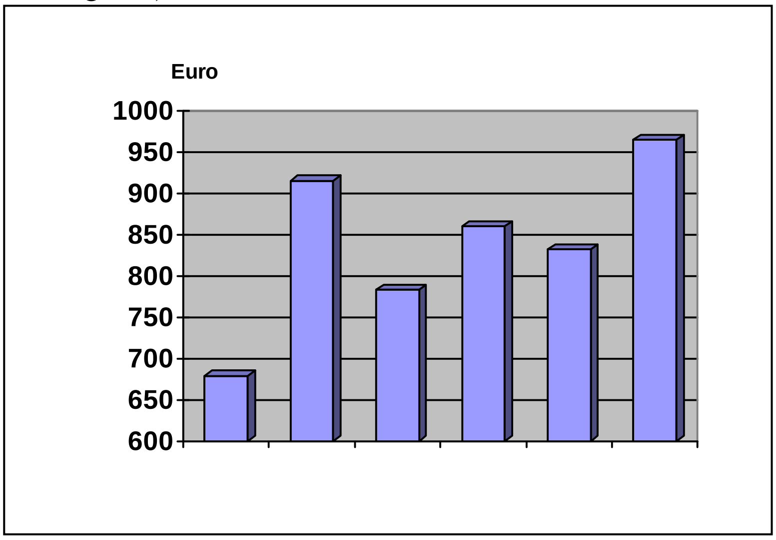


Abbildung 7: Balkendiagramm Vereinsausgaben

b) $\bar{x} = \frac{679 + 915 + 783 + 860 + 832 + 965}{6} = \frac{5034}{6} = 839\ €$

c)

839 – 679 = 160 € unter dem Mittelwert	860 – 839 = 21 € über dem Mittelwert
915 – 839 = 76 € über dem Mittelwert	839 – 832 = 7 € unter dem Mittelwert
839 – 783 = 56 € unter dem Mittelwert	965 – 839 = 126 € über dem Mittelwert

160 + 56 + 7 = 223 € 76 + 21 + 126 = 223 €

Aufgabe 8:

Die Schultaschen der Schüler sind häufig zu schwer und verursachen damit sehr früh Haltungsschwächen bzw. muskuläre Dysbalancen. Die Schultaschen einiger Schüler einer ersten Klasse wurden gewogen (Angabe in kg):

5,6 4,8 6,1 6,0 5,2 5,9 7,4 4,9 5,4 7,3

a) Stelle die gemessenen Werte in einem geeigneten Balkendiagramm dar!

b) Berechne den Mittelwert und zeichne ihn als waagrechte Linie im Diagramm ein.

c) Berechne die Abweichungen vom Mittelwert.

d) Was würdest du den Schülern raten um das Gewicht der Schultaschen möglichst gering zu halten?

Aufgabe 9:

Das Leichtathletik Team für das aktuelle Schuljahr soll zusammengestellt werden. Vier Schüler kämpfen noch um zwei übrige Plätze im Team, die diejenigen mit den besten durchschnittlichen Weitsprungleistungen (Angaben in m) bekommen sollen!

Tabelle 6: Weitsprungleistungen in m

Andreas	**Dominic**	**Patrick**	**Philipp**
4,25	4,73	4,91	4,39
4,55	4,19	ungültig	5,01
4,30	4,67	4,63	4,95
4,81	4,73	4,87	4,45
4,27	4,80	4,25	4,19

a) Wer kommt nun ins Leichtathletik Team?

b) Warum könnten die Trainer diejenigen mit der durchschnittlich besten Leistung und nicht diejenigen mit der höchsten gesprungenen Weite ins Team aufnehmen? Diskutiert in der Klasse!

Bei der Ermittlung des arithmetischen Mittels von Werten muss man die Häufigkeiten (Gewichte) gleicher Werte berücksichtigen.
Man nennt die Zahl

$$\bar{x} = \frac{x_1.h_1 + x_2.h_2 + \ldots + x_m.h_m}{n} = x_1.r_1 + x_2.r_2 + \ldots + x_m.r_m$$ das **gewogene Mittel** und

die Zahl

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2.h_1+(x_2-\bar{x})^2.\ h_2+\ldots+(x_m-\bar{x})^2.\ h_m}{n-1}}$$ die **Standardabweichung** oder **Streuung**

aller Werte um ihren Mittelwert $\bar{x}$.

Aufgabe 10:

Zwei Schulklassen nehmen für wohltätige Zwecke an einem Benefizlauf teil. Pro gelaufene Runde um das Fußballfeld (das entspricht einer Strecke von 400m) werden 20 Cent an ein Kinderheim gespendet. Eine verletzte Mitschülerin notiert sich die Anzahl der gelaufenen Runden jedes Schülers:

Klasse 1:

3	10	8	7
7	6	6	5
5	9	6	3
5	3	4	4
4	6	7	5

Klasse 2:

7	6	9	8
6	4	4	5
11	8	7	
4	5	6	
5	10	3	

a) Welche Klasse hat mehr gespendet?

b) In welcher Klasse haben die SchülerInnen durchschnittlich mehr gespendet?

c) Stelle die Häufigkeiten der gelaufenen Runden jeder Klasse in einem Balkendiagramm dar.

d) Versuche, den Mittelwert der gelaufenen Runden aller SchülerInnen auf zwei Arten zu berechnen. Welches Ergebnis ist nun das Genauere? Diskutiert in der Klasse!

Achtung!
Das arithmetische Mittel darf nicht stückweise berechnet werden!

Aufgabe 11:

Die Teilnehmerin eines Turnwettkampfes erhält am Stufenbarren folgende Wertungen:

8,7; 9,0; 9,1; 8,9; 8,9; 9,3;

a) Berechne den Mittelwert!

b) Warum werden bei Turnwettkämpfen bei der Berechnung des Mittelwertes die niedrigste und höchste Punktezahl nicht berücksichtigt? Berechne den Mittelwert ohne niedrigste und höchste Punktezahl!

c) Berechne die Standardabweichung!

d) Welche anderen Sportarten kennst du, bei denen die Punkte auf die gleiche Art berechnet werden?

Aufgabe 12:

Paul möchte seine Bauchmuskeln trainieren und beschließt deshalb, jeden Tag in der Früh Sit-ups zu machen. Die Anzahl der Wiederholungen (mit Pause) werden notiert:

Montag: 100	Donnerstag: 120
Dienstag: 150	Freitag: 100
Mittwoch: 90	Samstag: 80

a) Der Mittelwert der Wiederholungen von Montag bis Sonntag beträgt 110. Wie viele Sit-up´s hat Paul demnach am Sonntag gemacht?

b) Zeige durch Rechnen, dass die Summe aller Abweichungen vom Mittelwert gleich null ist.

c) Berechne die Standardabweichung!

2.4 Polygonbild

> Vielfach verbindet man in einem Stabdiagramm die Endpunkte der Strecken. Man spricht dann von einem **Polygonbild**.
> Das Polygonbild zählt neben dem Balkendiagramm zu den bekanntesten Darstellungsformen von Häufigkeiten. Bei beiden Darstellungen werden auf der x-Achse (Abszisse) die Messwerte und auf der y-Achse (Ordinate) die Häufigkeiten aufgetragen.

Beispiel 4:

Die folgende Tabelle 7 beinhaltet die Mitgliederstatistik der drei österreichischen Sport-Dachverbände von 1998 bis 2006 im zwei Jahres Abstand.

Stelle die Entwicklung der Anzahl der ASVÖ-Vereine in Niederösterreich in einem Polygonbild dar!

Tabelle 7: Mitgliederstatistik Dachverbände (http://www.bso.or.at/main.asp?kat1=10&kat2=129&kat3=&vid=1)

Jahr	Dachverband	Bgld.	Kärnten	NÖ	OÖ	Sbg.	Stmk.	Tirol	Vorarlbg.	Wien
	ASKÖ	267	506	712	632	269	724	327	106	507
1998	ASVÖ	470	328	252	398	265	389	638	521	275
	Sportunion	143	382	737	755	336	714	276	192	284
	ASKÖ	271	531	751	650	273	728	410	84	495
2000	ASVÖ	577	356	273	448	421	423	746	587	278
	Sportunion	158	398	756	779	363	735	289	199	298
	ASKÖ	271	506	847	656	297	737	488	70	493
2002	ASVÖ	615	367	274	464	434	457	792	615	294
	Sportunion	158	398	756	779	363	735	289	199	298
	ASKÖ	275	555	791	666	291	739	531	80	391
2004	ASVÖ	711	396	347	510	451	497	854	615	395
	Sportunion	158	398	756	779	363	735	289	199	298
	ASKÖ	k.A.								
2006	ASVÖ	777	406	390	512	484	566	936	650	469
	Sportunion	182	398	912	780	372	735	298	199	306

Lösung:

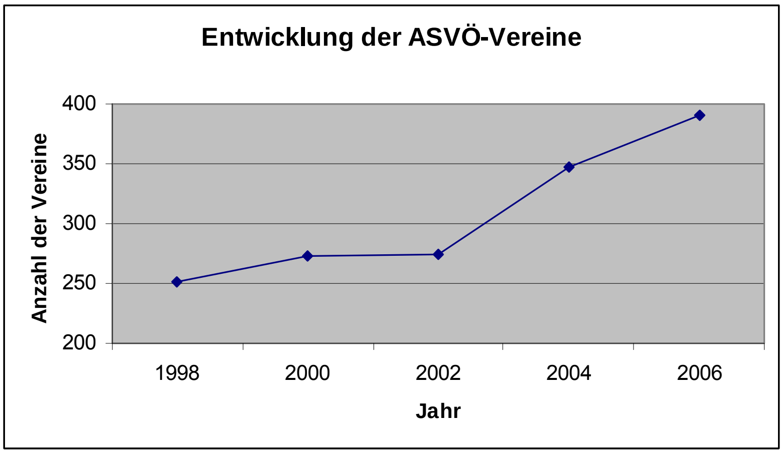


Abbildung 8: Entwicklung der ASVÖ-Vereine

Aufgabe 13:

Betrachte die Tabelle der Dachverbände aus dem letzten Beispiel.

Erstelle ein beliebiges Polygonbild!

Aufgabe 14:

Eine Firma erzeugt Tennisbälle. Folgende Tabelle zeigt die Entwicklung der Tennisballproduktion der letzten zehn Jahre (in Mio.).

Jahr	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Produzierte Bälle	1.386	1.422	1.265	1.143	1.159	1.107	1.099	1.039	1.046	0.944

a) Runde die Anzahl der produzierten Tennisbälle auf HT.

b) Stelle diese Werte als Polygonbild dar. Wie würdest du die Entwicklung der Produktion beschreiben?

c) Berechne den Mittelwert und zeichne ihn im Polygonbild ein.

Aufgabe 15:

In folgender Tabelle sollen die Anzahlen der Ski- bzw. Snowboardunfälle der letzten fünf Jahre eingetragen werden. Informationen dazu findest du auf: http://www.statistik.at!

	2003	2004	2005	2006	2007
Snowboard Unfälle					
Skiunfälle					

a) Stelle diese Werte in zwei verschiedenen Polygonbildern dar, indem du auf den Achsen unterschiedliche Intervalle aufträgst.

b) Zeichne weitere Polygonbilder mit diesen Werten. Wie wirken sich Vergrößerungen und Verkleinerungen der Einheitsstrecken auf die optische Wirkung des Diagramms aus?

c) Diskutiert Vor- und Nachteile unterschiedlicher Darstellungen in der Klasse.

Der optische Eindruck eines Diagramms kann auf verschiedenste Arten verfälscht werden. Durch die Wahl der Längen der Einheitsstrecken, also der Achsen, das Weglassen oder Zusammenfassen von Daten sowie durch die Betonung von Schwankungen indem man den Nullpunkt unterdrückt. Mit dieser Art der Darstellung kann ein falscher Eindruck erweckt werden, man spricht von **Manipulation**.

Aufgabe 16:

Sammelt aus Zeitungen, Magazinen, Internet usw. graphische Darstellungen statistischen Zahlenmaterials. Diskutiert diese in der Gruppe/ Klasse hinsichtlich ihrer Richtigkeit!

Aufgabe 17:

In folgendem Piktogramm wird der Absatz von Carving Skiern einer Firma der letzten Jahre angegeben (gerundet auf Hunderter).

Abbildung 9: Absatz von Carving Skiern

a) Welche Längen in den Figuren entsprechen in etwa welchen Zahlenangaben? Miss nach und ermittle den fehlenden Wert für das Jahr 2004.

b) Stelle mit Hilfe der Werte aus dem Diagramm einfache Vergleiche an!

c) Zeichne für obige Werte ein Kreisdiagramm sowie ein Polygonbild. Diskutiert Vor- und Nachteile der verschiedenen Darstellungsformen!

2.5 Kennzahlen der Lage

Zur Beschreibung einer statistischen Verteilung mit Hilfe von Zahlen verwendet man mehrere statistische Kennzahlen, die der Kennzeichnung des Verteilungszentrums, also der „Mitte" dienen. Man unterscheidet zwischen drei „Mittelwerten": dem arithmetischen Mittel, dem Median und dem Modus.

Der **Median** (Zentralwert) steht in der Mitte einer Rangliste. Er teilt die Rangliste in eine obere und eine untere Hälfte.
Bei einer ungeraden Anzahl an Werten ist der Median der Wert, der genau in der Mitte der Rangliste steht.
Bei gerader Anzahl der Werte bildet sich der Median aus dem arithmetischen Mittel der beiden in der Mitte stehenden Werte.

Beispiel 5:

a) 3, 3, 4, 6, **7**, 8, 8, 9, 10 → 7 ist Median!

b) 3, 3, 4, 6, **7, 8**, 8, 9, 10, 11 → Median ist das arithmetische Mittel von 7 und 8, also 7,5.

Der **Modus** (Modalwert) ist der am häufigsten vorkommende Wert in einer Messreihe. Es kann auch mehr als einen Modus geben!

Beispiel 6:

3, 3, 4, 6, 7, **8, 8**, 9, 10 → 3 und 8 sind Modalwerte!

2.6 Kennzahlen der Streuung

Die Streumaße geben an, wie weit eine Menge von Daten um das Zentrum herum „streut". Man sieht in Abbildung 8, dass die Werte der zweiten Verteilung stärker streuen, als die der ersten. Um das Ausmaß dieser Streuung zu beschreiben braucht man geeignete statistische Kennzahlen, sogenannte Dispersionsmaße.

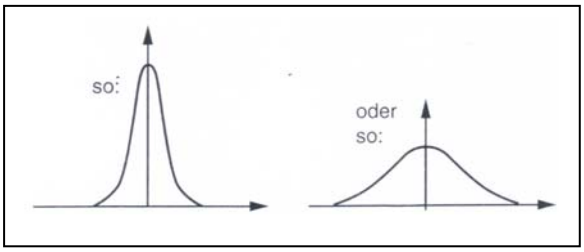


Abbildung 10: Streuung verschiedener Verteilungen (Lewisch, 2003, S. 242)

Das **Maximum** ist der größte Wert einer Datenmenge, das **Minimum** der kleinste. Wir bezeichnen sie mit $x_{\min}$ und $x_{\max}$.
Die **Spannweite einer Stichprobe *R*** (aus dem englischen „range") erhalten wir, indem wir die Differenz von Maximum und Minimum der Stichprobe bilden: $R = x_{\max} - x_{\min}$

Aufgabe 18:

Betrachte nachfolgende Tabelle der Fußball-EM 08 und überlege wie sinnvoll es ist, Mittelwert, Median und Modus sowie Min und Max zu ermitteln.

Die besten Torschützen der vergangenen Europameisterschaften (Endrunden) lauten wie folgt:

Tabelle 8: Rekordtorschützen (http://www.oefb.at/show_page.php?pid=539)

Tore	Name
9	Michel Platini (Frankreich)
7	Alan Shearer (England)
6	Patrick Kluivert (Niederlande)
5	Jürgen Klinsmann (Deutschland)
5	Zinedine Zidane (Frankreich)
5	Thierry Henry (Frankreich)

5	Marco van Basten (Niederlande)
5	Milan Baroš (Tschechien)
5	Savo Miloševi (Jugoslawien)

Die **mittlere Abweichung einer Stichprobe** bestimmen wir, indem wir für alle Messwerte jeweils die Abweichungen vom Mittelwert ausrechnen. Die Summe dieser Abweichungen wird schließlich durch die Anzahl der Messwerte dividiert. Die mittlere Abweichung gibt an, wie weit im Mittel die Einzelwerte vom Zentrum entfernt sind. Man spricht dabei auch von Streuung.

$$\text{Mittlere Abweichung} = \frac{\text{Summe aller Abweichungen vom Mittelwert}}{\text{Anzahl aller Abweichungen vom Mittelwert}}.$$

Bemerkung: Diese Formel soll dem besseren Verständnis der Streuung dienen. Kritisch betrachtet stellt sie keinen guten Schätzwert für die Abweichung dar.

Beispiel 7:

Urliste: 6, 8, 3, 3, 10, 4, 11, 7, 9, 8;

Rangliste: 3, 3, 4, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11;

Minimum: 3, Maximum: 11

Spannweite = Max – Min = 11 – 3 = 8

Mittelwert: $\frac{3+3+4+6+7+8+8+9+10+11}{10} = 6{,}9$

Mittlere Abweichung: $\frac{3{,}9+3{,}9+2{,}9+0{,}9+0{,}1+1{,}1+1{,}1+2{,}1+3{,}1+4{,}1}{10} = 2{,}32$

Aufgabe 19:

Die 6a beschließt, in der letzten Schulwoche eine mehrtägige Radrundfahrt entlang der Donau zu machen. In fünf Tagen werden folgende Wegstrecken zurückgelegt:

47km, 65km, 39km, 71km, 51km

a) Ermittle die zurückgelegte Gesamtstrecke und benenne Maximum und Minimum!

b) Berechne die Spannweite der Etappen.

c) Wie lange ist die durchschnittliche Etappenlänge? Berechne die mittleren Abweichungen!

Aufgabe 20:

Sylvia und Christian wollen testen, wer von ihnen das bessere „Zeitgefühl" hat. Sie lassen verdeckt jeweils eine Stoppuhr laufen und halten sie an, wenn ihrem Gefühl nach genau zehn Sekunden vergangen sind. Die gestoppten Zeiten werden notiert:

Sylvia: 8,7; 9,8; 10,1; 10,3; 9,3; 11,0; 10,7; 10,5; 9,5; 10,6;

Christian: 10,5; 9,4; 9,4; 9,9; 10,4; 8,9; 9,7; 10,9; 10,1; 9,2;

a) Gib Median und Modus für jedes einzelne Kind, sowie für alle Daten an!

b) Vergleiche die Stichproben anhand des Mittelwerts und der Spannweite!

c) Vergleiche sie ebenso anhand der mittleren Abweichung.

Welche Aussagen lassen sich daraus schließen?

Aufgabe 21:

Markus möchte sich für die nächste Wintersportwoche ein neues Snowboard kaufen. Er hat dafür sehr lange gespart und wird deshalb in dem Sportgeschäft einkaufen, in dem das Snowboard, das er gerne hätte, am wenigsten kostet. Er recherchiert in Zeitschriften, im Internet sowie in den Shops und erhält dabei folgende Preise (in €):

350 349 355 349,90 350 347 355,50

a) Gib Median und Modus an!

b) Berechne Mittelwert und Spannweite für den Preis des Snowboards sowie die mittlere Abweichung!

Je kleiner die mittlere Abweichung ist, umso enger liegen die Einzelwerte um den Mittelwert herum.

Aufgabe 22:

Stelle eine Formel für die mittlere Abweichung einer Stichprobe auf!

(Bezeichne die verschiedenen Messwerte mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die Anzahl der Werte mit n.)

Aufgabe 23:

Welche Behauptung stimmt? Mach dir Notizen/ Skizzen und diskutiere anschließend in der Klasse!

a) Je größer die Spannweite, umso aussagekräftiger ist das arithmetische Mittel.

b) Je kleiner die Spannweite, umso aussagekräftiger ist das arithmetische Mittel.

Aufgabe 24:

Die Schüler der 7a sollen sich beim Reckturnen in zwei gleich große Gruppen aufteilen. Die Kleinen zum niedrigen Reck und die Großen zum Höheren.

Ist für die Aufteilung der Mittelwert oder der Median entscheidend?

Die mittlere quadratische Abweichung vom arithmetischen Mittel der einzelnen Beobachtungen wird als **Varianz** bezeichnet:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

2.7 Klassenbildung

Liegen nach einer Datenerhebung sehr viele Messergebnisse vor, so werden diese in **Klassen** eingeteilt, indem man Dinge mit bestimmten gemeinsamen Merkmalen zusammenfasst. Zwar verliert der Einzelwert dabei an Bedeutung, dafür aber erhält man einen besseren Überblick.

Als Klasse wird eine Anzahl von Messwerten (Skalenwerten) bezeichnet, die innerhalb bestimmter Grenzen liegen. Klassengrenzen bilden der größte und kleinste Messwert einer Klasse.

Zur Darstellung der Daten in einem Balkendiagramm kann man eine beliebige Anzahl an Klassen wählen, die jedoch von der Anzahl der Daten abhängen. Man spricht von einem **Histogramm**.

Beispiel 8:

Einmal pro Woche wird im Sportunterricht für den Schullauf trainiert. Die Burschen müssen eine Distanz von 4km zurücklegen, die Zeiten werden vom Sportlehrer grob notiert (in Minuten).

Hier die Urliste eines Trainingslaufes:

18, 20, 25, 17, 21, 14, 23, 19, 22, 18, 15, 16, 18, 22, 20, 19, 17;

Der Sportlehrer möchte die gelaufenen Zeiten anschließend benoten. Weil er keinen Schüler negativ beurteilen möchte, beschließt er, die Zeiten einfach in vier Klassen einzuteilen.

Wir wählen als Klassenbreite 3min (26 – 14 = 12; 12 : 4 = 3).

Rangliste: 14, 15, 16, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 19, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 25;

Erstelle ein passendes Histogramm!

Tabelle 9: Häufigkeiten pro Klasse

Laufzeit (min)	Häufigkeit	Klassenmitte bei 3min	Häufigkeit
14	1		
15	1	15	3
16	1		
17	2		
18	3	18	7
19	2		
20	2		
21	1	21	5
22	2		
23	1		
24	0	24	2
25	1		

Tabelle 10: Klasseneinteilung

Einteilung der Klassen	absolute HK
von 14 bis unter 17	3
von 17 bis unter 20	7
von 20 bis unter 23	5
von 23 bis unter 26	2

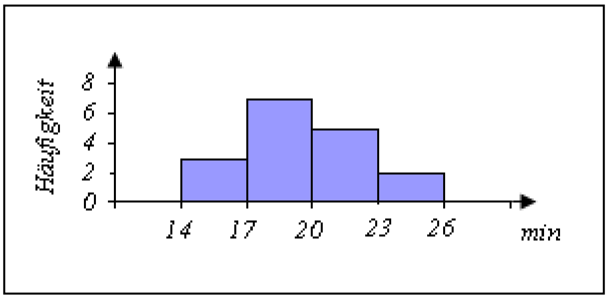


Abbildung 11: Histogramm nach Klasseneinteilung

Aufgabe 25:

Die Schüler der Basketball Schulmannschaft üben Freiwürfe. Im Laufe des Trainings soll jeder Spieler 60 Freiwürfe machen, die Anzahl der Treffer wird vom zuständigen Lehrer notiert:

24, 19, 16, 29, 27, 21, 32, 19, 25, 38, 22, 25, 30, 20, 12, 23, 29, 26, 31, 18;

a) Erstelle die zugehörige Rangliste!

b) Wähle eine geeignete Klassenbreite und erstelle eine Tabelle wie im vorigen Beispiel.

c) Zeichne das zugehörige Histogramm!

Aufgabe 26:

a) Erstelle ein Histogramm mit Klassenbreite 1, das die Verteilung der gelben Karten bei der Euro 08 veranschaulicht. Lässt sich eine ähnliche Kurve wie zu Beginn des Kapitels „Kennzahlen der Streuung" bilden?

b) Berechne den Mittelwert (Anzahl der gelben Karten pro Spiel) und die Varianz.

Tabelle 11: Gelbe Karten (http://de.euro2008.uefa.com/tournament/statistics/matches/typestat=YC/index.html)

Gesamt	Spiel	Ergebnis
8	Schweiz – Portugal	2 - 0
7	Türkei - Tschechische Rep.	3 - 2
7	Frankreich – Italien	0 - 2
6	Kroatien – Deutschland	2 - 1

6	Niederlande – Russland	1 - 3
5	Österreich – Polen	1 - 1
5	Italien – Rumänien	1 - 1
5	Griechenland – Spanien	1 - 2
5	Russland – Schweden	2 - 0
5	Portugal – Deutschland	2 - 3
4	Österreich – Kroatien	0 - 1
4	Niederlande – Italien	3 - 0
4	Rumänien – Frankreich	0 - 0
4	Schweiz – Türkei	1 - 2
4	Griechenland – Russland	0 - 1
4	Polen – Kroatien	0 - 1
4	Deutschland – Spanien	0 - 1
4	Kroatien – Türkei	1 - 1
4	Spanien – Italien	0 - 0
3	Schweiz - Tschechische Rep.	0 - 1
3	Portugal – Türkei	2 - 0
3	Deutschland – Polen	2 - 0
3	Griechenland – Schweden	0 - 2
3	Niederlande – Frankreich	4 - 1
3	Österreich – Deutschland	0 - 1
2	Tschechische Rep. – Portugal	1 - 3
2	Schweden – Spanien	1 - 2
2	Deutschland – Türkei	3 - 2
2	Russland – Spanien	0 - 3
1	Niederlande – Rumänien	2 - 0

Aufgabe 27:

Die Schülerinnen der 6c üben Schlagballwurf. Der weiteste Wurf jeder Schülerin wird notiert. (Angabe in m): 33, 25, 42, 19, 23, 30, 34, 27, 25, 20, 33, 19, 36;

a) Zeichne ein Histogramm ohne Einteilung der Messwerte in Klassen.

b) Zeichne ein Histogramm mit einer Klassenbreite von 8m (19 bis unter 27, 27 bis unter 35, usw.)

c) Vergleiche die beiden Diagramme und notiere Vor- und Nachteile beider Darstellungen. Diskutiert in der Klasse!

2.8 Abhängigkeit zweier Merkmale

Oft stellt sich die Frage, ob zwischen zwei Merkmalen ein Zusammenhang besteht. Dazu werden die beiden Merkmale in einem Koordinatensystem als Punkte dargestellt. Man bezeichnet die Menge dieser Punkte als **Streudiagramm**. Folgen diese Punkte einem gewissen Verlauf, sodass eine Gerade eingezeichnet werden kann so spricht man von der **Regressionsgeraden**.

Beispiel 9:

Auf einer Rennstrecke wird die Höchstgeschwindigkeit von Sportautos nach einer gewissen Distanz gemessen. Untersuche, ob die Höchstgeschwindigkeit von der Motorleistung abhängig ist. Erstelle ein Streudiagramm!

Tabelle 12: Leistung und Geschwindigkeit von Sportwagen

Leistung (kW)	71	64	73	60	67	70	75	63	68	66	69
Geschwindigkeit (km/h)	157	153	182	134	158	169	178	131	146	140	143

Lösung:

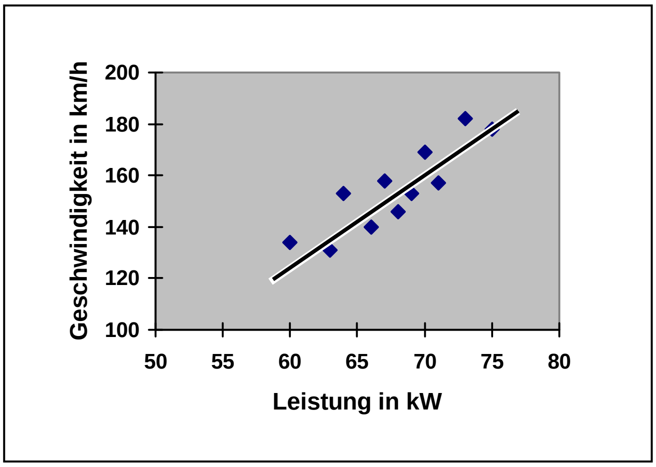


Abbildung 12: Streudiagramm Sportwagen

Zur Erstellung des Streudiagramms (Abb. 12) werden auf der waagrechten Achse die Leistungen in kW, auf der senkrechten Achse die Höchstgeschwindigkeit in km/h eingezeichnet.

Versuche nun, „freihändig“ eine Kurve oder Gerade in das Streudiagramm zu zeichnen, sodass man einen bestimmten Verlauf beobachten kann.

Was lässt sich aus diesem Streudiagramm ablesen? Wurde bei Autos mit schwächeren Motoren eine geringere Geschwindigkeit gemessen? Haben starke Autos auch eine höhere Geschwindigkeit?

Aufgabe 28:

Alle Schüler der Klasse sollen ihren Bodymaßindex berechnen. (BMI = $\frac{\text{Körpergewicht in kg}}{(\text{Körpergröße in m})^2}$)

a) Erstellt eine Wertetabelle mit Körpergröße und BMI.

b) Untersucht, ob der Bodymaßindex von der Körpergröße abhängig ist, indem ihr ein Streudiagramm zeichnet.

c) Recherchiert nach den Klasseneinteilungen des BMI. Wann ist man unter-, normal- bzw. übergewichtig?

Aufgabe 29:

Angaben von Aufgabe 26!

Hat die Anzahl der gelben Karten pro Spiel Einfluss auf die Gesamtzahl der Tore pro Spiel? Überprüfe durch Darstellung aller Spiele in einem Streudiagramm!

Aufgabe 30:

In folgender Tabelle ist die Trefferquote zweier Basketballspieler im Training nach der Distanz zum Korb aufgelistet.

Tabelle 13: Trefferquote nach Distanz zum Korb

Distanz zum Korb	10m	8m	6m	4m	2m
Trefferquote Spieler 1	30%	42%	55%	80%	96%
Trefferquote Spieler 2	10%	30%	60%	90%	100%

Zeichne in einem Koordinatensystem das Streudiagramm beider Spieler ein. Können Regressionsgeraden gebildet werden? Welche Vergleiche lassen sie zu?

In Anhang 2 findet sich eine **Zusammenfassung** des Kapitels beschreibende Statistik in Form eines Merkblattes!

3 Statistik mit Excel

Da die Statistik in zahlreichen Wissenschaften, der Wirtschaft und der Politik Anwendung findet, werden für die Darstellung der Daten meist Computer verwendet. Um einfache graphische Darstellungen in Form von Tabellen und Diagrammen durchzuführen genügt die Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms wie zum Beispiel Microsoft Excel, das im Gegensatz zu weiterführenden Statistikprogrammen wie SPSS den Vorteil hat für nahezu jeden zugänglich zu sein.

3.1 Excel – eine allgemeine Einführung

Nach dem Start des Tabellenkalkulationsprogramms Excel öffnet sich ein elektronisches Arbeitsblatt mit Spalten, die mit Buchstaben bezeichnet werden (A, B, C, usw.), und Zeilen, die mit Zahlen benannt sind (1, 2, 3, usw.). Durch die Bezeichnungen von Spalten und Zeilen kann die genaue Position eines einzelnen Feldes, der sogenannten Zelle angegeben werden. Zum Beispiel: A3, C9, G7, usw.

Unter der üblichen Menüleiste befindet sich die Symbolleiste, deren Schaltknöpfe der möglichst schnellen Bearbeitung des Arbeitsblattes dienen. Genau über dem Arbeitsblatt ist die Bearbeitungszeile.

In die einzelnen Zellen können Zahlen, Texte sowie Rechenanweisungen, also Formeln geschrieben werden.

3.2 Eingabe einfacher Formeln

Um eine solche Rechenanweisung zu erstellen muss man mittels Mausklick oder Pfeiltasten in die Zelle wechseln, in der das Rechenergebnis dargestellt werden soll. Durch Eingabe eines Gleichheitszeichens „=“ wird das Programm auf die Eingabe einer Formel vorbereitet.

Wollen wir zum Beispiel die Werte zweier Zellen A2 und B2 addieren, so lautet die Eingabe: =A2+B2. A2 und B2 können wir durch einfaches Anklicken dieser Zellen eingeben.

Beispiel 10:

Tabelle 14: Eingabe einfacher Formeln

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wert A	Wert B		Summe	Differenz	Produkt	Quotient
2	648	354		=A2+B2	=A2-B2	=A2*B2	=A2/B2
3							

Durch drücken der Enter-Taste nach Eingabe der Formel wird das Ergebnis der einzelnen Zellen automatisch angezeigt.

Um bei einer wie üblich größeren Datenmenge nicht jede Formel einzeln eingeben zu müssen, können die Formeln kopiert werden. Dazu muss wie in Tab. 14 gezeigt, der Bereich mit den Formeln (D2 bis G2) markiert werden (durch Festhalten der linken Maustaste oder mit Hilfe der Shift-Taste gemeinsam mit den Pfeiltasten). An der rechten unteren Seite dieses nun markierten Bereichs befindet sich ein kleines fett hervorgehobenes Rechteck. Durch Anklicken dieses Rechtecks und gedrückt halten der linken Maustaste kann das markierte Fenster nun nach unten gezogen und damit kopiert werden. Bei Loslassen der Maustaste erscheinen sofort die jeweiligen Ergebnisse.

Beispiel 11:

Berechne Summe, Differenz, Produkt und Quotient der Werte A und B jeder Zeile.

Lösung:

Tabelle 15: Formeln kopieren 1

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wert A	Wert B		Summe	Differenz	Produkt	Quotient
2	648	354		1002	294	229392	1,83050847
3	826	543					
4	467	322					
5	123	657					
6	6688	765					
7	865	578					
8	1567	988					
9							

Tabelle 16: Formeln kopieren 2

E6 | fx =A6-B6

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wert A	Wert B		Summe	Differenz	Produkt	Quotient
2	648	354		1002	294	229392	1,83050847
3	826	543		1369	283	448518	1,52117864
4	467	322		789	145	150374	1,45031056
5	123	657		780	-534	80811	0,18721461
6	6688	765		7453	5923	5116320	8,74248366
7	865	578		1443	287	499970	1,49653979
8	1567	988		2555	579	1548196	1,58603239
9							

Klickt man die einzelnen Zellen mit den neuen Ergebnissen an, so kann man in der Bearbeitungszelle erkennen, dass die Formeln beim Kopieren tatsächlich angepasst wurden. Vergleiche zum Beispiel Tab. 16, Zelle E6: = A6-B6.

3.3 Minimum, Maximum und Spannweite

Beispiel 12:

Ermittle Minimum und Maximum der Werte aus Spalte A und Spalte B.

Tabelle 17: Bestimmung von Minimum und Maximum

	A	B
1	Wert A	Wert B
2	648	354
3	826	543
4	467	322
5	123	657
6	6688	765
7	865	578
8	1567	988
9		
10	Minimum	
11	=MIN(A2:A8)	=MIN(B2:B8)
12	Maximum	
13	=MAX(A2:A8)	=MAX(B2:B8)
14	Spannweite	
15	=A13-A11	=B13-B11
16		

Nach Anklicken der Zelle, in der das Ergebnis gezeigt werden soll wählt man den kleinen Pfeil neben dem „∑“–Symbol der Symbolleiste und anschließend „Min“ bzw. „Max“. Durch Markieren des Datenbereichs aus dem Minimum und Maximum ermittelt werden soll und drücken der Enter-Taste wird das Ergebnis sichtbar.

Die Spannweite kann durch einfache Subtraktion wie in Tab. 17 gezeigt, berechnet werden.

3.4 Mittelwert

Beispiel 13:

Berechne aus obiger Tabelle den Mittelwert der Werte in Spalte A.

Zuerst ermitteln wir die Gesamtsumme sowie Anzahl der Werte (Häufigkeit).

Zur Berechnung der Summe kann entweder die Formel „=SUMME(A2:A8)" verwendet werden, wobei der Bereich A2:A8 wiederum durch Markierung mit der Maus eingegeben wird, oder aber das Symbol „∑" der Symbolleiste, das durch Doppelklick automatisch die Summe berechnet.

Die Anzahl der Werte erhalten wir durch Abzählen (bei kleinen Datenmengen), Eingabe der Formel „=ANZAHL(A2:A8)" oder schneller durch Anklicken des kleinen Pfeils neben dem „∑" Symbol. Es öffnet sich ein Fenster, mit Hilfe dessen wichtige Werte auf schnellem Weg berechnet werden können: Summe, Mittelwert, Anzahl, Min, Max, usw.

Tabelle 18: Berechnung des Mittelwerts Schritt 1

	A
1	Wert A
2	648
3	826
4	467
5	123
6	6688
7	865
8	1567
9	
10	=SUMME(A2:A8)
11	=ANZAHL(A2:A8)
12	

Die Berechnung des Mittelwerts kann ebenfalls auf zwei Arten erfolgen: durch Eingabe der Rechenoperation „=A10/7" oder mit „=MITTELWERT(A2:A8)".

Am schnellsten kommt man voran, wenn man die zweite Art wählt und das Fenster des „∑"-Symbols verwendet:

Tabelle 19: Berechnung des Mittelwerts Schritt 2

	A	B	C	D
1	Wert A			
2	648			
3	826		Mittelwert	
4	467			
5	123		=A12/7	
6	6688		=MITTELWERT(A4:A10)	
7	865			
8	1567			
9				
10	11184			
11	7			
12				

3.5 Graphische Darstellung

Um ein Diagramm zu erstellen muss man den Teil der Tabelle, der graphisch dargestellt werden soll, also die Daten samt Beschriftungen markieren. Anschließend wird der Diagramm-Assistent durch Anklicken des Diagramm-Symbols auf der Schaltfläche aktiviert. Nun kann ein geeigneter Diagrammtyp ausgewählt werden.

Beispiel 14:

Stelle die angegebenen Vereinsausgaben (in €) der folgenden Tabelle 20 in einem Balkendiagramm dar.

Tabelle 20: Vereinsausgaben 2007

	A	B
1	Jänner	254
2	Februar	306
3	März	1267
4	April	2549
5	Mai	2067
6	Juni	1652
7	Juli	3163
8	August	1403
9	September	1599
10	Oktober	942
11	November	623
12	Dezember	680
13		

Zur Erstellung des Balkendiagramms muss nun der Bereich A3:B14 markiert werden. Nach Öffnen des Diagramm-Assistenten kann man den Diagrammtyp auswählen. Nun kann man die Graphik mit Hilfe der Schaltflächen „Weiter“ und „Zurück“ Schritt für Schritt formatieren, dem Diagramm einen Namen geben, die Achsen benennen, usw. In einem Bildausschnitt wird dabei immer die augenblickliche Gestalt des Diagramms angezeigt.
Klickt man auf „Fertig stellen“ wird die Graphik aus Abbildung 13 in das Tabellenblatt eingefügt.

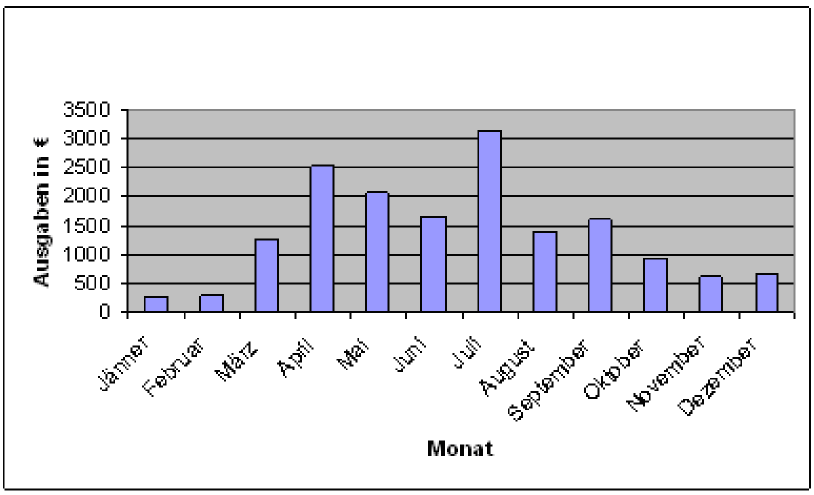


Abbildung 13: Histogramm der Vereinsausgaben 2007

Aufgabe 31:

In Tabelle 21 sind die Ergebnisse des Alpinen Ski-Weltcups 07/08 der besten zehn Damen aufgelistet.

Tabelle 21: Gesamtergebnisse Ski-Weltcup 07/08

(http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpineskiing/cupstandings.html?suchen=rue& suchcompetito-rid=&suchseason=2008&sector=AL&suchgender=L&suchcup=WC&suchnation=&discipline=&search=S earch)

		ALL		DH		SL		GS		SG		KB	
Name	Nation	rank	pts	rank	pts	rank	pts	rank	pts	rank	pts	rank	pts
VONN Lindsey	USA	1	1403	1	755	32	46	13	140	6	262	2	200
HOSP Nicole	AUT	2	1183	19	123	2	515	7	241	10	222	9	82
RIESCH Maria	GER	3	1146	9	224	8	249	25	39	1	374	1	260
GOERGL Elisabeth	AUT	4	1137	11	215	42	22	2	479	2	326	8	95
SCHILD Marlies	AUT	5	1120	15	156	1	640	11	169	25	49	5	106
PAERSON Anja	SWE	6	973	4	331	15	118	15	118	7	246	3	160
MANCUSO Julia	USA	7	938	7	282	28	63	5	253	8	238	6	102
POUTIAINEN Tanja	FIN	8	781			4	484	4	297				
GOETSCHL Renate	AUT	9	731	2	448					4	283		
KARBON Denise	ITA	10	651			29	59	1	592				

a) Stelle die Punkteverteilung einer beliebigen Athletin in einem Balkendiagramm dar.

b) Erstelle ein weiteres Balkendiagramm zur Veranschaulichung der Gesamtergebnisse aller zehn Skiläuferinnen.

3.6 Häufigkeiten und Prozentkreis

Absolute Häufigkeiten einzelner Werte können, wenn es nur wenige Merkmalswerte gibt, mit Hilfe der Funktion „=ZÄHLENWENN(…)“ ermittelt werden.

Beispiel 15:

Die Ergebnisse des Schullaufes werden in folgender Tabelle 22 (in Noten) dargestellt. Ermittle die absoluten, relativen und prozentuellen Häufigkeiten der einzelnen Noten und stelle sie in einem Prozentkreis dar.

Zur Darstellung der absoluten Häufigkeiten wählt man bei kleineren Datenmengen die Funktion „ZÄHLENWENN“: zuerst in die Zelle klicken, in der das Ergebnis dargestellt werden soll (D2, usw.), dann auf den kleinen Pfeil des „∑“-Symbols, um „Weitere Funktionen“ auswählen zu können. Es öffnet sich das Fenster „Funktion einfügen“. Nach Auswahl von „ZÄHLENWENN“ öffnet sich ein weiteres Fenster, in dem der Datenbereich sowie die Bedingung eingegeben werden (z.B.: =ZÄHLENWENN(B2:B11;1)) Durch Bestätigung mit „OK“ erscheint das Ergebnis am Arbeitsblatt.

Bei der Berechnung der relativen Häufigkeiten benötigt man die Gesamtzahl aller Noten, die sich mit „=ANZAHL(…)“ ganz einfach ermitteln lässt.

Tabelle 22: Schullaufergebnisse Mädchen Schritt 1

	A	B	C	D	E
1	Name	Note	Klassen	absolute HK	
2	Ida	2	1	=ZÄHLENWENN(B2:B11;1)	
3	Sabine	3	2	=ZÄHLENWENN(B2:B11;2)	
4	Sonja	1	3	=ZÄHLENWENN(B2:B11;3)	
5	Daniela	3	4	=ZÄHLENWENN(B2:B11;4)	
6	Elisabeth	3	5	=ZÄHLENWENN(B2:B11;5)	
7	Nina	2			
8	Anna	4			
9	Selina	1			
10	Christine	5		Anzahl der Noten:	
11	Andrea	4		=ANZAHL(B2:B11)	
12					

Durch Eingabe der richtigen Formel in die Zelle E2 kann die relative Häufigkeit der Note „1“ berechnet werden: „=D2/D11“. Möchte man sich nun die Eingabe der Formel für jede einzelne Noten ersparen, so kann die Formel in die darunter liegenden Zellen kopiert werden.

Aber Achtung! Durch das Kopieren verändert das Programm von Zeile zu Zeile die Zahlen der Formel, man spricht von „automatischer Formelanpassung“. Wir müssen „D11“ also durch einfaches davor setzen eines Dollarzeichens „$“ fixieren. Die Formel lautet also: =D2/D$11“. Kopiert man die Formel nun in die darunter liegenden Zellen so hat man durch Bestätigung mit der Enter-Taste automatisch die richtigen Ergebnisse.

Tabelle 23: Schullaufergebnisse Mädchen Schritt 2

	A	B	C	D	E	F
1	Name	Note	Klassen	absolute HK	relative HK	prozent. HK
2	Ida	2	1	2	=D2/D$11	
3	Sabine	3	2	2	=D3/D$11	
4	Sonja	1	3	3	=D4/D$11	
5	Daniela	3	4	2	=D5/D$11	
6	Elisabeth	3	5	1	=D6/D$11	
7	Nina	2				
8	Anna	4				
9	Selina	1				
10	Christine	5		Anzahl der Noten		
11	Andrea	4		10		
12						

Die explizite Berechnung der prozentuellen Häufigkeit erfolgt durch Multiplikation mit 100, kann im Allgemeinen jedoch übersprungen werden, da der Diagramm-Assistent bei der Darstellung absoluter oder relativer Häufigkeiten durch einen Prozentkreis automatisch die Häufigkeit in Prozent berechnet!

Dazu muss man im Diagramm-Assistenten nach Auswahl des Diagrammtyps „Kreis" sowie der Markierung der darzustellenden Datenmenge (das ist entweder die Spalte absolute HK oder relative HK) im Fenster „Datenbeschriftungen" lediglich die Kategorie „Prozentsatz" aktivieren.

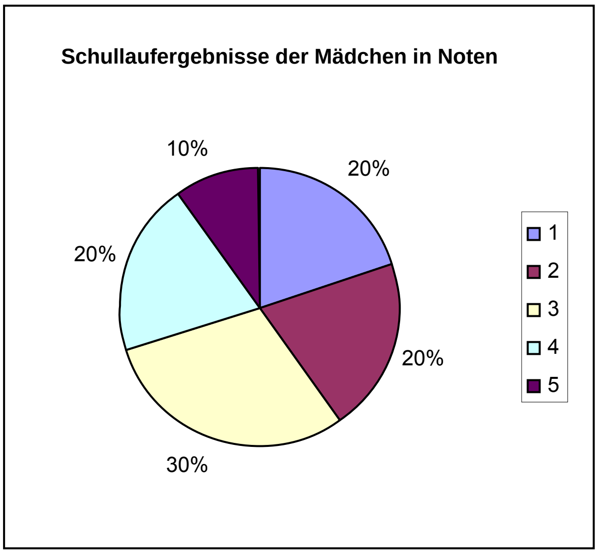


Abbildung 14: Schullaufergebnisse Mädchen

Aufgabe 32:

Die beiden Diagramme der Abb. 13 und 14 stellen die durchschnittlichen Schneehöhen der vergangenen Wintersaisonen in einem Tiroler Skigebiet dar:

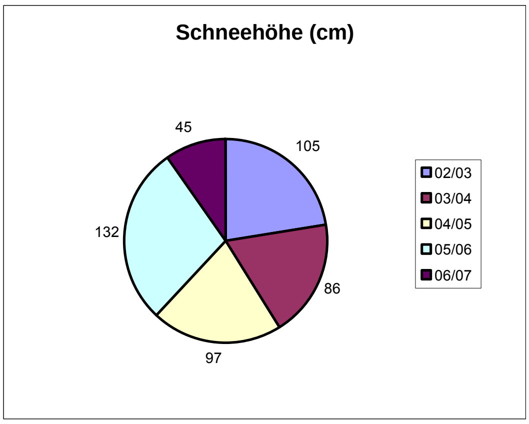


Abbildung 15: Kreisdiagramm Schneehöhe

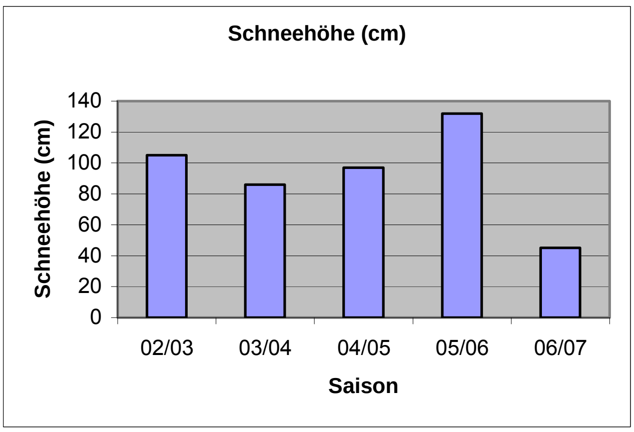


Abbildung 16: Balkendiagramm Schneehöhe

Vergleicht die beiden Diagramme! Welches stellt die Schneehöhen eurer Meinung nach übersichtlicher dar? Nennt Begründungen!

3.7 Datensortierung

Beispiel 16:

Folgende Tabelle 24 zeigt die Anzahl der Treffer jedes Schülers bei einem Handballbewerb mit 20 Versuchen:

Tabelle 24: Trefferzahl Handball

	A	B
1	Name	Treffer
2	Sebastian	13
3	Dani	10
4	Sylvia	8
5	Marcus	15
6	Lisi	11
7	Sonja	9
8	Anton	11
9	Tom	10
10		

Schreib nun in die erste Zelle der Spalte C die Überschrift m/w für männlich/ weiblich und kennzeichne die Schüler in Spalte C dementsprechend.

- Sortiere die Daten nach m und w.
- Sortiere die Daten nach Anzahl der Treffer.
- Sortiere die Daten zuerst nach m und w und innerhalb dieser Gruppen nach Trefferzahl.

Tabelle 25: Datensortierung Trefferzahl Handball

	A	B	C
1	Name	Treffer	m/w
2	Tom	10	m
3	Anton	11	m
4	Sebastian	13	m
5	Marcus	15	m
6	Sylvia	8	w
7	Sonja	9	w
8	Dani	10	w
9	Lisi	11	w
10			

Zur Datensortierung wie in Tab. 25 dargestellt, muss die gesamte Tabelle markiert werden. Wähle dann in der Menüleiste „Daten“ und „Sortieren“. Dort kann man entscheiden, nach welcher Spalte auf- oder absteigend sortiert werden soll.

Aufgabe 33:

Erstellt eine Tabelle mit euren Vornamen und den Punkten der letzten Sportkunde oder Mathematik Schularbeit.

- Bestimme die minimale und maximale Punkteanzahl.
- Berechne die durchschnittliche Punktezahl. Wie viele Schüler liegen unter/ über dem Durchschnittswert?
- Sortiere die Daten absteigend nach ihrer Punktezahl.

3.8 Klassenbildung

Bei einer sehr großen Datenmenge kommt man um eine Einteilung in Klassen zur weiteren Datenbearbeitung nicht herum. Welche Klassengrenzen zu wählen sind hängt im Allgemeinen von der jeweiligen Thematik ab, als Unter- bzw. Obergrenze wählt man zweckmäßig Minimum und Maximum.

Es sollen zwei Möglichkeiten der Klasseneinteilung näher betrachtet werden. Zum einen die WENN- Funktion, zum anderen die VERWEIS- Funktion.

Die Funktion „WENN" verlangt stets drei Angaben: =WENN(Test; Eintrag wenn JA; Eintrag wenn NEIN). Das bedeutet nicht anderes, als dass zu Beginn die Bedingung angeführt wird, in der Mitte, getrennt durch ein Semikolon, wird angegeben, was in der Zelle zu stehen hat, wenn die Bedingung erfüllt ist, und am Ende welchen Inhalt die Zelle bei Nichterfüllung der Bedingung haben soll. (Matthäus & Schulze, 2008).

Beispiel 17:

Wollen wir nach der Befragung einer Personengruppe nach ihrem Gewicht die Daten in zwei Gruppen einteilen, nach denen mit weniger als 80 Kilogramm (Gruppe 1) und nach jenen mit 80 kg oder mehr (Gruppe 2), so lautet die Formeleingabe wie in Zelle C2, Tab. 27 dargestellt:

Tabelle 26: Befragung zum Gewicht

	A	B	C	D
1	Name	Gewicht (kg)	Klasse	
2	Person 1	68	=WENN(B2<80;1;2))	
3	Person 2	93		
4	Person 3	80		
5	Person 4	77		
6	Person 5	82		
7	Person 6	105		
8	Person 7	85		
9	Person 8	96		
10	Person 9	73		
11	Person 10	79		
12				

Anschließend kann die Formel einfach in die darunter liegenden Zellen kopiert werden.

Die Einteilung in lediglich zwei Klassen reicht zumeist nicht aus. Zur Bildung weiterer Klassen muss die WENN- Funktion verschachtelt werden, das heißt dass der Nein- Eintrag weiter differenziert werden muss.

Wir wollen nun drei Klassen bilden: die Klasse der unter 80kg Schweren, die Klasse der 80kg bis unter 90kg Schweren, sowie die Klasse derjenigen, die 90kg oder mehr wiegen.

Der Eintrag in Zelle C2 lautet nun: =WENN(B2<80;1;WENN(B2<90;2;3)). Damit bekommen die unter 80 kg Schweren den Eintrag „1“ in Spalte C, die zwischen 80 und 90 kg den Eintrag „2“ und alle die darüber liegen den Eintrag „3“.

WENN- Funktionen können höchstens sieben Mal verschachtelt werden, mit Hilfe der bereits bekannten Funktion ZÄHLENWENN kann anschließend die Häufigkeit der Daten innerhalb der bestimmten Klassen bestimmt werden.

Hinweis: die Klassen müssen nicht mit einer Zahl bezeichnet werden, man kann ebenso „normal“, „kräftig“, „dick“, usw. schreiben!

Ebenso wie die WENN- Funktion verlangt auch die VERWEIS- Funktion drei verschiedene Angaben. Matthäus und Schulze (2008, S. 49) führen aus: „Zuerst ist die Zelle einzutragen, deren Inhalt klassifiziert werden soll. Anschließend ist ein *Spaltenbereich* einzutragen, in dem sich die sortierten Klassengrenzen befinden. Schließlich wird noch ein gleich langer Spaltenbereich verlangt, in dem sich die jeweiligen *Klassenbezeichnungen* finden.“

Beispiel 18:

Es sind die Schwimmzeiten der Schülerinnen einer Klasse über 50m Kraul aufgelistet:

44,32; 43,89; 39,65; 47,17; 44,62; 41,50; 39,91; 48,00; 45,25;

Die Schwimmlehrerin hat sich folgenden Notenschlüssel ausgedacht:

Sehr gut: unter 40 sek., Gut: unter 43 sek., Befriedigend: unter 47 sek., Genügend: unter 50 sek., Nicht genügend: 50 sek. und mehr;

Erstelle eine Tabelle mit den Schwimmzeiten der Schülerinnen und ordne diese den entsprechenden Klassen zu!

Tabelle 27: Schwimmzeiten der Mädchen

	A	B	C	D
1	Zeit (sek.)	Klasse	Klassengrenzen	Klassenbezeichnung
2	44,32	=VERWEIS(A4;C$4:C$8;D$4:D$8)	0	Sehr gut
3	43,89	Befriedigend	40	Gut
4	39,65	Sehr gut	43	Befriedigend
5	47,17	Genügend	47	Genügend
6	44,62	Befriedigend	50	Nicht genügend
7	41,5	Gut		
8	39,91	Sehr gut		
9	48	Genügend		
10	45,25	Befriedigend		
11				

Sollte die Klasseneinteilung mit der WENN- Funktion erfolgen, so hat die Formel die folgende Gestalt:

=WENN(A4<40;Sehr gut;WENN(A4<43;Gut;WENN(A4<47;Befriedigend;WENN(A4<50;

Genügend;Nicht genügend;))))

Natürlich erweist sich das Eintippen der WENN- Funktion als die schnellere Variante zur VERWEIS- Funktion wie in Tab. 28 dargestellt, bei der extra zwei neue Spalten erstellt werden müssen, am Arbeitsblatt zeigt sie durch das Fehlen der Klasseneinteilung jedoch wesentlich weniger Informationen!

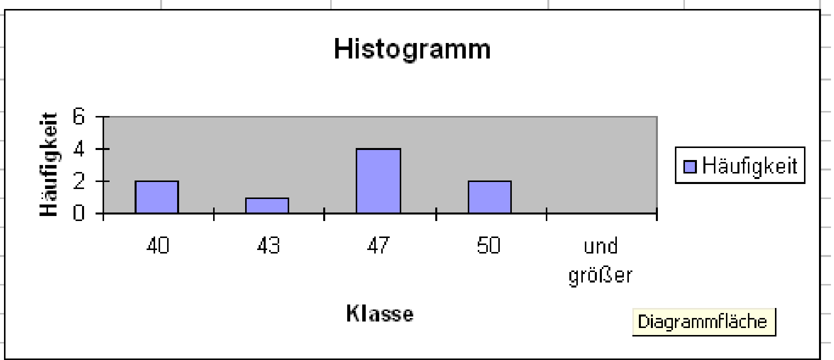
Es soll nun noch eine dritte Möglichkeit der Klassenbildung genannt werden: die Zuhilfenahme des Werkzeugs HISTOGRAMM. Diese Funktion ordnet die Daten nach Definition der Klassen automatisch zu und erstellt eine Tabelle mit den absoluten Häufigkeiten.

Wir verwenden die Daten der obigen Tabelle und wollen nun die absoluten Häufigkeiten der Daten der einzelnen Klassen bestimmen. Dazu klicken wir auf eine beliebige leere Zelle und fordern das benötigte Werkzeug HISTOGRAMM an, indem wir in der Menüleiste „Extras“ und anschließend „Analyse-Funktionen“ wählen. Nach der Auswahl von „Histogramm“ öffnet sich ein Fenster, in dem Eingabe- und Klassenbereich markiert werden sollen. In unserem Beispiel ergibt sich für den Eingabebereich A4:A12, für den Klassenbereich D4:D8 und für den Ausgabebereich wählen wir die Spalten neben der Klassenbezeichnung (E3:usw). „Das Fenster EINGABEBEREICH erhält die zu untersuchenden *Daten* – (…). In das Fenster KLASSENBEREICH ist einzutragen, wo sich die festgelegten *Klassengrenzen* befinden.“ (Matthäus und Schulze, 2008, S. 51).

Wenn wir im Eingabefenster zusätzlich noch einen Haken bei DIAGRAMMDARSTELLUNG anbringen, so erstellt das Programm automatisch das zugehörige Histogramm. Matthäus und Schulze (2008) bezeichnen das Histogramm als „Säulendiagramm der absoluten Häufigkeiten.“ Durch Bestätigung mit „OK“ erhalten wir schließlich folgende Tabelle:

Tabelle 28: Schwimmzeiten der Mädchen mit Histogramm

	A	B	C	D	E	F
1	Zeit (sek.)	Klasse	Klassengrenzen	Klassenbezeichnung	*Klasse*	*Häufigkeit*
2	44,32	=VERWEIS(A4;C$4:C$8;D$4:D$8)	40	Sehr gut	40	2
3	43,89		43	Gut	43	1
4	39,65		47	Befriedigend	47	4
5	47,17		50	Genügend	50	2
6	44,62			Nicht genügend	und größer	0
7	41,50					
8	39,91					
9	48,00					
10	45,25					
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						



Aufgabe 34:

In einer Schulmensa möchte man den Schülern möglichst gesunde Produkte anbieten und deshalb wird ein neuer Automat aufgestellt, der leider nur 4 der vorgeschlagenen 5 Produkte aufnehmen kann. Aus diesem Grund wird eine Erhebung gemacht, deren Daten in Tab. 30 dargestellt seinen, in der jeder Schüler sein bevorzugtes Lieblingsprodukt angibt.

Tabelle 29: Abstimmung Bio-Automat

	Stimmenanzahl	
Produkt	Unterstufe	Oberstufe
Apfel	8	15
Banane	41	32
Trinkjoghurt	32	45
Fruchtjoghurt	23	29
Müsliriegel	24	17

a) Wie viele Stimmen wurden in der Unterstufe, wie viele in der Oberstufe und wie viele insgesamt abgegeben?

b) Veranschaulicht das Gesamtergebnis der Erhebung durch Darstellung der Daten in einem Säulendiagramm sowie in einem Prozentkreis.

c) Welches Diagramm stellt die Rangliste der Produkte besser dar?

d) Welche beiden Produkte werden von mehr als der Hälfte aller SchülerInnen erwünscht? Welches Diagramm kann dir sofort eine Antwort liefern?

4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die wichtigsten theoretischen Verteilungen wie die Binomial- und die Normalverteilung vorgestellt werden, mit denen unter Zuhilfenahme der schließenden Statistik Populationsparameter geschätzt, Konfidenzintervalle bestimmt und Hypothesen geprüft werden können.

Es werden jeweils ein Beispiel sowie Vorschläge für Aufgaben angegeben, die natürlich beliebig erweitert und ergänzt werden können.

Hauptaufgabe der Inferenzstatistik ist es, Erkenntnisse von Stichproben auf Grundgesamtheiten (Populationen) zu verallgemeinern. Dahinter steckt die Frage der Signifikanz (statistischen Bedeutsamkeit) von Ergebnissen, weshalb zu Beginn die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung anhand einfacher Münz- und Würfelbeispiele behandelt werden sollen.

4.1 Grundlegende Begriffserklärungen

Beispiel 19:

Am Rummelplatz lockt ein Standbetreiber seine Kunden mit dem Versprechen, dass beim Würfeln mit einem normalen Würfel jede Augenzahl einen Gewinn mit sich bringt. Ein Spieler möchte für seine Freundin unbedingt eine Rose gewinnen. Dazu muss er eine Vier würfeln.

Nachdem der Spieler bereits fünf Mal gewürfelt hat und keine Vier hatte, meint seine Freundin: „Jetzt muss es aber klappen!“

Beispiel 20:

Ein Beachvolleyball Team ist sich uneinig, wer den gewonnenen Pokal mit nach Hause nehmen darf. Also werfen die beiden Spieler eine Münze. Derjenige, dessen Symbol zuerst dreimal angezeigt wird, erhält den Pokal. Nach zwei Würfen, bei denen „Kopf“ erscheint, meint der andere Spieler: „Jetzt muss aber Zahl kommen!“.

Autoren sprechen bei diesen Beispielen von der „naiven“ Auslegung der Wahrscheinlichkeit da diese Aussage die Erwartung des Spielers über den Ausgang des Versuchs darstellt. Man spricht von einem **Zufallsexperiment**, wenn man aufgrund der Komplexität des Experiments oder wegen des Charakters der Zufälligkeit vor Durchführung des Versuchs nicht voraussagen kann, welches der möglichen Ereignisse eintreten wird. Das Zufallsexperiment liefert uns **Zufallsvariablen**.

Genauso wie bei den Stichproben (Deskriptive Statistik) werden auch bei den Zufallsvariablen Begriffe wie Verteilungsfunktion, Varianz, Standardabweichung, usw. behandelt. In Analogie zum Mittelwert von Stichproben gibt es bei den Zufallsvariablen einen **Erwartungswert *E(X)*** der Zufallsvariablen X.

Die Spieler des Münzbeispiels haben die Vorstellung, dass bei zwei Seiten jede Seite gleich oft auftreten müsste. Steigert man die Anzahl der Würfe, so nähern sich die Ergebnisse auch tatsächlich der Erwartung, dass jede Seite gleich oft auftreten müsste, stimmen jedoch nicht exakt überein. Sind diese Abweichungen nun zufällig oder haben sie systematische Ursachen?

Diese Frage stellt das zentrale Problem der Inferenzstatistik dar, deren Ziel die Überprüfung der Gültigkeit der beobachteten Stichprobenergebnisse ist. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung liefert die dafür wichtigen Vorraussetzungen, die Gesetze der großen Zahlen verdeutlichen schließlich die Verbindung von beschreibender, beurteilender Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Bosch (1999, S. 51) schreibt: „Mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsbegriffs können allgemeine Aussagen über die Chance des Eintretens bestimmter zufälliger Ereignisse gemacht werden. Je größer die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist, umso öfter wird es auf Dauer eintreten.“

Mögliche Ergebnisse von Zufallsexperimenten werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet (a, b, c, …oder ω), die Menge aller möglichen Ergebnisse als **Ereignismenge Ω**.

Man spricht von einem **(zufälligen) Ereignis**, wenn der unter bestimmten Bedingungen durchgeführte Versuch eintreten kann, aber nicht eintreten muss. Es handelt sich also um eine Zusammenfassung von **Versuchsergebnissen** und damit um eine Teilmenge von Ω.

Ereignisse werden mit großen Buchstaben (A, B, …bzw. A_1, A_2, …) dargestellt. Enthält ein Ereignis nur ein einziges Element ($A = \{\omega\}$), so nennt man es **Elementarereignis.**

Ein Ereignis wird **sicheres Ereignis** genannt, wenn es bei Durchführung des Zufallsexperiments zwingend auftreten muss, ein **unmögliches Ereignis** ist eines, das nicht auftreten kann.

Beispiel 21:

Münzwurf

Sicheres Ereignis: es wird entweder Kopf oder Zahl geworfen; $\Omega = \{K; Z\}$

Unmögliches Ereignis: es wird weder Kopf noch Zahl geworfen

Aufgabe 35:

a) Nenne je ein Beispiel für ein sicheres und unmögliches Ereignis beim Würfeln.

b) Versuche andere Beispiele zu (er-) finden. Gib Ω an, sowie sichere und unmögliche Ereignisse.

Hat ein Zufallsexperiment zwei mögliche Ausgänge, so nennt man es **Bernoulli-Experiment.** Beispiele dafür sind Experimente mit Münzen (Kopf oder Zahl) oder das Roulettespiel (gerade oder ungerade). Eine Biographie des berühmten Schweizer Mathematikers Jakob Bernoulli findet sich im Anhang.

Man spricht bei Münz- oder Würfelbeispielen von **diskreten Merkmalen. Stetige Merkmale** können beliebige Werte innerhalb eines Intervalls annehmen.

Ein Beispiel für stetige Zufallsvariablen:

Ein Sportartikelshop befüllt seine Fußbälle vor dem Verkauf noch mit Luft. Da die zuständige Maschine nicht ganz exakt arbeitet weisen die Bälle verschiedene Werte zwischen 1,9 und 2,1 bar auf. Also gilt: $\Omega = [1{,}9; 2{,}1]$

Es gilt:

- $A \cap B = \{\ \omega |\ \omega \in A$ und $\omega \in B\}$ „A und B“
- $A \cup B = \{\ \omega |\ \omega \in A$ oder $\omega \in B\}$ „A oder B“ (einschließendes „oder“)
- $\overline{A} = \{\ \omega |\ \omega \in \Omega$ und $\omega \notin A\}$ „Komplement von A“ oder „Nicht A“
- $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{\ \omega |\ \omega \in A$ und $\omega \notin B\}$ „A, aber nicht B“

- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\, \omega |\, \omega \in A_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n\}$

„Durchschnitt von n Ereignissen“, alle n Ereignisse treten gleichzeitig ein.

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\, \omega |\, \omega \in A_i$ für ein $i = 1, 2, \ldots, n\}$

„Vereinigung von n Ereignissen“, mindestens eines der n Ereignisse tritt ein.

4.2 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Bös et al. (2000, S. 97) definieren Wahrscheinlichkeit wie folgt: „Man versteht unter der (statistischen) Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses (…) den festen Wert (Grenzwert), dem die relative Häufigkeit für das Auftreten des Ereignisses bei wachsender Anzahl der Versuche zustrebt.“

Die **absolute Häufigkeit $h_n(A)$** des Ereignisses A gibt die Anzahl der Versuche an, bei denen A eintritt.
Die **relative Häufigkeit $r_n(A)$** des Ereignisses A stellt den relativen Anteil der Versuche dar, bei denen A eintritt.

$$r_n(A) = \frac{h_n(A)}{n}$$

Bei einem Einzelexperiment hat das Ereignis A die Wahrscheinlichkeit $P(A) = p$. Wird das gleiche Zufallsexperiment sehr oft unabhängig und unter gleichbleibenden Bedingungen durchgeführt, so kann man einen gewissen Stabilisierungseffekt feststellen, das heißt dass die relativen Häufigkeiten $r_n(A)$ eines Ereignisses A für große n meistens in der Nähe von p liegen, also sehr wenig schwanken. Für große n gilt also die Näherung $r_n(A) \approx P(A)$.

Eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p kann also durch die relative Häufigkeit in einer hinreichend langen Versuchsserie geschätzt werden. Dieser Sachverhalt wird als das Gesetz der großen Zahlen bezeichnet.

Ausnahmen können dabei nie ausgeschlossen werden, treten mit wachsendem n aber immer seltener auf. (Bosch, 1999).

Der aus der relativen Häufigkeit $r_n(x)$ eines Ereignisses $A = x$ gewonnene Schätzwert für das Eintreten genau dieses Ereignisses wird die **Wahrscheinlichkeit** $P(A = x)$ genannt. P steht für probability (engl.) und heißt übersetzt Wahrscheinlichkeit.

Die Wahrscheinlichkeit für Kopf bzw. Zahl beim Münzwurf strebt mit steigender Versuchsanzahl gegen den Wert $\frac{1}{2}$ ($P(K) = P(Z) = \frac{1}{2}$). Beim Werfen eines Würfels strebt die Wahrscheinlichkeit des Auftretens jeder Augenzahl gegen $\frac{1}{6}$ ($P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = \frac{1}{6}$).

Wir setzten voraus, dass es sich um „gleichmäßige“ Würfel und Münzen handelt, die also nicht selbstgebastelt, verbogen oder sonst wie verformt sind. Autoren sprechen dabei von „idealen Münzen“ und „idealen Würfeln“, die der Symmetrie unterliegen.

4.3 Laplace´sche Wahrscheinlichkeit

Schon in früher Zeit wurden Wahrscheinlichkeiten anhand von Längen- und Flächenberechnungen bestimmt, man spricht von geometrischen Wahrscheinlichkeiten.

Die klassische Definition des Wahrscheinlichkeitbegriffes, die von französischen Wissenschaftlern bereits im 18. Jahrhundert verwendet wurde, geht auf den Mathematiker Pierre Simon Laplace (1749-1827) zurück, weshalb sie auch **Laplace´sche Wahrscheinlichkeitsdefinition** genannt wird. Im Anhang ist eine Biographie von Laplace.

Zur Anwendung der Laplace´schen Wahrscheinlichkeitsdefinition müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

1. die Ereignismenge Ω ist endlich
2. alle Elementarereignisse sind gleich wahrscheinlich

Punkt zwei verlangt nach der Kenntnis der Gesetzmäßigkeit des Zufallsexperiments sowie dem Wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die einzelnen Ergebnisse auftreten.

Sind beide Voraussetzungen erfüllt so spricht man von einem **Laplace- Experiment**.

Herleitung der Laplace´schen Wahrscheinlichkeit:

Vorraussetzungen:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_{2, \ldots,} \omega_m\}$ endlich, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_m) = p$;

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \{\omega_i\}$ und $P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{m} P(\{\omega_i\}) = m.p$

also ist $p = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{m}$ für $i = 1, 2, \ldots, m.$

Besteht ein Ereignis A nun aus r Versuchsergebnissen, so erhält man durch Summenbildung folgende Formel:

$$P(A) = r.\frac{1}{m} = \frac{r}{m} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Laplace Wahrscheinlichkeitsregel:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Beispiel 22:

Beim Roulette kann auf insgesamt 37 Zahlen gesetzt werden (0, 1, 2, …, 36) $\Rightarrow$ $|\Omega| = 37$.

$P(\text{ungerade Zahl}) = \frac{18}{37}$

$P(\text{rot}) = P(\text{schwarz}) = \frac{18}{37}$

$P(\text{eine Zahl von 0-10}) = \frac{11}{37}$

$P(\text{Querreihe 16, 17, 18}) = \frac{3}{37}$

Aufgabe 36:

Bestimme für das Zufallsexperiment „gleichzeitiges Werfen von drei Münzen“ die möglichen Elementarereignisse A_i und die Ereignismenge Ω.

Aufgabe 37:

Lotto „6 aus 45“. Es wird genau eine Kugel gezogen. Gib die Ereignismenge Ω an und bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Die Zahl beginnt mit 3.

b) Die Zahl endet auf 4.

c) Die Zahl lässt sich durch 6 teilen.

d) Die Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern.

Aufgabe 38:

Zwei Spieler werfen einen Würfel. Spieler A gewinnt, wenn die jeweilige Gewinnregel zutrifft, sonst gewinnt Spieler B. Sind die Spiele fair?

a) Augenzahl ist ungerade.

b) Augenzahl ist kleiner als 3.

c) Augenzahl ist höher als 1 aber kleiner als 5.

Gib die jeweilige Ereignismenge und das Gegenereignis an. Bestimme außerdem die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A gewinnt.

Aufgabe 39:

Ein Meteor droht auf die Erde aufzuprallen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in Österreich aufschlägt?

(Erdoberfläche ~ $500. 10^6$ km^2, Österreich ~ 84000 km^2)

Aufgabe 40:

Einem Quadrat von 10cm Seitenlänge wird ein Kreis eingeschrieben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Punkt innerhalb des Quadrats auch innerhalb des Kreises liegt.

Im Laufe der Geschichte wurden viele Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgestellt. Trotzdem ergaben sich immer wieder neue (statistische) Probleme, sodass zahlreiche Wissenschaftler versuchten, den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu erweitern.

Richard von Mises (1883- 1953) beispielsweise versuchte 1931 die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A, auf Grundlage des Stabilisierungseffekts, als Grenzwert der relativen Häufigkeit $r_n(A)$ zu definieren:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} r_n(A)$$

Dabei ergaben sich jedoch folgende wesentliche Probleme:

1. Dieser Grenzwert muss nicht existieren.
2. Selbst wenn er existierte, so würde man an der unendlichen Durchführbarkeit einer Versuchsreihe scheitern.

Auf Grund dieser Schwierigkeiten soll im folgenden Kapitel die axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit behandelt werden.

4.4 Axiomatische Wahrscheinlichkeit

Der russische Mathematiker A. N. Kolmogorow (1909- 1987) verlangte nach der Erfüllung gewisser Eigenschaften (Axiome) der Wahrscheinlichkeitsrechnung und erreichte damit im Jahre 1933 erstmals eine widerspruchsfreie Verallgemeinerung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs:

Eine reelle Funktion P heißt Wahrscheinlichkeit, wenn sie folgende Axiome erfüllt:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

   für paarweise unvereinbare Ereignisse ($A_i \cap A_k = \emptyset$ für $i \neq k$)

Eigenschaft 3 nennt man σ- Additivität, aus der auch die endliche Additivität folgt:

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ für paarweise unvereinbare Ereignisse;

Aus diesen Axiomen lassen sich folgende Eigenschaften ableiten:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- aus $A \subseteq B$ folgt: $P(A) \leq P(B)$ (Monotonie)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ für beliebige Ergebnisse
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ für beliebige Ergebnisse
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$, falls $B \subseteq A$

4.5 Gegenereignisregel

Bei Anwendung der Laplace´schen Wahrscheinlichkeit erweist es sich manchmal als einfacher bzw. kürzer, statt der für das Ereignis A günstigen Ereignisse die für A ungünstigen Elementarereignisse zu zählen. Man spricht in diesem Fall vom **Gegenereignis $\overline{A}$**.

Beispiel 23:

Gib die Wahrscheinlichkeit an, beim Werfen mit einem idealen Würfel eine Augenzahl ≥ 3 zu erhalten. (P(Augenzahl ≥ 3)).

Lösung:

$A = \{3; 4; 5; 6\}$

mit der Laplace´schen Wahrscheinlichkeitsregel erhalten wir: $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\overline{A} = \{1; 2\}$, also $P(\overline{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, weil $A \cup \overline{A} = \Omega$

Gegenereignisregel: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Aufgabe 41:

In einer Ereignismenge $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ seien folgende Ereignisse definiert:

$A_1 = \{a, c, d\}$, $A_2 = \{a, d\}$, $A_3 = \{c, d, f\}$.

Bestimme:

$A_1 \cup A_2$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$, $A_1 \setminus A_2$, $A_3 \setminus A_2$, $A_1 \cup \overline{A_3}$, $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$;

Aufgabe 42:

Für die Ereignisse A und B gilt: $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}8$ und $P(A \cap B) = 0{,}25$.

Berechne $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$, $P(A \cap \overline{B})$ sowie $P(A \cup \overline{B})$.

Aufgabe 43:

In einer Urne befinden sich 6 blaue, 9 rote und 5 weiße Kugeln, aus der einmal gezogen wird. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, eine blaue oder eine rote Kugel zu ziehen mit Hilfe der a) Laplace´schen Wahrscheinlichkeitsdefinition, b) Gegenereignisregel.

Aufgabe 44:

Zwei Münzen werden gleichzeitig geworfen. Gib die zugehörige Ereignismenge Ω an und bestimme mittels Gegenereignisregel die Wahrscheinlichkeit, dass beide Münzen Zahl anzeigen.

4.6 Ziehen von geordneten Stichproben

Beim Ziehen einer Stichprobe vom Umfang *n* aus *N* Elementen gibt es verschiedene Möglichkeiten, die in Form eines Baumdiagramms veranschaulicht werden. Die Wurzel des Baumes zeigt nach oben, jeder Ast entspricht einem Ziehungsverlauf. Am besten eignen sich Urnenbeispiele, um diese Modelle zu erklären.

4.6.1 Ziehen von geordneten Stichproben mit Zurücklegen

Beispiel 24:

Eine Urne enthält zwei Kugeln, die sich nur in ihrer Beschriftung unterscheiden: A und M. Ein Kind zieht eine Kugel, notiert den gezogenen Buchstaben und legt die Kugel wieder in die Urne zurück. Dieser Vorgang wird viermal wiederholt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind dabei das Wort „MAMA" zieht?

Das folgende Baumdiagramm soll helfen, sich einen Überblick zu verschaffen:

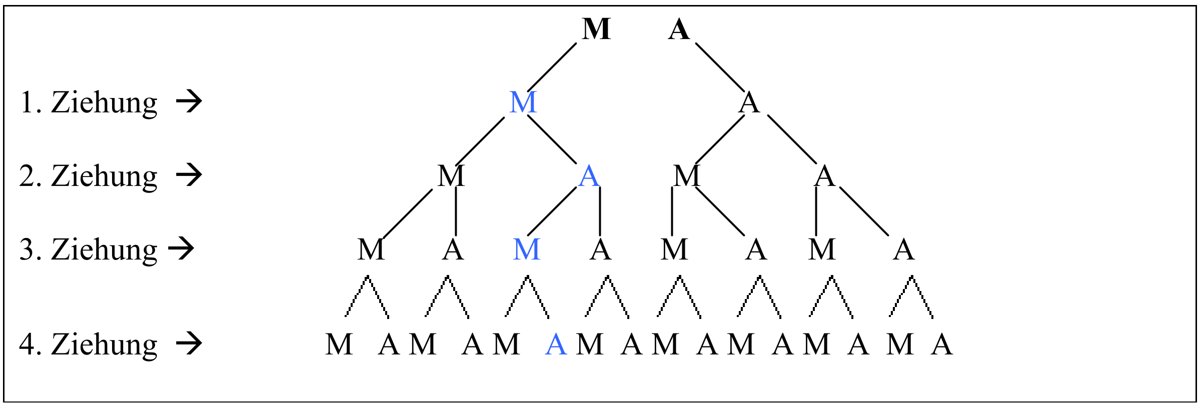


Abbildung 17: Baumdiagramm geordneter Stichproben ohne Zurücklegen

Man kann aus dem Baumdiagramm ablesen, dass es 16 verschiedene Ziehungsverläufe gibt, jedoch nur ein einziger sich als für das Beispiel günstig erweist. Da jede Möglichkeit gleiche

Wahrscheinlichkeit hat, lässt sich die Laplace´sche Wahrscheinlichkeitsregel anwenden und wir erhalten für die Wahrscheinlichkeit $P(\text{MAMA}) = \frac{1}{16}$.

Ein Ergebnis wie in diesem Beispiel bezeichnet man als **geordnete Stichprobe mit Zurücklegen**.

Betrachtet man die Stichprobe des obigen Beispiels aus mathematischer Sicht, so handelt es sich eigentlich um eine Folge. Trotzdem schreibt man, wie man es aus dem Alltag kennt $P(\text{MAMA})$ und nicht $P(\text{M; A; M; A})$.

4.6.2 Ziehen von geordneten Stichproben ohne Zurücklegen

Beispiel 25:

Wir haben nun genau vier Kugeln, zwei mit der Aufschrift „M“ und zwei mit „A“. Die Kugeln dürfen nach den Ziehungen nicht wieder in die Urne zurückgelegt werden. Wir zeichnen abermals das zugehörige Baumdiagramm:

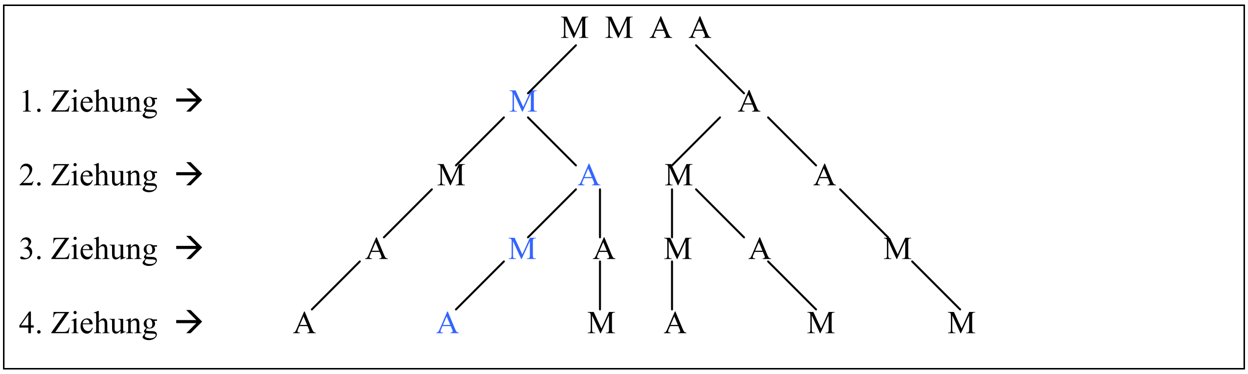


Abbildung 18: Baumdiagramm geordneter Stichproben ohne Zurücklegen

Es gibt nun 6 mögliche Ziehungsverläufe, die wiederum alle gleichwahrscheinlich sind. Wir erhalten $P(\text{MAMA}) = \frac{1}{6}$.

Ergebnisse solcher Beispiele nennt man **geordnete Stichproben ohne Zurücklegen**.

Vergleicht man die Ergebnisse von geordneten Stichproben mit und ohne Zurücklegen so lässt sich eine beträchtliche Differenz erkennen.

4.6.3 Die 1. Pfadregel

Eine andere Möglichkeit zur Lösung des letzten Beispiels geordneter Stichproben ohne Zurücklegen stellt die Zusammenfassung gleicher Pfade dar. Dies erreicht man durch Gewichtung der einzelnen Pfade. Da die Möglichkeit, beim ersten Zug ein „A" zu ziehen für unser Beispiel nicht relevant ist, seinen nur die zu „M" gehörigen Pfade skizziert:

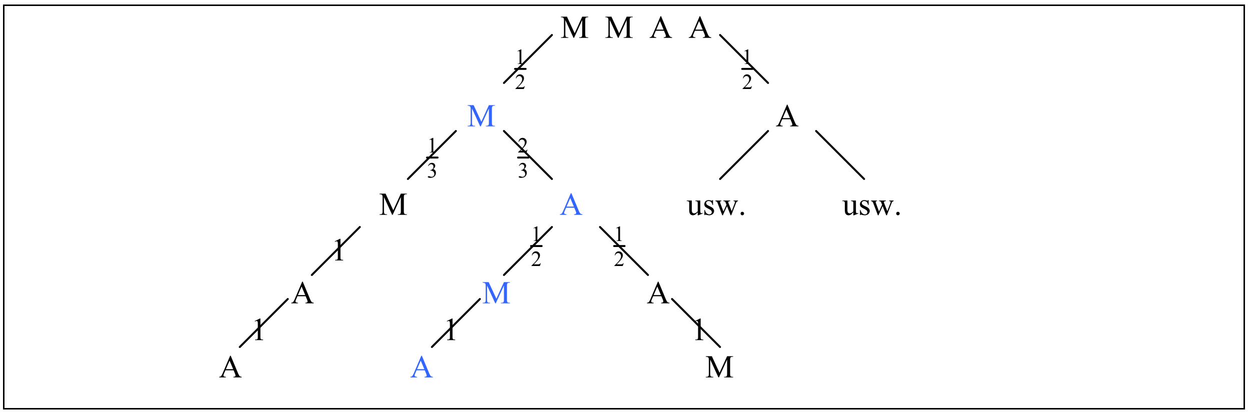


Abbildung 19: Baumdiagramm geordneter Stichproben unter Anwendg. der 1. Pfadregel

Erklärung:

Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug ein „M" zu ziehen liegt laut Laplace´scher Wahrscheinlichkeitsdefinition bei $\frac{1}{2}$. Legt man diese „M"- Kugel **nicht** wieder in die Urne zurück (es liegen jetzt noch 3 Kugeln in der Urne: ein „M" und zwei „A"), so ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Zug ein „A" zu ziehen $\frac{2}{3}$.

Beim dritten Zug, bei dem sich zwei Kugeln in der Urne befinden, wieder ein „M" zu ziehen entspricht also der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$. Damit bleibt nur noch eine Kugel übrig, die Wahrscheinlichkeit genau diese „A"- Kugel zu ziehen liegt dementsprechend bei 1.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Äste, die sich von einem Element abzweigen, muss immer 1 sein.

Zusammenfassung:

$P(1.\text{ Zug „M“}) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(3.\text{ Zug „M“}) = \frac{1}{2}$

$P(2.\text{ Zug „A“}) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $P(4.\text{ Zug „A“}) = 1$

Durch Multiplikation aller Wahrscheinlichkeiten des für das Beispiel günstigen Pfades erhalten wir

$$P(\text{MAMA}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

und haben damit eine kürzere Möglichkeit gefunden, geordnete Stichproben zu berechnen.

1. Pfadregel:
Die Wahrscheinlichkeit einer geordneten Stichprobe ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

Aufgabe 45:

Eine Münze werde drei Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Mal Zahl erscheint? Zeichne das zugehörige Baumdiagramm um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.

Aufgabe 46:

Berechne das Beispiel aus Kapitel 4.5.1 für Stichproben mit Zurücklegen mit Hilfe der 1. Pfadregel. Kontrolliere die Ergebnisse durch Vergleich!

Aufgabe 47:

In einer Urne befinden sich 3 rote, 2 weiße und 1 gelbe Kugel.

Ermittle die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen mit Zurücklegen die Farben der österreichischen Flagge in der richtigen Reihenfolge zu erhalten (*P(RWR)*=…).

Aufgabe 48:

Bei einem Sportfest besteht die Möglichkeit, einen Tages- Schiausflug für Zwei zu gewinnen. Dazu müssen aus einer Trommel mit 4 Kugeln, die die Aufschrift S, C, H, und I tragen, alle

Kugeln in der Reihenfolge gezogen werden, dass sie zusammengesetzt das Wort „Schi" ergeben.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Kugeln in der richtigen Reihenfolge zu ziehen?

b) Der Spieleinsatz beträgt 5€. Wird der Sponsor des Gewinnspiels auf lange Zeit Gewinn oder Verlust erzielen, wenn ihm solch ein Tages- Schiausflug etwa 100€ kostet?

Aufgabe 49:

Ein Volleyball- Mixed- Team besteht aus 5 Mädchen und 7 Jungs. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Wahl (ziehen eines Strohhalmes o.ä..),

a) der Team- Kapitän ein Junge ist?
b) Kapitän und Co- Kapitän gleichgeschlechtlich sind?

4.7 Ziehen von ungeordneten Stichproben

Zieht man aus einer Urne *n* Kugeln, so erhält man automatisch eine geordnete Stichprobe. Wir interessieren uns nun für die Entstehung ungeordneter Stichproben, also der Ziehung von *n* Kugeln auf einmal.

Betrachtet man Stichproben von der mathematischen Seite, so handelt es sich bei geordneten Stichproben um eine endliche Folge, bei ungeordneten Stichproben um eine Menge. Einzelne Elemente können dabei auch mehrfach auftreten.

4.7.1 Ziehen von ungeordneten Stichproben ohne Zurücklegen

Beispiel 26:

Beim Training einer Fußballmannschaft findet am Ende der Einheit immer ein Spiel zu zweimal zehn Minuten statt. In jeder Halbzeit muss jeweils ein anderer Spieler des kompletten Teams Schiedsrichter sein. Wer, entscheidet der Trainer.

Franz hat überhaupt keine Lust Schiedsrichter zu sein, er spielt viel lieber selbst. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ihn, Schiedsrichter zu sein, wenn insgesamt 13 Spieler anwesend sind?

Es handelt sich dabei tatsächlich um eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen. Ungeordnet, weil es egal ist, ob Franz in der 1. oder 2. Spielhälfte Schiedsrichter ist, ohne Zurücklegen weil Franz pro Spiel nur ein Mal dran kommen kann ($P(1\ 1) = 0$).

1 steht für „Franz ist Schiedsrichter“

0 steht für „Franz ist nicht Schiedsrichter“

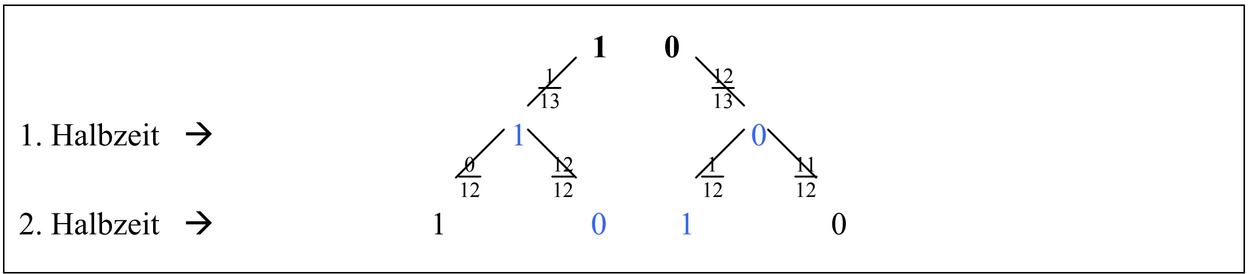


Abbildung 20: Baumdiagramm ungeordneter Stichproben ohne Zurücklegen

Es gibt also zwei Ziehungsverläufe (0 1 und 1 0), bei denen Franz zum Schiedsrichter gewählt wird. Entsprechend der 1. Pfadregel treten diese beiden Pfade mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{13} \cdot \frac{12}{12} = \frac{1}{13}$ und $\frac{12}{13} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{13}$ auf.

Fasst man die beiden Pfade durch Summieren zu einem zusammen, so erhält man:

$$\text{P(Franz ist Schiedsrichter)} = \text{P(0 1 und 1 0)} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

Franz ist es egal, ob er in der ersten oder zweiten Spielhälfte zum Schiedsrichter gewählt wird. Für ihn zählt nur, ob er in der Stichprobe vorkommt. Ihn interessieren also die **ungeordneten Stichproben ohne Zurücklegen**.

Aufgabe 50:

In einer Urne liegen 9 rote, 5 schwarze und 11 grüne Kugeln.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Ziehen von 6 Kugeln

a) genau 6 grüne,

b) 4 rote und 2 schwarze Kugeln zu ziehen.

4.7.2 Die 2. Pfadregel

Beim Ziehen ungeordneter Stichproben fasst man also die geordneten Stichproben, die sich nur in ihrer Reihenfolge unterscheiden, zusammen.

Die Wahrscheinlichkeit einer ungeordneten Stichprobe entspricht dann der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen geordneten Stichproben.

2. Pfadregel:
Die Wahrscheinlichkeit einer ungeordneten Stichprobe entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade geordneter Stichproben.

4.7.3 Ziehen von ungeordneten Stichproben mit Zurücklegen

Beispiel 27:

Obwohl generell nicht üblich, besteht die Möglichkeit, dass der Trainer Franz sowohl in der ersten, als auch in der zweiten Halbzeit als Schiedsrichter einteilt, zum Beispiel weil er mit seiner Schiedsrichterleistung der ersten Spielhälfte nicht zufrieden war.

Wie groß ist die Chance, dass Franz mindestens einmal drankommt?

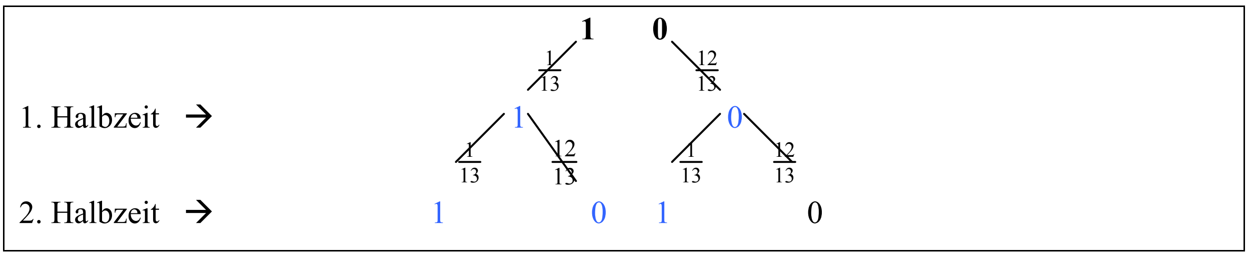


Abbildung 21: Baumdiagramm ungeordneter Stichproben mit Zurücklegen

In diesem Fall gibt es drei Ziehungsverläufe (1 1, 1 0 und 0 1) bei denen Franz zum Schiedsrichter bestimmt wird.

Wegen der 1. Pfadregel gilt:

$$P(1\ 1) = \frac{1}{13^2}$$

$$P(1\ 0) = \frac{1}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{12}{13^2}$$

$$P(0\ 1) = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{12}{13^2}$$

Durch Verwendung der 2. Pfadregel erhält man:

$$\text{P(Franz ist mind. 1mal Schiedsrichter)} = P(1\ 1) + P(1\ 0) + P(0\ 1) = \frac{25}{13^2}$$

Aufgabe 51:

Erfinde selbst ein Urnenbeispiel für ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen und führe es schriftlich aus.

Aufgabe 52:

Beim „Bauernschnapsen“ werden alle Karten verteilt, jeder der 4 Spieler erhält demnach 5 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler

a) alle 4 Asse,

b) alle Karten einer Spielfarbe

c) 3 Asse und 2 Damen erhält?

Aufgabe 53:

Bei der Wahl des neuen Präsidenten eines Fußballclubs hat jedes Mitglied 3 Stimmen. Es kandidieren 4 Personen, wobei man jeder Person beliebig viele Stimmen geben darf. Wie viele Möglichkeiten hat ein Clubmitglied seine Stimmen zu verteilen, wenn er alle 3 Stimmen abgibt?

Aufgabe 54:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Fußball- Totoschein auszufüllen? Es gibt 12 Spiele, 1 steht dafür, dass die erste Mannschaft gewinnt, 2 für die zweite Mannschaft und *x* für ein Unentschieden.

Aufgabe 55:

Zwei österreichische Leichtathletinnen starten bei einem internationalen Leichtathletik-Mehrkampf mit 45 Startern. Die Dopingkommission wählt nach dem Wettkampf zufällig 3 Sportler aus und unterzieht sie einer Dopingkontrolle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) beide österreichischen Athletinnen,

b) mindestens eine österreichische Athletin zur Dopingkontrolle muss.

4.8 Kombinatorik

Bis jetzt wurde mit der Laplace´schen Wahrscheinlichkeit gearbeitet, die voraussetzt, dass es nur endlich viele Versuchsergebnisse gibt, die gleichwahrscheinlich sind. Für große Werte ist es oft mühsam, die Anzahl der günstigen und möglichen Versuchsergebnisse zu ermitteln, weshalb in der Kombinatorik Formeln bereitgestellt werden, die einer gewissen Systematik unterliegen, die nun behandelt werden sollen.

4.8.1 Anordnungsmöglichkeiten (Permutationen)

Eine Permutation von n Elementen ist die Anordnung dieser Elemente. Es gibt genau n Möglichkeiten für die Auswahl des ersten der n Elemente, somit bleiben für das zweite Element noch (n - 1) Möglichkeiten. Fährt man in dieser Reihenfolge fort, so erhält man für die Auswahl des letzten (n - ten) Elements nur mehr eine einzige Möglichkeit. Es gilt also:

n verschiedene Elemente lassen sich (unter Berücksichtigung der Reihenfolge) auf

$n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\,\ldots\,.\,2\,.\,1 = n!$ („n - Fakultät“)

verschiedene Arten anordnen.

Dies entspricht der **Anzahl der Permutationen**.

$n! = n\,.\,(n-1)!$

$0! = 1$

Anordnungsmöglichkeiten für Gruppen mit gleichen Elementen:

Von n Elementen seinen jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_r$ gleich. $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Dann gibt es für diese n Elemente (unter Berücksichtigung der Reihenfolge)

$\frac{n!}{n_1!.\, n_2!.\, \ldots.\, n_r!}$ verschiedene Anordnungsmöglichkeiten.

Beispiel 28:

Drei Athletinnen eines Leichtathletikteams schaffen es in den 100m Finallauf, die jeweilige Startbahn wird per Zufall zugeordnet. Insgesamt starten 8 Läuferinnen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Teammitglieder nebeneinander starten?

Lösung:

Es gibt insgesamt $\frac{8!}{3!.\, 5!} = \frac{1.\, 2.\, 3.\, 4.\, 5.\, 6.\, 7.\, 8}{1.\, 2.\, 3.\, 1.\, 2.\, 3.\, 4.\, 5} = \frac{6.\, 7.\, 8}{2.\, 3} = 56$ **mögliche Fälle**.

Um die günstigen Fälle zu bestimmen schreiben wir T für Teammitglied und L für alle anderen Läuferinnen:

T T T L L L L L; L T T T L L L L; L L T T T L L L;

L L L T T T L L; L L L L T T T L; L L L L L T T T;

Damit erhalten wir 6 Möglichkeiten für die **günstigen Fälle** und können die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Laplace´schen Wahrscheinlichkeitsregel berechnen:

$P(\text{Team startet nebeneinander}) = \frac{6}{56} \approx 0{,}1071$

Aufgabe 56:

Bei einem Ringkampf mit 12 Startern muss jeder Ringer gegen jeden andern ein Mal kämpfen. Wie viele Kämpfe finden statt?

Aufgabe 57:

In einer Urne sind 11 Kugeln: 3 grüne, 4 rote und 4 blaue. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim nacheinander Ziehen der einzelnen Kugeln ohne Zurücklegen, dass die drei grünen Kugeln hintereinander gezogen werden?

4.8.2 Auswahlmöglichkeiten für geordnete Stichproben (Variationen)

Von n verschiedenen Elementen sollen k Stück nacheinander ausgewählt werden, wobei die Reihenfolge der gezogenen Elemente berücksichtigt werden soll.

Variationen ohne Zurücklegen:
Für den ersten Zug gibt es n Möglichkeiten das richtige Element zu wählen, beim zweiten Zug $(n-1)$, usw. Für das k- te Element gibt es schließlich $n-(k-1)=n-k+1$ Möglichkeiten.
Also gibt es insgesamt
$n.(n-1).(n-2).\ \dots\ .(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, für $k\leq n$.

Variationen mit Zurücklegen:
In diesem Fall wird bei jeder Ziehung aus der Grundgesamtheit mit jeweils n Möglichkeiten, das richtige Element zu ziehen, ausgewählt.
Es gibt n^k Möglichkeiten, für beliebiges k.

4.8.3 Auswahlmöglichkeiten für ungeordnete Stichproben (Kombinationen)

Von n verschiedenen Elementen sollen k Stück gezogen werden, die Reihenfolge der Ziehungen spielt dabei keine Rolle.

Kombinationen ohne Zurücklegen:

Die k Elemente werden entweder einzeln oder auf einmal gezogen und nicht mehr zu den übrigen Elementen zurückgelegt ($k\leq n$).

Wir betrachten zunächst geordnete Stichproben, bei denen es

$n.\,(n-1).\,(n-2).\,\dots\,.\,(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten gibt, k Elemente aus n Elementen zu ziehen. Da k Elemente auf $k!$ verschiedene Arten angeordnet werden können, bestimmen $k!$ geordnete Stichproben ein und dieselbe ungeordnete Stichprobe.

Die Anzahl der ungeordneten Stichproben sei also $\dfrac{n.\,(n-1).\,(n-2).\,\dots\,.\,(n-k+1)}{k!}$

Erweitert man diesen Bruch nun mit $(n-k)!$, so erhalten wir $\dfrac{n!}{k!.\,(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$.

$\dbinom{n}{k}$ („n über k“) heißt Binomialkoeffizient.

> **Kombinationen ohne Zurücklegen:**
> Aus n verschiedenen Elementen können k Elemente ungeordnet und ohne Zurücklegen auf $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n.\,(n-1).\,(n-2).\,\dots\,.\,(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!.\,(n-k)!}$ verschiedene Arten
>
> für $k = 1, 2, \dots, n$ gezogen werden.

Einschub: Binomischer Lehrsatz

Der Binomische Lehrsatz ist an sich Stoffgebiet der 6. Klasse, die wichtigsten Formeln und Eigenschaften sollen an dieser Stelle zur Erinnerung nochmals wiederholt werden.

> **Binomischer Lehrsatz:**
> $(p+q)^n = \dbinom{n}{0} p^n q^0 + \dbinom{n}{1} p^{n-1} q + \dots + \dbinom{n}{n-1} p^1 q^{n-1} + \dbinom{n}{n} p^0 q^n$

Die Koeffizienten werden Binomialkoeffizienten genannt und können mit dem Pascal´schen Dreieck oder einer Formel berechnet werden:

Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.\,(n-k)!} = \frac{n.\,(n-1).\,(n-2).\,\dots\,.(n-k+1)}{k.\,(k-1).\,(k-2).\,\dots\,.\,1}$$

Symmetriebeziehung:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Es gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Einschub Ende

Kombinationen mit Zurücklegen:

Für die ungeordnete Auswahl von k aus n Elementen mit Zurücklegen erhält man

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1).\,(n+k-2).\,\dots\,.\,n}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!.\,(n-1)!}$$

4.8.4 Zusammenfassung

Tabelle 30: Formeln der Kombinatorik

Stichprobe	geordnet (Variationen)	ungeordnet (Kombinationen)
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Aufgabe 58:

Berechne:

a) $\binom{9}{5} =$ b) $\binom{6}{3} =$ c) $\binom{11}{11} =$ d) $\binom{4}{1} =$

Aufgabe 59:

Wie viele Anordnungsmöglichkeiten bestehen für 25 Insassen eines Fan-Busses, wenn 25 Sitzplätze vorhanden sind?

Wie viele Möglichkeiten bestehen, wenn es für die 25 Insassen einen Sitzplatz mehr gibt?

Aufgabe 60:

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Disziplinen eines Leichtathletik- Siebenkampfes?

Bestimme außerdem die Anzahl der Möglichkeiten an Reihenfolgen, wenn der 800m- Lauf – wie meist üblich - am Ende durchgeführt wird.

Aufgabe 61:

Sportpferde tragen internationale Turniernummern. Wie viele fünfstellige Nummern kann man aus zwei Sechsern und drei Neunern bilden?

Aufgabe 62:

Siebzehn Schüler, davon 6 Burschen und 11 Mädchen besuchen das Hauptfach Gerätturnen, jedoch dürfen nur 3 Burschen und 5 Mädchen bei einem Schulwettkampf antreten.

a) Wie viele Möglichkeiten der Anordnung bestehen?
b) Der Trainer möchte natürlich das beste Mädchen und den besten Knaben auf jeden Fall dabei haben. Wie viele Möglichkeiten gibt es dann für die übrigen Turner?

Aufgabe 63:

In einer Sportklasse sind 19 Schüler. Drei der 11 Mädchen und fünf der 8 Burschen haben bereits den Kurs zum Rettungsschwimmer gemacht.

Nach einem heißen Schultag gehen 3 Mädchen und 4 Burschen ins Schwimmbad. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 7 Schüler Rettungsschwimmer sind?

Aufgabe 64:

„Lotto- 6 aus 45“: Berechne die Wahrscheinlichkeit

a) eines „Sechsers“
b) eines „Dreiers“
c) mindestens drei richtiger, bei einem abgegebenen Tipp.

(Hinweis: die Gewinnchance eines „Fünfers mit Zusatzzahl“ soll bei dieser Aufgabe nicht berücksichtigt werden!)

4.9 Bedingte Wahrscheinlichkeit

„Die absolute Wahrscheinlichkeit $P(A)$ darf nur dann als Maß für die Chance eines Eintretens des Ereignisses A benutzt werden, wenn das Zufallsexperiment noch nicht begonnen hat oder über das laufende bzw. bereits beendete Zufallsexperiment keinerlei Information vorliegt.“, so Bosch (1996, S. 179).

Kennt man Teilinformationen über den Ausgang des Experiments, so kann man bereits voraussagen, dass gewisse Ereignisse nicht auftreten können. Dadurch ändern sich Ereignismenge und unter Umständen auch Wahrscheinlichkeiten. Solche, von Informationen abhängige Wahrscheinlichkeiten nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeiten**. Man spricht auch von bedingter Wahrscheinlichkeit, wenn man an der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass ein bestimmtes Ereignis B eintritt, Interesse hat.

Beispiel 29:

Ein Sportverein setzt sich aus folgenden Personengruppen zusammen:

Tabelle 31: Mitglieder eines Sportvereins

	Kinder und Jugendliche (K)	Erwachsene (E)	Summe
weiblich (W)	29	46	75
männlich (M)	28	57	85
Summe	57	103	160

Aus allen Vereinsmitgliedern wird eines zufällig ausgewählt.

$P(M) = \frac{85}{160} = 0{,}5313$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählte Person männlich ist,

$P(E) = \frac{103}{160} = 0{,}6438$, dass die Person erwachsen ist.

Mit Wahrscheinlichkeit $P(M \cap E) = \frac{57}{160} = 0{,}3563$ wird ein männlicher Erwachsener ausgewählt.

Weiß man bereits im Vorhinein, dass die ausgewählte Person männlich ist, so ist diese Person mit $p = \frac{57}{85}$ erwachsen. Dabei handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E unter der Bedingung, dass M eingetreten ist, eintritt. Man bezeichnet diese bedingte Wahrscheinlichkeit mit $P(M|E)$ und nennt sie die „Wahrscheinlichkeit von M unter der Bedingung E".

Es gilt: $P(M|E) = \frac{P(M \cap E)}{P(M)} = \frac{\frac{57}{160}}{\frac{85}{160}} = \frac{57}{85} = 0{,}6706$

> Sei $P(B) > 0$. Dann heißt $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses A unter der Bedingung B.

Sie ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A eintritt, unter der Bedingung dass B eintritt oder bereits eingetreten ist. Es findet eine Einschränkung der Ereignismenge Ω auf B statt, da Versuche, bei denen B nicht eintritt nicht interessieren.

Falls $P(A|B) = P(A)$, dann ist das Ereignis A unabhängig von B. Die Information, dass B bereits eingetreten ist ändert nichts an der Wahrscheinlichkeit von A.

Manchmal erweist es sich als nicht so einfach, $P(A \cap B)$ zu berechnen. In diesem Fall kann nach folgender Produktregel gerechnet werden:

Multiplikationssatz bedingter Wahrscheinlichkeiten:
$P(A \cap B) = P(A|B) \,.\, P(B) = P(B|A) \,.\, P(A)$, für $P(A)$ bzw. $P(B) > 0$.

Allgemeine Produktregel bedingter Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A_n \cap A_{n-1} \cap \ldots \cap A_1) = P(A_n \,|A_{n-1} \cap \ldots \cap A_1) \,.\, P(A_{n-1} \,|A_{n-2} \cap \ldots \cap A_1) \,.\, \ldots \,. \; P(A_3 \,|A_2 \cap A_1) \,.\, P(A_2 \,|A_1).\, P(A_1)$$

Aufgabe 65:

In folgender Tabelle seien die Lieblings-Ballsportarten der Schüler einer Klasse notiert:

Tabelle 32: Auflistung der Ballsportarten

	Basketball (*B*)	Fußball (*F*)	Handball (*H*)	Volleyball (*V*)	$\sum$
Mädchen (*M*)	5	1	2	6	14
Jungen (*J*)	4	5	2	4	15
$\sum$	9	6	4	10	29

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten

a) für die Ereignisse M, J, B, F, H und V?

b) für die Ereignisse $M\cap B, M\cap F, M\cap H, M\cap V, J\cap B, J\cap F, J\cap H, M\cap V$?

Berechne die bedingt Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Schüler

a) Fußball mag, wenn man weiß, dass es sich um ein Mädchen handelt.

b) ein Junge ist, wenn man weiß, dass er Handball oder Volleyball mag.

c) Basketball mag, wenn man weiß, dass der Schüler ein Junge ist.

Der Satz von Bayes wird im Lehrplan der Oberstufe nicht zwingend vorgeschrieben, es unterliegt dem jeweiligen Lehrer, ob er ihn anwenden möchte, oder nicht.

Laut Multiplikationssatz gilt: $P(B\cap A) = P(B|A)$.

Und weil $A \cap B = B \cap A$ gilt: $P(B|A)=P(A|B).\dfrac{P(B)}{P(A)}$

Das entspricht einer formalen Umkehrung bedingter Wahrscheinlichkeiten, mit dem Hintergrund, von der Wirkung auf die Ursache schließen zu können.

Satz von Bayes: $P(B|A)=P(A|B).\dfrac{P(B)}{P(A)}$, für $P(A)>0$.

4.10 Diskrete Zufallsvariablen

Das Ergebnis eines Zufallsexperiments tritt meist in Form einer reellen Zahl auf. So zum Beispiel beim Zählen, Messen oder Wiegen bestimmter Gegenstände oder Personen. Wenn die Versuchsergebnisse keine Zahlen sind, interessiert man sich nur für einen durch sie bestimmten Zahlenwert.

Ausgehend von einem Zufallsexperiment und der zugehörigen Menge aller Elementarereignisse $\omega \in \Omega$, wird jedem solchen ω eine reelle Zahl x_ω zugeordnet, die das Elementarereignis ω charakterisieren soll.

Diese Zuordnung wird durch die Funktion X: $\Omega \rightarrow$ IR bestimmt, ihre Realisierungen x_ω sind die Werte $X(\omega)$. Die Funktion X wird **Zufallsvariable** genannt.

Eine Zufallsvariable ist also eine Größe X, die als Ergebnis eines Experiments verschiedene, nicht vorhersehbare reelle Zahlen $X(\omega)$ annehmen kann.

Die Funktion X: $\Omega \rightarrow$ IR heißt Zufallsvariable: $X(\omega) = x_\omega$

Ausprägungen qualitativer Merkmale können so auch durch quantitative Merkmale dargestellt werden. Je nachdem, ob X nur endlich viele Werte annehmen kann oder Werte eines bestimmten Intervalls, spricht man von diskreter oder stetiger Zufallsvariable. Diskrete Zufallsvariablen erhält man vor allem bei Zählvorgängen, stetige Zufallsvariablen bei Messvorgängen.

Die Augenzahl beim Würfeln, das Symbol beim Münzwurf sowie die Anzahl von Personen zählen zu den diskreten Zufallsvariablen, Körpergrößen, Geschwindigkeiten oder Gewichte beispielsweise zählen zu den stetigen Zufallsvariablen.

Die Wahrscheinlichkeit, mit der X die Werte x_ω annimmt, beschreibt die **Verteilung der Zufallsvariablen X**. Abhängig davon, ob es sich um diskrete oder stetige Zufallsvariablen handelt, spricht man von diskreten und stetigen Verteilungen.

4.10.1 Begriffserklärung

Der Begriff der diskreten Zufallsvariablen soll hier noch einmal verdeutlicht werden:

Bei einem Zufallsexperiment wird jedem Versuchsergebnis $\omega \in \Omega$ eine Zahl $X(\omega) \in$ IR zugeordnet. Die Anzahl der Werte von X sei endlich: $W(X) = \{x_1, x_{2, \ldots,} x_n\}$.

Dann gilt: für jedes $x_i \in W$ hat das Ereignis $A_i = \{\omega \in \Omega | \; X(\omega) = x_i\}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i) = P(A_i) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\})$.

Diese Abbildung wird **diskrete Zufallsvariable** genannt.

Für $x \notin W$ gilt: $P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}) = 0$, das heißt jede Stelle außerhalb von W hat Wahrscheinlichkeit Null.

Die Gesamtheit aller Zahlenpaare x_i $(P(X = x_i))$ *für* $x_i \in W$ nennt man (Wahrscheinlichkeits-) Verteilung von X.

Mit Hilfe einer Tabelle kann dies anschaulich dargestellt werden:

Tabelle 33: Zahlenwerte mit Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens

Werte von X	x_1	x_2	…	x_n
Wahrscheinlichkeiten	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	…	$P(X = x_n)$

Damit muss gelten:

- $P(X = x_i) = p_i \geq 0$, für alle i
- $\sum_i p_i = 1$

Weiters gilt für $k \leq n$

- $P(X \leq x_k) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_k) = \sum_{j=1}^{k} p_j$

- $P(X > x_k) = 1 - P(X \leq x_k) = 1 - (P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_k)) = 1 - \sum_{j=1}^{k} p_j$

Beispiel 30:

Augensumme von zwei idealen Würfeln.

Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Die Wahrscheinlichkeiten für alle Augenzahlen sind gleich. Als Versuchsergebnis erhalten wir geordnete Zahlenpaare (i, j), wobei i immer die Augenzahl der ersten, j die Augenzahl des zweiten Würfels beschreibt. Damit erhalten wir folgende Tabelle aller Möglichkeiten für Paare mit der gleichen Augenzahl:

Tabelle 34: Möglichkeiten aller Zahlenpaare beim Würfeln mit zwei idealen Würfeln

Augensumme	Paare	Anzahl der Paare
2	(1, 1)	1
3	(1, 2); (2, 1)	2
4	(1, 3); (3, 1); (2, 2)	3
5	(1, 4); (4, 1); (2, 3); (3, 2)	4
6	(1, 5); (5, 1); (2, 4); (4, 2); (3, 3)	5
7	(1, 6); (6, 1); (2, 5); (5, 2); (3, 4); (4, 3)	6
8	(2, 6); (6, 2); (3, 5); (5, 3); (4, 4)	5
9	(3, 6); (6, 3); (4, 5); (5, 4)	4
10	(4, 6); (6, 4); (5, 5)	3
11	(5, 6); (6, 5)	2
12	(6, 6)	1

Wir erhalten 36 mögliche Paare, die alle der gleichen Wahrscheinlichkeit unterliegen. Man erhält für die Zufallsvariable X der Augensummen folgende Verteilung:

Tabelle 35: Summe der Augenzahlen mit Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$ ≈0,03	$\frac{2}{36}$ ≈0,06	$\frac{3}{36}$ ≈0,08	$\frac{4}{36}$ ≈0,11	$\frac{5}{36}$ ≈0,14	$\frac{6}{36}$ ≈0,17	$\frac{5}{36}$ ≈0,14	$\frac{4}{36}$ ≈0,11	$\frac{3}{36}$ ≈0,08	$\frac{2}{36}$ ≈0,06	$\frac{1}{36}$ ≈0,03

Genauso wie die Häufigkeitsverteilungen von Stichproben graphisch dargestellt werden, können auch Verteilungen diskreter Zufallsvariablen zum Beispiel in einem Balkendiagramm graphisch dargestellt werden.

Dabei werden auf der Ordinate die Werte x_i der Zufallsvariablen X, die Augensummen, dargestellt, die Längen der Balken entsprechen den Wahrscheinlichkeiten p_i für deren Auftreten:

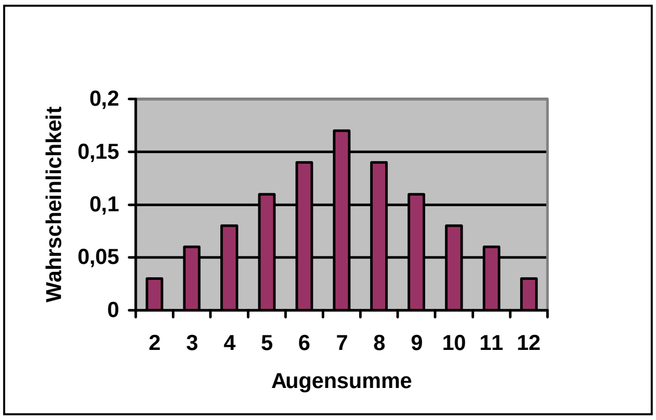


Abbildung 22: Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen

Wirft man die beiden Würfel sehr oft und nimmt als Stichprobe die Augensummen, so liegen deren relative Häufigkeiten laut Gesetz der großen Zahlen meistens in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten. Das Balkendiagramm der relativen Häufigkeiten der Stichprobe wird also dem der Verteilung der Zufallsvariablen X sehr ähnlich sein.

4.10.2 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Beispiel 31:

Wir werfen einen idealen Würfel, X sei die Augenzahl. Die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Augenzahlen sind gleich groß: $P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$

Diese Zufallsvariablen können ebenso wie im letzten Beispiel dargestellt werden, indem man Werte und Wahrscheinlichkeiten auf Ordinate und Abszisse abträgt:

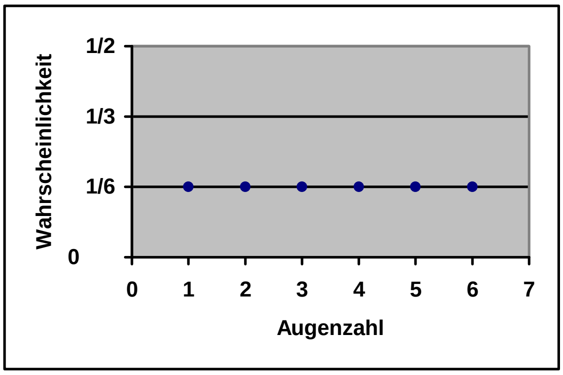


Abbildung 23: Wahrscheinlichkeitsfunktion beim Würfeln

Diese Darstellung der diskreten Zufallsvariablen nennt man Wahrscheinlichkeitsfunktion.

> Die Funktion
> f: $\mathrm{IR} \rightarrow [0;1]$, $y(x) = P(X = x_i)$ für $i \in \mathrm{IN}^*$ heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion**.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion hat jedoch zwei wesentliche Nachteile:

1. Betrachtet man die Funktion von der graphischen Seite so besteht sie aus lauter Einzelpunkten. Durch Verbindung der Punkte zu einem Polygonzug oder durch Darstellung der Funktion als eine Treppenfunktion kann dieser Nachteil „korrigiert“ werden.
2. Der eigentliche Nachteil zeigt sich erst bei kontinuierlichen Zufallsvariablen, da für eine bestimmte Zahl x die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ im allgemeinen Null ist. Beispiel Glücksrad: die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger genau bei einem bestimmten Punkt P stehen bleibt ist Null. Sei der Winkel X die Zufallsvariable, so gilt für α (0° ≤ α < 360°) : $P(X = \alpha) = 0$

Für Verlaufsdarstellungen von Zufallsvariablen wählt man die Verteilungsfunktion, die für die Beschreibung sowohl von stetigen, als auch von diskreten Zufallsvariablen als eine einheitliche Methode gilt.

4.10.3 Verteilungsfunktion

Oft interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Versuchsdurchführung die Realisierungen der Zufallsvariablen X nicht größer als ein bestimmter, fest vorgegebener Zahlenwert x ist ($P(X \leq x)$).

> Die Funktion
>
> $F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) = \sum_{xi \leq x} f(x_i) = \sum_{xi \leq x} P(X = x_i)$, für alle $x \in$ IR
>
> heißt **Verteilungsfunktion** der diskreten Zufallsvariablen X.

Beispiel 32:

Beim Werfen mit einem idealen Würfel gilt $P(X = i) = p_i = \frac{1}{6}$ für $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Die folgende Abbildung beschreibt die Verteilungsfunktion des Beispiels:

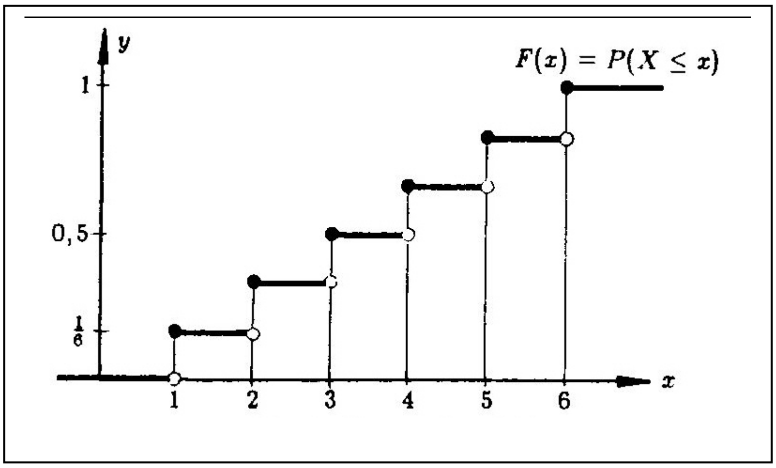


Abbildung 24: Verteilungsfunktion beim Würfeln (Reichel, 1992, S. 134)

Einige wichtige Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

- $P(X \leq a) = F(a)$ für $a \in \mathbb{R}$ fest.
- $P(X > b) = 1 - F(b)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- Wenn F bei x_0 keine Sprungsstelle hat, dann ist $P(X = x_0) = 0$
- F ist monoton wachsend und beschränkt
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Aufgabe 66:

Ein Trafikant verkauft eine wöchentlich erscheinende Sportzeitung. Alte Exemplare können bei Erscheinen der neuen Ausgabe nicht mehr verkauft werden und werden deshalb entsorgt.

Die Anzahl $X= x_i$ der verkauften Exemplare innerhalb dieser Woche sei eine Zufallsvariable mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion:

Tabelle 36: Anzahl der Exemplare mit Wahrscheinlichkeiten ihres Verkaufs

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	> 10
$P(X=x_i)$	0,01	0,02	0,04	0,06	0,07	0,1	0,09	0,08	0,05	0,04	0,01	0,00

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass (1) genau 5, (2) mindestens 5, (3) höchstens 5 und (4) weniger als 5 Exemplare in der Woche verkauft werden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb eines Monats (4 Wochen) wöchentlich mindestens 4 Exemplare der Sportzeitung verkauft werden?

Aufgabe 67:

Ein internationaler Schwimmwettkampf hat 90 Starter. Wie groß ist bei zufälliger Auswahl von 4 Schwimmern die Chance a) genau einen, b) genau zwei, c) genau drei oder d) genau vier Dopingsünder auszuforschen, wenn erfahrungsgemäß 5% dopen.

Beschreibe die Verteilung der Zufallsvariablen X mit Hilfe einer Wertetabelle, der Wahrscheinlichkeitsfunktion und der Verteilungsfunktion!

Aufgabe 68:

Beim „Mensch ärgere dich nicht“- Spiel darf erst ein Spielstein auf das erste Feld gesetzt werden, wenn man eine 6 gewürfelt hat. Die Zufallsvariable $X = k$, wenn beim k- ten Versuch eine 6 aufscheint.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, beim 1., beim 2., … beim k- ten Mal eine 6 zu würfeln.

Aufgabe 69:

Wenn Susanne laufen geht muss sie gleich zu Beginn hintereinander 4 Fußgängerampeln überqueren. Jede Ampel ist mit Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ rot.

Bestimme die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X = Anzahl der Ampeln, bei denen Susanne die Straße überqueren darf, ehe sie zum ersten Mal stehen bleiben muss.

Aufgabe 70:

Ein Würfel wurde so manipuliert, dass die Wahrscheinlichkeit, die Augenzahl i zu würfeln proportional zu i ist. Die Wahrscheinlichkeit eine Vier zu werfen ist also beispielsweise doppelt so hoch wie die einer Zwei.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsfunktion für den einmaligen Wurf.

b) Zwei Mal würfeln: Bestimme $P(\text{Augensumme} \leq 9)$!

Es ist nicht immer notwendig, die gesamte Verteilung der Wahrscheinlichkeiten bzw. die Verteilungsfunktion von Zufallsvariablen zu kennen. Oft genügt die Kenntnis gewisser Maßzahlen (Parameter) wie Erwartungswert und Streuung zur Beschreibung der Zufallsvariablen.

4.10.4 Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X oder einer durch sie bestimmten Gewinnfunktion $g(X)$ entspricht einer Art Mittelwert, von deren Berechnung vor allem die Wirtschaft profitieren kann. Versicherungen müssen beispielsweise den Erwartungswert der auszuzahlenden Schadenssummen kennen, um ihre Tarife berechnen zu können, zur Preiskalkulation von Waren muss man den Erwartungswert der Reklamationen aufgrund von Schadensfällen wissen.

Ein Versuch wird nun n-mal wiederholt, dabei wird die Zufallsvariable X beobachtet, die die Werte $x_1, x_{2, \ldots,} x_m$ annehmen kann. Es gibt also m Realisierungen der Zufallsvariablen X, die in der Versuchsserie h_1- bis h_m- mal angenommen werden. Diese h_i entsprechen also den absoluten Häufigkeiten der verschiedenen Werte und es gilt:

$$\bar{x} = \frac{x_1 . h_1 + x_2 . h_2 + \ldots + x_m . h_m}{n} = \sum_{i=1}^{m} x_i . \frac{h_i}{n}$$

Das entspricht dem (gewogenen arithmetischen) Mittelwert, den die Zufallsvariable sozusagen pro Versuchsdurchgang annimmt. Der Bruch $\frac{h_i}{n}$ stellt die relativen Häufigkeiten dar, die sich durch die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ approximieren lassen.

Die Zahl $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i . P(X = x_i)$ heißt der **Erwartungswert** von X.

Als meist viel interessanter erweist sich die Frage nach der Gewinnerwartung, die dem Erwartungswert einer Gewinnfunktion $g(X)$ entspricht. Die Werte $g(x_i)$ geben an, wie hoch der Gewinn ist, wenn $X = x_i$ eintritt. Verluste werden als „negative Gewinne“ gehandhabt.

Die Zahl $E(g(X)) = \sum_{i=1}^{m} g(x_i). P(X = x_i)$ bezeichnet den Erwartungswert der diskreten Gewinnfunktion $g(X)$. Man spricht von der **Gewinnerwartung**.

Beispiel 32:

Ein idealer Würfel wird einmal geworfen.

Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der verschiedenen Augenzahlen ist gleich. Es gilt:

$P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = \frac{1}{6}$ für einen Wurf.

Wenn man den Würfel nun n- mal wirft so erhält man

$$\frac{n}{6}.1 + \frac{n}{6}.2 + \frac{n}{6}.3 + \frac{n}{6}.4 + \frac{n}{6}.5 + \frac{n}{6}.6 = \frac{n}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6).$$

Pro Spiel ($n = 1$) beträgt der Erwartungswert $E(X)$ für die gewürfelte Augenzahl X:

$E(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5$

(Würde man die gewürfelte Augenzahl in € ausbezahlt bekommen, so dürften 3,50 € eingesetzt werden.)

Aufgabe 71:

Für die Augenzahl *i* wird nun das Doppelte ausbezahlt. Wie viel ist dieses Angebot wert?

Aufgabe 72:

Welche Anzahl an Dopingsündern dürfen die Dopingfahnder aus Bsp. X bei $n = 4$ Kontrollen erwarten? Zeichne μ in der Graphik der Wahrscheinlichkeitsfunktion ein.

Wie ist das Ergebnis zu interpretieren?

Aufgabe 73:

Bestimme den Erwartungswert der Monatslänge.

Hinweis: Schaltjahre nicht vergessen!

Aufgabe 74:

Ein Leichtathletikverein denkt über die Anschaffung elektronischer Startmaschinen nach. Da die Maschinen einer gewissen Störanfälligkeit unterliegen und das Budget des Vereins recht klein ist, denkt der Kassier gründlich über die Ausgabe nach. Er weiß, dass die häufigsten Störungen A, B und C erfahrungsgemäß mit folgenden Wahrscheinlichkeiten in einem Jahr eintreten und genannte Kosten verursachen:

Tabelle 37: Wahrscheinlichkeiten und Kosten verschiedener Störungen

Störung	A	B	C
P	0,05	0,18	0,11
Kosten (€)	2000,-	150,-	500,-

Welche Kosten für die Reparatur sind im Durchschnitt jährlich zu erwarten?

Aufgabe 75:

Beim „Mensch ärgere dich nicht“- Spiel darf erst ein Spielstein auf das erste Feld gesetzt werden, wenn man eine 6 gewürfelt hat. Die Zufallsvariable $X = k$, wenn beim k- ten Versuch eine 6 aufscheint.

Wie viele Versuche sind durchschnittlich erforderlich?

4.10.5 Varianz und Standardabweichung

Um eine Verteilung hinreichend zu beschreiben genügt nicht alleine die Kenntnis des Erwartungswertes.

Die sogenannte Streuung gilt als ein Parameter, der aufzeigen soll, wie sehr die Zufallsvariable X um den Erwartungswert streut, also wie sehr sie von ihm abweicht. Rein intuitiv möge man meinen, dies ließe sich ganz simpel wie folgt berechnen:

$\sigma = E\,(X - \mu)$, da μ der Erwartungswert von X ist.

Diese Definition erweist sich jedoch schnell als nicht brauchbar, weil:

$E\,(X - \mu) = E(X) - E(\mu) = \mu - \mu = 0$

Ein gleiches Problem hatten wir schon in der deskriptiven Statistik, wo die Summe der Abweichungen vom Mittelwert gleich Null war. Um dies zu verhindern haben wir die mittlere quadratische Abweichung genommen.

Wir verwenden auch jetzt $E[(X - \mu)^2]$ und nennen den arithmetischen Mittelwert der Quadrate der Abweichungen vom Erwartungswert die Varianz von X.

Als **Varianz** einer diskreten Zufallsvariable bezeichnet man die Zahl

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 .\, P(X = x_i)$$

σ heißt **Standardabweichung** (Streuung) der Zufallsvariablen X.

Durch Umformen erhalten wir die wesentlich praktischere Formel

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Aufgabe 76:

Versuche durch Umformung von der Definition der Varianz zur vereinfachten Formel zu gelangen.

Aufgabe 77:

Auf dem Schlüsselbund der Turnhalle einer Schule befinden sich 6 äußerlich kaum unterscheidbare Schlüssel, von denen jedoch nur einer in das Schloss des Ballkastens passt. Bestimme Erwartungswert und Standardabweichung für die Anzahl der benötigten Versuche, wenn ausprobierte Schlüssel a) beiseite gelegt, b) zu den übrigen Schlüsseln wieder zurück gelegt werden.

Aufgabe 78:

Zusatz zu Aufgabe 66:

Bestimme Erwartungswert und Varianz der Anzahl der verkauften Zeitungsexemplare.

Der Trafikant bezahlt für ein Exemplar 0,80 € und verkauft es um 1,90 €. Bestimme Erwartungswert und Varianz des Gewinns aus dem Verkauf der Zeitschriften.

4.10.6 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung gilt als eine der wichtigsten Verteilungen. Bei einem Experiment ist man meist an der Anzahl der Erfolge, die bei n Versuchen auftreten, nicht aber an deren Reihenfolge interessiert.

Bei einem Einzelexperiment hat das Ereignis A die Wahrscheinlichkeit $P(A) = p$.

Es gelte: $0 < p < 1$.

Ein Zufallsexperiment wird nun n-mal wiederholt. Dabei wird jedes Mal vom selben Ereignis A ausgegangen, das mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p eintritt. Die einzelnen Versuchsausgänge wirken sich also nicht auf p aus, p bleibt bei jedem Versuch gleich.

Die Versuchsergebnisse des n-stufigen Zufallsexperiments können als n-Tupel dargestellt werden, deren Inhalte entweder das Ereignis A, oder – bei nicht Eintreffen – das Gegenereignis $\overline{A}$ sind (Bsp.: $(A, \overline{A}, \overline{A}, A, A, \overline{A}, \ldots)$.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines solchen Tupels wird abgezählt, wie oft das Ereignis A in diesem Tupel vorkommt. Wenn das Ereignis A k-mal, und daraus resultierend das Ereignis $\overline{A}$ $(n - k)$- mal aufscheinen, so besitzt dieses n-Tupel die Wahrscheinlichkeit $p^k . (1 - p)^{n-k}$.

Die Zufallsvariable X gibt die absolute Häufigkeit des Eintretens des Ereignisses A bei den n Versuchen an. Das Ereignis $X = k$ tritt dann ein, wenn an genau k Stellen einer Versuchsserie das Ereignis A steht.

Jedes der möglichen n-Tupel besitzt unter Berücksichtigung der Reihenfolge die Wahrscheinlichkeit $p^k . (1 - p)^{n-k}$ und es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, die k der insgesamt n Stellen, an denen das Ereignis A eingetreten ist, zu besetzen (siehe Kap. 4.7.3). Es folgt:

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n.$$

(Funktionsgleichung der Binomialverteilung).

Die Zufallsvariable X nennt man **binomialverteilt** mit den Parametern n und p,
kurz: $b(n, p)$- verteilt.

Der Name „binomialverteilt“ stammt aus dem Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz.

Betrachten wir noch einmal das Beispiel aus Kapitel 4.6.1 (Franz ist Schiedsrichter):

$n = 2$,

$P(X = 2) = P(1\ 1) = p^2$

$P\ (X = 1) = P(1\ 0) + P(0\ 1) = pq + qp = 2pq$

$P\ (X = 0) = P(0\ 0) = q^2$

Die Ergebnisse dieses Beispiels erinnern sehr an die Formel $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ und weisen uns auf den Zusammenhang zwischen den Gliedern der n-ten Potenz des Binoms $(p + q)$

und den Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$, $0 \leq k \leq 1$, eines n-stufigen Bernoulli- Experiments hin.

Aufgabe 79:

Zeige, dass das obige Beispiel auch für $n = 3$ zutrifft.

Um sich die mühsame Berechnung der Binomialkoeffizienten mit Hilfe von Formeln oder des Pascal´schen Dreiecks zu sparen, sind Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion der Binomialverteilung in Tafeln tabelliert.

Da diese Tabellen aber teils Lücken aufweisen empfiehlt sich zur praktischen Rechnung die Verwendung der Rekursionsformel:

Rekursionsformel

$$p_{k+1} = p_k . \frac{n - k}{k + 1} . \frac{p}{q}, \text{ für } k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Zur Berechnung von **Erwartungswert und Varianz** der Binomialverteilung führen wir die folgende (binäre) Zufallsvariable X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ein, die nur die Werte 0 und 1 annehmen kann:

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ falls das Experiment } A \text{ beim } i\text{-ten Versuch eintritt} \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

mit $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p = q$

Der Erwartungswert für einen Wurf lässt sich durch

$E(X_1) = \sum_{i=1}^{1} x_i . P(X = x_i) = 1. p + 0. (1 - p) = p$ berechnen.

Die Zufallsvariablen X_i sind unabhängig und es wird stets der gleiche Versuch wiederholt. Also gilt:

$E(X_i) = E(X_i^2) = p$

$V(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

Aus der Additivität von Erwartungswert und Varianz mit $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ erhalten wir:

Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung:

- $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n.\, p$
- $V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n.\, p.\, (1-p) = n.\, p.\, q$

Bemerkung: Additivität von Erwartungswert und Varianz ist gegeben, weil die Zufallsvariablen X_i unabhängig sind.

Beispiel 33:

In einer Urne befinden sich 6 gelbe und 3 rote Kugeln. Es wird jeweils eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei dreimaligem Ziehen

a) genau 3,

b) mindestens 2 gelbe Kugeln zu erhalten?

Lösung:

a) $P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{6}{9}\right)^3 . \left(\frac{3}{9}\right)^0 = \frac{8}{27} \approx 0{,}296$

Die Wahrscheinlichkeit genau 3 gelbe Kugeln zu ziehen liegt bei 29,6%.

b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{2}\left(\frac{6}{9}\right)^2 . \left(\frac{3}{9}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{6}{9}\right)^3 . \left(\frac{3}{9}\right)^0 = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27}$

$\approx 0{,}741$.

Die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei gelbe Kugeln zu ziehen liegt bei etwa 74,1%.

Aufgabe 80:

Bei der Serienherstellung von Skistöcken sind 2% Ausschussware. Bei einer Kontrolle werden per Zufall 40 Stöcke herausgegriffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter a) kein, b) genau ein, c) mindestens ein Ausschussstück befindet?

Aufgabe 81:

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von a) 30 Schülern einer Klasse, b) 700 Schülern einer Schule, zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. (Hinweis: wir gehen davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für den Geburtstag an jedem der 365 Tage gleich ist und niemand am 29. Feber Geburtstag hat.)

Aufgabe 82:

Erfahrungsgemäß verwenden p = 0,6% international erfolgreicher Athleten nachweisbare Dopingmittel. Bei der Kontrolle von 500 Athleten wurden vier des Dopings überführt. Um wie viel weicht das Ergebnis der Kontrolle vom Erwartungswert ab?

Aufgabe 83:

Im Finale des jährlichen Tennisturniers einer Schule spielt Daniel gegen Stefan. Daniel gewinnt mit Wahrscheinlichkeit 0,55, Stefan mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,45. Es wird auf 3 gewonnene Sätze gespielt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Daniel das Spiel

c) ohne Satzverlust,

d) in 4 Sätzen,

e) in 5 Sätzen gewinnt?

4.11 Stetige Zufallsvariablen

Der wesentliche Unterschied zur diskreten Zufallsvariablen ist der, dass für stetige Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ einer bestimmten Zahl x im allgemeinen Null ist.

Beispiele 33:

- Glücksrad: die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger genau bei einem bestimmten Punkt P stehen bleibt ist zwar nicht unmöglich, bei einer Wette würde man meinen, die Wahrscheinlichkeit beträgt Null. Sei der Winkel X die Zufallsvariable, so gilt: α $(0° \leq \alpha < 360°) : P(X = \alpha) = 0$

- Seilproduktion: die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines Seiles exakt den Wert x = 45, 000 003 mm annimmt ist zwar wieder nicht unmöglich, aber so gering, dass gilt: $P(X = x) = 0$, für alle $x \in [a; b]$.

Da die Binomialverteilung für große Stichprobenumfänge n und bei Umkehraufgaben schwierig zu handhaben ist, haben Mathematiker versucht, eine Näherungsformel für das Verteilungsgesetz der Binomialverteilung zu finden. Als Ergebnis erhielten sie eine Formel, die stetige Verteilungen beschreibt. Man spricht von der Normalverteilung, mit der sich typische Probleme der Inferenzstatistik wie zum Beispiel das Testen von Hypothesen, Schätzen von Parametern oder Bestimmung von Konfidenzintervallen, lösen lassen.

Es ergeben sich einige theoretische Änderungen bezüglich der Begriffe Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert und Varianz, die in diesem Kapitel behandelt werden sollen.

4.11.1 Wahrscheinlichkeitsdichte- und Verteilungsfunktion

Die Ausprägungen qualitativer Merkmale, die meist durch Messen oder Wiegen eruiert werden, sind reelle Zahlen eines bestimmten Intervalls $[a;b]$. Nimmt man dabei Klasseneinteilungen vor, so kann die relative Häufigkeit, mit der die Zufallsvariable X in eine bestimmte Klasse (also in ein weiteres Intervall) fällt, in einem Histogramm dargestellt werden. Die Sume der Flächeninhalte aller Rechtecke des Histogramms beträgt 1.

Aufgabe 84:

Kannst du eine Begründung dafür finden, dass die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke gleich 1 ist? Fertige eine Skizze an!

Wie ändert sich der Flächeninhalt wenn man eine kleinere oder größere Klassenbreite wählt?

Wahrscheinlichkeiten stetiger Zufallsvariablen können nicht durch Summierung, sondern nur mit Hilfe von Integralen über Dichten, berechnet werden.

Je feiner die Klasseneinteilung ist, desto eher kann man eine stetige Kurve f beobachten, die sich über die „Spitzen" der Balken des Histogramms legt. Man nennt diese Kurve die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der stetigen Zufallsvariablen X.

Betrachten wir nochmals das Beispiel der Seilproduktion:

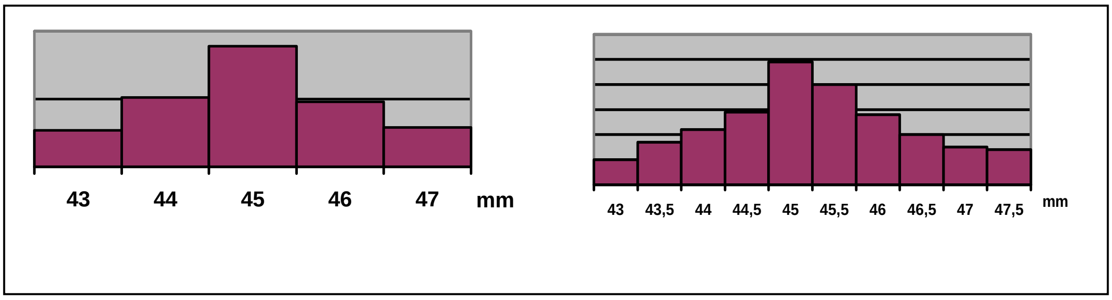


Abbildung 25: Histogramme mit verschiedener Klassenbreite

Das erste Diagramm zeigt die relativen Häufigkeiten der Werte bei einer Klassenbreite von 1mm (erster Balken: $43 \leq x < 44$, zweiter Balken: $44 \leq x < 45$, usw.).

Beim zweiten Diagramm wurde eine Klassenbreite von 0,5 mm gewählt.

Man sieht, dass man nun eine Kurve über das Diagramm legen kann, die wesentlich genauer zu sein scheint, als lege man sie über das erste Diagramm.

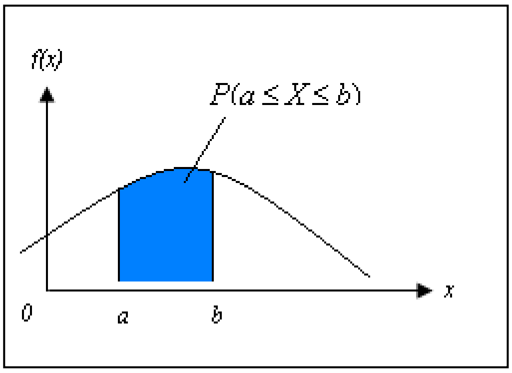
Die Summen der Rechtecksflächen im Intervall $[a; b]$ entsprechen den Riemann- Summen des Integrals $\int_a^b f(x).dx$, das mit Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq b)$ angibt, ob die Zufallsvariable X in das Intervall $[a; b]$ fällt.

Eine Funktion heißt (Wahrscheinlichkeits-) **Dichtefunkion**, wenn gilt:

- $f(x) \geq 0$, für alle $x \in$ IR,
- f ist integrierbar, d. h. $\int_a^b f(x).dx \;\exists$ für alle $a, b \in$ IR,
- die Gesamtfläche unter f beträgt 1, d. h. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = 1$

Der Graph der Dichtefunktion f verläuft oberhalb (oder auf) der x-Achse und schließt mit ihr eine Fläche des Inhalts 1 ein.

Weil $0 \leq \int_a^b f(x).dx \leq 1$ für alle $a \leq b$, kann man den Inhalt der Fläche, die f über dem Intervall $[a; b]$ mit der Ordinate einschließt, als Wahrscheinlichkeit deuten.



Die blau hinterlegte Fläche in Abb. 19 entspricht der Wahrscheinlichkeit dass die Zufallsvariable X innerhalb des Intervalls $[a; b]$ liegt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x).dx$$

Abbildung 26: Skizze der Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ***X* heißt stetig mit der Dichte *f*,** wenn für alle $a \leq b$ gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = P(\{\omega \in \Omega \mid a \leq X(\omega) \leq b\}) = \int_a^b f(x).dx\,.$$

Definiere $F(t) := \int_{-\infty}^t f(x).dx$

Es gilt: $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

und $P(X \geq x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$

Es spielt also keine Rolle, ob man $\leq / \geq$ oder $< / >$ verwendet. Die Wahrscheinlichkeiten unterschieden sich nicht.

Beispiel 34:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{9}x^2 & \text{für } x \in [0; \frac{3}{2}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeige, dass f Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist und skizziere ihren Graphen.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte

(1) zwischen 0 und 1,

(2) von mindestens $\frac{1}{2}$ annimmt.

Lösung:

a) Um zu zeigen, dass *f* Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist, muss *f* oben genannte Bedingungen erfüllen.

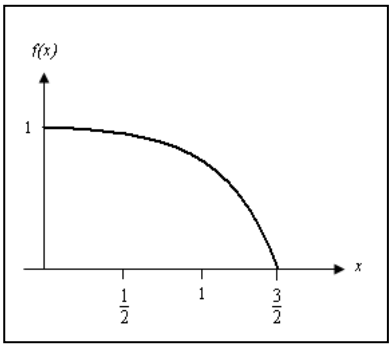


Abbildung 27: Skizze der Wahrscheinlichkeitsfunktion

- Bereits an der Skizze kann man erkennen, dass $f(x) \geq 0$ für alle x.
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt = \int_{0}^{x} (1 - \frac{4}{9} t^2) = x - \frac{4x^3}{27}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ x - \frac{4x^3}{27}, & \text{für } x \in [0; \frac{3}{2}] \\ 1, & \text{für } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

- $\int_{0}^{\frac{3}{2}} 1 - \frac{4}{9} x^2.dx = \ldots = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

  oder kürzer: es handelt sich um einen Parabelbogen, also gilt:

  $A_{\text{Parabelbogen}} = \frac{2}{3} \cdot A_{\text{Rechteck}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$

Also ist *f(x)* Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

b) (1) $P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = 1 - \frac{4}{27} - 0 = \frac{23}{27}$

(2) $P(X \geq \frac{1}{2}) = 1 - P(X < \frac{1}{2}) = 1 - F(\frac{1}{2}) = \frac{26}{54} = \frac{13}{27}$

Aufgabe 85:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9 - x^2}{36}, & \text{für } x \in [-3; 3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeige, dass f(x) Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist und skizziere ihren Graphen.

b) Berechne $P(-3 \leq X \leq -1)$ und $P(X \leq -2)$

4.11.2 Erwartungswert

Der **Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariable** ist:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.\ f(x).dx$$

Dies soll mit Abb. 28 veranschaulicht werden. Wir zerlegen das Intervall [*a; b*] in *n* Teilintervalle mit den Zerlegungspunkten $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

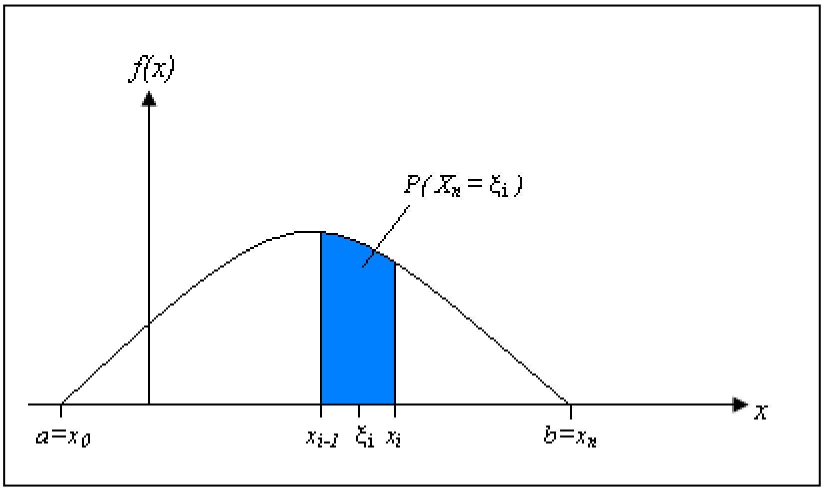


Abbildung 28: Skizze des Erwartungswertes einer stetigen Zufallsvariablen

Im i- ten Intervall $[x_{i-1}; x_i]$ wählen wir eine beliebige Stelle ξ_i, dann wir die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse dieses i- ten Intervalls in den Punkt ξ_i gelegt.

$p_i = P(X_n = \xi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x).dx$ erklärt die diskrete Zufallsvariable X_n mit der Verteilung (ξ_i, p_i)

für $i = 1, 2, \ldots, n$ und dem Erwartungswert $E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x).dx$.

Für $n \to \infty$ konvergiert das bestimmte Integral $\int_a^b x.\, f(x).dx$ und es ist deshalb sinnvoll, das bestimmte Integral als den Erwartungswert der stetigen Zufallsvariable X zu definieren.

Der **Erwartungswert einer Gewinnfunktion** ergibt sich analog:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x).\, f(x).\, dx$$

Beispiel 35:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist der Erwartungswert $\mu = E(X) = \int_0^1 x.\, 2x.\, dx = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 86:

Der Profisportler Schnell soll gegen Tod und Invalidität versichert werden. Die von der Versicherung zu leistende Zahlung X habe die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$P(X = 0) = 0{,}97$, $P(X = 10.000) = 0{,}025$, $P(X = 100.000) = 0{,}005$;

Welche Prämie muss die Versicherungsgesellschaft für den Preis des Versicherungsschutzes kalkulieren, wenn sie zusätzlich einen Zuschlag von 10% zum Erwartungswert verlangen möchte?

4.11.3 Varianz und Standardabweichung

Die stetige Zufallsvariable X hat die Dichtefunktion $f(x)$ und den Erwartungswert $\mu = E(X)$.

> Im Falle der Existenz heißt
>
> $V(X) = \sigma = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, . \, f(x).dx < \infty$ die **Varianz** der stetigen Zufallsvariable X und die Quadratwurzel $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$ die **Standardabweichung** der stetigen Zufallsvariable X.

Beispiel 36:

Wir wissen den Erwartungswert aus dem Beispiel des letzten Kapitels: $\frac{2}{3}$ und wollen nun die Varianz bestimmen.

Lösung:

$E(X) = \mu = \frac{2}{3}$

$$V(X) = \sigma = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, . \, f(x).dx = \int_{-\infty}^{0} (x - \frac{2}{3})^2.0.dx + \int_{0}^{1} (x - \frac{2}{3})^2.2x.dx + \int_{1}^{\infty} (x - \frac{2}{3})^2.0.dx =$$

$$\int_{0}^{1} (x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}).2x.dx = \int_{0}^{1} 2x^3 - \frac{8x^2}{3} + \frac{8x}{9}.dx = (\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^3}{9} + \frac{8x^2}{18}) \Big/_0^1 = \frac{2}{4} - \frac{8}{9} + \frac{8}{18} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Aufgabe 87:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & \text{für } x \in [1; 3] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass $f(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist.

b) Bestimme Erwartungswert und Varianz.

4.12 Normalverteilung

Als eine der wichtigsten statistischen Verteilungen gilt die Gauß´sche Normalverteilung, die ein zentraler Punkt in der Stochastik ist. Wie schon ihr Name sagt, spielt sie in der Praxis eine wichtige Rolle, da viele stetige Zufallsvariablen zumindest näherungsweise normalverteilt sind. Ein Grund dafür ist durch die zentralen Grenzwertsätze gegeben.

Aber auch bei diskreten Zufallsvariablen findet die Normalverteilung ihre Anwendung, lässt sich doch die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximieren.

4.12.1 Standardnormalverteilung

Stellen wir uns ein Histogramm binomialverteilter Zufallsvariablen vor. Bei wachsendem n werden Erwartungswert und Varianz immer größer, das Histogramm wird wie in Abbildung 29 dargestellt breiter und damit flacher.

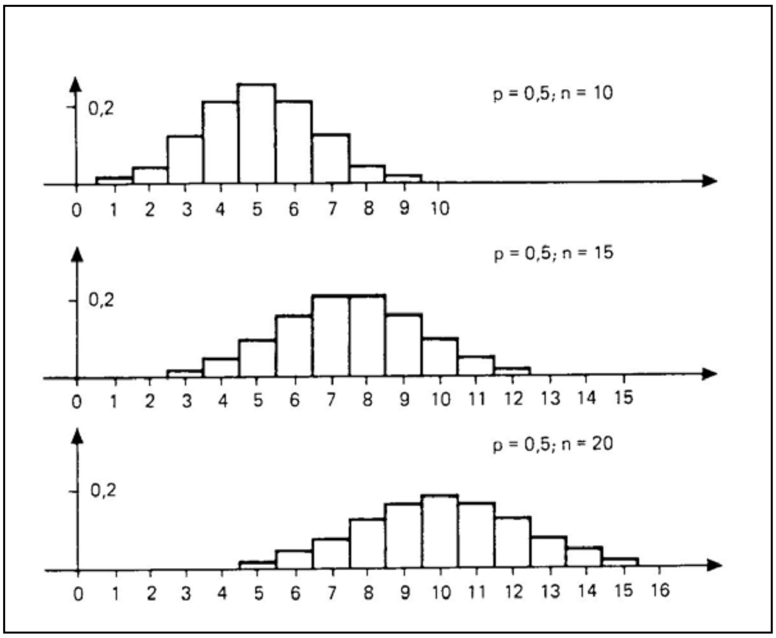


Abbildung 29: Histogramme binomialverteilter Zufallsvariablen (Bosch, 1999, S. 128)

Um diesen Effekt zu verhindern, verwenden wir die Standardisierung

$$Z = \frac{X - n.p}{\sqrt{n.p.(1\text{-}p)}} = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{mit} \quad E(Z) = 0,\ V(Z) = 1, \text{ für alle } n;$$

und erhalten Histogramme standardisierter Binomialverteilungen:

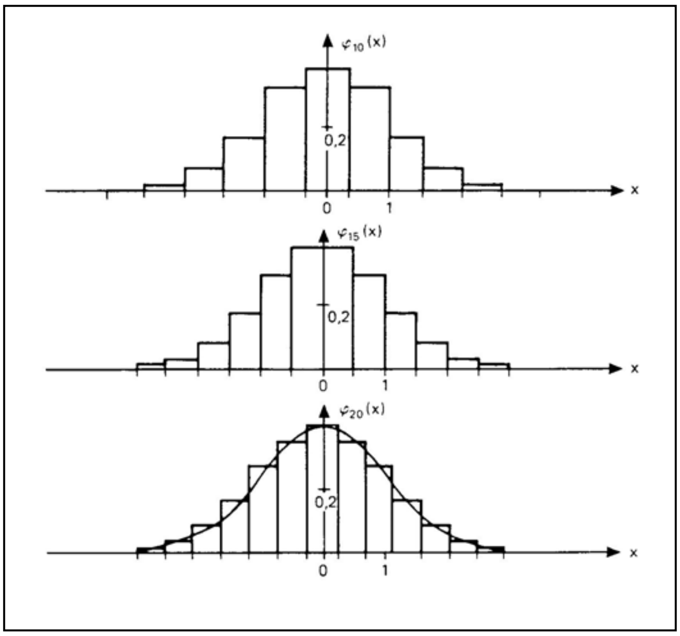


Abbildung 30: Histogramme standardisierter Binomialvert. (Bosch, 1999, S. 129)

In Abbildung 30 kann man sehr gut den glockenförmigen Verlauf der Kurve erkennen. Das bedeutet, dass normalverteilte Zufallsvariablen sich in dieser Form um ihren Erwartungswert verteilen. Es gilt allgemein, dass Histogramme standardisierter Binomialverteilungen gegen eine Glockenkurve konvergieren.

Man kann beweisen, dass diese Kurve $\varphi(x)$ die Darstellung $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{\frac{-x^2}{2}}$ hat.

Nach Standardisierung der Zufallsvariable X mit $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ und $z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$, $z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$ gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ mit $n \to \infty$:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(z_1 \leq Z \leq z_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \int_{z_1}^{z_2} e^{\frac{-x^2}{2}} . dx$$

Weiters kann man beweisen, dass die glockenförmige Kurve $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{\frac{-x^2}{2}}$ mit der x-Achse einen Flächeninhalt von 1 einschließt. Damit ist φ Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable Z heißt **standard- normalverteilt** (N (0;1)- verteilt), wenn sie die Dichte $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-z^2}{2}}$ hat.

Es gilt:

- $E(Z) = 0$,
- $V(Z) = 1$; Damit sei die Bezeichnung N (0;1)-Verteilung erklärt.

Für die Dichte $\varphi(z)$ kann keine Stammfunktion gefunden werden, weshalb die Werte der Verteilungsfunktion mit numerischen Verfahren berechnet werden müssen:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t).dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Aufgrund der Symmetrie der Kurve zur y-Achse (siehe Abb. 31) ist $\Phi(0) = 0,5$. Die Verteilungsfunktion Φ für negative Werte müssen also nicht tabellarisch erfasst werden (Tabelle in Anhang 4), man kann sie durch folgende Umrechnung ermitteln:

Negativitätsregel: $\Phi(-z) = P(Z \leq -z) = P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z)$

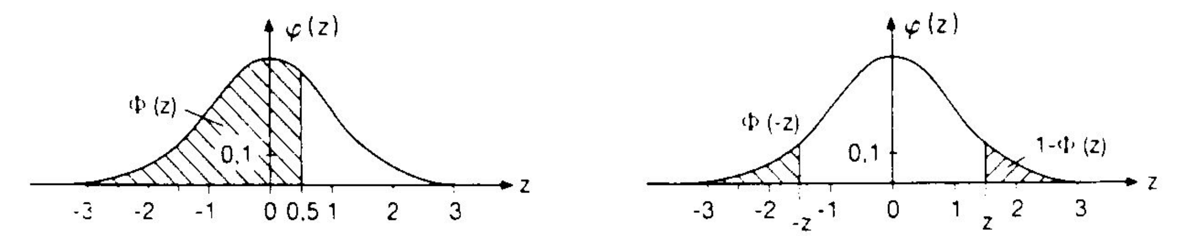


Abbildung 31: Dichte- und Verteilungsfunktion (Bosch. 1996, S. 253)

Es gilt für $a < b$, dass $P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

Weiters gilt:

- $P(Z \leq z) = P(Z < z) = \Phi(z)$
- $P(Z \geq z) = P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$
- $P(|Z| \leq z) = 2.\Phi(z) - 1$
- $P(|Z| \geq z) = 2.(1 - \Phi(z))$

Beispiel 37:

Ermittle mit Hilfe der Φ –Tabelle (siehe Anhang 4):

a) $P(Z \leq 3{,}57)$

b) $P(Z < -2{,}44)$

c) $P(-2{,}44 < Z \leq 0{,}26)$

Lösung:

a) $P(Z \leq 3{,}57) = \Phi\,(3{,}57) = 0{,}99982$

b) $P(Z < -2{,}44) = P(Z \leq -2{,}44) = \Phi\,(-2{,}44) = 1 - \Phi\,(2{,}44) = 1 - 0{,}99266 = 0{,}00734$

c) $P(-2{,}44 < Z \leq 0{,}26) = \Phi\,(0{,}26) - \Phi(-2{,}44) = \Phi\,(0{,}26) - (1 - \Phi(2{,}44)) =$

$= 0{,}60257 - (1 - 0{,}99266) = 0{,}60257 - 0{,}00734 = 0{,}59523$

Aufgabe 88:

Zeige mit Hilfe der Standardisierungsformel, dass $E(Z) = 0$ und $V(Z) = 1$.

Aufgabe 89:

Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Z mit Hilfe der Φ –Tabelle und zeichne die zugehörigen Skizzen!

$P(Z < 1{,}27)$ $P(Z > -2.36)$ $P(Z \leq -0{,}34)$

$P(Z \geq 0{,}87)$ $P(Z \geq 1{,}57)$ $P(Z > 2{,}13)$

Aufgabe 90:

Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Z mit Hilfe der Φ –Tabelle und zeichne die zugehörigen Skizzen!

$P(-2{,}4 \leq Z \leq -1{,}8)$ $P(1{,}7 \leq Z \leq 2{,}5)$

$P(0{,}3 \leq Z \leq 2{,}3)$ $P(|Z| \leq 1{,}6)$

Aufgabe 91:

Bestimme die Werte für z!

$P(Z \leq z) = 0{,}54$ $P(Z \geq z) = 0{,}76$ $P(|Z| \geq z) = 0{,}02$

$P(|Z| \leq z) = 0{,}87$ $P(Z \leq z) = 0{,}22$ $P(|Z| \leq z) = 0{,}98$

4.12.2 Allgemeine Normalverteilung

Es sei Z eine $N\ (0;1)$- verteilte Zufallsvariable mit der Dichte φ. Mit Hilfe der Standardisierungs-formel $X = \mu + \sigma Z$, für $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathrm{IR}$, kann man zeigen, dass die Zufallsvariable X die Dichte $f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi \cdot \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ besitzt.

Die Dichte ist symmetrisch zur Achse $s = \mu$ und besitzt an der Stelle μ das einzige Maximum. Damit ist μ gleichzeitig Erwartungswert, Modalwert und Median.

Eine Zufallsvariable X mit der Dichte $f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi \cdot \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$

heißt **normalverteilt** ($N\ (\mu;\ \sigma^2)$- verteilt).

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

Durch Standardisierung der Verteilungsfunktion der $N\ (0;1)$- Verteilung erhält man die Werte für die Verteilungsfunktion F der $N\ (\mu;\ \sigma^2)$- verteilten Zufallsvariablen:

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Standardisierungsformeln:

$$N(0;1) \underset{z = \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)}{\overset{x = \mu + z.\,\sigma}{\rightleftarrows}} N(\mu;\, \sigma^2)$$

Beispiel 38:

Die Zufallsvariable X sei $N(3;2^2)$- verteilt. Bestimme

a) $P(X \leq 4)$

b) $P(X < 2{,}6)$

c) $P(3{,}5 \leq X \leq 5)$

Lösung:

a) $x = 4 \;\Rightarrow\; z = \frac{4 - \mu}{\sigma} = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad P(X \leq 4) = P(Z \leq \frac{1}{2}) = \Phi(0{,}5) = 0{,}69146$

b) $x = 2{,}6 \;\Rightarrow\; z = \frac{2{,}6 - \mu}{\sigma} = \frac{-0{,}4}{2} = -\,0{,}2$ $\qquad P(X < 2{,}6) = P(Z < -\,0{,}2) = \Phi(-\,0{,}2) =$

$= 1 - \Phi(0{,}2) = 1 - 0{,}57926 = 0{,}42074$

c) $x_1 = 3{,}5 \;\Rightarrow\; z_1 = \frac{3{,}5 - \mu}{\sigma} = \frac{3{,}5 - 3}{2} = \frac{1}{4}$; $x_2 = 5 \;\Rightarrow\; z_2 = \frac{5 - \mu}{\sigma} = \frac{5 - 3}{2} = 1$

$P(3{,}5 \leq X \leq 5) = \Phi(1) - \Phi(0{,}25) = 0{,}84134 - 0{,}59871 = 0{,}24263$

Aufgabe 92:

Bestimme für die $N(2;3^2)$- verteilte Zufallsvariable X:

a) $P(X \geq 3{,}3)$

b) $P(X < -1{,}5)$

c) $P(-2 < X \leq 8)$

Aufgabe 93:

Gesucht ist x, für das gilt:

a) $P(X < 16), N(2;1)$

b) $P(X \geq 20), N(4;1)$

c) $P(|X - \mu| < 9), N(8;1)$

4.12.3 Umkehraufgaben

Bis jetzt lag unser Interesse an der Wahrscheinlichkeit, mit der eine normalverteilte Zufallsvariable X innerhalb eines bestimmten Intervalls liegt. Nun behandeln wir die umgekehrte Fragestellung, wie groß ein Intervall sein muss, damit eine $N(\mu; \sigma^2)$- verteilte Zufallsvariable X dort mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit auftritt.

Aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung zur y-Achse ist diese Aufgabe nicht immer eindeutig lösbar (vgl. Abb. 32), weshalb man zuerst die Lage des Intervalls betrachten muss.

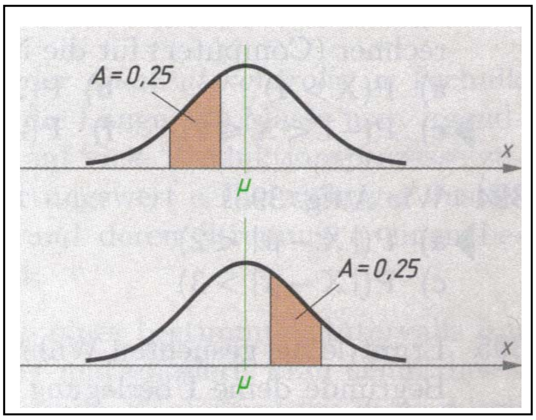


Abbildung 32: Lagebestimmung des Intervalls (Götz et al., 2005, S. 121)

Beispiel 39:

Bestimme z für

a) $P(Z \leq z) = 0{,}3$

b) $P(|Z| \geq z) = 0{,}34$

Lösung:

a) Weil $0{,}3 < 0{,}5 = \Phi(0)$ muss z negativen Wert haben, der nicht in der Tabelle aufgelistet ist. Also ermitteln wir zuerst den Wert für $-z$:

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(-z) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$-z = 0{,}525 \Rightarrow z = -0{,}525$

b) Mit Hilfe der Formel $P(|Z| \geq z) = 2 \,.(1 - \Phi(z))$ erhalten wir für $P(|Z| \geq z) = 0{,}34$:

$0{,}34 = 2\,.(1 - \Phi(z)) \Rightarrow \Phi(z) = 0{,}83$ und durch Nachschlagen in der Tabelle: $z = 0{,}955$

Beim Nachschlagen der z-Werte in der Φ- Tabelle sieht man, dass diese nicht exakt bestimmt werden können. Es soll der dem nachzuschlagenden Wert am nächsten liegende Wert genommen werden. Liegt der Wert aber ziemlich genau in der Mitte, so soll jeweils der Mittelwert der z-Werte genommen werden, die vor und nach dem nachzuschlagenden Wert liegen.

Zum Beispiel: $\Phi(z) = 0{,}83$.

In der Tabelle finden wir 0,82894 und als nächsten Wert 0,83147. Der zu 0,82894 gehörige z-Wert beträgt 0,95 der zu 0,82894 gehörige z-Wert liegt bei 0,96. Wir nehmen also $z = 0{,}955$.

Aufgabe 94:

Die Punkte eines gängigen Fitnesstests seien innerhalb eines Sportclubs $N\,(200;\,400)$- verteilt. Dies wurde durch mehrere Tests bestätigt. Bei einem internationalen Meeting dürfen nur diejenigen Sportler antreten, die zu den 15% der besten Sportler zählen, dazu wird ein Aufnahmetest durchgeführt.

Wie hoch muss das Punktelimit angesetzt werden, damit tatsächlich 15% bei dem Meeting starten dürfen?

Ansatz: $P(\text{Punkte} > x) = 0{,}85$

4.12.4 Anwendung der Normalverteilung

Die Normalverteilung findet in Wirtschaft und Technik, beispielsweise in der Qualitätskontrolle, wichtige Anwendungen. Jedes Produkt hat eine bestimmte Ist- Länge oder Ist- Masse, deren Erwartungswert μ der Soll- Länge oder Soll- Masse entspricht. Die Streuung σ ist dabei von der Qualität der produzierenden Maschine abhängig.

Gilt die Streuung als unerheblich, wird sie toleriert, so spricht man von sogenannten Toleranzintervallen. Ihre Grenzen heißen Toleranzgrenzen und werden meist durch den größten tolerierten Abstand ε vom Erwartungswert μ angegeben.

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit γ bestimmen, mit der die Zufallsvariable X innerhalb des Toleranzintervalls liegt, bzw. die Wahrscheinlichkeit α, mit der X außerhalb des Intervalls liegt (Ausschussanteil). Es gilt: $\alpha = 1 - \gamma$.

Man kann aber auch bei bekannter Verteilung $N(\mu; \sigma^2)$ und bekanntem γ nach ε suchen, bei bekanntem γ und ε nach σ, usw. Damit ergeben sich vier Grundaufgaben, die in diesem Kapitel skizziert werden sollen.

Durch Rückführung auf die Gleichung $P(a \leq X \leq b) = \gamma$ erhalten wir
$P(\mu - \varepsilon \leq X \leq \mu + \varepsilon) = P(|X - \mu| \leq \varepsilon) = P(|X - \mu| \leq z.\, \sigma) = \gamma$

Abbildung 33 verdeutlicht die Bereiche des Toleranzintervalls und nennt wichtige Formeln zur Berechnung:

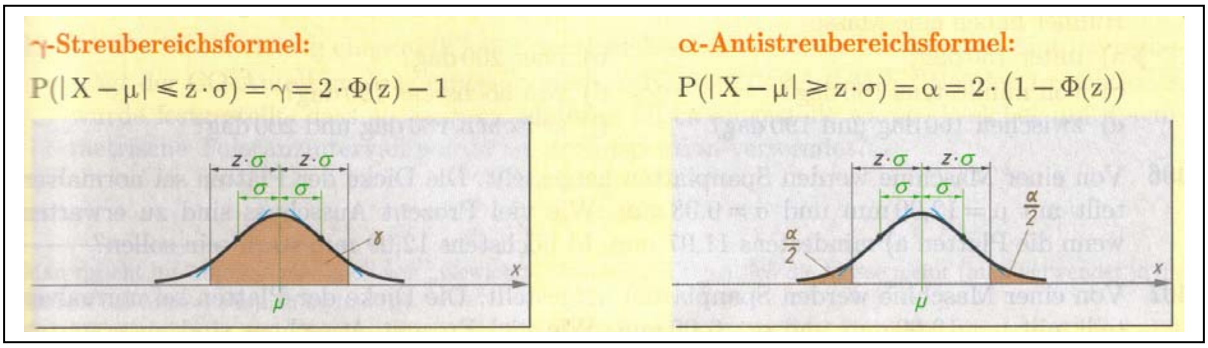


Abbildung 33: Streu- und Antistreubereichsformel (Götz et al., 2005, S. 123)

- Berechnung von α bzw. γ:

Beispiel 40:

Eine Maschine befüllt Säcke mit Eiweißpulver für den Muskelaufbau. Ihr Inhalt sei $N(1500;4)$ – verteilt, d.h. $E(X) = 1500\text{g}$, $\sigma(X) = 2\text{g}$.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die Füllmenge vom Erwartungswert um höchstens 5g abweicht,

b) die versprochene Mindestfüllmenge von 1498g nicht unterschritten wird!

Lösung:

a) $P(1500 - 5 \leq X \leq 1500 + 5) = P(1495 \leq X \leq 1505)$

$x_1 = 1495 \Rightarrow z_1 = \dfrac{1495 - 1500}{2} = -2{,}5$; $x_2 = 1545 \Rightarrow z_1 = \dfrac{1505 - 1500}{2} = 2{,}5$

$P(1495 \leq X \leq 1505) = P(-2{,}5 \leq Z \leq 2{,}5) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(2{,}5) - (1 - \Phi(2{,}5)) =$

$= 2.\ \Phi(2{,}5) - 1 = 2.\ 0{,}99379 - 1 = 0{,}98758$

Es weichen 98,8% der Packungen um höchstens 5g vom Erwartungswert des Füllgewichts ab.

b) $P(X \geq 1498) = 1 - P(X < 1498)$

$x = 1498 \Rightarrow z = \dfrac{1498 - 1500}{2} = -1$

$P(X \geq 1498) = P(Z \geq -1) = 1 - P(Z < -1) = 1 - (1 - P(Z \leq 1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1) = 0{,}84134$

Die versprochene Mindestfüllmenge wird zu 84,1% nicht unterschritten.

Aufgabe 95:

Die Brenndauer von LED- Stirnlampen sei normalverteilt mit $\mu = 3500$h und $\sigma = 400$h.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Brenndauer einer neu gekauften Stirnlampe

a) mindestens 3000h,

b) zwischen 2900 und 3100h beträgt.

(Hinweis: Eigentlich wäre hier die Exponentialverteilung besser geeignet als die Normalverteilung!)

- Berechnung von ε:

Beispiel 41:

Das Körpergewicht der Mädchen einer Klasse sei N (55;9)- verteilt. ($\mu = 55$; $\sigma = 3$).

Angenommen man definiert die unteren 15% als unter- und die oberen 15% als übergewichtig, welches Gewicht würde dann als „normal“ gelten?

Lösung:

$P(|X - \mu| \leq \varepsilon) = \gamma \;\Leftrightarrow P((|X - 55| \leq \varepsilon) = 0{,}7$

(0,7 weil die 70% zwischen den unteren und oberen 15% als „normal“ gelten)

Durch die Standardnormalverteilung gilt:

$P((|Z| \leq z) = 0{,}7 = 2.\ \Phi(z) - 1 \;\Rightarrow\; \Phi(z) = 0{,}85 \;\Rightarrow\; z = 1{,}04$

Zur Berechnung von ε wird die Standardisierung wieder rückgängig gemacht:

$\varepsilon = z.\ \sigma = 1{,}04.\ 3 = 3{,}12$

Daraus ergeben sich die Toleranzgrenzen x_1 und x_2:

$x_1 = \mu - \varepsilon = 55 - 3{,}12 = 51{,}88$ und $x_2 = \mu + \varepsilon = 55 + 3{,}12 = 58{,}12$.

Damit liegt das „Normalgewicht“ der Mädchen dieser Klasse im Intervall [51,88; 58,12].

Aufgabe 96:

Eine Maschine stellt „T´s“ für das Abschlagen beim Golfen her. Ihre Länge sei normalverteilt mit μ = 50mm und σ = 2mm.

Bestimme die maximale Abweichung vom Erwartungswert, die toleriert werden kann, wenn bekannt ist, dass 6% einer Produktion Ausschusswaren sind.

- Berechnung von μ:

Beispiel 42:

Eine Firma für Leichtathletikartikel produziert Trainingsspeere mit einer Standardabweichung von 3g, sodass ihre Gewichte normalverteilt sind. Der Hersteller möchte seinen Kunden garantieren, dass mindestens 94% aller Speere das höchstzulässige Wettkampfgewicht von 800g nicht überschreiten. Auf welchen Mittelwert μ scheint die produzierende Maschine eingestellt zu sein?

Lösung:

$P(X \leq 800) = 0{,}94$

Standardnormalverteilung:

$P(Z \leq z) = 0{,}94 = \Phi(z) \quad \Rightarrow \quad z = 1{,}55$

Standardisierungsformel:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \Leftrightarrow 1{,}55 = \frac{800 - \mu}{3} \quad \Rightarrow \quad \mu = 795{,}35$$

Die Maschine der produzierten Speere ist auf 795,35*g* eingestellt.

Aufgabe 97:

Der Hersteller eines Skis behauptet, dass sein neu entwickelter Belag eine wesentlich bessere Wachsaufnahmefähigkeit habe als andere. Bei normalem Gebrauch auf der Piste sollen nur 5% der Ski in weniger als 15 Tagen neu gewachselt werden müssen.

Wie groß ist die mittlere Tagesanzahl bis der Ski gewachselt werden muss, wenn wir annehmen, dass die Tagesanzahl mit $\sigma = 2$ normalverteilt ist?

Kann man diese Auswertung als valide erachten, oder möchte der Hersteller mit seiner Aussage bloß Kunden anlocken? Welche Kritikpunkte fallen dir ein?

- Berechnung von σ:

Beispiel 43:

Eine Schneekanone produziert zu 95% (abhängig von den Wetterbedingungen) 7,2 bis 8,4 m³ Schnee/ Stunde. Berechne die Standardabweichung der produzierten Schneemenge/ Stunde, wenn diese normalverteilt ist und symmetrisch um den Erwartungswert liegt.

Lösung:

Aufgrund der Symmetrie gilt: $\mu = \dfrac{7{,}2 + 8{,}4}{2} = 7{,}8$ und $\varepsilon = 0{,}6$.

$P(7{,}2 \leq X \leq 8{,}4) = P(7{,}8 - 0{,}6 \leq X \leq 7{,}8 + 0{,}6) = P(|X - 7{,}8| \leq 0{,}6) = 0{,}95$

Mit Hilfe der Standardnormalverteilung erhalten wir:

$P((|Z| \leq z) = 0{,}95 = 2.\, \Phi(z) - 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(z) = 0{,}975 \quad \Rightarrow \quad z = 1{,}96$

$\varepsilon = z.\, \sigma \quad \Rightarrow \quad 0{,}6 = 1{,}96.\, \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx 0{,}306\text{m}^3$

Aufgabe 98:

Der Hersteller von Boxsportartikeln will eine Produktion von Boxsäcken mit einer Sollmasse von 50kg so abfüllen, dass bei höchstens 5% der Boxsäcke das Gewicht von 51kg überschritten wird, da das Füllmaterial ansonsten zu teuer käme.

Welche Standardabweichung darf die abfüllende Maschine höchstens aufweisen, wenn die Füllmasse normalverteilt ist und die mittlere Masse der Sollmasse entspricht.

4.12.5 Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Laut Kapitel 4.11.1 gilt für binomialverteilte Zufallsvariablen X mit Parameter n und p die Standardisierung $Z = \dfrac{X - n.p}{\sqrt{n.p.(1-p)}} = \dfrac{X - n.p}{\sqrt{n.p.q}}$. Für große n ist Z näherungsweise standardnormalverteilt, und die Zufallsvariable $X = n.\, p + \sqrt{npq}\, .\, Z$ in etwa normalverteilt.

Die Binomialverteilung ist eine diskrete Zufallsvariable, die durch die Verteilung stetiger Zufallsvariablen approximiert werden soll. Die Glockenkurve der Normalverteilung stellt eine geeignete Näherung dar, die durch die sogenannte **Stetigkeitskorrektur** verbessert wird. Die Stetigkeitskorrektur ist eine Verbreiterung des Integralintervalls $[x_1; x_2]$ nach rechts und nach links um jeweils 0,5.

Die Flächeninhalte der Rechtecke in Abbildung 22 (Histogramme von Binomialverteilungen) entsprechen den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x)$ für die Rechtecksmitten. Die Korrektur ergibt:

$P(x_1 \leq X_n \leq x_2) = P(x_1 - 0{,}5 \leq X_n \leq x_2 + 0{,}5)$ und

$P(X_n = x) = P(x - 0{,}5 \leq X_n \leq x + 0{,}5)$.

Abbildung 34 zeigt, dass die untere Grenze x_1 um 0,5 verkleinert, die obere Grenze x_2 um 0,5 vergrößert wird.

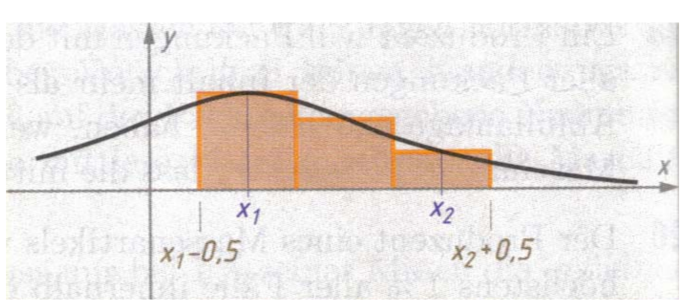


Abbildung 34: Stetigkeitskorrektur (Götz et al., 2005, S. 128)

Die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung hat den wesentlichen Vorteil der einfacheren Berechnung.

Für die N (0; 1)- Verteilung gelten folgende Korrekturglieder:

- $P(X \leq x) = P(Z \leq \frac{(x + 0{,}5) - \mu}{\sigma}) = \Phi\left(\frac{(x + 0{,}5) - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(X < x) = P(Z \leq \frac{(x - 0{,}5) - \mu}{\sigma}) = \Phi\left(\frac{(x - 0{,}5) - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(X \geq x) = 1 - \Phi\left(\frac{(x - 0{,}5) - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(X > x) = 1 - \Phi\left(\frac{(x + 0{,}5) - \mu}{\sigma}\right)$
-

Mit Hilfe dieser Merkregeln lässt sich auf den folgenden Satz schließen:

Sei X eine $b(n; p)$- verteilte Zufallsvariable, so kann sie durch eine $N(\mu; \sigma)$- verteilte Zufallsvariable ($\mu = n.p$, $\sigma = \sqrt{npq}$) ersetzt werden.

- $P(x_1 \leq X_n \leq x_2) = P(x_1 - 0{,}5 \leq X_n \leq x_2 + 0{,}5) \approx \Phi\left(\frac{(x_2 + 0{,}5) - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(x_1 - 0{,}5) - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(X_n = x) = P(x - 0{,}5 \leq X_n \leq x + 0{,}5) \approx \Phi\left(\frac{(x + 0{,}5) - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(x - 0{,}5) - \mu}{\sigma}\right)$

Bemerkung: Als Faustregel gilt, dass die Approximation angewendet werden kann, wenn $n.p.q > 9$.

Beispiel 44:

Eine Sportartikelfirma führt eine Werbeaktion durch. Nach der Aktion geht man davon aus, dass etwa 80% der Bevölkerung das neue Produkt kennen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Befragung von 300 Personen mindestens 250 das Produkt kennen?

Lösung:

Die Anzahl dieser Personen sei binomialverteilt: $n = 300$; $p = 0{,}8 \Rightarrow q = 0{,}2$

$E(X) = \mu = n.p = 240$

$V(X) = \sigma^2 = n.p.q = 48$

Wir approximieren nun die $b(100;0{,}2)$- Verteilung durch die $N(100;80)$- Verteilung:

$P(X \geq 250) = 1 - P(X < 250) = 1 - \Phi\left(\frac{(250 - 0{,}5) - 240}{\sqrt{48}}\right) = 1 - \Phi(1{,}37) = 1 - 0{,}91466 =$

$= 0{,}08534$

Aufgabe 99:

Eine Lieferung von Tischtennisbällen wird nicht angenommen, wenn in einer Stichprobe von 300 Stück mindestens 3 kaputt sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung nicht angenommen wird, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen kaputten Ball bei 0,5% liegt?

Berechne mit Hilfe der Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung!

Aufgabe 100:

Die Wahrscheinlichkeit, dass Physiotherapie bei einer bestimmten Form einer Sportverletzung zur Heilung führt liegt bei 75%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei Behandlung von 400 Patienten mehr als 320 geheilt werden?

5 Beurteilende Statistik

5.1 Begriffserklärungen

Nicht immer sind uns Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Varianzen von Zufallsvariablen bestimmter Ereignisse aus der Praxis bekannt. Aufgabe der Beurteilenden Statistik ist es, diese Werte möglichst gut zu schätzen bzw. zu testen, um verlässliche Aussagen über gewissen Sachverhalte oder Gruppen tätigen zu können, ohne aber den vollen Umfang untersucht zu haben (Bosch, 1999, S. 153).

In der Politik spricht man von sogenannten Hochrechnungen, wenn bereits vor Auszählung aller Wählerstimmen erste Aussagen über den wahrscheinlichen Ausgang der Wahl gemacht werden.

Laut Reichel (1992) beschäftigt sich die beurteilende Statistik zum einen mit der Schätzung von Kennzahlen einer Verteilung und des Weiteren mit dem Testen von Hypothesen.

Beim Testen geht es darum, herauszufinden, ob eine Behauptung über den Wert eines Parameters in einer Grundgesamtheit durch eine Stichprobe widerlegt werden kann. Die Schätzung zielt darauf ab, aus Daten einer Stichprobe eine Behauptung über den Wert eines Parameters der Grundgesamtheit zu gewinnen.

Als Voraussetzung zur Behandlung induktiver statistischer Aufgaben gilt ein Grundwissen über die Kenngrößen der deskriptiven Statistik sowie die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Willimczik spricht von Kenntnissen über Prinzipien der Stichprobentheorie sowie über Hypothesenbildung und Signifikanzprüfung (1999, S. 87). Die Gesetze der großen Zahlen stellen die Verbindung zwischen beschreibender Statistik und Wahrscheinlichkeit dar. (Bosch, 1996, S. 324).

Götz et al. (2006, S. 112) fassen zusammen: „Die Aufgabe der Statistik ist es, das gesammelte Datenmaterial so aufzuarbeiten und darzustellen (Beschreibende Statistik), dass man anhand dessen Wahrscheinlichkeiten (…) schätzen und testen kann (Beurteilende Statistik)."

Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie stehen also in enger Verbindung und werden unter dem Namen Stochastik (griech.) zusammengefasst. Bernoulli führte Anfang des 18. Jahrhunderts diesen Begriff ein, der alle analytischen Verfahren der Statistik zusammenfasste.

In der Statistik werden Beobachtungen, Befragungen und Messungen vorgenommen, deren Daten dargestellt und interpretiert werden. Diese Beobachtungen werden **Stichproben** genannt und verhelfen zu Aussagen über eine **Grundgesamtheit**.

„Als Grundgesamtheit wird die Menge aller theoretisch erfassbaren Objekte (z.B. Individuen) für einen Problembereich angesehen.“, und: „Eine Teilmenge der Grundgesamtheit wird als Stichprobe bezeichnet.“, so die Definitionen laut Willimczik (1999, S. 12).

Als Beispiele werden Experimente aus den Sozialwissenschaften genannt, die prinzipiell aus Stichproben erforscht werden, da es nicht möglich ist, alle Menschen zu untersuchen, auf die die erzielten Ergebnisse und Erkenntnisse angewandt werden sollen.

Url, Raubik, et al. (2003, S. 187) beschreiben:

> „Bei statistischen Erhebungen wählt man einige hundert oder einige tausend Personen aus der Bevölkerung aus und befragt diese Menschen stellvertretend (repräsentativ) für die gesamte Bevölkerung (Gesamtheit). Die relative Häufigkeit in dieser sogenannten Stichprobe aus der Gesamtheit wird dann meistens veröffentlicht.“

Des Weiteres erklären sie: „Wenn man keine besseren Erkenntnisse hat als die aus einer Stichprobe, schätzt man, dass die Verhältnisse in der Gesamtheit etwa genau so sind wie in der Stichprobe.“ Abbildung 35 soll dies verdeutlichen.

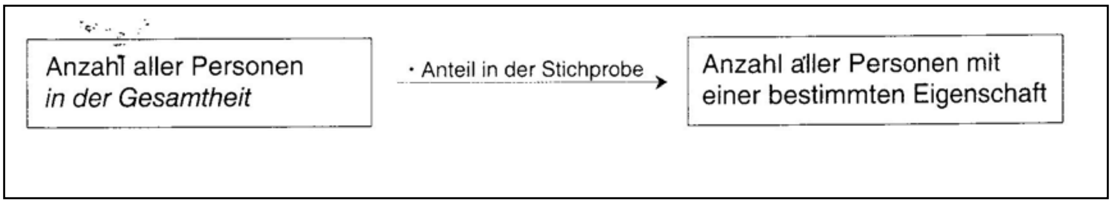


Abbildung 35.: Schätzung der Verhältnisse in der Gesamtheit (Url et al., 2003, S. 187)

Der Lehrplan sieht in Bezug auf die beurteilende Statistik die Behandlung statistischer Hypothesentests und Konfidenzintervalle vor (http://www.bmukk.gv.at/schulen/ unterricht/lp/ahs_lehrplaene_ oberstufe.xml).

In Vorbereitung an die folgende Spielerbeobachtung soll der Unterschied parametrischer und nichtparametrischer Tests erläutert und näher auf Wilcoxon- und U-Test eingegangen werden.

5.2 Hypothesentests

5.2.1 Annahme- und Ablehnungsbereich

Beim Testen von Hypothesen geht es darum, einen vermuteten Sachverhalt mit dem ermittelten Sachverhalt, dem Stichprobenergebnis zu vergleichen. Dabei können kleine Abweichungen als zufällig angesehen und akzeptiert werden, größere Abweichungen lassen uns zu dem Schluss kommen, dass die angestellte Vermutung nicht stimmt.

Die Standardabweichung gibt Auskunft über die Auffälligkeit der Abweichungen: liegen die Werte des beobachteten Stichprobenergebnisses innerhalb des Intervalls $[\mu-\sigma; \mu+\sigma]$, so ist dies nicht auffällig, die Hypothese darf angenommen werden.

Liegen die Werte außerhalb, oder sogar außerhalb des $[\mu-2\sigma; \mu+2\sigma]$ bzw. $[\mu-3\sigma; \mu+3\sigma]$ Intervalls, also weit vom Erwartungswert μ entfernt, so liegt die Verwerfung der Nullhypothese nahe. Man spricht in diesem Zusammenhang von Annahme- und Ablehnungsbereich und nimmt für die Verteilung meist die Binomialverteilung an, da die Ziehung einiger weniger Prüfstücke aus einer großen Produktion im Prinzip ein Bernoulli-Experiment ist (Götz et al., 2006, S. 139).

Beispiel 45:

Es wird behauptet, dass drei Viertel aller Wettkampfturner Wirbelsäulenverletzungen ausweisen. Dies soll unter Zuhilfenahme des $[\mu-\sigma; \mu+\sigma]$ Intervalls überprüft werden. Gib Annahme- und Ablehnungsbereich an, wenn insgesamt 237 Turner untersucht werden.

Lösung:

X ist in diesem Beispiel binomialverteilt mit $n = 237$ und $p = 0,75$.

Die Hypothese lautet H: $p = 0,75$.

$\mu = n.p = 237.\ 0,75 = 177,75$

$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{237.0,75.0,25} \approx 6,67$

Annahmebereich: [177,75–6,67; 177,75+6,67] = [171,08; 184,42]

Daraus ergibt sich für den Ablehnungsbereich: $\{0; 1; \ldots; 171\} \cup \{185; 186; \ldots; 237\}$

Aufgabe 101:

In einem Magazin wird behauptet, dass ein Viertel aller LKW-Fahrer, die zwischen 00.00 Uhr und 6.00 Uhr unterwegs sind, unter Alkohol- oder Drogeneinfluss stehen.

Dies soll mit Hilfe des a) σ–Intervalls, b) 2σ –Intervalls um μ überprüft werden.

Wie lauten Annahme- und Ablehnungsbereiche, wenn bei einer Kontrolle 350 Lenker überprüft wurden?

5.2.2 Einseitige Anteilstests

5.2.2.1 Einführung

Eine Person stellt eine Behauptung über die Größe eines bestimmten Anteils einer Grundgesamtheit auf. Ein kritischer Beobachter bezweifelt die Behauptung und vermutet, dass dieser Anteil kleiner oder größer ist. Er überprüft dies anhand einer Stichprobe und stellt tatsächlich einen kleineren oder größeren Wert fest. Kann die Behauptung über den Anteil der Grundgesamtheit nun verworfen werden?

Beispiel 46:

Der Hersteller von Tischtennisbällen behauptet, dass 5% der zum Verkauf angebotenen Bälle Transportschäden aufweisen. Ein kritischer Abnehmer stellt die Vermutung an, dass dieser Anteil höher ist und prüft deshalb 4 Schachteln mit je 5 Bällen.

a) Wie viele beschädigte Bälle sind in der Stichprobe zu erwarten, wenn die Behauptung des Herstellers stimmt?
b) Kann die Behauptung des Herstellers einfach so verworfen werden, wenn der Kunde mehrere beschädigte Bälle findet?

Lösung:

a) Es müssten 5% der Bälle aus der Stichprobe beschädigt sein, das ist 1 Ball.

b) Die Behauptung des Herstellers kann, auch wenn der Kunde mehr als einen beschädigten Ball in der Stichprobe findet, nicht mit Sicherheit verworfen werden, da die Anzahl der beschädigten Bälle von Stichprobe zu Stichprobe verschieden sein können, also gewissen Schwankungen unterliegen.

Eine solche Behauptung kann mit einer berechenbaren Irrtumswahrscheinlichkeit verworfen werden.

5.2.2.2 Null- und Alternativhypothese

Bisher haben wir eine Hypothese (z.B. $p = 0{,}5$) aufgrund einer Stichprobe angenommen oder abgelehnt, das heißt wir haben ihrer Gegenhypothese ($p < 0{,}5$ oder $p > 0{,}5$) mehr Glauben geschenkt. Allgemein heißt das: Die Behauptung über die Größe eines relativen Anteils p in einer Grundgesamtheit bezeichnet man als Nullhypothese H_0. Demgegenüber liegt die Vermutung, dass dieser Anteil kleiner oder größer ist. Diese Vermutung wird als Gegen- oder Alternativhypothese H_1 bezeichnet.

Nullhypothese $H_0 : p = p_0$
Alternativhypothese $H_1 : p < p_0$ oder $p > p_0$

Die Nullhypothese soll nun durch eine Stichprobe vom Umfang n geprüft werden. Davor wird eine maximale Irrtumswahrscheinlichkeit α festgelegt. Meist wählt man $\alpha = 0{,}05$ (oder auch $\alpha = 0{,}01$) und bezeichnet dies auch als Signifikanzzahl, die nur etwas über das Testverfahren, nichts aber über die Richtigkeit einer Hypothese aussagt.

5.2.2.3 Irrtumswahrscheinlichkeit α

Die **Irrtumswahrscheinlichkeit α** eines Tests ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Prüfgröße X unter der Annahme, dass die Hypothese stimmt, in den Ablehnungsbereich fällt.

Unter der Voraussetzung, dass die Nullhypothese Gültigkeit hat, berechnet man die Irrtumswahrscheinlichkeit. Beträgt diese höchstens 0,05 bzw. 0,01, so spricht man von Signifikanz und die Nullhypothese kann verworfen werden.

Bei einseitigen Anteilstests, hat die Alternativhypothese die Form $p < p_0$ (einseitiger Anteilstest nach unten) oder $p > p_0$ (einseitiger Anteilstest nach oben) und nicht die Form $p \neq p_0$. Es wird also nur die einseitige Abweichung betrachtet.

Beispiel 46 soll nun fortgesetzt werden:

Der Abnehmer beschließt, die Behauptung des Herstellers zu verwerfen, wenn er bei der Stichprobe a) mindestens 2, b) mindestens 3, c) mindestens 4 beschädigte Bälle vorfindet.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Abnehmer diese Ergebnisse erzielen und damit einen Irrtum begehen, wenn die Behauptung des Herstellers stimmt?

Lösung:

X sei die Anzahl der beschädigten Bälle in der Stichprobe vom Umfang 20. X kann also als Zufallsvariable aufgefasst werden, die Werte von 1 bis 20 annehmen kann und annähernd binomialverteilt ist, mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0,05$.

$H_0 : p = 0,05$ (Behauptung des Herstellers)

$H_1 : p > 0,05$ (Vermutung des Abnehmers)

(Da $\sigma = \sqrt{n.p.q} \approx 0,975 < 3$ kann die Binomialverteilung nicht durch die Normalverteilung approximiert werden, wir müssen mit der BV weiterrechnen.)

Wir können die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse a) bis c) berechnen, bzw. aus der Tabelle zur Binomialverteilung mit $n = 20$ (Tabelle 54, Anhang 4) ablesen:

a) $P(X \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$

$$1 - (\binom{20}{0} 0,05^0 . 0.95^{20} + \binom{20}{1} 0,05^1 . 0.95^{19}) \approx 0,264$$

b) $P(X \geq 3) \approx 0{,}076$

c) $P(X \geq 4) \approx 0{,}016$

k	2	3	4
$P(X \geq k)$	0,264	0,076	0,016

Falls der Hersteller der Tischtennisbälle recht hat, irrt der Abnehmer bei a) mit der Wahrscheinlichkeit von 26,4%, bei b) mit 7,6% und bei c) mit 1,6%.

Das heißt, angenommen der Hersteller hat recht und der Abnehmer würde mehrere Stichproben vom Umfang 20 erheben, wobei er bei jedem Stichprobenergebnis, z. B. a) $X \geq 2$, die aufgestellte Behauptung verwirft, dann würde er in 26,4% aller Stichproben irren.

Für $P(X \geq k)$ gilt: je höher k gewählt wird, desto kleiner wird die Irrtumswahrscheinlichkeit, die mit Hilfe der Binomialverteilung, oder gegebenenfalls durch Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung, berechnet werden kann.

Da die Irrtumswahrscheinlichkeit im Beispiel für $k = 4$ fast null ist, wird der Abnehmer beim Vorfinden von 4 beschädigten Tischtennisbällen die Behauptung des Herstellers getrost verwerfen. Nimmt er höhere Irrtumswahrscheinlichkeiten in Kauf, so verwirft er die Behauptung vielleicht schon bei 3 beschädigten Bällen.

Diese Grenzen unterliegen der subjektiven Entscheidung des Prüfers. Es ist in der Praxis jedoch üblich, eine maximale Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,05 zuzulassen. Bei genaueren Untersuchungen wählt man $\alpha = 0{,}01$.

Für unser Beispiel gilt: wählen wir eine maximale Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$, so darf die Behauptung des Herstellers erst verworfen werden, wenn der Abnehmer mindestens 4 beschädigte Bälle findet.

Aufgabe 102:

Bestimme die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit des Tests aus Bsp. 45.

Rechne mit der Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung und überprüfe, ob das Ergebnis auch mit Hilfe der α-Streubereichsformel (vgl. Kapitel 4.11.4) berechnet werden kann.

Gib eine Begründung an!

Aufgabe 103:

Bei einer Sportveranstaltung werden Lose verkauft. Die Sponsoren der Veranstaltung behauptet, dass nur 50% der Lose Nieten sind. Ein Kunde vermutet, dass dieser Anteil höher ist. Er möchte dies durch eine Stichprobe vom Umfang 20 überprüfen und beschließt, die Behauptung der Sponsoren zu verwerfen, wenn sich in der Stichprobe a) mindestens 13, b) mindestens 14, c) mindestens 15 Nieten befinden.

Berechne die entsprechenden Irrtumswahrscheinlichkeiten, trage sie in eine Tabelle ein und interpretiere sie.

Wie viele Nieten muss der kritische Kunde in der Stichprobe vorfinden, um die Behauptung der Sponsoren mit einer maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$ verwerfen zu können?

Aufgabe 104:

Laut Statistik betrug der Marktanteil einer bestimmten Snowboardmarke in der vergangenen Wintersaison 23%. In einer Stichprobe vom Umfang $n = 500$ finden sich 121 Snowboards dieser Marke. Hat sich der Marktanteil geändert?

Die Hypothese eines unveränderten Marktanteils soll verworfen werden, wenn das Testergebnis außerhalb des 2σ- Intervalls um μ liegt.

Berechne die Irrtumswahrscheinlichkeit des durchgeführten Tests!

5.2.2.4 Fehler 1. und 2. Art

Es gibt für die Entscheidung zwischen Null- und Alternativhypothese die Möglichkeiten richtige und falsche Entscheidungen zu treffen (vgl. Tabelle 38).

Beim Fehler erster Art wird die Nullhypothese verworfen, obwohl sie zutrifft. Man spricht auch von der Irrtumswahrscheinlichkeit α. Von einem Fehler zweiter Art, bzw. der Irrtumswahrscheinlichkeit β spricht man, wenn die Nullhypothese angenommen wird, obwohl sie nicht zutrifft.

Tabelle 38: Entscheidungsmöglichkeiten bei statistischen Tests (Bosch, 1999, S. 180)

	Entscheidung für H_0	Entscheidung gegen H_0
H_0 richtig	richtige Entscheidung	Fehler 1. Art Irrtumswahrscheinlichkeit α
H_1 richtig	Fehler 2. Art Irrtumswahrscheinlichkeit β	richtige Entscheidung

Zur Veranschaulichung wenden wir uns noch einmal Beispiel 46 über die Ausschusswaren bei Tischtennisbällen der vorigen Kapitel zu:

Aufgrund der Behauptung des Herstellers, dass höchstens 5% der Bälle beschädigt sind

(H_0: p = 0,05), wird eine Vereinbarung zwischen Hersteller und Abnehmer getroffen, wann die Waren angenommen werden muss (Annahmebereich) und wann sie zurückgeschickt werden darf (Ablehnungsbereich).

Es wird eine Zufallsstichprobe vom Umfang n gezogen und aufgrund des Ergebnisses entschieden. Je kleiner der Ablehnungsbereich, desto geringer das Risiko des Herstellers, Waren, die den Vereinbarungen entsprechen, zurückgeschickt zu bekommen. Dabei spricht man von einem Fehler 1. Art. Dafür ist das Risiko des Abnehmers umso größer, Waren übernehmen zu müssen, die nicht den vereinbarten Qualitätsansprüchen genügt (Fehler 2. Art).

Je größer der Ablehnungsbereich, umso größer das Risiko des Herstellers (**Fehler 1. Art**) und umso kleiner das Risiko des Abnehmers (**Fehler 2. Art**).

Damit wurde gezeigt, dass es sowohl für Hersteller, als auch für Abnehmer unerlässlich ist, einen für beide Seiten akzeptablen Ablehnungsbereich auszuhandeln.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit β kann nur berechnet werden, wenn eine echte Alternativhypothese der Gestalt H_1: $p = p_1$ vorliegt, und nicht eine Alternativhypothese im Sinne einer Gegenhypothese H_1: $p > p_1$ oder H_1: $p < p_1$.

Abbildung 36 zeigt den Zusammenhang von α- und β-Fehler:

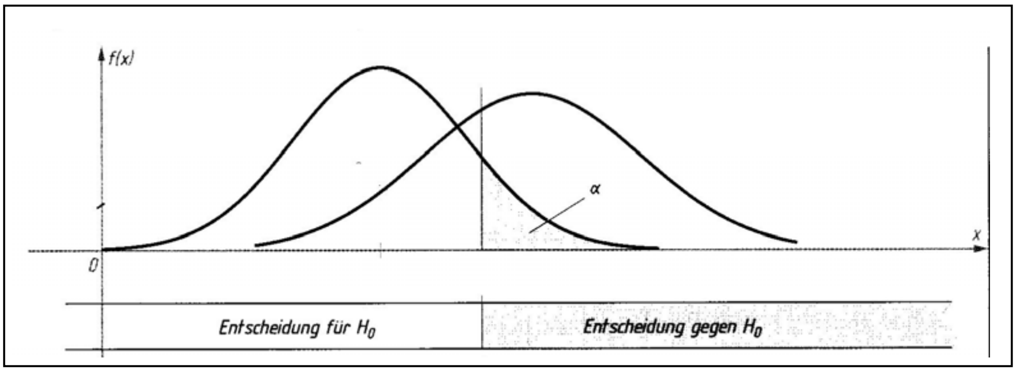


Abbildung 36: *α*- und *β*-Fehler (Götz et al., 2006, S. 150)

Beispiel 47:

Eine Firma für Schwimmbrillen behauptet, dass 49 von 50 Schwimmbrillen garantiert dicht seien (H_0). Eine konkurrierende Firma behauptet dagegen, dass 3% der Brillen fehlerhaft wären (H_1). Ein Institut testen 600 Brillen auf ihre Dichtheit.

a) Wo muss die Grenze c für den Ablehnungsbereichbereich für H_0 gezogen werden, wenn nur signifikante Ergebnisse veröffentlicht werden sollen?

b) Berechne die Irrtumswahrscheinlichkeit β.

c) Wie lautet die Entscheidung, wenn 17 Schwimmbrillen undicht sind?

Lösung:

Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der undichten Schwimmbrillen. X ist binomialverteilt mit den Parametern n = 600 und p. Wir wählen $\alpha = 0{,}05$, da es sich um signifikante Aussagen handeln soll.

a) H_0 behauptet, dass $p = 1 - \frac{49}{50} = 0{,}02$.

$\mu_0 = 600.\ 0{,}02 = 12$, $\sigma_0 = \sqrt{600.0{,}02.0{,}98} \approx 3{,}43 > 3$, wir können also die Binomialverteilung durch die Normalverteilung $N\,(12;\ 3{,}43^2)$ approximieren.

Wir rechnen ohne Stetigkeitskorrektur:

$P(X \geq x) = 0{,}05 = \alpha$

$P(X \leq x) = 0{,}95 = P(Z \leq z) = \Phi(z)$

$\Rightarrow\ z = 1{,}645$ (vgl. Tabelle 50, Anhang 4)

$$z = 1{,}645 = \frac{c - \mu_0}{\sigma_0} = \frac{c - 12}{3{,}43} \ \Rightarrow\ c \approx 17{,}64$$

Für H_0 erhält man also den Ablehnungsbereich $K_0 = \{18, 19, \ldots, 599, 600\}$

b) H_1 behauptet, dass $p = 0{,}03$.

$\mu_1 = 600.\ 0{,}03 = 18$, $\sigma_1 = \sqrt{600.0{,}03.0{,}97} \approx 4{,}18 > 3$, wir können die Binomialverteilung durch die $N\,(18;\ 4{,}18^2)$-Verteilung approximieren und rechnen wieder ohne Stetigkeitskorrektur:

$$\beta = P(X \notin \mathrm{K}_0) = P(X \leq 18) = P(Z \leq \frac{18 - 18}{4{,}18}) = P(Z \leq 0) = \Phi(0) = 0{,}5$$

c) Bei $X = 17$ kann H_0 nicht signifikant verworfen werden. Obwohl das Stichprobenergebnis dem Erwartungswert des Konkurrenten näher liegt, muss aufgrund der Vorgabe $\alpha = 0{,}05$ den Angaben der Herstellerfirma mehr Glauben geschenkt werden. Dies schlägt sich in der recht großen Irrtumswahrscheinlichkeit β nieder.

Aufgabe 105:

Eine Firma füllt isotonische Getränke ab. Die Flascheninhalte können aufgrund der maschinellen Abfüllung geringfügig schwanken. Es wird behauptet, dass nur 6% der Flaschen einen Inhalt unter $0{,}498l$ aufweisen. Ein kritischer Kunde vermutet, dass dieser Anteil größer ist. Er wählt per Zufall 20 Flaschen aus und misst folgende Inhalte (Angabe in l):

0,505	0,501	0,498	0,497	0,506	0,503	0,497	0,499	0,502	0,501
0,498	0,496	0,511	0,491	0,495	0,493	0,505	0,503	0,504	0,510

Teste mit einer Signifikanz von a) 0,05, b) 0,01.

Aufgabe 106:

Es wird behauptet, dass 25% derjenigen, die Nordic-Walking betreiben, männlich sind. Jemand vermutet, dass dieser Anteil geringer ist. Bei einer Stichprobe von 80 Personen finden sich 13 männliche Nordic-Walker.

Teste mit einer Signifikanz von a) 0,05, b) 0,01.

Aufgabe 107:

Laut Behauptung einer Zeitung bestehen zwei Drittel aller Lehrlinge die Lehrabschlussprüfung. Ein Prüfer behauptet hingegen, das drei Viertel bestehen würden.

Beim folgenden Durchgang treten 450 Lehrlinge zur Abschlussprüfung an.

a) Gib H_0 und H_1 an.

b) Wo muss die Grenze c des Ablehnungsbereichbereiches für H_0 gezogen werden, wenn nur signifikante Ergebnisse veröffentlicht werden sollen?

c) Berechne die Irrtumswahrscheinlichkeit β.

5.2.3 Zweiseitige Anteilstests

Im Beispiel zur Herstellung von Tischtennisbällen wird der Ablehnungsbereich rechtsseitig vom Erwartungswert gewählt, denn wenn die Anzahl X der Ausschussstücke größer als vom Hersteller angegeben ist, wird der Abnehmer die Ware zurückschicken. Werden im Gegensatz zu diesem Beispiel nicht die beschädigten, sondern die intakten Stücke gezählt, so wird die Ware natürlich nur dann abgelehnt, wenn der Wert der intakten Stücke kleiner als vom Hersteller versprochen ist. Man spricht dann von einem linksseitigen Test.

Bei einem zweiseitigen Test liegt die bloße Vermutung vor, dass der Anteil aus der Stichprobe vom behaupteten Wert abweicht (siehe Abb. 37).

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α errechnet sich in beiden Fällen durch Summierung der Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$, wobei $k \in$ Ablehnungsbereich K. Wegen der einfacheren Berechnung approximiert man die Binomialverteilung soweit als möglich ($\sigma > 3$) durch die passende Normalverteilung (vgl. Kap. 4.11.5).

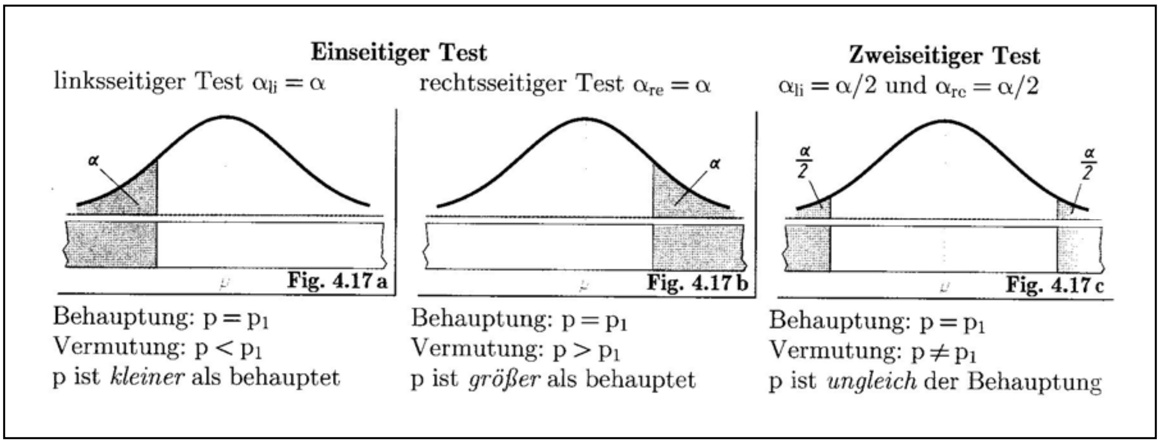


Abbildung 37: Ein- und zweiseitige Tests (Götz et al., 2006, S. 142)

Beispiel 48:

Ein Sportschütze trifft mit seinem Gewehr zu 80% in den schwarzen Mittelkreis der Zielscheibe. Nun bekommt der Schütze ein neues Gewehr. Es soll getestet werden, ob sich die Zielgenauigkeit des Sportschützen ändert, also ob sie zu- oder abgenommen hat.

Bei einer Stichprobe von 20 Schüssen trifft er 12 Mal „ins Schwarze". Kann die Nullhypothese, dass die Zielgenauigkeit gleich bleibt, mit der maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit α = 0,05 verworfen werden?

Lösung:

p sei der relative Anteil der Treffer „ins Schwarze", gemessen an den abgegebenen Schüssen. Die Null- und Alternativhypothesen haben folgende Gestalt:

H_0: $p = 0{,}8$ (Trefferquote ist gleich geblieben)

H_1: $p \neq 0{,}8$ (Trefferquote hat sich verändert)

X sei die Anzahl der Treffer „ins Schwarze". Falls H_0 gilt, dann ist X annähernd binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}8$. Es sei $\alpha = 0.05$.

Wir müssen nun die Irrtumswahrscheinlichkeiten $P(X \leq k)$ und $P(X \geq k)$ berechnen. Deshalb wird die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ auf die beiden Enden der Verteilung (vgl. Abbildung 37) aufgeteilt.

Die Nulhypothese wird dann verworfen, wenn $P(X \leq k)$ oder $P(X \geq k)$ höchstens 0,25 ergibt.

Da $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{20.0{,}8.0{,}2} \approx 1{,}79 < 3$ können wir die Binomialverteilung nicht durch die Normalverteilung approximieren.

Es ist $k = 12$, also gilt:

$$P(X \leq 12) = \sum_{k=0}^{12} \binom{20}{k} p^k .\ q^{n-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{20}{k} 0{,}8^{\,k} .\ 0{,}2^{\,20-k} \approx 0{,}032 > 0{,}025$$

$P(X \geq 12) \approx 0{,}999 > 0{,}025$ (siehe Tabelle 54, Anhang 4)

Die Nullhypothese kann nicht verworfen werden. Es besteht keine Annahme, dass sich die Trefferquote verändert hat.

Aufgabe 108:

Der Manager eines Sportartikelshops weiß aus Erfahrung, dass etwa 20% der Kunden bei einem Einkauf mindestens 50€ ausgeben.

Er will nun wissen, ob dies auch an einem langen Einkaufssamstag zutrifft. Er wählt an dem betreffenden Tag zufällig 10 Kunden aus und führt einen zweiseitigen Test mit $\alpha = 0{,}05$ durch. Die 10 Kunden gaben folgende Beträge aus:

99,90 27,00 19,80 89,60 32,50 85,00 91,60 51,90 79,70 62,50

Führe den Test durch!

Aufgabe 109:

Eine Maschine befüllt Boxsäcke mit dem Sollgewicht von 30 *kg* Sand. Ist die Maschine sorgfältig eingestellt, so weichen nur etwa 4% der Boxsäcke vom Sollgewicht ab.

Bei längerem Betrieb kann die Maschine sich verstellen und muss deshalb in regelmäßigen Abständen überprüft werden. Es wird eine Stichprobe entnommen und ein zweiseitiger Anteilstest mit $\alpha = 0{,}01$ durchgeführt.

a) In einer Stichprobe von 15 Säcken weisen 2 nicht das Sollgewicht auf. Hat die Maschine sich verstellt?

b) In einer Stichprobe von 15 Säcken weist kein Einziger vom Sollwert ab. Warum kann man trotzdem nicht sagen, dass die Maschine sich nicht verstellt hat?

5.3 Konfidenzintervalle

5.3.1 Begriffserklärungen

Wie bereits in Kapitel 5.1 beschrieben ist es eine Grundaufgabe der beurteilenden Statistik, aus Verhältnissen einer Stichprobe auf die Verhältnisse der Grundgesamtheit zu schließen.

Ermittelt man aus der Stichprobe einen Wert $\hat{p}$, so kann dieser als Schätzwert für das p der Grundgesamtheit gelten. Man spricht von *Punktschätzung*, da für den unbekannten, relativen Anteil in der Grundgesamtheit ein punktueller Wert angegeben wird. Dieser kann jedoch sehr ungenau ausfallen, weil der relative Anteil in der Stichprobe Schwankungen unterliegt.

Aus diesem Grunde bemüht man sich, in der Praxis Intervallschätzungen vorzunehmen. Es wird ein Intervall der Gestalt $[p_1; p_2]$ um $\hat{p}$ als Schätzwert für den unbekannten relativen Anteil in der Grundgesamtheit angegeben, das den wahren Wert p des gesuchten Parameters mit einer vorgewählten Wahrscheinlichkeit γ enthält. Dabei werden auch gewisse Werte, die vom Punktschätzwert abweichen, als Schätzwerte für den unbekannten relativen Anteil in der Grundgesamtheit akzeptiert. (Götz et al., 2006 und Bürger et al., 1991).

Alle p $(0 \leq p \leq 1)$, deren γ-Streubereiche den beobachteten Wert $\hat{p}$ enthalten, bilden ein Intervall $[p_1; p_2]$. Man spricht vom γ-Konfidenzintervall (oder γ-Vertrauensintervall) für das unbekannte p.

In anderen Worten: Die Menge aller $\hat{p}$, für die aufgrund des Stichprobenergebnisses die Nullhypothese H_0: $p = \hat{p}$ nicht durch einen zweiseitigen Anteilstest mit der Signifikanz $\alpha = 1 - \gamma$ verworfen werden kann, wird als Konfidenzintervall bezeichnet (Abbildung 38).

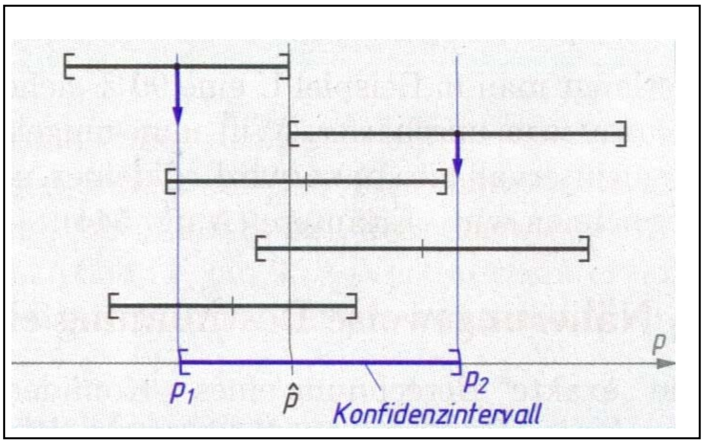


Abbildung 38: γ-Konfidenzintervall (Götz et al., 2006, S. 142)

5.3.2 Bestimmung des Konfidenzintervalls

Beispiel 49:

Vor einer Wahl möchte jemand den relativen Anteil der Wähler einer bestimmten Partei feststellen. Es werden 300 Wahlberechtigte befragt, von denen sich 90 für die betreffende Partei aussprachen. Wie groß wird der relative Anteil der Wähler dieser Partei gemessen an allen Wahlberechtigten bei der Wahl sein? Gib ein 95%-Konfidenzintervall an!

Lösung:

$n = 300$ und $\hat{p} = \dfrac{X}{n} = \dfrac{90}{300} = 0{,}3$.

Also ist $\hat{\sigma}_X = \sqrt{300.0{,}3.0{,}7} \approx 7{,}94$.

Da p von $\hat{p}$ nicht gravierend abweichen wird gilt: $\hat{\sigma}_X \approx \sigma_x$ und weil $\sigma_x > 3$ können wir die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximieren.

Durch die γ–Streubereichsformel (Kapitel 4.11.4)

$P(|X - \mu| \leq z \,.\, \sqrt{n.p.(1 - p)} = \gamma = 2.\, \Phi(z) - 1$ erhalten wir:

$0{,}95 = 2.\, \Phi(z) - 1 \Rightarrow z = 1{,}96$

Einsetzen:

$P(|90 - 300p|) \leq 1{,}96 \,.\, \sqrt{300.p.(1 - p)}$

$\Rightarrow$ quadratische Ungleichung: $(90 - 300p)^2 \leq 1{,}96^2.\ 300.\ (p - p^2)$

$\Rightarrow\ p^2 - 0{,}60506p + 0{,}08886 \leq 0$

$\Rightarrow\ p_1 \approx 0{,}35415$ und $p_2 \approx 0{,}25091$

Interpretation:

Der gesuchte wahre Anteil derjenigen Wähler, die die genannte Partei wählen, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% vom Intervall [0,2509; 0,3542] überdeckt.

Durch die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung wird eine Genauigkeit vorgetäuscht, die an sich nicht gegeben ist. Wir runden das Ergebnis deshalb „nach außen" und gelangen zum Endergebnis: [25,1%; 35,5%].

Zur einfacheren, schnelleren Berechnung empfiehlt sich die Verwendung einer Näherungsformel, die jedoch nur für $0{,}3 < p < 0{,}7$ angewandt werden kann.

Näherungsformel für das γ-Konfidenzintervall von p (mit $0{,}3 < p < 0{,}7$):

$$\hat{p} - \varepsilon \leq \mathrm{p} \leq \hat{p} + \varepsilon$$

$$\hat{p} - z.\sqrt{\frac{\hat{p}.(1 - \hat{p})}{n}} \leq \mathrm{p} \leq \hat{p} + z.\sqrt{\frac{\hat{p}.(1 - \hat{p})}{n}} \quad \text{mit } \gamma = 2.\ \Phi(z) - 1$$

Aufgabe 110:

Von 50 zufällig gewählten Schülern einer Schule geben 32 Schüler Sport als ihr Lieblingsfach an.

a) Gib ein 95%-Konfidenzintervall für den unbekannten relativen Anteil der Schüler dieser Schule an, die Sport als Lieblingsfach angeben.

b) An dieser Schule gibt es 730 Schüler. Wie viele haben Sport als Lieblingsfach?

Aufgabe 111:

Berechne näherungsweise und auf exaktem Wege das 95%-Konfidenzintervall:

a) $n = 600,\ \hat{p} = 0{,}28$ c) $n = 1000,\ \hat{p} = 0{,}68$

b) $n = 250,\ \hat{p} = 0{,}4$ d) $n = 800,\ \hat{p} = 0{,}35$

Aufgabe 112:

Erfinde selbst ein Beispiel zur Bestimmung eines 95%-Konfidenzintervalls aus dem Bereich des Sports!

Führe eine exakte und näherungsweise Berechung durch.

5.3.3 Ermittlung des Stichprobenumfangs

Beispiel 50:

Eine Partei konnte bei der vergangenen Wahl 35,6% der Wählerstimmen für sich gewinnen. Für die neue Wahl möchte der Parteivorsitzende mit Hilfe des 95%-Konfidenzintervalls den aktuellen Wähleranteil auf ± 2% genau schätzen. Wie viele Personen müssen dazu befragt werden?

Lösung:

Da mit keinen gravierenden Änderungen gerechnet wird, kann $\hat{p}$ als Schätzwert für den aktuellen Wähleranteil p dienen. Da $\hat{p} = 0{,}356$ ist die Voraussetzung $0{,}3 < p < 0{,}7$ erfüllt, wir können mit der Näherungsformel rechnen.

$\varepsilon = 2\% = 0{,}02;\ z = 1{,}96$

Aus der Gleichung $\varepsilon = z.\sqrt{\frac{\hat{p}.(1 - \hat{p})}{n}}$ folgt,

dass $n = \frac{z^2.\hat{p}.(1 - \hat{p})}{\varepsilon^2} = \frac{1{,}96^2.0{,}356.(1-0{,}356)}{0{,}02^2} \approx 2201{,}85.$

Es müssen also etwa 2200 Personen befragt werden.

Genügt $\hat{p}$ (und damit p) nicht der Faustregel, dass $0{,}3 < p < 0{,}7$, so kann n nur in etwa abgeschätzt werden. Da man einen Wert n abschätzen kann, der in jedem Fall genügt, spricht man von einer pessimistischen Abschätzung.

Pessimistische Abschätzung:

Im Falle eines 95%-Konfidenzintervalls erhält man für ε in etwa $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n}}$.

Für den Stichprobenumfang n erhält man somit den ungefähren Wert von $n = \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Aufgabe 113:

Es soll auf ± 3,5% mit einer Irrtumwahrscheinlichkeit von 0,05% der Anteil jener Haushalte geschätzt werden, die über ein Fitnessgerät verfügen. Wie viele Haushalte müssen mindestens befragt werden, wenn

a) $p \approx 0{,}20$ ist,

b) kein Schätzwert für p vorliegt?

Aufgabe 114:

Der Sportkustos einer Schule möchte den Zustand aller Fußbälle kontrollieren, um gegebenenfalls neue zu bestellen. Nach Schätzungen seiner Kollegen müsste etwa ein Drittel der Bälle ersetzt werden.

Wie viele Bälle müsste der Sportkustos kontrollieren, um den Anteil der kaputten Bälle mit 95% Sicherheit auf ± 4% bestimmen zu können?

Ist der Test realistisch? Warum?

Aufgabe 115:

Nach einer groben Schätzung haben etwa 60% der Fußballer der Bundesliga ernsthafte Knieprobleme. Wie viele Spieler müssen untersucht werden, um den Anteil der Spieler mit Knieproblemen auf dem 95%-Sicherheitsniveau auf

a) ± 3%

b) ± 5% genau zu ermitteln?

5.4 Nichtparametrische Testverfahren

Die in den Kapiteln 5.2 und 5.3 behandelten Testverfahren zielen auf die Prüfung einer Hypothese im Sinne einer Annahme oder Ablehnung ab. Wegen der Annahme über einen oder mehrere unbekannte Parameterwerte einer Hypothese spricht man auch von Parameterhypothesen und in Folge dessen von Parametertests.

Nun wollen wir uns sogenannten nichtparametrischen Tests zuwenden, deren Aufgabe prinzipiell darin besteht, sich nicht nur auf spezielle Parameter zu stützen, sondern zum Beispiel zu überprüfen, ob eine Zufallsvariable einer bestimmten Verteilung unterliegt oder zu einer bestimmten Klasse von Verteilungen gehört.

In Vorbereitung auf das nächste Kapitel zur Spielerbeobachtung im Basketball sind für uns Tests auf Unabhängigkeit von Zufallsvariablen interessant.

5.4.1 U-Test nach Mann-Whitney

Mit Hilfe des U-Tests, entwickelt 1947 von Mann und Whitney, zurückgehend auf die Arbeit von Wilcoxon (1945), können zwei unabhängige Stichproben aus zwei Grundgesamtheiten, deren Zufallsvariablen A und B mindestens Ordinalskalenniveau haben, hinsichtlich Übereinstimmungen der Verteilungen in den beiden Grundgesamtheiten überprüft werden. (Hochstädter, 1996).

Als Voraussetzungen für den U-Test gelten stetige Verteilungsfunktionen aus Grundgesamtheiten mit gleichen oder zumindest ähnlichen Verteilungsformen. Die Wahrscheinlichkeit, eine Merkmalsausprägung $a < b$ zu beobachten, ist dann gleich groß, wie die Wahrscheinlichkeit, $a > b$ zu beobachten. Für $a \in A$ und $b \in B$ gilt also: $P(a < b) = P(a > b)$.

Entstammen beide Stichproben derselben Grundgesamtheit, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Beobachtung $a \in A$ größer ist als $b \in B$ genau so groß, wie für den umgekehrten Fall. Damit lassen sich folgende Hypothesen aufstellen:

a) $\left.\begin{array}{l} H_0\colon P(a < b) = 0{,}5 \\ H_1\colon P(a < b) \neq 0{,}5 \end{array}\right\}$ zweiseitiger Test

b) H_0: $P(a < b) \leq 0{,}5$ } rechtsseitiger, einseitiger Test
H_1: $P(a < b) > 0{,}5$

c) H_0: $P(a < b) \geq 0{,}5$ } linksseitiger, einseitiger Test
H_1: $P(a < b) < 0{,}5$

Die Hypothesen für den zweiseitigen Test können aufgrund der Voraussetzung der gleichen Verteilung auch durch die Verteilungsfunktionen angegeben werden:

H_0: $F_a(x) = F_b(x)$ für alle x

H_1: $F_a(x) \neq F_b(x)$ für mindestens ein x

Vorgehensweise:

1. Der U-Test ist ein Rangsummentest für unabhängige Stichproben. Ähnlich wie beim Wilcoxon-Test (Kapitel 5.4.2) werden die $n = n_A + n_B$ Beobachtungen der Größe nach geordnet, in aufsteigende Reihenfolge gebracht und Rangzahlen 1 bis n zugeordnet.

   Es wird davon ausgegangen, dass $n_A \leq n_B$.

   Ist dies nicht der Fall, so können die beiden Stichproben einfach vertauscht werden.

2. Nach Zuordnung von Rangzahlen werden die Rangsummen R_A und R_B gebildet, das heißt die der Stichprobe A bzw. der Stichprobe B entstammenden Beobachtungswerte werden getrennt voneinander addiert.

3. Zur Berechnung der Prüfgröße muss ausgezählt werden, wie oft Werte der Stichprobe A vor Werten der Stichprobe B stehen (U_A) und umgekehrt (U_B). Um sich diese mühsame Zählung bei größeren Stichproben zu ersparen, kann in folgende Formeln eingesetzt werden:

$$U_A = n_A . n_B + \frac{n_A.(n_A + 1)}{2} - R_A \quad \text{und} \quad U_B = n_A . n_B + \frac{n_B.(n_B + 1)}{2} - R_B$$

Es muss gelten: $U_A + U_B = n_A . n_B$

4. Die kleinere der beiden Größen U_A und U_B ist die gesuchte Prüfgröße.

   $U_{pr} = \text{Min}\{U_A; U_B\}$

5. Testentscheidung:

   Im Falle einer zweiseitig formulierten Hypothese muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $U_{pr} \leq U(n_A, n_B; \alpha)$ (Tabelle 56 für zweiseitige Tests, Anhang 4).

   Bei einer einseitig, linksseitigen Hypothese muss die Nullhypothese dann verworfen werden, wenn $U_{pr} = n_A . n_B - U_A \leq U(n_A, n_B; \alpha)$ ist, bei einer einseitig, rechtsseitigen Hypothese dann, wenn $U_{pr} = U_A \leq U(n_A, n_B; \alpha)$. Die Werte für $U(n_A, n_B; \alpha)$ werden in diesem Fall aus Tabelle 55 für einseitige Tests in Anhang 4 abgelesen.

   Andernfalls werden die Nullhypothesen beibehalten.

5.4.2 Rangsummentest nach Wilcoxon

Der Rangsummentest, auch Vorzeichen-Rangtest genannt, im Zwei-Stichproben Fall dient der Prüfung von Unterschieden zweier Verteilungen von zwei ordinalskalierten Zufallsvariablen mittels abhängiger Stichproben.

Er kann auch im Ein-Stichproben Fall angewandt werden. Als Voraussetzung für die statistische Auswertung in Kapitel 6.4.6, wollen wir uns nur auf den Zwei-Stichproben Fall konzentrieren.

Wie sein Name schon sagt, zielt der Test darauf ab, mit Hilfe von Rangzahlen eine Hypothese über das Symmetrieverhalten einer Grundgesamtheit zu testen. (Hochstädter, 1996).

Er gilt ebenso wie der *t*-Test als optimaler Test für den Vergleich zweier abhängiger Stichproben. Der *t*-Test unterliegt jedoch der Voraussetzung der Normalverteilung der Daten, von der wir – zumindest vor Durchführung der Spielerbeobachtung im Basketball in der Realität – nicht ausgehen können. Da der Wilcoxon-Test aber nicht-normalverteilte Differenzen ebenso genau testet wie normalverteilte, nämlich mit einer Effizienz von 95% (Sachs, 2004), und weniger Rechenarbeit verlangt, wollen wir uns auf die Ausarbeitung dieses Tests beschränken.

Angenommen es liegen n Beobachtungspaare (x_i, y_i) mit $1 \leq i \leq n$ für zwei stetige Zufallsvariablen X und Y vor, dann soll geprüft werden, ob die beiden Zufallsvariablen aus gleichen Verteilungen stammen (H_0), oder ob sie sich hinsichtlich ihrer Verteilungen unterschieden (H_1).

Die Hypothesen könnten lauten:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } H_0: P(X > Y) = P(X < Y) \\ \phantom{\text{a) }} H_1: P(X > Y) \neq P(X < Y) \end{array}\right\} \text{ zweiseitiger Test}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } H_0: P(X > Y) \geq P(X < Y) \\ \phantom{\text{b) }} H_1: P(X > Y) < P(X < Y) \\ \text{c) } H_0: P(X > Y) \leq P(X < Y) \end{array}\right\} \text{ einseitige Tests}$$

$$\phantom{\text{c) }} H_1: P(X > Y) > P(X < Y)$$

Vorgehensweise:

1. Die Berechnung der Prüfvariablen erfolgt durch Bildung der Differenzen der einzelnen Stichprobenwerte: $d_i = x_i - y_i$.

   Falls $d_i = 0$, dann wird der zugehörige Beobachtungswert in den folgenden Rechenschritten nicht mehr berücksichtigt.

2. Die absoluten Beträge $| d_i |$ der Differenzen werden in ansteigende Reihenfolge gebracht. Der kleinste Rang erhält die Rangzahl 1, der Größte n. Jedem Betrag $| d_i |$ wird also eine Rangzahl c zugeordnet. Ist der Betrag mehrerer Differenzen gleich groß, so wird diesen der Mittelwert der zugeordneten Rangzahlen zugeordnet.

3. Anschließend werden die Rangzahlen positiver und negativer Differenzen getrennt voneinander addiert:

   $$R_{(+)}(n) = \sum_{di>0} R_i \quad \text{und} \quad R_{(-)}(n) = \sum_{di<0} R_i$$

   Durch folgende Rechnung (Gauß´sche Summenformel) können die Rangsummen kontrolliert werden:

$$R_{(+)}(n) + R_{(-)}(n) = \frac{n.(n+1)}{2}$$

4. Als Prüfvariable wird der kleinere der beiden Rangsummen verwendet, also das Minimum. Die Nullhypothese wird verworfen, wenn der berechnete R-Wert kleiner oder gleich dem kritischen Wert $R(n;\, \alpha)$ der Tabelle 57 aus Anhang 4 ist.

   Die Prüfvariable $R_{pr}(n)$ kann alle möglichen Werte ganzer Zahlen zwischen Null und $\frac{n.(n+1)}{2}$ annehmen. Ihre Verteilung ist symmetrisch und es gilt:

   $P(R_{pr}(n) = k) = P(R_{pr}(n) = \frac{n.(n+1)}{2} - k)$, wobei k eine nicht negative ganze Zahl ist.

5. Zur Bestimmung des kritischen Wertes $R(n;\, \alpha)$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

   a) Für n $\leq$ 30 kann die Verteilung der Prüfvariable nicht explizit angegeben werden, die Annahmekennzahlen $R(n;\, \alpha)$ werden Tabelle 57 aus Anhang 4 entnommen.

   b) Für n > 30 sind $R_{(+)}(n)$ und $R_{(-)}(n)$ approximativ normalverteilt mit den Parametern $\mu_R = \frac{n.(n+1)}{4}$ und $\sigma_R^2 = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{24}$. Die Annahmekennzahl kann in diesem Fall berechnet werden: $R(n;\, \alpha) = \mu - z_\alpha.\sigma$

6. Testentscheidung:

   Wenn $R_{pr}(n) \leq R(n;\, \alpha)$ wird die Nullhypothese verworfen,

   falls $R_{pr}(n) > R(n;\, \alpha)$ muss die Nullhypothese beibehalten werden.

6 Spielerbeobachtung am Beispiel Basketball

6.1 Einleitung

In diesem Kapitel sollen Schülern die Einsatzmöglichkeiten der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie im Sport am Beispiel einer Spielerbeobachtung im Basketball aufgezeigt werden.

Einführend soll die in *Offizielle Basketballregeln* (2000) des internationalen Basketball-Verbands (FIBA) genannte Definition des Basketballspiels angeführt werden:

> „Basketball wird von zwei Mannschaften mit je fünf Spielern gespielt. Es ist das Ziel jeder Mannschaft, den Ball in den Korb des Gegners zu werfen und die andere Mannschaft daran zu hindern, sich in Ballkontrolle zu bringen oder Korberfolge zu erzielen."

Nach Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilenden Statistik im Mathematikunterricht soll interessierten Schülern, also jenen, die zum Beispiel ein Sport- oder Mathematik Wahlpflichtfach besuchen, die Möglichkeit geboten werden, einen Einblick in die Methoden und Techniken empirischer Forschung im Sport zu bekommen. „Griech. Empirie = die Erfahrung; Empirisch verfahren die Wissenschaften, die sich auf die Erfahrung, besonders auch Beobachtung, Messung, Experiment, gründen", so Brockhaus (1973b, S.500).

Es sollte eine Sportart gewählt werden, die möglichst viele Schüler anspricht. Da Spielsportarten wie zum Beispiel Fußball oder Tennis in unserer Gesellschaft sehr präsent sind, und mit regem Zuschauerinteresse verfolgt werden, sollte ein Sportspiel Vorlage für eine Spielerbeobachtung mit statistischer Auswertung werden.

Statistische Literatur zur Spiel- und Trainingsforschung gibt es in erster Linie für Baseball, Fußball und Basketball.

Da Baseball in Europa keinen besonders hohen Stellenwert hat und Fußball wohl doch eher den männlichen Teil der Schüler anspricht, sollte Basketball, das durch seine Nähe zur Trendsportart Streetball am ehesten dem Interesse des Großteils der Schüler entspricht, gewählt werden.

Als weiteres Motiv für die Themenwahl gilt meine eigene Erfahrung in der Schulzeit. Ich spielte in der Unterstufe selbst im Basketball-Schulteam. Wir waren zwei herausragende Spielerinnen, die sehr gut zusammenspielten und damit stets eine Menge Korberfolge erzielten. Im vorliegenden Untersuchungsplan soll die Möglichkeit gegeben sein zu testen, ob ein Training von 2-2 Spielzügen zu einer Verbesserung des Zusammenspiels im *ganzen* Team führt.

In der heutigen Zeit gibt es zahlreiche technische Hilfsmittel und aufwändige Computer-Video-Systeme zur Aufzeichnung und Auswertung von Spielbeobachtungen wie beispielsweise Video AS, die für den Gebrauch in der Schule jedoch zu komplex erscheinen. Deshalb, und aus dem Grund des besseren Verständnisses soll sowohl die Datenerfassung als auch deren Analyse in erster Linie in schriftlicher Form erfolgen. Wagner und Willimczik (in Singer und Willimczik, 2002, S. 197) sprechen von der „schriftlich gebundenen Spielerbeobachtung".

Weil empirische Forschung eine Menge Wissen und Erfahrung mit der Materie voraussetzt, Sinn der Spielbeobachtung mit Schülern nicht primär ein absolut exaktes Untersuchungsergebnis, sondern vielmehr ein Aufzeigen der Möglichkeiten und Grenzen empirischer Forschung im Sport ist und aus zeitlichen Gründen, werden in den nachfolgenden Teilkapiteln nur die für unser Forschungsthema relevanten Voraussetzungen und Aspekte näher erläutert bzw. teilweise als gegeben angenommen.

6.2 Statistik im Basketballspiel

Sportarten können quantitativ oder qualitativ beurteilt werden. Unmittelbar sichtbare Ergebnisse wie Korbwürfe, Schrittfehler oder Fouls, die obendrein noch vom Schiedsrichter bestätigt werden, sind leicht zu erfassen. Als viel schwieriger gestaltet sich die Beobachtung taktischen Verhaltens, das das Basketballspiel dominiert.

„Aufgrund der hohen Komplexität der taktischen Handlungsmöglichkeiten im Basketball begnügt man sich entweder mit der bloßen Erfassung grob klassifizierter individueller und kollektiver Spieleraktionen (…) oder verlässt sich auf qualitativ ausgerichtete Analysen des Spielgeschehens.", meint Remmert (2002, S. 15).

In jeder Sportart gibt es Regeln, die bestimmen, was gemessen werden muss um einen Sieger zu erhalten. In der empirischen Forschung gibt es solche Regeln jedoch nicht, sodass der Forscher selbst entscheiden muss, mit welchen Methoden er verwertbare Messwerte erhalten kann.

Im Gegensatz zu Individualsportarten oder „unechten" Mannschaftsbewerben, bei denen die Summe der Einzelleistungen aller Teammitglieder zählt, gilt Basketball als „echter" Teamsport. „Leistungsanteile der einzelnen SpielerInnen am Spielausgang sind weder nach Art noch Umfang einwandfrei auszumachen." (Czwalina, 1976, S. 7).

Leistung im Basketballspiel ist also der Beitrag jedes Einzelspielers zum Erfolg der Gruppe, wobei zu beachten sei, dass sportspielerische Leistungen nicht allein aus den Fähigkeiten einer Partei, sondern erst aus den Wechselwirkungen der Fähigkeiten beider Parteien resultieren. Außerdem sind leistungsbestimmende Faktoren niemals konstant, sondern abhängig von der Tagesverfassung der einzelnen Spieler, Heim-/ oder Auswärtsspiel, usw.

Basketball ist von äußerst komplexen Entscheidungsstrukturen geprägt und gilt als sehr schnelles Spiel: ein relativ kleines Spielfeld mit hoher Anzahl an Korberfolgen, hohes Tempo sowie die Zuständigkeit aller Spieler für Angriff und Verteidigung (im Gegensatz zu Fußball beispielsweise) sind charakteristisch.

Das gesamte System kann wegen seiner hohen Komplexität und der Gefahr von Störungen kaum als Ganzes beschrieben werden, weshalb die Struktur taktischer Handlungen in ein Modell übertragen wird, das eine Analyse dieser Handlungsabläufe erlaubt. Remmert (2000, S. 41) nennt dieses System-Modell eine „zweckorientierte Abbildung der Realität".

In der Spielerbeobachtung werden leistungsrelevante Spieleraktionen durch Häufigkeitsverteilungen dargestellt, die zu einem Normprofil sportspielspezifischer Spielerleistung standardisiert werden. Aufgrund des Einmaligkeitscharakters von Spielzügen kann dieses Normprofil jedoch nicht als allgemein gültig betrachtet werden, es muss von den Forschern, basierend auf Wissen und Erfahrungen im Umgang mit empirischer Forschung jedes Mal neu erstellt und analysiert werden.

Remmert (2002, S. 14) schreibt: „Der Wettkampf ist also das Feld der Leistungspräsentation von Sportspielern, und die systematische Spielbeobachtung ist das geeignete Verfahren zur Beschreibung der dort gezeigten Verhaltensweisen."

Man beschränkt sich dabei auf die tatsächlich interessierenden Aspekte des Systems, um für diesen Ausschnitt gültige Informationen zu erhalten. Dies entspricht einer Reduktion an Informationen, sodass eine genaue Abschätzung Voraussetzung ist, da die am Modell gewonnenen Erkenntnisse ja in eine Theorie „rückübersetzt“ werden müssen.

Als einige Ziele der Spielerbeobachtung nennt Czwalina (1976, S. 11) die technische und taktische Leistungsverbesserung durch Aufzeigen von Stärken und Schwächen einzelner Spieler, den Leistungsvergleich zwischen Training und Wettkampf sowie die Objektivierung der Leistungsmessung im Sinne der Notenvergabe im Schulsport. „Aus vielfältigen Gründen besteht im Wettkampfsport der Wunsch und im Schulsport angesichts des ministeriellen Zwangs zur Notengebung sogar die Notwendigkeit, den Leistungsstand von Sportspielern auszuloten.“, führt Czwalina (1976, S. 7) aus.

Die Art von Beobachtungen, die etwa Lehrer, Trainer, Schiedsrichter oder zum Beispiel Reporter vornehmen ist der wissenschaftlichen Beobachtung sehr ähnlich, weil beide auf die Lösung einer Aufgabe hinzielen mit dem einzigen Unterschied, dass es erstgenannten um die Verbesserung ihrer Arbeit und zweit genannten um die Lösung eines wissenschaftlichen Problems geht. Beide sollten jedoch gleiche Beobachtungstechniken anwenden und grundlegende Kenntnisse über die Beobachtung haben. (Heinemann, 1998, S. 125).

Mit der systematischen Spielbeobachtung wird also nicht nur Trainern von Wettkampfteams, sondern ebenso Sportlehrern ein Beobachtungsinstrumentarium zur Verfügung gestellt, das auch tatsächlich praktiziert werden kann und eine gute Möglichkeit der Beurteilung Einzelner darstellt.

Außerdem rät Czwalina (1976, S. 12) „zum Einsatz von Schülern als Spielerbeobachter. In Neigungs- und Leistungsgruppen der Schulen, an Schulen mit dem Leistungsfach Sport, bei der Betreuung von Klassen- und Schulmannschaften können nach vorbereitendem Training Schüler als Spielerbeobachter fungieren.“ Damit können sportbezogenen Lern- und Lehrziele der kognitiven Ebene umgesetzt werden. Gleichzeitig führt die Beobachtung zu einem verbesserten Verständnis des Basketballsports in Bezug auf Technik und Regelkenntnis.

Im Gegensatz zum aus den USA stammenden Scouting, einem sehr subjektiven Verfahren, das in erster Linie dem Auskundschaften von Gegnern und der Beobachtung von Spielerleistungen während des Spiels zum direkten Eingriff dient, verlangt die systematische Spielbeobachtung eine Menge Voraussetzungen, die die Objektivität der Untersuchung gewährleisten soll . (Wagner und Willimczik, in Singer und Willimczik, 2002, S. 193).

6.3 Grundlagen empirischer Forschung im Sport

Heinemann (1998, S. 13) beschreibt Forschung als einen Prozess, der in festgelegten Schritten erfolgt, und spricht dabei von Forschungsdesign. Alemann (1984, S. 58) fasst die Phasen des Forschungsprozesses in Definitions-, Erhebungs-, Analyse- und Disseminationsphase zusammen, die jedoch nicht nahtlos zu einem Ganzen zusammengefügt werden können. Er spricht vom „systematischen Zusammenhang“. Die Autoren geben unterschiedliche Formulierungen für die verschiedenen Phasen des Forschungsprozesses an, die sich in ihrem Grundgerüst jedoch nur unwesentlich unterscheiden.

Bös et al. (2000, S. 33) unterscheiden folgende Phasen, an denen sich die Spielbeobachtung orientieren soll (vgl. Zeitplan Anhang 9):

1. Entscheidungs- und Planungsphase
2. Problemanalyse
3. Konzeption der Untersuchung und hermeneutischen Arbeitsweise
4. Empirische Untersuchung und hermeneutische Bearbeitung
5. Datenanalyse
6. Ausarbeitung

In jeder Phase des Forschungsprozesses müssen drei zentrale Forschungsfragen beantwortet werden, um das Forschungsziel nicht aus den Augen zu verlieren: *warum* soll *was wie* untersucht werden?

6.3.1 Forschungsfrage

Zu Beginn jedes Forschungsprozesses steht die Frage nach dem Problem, das untersucht werden soll. Was ein Problem ist, kann in dieser ersten Phase noch ganz unbestimmt sein da es sich um ein triviales Problem aus dem Alltag handeln kann.

„Der erste Schritt einer wissenschaftlichen Arbeit, die Themenfindung, ist selbst oft noch nicht wissenschaftlich fundiert, sondern geht eventuell noch von persönlichen Interessen aus", beschreibt Eder (2006, S. 25).

Nach ersten theoretischen Überlegungen und dem Studium relevanter Literatur erfolgt die präzise Formulierung eines Forschungsproblems und in Folge dessen einer Forschungsfrage, deren Gültigkeit im gesamten Forschungsprozess kontrolliert werden muss, um ein Abschweifen zu verhindern.

Heinemann (1998, S. 26) unterscheidet mehrere Problemtypen. Wir wollen uns den Problemtypen Deskription und Evaluation zuwenden, die zumeist zusammen auftreten da ihre Übergänge fließend verlaufen. Bei der Deskription geht es darum zu ermitteln, ob die zu untersuchenden Objekte gewisse Eigenschaften aufweisen oder nicht. Man spricht bei diesen Eigenschaften von Variablen, die als Symbole für Merkmale oder Eigenschaften von Objekten definiert werden. Merkmale und Eigenschaften gelten als Synonyme für Variabeln und werden auch des Öfteren verwendet.

Die Evaluation oder Wirkungskontrolle wird zur Überprüfung der Erreichung eines bestimmten Zieles eingesetzt. Dabei handelt es sich zumeist – ebenso wie in unserem Beispiel – um Feld- Experimente, bei denen unter kontrollierten Bedingungen Veränderungen herbeigeführt und untersucht werden. Eine wichtige Aufgabe der Evaluation ist die Bildung von Hypothesen, die im Laufe des Forschungsprozesses überprüft und in Folge dessen verifiziert oder falsifiziert werden.

> „Mit der Forschungsfrage ist zwar entschieden, welche Antworten mit einer empirischen Untersuchung gefunden werden sollen, nicht jedoch, welche Daten dazu erhoben werden müssen. Was relevant ist – also welche Objekte und welche Variablen bzw. Variablenausprägungen erfasst werden sollen und wie eine Erklärung gefunden werden kann, ist letztlich nur im Rahmen theoretischer Überlegungen zu bestimmen.", so Heinemann (1998, S. 40).

Im Anschluss an die Formulierung der Forschungsfrage bietet sich die Erstellung einer Disposition an, in der das Thema vorgestellt und das Untersuchungsproblem formuliert wird. Ergebnisse und Erkenntnisse aus der Literaturrecherche sollen festgehalten und ein Konzept der geplanten Untersuchung in Bezug auf das Forschungsdesign, Erhebungsmethoden und Stichproben, vorgestellt werden. Außerdem sollte die etwa 3-5-seitige Disposition bereits die präzise formulierten Arbeitshypothesen sowie Probleme und offene Fragen beinhalten. Zur Erleichterung sowie für einen besseren Überblick wird die Erstellung eines Zeitplanes empfohlen (Bös et al., 2000, S. 35, siehe Anhang 9).

6.3.2 Objekte und Variablen

Die Objektwahl sollte bereits ansatzweise durch die Formulierung der Forschungsfrage bzw. der Hypothesen gegeben sein. Es macht keinen Sinn, irgendwelche Menschen von der Straße zu untersuchen, sondern wir wenden uns Personen zu, die bereits Erfahrungen im Basketballspiel haben. Für die Untersuchung in der Schule bietet sich das Basketball-Schulteam an, Bös et al. (2000, S. 41) spricht dabei von einer anfallenden Stichprobe. „Die Befunde aus diesen Stichprobenergebnissen lassen sich nicht auf andere Stichproben generalisieren."

Im Allgemeinen können Objekte eine Vielfalt an Variablen aufweisen. Es gilt nun aufgrund theoretischer Überlegungen, die für das Forschungsprojekt relevanten Variablen auszusuchen und ihre Relevanz zu begründen.

„Unter Variablen versteht man Merkmale, die an Untersuchungseinheiten (Objekten, Versuchspersonen) beobachtet, erfragt oder gemessen wurden.", so Bös et al. (2000, S. 24).

Einen wesentlichen Punkt in der empirischen Forschung spielen demnach Erklärungen, die Heinemann (1998, S. 44) wie folgt beschreibt: „Etwas wissenschaftlich erklären heißt, die Ursachen für einen bekannten Tatbestand aufzudecken. Bei einer Erklärung wird also ein Ursachen-Wirkungs-Zusammenhang zwischen mindestens zwei Variablen hergestellt." Dabei wird der Tatbestand, der erklärt werden muss, als abhängige Variable, die Ereignisse, die den Tatbestand beeinflussen, als unabhängige Variabeln bezeichnet.

Bös et al. (2000, S. 25) beschreiben die abhängige Variable als die Zielgröße, die untersucht werden soll, die unabhängige Variable als das Merkmal, dessen Einfluss auf die Zielgröße (abhängige Variable) festgestellt werden soll. Die Bestimmung von abhängigen und unabhängigen Variablen ist nicht immer einfach. Es und unterliegt im Prinzip der Entscheidung des Forschers, welchen Aspekt er in der Untersuchung primär erforschen will (Alemann, 1984, S. 65).

Im Zusammenspiel von abhängiger und unabhängiger Variable müssen immer mögliche Störvariablen berücksichtigt werden, die bereits vor und während der Untersuchung weitgehend ausgeschlossen werden sollen. Man spricht dann von optimalen Versuchsbedingungen (Bös, 2000, S. 14).

> „Neben diesen Störvariablen, deren Kontrolle über die Kontrollgruppenanordnung angestrebt wird, sind personengebundene Störvariablen zu berücksichtigen. Wenn sich nämlich die Vpn verschiedener experimenteller Gruppen bereits vor dem Experiment hinsichtlich der Ausprägung von Merkmalen unterschieden, die ebenfalls (also neben der UV) einen Einfluss auf die AV haben, kann ein Unterschied zwischen Pre- und Post-Test darauf und nicht auf die UV zurückzuführen sein.“, Singer und Willimczik (2002, S. 40).

Für die Richtigkeit des Ursache-Wirkungs-Zusammenhanges von abhängiger und unabhängiger Variable gibt es keinen Beweis. Die Vermutung eines Zusammenhanges nennt man Hypothese, deren Formulierung in erster Linie über sogenannte „Wenn-Dann“ und „Je-Desto“ Aussagen erfolgt (Bös, 2000, S. 14).

Mit der empirischen Untersuchung wird die Gültigkeit von Hypothesen überprüft.

6.3.3 Hypothesenbildung

Bei der Bildung von Hypothesen geht es um die Frage, ob die Wirklichkeit die formulierte Vermutung bestätigt.

„Durch die Formulierung von Thesen werden die vorher kaum reflektierten (teilweise nicht oder kaum bewussten) Annahmen nicht nur offen gelegt, sondern auch überprüfbar gemacht.“, so Eder et al. (2006, S. 29).

Für uns hat die durchgeführte empirische Untersuchung den Zweck, Erfolg oder Misserfolg einer Maßnahme – in diesem Fall einer anderen Trainingsmethode - zu überprüfen. Wir wollen also untersuchen, ob sich die erhofften Wirkungen einstellen oder nicht.

Hypothesen gelten als allgemein gültig, es besteht aber immer die Möglichkeit, dass sie in anderen Untersuchungen widerlegt werden. Damit kann eine Hypothese nie als endgültig verifiziert gelten. Die Wissenschaft stellt die Forderung nach einer Vielzahl von Tests und Untersuchungen, denen jedoch nicht immer nachgegangen werden kann. (Bös et al., 2000).

Für die Anwendung in der Schule ist das in diesem Sinne nicht relevant, als das die empirische Forschung dem Verständnis von Problemlösungstechniken in der Statistik, insbesondere im Sport dient, und nicht das Ziel der wissenschaftlichen Veröffentlichung verfolgt.

Die Schwierigkeit in der Formulierung der Hypothesen liegt darin, dass die angestellte Vermutung mit größtmöglicher Wahrscheinlichkeit richtig sein sollte, trotzdem aber die Möglichkeiten der Veri- und Falsifikation gegeben sind. Die zugehörigen Tests sind demnach so zu wählen, dass in Situationen, in denen sich die Annahme bewähren sollte, sich tatsächlich bewähren und dort wo sie nicht auftreten sollten, sich auch wirklich nicht bestätigen. Erfüllt eine Hypothese all diese Voraussetzungen so kann sie als „gut" betrachtet werden.

Voraussetzungen der Hypothesenbildung laut Heinemann (1998, S. 48):

1. Empirische Überprüfbarkeit: ausgewählte Variablen müssen empirisch überprüfbar sein.
2. Informationsgehalt: bei Formulierung ist darauf zu achten, dass für möglichst viele Fälle präzise Folgen festgelegt werden sollen.
3. Allgemeinheitsgrad: ohne zeitliche und räumliche Begrenzungen.
4. Komplexität: Forderung nach hoher Komplexität bedeutet, viele relevant erscheinende Variabeln in die Hypothese aufzunehmen.

„Mit der Formulierung der Hypothesen stellt man die Weichen für alle weiteren Schritte der empirischen Untersuchung, wenn Tatbestände erklärt werden sollen. Werden Hypothesen nicht sorgfältig formuliert (…) wird die Untersuchung auf ein falsches Gleis gesetzt und führt zu wenig brauchbaren Ergebnissen.", so Heinemann (1998, S. 53).

Man unterscheidet zwischen Null- und Alternativ- oder Arbeitshypothesen. Die zu Beginn formulierte Arbeitshypothese H_1 stellt eine Alternative oder Erweiterung des bisherigen Wissensstandes dar, sie behauptet, dass ein Unterschied oder Zusammenhang besteht. Ihr Gegenstück – die Nullhypothese H_0 – beinhaltet die Annahme, dass die Arbeitshypothese null und nichtig sei, dass also kein Unterschied oder Zusammenhang vorliegt (Bös et al., 2000, S. 27).

Ob die Nullhypothese beibehalten bzw. die Alternativhypothese angenommen wird, wird auf Grundlage von Wahrscheinlichkeitsaussagen entschieden. Wenn die Nullhypothese nicht mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit widerlegt werden kann muss sie beibehalten werden, anderenfalls gilt die Alternativhypothese.

Die Grenzen des Übergangs von Null- zu Alternativhypothese werden Signifikanzgrenzen genannt. Man unterscheidet Wahrscheinlichkeitsniveaus von 95, 99 und 99,9% (α =0,05, 0,01 und 0,001, siehe auch Kapitel 5.2.2.2). Sichert man die Nullhypothese auf einem 95%-igen Niveau ab so gilt das Ergebnis als signifikant, bei einem 99%-igen Wahrscheinlichkeitsniveau spricht man von hoher Signifikanz. (Willimczik, 1999, S. 102).

„Die Grundannahme der schließenden Statistik besagt, dass die statistische Absicherung von Ergebnissen immer nur mit einem hohen Grad an Wahrscheinlichkeit, nie aber mit absoluter Sicherheit erfolgen kann. Entsprechend gehört zur Angabe von Wahrscheinlichkeiten für ein Ereignis die Angabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit α.“, erklärt Willimczik (1999, S. 103).

6.3.4 Experiment und Pretest

Heinemann (1998, S. 165) nennt das Experiment die wichtigste Möglichkeit, Hypothesen oder die Wirkung von Stimuli, in unserem Fall von Trainingsinterventionen zu überprüfen. Auch die Spielerbeobachtung wie sie in der Schule durchgeführt werden soll, ist im Prinzip ein Experiment. Man spricht im Falle eines Gruppenvergleiches wie wir ihn durchführen wollen von einer ex-post-facto-Untersuchung.

Es wird eine Kontroll- und eine Versuchsgruppe gebildet, die nach der ersten Untersuchung, dem ersten Vergleich, einem bestimmten Stimulus ausgesetzt wird. Anschließend findet ein erneuter Vergleich, wie in Abbildung 39 gezeigt, statt.

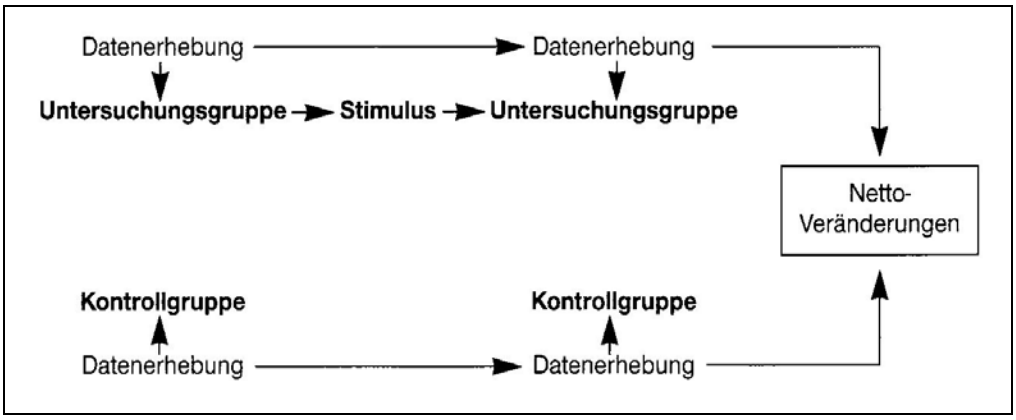


Abbildung 39: Modell experimenteller Datengewinnung (Heinemann, 1998, S. 167)

„Ziel des Experiments ist es herauszufinden, ob und inwieweit sich eine (oder mehrere) unabhängige Variablen (UV), die vom Versuchsleiter planmäßig manipuliert bzw. variiert werden, auf eine (oder mehrerer) abhängige Variablen (AV) auswirken.“, beschreiben Singer, R. und Willimczik, K. (2002, S. 36).

Der Pretest gilt als eine Art Probeuntersuchung, bei der getestet wird, ob das entwickelte Messinstrument den Anforderungen der Untersuchung gerecht wird. Es geht darum, das Messinstrument hinsichtlich seiner Gültigkeit, Verlässlichkeit und Objektivität hin zu prüfen. Im Vordergrund steht demnach nicht die Erhebung von Daten sondern das Aufdecken von Fehlerquellen. (Vgl. Alemann, 1984 und Heinemann, 1998).

6.3.5 Definitionen

Die präzise Formulierung unscharfer Begriffe gilt in der empirischen Forschung als absolut unerlässlich. Eder et al. (2006, S. 28) erklären warum:

> „Alltagssprachliche Ausdrücke sind für eine wissenschaftliche Verwendung oft unbrauchbar, weil es für sie keine exakte und einheitliche Definition gibt. Für den wissenschaftlichen Gebrauch müssen die zentralen Begriffe genau abgegrenzt werden und erfahren dabei oft Bedeutungsverengungen bzw. spezielle Gewichtungen und Variationen, die exakt zu definieren und zu beschreiben sind.“ Eder et al. (2006, S. 28).

Begriffe müssen so definiert werden, dass man sie messen kann. Definitionen sind demnach Operationalisierungen. Als Beispiel könnte Aktivität als die „Bewegung von Spielern“ definiert, und damit beobachtbar und messbar gemacht werden.

Heinemann (1998, S. 58) führt eine Definition von Definition an: „Definitionen sind synonyme Umformungen sprachlicher Ausdrücke. Der zu definierende Begriff wird durch andere Begriffe, über deren Inhalt Konsens besteht, ersetzt.“

Ähnlich geht man bei der Formulierung mathematischer Definitionen vor, die aus bereits bestehenden Definitionen und Axiomen gebildet werden.

Definitionen haben den Gütekriterien der präzisen Formulierung und der Konsistenz, das heißt, dass sie von jedem immer und überall verstanden werden, zu unterliegen. Des Weiteren dürfen sie nicht zirkulär sein, es dürfen also keine Begriffe verwendet werden, die in dem zu definierenden Begriff enthalten sind.

Was muss definiert werden?

Objekte, deren Grundgesamtheit sowie die Untersuchungsobjekte, Variablen, die in der Fragestellung und den Hypothesen genannt werden und deren Ausprägungen, die man mit Hilfe der empirischen Forschung ermitteln will.

6.3.6 Operationalisierung und Skalierung

In der Sozialwissenschaft bedeutet Messen, dass bestimmten Objekten, Variablen oder deren Ausprägungen Zahlenwerte zugeordnet werden können (Willimczik, 1999, S. 13).

Können verschiedene Tatbestände nicht unmittelbar beobachtet werden, so braucht man Indikatoren, also beobachtbare Tatbestände, mit Hilfe deren auf das Vorhandensein bzw. die Ausprägung der Variable geschlossen werden kann.

„Diese sind beweiskräftige Kennzeichen, die auf einen konkreten Sachverhalt hinweisen (…), bzw. beweiskräftige Merkmale (…), die als Mittel zur Beweisführung bei der Thesenüberprüfung herangezogen werden.“, so Eder et al. (2006, S. 31).

Sie weisen auf Variablen bzw. Variablenausprägungen hin und stellen damit die Verbindung zwischen Realität und Theorie her. Die Übertragung von Variablen in Indikatoren wie in Abbildung 40 dargestellt nennt man Operationalisierung.

Dabei stellen sich die Fragen, ob die Indikatoren tatsächlich das anzeigen, was wir uns erhoffen und ob man zur Ermittlung einer Variablen nicht oft mehrere Indikatoren braucht.

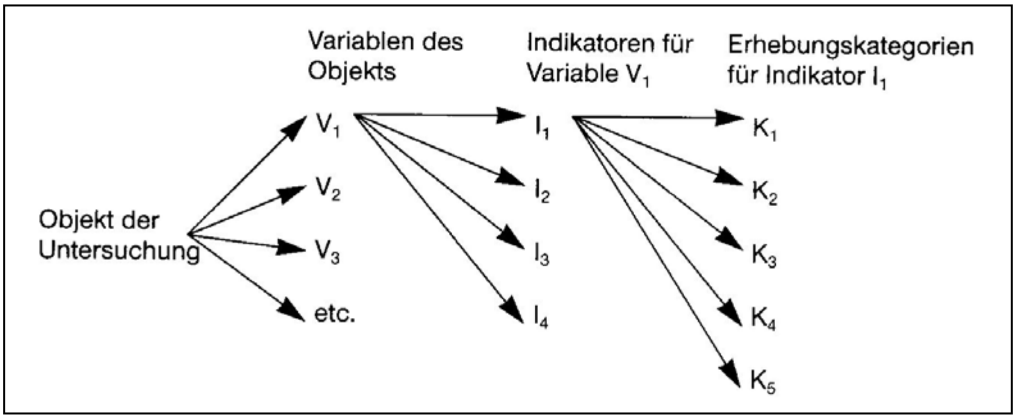


Abbildung 40: Der Prozess der Operationalisierung (Heinemann, 1998, S. 90).

Zur statistischen Weiterverarbeitung müssen die Indikatoren skaliert werden. Die Anforderungen der verschiedenen Skalen müssen bereits in den Beobachtungskategorien, bzw. bei der Gestaltung des Beobachtungsbogens berücksichtigt werden.

Die Bestimmung der Messniveaus und in Folge der Skalierung ist für die weitere Forschungsarbeit unerlässlich, da die anzuwendenden Verfahren sich daran orientieren. Die Unterscheidung ist abhängig davon, ob es einen Nullpunkt gibt, eine Rangordnung besteht und ob Intervalle vorliegen.

Tabelle 39: Skalenarten (Rockmann und Bömermann, 2006, S. 45)

Skala	*Analysemöglichkeit*	*Beispiele*
Nominalskala	Unterschiede feststellen	Geschlecht, Wettkampfsportart
Ordinalskala	Reihenfolge aufstellen	Reihenfolge beim Zieldurchgang
Intervallskala	Differenzen vergleichen	Temperatur
Verhältnisskala	Proportionen vergleichen	Länge, Zeit, Kraft, Masse

Nominalskalierte Daten geben nur Auskunft darüber, ob bestimmte Sachverhalte vorliegen, oder nicht. Sie lassen sich nicht miteinander verrechnen. Man kann sie lediglich nach den Aspekten *identisch* oder *verschieden* unterscheiden, ihre Häufigkeiten abzählen und graphisch darstellen oder zur Kodifizierung (Hochstädter, 1996, S. 18) verwenden.

Ordinalskalierte Daten liegen vor, wenn sie ebenso wie nominalskalierte Daten einer Identität unterliegen und gleichzeitig in eine Rangordnung gebracht werden können. Sie lassen Ordnungsrelationen wie größer/kleiner, oft/nie, vor/nach, usw. zu. Im Sport können Wettkampfplatzierungen und –tabellen als ordinalskaliert genannt werden.

Während die Abstände ordinalskalierter Variablenausprägungen nicht konstant sind, liegen bei der Intervallskala gleich große Abstände vor, wie zum Beispiel beim Messen von Weiten und Zeiten im Sport, Temperaturen oder Intelligenzquotienten.

Die Ratio- oder Verhältnisskala weist als Einzige einen Nullpunkt auf und gilt als Skala mit dem größten Informationsgehalt.

6.3.7 Die Beobachtung

„Beobachtung ist die allgemeine Bezeichnung für die aufmerksame und planvolle Wahrnehmung und Registrierung von Vorgängen, Ereignissen oder Mitmenschen in Abhängigkeit von bestimmten Situationen“, so Bös et al. (2000, S. 39).

Wissenschaftliche Beobachtung bezeichnet Heinemann (1998, S. 125) als

> „eine geplante Erfassung und kontrollierte Aufzeichnung von Daten für einen festgelegten Forschungszweck (…). Mit „Beobachtung" sind also nicht die Formen der Wahrnehmung gemeint, sondern die Techniken der systematischen, kontrollierten und strukturierten Erfassung der für die Forschungsfrage und die hinter ihr stehenden theoretischen Vorstellungen relevanten Aspekte eines Geschehens."

In der Literatur wird unter zahlreichen, die Art der Beobachtung beschreibenden, Aspekten unterschieden, wie zum Beispiel:

- *systematisch* – unsystematisch; Besteht ein Plan, worauf die Beobachtung zielen soll? Gibt es ein Beobachtungsprotokoll?
- *offen* – verdeckt; Wissen die Objekte, dass sie beobachtet werden?
- teilnehmend – *nicht teilnehmend*; Nimmt man als Beobachter selbst am Geschehen teil oder wird „von außen" (Spielfeldrand, Tribüne, Videoaufzeichnung) beobachtet?
- Selbstbeobachtung – *Fremdbeobachtung*; Versucht man, sich selbst zu beobachten oder andere Personen?
- *Feldbeobachtung* – Laborbeobachtung; Natürliche oder künstlich hergestellte Bedingungen?
- *direkt* – indirekt; Bezieht man die Daten aus der unmittelbaren Beobachtung einer Situation oder Person, oder aus Aufzeichnungen, Erzählungen, usw.?

Die für uns gültigen Aspekte seinen die kursiv geschriebenen.

Der Vorteil der *systematischen Beobachtung* liegt darin, dass das, was beobachtet werden soll nicht der Willkür des Beobachters unterliegt, sondern in einem Beobachtungsbogen vorgegeben wird. In der Literatur empirischer Forschungsprozesse wird oft die Bezeichnung *standardisierte Beobachtung* verwendet.

Die Gütekriterien der Beobachtung:

Die Entwicklung von Gütekriterien dient der Genauigkeit, Zuverlässigkeit und Gültigkeit von Messungen.

In der Fachliteratur werden die Gütekriterien einer Messung meist sehr ausführlich behandelt. Wir wollen uns hier auf eine Zusammenfassung beschränken:

„Die Objektivität der Spielerbeobachtung ist dann total erfüllt, wenn mehrere Spielerbeobachter bei der Beobachtung ein und desselben Spielers zu den gleichen Beobachtungsergebnissen gelangen (interpersonelle Übereinstimmung der Beobachter).“, beschreibt Czwalina (1976, S. 18). Aus diesem Grund empfiehlt sich für die Spielerbeobachtung in der Schule die Beobachtung in Teams sowie eine Überprüfung der Aufzeichnungen durch eine Videoanalyse wie im nächsten Kapitel beschrieben.

Mit der Reliabilität einer Messung ist der Grad der Genauigkeit gemeint, mit dem ein bestimmtes Spielerverhalten, in Abhängigkeit vom Messinstrument erkannt wird. In der Spielerbeobachtung bedeutet dies, dass vollkommene Reliabilität dann gegeben ist, wenn die festgehaltenen Ergebnisse genau dem Verhalten des beobachteten Spielers entsprechen.

Remmert (2002, S. 73) fasst zusammen: „Die Reliabilitätsprüfung ermittelt also, inwieweit Testergebnisse reproduzierbar sind.“

Die Validität einer empirischen Untersuchung bezeichnet den Genauigkeitsgrad, mit dem die Beobachtung eines Spielers das Verhalten misst, das auch tatsächlich beobachtet werden soll.

Neben den drei genannten Hauptgütekriterien sollten in einer rein wissenschaftlichen Untersuchung auch die Nebengütekriterien sorgsam überprüft werden, hier sollen sie lediglich erwähnt werden: Ökonomie/ Praktikabilität, Nützlichkeit, Vergleichbarkeit und Normierung.

6.3.8 Der Beobachter

„Die Beobachterrolle ist nicht identisch mit der Rolle eines beliebigen Zuschauers eines Spiels. Zeichnet sich diese durch eine sehr emotionelle, wenn auch passive Anteilnahme aus, so die andere durch eine kühle, möglichst emotionsfreie Distanz zum Spielgeschehen.“, so Czwalina (1976, S. 21).

Aufgabe des Spielerbeobachters ist es, relevante Daten zu erheben, die der nachfolgenden Auswertung dienen. Er muss sich der Wichtigkeit seiner Aufgabe bewusst sein um sich nicht von Störvariablen beeinflussen zu lassen und deshalb grundlegende Kenntnisse zur Technik der Beobachtung haben.

Um das Beobachterverhalten zu schulen, bietet sich ein Perspektivenwechsel in dem Sinne an, dass man die Schüler in verschiedene Rollen schlüpfen lässt. Sie sollen vor Beginn der eigentlichen Untersuchung (Kapitel 6.4) und noch vor der ersten Probeuntersuchung (vgl. nächstes Kapitel) den bewussten Wechsel von Zuschauer, Spieler, Schiedsrichter und Spielerbeobachter erleben, im Zuge des Basketball-Trainings alle Rollen durchlaufen, ihre Erlebnisse anschließend festhalten und im Unterricht diskutieren.

Die Beobachtung aller Beobachtungskategorien ist für einen Anfänger beinahe unmöglich. Sie stellt eine Überforderung dar, sodass er Gefahr läuft, wesentliche Dinge zu übersehen. Aus diesem Grund sollen Beobachtungsteams gebildet werden, die sich den verschiedenen Spielern aus Versuchs- und Kontrollgruppe zuwenden. Normalerweise gilt es, auch den Zeitfaktor zu berücksichtigen, da die Konzentration des Beobachters mit der Zeit nachlässt. Dies gilt vor allem für Fußball. Da im Basketball-Schulcup die Spielzeit zwei mal zehn Minuten beträgt, mit einer Spielpause von fünf Minuten, sollte es den beobachtenden Schülern möglich sein, ein ganzes Spiel zu beobachten.

Innerhalb eines Teams bestehen zwei Möglichkeiten zur Protokollierung der beobachteten Daten:

a) Es gibt einen Schriftführer, der oder die anderen sind sogenannte Assistenten, die gemeinsam festlegen, was protokolliert werden muss. Ihre Hilfe findet nur auf verbaler Ebene statt.

b) Jeder Beobachter eines Teams erhält einen Beobachtungsbogen, am Ende werden die gezählten Häufigkeiten innerhalb des Teams verglichen. Gewertet wird schließlich nur der Durchschnitt aller Häufigkeiten einer Beobachtungskategorie, also diejenigen Situationen, die von *allen* Beobachtern des Beobachtungsteams aufgezeichnet wurden. Es sei denn, der Schüler, der eine weitere Situation beobachtete, hat einen Beweis bzw. eine einleuchtende Erklärung für seine Aufzeichnung.

Zur Vergleichbarkeit der Ergebnisse empfiehlt sich eine Spielaufzeichnung per Video. Die beobachteten Daten können im Anschluss an die Beobachtung mit der Videoaufzeichnung verglichen, diskutiert und gegebenenfalls korrigiert werden. Damit kann die Beobachtungsfähigkeit der Schüler auf Objektivität und Reliabilität getestet werden. (Czwalina, 1976)

Dies sollte wirklich im Anschluss an die Beobachtung erfolgen da bei einer längeren Zeitspanne Erinnerungen verloren gehen können (selektives Vergessen). So besteht noch ein direkter Bezug zum Spielgeschehen. (Heinemann, 1998, S. 200).

Um das ganze Spielfeld zu überblicken, muss der Standort des Beobachters gut gewählt sein. Befindet er sich direkt am Spielfeldrand oder etwa in Korbnähe läuft er Gefahr, dass wichtige Spielzüge von anderen Spielern, Schiedsrichter oder Trainern verdeckt werden und sich der Beobachtung entziehen. Der beste Standort wäre entlang der Mittellinie in erhöhter Position, wie etwa auf einer Tribüne. Da nicht jede Schule mit einer Tribüne ausgestattet ist gilt es, den Beobachtungsstandort für die Beobachtung möglichst günstig auszuwählen.

Heinemann (1998, S. 199) empfiehlt die Einhaltung folgender Schritte in der Beobachterschulung:

- Auseinandersetzung mit dem Forschungsziel und dem Forschungsinstrument Beobachtung.
- Diskussion aller möglichen Beobachtungsfehler.
- Durchgehen von Beobachtungsprotokoll und Beispielen zu den einzelnen Beobachtungskategorien.
- Probebeobachtungen mit anschließender Diskussion der Ergebnisse und Erfahrungen.
- Einholen allgemeiner Informationen die der korrekten Durchführung dienen (Vertrautheit mit den Untersuchungsobjekten, Kenntnis der Basketballregeln und Schiedsrichterzeichen (siehe Anhang 5 und 6) sowie schnellstmögliche schriftliche Erfassung des Beobachteten.
- Vermeiden von Wertungen und Verallgemeinerungen während der Beobachtung.
- Datum, Uhrzeit, Dauer und Ort der Beobachtung müssen in jedem Beobachtungsprotokoll angegeben werden, ebenso die anwesenden Personen, Umweltbedingungen und räumlichen Gegebenheiten.

In den Probebeobachtungen soll mit Schulung der einfachsten Beobachtungskategorien begonnen werden, wie Korbwürfe und –erfolge. Gelingt es den Schülern solche Aktionen eindeutig als solche zu identifizieren und schriftlich festzuhalten, so können weitere Beobachtungskategorien wie jene, die durch Schiedsrichterentscheidungen bestätigt werden, hinzugenommen werden. Auf diesem Weg können sich die Schüler Schritt für Schritt in das wissenschaftliche Beobachten einarbeiten. Die Schiedsrichterzeichen aus Anhang 6 müssen zu diesem Zeitpunkt voll beherrscht werden. Der Beobachtungsbogen inklusive Anleitung findet sich in Anhang 7.

Im Anschluss an die Beobachtung müssen die Daten auf Objektivität und Reliabilität (vgl. Kapitel 6.4.7) hin getestet werden. Dann können sie statistisch aufbereitet werden. Einzelne Schüler können – in Abhängigkeit von Spielerposition und Dauer ihres Spieleinsatzes – hinsichtlich verschiedener Beobachtungskategorien gegenüber gestellt, Histogramme erstellt und Parameter berechnet werden.

Des Weiteren kann besprochen werden, ob man einzelne Beobachtungskategorien zusammenfassen und daraus eine neue bilden könnte.

Beispiel:

Fasst man die Beobachtungskategorien 14 (Offensivefouls) und 26 (Defensivefouls) des Beobachtungsbogens aus Anhang 7 zusammen, so erhält man die Gesamtzahl aller begangenen Fouls eines Spielers.

Erst wenn sich die Schüler mit diesem Beobachtungsbogen soweit auseinandergesetzt haben, dass sie alle die Bedeutung ihrer Aufmerksamkeit in der Beobachtung verstanden haben und die beobachteten Ergebnisse als gültig gelten, kann mit den Vorbereitungen für die große Untersuchung begonnen werden.

6.4 Spielerbeobachtungen in Basketball-Schulteams

6.4.1 Taktik im Basketballspiel

Genauso wie in anderen Ballsportarten gibt es im Basketball Spielerpositionen, die in Abbildung 41 skizziert sind. Diese Aufstellung beschreibt die Grundpositionen der Spieler, die sich überschneiden und im Laufe des Angriffs natürlich verändern.

In der üblichen Mann-Mann-Verteidigung wird jedem Spieler eines Teams ein Verteidiger zugeordnet, der die Aufgabe hat, seinen Gegner am Spielerfolg zu hindern.

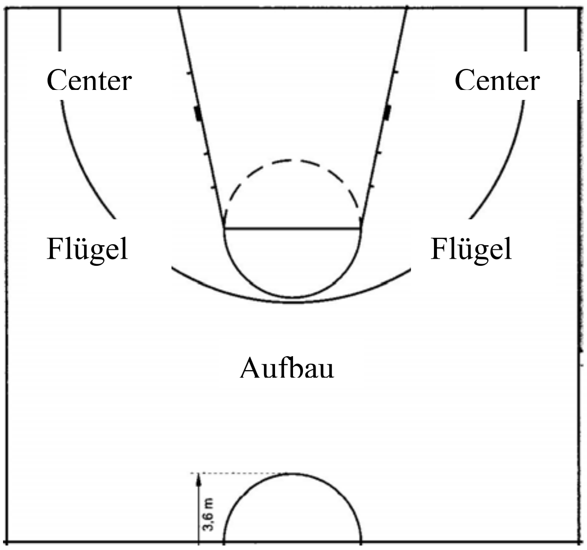


Abbildung 41: Spielerpositionen

Das Basketballspiel verlangt neben technischen Fertigkeiten ein hohes Maß an taktischen Fähigkeiten. Zech (1971, S. 494, zitiert nach Weineck, 2002, S. 605) definiert Taktik als „das planmäßige, auf die eigene und gegnerische Leistungsfähigkeit und die äußeren Umstände abgestellte Verhalten in einem Einzel- oder Mannschaftswettkampf."

Das Zusammenspiel technischer und taktischer Fähigkeiten sei in Abbildung 42 dargestellt. Weineck (2002, S. 609) führt aus: „Die taktische Ausbildung bildet einen integrierenden Bestandteil des Trainingsprozesses und steht in enger Beziehung zu den technischen und psychophysischen Fähigkeiten."

Taktik funktioniert nur, wenn all diese Komponenten zusammenspielen, denn ein Spieler wird seine taktischen Überlegungen nie in die Praxis umsetzen können, wenn ihm grundlegende technische Fertigkeiten fehlen.

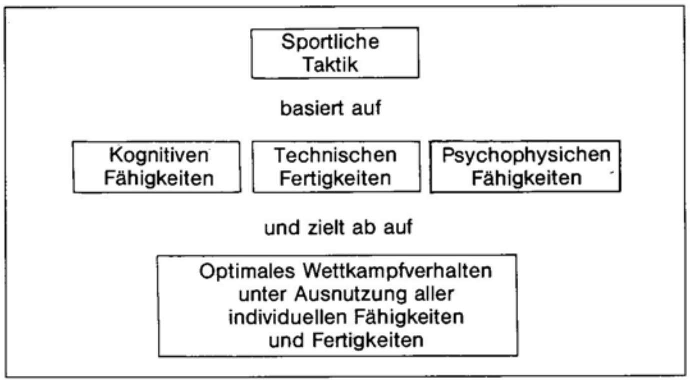


Abbildung 42: Komponenten taktischer Handlungsfähigkeit (Weineck, 2002, S. 605)

Remmert (2002) beschreibt Taktik im Sportspiel als situatives Entscheidungshandeln im Sinne eines klugen und planmäßigen Vorgehens im Spiel sowie eines geschickten Ausnützen von Situationen und unterscheidet zwischen Mannschafts-, Gruppen- und Individualtaktik. Wir wollen uns jenen gruppentaktischen Angriffsmaßnahmen zuwenden, die das Zusammenspiel von zwei Spielern beschreiben.

Dabei spielt der sogenannte *Assist* eine wesentliche Rolle. „Unter einem *assist* wird im Basketballspiel i.d.R. ein überraschender Pass verstanden, der zu einem ungefährdeten Korberfolg ohne Gegnerbehinderung aus kurzer Distanz (meist als Korbleger) führt.“, so Remmert (2002, S. 28).

6.4.2 Erklärung der Spielzüge

In unserem Forschungsprojekt sollen die möglichen Interaktionen zweier Spieler eines Teams im direkten Angriff untersucht und analysiert werden.

Zu Beginn sei erwähnt, dass sich ein Angriff aus einem oder mehreren Angriffsversuchen zusammensetzt, das heißt, dass in einem Angriff manche Spielzüge vielleicht mehrmals beobachtet werden können.

Remmert (2002) beschreibt eine Vielzahl an Angriffsmöglichkeiten im Spiel 2-2, dabei kann es natürlich passieren, dass sich diese in der Mann-Mann-Verteidigung übliche Konstellation ändert und sich plötzlich die Situation 2-3 oder sogar 2-4 vorfindet, da ein oder zwei Gegenspieler aushelfen möchten, zwei Angreifer einen Überraschungsangriff starten und sich zwar schon alle Verteidiger, nicht jedoch alle Mitspieler in der Angriffshälfte befinden, o.ä.

Die Beobachtung aller möglichen 2-2 Spielzüge gehen über die Fähigkeiten von Lehrern und Schüler hinaus. Außerdem wäre deren Training viel zu aufwändig und zeitintensiv, sodass wir uns auf die Angriffsalternativen *Give & Go* und *Block* beschränken. Diese grundlegenden und nicht zu schwierigen Spielzüge sollten von den Spielern der Versuchsgruppe innerhalb eines Monats im Wesentlichen beherrscht und von den Beobachtern erkannt und zugeordnet werden können.

Give & Go beschreibt das einfachste Zusammenspiel zweier Mitspieler und kann als das Passen und Schneiden eines Angreifers zum Korb erklärt werden (Remmert, 2002, S. 29).

Medler, Miehlker und Schuster (1995, S. 63) benutzen die deutschsprachige Form „Pass und Lauf“ und erklären diese folgendermaßen: „Der Pass zum Mitspieler teilt die Aufmerksamkeit des Verteidigers und gibt dem Angreifer die Chance, sich zur erneuten Ballannahme zum Korb hin freizulaufen.“ Der Mitspieler gilt durch seine Hilfestellung als Assist.

Man unterscheidet zwischen frontcut und backdoor cut, je nachdem ob der Angreifer, der den zweiten Pass erhält, vor oder hinter seinem Verteidiger wie in Abbildung 41 gezeigt, zum Korb freiläuft. Diese Differenzierung soll im Beobachtungsprotokoll jedoch nicht berücksichtigt werden.

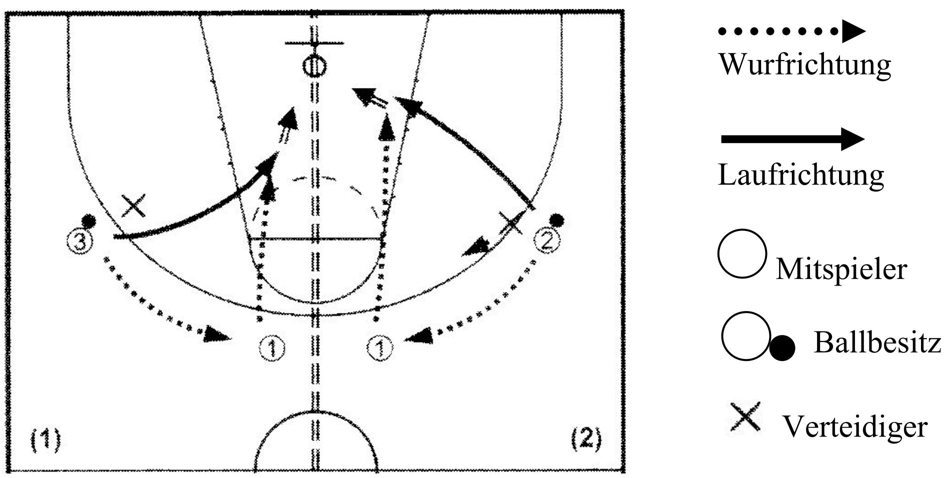


Abbildung 43: Give & Go mit frontcut (1) und backdoor cut (2) (Remmert, 2002, S. 30)

Im folgenden Text wird zum besseren Verständnis der erste Spieler *Angreifer*, der zweite, den Ball erhaltende Spieler *Assist* genannt. Anschließend bekommt wieder der *Angreifer* den Ball.

Mit einem *Block* meint man das Blocken im Sinne des Sperrens eines Verteidigers. „Die Sperre ist die legale Möglichkeit sich einem Verteidiger in den Weg zu stellen, damit dessen Gegenspieler frei kommt.“, so Krappel (1997, S. 22).

Der Block setzende Spieler darf jedoch nicht Schieben, Stoßen oder mit dem Verteidiger mitgehen da dies als Foul zählen würde.

Es wird von einem *aktiven Block* gesprochen, wenn sich ein Spieler zum Ball besitzenden Mitspieler bewegt, um dessen Verteidiger zu sperren (Abbildung 44), bei einem *passiven Block* nützt der Ball besitzende, angreifende Spieler einen „stehenden“ Mitspieler als Block. Er versperrt seinem Verteidiger damit den Weg.

Nach erfolgtem Block kann der angreifende Spieler direkt auf den Korb werfen oder den Ball zum Korb dribbeln um einen Korberfolg zu erzielen (Durchbruch).

Der aktive Block verlangt nach einer aktiven Partnerhilfe, während beim passiven Block der Angreifer alleine für den Block verantwortlich ist. Aus diesem Grund sprechen einige Autoren, u.a. Medler et al. (1995) von *direktem Block* und *Abstreifen*.

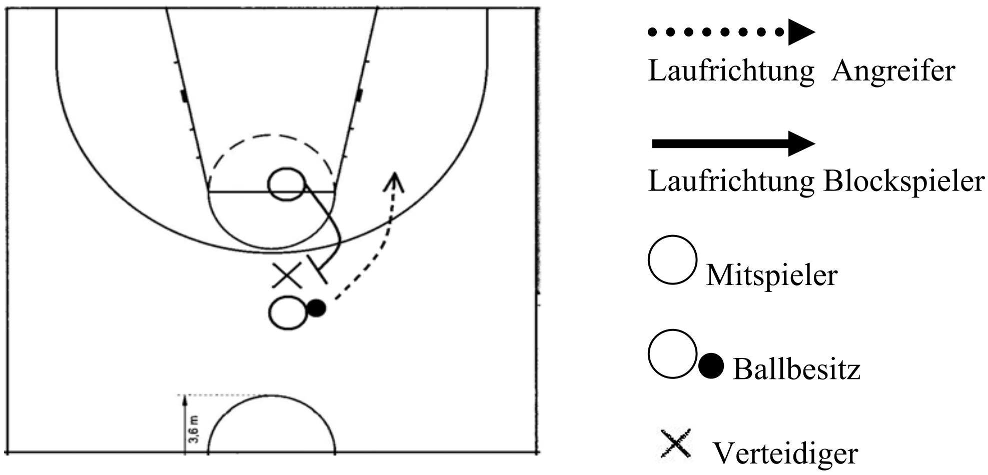


Abbildung 44: Beispiel eines aktiven Blocks

6.4.3 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Schritte des Forschungsprozesses skizziert. In der Schule sollen diese gemeinsam mit den Schülern erarbeitet, diskutiert und erweitert, beziehungsweise bei auftretenden Problemen auch geändert werden.

Vieles kann von den Schülern mit geeigneter Literatur – am besten in Gruppen - selbst erarbeitet werden. Anschließende Präsentationen inklusive Handouts, aber auch Frontalunterricht können dem schnellen Vorankommen im Projekt dienen.

Zu Beginn steht die einfache Formulierung eines vorläufigen **Forschungsproblems**:

Kann ein zusätzliches Training von 2-2 Spielzügen positive Auswirkungen auf das Zusammenspiel von Schülermannschaften im Wettkampf haben?

Nach der theoretischen Beschäftigung mit dem Forschungsproblem, die durch Literaturstudium erweitert werden kann, steht die Formulierung einer konkreten **Forschungsfrage** (siehe Kap. 6.3.1) an:

Hat regelmäßiges, intensives Training von 2-2 Spielzügen einen positiven Einfluss auf das Zusammenspiel in Schülerteams und in Folge dessen auf die Anzahl der Korberfolge im Wettkampf?

Als **Forschungsobjekte** dienen zwei leistungsähnliche Basketball-Schulteams der gleichen Alterklasse verschiedener Schulen. Dazu muss man als Leiter der Untersuchung mit dem Trainer des eigenen Schulteams besprechen, welches Team einer anderen Schule in Frage käme und mit diesem anschließend in Kontakt treten.

Vor Beginn muss das Vorhaben natürlich mit allen involvierten Kollegen besprochen und das Einverständnis des Direktors eingeholt werden.

Entweder werden Mädchen- oder Burschen-Teams untersucht. Per Zufall soll bestimmt werden, welches Team Versuchsgruppe und welches Kontrollgruppe sein soll.

Jede Gruppe sollte aus etwa 8 Spielern bestehen, die im Spiel eingewechselt werden können, beziehungsweise zum Vorteil unserer Untersuchung eingewechselt werden sollen.

Nach Auswahl der **Stichproben** müssen diese rechtzeitig über das Experiment informiert werden. Sie sollten nicht alle Details erfahren, um zu verhindern, dass sie voreingenommen in das Training gehen und ihr Verhalten sich dadurch verändern könnte, jedoch erfahren, dass sie ein Monat lang getrennt, mit verschiedenen Lehrinhalten trainiert werden würden und zwei Messungen das Ziel haben, mögliche Unterschiede in der Leistung aufzudecken. Gleichzeitig erfolgt die Bekanntgabe der Zeitpunkte der Beobachtungen.

Das Training beider Teams sollte wie üblich fortgesetzt werden, alte Ordnungsrahmen beibehalten werden. Die einzige Veränderung findet durch den intensiven Unterricht der 2-2 Spielzüge in der Versuchsgruppe statt, wobei neben diesem taktisch dominierten Training die technischen Komponenten nicht zu sehr vernachlässigt werden dürfen!

Als die zu beobachtenden Variablen gelten *Give & Go*, *aktive* und *passive Blocks*, deren Indikatoren mit Hilfe verschiedener Erhebungskategorien (Tabelle 40 und 41) erfasst werden sollen.

Tabelle 40: Operationalisierung von Give & Go

Variable	Indikatoren und Beschreibung	Beobachtungskategorien/ Spielhandlungen
Give & Go	Give & Go Initiierung: Angreifer möchte offensichtlich Give & Go spielen, scheitert jedoch schon während des ersten Passes.	• Fehlpass des Angreifers (1. Pass) • Abfangen durch Verteidiger • Spielunterbrechung durch Regelverstoß des Angreifers (Schritt-, Dribbel-, Zeitfehler, Foul, …) • Spielunterbrechung durch Regelverstoß vom Verteidiger des Angreifers (Foul)
	Give & Go ohne Erfolg: 1. Pass ist gelungen, jedoch kein Weiterspielen im Sinne eines Give & Go möglich (2. Pass scheitert).	• Fangfehler des Assist • Fehlpass des Assist zurück zum Angreifer (2. Pass) • Spielunterbrechung durch Regelverstoß des Assist (Schritt-, Dribbel-, Zeitfehler, Foul, ...) • Spielunterbrechung durch Regelverstoß vom Verteidiger des Assist (Foul) • Unterbrechung des Give & Go: 2. Pass wegen guter Verteidigung nicht möglich (Ball muss woanders hin gespielt oder weiter gedribbelt werden) • Verteidigung gelangt in Ballbesitz (Abfangen oder Wegschlagen des Balles)
	Give & Go ohne Korbwurf: Give & Go erfolgreich (1. und 2. Pass sind erfolgt), Durchbruch zum Korb oder direkter Korbwurf jedoch nicht möglich.	• Fangfehler des Angreifers beim 2. Pass • Spielunterbrechung durch Regelverstoß des Angreifers (Schritt-, Dribbel-, Zeitfehler, Foul, ...) • Spielunterbrechung durch Regelverstoß vom Verteidiger des Angreifers (findet ein Foul innerhalb der Angriffszone statt: 2 Freiwürfe) • Unterbrechung des Give & Go: Korbwurf wegen guter Verteidigung nicht möglich (Ball muss woanders hin gespielt oder weiter gedribbelt werden) • Verteidigung gelangt in Ballbesitz (Wegschlagen des Balles)
	Give & Go mit Korbwurf ohne Erfolg: Durchbruch zum Korb oder direkter Korbwurf erfolgt, jedoch kein Korberfolg.	• Ball wird in der Luft von einem Verteidiger weggeschlagen • Spielunterbrechung durch Regelverstoß eines Verteidigers im Wurf oder während des Durchbruchs zum Korb (Foul → 2 Freiwürfe) • Spielunterbrechung durch Regelverstoß des Angreifers im Wurf oder während des Durchbruchs (Offensivfoul) • Fehlwurf (Ball geht am Korb vorbei, berührt Ring oder Spielbrett)
	Give & Go mit Korbwurf mit Erfolg: Durchbruch zum Korb oder direkter Korbwurf erfolgt, Korberfolg!	• Korbwurf mit 2 Punkten Findet während des erfolgreichen Korbwurfes ein Defensivfoul eines Verteidigers statt, so bekommt der Angreifer einen zusätzlichen Freiwurf. Dies muss im Beobachtungsprotokoll aber nicht vermerkt werden, da diese Tatsache mit der Ausführung der 2-2 Spielzüge nicht in direktem Zusammenhang steht.

Tabelle 41: Operationalisierung von aktivem und passivem Block

Variable	Indikatoren und Beschreibung	Beobachtungskategorien/ Spielhandlungen
Aktiver Block	Spieler initiiert aktiven Block ohne Erfolg: Aktiver Block wird von Spieler A durchgeführt, kann vom Mitspieler B jedoch nicht zum Durchbruch oder direktem Wurf genutzt werden.	• Spieler B reagiert auf gesetzten Block nicht • Verteidiger A übernimmt oder ein anderer Verteidiger übernehmen Spieler B • Block ist schlecht gesetzt, sodass Verteidiger B weiterhin bei Spieler B bleibt • Spielunterbrechung durch Regelverstoß des Angreifers • Spielunterbrechung durch Regelverstoß eines Verteidigers
	Block mit anschließendem Durchbruch oder direktem Korbwurf ohne Erfolg	• Fehlwurf (Ball geht am Korb vorbei, berührt Ring oder Spielbrett) • Spielunterbrechung durch Regelverstoß eines Verteidigers im Wurf oder während des Durchbruchs zum Korb (bei Foul: 2 Freiwürfe) • Spielunterbrechung durch Regelverstoß des Angreifers im Wurf oder während des Durchbruchs (Offensivfoul)
	Block mit anschließendem Durchbruch oder direktem Korbwurf mit Erfolg	• Korbwurf mit 2 Punkten (bei Foul: 1 Freiwurf)
Passiver Block	Spieler initiiert passiven Block ohne Erfolg: Passiver Block wird von Spieler A am Mitspieler B durchgeführt, kann jedoch nicht genutzt werden.	• Verteidiger B oder ein anderer Verteidiger übernehmen Spieler A • Block ist schlecht gesetzt, sodass Verteidiger A weiterhin bei Spieler A bleibt.
	Block mit anschließendem Durchbruch oder direktem Korbwurf ohne Erfolg	• Spielunterbrechung durch Regelverstoß eines Verteidigers im Wurf oder während des Durchbruchs zum Korb (bei Foul: 2 Freiwürfe) • Regelverstoß des Angreifers im Wurf oder während des Durchbruchs (Offensivfoul) • Fehlwurf (Ball geht am Korb vorbei, berührt Ring oder Spielbrett)
	Block mit anschließendem Durchbruch oder direktem Korbwurf mit Erfolg	• Korbwurf mit 2 Punkten (bei Foul: 1 Freiwurf)

Mögliche Störvariablen:

- Störung durch andere Schüler, Kollegen, Schulwart, usw. während der Beobachtung
  → rechtzeitig über Ort und Zeitpunkt der Beobachtung informieren, Publikum aussschließen!
- Ausfall eines Spielers durch Verletzung, Krankheit, Termine

- Schiedsrichter pfeift „schlecht“ oder unfair

  → erfahrenen, neutralen Schiedsrichter engagieren

- Unkonzentriertheit der Beobachter

  → Beobachter im Laufe der Aneignung der Forschungsmethode auf die Wichtigkeit der Beobachterrolle wiederholt hinweisen.

Hypothesen:

H_0: Regelmäßiges, intensives Training von 2-2 Spielzügen in Schülerteams hat keine positiven Auswirkungen auf das Zusammenspiel im Team.

H_1: Regelmäßiges, intensives Training von 2-2 Spielzügen in Schülerteams hat positive Auswirkungen auf das Zusammenspiel im Team.

Zur Überprüfung der wissenschaftlichen Hypothesen müssen diese in statistische Hypothesen (siehe Kapitel 6.4.6) überführt werden (Rockmann, S. 55).

Kurzbeschreibung des Experiments:

Die beiden Gruppen treten vor Beginn des Spezialtrainings sowie fünf Wochen danach gegeneinander an. In beiden Spielen werden beide Gruppen beobachtet und analysiert. Ein bis zwei Wochen vor der ersten Beobachtung sollte auf jeden Fall ein Pretest (Kap. 6.3.4) erfolgen, um etwaige Fehler im Beobachtungsbogen oder Schwierigkeiten in der Durchführung aufzudecken und rechtzeitig zu beheben. Dabei kann das eigene Schulteam im Training beobachtet werden.

Als Schiedsrichter darf keineswegs ein Schüler fungieren da es aufgrund der Unerfahrenheit zu erheblichen Fehlentscheidungen und in Folge dessen zu falschen Beobachtungen und Daten führen kann.

Nach Möglichkeit sollte ein geprüfter Schiedsrichter oder zumindest ein erfahrener Sportlehrer beide Spiele pfeifen.

Die Spiele sollten gleichen Charakter wie jene des Basketball-Schulcups haben. Das heißt es werden zwei Halbzeiten zu je zehn Minuten gespielt, die Regeln können in Anhang 5 nachgelesen werden.

Die Versuchs- oder Experimentalgruppe trainiert fünf Wochen lang unter veränderten Bedingungen. Der Trainer hat die Aufgabe, den Spielern die 2-2 Spielzüge, die in Kap. 6.4.2 behandelt werden, anzueignen und diese entsprechend zu trainieren, damit die Spieler sie im Spiel auch einsetzen. Die Kontrollgruppe trainiert unter denselben Bedingungen wie zuvor.

Definitionen:

Grundgesamtheit: Basketball-Schülerteams

Anmerkung: Um diese Untersuchung, falls die aufgestellten Arbeitshypothesen sich bestätigen sollten, auf andere (Erwachsenen- oder Wettkampf)Teams zu übertragen, scheint das Projekt doch zu wenig wissenschaftlich formuliert.

Untersuchungsobjekte: Leistungsähnliche Basketballteams verschiedener Schulen.

Forschungsfrage: Kann *regelmäßiges, intensives* Training von *2-2 Spielzügen* das *Zusammenspiel* in Schülerteams und in Folge dessen die Anzahl der Korberfolge im Wettkampf erhöhen?

regelmäßig: Zwei Trainingseinheiten á 2 x 50min pro Woche, über einen fixierten Zeitraum von 5 Wochen.

Anmerkung: sollte eine Trainingseinheit wegen Feiertag o.ä. entfallen, so sollte diese nach Möglichkeit nachgeholt werden, da das andere Team unter Umständen an einem anderen Wochentag und damit einmal öfters trainiert. Dies sollte mit den Objekten der Stichproben bei deren Informierung abgesprochen werden.

intensiv: Training mindestens eines 2-2 Spielzugs (Give & Go, aktiver oder passiver Block) in jeder Trainingseinheit.

2-2 Spielzüge: Interaktion zweier Mitspieler

Zusammenspiel (abhängige Variable): Anwendung und Umsetzung der 2-2 Spielzüge *Give & Go* und *Block*

Give & Go (Unabhängige Variable): Interaktion zweier Mitspieler im Sinne eines Passens und Schneidens zum Korb mit erneuter Ballannahme

aktiver Block (UV): Sperrens des Verteidigers eines Mitspielers

passiver Block (UV): Sperren des eigenen Verteidigers durch Abstreifen an einen Mitspieler

Definition der Indikatoren: siehe Tabellen 40 und 41.

6.4.4 Durchführung der Beobachtung

Es gibt an sich einen klaren Unterschied zwischen Spiel- und Spielerbeobachtung (vgl. Remmert, 2002 und Czwalina, 1976). In der vorliegenden Untersuchung soll die Spielbeobachtung mit Hilfe der Spielerbeobachtung erfolgen. Es werden also die einzelnen Spieler jedes Teams und ihre Aktionen beobachtet um anschließend das gesamte Spiel zu analysieren.

Jeder Beobachter/ jedes Beobachtungsteam beobachtet einen Spieler. Initiiert dieser eine der beschriebenen 2-2 Spielzüge, so muss der weitere Spielverlauf beobachtet und das Ergebnis im Beobachtungsbogen festgehalten werden. Der Eintrag erfolgt in der jeweiligen Beobachtungskategorie durch Angabe der Spielminute. Dadurch können die Ergebnisse nach der Beobachtung mittels Videoanalyse kontrolliert und gegebenenfalls korrigiert werden.

Vor Durchführung der Untersuchung müssen die Beobachter sich mit dem Beobachtungsbogen vertraut machen. Sie müssen die Abkürzungen der Indikatoren und Erhebungskategorien sowie deren Beschreibungen (Tabellen 42 und 43) beherrschen, um sich während der Beobachtung im Beobachtungsbogen (Anhang 8) zurechtzufinden. Müssen Kategorien erst gesucht werden kostet dies wertvolle Zeit, in der im Spiel viel passieren und übersehen werden kann.

Wenn genügend Beobachter vorhanden sind, so sollten mindestens zwei Beobachter je einen Spieler nach in Kapitel 6.3.8 genannten Schemen beobachten. Da während des Spiels insgesamt 10 Spieler am Spielfeld sind, sollten also nach Möglichkeit 20 Beobachter zur Verfügung stehen. Ist dies nicht der Fall, so muss sich ein Beobachter sehr genau auf seinen zu beobachtenden Spieler konzentrieren.

Wird ein Spieler eingewechselt, so übernehmen die Beobachter des ausgewechselten Spielers die Beobachtung des neuen Spielers. Dazu muss ein neues Beobachtungsprotokoll verwendet werden, das heißt, dass jeder Beobachter mindestens zwei Beobachtungsbögen bei sich haben muss.

In Anschluss an die Beobachtung werden die erhobenen Daten am Beobachtungsprotokoll mit dem im nächsten Kapitel beschriebenem Punkteschema vercodet. Damit wird erreicht, dass die beobachteten nominalskalierten Daten der ordinalen Skala unterliegen und mit Hilfe des Wilcoxon-Rangsummentests statistisch ausgewertet werden können.

Sollte die Beobachtung von Give & Go und Block die beobachtenden Schüler überfordern (Pretest), so können die Beobachtungskategorien reduziert werden, indem sich die Schüler auf nur eine Variable konzentrieren.

6.4.5 Vercodung und Wertung

Tabelle 42: Codierung der Variable Give & Go

Indikator + Code	Code der Beobachtungskat.	Kurzbeschreibung	Wertung (Punkte)
Give & Go Initiierung	[FeP1]	1. Pass ist Fehlpass	10
	[AfaV]	Abfangen 1. Pass durch Verteidiger	10
	[RvA]	Regelverstoß Angreifer	10
[GI]	[RvV]	Regelverstoß Verteidiger	20[1]
Give & Go ohne Erfolg	[FaFe]	Fangfehler des Assist	10
	[FeP2]	2. Pass ist Fehlpass	20
	[RvA]	Regelverstoß Angreifer	20
[GoE]	[RvV]	Regelverstoß Verteidiger	30[1]
	[Unt]	Unterbrechung des Give & Go	40[2]
	[BBV]	Ballbesitz Verteidiger	20
Give & Go ohne KW	[FaFe]	Fangfehler	20
	[RvA]	Regelverstoß Angreifer	30
	[RvV]	Regelverstoß Verteidiger	40[1,3]
[GoKW]	[Unt]	Unterbrechung des Give & Go	50[2]
	[BBV]	Ballbesitz Verteidiger	30
Give & Go mit KW ohne Erfolg	[AfaV]	Abfangen Korbwurf durch Verteidiger	40
	[RvA]	Regelverstoß Angreifer im Wurf	40
	[RvV]	Regelverstoß Verteidiger im Wurf	50[3]
	[FeWu]	Fehlwurf	40
[G/KWoE]			
Give & Go mit KW mit Erfolg	[KE]	Korberfolg	60
[G/KWmE]			

Tabelle 43: Codierung der Variablen aktiver und passiver Block

Indikator + Code	Code der Beobachtungskat.	Kurzbeschreibung	Wertung (Punkte)
Aktiver Block ohne Erfolg [ABoE]	[oE]	Block ohne Erfolg i. S. v. „nicht erkannt“	10
	[andV]	anderer Verteidiger übernimmt	20
	[Vmit]	geblockter Verteidiger geht mit	20
	[RvA]	Regelverstoß eines Angreifers	20
	[RvV]	Regelverstoß eines Verteidigers	30
Aktiver Block mit Durchbruch/ Korbwurf ohne Erfolg [AB/KWoE]	[FeWu]	Fehlwurf	30
	[RvA]	Regelverstoß eines Angreifers	30
	[RvV]	Regelverstoß eines Verteidigers	40
Aktiver Block mit Korberfolg [AB/KWmE]	[KE]	Korberfolg	50[4]
Passiver Block ohne Erfolg [PBoE]	[andV]	anderer Verteidiger übernimmt	20
	[Vmit]	geblockter Verteidiger geht mit	20
	[RvA]	Regelverstoß eines Angreifers	20
	[RvV]	Regelverstoß eines Verteidigers	30
Passiver Block mit Durchbruch/ Korbwurf ohne Erfolg [PB/KWoE]	[FeWu]	Fehlwurf	30
	[RvA]	Regelverstoß eines Angreifers	30
	[RvV]	Regelverstoß eines Verteidigers	40
Passiver Block mit Korberfolg [PB/KWmE]	[KE]	Korberfolg	50[4]

Erklärungen zur Wertung:

[1] Für den Regelverstoß eines Verteidigers kann der Angreifer nichts und wird an der Durchführung des Spielzugs Give & Go gehindert. Deshalb werden in diesem Fall mehr Punkte vergeben als bei einem Fehler durch den Angreifer [RvA], [FeP] usw.

[2] Eine bewusste Unterbrechung des Spielzugs Give & Go durch den Angreifer soll höher gewertet werden als ein durch den Zwang, den Spielzug durchzuziehen, entstandener Fehlpass [FeP], o.ä.

[3] Diese Vergehen werden mit Freiwürfen geahndet. Da diese mit der Durchführung des Give & Go nicht direkt zusammenhängen sollen diese nicht explizit vermerkt werden.

[4] Der Korberfolg hat beim Spielzug Give & Go eine höhere Wertung als beim Block, da die Durchführung des Give & Go länger und damit schwieriger ist.

Der Beobachtungsbogen zur Beobachtung der Spielzüge findet sich in Anhang 8.

6.4.6 Statistische Auswertung

In diesem Kapitel soll die Auswertung der erhobenen Daten im Überblick anhand eines Beispiels erklärt werden. Zur genauen Auswertung sei auf die Theorie zum U-Test für unabhängige Stichproben und zum Wilcoxon–Rangsummentest für abhängige Stichproben in Kapitel 5.4 der beurteilenden Statistik verwiesen.

Die Angaben sind frei erfunden, können sich bei der realen Untersuchung grundlegend unterscheiden und damit zu ganz anderen Ergebnissen führen! Aus diesem Grund sei auf eine besonders gründliche Vorbereitung und Durchführung des Forschungsprozesses hingewiesen.

Im Anschluss an die Beobachtung, die Überprüfung der erhobenen Daten mittels Videoaufzeichnung und gegebenenfalls Korrektur, werden für jeden Spieler die erreichten Punkte nach Tabellen 42 und 43 errechnet. Diese müssen in Relation zu der Spielzeit des jeweiligen Spielers gesetzt und deshalb durch ihre Spielzeit in Minuten dividiert werden. Man erhält die Punkteanzahl pro Spielminute.

Diese Berechnung kann jeder Beobachter für seinen beobachteten Spieler im Beobachtungsprotokoll selbst durchführen, es empfiehlt sich jedoch, sie von einem anderen Schüler oder Lehrer kontrollieren zu lassen.

Hat ein Spieler zum Beispiel 90 Punkte erreicht und war nur während der ersten Halbzeit im Spiel, so gilt: 90 : 10 = 9. Die errechneten Werte jedes Spielers beider beobachteten Spiele werden zur besseren Übersicht in eine Tabelle eingetragen (vgl. Tabelle 44).

Tabelle 44: Beispiel einer Tabelle zur Eintragung der Daten

VpNr	Gruppe (K/V)	Punkte gesamt	
		1. Beobachtung	2. Beobachtung
1	K	5,0	4,6
2	K	2,1	3,5
3	K	8,0	8,0
4	K	1,2	1,4
5	K	9,8	11,0
6	K	4,1	3,4
7	K	6,0	5,3
8	K	2,8	2,6
9	V	2,9	3,6
10	V	7,0	8,7
11	V	1,0	5,4
12	V	6,9	5,5
13	V	4,7	9,9
14	V	11,4	10,9
15	V	6,5	6,2
16	V	1,3	2,5

Damit sind alle Daten auf einer Seite gesammelt und können statistisch ausgewertet werden.

Stellt man Versuchs- und Kontrollgruppe *einer Beobachtung* gegenüber, so handelt es sich um unabhängige, ordinalskalierte Stichproben, die mit dem Mann-Whitney-U-Test (Kapitel 5.4.1) untersucht werden können.

Vergleicht man hingegen die beiden Beobachtungen *einer Gruppe*, so liegen abhängige, ordinalskalierte Stichproben vor, die anhand des Wilcoxon-Rangsummentests (Kapitel 5.4.2) auf einen Unterschied geprüft werden sollen.

6.4.6.1 *U*-Test für kleine Stichproben (n_1, n_2 < 9):

Wir wollen nun anhand der beiden Stichproben Kontroll- und Versuchsgruppe überprüfen, ob sich diese hinsichtlich der gemessenen Merkmale *einer* Beobachtung unterscheiden.

Der *U*-Test für kleine Stichproben setzt voraus, dass keine der beiden Gruppen mehr als 8 Spieler zählt. Es muss also im Vorhinein bestimmt werden, ob höchstens 8 oder mindestens 9 Spieler dem Team zugehören dürfen, weil man sonst mit dem *U*-Test für große Stichproben arbeiten muss (siehe Kap. 5.4.2). Die beiden Stichproben müssen nicht gleich groß, aber *beide* kleiner gleich 8 oder größer gleich 9 sein.

Als Voraussetzungen für die Anwendung des *U*-Tests nennt Bös (2000, S. 130), dass die Daten Ordinalskalenniveau haben und unabhängige Stichproben vorliegen. Nachdem diese Voraussetzungen soweit erfüllt sind, steht der Anwendung des *U*-Tests nichts mehr im Wege. Es müssen nun neue Hypothesen formuliert werden:

H_0: Die beiden Stichproben unterscheiden sich nicht signifikant hinsichtlich der gemessenen

Merkmale *Give & Go* und *Block*. Auftretende Unterschiede sind zufällig.

Mathematische Formulierung: H_0: $Z_k = Z_v$

H_1: Die beiden Stichproben unterscheiden sich signifikant hinsichtlich der gemessenen

Merkmale *Give & Go* und *Block*.

Mathematische Formulierung: H_1: $Z_k \neq Z_v$

Die Punkte aller Versuchsprobanden (Spieler) beider Gruppen einer Beobachtung werden in eine Tabelle eingetragen und eine Rangfolge der Punkte erstellt.

Tabelle 45: Beispiel zur Bestimmung der Ränge der 1. Beobachtung

	Versuchsprobanden							
Gruppe	1	2	3	4	5	6	7	8
VG	**2,9**	**7,0**	**1,0**	**6,9**	**4,7**	**11,4**	**6,5**	**1,3**
KG	5,0	2,1	8,0	1,2	9,8	4,1	6,0	2,8

Rangfolge: **1,0**; 1,2; **1,3**; 2,1; 2,8; **2,9**; 4,1; **4,7**; 5,0; 6,0; **6,5**; **6,9**; **7,0**; 8,0; 9,8; **11,4**

Rangzahlen: **1**, 2, **3**, 4, 5, **6**, 7, **8**, 9, 10, **11, 12, 13**, 14, 15, **16**

Anschließend werden Rangsummen und Prüfgrößen berechnet:

$\boldsymbol{R_V = 1 + 3 + 6 + 8 + 11 + 12 + 13 + 16 = 70}$

$R_K = 2 + 4 + 5 + 7 + 9 + 10 + 14 + 15 = 66$

$$U_V = n_V.\, n_K + \frac{n_V.(n_V + 1)}{2} - R_V \;= 8.8 + \frac{8.9}{2} - 70 = 64 + 36 - 70 = 30$$

$$U_K = n_V.\, n_K + \frac{n_K.(n_K + 1)}{2} - R_K \;= 8.8 + \frac{8.9}{2} - 66 = 64 + 36 - 66 = 34$$

Kontrolle:

Es muss gelten: $n_V \,.\, n_K = U_V + U_K$

$$8 \,.\, 8 = 30 + 34$$

$$64 = 64,$$

wir haben die Rangsummen und Prüfgrößen also richtig berechnet.

Der kleinere der beiden empirisch ermittelten U-Werte ($U_{pr} = U_V = 30$) wird nun mit dem theoretischen U-Wert $U(8, 8; 0{,}05)$, ermittelt aus Tabelle 56 für zweiseitige Tests in Anhang 4, verglichen.

Wir wählen das 95%-Signifikanzniveau ($\alpha = 0{,}05$) weil es sich um eine Hypothese zur *Signifikanz* (vgl. Kapitel 5.2.2.2) von Unterschieden handelt.

Bei einer zweiseitig formulierten Hypothese muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $U_{pr} \leq U(n_A, n_B; \alpha)$.

Da U_{pr} = 30 > U(8, 8; 0,05) = 13 muss die Nullhypothese H_0: $Z_k = Z_v$ nicht verworfen werden.

Die beiden Gruppen unterscheiden sich in der ersten Beobachtung nicht signifikant hinsichtlich der gemessenen Merkmale *Give & Go* und *Block*.

Im Anschluss soll die 2. Beobachtung statistisch untersucht werden, von der wir uns erwarten, dass die Versuchsgruppe bessere Werte erzielt hat, als die Kontrollgruppe.

Es wird eine einseitige, rechtsseitige Hypothese formuliert (vgl. Kapitel 5.4.2):

H_0: $Z_k \leq Z_v$

H_1: $Z_k > Z_v$

Tabelle 46: Beispiel zur Bestimmung der Ränge der 2. Beobachtung

	Versuchsprobanden							
Gruppe	1	2	3	4	5	6	7	8
VG	**3,6**	**8,7**	**5,4**	**5,5**	**9,9**	**10,9**	**6,2**	**3,5**
KG	4,6	2,5	8,0	1,4	11,0	3,4	5,3	2,6

Rangfolge:

1,4; 2,5; 2,6; 3,4; **3,5**; **3,6**; 4,6; 5,3; **5,5**; **6,2**; 8,0; **8,4**; **8,7**; **9,9**; **10,9**; 11,0;

Nun wollen wir U_V und U_K durch Auszählen der Ränge bestimmen (vgl. Kapitel 5.4.1):

$\boldsymbol{U_V = 4 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 16}$

$U_K = 8 + 8 + 8 + 8 + 6 + 6 + 4 = 48$

Kontrolle: $n_1 \times n_2 = U_V + U_K$

$8 \times 8 = 16 + 48$

$64 = 64$

Der kleinere der beiden empirisch ermittelten U-Werte ($U_{pr} = U_V = 16$) wird nun mit dem theoretischen U-Wert $U(8, 8; 0{,}05)$ der Tabelle 55 für einseitige Tests aus Anhang 4 verglichen.

Wir wählen wieder das 95%-Signifikanzniveau ($\alpha = 0{,}05$).

Bei einer einseitig, rechtsseitig formulierten Hypothese muss die Nullhypothese verworfen werden, wenn $U_{pr} = U_A \leq U(n_A, n_B; \alpha)$.

Da $U_{pr} = 16 > U(8, 8; 0{,}05) = 15$ muss die Nullhypothese H_0: $Z_k \leq Z_v$ nicht verworfen werden.

6.4.6.2 Wilcoxon-Rangsummentest

Mit Hilfe des Wilcoxon-Rangsummentests kann der Zusammenhang abhängiger, ordinalskalierter Stichproben überprüft werden.

Wir wollen wissen, ob sich durch das spezielle Training das Zusammenspiel im Team verbessert hat und müssen dazu die Ergebnisse der Versuchsgruppe aus der ersten und zweiten Beobachtung vergleichen.

Es wird wieder eine einseitige, rechtsseitige Hypothese formuliert (vgl. Kapitel 5.4.2):

H_0: $X_{B1} \leq X_{B2}$

H_1: $X_{B1} > X_{B2}$

Die Punkte aller Versuchsprobanden (Spieler) einer Gruppe beider Beobachtungen werden in eine Tabelle eingetragen und wie in Tabellen 47 und 48 gezeigt eine Rangfolge der Beträge der Differenzen erstellt. Haben zwei oder mehr Werte die gleiche Differenz, so wird der Mittelwert ihrer Ränge gebildet.

Tabelle 47: Beispiel zur Bestimmung der Ränge der Versuchsgruppe

Gruppe: Versuchsgruppe								
Vpn	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Beob.	2,9	7,0	1,0	6,9	4,7	11,4	6,5	1,3
2. Beob.	3,6	8,7	5,4	5,5	9,9	10,9	6,2	3,5
Differenz	+0,7	+1,7	+4,4	-1,4	+5,2	-0,5	-0,3	+2,2
Rang	3	5	7	4	8	2	1	6

Anschließend werden die Ränge positiver und negativer Differenzen getrennt voneinander addiert:

$R_{(-)}(8) = 4 + 2 + 1 = 7$

$R_{(+)}(8) = 3 + 5 + 7 + 8 + 6 = 29$

Kontrolle:

Es muss gelten: $R_{(+)}(n) + R_{(-)}(n) = \frac{n.(n+1)}{2}$

$$7 + 29 = \frac{8.9}{2}$$

$$36 = 36,$$

Rangsummen und Prüfgrößen wurden also richtig berechnet.

$R_{(-)}(8) < R_{(+)}(8)$ bedeutet, dass die Ergebnisse der ersten Messwertreihe schlechter als die der zweiten Messwertreihe sind.

Wir wollen auf einen signifikanten Unterschied hin testen und wählen deshalb α = 0,05. Durch Nachschlagen des kritischen Tabellenwerts in Tabelle 57 in Anhang 4 erhalten wir

R(8; 0,05) = 4

Da $R_{(-)}(8) = 7 > (8; 0{,}05) = 4$ muss die Nullhypothese H_0: $X_{B1} \leq X_{B2}$ nicht verworfen werden.

Die beiden Stichproben unterscheiden sich signifikant hinsichtlich der gemessenen Merkmale *Give & Go* und *Block.*

Im Anschluss an die Überprüfung eines positiven Zusammenhanges des regelmäßigen, intensiven Trainings und der Verbesserung des Zusammenspiels der Versuchsgruppe soll überprüft werden, ob – entsprechend der Erwartungen – die Leistungen der Versuchsprobanden der Kontrollgruppe gleich geblieben sind. Aus diesem Grund wird eine zweiseitige Hypothese formuliert. Der Test kann aber auch einseitig durchgeführt werden.

Es gelten die folgenden Hypothesen:

H_0: $X_{B1} = X_{B2}$

H_1: $X_{B1} \neq X_{B2}$

Tabelle 48: Beispiel zur Bestimmung der Ränge der Kontrollgruppe

Gruppe: Kontrollgruppe								
Vpn	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Beob.	5,0	2,1	8,0	1,2	9,8	4,1	6,0	2,8
2. Beob.	4,6	2,5	8,0	1,4	11,0	3,4	5,3	2,6
Differenz	-0,4	+0,4	0	+0,2	+1,2	-0,7	-0,7	-0,2
Rang	3.5	3.5	-	1.5	7	5.5	5.5	1.5

$R_{(-)}(8) = 3.5 + 5.5 + 5.5 + 1.5 = 16$

$R_{(+)}(8) = 3.5 + 1.5 + 7 = 12$

Kontrolle: $R_{(+)}(n) + R_{(-)}(n) = \frac{n.(n+1)}{2}$

$$16 + 12 = \frac{7.8}{2}$$

$$28 = 28$$

(n beträgt nur noch 7, weil Vpn 3 in der weiteren Berechnung nicht mehr berücksichtigt wird!)

$R_{(-)}(8) > R_{(+)}(8)$ bedeutet, dass die Ergebnisse der ersten Messwertreihe besser als die der zweiten Messwertreihe sind.

Als Prüfvariable wird der kleinere der beiden Rangsummen verwendet, also das Minimum. Die Nullhypothese wird verworfen, wenn der berechnete R-Wert kleiner oder gleich dem kritischen Wert $R(n; \alpha)$ der Tabelle aus Anhang 4 ist.

$R_{(+)}(8) = 12 > R(8; 0{,}05) = 4$, die Nullhypothese H_0: $X_{B1} = X_{B2}$ wird beibehalten.

Die beiden Stichproben unterscheiden sich nicht signifikant hinsichtlich der gemessenen Merkmale *Give & Go* und *Block*.

6.4.6.3 Interpretation

Durch die Überprüfung mit Hilfe von Wilcoxon-Rangsummen- und U-Test würde anhand dieses Beispiels gezeigt werden, dass sich die Vermutung eines positiven Zusammenhangs des Trainings von 2-2 Spielzügen und dem Zusammenspiel im Team bestätigt hätte.

Es konnte gezeigt werden, dass sich Versuchs- und Kontrollgruppe während der ersten Beobachtung nicht signifikant, bei der zweiten Beobachtung, nach getrenntem Training über einen Zeitraum von 5 Wochen, signifikant unterschieden (vgl. Kapitel 6.4.6.1).

Weiters wurde bestätigt, dass sich das Zusammenspiel der Kontrollgruppe von erster zu zweiter Beobachtung nicht signifikant veränderte, das der Versuchsgruppe änderte sich auf einem 5%-Signifikanzniveau (vgl. Kapitel 6.4.6.2).

Alle angestellten statistischen Hypothesen konnten dahingehend geprüft werden, dass die zuvor formulierte wissenschaftliche Nullhypothese H_0 verworfen werden kann und die Alternativhypothese H_1 Gültigkeit hat: Regelmäßiges, intensives Training von 2-2 Spielzügen in Schülerteams hat positive Auswirkungen auf das Zusammenspiel im Team.

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass es sich bei der vorliegenden statistischen Auswertung lediglich um ein Beispiel handelt, das dem besseren Verständnis und in Folge dessen einer einfacheren Auswertung tatsächlich erhobener Daten dient.

In der Realität können ganz andere Daten vorliegen und in Folge dessen zu anderen Ergebnissen führen.

6.4.7 Überprüfung der Gütekriterien

Da die beschriebene Untersuchung nicht in der Realität angewandt und ihre Durchführbarkeit nicht überprüft wurde, fällt auch die Überprüfung der Gütekriterien nur auf theoretischer Ebene aus.

„Ziel der Güteüberprüfung von Beobachtungen ist es, sich gegenüber Fehlern bzw. Täuschungen zu schützen und damit dem wissenschaftlichen Anspruch an eine Forschungsmethode zu genügen. Dies erfolgt mit Hilfe der Gütekriterien.“, erklären Wagner und Willimczik (in Singer und Willimczik, 2002, S. 188).

Die *Objektivität* der Untersuchung ist dann gegeben, wenn die Beobachter sich intensiv mit dem Forschungsthema und der Untersuchungsmethode auseinandersetzen, sodass die Geschehnisse richtig beobachtet werden und alle zu gleichen Ergebnissen gelangen würden. Die Ausschaltung möglicher Störvariablen im Voraus sollte deshalb auf jeden Fall erfolgen.

Eine wesentliche Störvariable musste bereits bei Konzeption dieser Untersuchung ausgeschaltet werden. Ursprünglich sollte, aufgrund der besseren Zugänglichkeit, nur das schuleigene Basketballteam zur Untersuchung herangezogen, zwei Gruppen gebildet und getrennt voneinander trainiert werden. Nach einiger Zeit bemerkte ich, dass die Schüler in ständigem Kontakt stünden und so ein Informationsaustausch der Gruppen wahrscheinlich nicht zu vermeiden gewesen wäre. Damit wäre die Untersuchung Gefahr gelaufen, Verhalten der Schüler aufzuzeichnen, das nicht den Versuchsbedingungen entsprochen hätte.

Alle methodischen und sportartbezogenen Kenntnisse müssen beherrscht werden. Dies kann in Gruppen erarbeitet und präsentiert, aber teils auch durch Frontalunterricht erfolgen. Es genügt nicht, sich den Theorieteil einfach nur durchzulesen. Zu diesem Zweck soll vor Beginn der Hauptuntersuchung, der Beobachtung der 2-2 Spielzüge, eine Probeuntersuchung (vgl. Beobachtungsbogen in Anhang 7) durchgeführt werden, nach der der Lehrer beurteilen kann, ob die Schüler genügend Wissen haben um die weiteren Beobachtungen durchzuführen und auszuwerten.

Remmert (2002, S. 75) spricht in diesem Zusammenhang von Beobachterkonstanz und meint damit die Wahrnehmungs- und Beurteilungskonstanz der Beobachter über die Spiele, im Spiel und über die einzelnen Spieler.

Wagner und Willimczik (in Singer und Willimczik, 2002, S. 190) schreiben: „Die Grundlage für die Bestimmung der Objektivität bildet die Beobachtung ein und desselben Verhaltens durch zwei oder mehr Beobachter.“

Wir wissen, dass diese Möglichkeit wegen mangelnder Anzahl an Beobachtern nicht unbedingt gegeben sein muss. Wird eine Videoaufzeichnung gemacht, so kann die Objektivität im Anschluss an die direkte Spielerbeobachtung, durch Diskussion der Ergebnisse in der Klasse oder in Gruppen zusätzlich überprüft werden.

Zur Überprüfung der Stimmigkeit von Beobachtungsdaten kann der von Wagner und Willimczik (in Singer und Willimczik, 2002) genannte Beobachtungskoeffizient errechnet werden:

$$\text{Ü (\%)} = \frac{\text{Übereinstimmungen}}{\text{Übereinstimmungen + Nichtübereinstimmungen}} \text{ x } 100$$

Sind sich der Beobachter und die Gruppe, beziehungsweise zwei Beobachter, zum Beispiel hinsichtlich 9 beobachteter Merkmale einig und unterscheiden sich ihre Meinungen in 2 Fällen, so erhält man für den Beobachtungskoeffizienten

$$\text{Ü} = \frac{9}{9+2} \text{ x } 100 \approx 81{,}8\%$$

Für die Gewährleistung der Objektivität ist eine genaue Ausarbeitung der Beobachtungskategorien unerlässlich. Sie müssen so formuliert sein, dass sich Beobachtungen klar zuordnen lassen und sich keinesfalls überschneiden.

Unter *Reliabilität* wird der Grad der Genauigkeit verstanden, mit der die gewählte Untersuchungsmethode einen Sachverhalt erfasst. Czwalina (1976, S. 18) schreibt: Die vollkommene Reliabilität einer Spielerbeobachtung im Hinblick auf einen Spieler ist dann gewährleistet, wenn die mittels der Spielerbeobachtung registrierten Ergebnisse den Spieler in seinem Verhalten genau erfasst haben.“

Damit steht die Reliabilität einer Messung in direktem Zusammenhang mit der Objektivität.

Es müssen alle Situationen erfasst werden (können), die das Verhalten des beobachteten Spielers beschreiben. Die Beobachtungskategorien müssen deutlich formuliert sein, damit sich beobachtete Situationen eindeutig einordnen lassen. Des Weiteren ist die Überprüfung, ob alle möglichen Situationen im Beobachtungsbogen angeführt sind unerlässlich, denn wenn man ein Spielerverhalten aufgrund des Fehlens einer Beobachtungskategorie nicht im Protokoll festhalten kann, bzw. man erst gar nicht darauf achtet, führt dies zu ebenso verzerrten Ergebnissen wie wenn ein Spielerverhalten nicht klar zugeordnet werden kann.

Zur Überprüfung der Reliabilität eignet sich am besten die Durchführung eines Retests (Wagner und Willimczik, in Singer und Willimczik, 2002), der wegen Zeitmangel in der Schule aber wahrscheinlich nicht durchgeführt werden kann.

Validität ist gegeben, wenn die ausgearbeiteten Beobachtungskategorien auch tatsächlich das erfassen, was man zu messen wünscht. Sie wird also vor allem durch die Untersuchungsmethodik bestimmt.
Bei der Spielerbeobachtung im Basketball soll das Zusammenspiel zweier Teammitglieder anhand der 2-2 Spielzüge Give & Go und Block analysiert werden. Es liegt nahe, alle Sachverhalte, die im unmittelbaren Zusammenhang mit den genannten 2-2 Spielzügen stehen, aufzuzeichnen. Sofern alle möglichen Indikatoren und Beobachtungskategorien zur Messung aller Variablen berücksichtigt wurden ist die Validität der Beobachtung also gegeben.
Schwierig wird die Überprüfung der Validität der Auswertung, da ohne Durchführung der Untersuchung in der Praxis nicht klar ist, ob die einzelnen Beobachtungskategorien richtig gewertet wurden und der U-Test und der Wilcoxon-Rangsummentest die geeigneten Verfahren zur Bestimmung eines Zusammenhangs von Training und Zusammenspiel im Team sind.

Laut Wagner und Willimczik (in Singer und Willimczik, 2002, S. 193) ist die Erfüllung der Nebengütekriterien bei der Beobachtung nur teilweise oder gar nicht gegeben.
Aus diesem Grund erscheint genaues Arbeiten bei der Konzeption und Durchführung der Beobachtung als unerlässliche Voraussetzung für die Gültigkeit der Untersuchung.

Neben den Gütekriterien gilt es, alle in 6.3 und 6.4 beschriebenen Forderungen während des Forschungsprozesses immer wieder zu überprüfen, denn wenn einmal unordentlich gearbeitet wird, Definitionen oder Hypothesen unklar formuliert werden, das Experiment falsch geplant wird, o. ä., so zieht sich dieser Fehler bis ans Ende der Untersuchung und kann dann kaum oder gar nicht mehr rückgängig gemacht werden.
Im Folgenden sollen dazu einige wichtige Fragen genannt werden, die laut Heinemann (1998, S. 135) während und nach der Konzeption des Forschungsdesigns beantwortet werden sollen. Diese beinhalten unter anderem einige Punkte zur Überprüfung der Gütekriterien der Untersuchung.

- Ist die Beobachtung dazu geeignet, mit den erfassten Daten Rückschlüsse auf die Variablen zu machen?
- Ist die Voraussetzung gegeben, dass Beobachtungsfehler aufgrund selektiver Wahrnehmung und selektiver Niederschrift so gering wie möglich sind?
- Können Zahl und Ausprägungen der Variablen von den Beobachtern problemlos erfasst werden?

- Wird die Beobachtung den theoretischen Vorstellungen und empirisch Ermittelbarem gerecht?
- Welche Rolle nimmt der Beobachter ein, was sind die Konsequenzen?
- Welche Hilfsmittel sollen eingesetzt werden?

Schluss

Ziel der vorliegenden Diplomarbeit war es, eine Möglichkeit aufzuzeigen, Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie mit verschiedenen Inhalten aus dem Bereich des Sports aufzubereiten.

Einfache graphische Darstellungen wurden kennengelernt, analysiert und hinterfragt (Kapitel 2) um produktives, geistiges Arbeiten und kritisches Denken (vgl. Kapitel 1.4.1) zu fördern, statistische Darstellungs- und Auswertungsverfahren mit MS Excel (Kapitel 3) kennengelernt.

Mit Hilfe grundlegender Kenntnisse aus Wahrscheinlichkeitstheorie (Kapitel 4) und Beurteilender Statistik (Kapitel 5), sowie empirischer Forschung (Kapitel 6.1 bis 6.3), sollte die Basis für die Durchführung (Kapitel 6.4) und Auswertung (Kapitel 6.5) einer Spielerbeobachtung im Basketball geschaffen werden.

Es wurde versucht, mehrere verschiedene Sportarten bei Beispielen und Aufgaben einfließen zu lassen, um den (sportlichen) Interessen möglichst aller Schüler gerecht zu werden und Abwechslung zu bieten.

Den Schülern sollte vor Augen geführt werden, dass sie durch Sport ebenso in Kontakt mit Statistiken kommen, wie in anderen gesellschaftlichen Bereichen.

Über die Messung und Ausarbeitung der Leichtathletik-Fünfkampfdaten hinaus, könnte man Messungen in vielen weiteren Bereichen, aus dem sportlichen Umfeld der Schüler, vornehmen, und diese im Mathematikunterricht statistisch aufbereiten.

So könnten in Schulen mit sportlichem Schwerpunkt, deren Schüler über ein sportwissenschaftliches Grundverständnis über die zugrunde liegenden sportlichen Tests, verfügen, Puls- oder Lactatmessungen, usw. durchgeführt werden.

Ebenso könnten Ausdauer messende Tests wie Conconi- oder Cooper-Test, sportmotorische Tests, Kräftetests, usw. gemacht werden.

In Schulen ohne sportlichen Schwerpunkt bestünde die Möglichkeit, Messungen an der Sportanlage und den Geräten vorzunehmen oder verschiedene sportliche Tests nach Häufigkeiten, Messwerten oder zum Beispiel Rangzahlen auszuwerten.

Zur Umsetzung der genannten Inhalte eignet sich im Prinzip jede Unterrichtsform. Neben der deduktiven Lehrmethode in Form von Frontalunterricht in der Theorie zu Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung sollte die Gruppenarbeit vorherrschend sein.

Die Lehrperson sollte in diesem Fall als eine Art Mentor agieren, der den Schülern bei Fragen mit nützlichen Informationen zur Seite steht und zwischendurch, bei falscher Vorgehensweise der Schüler etwa, kurze theoretische Inputs geben.

Fächerübergreifender Unterricht meint, dass Inhalte aus den Unterrichtsfächern Mathematik, Bewegung und Sport und Sportkunde jeweils in ein anderes Fach übertragen und Verknüpfungen erstellt werden, sodass Schüler ihre Leistungen erfahren und reflektieren können (vgl. Kapitel 1.4).

Unterrichtsstunden können – nach Intensität der Zusammenarbeit betreffender Lehrer - zusammengelegt werden. Je nach Schwerpunkt ihrer Unterrichtsfächer sind die jeweiligen Lehrer für die Vermittlung der Theorie verantwortlich.

Während der Mathematiklehrer vorrangig Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie unterrichten wird, könnte der Sport- oder Sportkundelehrer den Schülern die Grundlagen empirischer Forschung, sowie den Basketball spezifischen Teil (Kapitel 6.2, Anhang 5 und 6), in Zusammenarbeit mit dem Basketball-Trainer der Schule, näher bringen.

Als zentrale Problemstellung kann die fehlende Anwendung der Ausarbeitungen in der Praxis angesehen werden, die zur Überprüfung der Gültigkeit von Aussagen und Anwendungen statistischer Tests nötig wären. So können nur Vermutungen über das Funktionieren dieser Unterrichtsinhalte und –formen angestellt werden (siehe Kapitel 6.4.6.3 und 6.4.7).

Die Durchführung der Spielerbeobachtung im Basketball mit einer Gruppe von Schülern gestaltet sich in der Praxis bestimmt nicht als einfach. Es müssen viele Voraussetzungen geschaffen, Vorbereitungen und Entscheidungen getroffen, Erlaubnisse eingeholt werden, usw., die ein enormes Engagement nicht nur seitens der beteiligten Lehrer, sondern auch von den in das Projekt involvierten Schülern, erfordern.

Deshalb sei gut überlegt, mit welchen Schülern die Spielerbeobachtung gemacht werden soll oder nicht.

Die vorliegende Arbeit soll Anreiz für junge Lehrer, aber auch für jene höheren Dienstalters, sein, den Mathematikunterricht abwechslungsreich und praxisbezogen zu gestalten.

Alle Ausarbeitungen gelten als Beispiele, die beliebig erweitert, ausgetauscht oder gestrichen werden können. Die Behandlung aller beschriebenen Inhalte, neben Durchführung einer Spielerbeobachtung (wenn diese auch außerhalb des Mathematikunterrichts, im Wahl(pflicht)fach oder Sportkundeunterricht stattfindet), wird im Zuge des normalen Mathematikunterrichts nicht möglich sein, weshalb es abzuschätzen gilt, welche Inhalte aufgrund der Lehrplanbestimmungen durchzunehmen sind, welche sonst von Wichtigkeit erscheinen, und welche eventuell ausgelassen werden können.

Im Laufe der gesammelten Unterrichtsjahre muss ohnehin jeder Lehrer seinen Weg finden.

Anhang

Anhang 1: Biographien

Jakob Bernoulli

- Die Familie Bernoulli

Die Schweizer Familie Bernoulli zählte zu den bedeutendsten der Geschichte, da sie über Generationen hinweg erfolgreiche Wissenschaftler hervorbrachte. Acht von ihnen galten als erfolgreiche Mathematiker, Physiker oder Wissenschaftler anderer naturwissenschaftlicher Gebiete.

Ursprünglich entstammten die Bernoullis einer protestantischen Familie aus den Niederlanden, die während des Befreiungsversuches ihres Heimatlandes nach Deutschland auswanderte. Ein Enkel dieser Familie zog schließlich nach Basel, der zweiten folgenden Generation entstammten die Brüder Nikolaus, Johann und Jakob. Während Nikolaus sich der Kunst verschrieb wandten Johann und Jakob sich der Wissenschaft zu.

Jakob Bernoulli wurde laut Gregorianischem Kalender am 6. Jänner 1655 in Basel geboren. Zu dieser Zeit galt in vielen Regionen jedoch noch der Julianische Kalender, weshalb man sich uneinig über seinen Geburtstag ist. Oft wird auch der 27. Dezember 1654 als sein Geburtstag angegeben.

- Leben und Karriere

Jakob Bernoulli (siehe Abbildung 45) wurde als Sohn des Kaufmannes Niklaus Bernoulli und Margarethe Schönauer geboren. Nach seinem Schulbesuch und dem ersten Unterricht durch seinen Vater wollte dieser, dass sein Sohn Theologie und Philosophie studierte. Bereits im Alter von nur siebzehn Jahren, im Jahre 1671, wurde er Magister der Philosophie, fünf Jahre später machte er seine Abschlussprüfung zum Lizenziat lic. theol.

Abbildung 45: J. Bernoulli (http://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I._Bernoulli)

Er hatte sich zu diesem Zeitpunkt aber bereits der Mathematik und Astronomie verschrieben und sich während seines Studiums selbst mathematische Kenntnisse angeeignet.

Zwischen 1676 und 1689 arbeitete Bernoulli als Hauslehrer in Genf und reiste in der Zeit bis 1682 mehrmals nach Frankreich sowie in die Niederlande, Deutschland und Großbritannien.

Dabei lernte er bereits bedeutende Mathematiker wie J. Hudde und R. Boyle kennen, die ihm halfen, auch später wichtige Kontakte zu knüpfen.
Als er 1683 wieder in seine Heimatstadt Basel zurückkehrte hielt er private Vorlesungen über Experimentalphysik, im Speziellen über Mechanik, an der städtischen Universität. 1687 übernahm er das Amt als Professor für Mathematik an selbiger Universität, das er bis zu seinem Tode ausübte.
In seiner Zeit an der Universität Basel studierte Jakob Bernoulli die Werke von René Descartes, John Wallis und Isaac Barrow und verfasste selbst sechzehn eigenständige Publikationen.

Im Jahre 1684 ehelichte Bernoulli Judith Stupanus, mit der er später zwei Kinder hatte, die im Gegensatz zu den meisten Mitgliedern der Familie Bernoulli sich weder für Mathematik noch Physik interessierten.

- Mathematische Werke

Jakob Bernoulli arbeitete etwa ab 1686 mit der Methode der vollständigen Induktion, untersuchte Potenzreihen unter Zuhilfenahme der heute genannten Bernoulli-Zahlen und galt als Begründer der Wahrscheinlichkeitstheorie (Bernoulli-Verteilung).
Ein Jahr danach bat er Gottfried Wilhelm Leibniz um Erläuterung seiner Arbeit über Infinitesimalrechnungen. Mit Hilfe seines jüngeren Bruders und Schülers Johann Bernoulli, mit dem er sich später zerstritt, bearbeitete er Leibniz´ Werk.
Noch vor 1689 veröffentlichte Jakob Bernoulli zahlreiche, für die Mathematik bedeutsame Arbeiten über Potenzreihen und Wahrscheinlichkeitsrechnung, unter anderem über das Gesetz der großen Zahlen. Anschließend vertiefte er sich in das Gebiet der Variationsrechnung und untersuchte wichtige Kurven und Differentialgleichungen.
Kurz vor der Jahrhundertwende, 1699 wurde Bernoulli als Mitglied in die Pariser Akademie der Wissenschaften, zwei Jahre danach in die von Berlin aufgenommen. In dieser Zeit arbeitete er des Öfteren mit Leibniz zusammen.

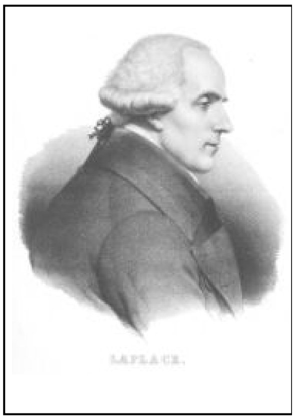
In der Zeit von 1699 bis 1704 schrieb er Abhandlungen über die Lehre von Reihen, überarbeitete Descartes Werk Geometrica und verfasste zahlreiche weitere mathematische Artikel. Als sein bedeutendstes Werk zählt die Ars Conjectandi, die erst 1713, acht Jahre nach seinem Tode, veröffentlicht wurde. In diesem Buch fasste Bernoulli wichtige Werke anderer Wissen-

schaftler über die Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammen und entwickelte sie weiter. Darin enthalten sind neben den Bernoulli-Zahlen Strategien, diverse Glücksspiele zu gewinnen.
Die logarithmische Spirale galt als eines von Bernoullis „Lieblingsspielzeugen“, weshalb es sein Wunsch war, dass eine solche seinen Grabstein zieren sollte. Der zuständige Steinmetz fertigte nach Bernoullis Tode am 16. August 1705 in Basel aber eine archimedische Spirale an, wahrscheinlich aus Unwissenheit oder Bequemlichkeit. Die Spirale kann heute noch im Münster zu Basel besichtigt werden.

Das folgende, von Bernoulli stammende Zitat soll zum Schluss noch in den Raum gestellt werde: „Jede Wissenschaft bedarf der Mathematik, die Mathematik bedarf keiner."

Pierre Simon Laplace

- Leben und Karriere



Pierre Simon Marquis de Laplace (Abbildung 46) wurde am 28. März 1749 in Beaumont-en-Auge in der französischen Normandie als Sohn eines reichen Landwirtes und Händlers geboren. Nach der Schule schlugen Kinder dieses Standes üblicherweise einen kirchlichen oder militärischen Weg ein, Laplaces Vater wollte jedoch, dass er eine geistliche Ausbildung machte. Deshalb studierte er (ebenso wie Jakob Bernoulli) ab 1765 Theologie und Philosophie am Jesuitenkolleg in Marseille.

Abbildung 46: P. S. Laplace (http://de.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_Laplace)

Bereits während seiner Zeit in Marseille erschienen seine ersten mathematischen Publikationen, die inhaltliche Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelten. In der Zeit danach knüpfte er mit seinen Werken an die Erkenntnisse von Bernoulli, Moivre, Bayes und d´Alembert an.
Am Jesuitenkolleg lernte Laplace Christoph Gadblet und Pierre Le Cano, zwei Professoren, kennen, die seine mathematische Begabung erkannten und förderten. Aus diesem Grund verließ Laplace 1768 Marseille und ging, mit einem Empfehlungsschreiben der beiden Professoren, die mittlerweile zu seinen Freunden zählten, zu dem damals bekanntesten französischen Mathematiker Jardin Baptiste le Rond d´Alembert nach Paris, um bei eben diesem Mathematik zu studieren.

Erzählungen nach wollte der berühmte Mathematiker Laplace eine Chance geben und stellte ihn vor die Aufgabe, ein mathematisches Problem innerhalb einer Woche zu lösen. Nachdem Laplace die Lösung bereits am Tag danach vorlegen konnte war d´Alembert skeptisch und gab ihm eine noch viel schwierigere Aufgabe, die jedoch in der gleichen Zeit gelöst werden konnte. So konnte der berühmte Mathematiker überzeugt werden und bot Laplace nicht nur seine Unterstützung im Studium an, sondern verschaffte ihm 1771 auch eine Stelle als Lehrer für Geometrie, Trigonometrie, elementare Analysis und Statistik an der Militärakademie in Paris.

In den Jahren von 1770 bis 1773 verfasste Laplace bereits 13 bedeutende Abhandlungen zu Themen der Extremwertprobleme, Differential- und Integralrechnung, Astromechanik und Wahrscheinlichkeits- und Spieltheorie. Mit diesen Schriften bewarb er sich 1771 und 1772 an der Pariser Académie des sciences, wurde jedoch abgelehnt und älteren Bewerbern der Vortritt gegeben.

Obwohl ihn dies sehr enttäuschte, gab er nicht auf und wurde schließlich 1773 als Adjunkt an der Académie francaise aufgenommen, wo er sein wissenschaftliches Ansehen enorm steigern konnte, sich aber teilweise unbeliebt unter seinen Kollegen machte. Auch das einst so freundschaftliche Verhältnis zu Jardin Baptiste le Rond d´Alembert litt darunter, weil er Teile seines Lebenswerkes widerlegte.

1784 erlangte Pierre Simon Laplace einen sehr einflussreichen Posten als Examinateur für die königliche Artillerie, wo er zum Beispiel auch Napoléon Bonaparte prüfte.

Seine Berichte fanden Beachtung an höchsten Stellen und so wurde er im April 1785 ordentliches Mitglied an der Académie des sciences.

- Familie und Politik

Laplace heiratete 1788 die um 20 Jahre jüngere Marie-Charlotte de Courty de Romanges. Sie hatten zwei Kinder, Sohn Charles-Emile, der später eine militärische Laufbahn einschlug und General wurde und Tochter Sophie-Suzanne.

1792 wurde Pierre Simon Laplace Mitglied des Komitees für Maße und Gewichte, das in späterer Zeit die heutigen Einheiten Kilogramm und Meter einführte.

Der Mathematiker konnte seine Forschungen während der französischen Revolution weiterführen, floh mit seiner Familie dann aber doch in das außerhalb von Paris liegende Melun, da unter der Herrschaft Robespierres Mitwirkung an der Revolution gefordert war.

Robespierre wurde Mitte 1794 jedoch durch die Guillotine ermordet, sodass Laplace und seine Familie wieder nach Paris zurück kehrten. In Folge dessen nahm er seinen Beruf im Komitee für Maße und Gewichte wieder auf und übernahm den Vorsitz.
Etwa zur gleichen Zeit wurde die Académie des sciences neu gegründet, Laplace war nicht nur Gründungsmitglied deren Dachorganisation Institut de France, sondern wurde innerhalb kürzester Zeit zum Präsidenten gewählt. Außerdem leitete er das Pariser Observatorium und dessen Forschungsbereich.

Nach Napoléons Staatsstreich im Jahre 1799 wurde Laplace Innenminister Frankreichs, verstand diese Art der Arbeit jedoch weniger gut, sodass er bereits nach wenigen Wochen wieder seines Amtes enthoben wurde. Sozusagen als Trost wurde er Mitglied des Senats, 1803 dessen Vizepräsident und damit ein reicher Mann. Als er Napoléon bei der Wahl zum Kaiser unterstützte ernannte dieser ihn zum Grafen.

Zusammen mit dem Chemiker Claude-Louis Berthollet gründete Laplace die Société d´Arceuil, in der sie zusammen mit anderen, zumeist recht jungen Wissenschaftlern Experimente durchführten.
Da die Inhalte Laplaces Forschungsprogramms aber vor allem seine eigenen Forschungsschwerpunkte waren, er weiter an seiner Teilchentheorie des Lichtes festhielt, obwohl die Wellentheorie (A. J. Fresnel) wesentlich mehr Anerkennung bekam und er 1814 für die Absetzung Napoléons stimmte, schaffte er sich viele Feinde und verlor letztendlich auch seine letzten politischen Freunde.
Weil er immer auf Seiten der Mächtigen stand, wurde Laplace nach seinem Tode am 5. März 1827 in Paris nicht im Pantheon, sondern auf dem Pariser Friedhof beigesetzt. Er wurde jedoch namentlich auf dem Eiffelturm verewigt.

- Mathematische Werke

Laplaces bedeutendste Werke liegen auf dem Gebiet der Astronomie, im Speziellen in der Astromechanik. Sein Hauptwerk, in dem er Newtons Erkenntnisse nicht nur beschreibt sondern auch vollendet, erschien im Deutschen unter dem Namen Himmelsmechanik und ist noch heute gültig. Es wurde lediglich durch neue Erkenntnisse und Methoden erweitert. Trotz seiner schweren Lesbarkeit und Verständlichkeit wurde es zur Pflichtlektüre angehender Astronomen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung galt als das zweite wichtige Forschungsgebiet des französischen Mathematikers, da sie für ihn einen Weg darstellte, trotz mangelnder Kenntnisse zu gewissen Resultaten und Lösungen zu gelangen. In seiner Théorie Analytique des Probabilités, veröffentlicht 1812, findet sich die Laplace´sche Wahrscheinlichkeits-definition, Erkenntnisse zu Erwartungswerten sowie abhängigen und unabhängigen Ereignissen, vor allem Glücksspiele betreffend.

Mit diesem zweibändigen Werk widerlegte er die These, die von zahlreichen Mathematikern dieser Zeit, unter anderem auch von seinem ehemaligen Professor Baptiste le Rond d´Alembert vertreten wurde, dass Wahrscheinlichkeiten nicht streng mathematisch behandelt werden könnten.

Zeit seines Lebens war Pierre Simon Laplace mehr Physiker als Mathematiker, die Mathematik diente ihm mehr als Mittel zum Zweck. Trotzdem gelten die mathematischen Verfahren, die er entwickelte als bedeutende Werke.

Anhang 2: Merkblatt beschreibende Statistik

Was du immer wissen sollst!

Die **absolute Häufigkeit *h*** gibt darüber Auskunft, wie oft ein bestimmtes Ereignis in einer Beobachtungsserie auftritt.

Die **relative Häufigkeit *r*** = $\frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Stichprobenumfang}} = \frac{h}{n}$

Die **prozentuelle Häufigkeit** gibt die Häufigkeit in Prozent an.

Mittelwert (arithm. Mittel) = $\frac{\text{Summe der Einzelwerte}}{\text{Anzahl der Einzelwerte}} = \bar{x} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Bei der Ermittlung des arithmetischen Mittels von Werten muss man die Häufigkeiten (Gewichte) gleicher Werte berücksichtigen. Man nennt das **gewogenes Mittel**:

$$\bar{x} = \frac{x_1.h_1+ x_2.h_2+\ldots+x_m.h_m}{n} = x_1.r_1+ x_2.r_2+\ldots+x_m.r_m$$

Standardabweichung oder **Streuung** aller Werte um ihren Mittelwert $\bar{x}$:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2.h_1+(x_2-\bar{x})^2.\ h_2+...+(x_m-\bar{x})^2.\ h_m}{n-1}}$$

Vielfach verbindet man in einem Stabdiagramm die Endpunkte der Strecken. Man spricht dann von einem **Polygonbild**.

Der **Median** (Zentralwert) steht in der Mitte einer Rangliste. Er teilt die Rangliste in eine obere und eine untere Hälfte.

Der **Modus** (Modalwert) ist der am häufigsten vorkommende Wert in einer Messreihe. Es kann auch mehr als einen Modus geben!

Das **Maximum** $x_{\max}$ ist der größte Wert einer Datenmenge, das **Minimum** $x_{\min}$ der kleinste.

Die **Spannweite einer Stichprobe *R***: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Die **mittlere Abweichung einer Stichprobe** gibt an, wie weit im Mittel die Einzelwerte vom Zentrum entfernt sind. Man spricht dabei auch von Streuung.

$$\text{Mittlere Abweichung} = \frac{\text{Summe aller Abweichungen vom Mittelwert}}{\text{Anzahl aller Abweichungen vom Mittelwert}}$$

Die mittlere quadratische Abweichung vom arithmetischen Mittel der einzelnen Beobachtungen wird als **Varianz** bezeichnet:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Anhang 3: Gruppenarbeit - Datenverarbeitung eines Fünfkampfes

Schon vor oder während der Wiederholung der Deskriptiven Statistik sollen im Zuge des Sportunterrichts Daten eines Fünfkampfes erhoben werden. Gemessen werden Weiten, Höhen und Zeiten im 100m- und 800m- Lauf, im Weit- und Hochsprung sowie im Kugelstoß. Für die Datenbearbeitung ziehen wir den jeweils besten Wert in der jeweiligen Disziplin jedes einzelnen Schülers heran. All diese Werte sollten von dem jeweiligen Sportlehrer in Tabellenform (siehe nächste Seite) zur Verfügung gestellt werden. Anschließend sollen die Schüler in Gruppen ihre eigenen Daten bearbeiten und präsentieren.
Ziel dieser Aufgabe ist die Wiederholung, Anwendung und Verinnerlichung der Methoden und Formeln aus der beschreibenden Statistik.
Die folgenden Seiten beinhalten Kopiervorlagen für die Gruppenarbeit. Aufgrund der fünf verschiedenen Disziplinen empfiehlt sich eine Aufteilung in fünf Gruppen, bei größerer Schülerzahl können die einzelnen Disziplinen natürlich auch doppelt bearbeitet werden.

Die folgenden Beispiele sollen in der Zeit der nächsten beiden Mathematikstunden, von denen die erste im Klassenzimmer, die zweite im PC- Raum stattfinden soll, in der Gruppe bearbeitet und gelöst werden. In einer darauffolgenden dritten Stunde werden die unterschiedlichen Ergebnisse und Erkenntnisse präsentiert.
Jeder Schüler notiert alle Gedanken und Ideen, die am Ende der Gruppenarbeit, gemeinsam mit der Präsentation in Form eines Arbeitsprotokolls abgegeben werden. Das Arbeitsprotokoll enthält also alle wichtigen Schritte im Gruppenprozess (Erkenntnisse, Ideen, (auch falsche) Ansätze), sowie die Lösungen der Aufgaben.

Tabelle 49: Einzelleistungen der SchülerInnen

Name	100m	800m	Weitsprung	Hochsprung	Kugelstoß

Liebe SchülerInnen!

Die Aufgaben, die schriftlich zu bearbeiten sind, werden mit einem „S“, diejenigen, die direkt am PC zu bearbeitet sind werden mit einem „C“ gekennzeichnet.

S1: Trennt die 100m-Daten nach Geschlechtern. Erstellt für beide Geschlechter ein Säulendiagramm, berechnet die arithmetischen Mittelwerte und zeichnet sie in den Diagrammen als waagrechte Linie ein. Welche Linie wird höher sein? Die der Mädchen oder die der Jungen? Wird eure Vermutung bestätigt?

S2: Teilt die Gesamtmenge aller 100m-Daten in geeignete Klassen ein und erstellt anschließend ein Histogramm. Notiert die einzelnen Schritte eurer Vorgehensweise.
Diskutiert, ob die Erstellung eines Prozentkreises zu diesem Beispiel sinnvoll ist!

S/C3: Bestimmt, getrennt nach Geschlechtern

- Minimum, Maximum und Spannweite
- Modus und Median
- die mittlere Abweichung.

Anschließend berechnet ihr die gleichen Werte für alle 100m-Daten. Stellt Vergleiche an!
Überprüft eure Ergebnisse durch Eingabe der 100m-Daten in das Excel- Programm.

C4: Kontrolliert durch Erstellung eines Punktwolkendiagramms, ob gute 100m-LäuferInnen auch gute 800m-LäuferInnen sind, bzw. ob schlechte SprinterInnen auch schlechtere Leistungen über die 800m Distanz zeigen.

C5: Erstellt zu euren Aufgaben eine kurze Präsentation (ca. 10min) sowie ein einseitiges Hand-out, in denen ihr eure MitschülerInnen über eure wesentlichsten Erkenntnisse informiert!

Viel Erfolg! ☺

Liebe SchülerInnen!

Die Aufgaben, die schriftlich zu bearbeiten sind, werden mit einem „S“, diejenigen, die direkt am PC zu bearbeitet sind werden mit einem „C“ gekennzeichnet.

S1: Trennt die Hochsprung-Daten nach Geschlechtern. Erstellt für beide Geschlechter ein Säulendiagramm, berechnet die arithmetischen Mittelwerte und zeichnet sie in den Diagrammen als waagrechte Linie ein. Welche Linie wird höher sein? Die der Mädchen oder die der Jungen? Wird eure Vermutung bestätigt?

S2: Teilt die Gesamtmenge aller Hochsprung-Daten in geeignete Klassen ein und erstellt anschließend ein Histogramm. Notiert die einzelnen Schritte eurer Vorgehensweise.
Diskutiert, ob die Erstellung eines Prozentkreises zu diesem Beispiel sinnvoll ist!

S/C3: Bestimmt, getrennt nach Geschlechtern

- Minimum, Maximum und Spannweite
- Modus und Median
- die mittlere Abweichung

Anschließend berechnet ihr die gleichen Werte für alle Hochsprung-Daten. Stellt Vergleiche an!
Überprüft eure Ergebnisse durch Eingabe der Hochsprung-Daten in das Excel- Programm.

C4: Kontrolliert durch Erstellung eines Punktwolkendiagramms, ob gute HochspringerInnen auch gute WeitspringerInnen sind, bzw. ob schlechte HochspringerInnen auch schlechtere Leistungen beim Weitsprung zeigen.

C5: Erstellt zu euren Aufgaben eine kurze Präsentation (ca. 10min) sowie ein einseitiges Hand-out, in denen ihr eure MitschülerInnen über eure wesentlichsten Erkenntnisse informiert!

Viel Erfolg! ☺

Liebe SchülerInnen!

Die Aufgaben, die schriftlich zu bearbeiten sind, werden mit einem „S“, diejenigen, die direkt am PC zu bearbeitet sind werden mit einem „C“ gekennzeichnet.

S1: Trennt die Weitsprung-Daten nach Geschlechtern. Erstellt für beide Geschlechter ein Säulendiagramm, berechnet die arithmetischen Mittelwerte und zeichnet sie in den Diagrammen als waagrechte Linie ein. Welche Linie wird höher sein? Die der Mädchen oder die der Jungen? Wird eure Vermutung bestätigt?

S2: Teilt die Gesamtmenge aller Weitsprung-Daten in geeignete Klassen ein und erstellt anschließend ein Histogramm. Notiert die einzelnen Schritte eurer Vorgehensweise.
Diskutiert, ob die Erstellung eines Prozentkreises zu diesem Beispiel sinnvoll ist!

S/C3: Bestimmt, getrennt nach Geschlechtern

- Minimum, Maximum und Spannweite
- Modus und Median
- die mittlere Abweichung

Anschließend berechnet ihr die gleichen Werte für alle Weitsprung-Daten. Stellt Vergleiche an! Überprüft eure Ergebnisse durch Eingabe der Weitsprung-Daten in das Excel- Programm.

C4: Kontrolliert durch Erstellung eines Punktwolkendiagramms, ob gute WeitspringerInnen auch gute 100m-LäuferInnen sind, bzw. ob schlechte WeitspringerInnen auch schlechtere Leistungen über die 100m Distanz zeigen.

C5: Erstellt zu euren Aufgaben eine kurze Präsentation (ca. 10min) sowie ein einseitiges Hand-out, in denen ihr eure MitschülerInnen über eure wesentlichsten Erkenntnisse informiert!

Viel Erfolg! ☺

Liebe SchülerInnen!

Die Aufgaben die schriftlich zu bearbeiten sind, werden mit einem „S“, diejenigen, die direkt am PC zu bearbeitet sind werden mit einem „C“ gekennzeichnet.

S1: Trennt die Kugelstoß-Daten nach Geschlechtern. Erstellt für beide Geschlechter ein Säulendiagramm, berechnet die arithmetischen Mittelwerte und zeichnet sie in den Diagrammen als waagrechte Linie ein. Welche Linie wird höher sein? Die der Mädchen oder die der Jungen? Wird eure Vermutung bestätigt?

S2: Teilt die Gesamtmenge aller Kugelstoß-Daten in geeignete Klassen ein und erstellt anschließend ein Histogramm. Notiert die einzelnen Schritte eurer Vorgehensweise.
Diskutiert, ob die Erstellung eines Prozentkreises zu diesem Beispiel sinnvoll ist!

S/C3: Bestimmt, getrennt nach Geschlechtern

- Minimum, Maximum und Spannweite
- Modus und Median
- die mittlere Abweichung

Anschließend berechnet ihr die gleichen Werte für alle Kugelstoß-Daten. Stellt Vergleiche an!
Überprüft eure Ergebnisse durch Eingabe der Kugelstoß-Daten in das Excel- Programm.

C4: Kontrolliert durch Erstellung eines Punktwolkendiagramms, ob gute KugelstoßerInnen auch gute HochspringerInnen sind, bzw. ob schlechte KugelstoßerInnen auch schlechtere Leistungen im Hochsprung zeigen.

C5: Erstellt zu euren Aufgaben eine kurze Präsentation (ca. 10min) sowie ein einseitiges Hand-out, in denen ihr eure MitschülerInnen über eure wesentlichsten Erkenntnisse informiert!

Viel Erfolg! ☺

Liebe SchülerInnen!

Die Aufgaben, die schriftlich zu bearbeiten sind, werden mit einem „S“, diejenigen, die direkt am PC zu bearbeitet sind werden mit einem „C“ gekennzeichnet.

S1: Trennt die 800m-Daten nach Geschlechtern. Erstellt für beide Geschlechter ein Säulendiagramm, berechnet die arithmetischen Mittelwerte und zeichnet sie in den Diagrammen als waagrechte Linie ein. Welche Linie wird höher sein? Die der Mädchen oder die der Jungen? Wird eure Vermutung bestätigt?

S2: Teilt die Gesamtmenge aller 800m-Daten in geeignete Klassen ein und erstellt anschließend ein Histogramm. Notiert die einzelnen Schritte eurer Vorgehensweise.
Diskutiert, ob die Erstellung eines Prozentkreises zu diesem Beispiel sinnvoll ist!

S/C3: Bestimmt, getrennt nach Geschlechtern

- Minimum, Maximum und Spannweite
- Modus und Median
- die mittlere Abweichung

Anschließend berechnet ihr die gleichen Werte für alle 800m-Daten. Stellt Vergleiche an!
Überprüft eure Ergebnisse durch Eingabe der 800m-Daten in das Excel- Programm.

C4: Kontrolliert durch Erstellung eines Punktwolkendiagramms, ob gute 800m-LäuferInnen auch gute KugelstoßerInnen sind, bzw. ob schlechte 800m-LäuferInnen auch schlechtere Leistungen beim Kugelstoß zeigen.

C5: Erstellt zu euren Aufgaben eine kurze Präsentation (ca. 10min) sowie ein einseitiges Hand-out, in denen ihr eure MitschülerInnen über eure wesentlichsten Erkenntnisse informiert!

Viel Erfolg! ☺

Anhang 4: Tabellen

Tabelle 50: Verteilungsfunktion *Φ(z)* der Standardnormalverteilung (Bosch, 1996, S. 544)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,0177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabelle 51: Binomialverteilung für n=10, P(X = k) (Bürger et al., 1991, S. 333)

p \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0,01	0,904	0,091	0,004									0,99
0,02	0,817	0,167	0,015	0,001								0,98
0,05	0,599	0,315	0,075	0,011								0,95
0,10	0,349	0,387	0,194	0,057	0,011							0,90
0,15	0,197	0,347	0,276	0,130	0,040	0,008	0,001					0,85
0,20	0,107	0,268	0,302	0,201	0,088	0,026	0,006	0,001				0,80
0,25	0,056	0,188	0,282	0,250	0,146	0,058	0,016	0,003				0,75
0,30	0,028	0,121	0,233	0,267	0,200	0,103	0,037	0,009	0,001			0,70
0,35	0,014	0,073	0,176	0,252	0,238	0,154	0,069	0,021	0,004	0,001		0,65
0,40	0,006	0,040	0,121	0,215	0,251	0,201	0,111	0,043	0,011	0,002		0,60
0,45	0,003	0,021	0,076	0,166	0,238	0,234	0,160	0,075	0,023	0,004		0,55
0,50	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001	0,50
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	k \ p

Keine Eintragung bedeutet 0,000.

Tabelle 52: Binomialverteilung für n=10, P(X ≤ k), P(X ≥ k) (Bürger et al., 1991, S. 333)

P (H ≤ k)

p \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0,01	0,904	0,996	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,99
0,02	0,817	0,984	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,98
0,05	0,599	0,914	0,988	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,95
0,10	0,349	0,736	0,930	0,987	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,90
0,15	0,197	0,544	0,820	0,950	0,990	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,85
0,20	0,107	0,376	0,678	0,879	0,967	0,994	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	0,80
0,25	0,056	0,244	0,526	0,776	0,922	0,980	0,996	1,000	1,000	1,000	1,000	0,75
0,30	0,028	0,149	0,383	0,650	0,850	0,953	0,989	0,998	1,000	1,000	1,000	0,70
0,35	0,014	0,086	0,262	0,514	0,751	0,905	0,974	0,995	0,999	1,000	1,000	0,65
0,40	0,006	0,046	0,167	0,382	0,633	0,834	0,945	0,988	0,998	1,000	1,000	0,60
0,45	0,003	0,023	0,100	0,266	0,504	0,738	0,898	0,973	0,995	1,000	1,000	0,55
0,50	0,001	0,011	0,055	0,172	0,377	0,623	0,828	0,945	0,989	0,999	1,000	0,50
0,55		0,005	0,027	0,102	0,262	0,496	0,734	0,900	0,977	0,997	1,000	0,45
0,60		0,002	0,012	0,055	0,166	0,367	0,618	0,833	0,954	0,994	1,000	0,40
0,65		0,001	0,005	0,026	0,095	0,249	0,486	0,738	0,914	0,987	1,000	0,35
0,70			0,002	0,011	0,047	0,150	0,350	0,617	0,851	0,972	1,000	0,30
0,75				0,004	0,020	0,078	0,224	0,474	0,756	0,944	1,000	0,25
0,80				0,001	0,006	0,033	0,121	0,322	0,624	0,893	1,000	0,20
0,85					0,001	0,010	0,050	0,180	0,456	0,803	1,000	0,15
0,90						0,002	0,013	0,070	0,264	0,651	1,000	0,10
0,95							0,001	0,012	0,086	0,401	1,000	0,05
0,98								0,001	0,016	0,183	1,000	0,02
0,99									0,004	0,096	1,000	0,01
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	k \ p

Keine Eintragung bedeutet 0,000.

P (H ≥ k)

Tabelle 53: Binomialverteilung für n=20, P(X = k) (Bürger et al., 1991, S. 334)

p \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0,01	0,818	0,165	0,016	0,001																		0,99
0,02	0,668	0,272	0,053	0,006	0,001																	0,98
0,05	0,358	0,377	0,189	0,060	0,013	0,002																0,95
0,10	0,122	0,270	0,285	0,190	0,090	0,032	0,009	0,002														0,90
0,15	0,039	0,137	0,229	0,243	0,182	0,103	0,045	0,016	0,005	0,001												0,85
0,20	0,012	0,058	0,137	0,205	0,218	0,175	0,109	0,055	0,022	0,007	0,002											0,80
0,25	0,003	0,021	0,067	0,134	0,190	0,202	0,169	0,112	0,061	0,027	0,010	0,003	0,001									0,75
0,30	0,001	0,007	0,028	0,072	0,130	0,179	0,192	0,164	0,114	0,065	0,031	0,012	0,004	0,001								0,70
0,35		0,002	0,010	0,032	0,074	0,127	0,171	0,184	0,161	0,116	0,069	0,034	0,014	0,005	0,001							0,65
0,40			0,003	0,012	0,035	0,075	0,124	0,166	0,180	0,160	0,117	0,071	0,036	0,015	0,005	0,001						0,60
0,45			0,001	0,004	0,014	0,037	0,075	0,122	0,162	0,177	0,159	0,119	0,073	0,037	0,015	0,005	0,001					0,55
0,50				0,001	0,005	0,015	0,037	0,074	0,120	0,160	0,176	0,160	0,120	0,074	0,037	0,015	0,005	0,001				0,50
	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	k \ p

Keine Eintragung bedeutet 0,000.

Tabelle 54: Binomialverteilung für n=20, P(X ≤ k), P(X ≥ k) (Bürger et al. (1991, S. 334)

P (H ≤ k)

p \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
0,01	0,818	0,983	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,99
0,02	0,668	0,940	0,993	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,98
0,05	0,358	0,736	0,925	0,984	0,997	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,95
0,10	0,122	0,392	0,677	0,867	0,957	0,989	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,90
0,15	0,039	0,176	0,405	0,648	0,830	0,933	0,978	0,994	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,85
0,20	0,012	0,069	0,206	0,411	0,630	0,804	0,913	0,968	0,990	0,997	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,80
0,25	0,003	0,024	0,091	0,225	0,415	0,617	0,786	0,898	0,959	0,986	0,996	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,75
0,30	0,001	0,008	0,036	0,107	0,238	0,416	0,608	0,772	0,887	0,952	0,983	0,995	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,70
0,35		0,002	0,012	0,044	0,118	0,245	0,417	0,601	0,762	0,878	0,947	0,980	0,994	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,65
0,40		0,001	0,004	0,016	0,051	0,126	0,250	0,416	0,596	0,755	0,872	0,943	0,979	0,994	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,60
0,45			0,001	0,005	0,019	0,055	0,130	0,252	0,414	0,591	0,751	0,869	0,942	0,979	0,994	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,55
0,50				0,001	0,006	0,021	0,058	0,132	0,252	0,412	0,588	0,748	0,868	0,942	0,979	0,994	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	0,50
0,55					0,001	0,006	0,021	0,058	0,131	0,249	0,409	0,586	0,748	0,870	0,945	0,981	0,995	0,999	1,000	1,000	1,000	0,45
0,60						0,001	0,006	0,021	0,057	0,128	0,245	0,404	0,584	0,750	0,874	0,949	0,984	0,996	0,999	1,000	1,000	0,40
0,65							0,001	0,006	0,020	0,053	0,122	0,238	0,399	0,583	0,755	0,882	0,956	0,988	0,998	1,000	1,000	0,35
0,70								0,001	0,005	0,017	0,048	0,113	0,228	0,392	0,584	0,762	0,893	0,965	0,992	0,999	1,000	0,30
0,75									0,001	0,004	0,014	0,041	0,102	0,214	0,383	0,585	0,775	0,909	0,976	0,997	1,000	0,25
0,80										0,001	0,003	0,010	0,032	0,087	0,196	0,370	0,589	0,794	0,931	0,988	1,000	0,20
0,85												0,001	0,006	0,022	0,067	0,170	0,352	0,595	0,824	0,961	1,000	0,15
0,90														0,002	0,011	0,043	0,133	0,323	0,608	0,878	1,000	0,10
0,95																0,003	0,016	0,076	0,264	0,642	1,000	0,05
0,98																	0,001	0,007	0,060	0,332	1,000	0,02
0,99																		0,001	0,017	0,182	1,000	0,01
	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	k \ p

Keine Eintragung bedeutet 0,000.

P (H ≥ k)

Tabelle 55: Kritische Werte von U für den einseitigen Test mit α = 0,05 bzw. α = 0,01 (Hochstädter, 1996, S. 672)

n_A / n_B	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	1\4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6	2	3\7	8	10	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7	3	4	6\11	13	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8	4	6	7	9\15	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9	5	7	9	11	14\21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10	6	8	11	13	16	19\27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11	7	9	12	15	18	22	25\34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12	8	11	14	17	21	24	28	31\42	47	51	55	60	64	68	72	77
13	9	12	16	20	23	27	31	35	39\51	56	61	65	70	75	80	84
14	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47\61	66	71	77	82	87	92
15	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56\72	77	83	88	94	100
16	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66\83	89	95	101	107
17	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77\96	102	109	115
18	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88\109	116	123
19	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101\123	130
20	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	104\138

Tabelle 56: Kritische Werte von U für den zweiseitigen Test mit α = 0,05 bzw. α = 0,01 (Hochstädter, 1996, S. 672)

n_A / n_B	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	0\2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	1	2\5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	1	3	4\8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	2	4	6	7\13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	3	5	7	9	11\17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	4	6	9	11	13	16\23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	5	7	10	13	16	18	21\30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	6	9	12	15	18	21	24	27\37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	7	10	13	17	20	24	27	31	34\45	50	54	59	63	67	72	76
14	7	11	15	18	22	26	30	34	38	42\55	59	64	69	74	78	83
15	8	12	16	20	24	29	33	37	42	46	51\64	70	75	80	85	90
16	9	13	18	22	27	31	36	41	45	50	55	60\75	81	86	92	98
17	10	15	19	24	29	34	39	44	49	54	60	65	70\87	93	99	105
18	11	16	21	26	31	37	42	47	53	58	64	70	75	81\99	106	112
19	12	17	22	28	33	39	45	51	57	63	69	74	81	87	93\113	119
20	13	18	24	30	36	42	48	54	60	67	73	79	86	92	99	105\127

Die Werte über der Hauptdiagonalen stehen für α = 0,05, die Werte darunter für α = 0,01.

Entlang der Hauptdiagonalen lassen sich die Werte für α = 0,01 \ 0,05 ablesen.

Tabelle 57: Kritische Werte für R im Wilcoxon-Test (Bös et al., 2000, S. 249)

n	Signifikanzniveaus für einseitige Tests		
	.025	.01	.005
	Signifikanzniveaus für zweiseitige Tests		
	.05	.02	.01
6	0	-	-
7	2	0	-
8	4	2	0
9	6	3	2
10	8	5	3
11	11	7	5
12	14	10	7
13	17	13	10
14	21	16	13
15	25	20	16
16	30	24	20
17	35	28	23
18	40	33	28
19	46	38	32
20	52	43	38
21	59	49	43
22	66	56	49
23	73	62	55
24	81	69	61
25	89	77	68

Anhang 5: Grundregeln des Basketballspiels

Hier werden die wichtigsten Regeln genannt, ohne deren Kenntnis es Beobachtern nicht möglich ist, das Spielgeschehen angemessen zu verfolgen und zu protokollieren. Wer Interesse an den aktuellen Wettkampfregeln der amerikanischen NBA (National Basketball Association) hat, wird auf die Homepage verwiesen: http://www.nba.com.

- Spieleranzahl

Während der Spielzeit müssen fünf Spieler jedes Teams am Spielfeld sein. Alle anderen sind Ersatzspieler, die jederzeit ausgewechselt werden können. Ein Ersatzspieler wird zum Spieler, wenn er vom Schiedsrichter zum Betreten des Spielfeldes aufgefordert wird.
Jedem Spieler wird eine bestimmte Position zugewiesen, die üblicherweise von der Körpergröße abhängt. Der Größte spielt normalerweise als Center, mittelgroße Spieler als eine Art Stürmer (engl. „Forwards") und die Kleinsten als Verteidiger.

- Spielzeit

Spielzeiten werden in den verschiedenen Ligen ganz unterschiedlich gehandhabt. Während in der NBA vier Vierteln zu je 12 Minuten mit einer Halbzeitpause von 15 Minuten gespielt werden, gibt es auch im österreichischen Schulcup Vierteln, in denen aber nur fünf Minuten gespielt wird, die Halbzeitpause beträgt ebenso fünf Minuten.

- Sprungball

Jede Halbzeit wird mit einem Sprungball im Mittelkreis zwischen zwei beliebigen Spielern beider Teams begonnen. Dabei wirft der Schiedsrichter den Ball zwischen den beiden Spielern senkrecht nach oben. Bevor die umstehenden Mitspieler den Ball berühren dürfen, muss einer der beiden im Kreis stehenden Spieler den Ball berührt haben.
Ein Sprungball findet außerdem nach einem Halteball statt, das heißt dass zwei Spieler beider Teams Ballkontakt haben, ohne ihn dem Gegenspieler wegnehmen zu können.

- Punkten

Ein Team punktet, wenn es einem Spieler gelingt, den Ball von oben in den Korb zu befördern. Dabei können 1, 2 oder 3 Punkte erzielt werden: kann der Spieler einen Korbwurf außerhalb der 3-Punktelinie verwerten werden 3 Punke gezählt. Findet der Wurf innerhalb dieser Linie statt werden 2 Punkte gewertet. Einen Punkt erzielt man bei einem erfolgreichen Freiwurf.

- Regelübertretung

Von einer Regelübertretung spricht man, wenn ein Spieler sich nicht an die vorgegebenen Spielregeln hält, also zum Beispiel nach einem Dribbling stoppt und das Dribbling danach erneut aufnimmt (Doppeldribbling), Schrittfehler begeht oder den Ball mit zwei Händen dribbelt. Als eine weitere Regelübertretung gilt, den Ball von unten zu führen. Prinzipiell darf der Ball nur mit den Händen gespielt werden. Mit dem Ball in den Händen zu laufen, ihn mit Füßen oder Fäusten zu spielen ist nicht erlaubt und wird ebenso wie oben genannte Aktionen mit Ballverlust bestraft.

- Fouls

Als Fouls gelten alle illegalen Handlungen, die von Spielern eines Teams begangen werden, um dem gegnerischen Team zu schaden oder es von gewissen Aktionen abzuhalten. Basketball ist ein Spiel ohne Körperkontakt. Wird dies missachtet gibt der Schiedsrichter ein Foul.
Man unterscheidet zwei verschiedene Typen von Fouls: Defensivfouls passieren, wenn ein angreifender Spieler von einem Verteidiger geblockt, gehalten oder gestoßen wird, oder aber wenn der Verteidiger beim Versuch, den Angreifer am Werfen oder Passen zu hindern, Arme oder andere Körperteile berührt.
Von einem Offensivfoul spricht man, wenn beispielsweise ein angreifender Spieler in den Verteidiger hineinläuft oder –springt.

- Körperkontakt-Foul

Damit ist der schuldhafte Körperkontakt mit einem oder mehreren Gegenspielern gemeint. Dies kann entweder in der Angriffs- oder Verteidigungsphase, aber auch dazwischen passieren.

Ein Körperkontakt-Foul wird in den Basketballregeln näher erläutert als:

- Blockieren, Sperren, Halten, Stoßen, Rempeln, Beinstellen;
- Behindern der Fortbewegung durch Ausstrecken von Arm, Schulter, Hüfte, Knie;
- Beugen des Körpers in eine andere als die normale Haltung;
- regelwidriger Gebrauch der Hände, Handchecking sowie irgendeine andere rohe Spielweise.

(http://www.bbsr.de/regel/grund/kompakt/regel_zusammenfassung_2000.htm).
Zufällige Körperkontakte sind natürlich nicht zu vermeiden, weshalb nicht alle Kontakte gleich als Foul gelten.

- Strafen

Persönliche Fouls werden dem jeweiligen Spieler im Spielbericht angeschrieben. Beim fünften Foul erfolgt ein Ausschluss vom Spiel, der Spieler darf aber durch einen Auswechselspieler ersetzt werden.
Wird ein Spieler gefoult der im Moment des Fouls nicht auf den Korb wirft, so wird das Spiel auf Höhe des Regelverstoßes durch einen Einwurf des „gefoulten“ Teams fortgesetzt.
Befindet sich der gefoulte Spieler in einer Korbwurfaktion, so erhält er je nach Situation ein bis drei Freiwürfe.
Als Korbwurfaktionen gelten all jene, bei denen der Ball Richtung Korb geworfen oder getippt wird. Kann der Wurf trotz Foul verwertet werden so zählt der Treffer und der Spieler bekommt einen Freiwurf zuerkannt. Ist der Wurf nicht erfolgreich, so darf der gefoulte Spieler je nach Distanz zum Korb zum Zeitpunkt des Fouls zwei oder drei Freiwürfe ausführen: drei wenn das Foul außerhalb der 3-Punkte Linie stattfand, ansonsten zwei.

- Spielen des Balls

Während der Fortbewegung mit dem Ball darf der Ball nur einhändig gedribbelt werden. Die Spielhand darf gewechselt werden und zwischen den Bodenberührungen des Balls dürfen beliebig viele Schritte gemacht werden. Am Anfang eines Dribblings darf das Standbein nicht vom Boden gelöst werden ehe der Ball die Hand verlassen hat. Des Weiteren darf man den Ball nicht „schaufeln“, das heißt die Ballführende Hand muss den Ball immer von oben berühren. Nach Beendigung eines Dribblings darf der Ball nicht erneut gedribbelt werden (Doppelfehler).
Steht ein Spieler mit dem Ball in der Hand so ist seine Bewegungsfreiheit durch die Schrittregel eingeschränkt. Solange der Ball gehalten wird dürfen mit Ausnahme der Sternschrittregelung nur zwei Schritte gemacht werden um anschließend auf den Korb zu werfen oder zu passen.

- Ausball

Der Ball ist im Aus, wenn er die Begrenzungslinie, den Boden, eine Person oder einen Gegenstand außerhalb des Spielfeldes berührt. Danach hat das Team Einwurf, das den Ball nicht ins Aus befördert hat.

- Einwurf

Der Einwurf erfolgt immer von der Stelle, an der der Ball ins Aus gegangen ist, bzw. an der nächsten Stelle außerhalb des Spielfeldes bei der ein Foul begangen wurde. Der Einwurf muss innerhalb fünf Sekunden durchgeführt werden, Gegenspieler müssen einen Meter Abstand vom Einwerfer halten.
Nach einem erfolgreichen Korbwurf wird der Einwurf unterhalb des Korbes durchgeführt.

- Freiwurf

„Der Freiwurf ist ein ungehinderter Wurf des Gegners als Bestrafung eines Fouls, das begangen wurde. Der Freiwerfer darf dabei aber nicht die Freiwurflinie be- oder übertreten, bevor der Ball den Ring berührt hat.“
(http://www.bbsr.de/regel/grund/kompakt/regel_zusammenfassung_2000.htm)
Übertritt der Werfer die Freiwurflinie oder ein Mitspieler die Begrenzungslinie des Freiwurfraumes bevor der Ball Korb, Spielbrett oder Boden berührt, so wird dies mit Ballverlust geahndet. Falls ein Gegenspieler eine Regelübertretung begeht und der Wurf erfolgreich ist so wird dieser auch gewertet. Ist der Wurf erfolglos so darf er wiederholt werden. Begehen Spieler beider Teams Regelübertretungen so läuft das Spiel normal weiter.

- Drei-Sekunden-Regel

Die einzelnen Spieler der angreifenden Mannschaft dürfen sich nicht länger als drei aufeinanderfolgende Sekunden in der gegnerischen Zone (Bereich zwischen Grund- und Freiwurflinie) aufhalten, außer direkt nach einem Wurf oder bei einem Rebound. Bei Regelverletzung gibt es einen Einwurf des gegnerischen Teams.

- Rückspiel

Sobald eine Mannschaft den Ball in ihrem Vorfeld kontrolliert, dürfen weder Ball noch Spieler zurück über die Mittellinie. Geschieht dies doch, so bekommt das Gegnerteam einen Einwurf von der Mittellinie.

Quellen:

http://www.bbsr.de/regel/grund/kompakt/regel_zusammenfassung_2000.htm, http://www.fiba.com/pages/eng/fc/baskBasi/p/openNodeIDs/926/selNodeID/926/basiRule.ht

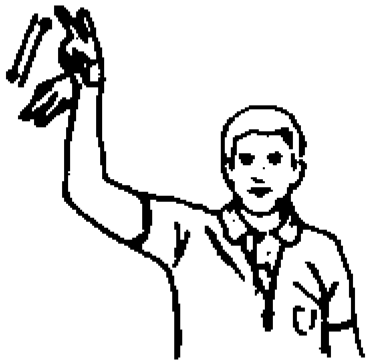
ml,

http://www.nba.com/media/rule_book_2007-08.pdf

Anhang 6: Schiedsrichterzeichen

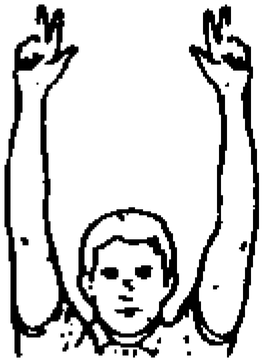
Zwei Punkte Korberfolg

(Ein Finger = 1 Punkt)



Abwärtsschlagen mit dem Handgelenk

Drei Punkte Korberfolg

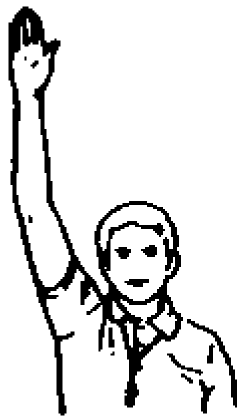


Drei ausgestreckte Finger (Daumen, Zeige- und Mittelfinger)

Ungültiger Korberfolg / Ungültiges Spiel

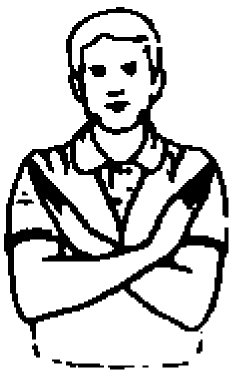
Scherenbewegung der Arme vor dem Körper

Zeit aus



Offene Handfläche, Finger zusammen

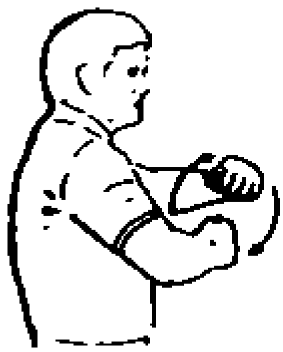
Spielerwechsel



Kreuzen der Unterarme

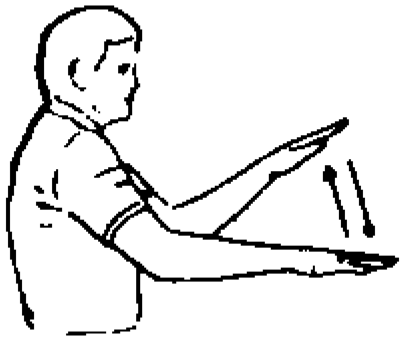
Regelwidriges Dribbeln

Schrittfehler

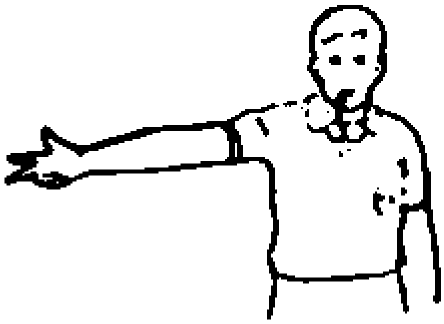


Fäuste umeinander rollen

Verletzung der 3-Sekunden-Regel



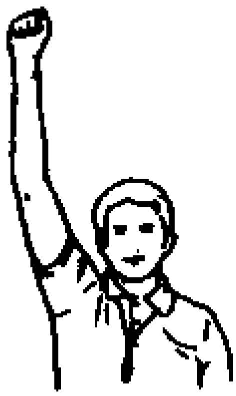
Unterarme auf- und abbewegen



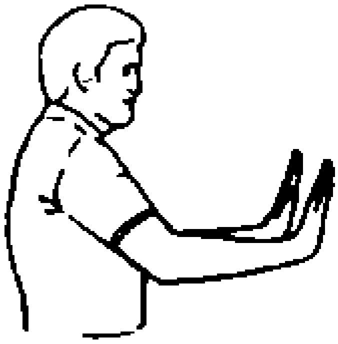
Finger seitwärts

Persönliches Foul

Stoßen



Geschlossene Faust

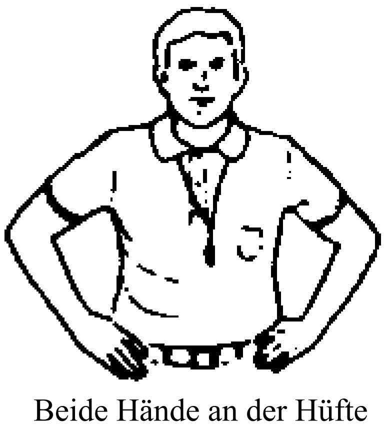


Foulzeichen: Stoßen imitieren

Halten

Blockieren

Foulzeichen: Handgelenk umfassen

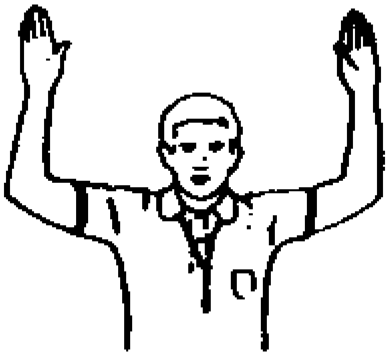


Beide Hände an der Hüfte

Charging (Rempeln)

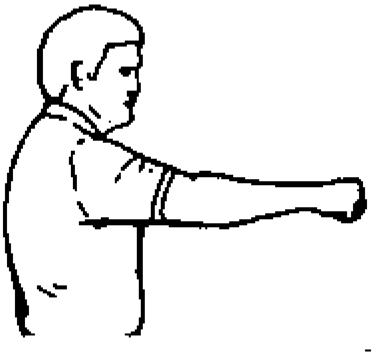
Zwei Freiwürfe

Faust schlägt gegen offene Handfläche



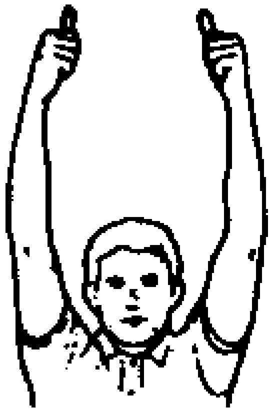
Finger zusammen

Foul durch Mannschaft in Ballkontrolle



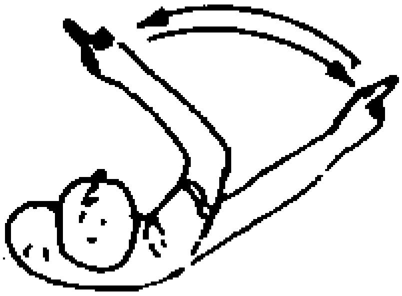
Faust zeigt in Richtung des Korbes
der foulspielenden Mannschaft

Sprungball



Daumen nach oben

Spielen des Balles ins Rückfeld



Finger ausgestreckt

Quellen:
http://www.uni-giessen.de/~gl23/club/zeichen.html#2pts
http://www.basketball.burscheid-one.de/article11027-2491.html

Anhang 7: Beobachtungsbogen Einzelspieler

1.	Datum: _____________	Spielbeginn: ____:____Uhr	Ort: ____________________
2.	SPIELER:	Name: __________________	Nr.: ____________________
	Team: ______________	Position: ________________	Spieleinsatz (min):________
3.	BEOBACHTER:	Name: __________________	Standort: ________________
		Beob.dauer (Spielabschnitt/ Minuten): __________________	
4.	Sonstige Bem. :	____	

Summe:

5.	**Korbwürfe**	mit Erfolg		
6.		ohne Erfolg		
7.		Freiwurf mit E.		
8.		Freiwurf ohne E.		
9.	**Ballgewinne**	Off. Rebound		
10.		Def. Rebound		
11.		gew. Zweikampf		
12.		Halteball		
13.		Abfangen		
14.	**Ballverluste**	*Off. Foul*		
15.		Zeitfehler		
16.		*Schrittfehler*		
17.		*Dribbelfehler**		
18.		Fehlpass		
19.		Fangfehler		
20.		verl. Zweikampf		
21.		*Rückspiel*		
22.		Halteball		
23.		*Ausball*		
24.		*Einwurffehler*		
25.		Verdribbeln*		
26.	**Defensivfoul**	*Defensivfoul*		

Tabelle 58: Beobachtungsbogen (modifiziert nach Czwalina, 1976, S. 113)

* Dribbelfehler: Schiedsrichterentscheid (mit zwei Händen gedribbelt, Ball geschaufelt, usw.)
  Verdribbeln: Verlust des Balles während des Dribblings

Arbeitsanleitung:

Der Kopf des Beobachtungsbogens (Punkte 1–4) sollte bereits vor Spielbeginn ausgefüllt werden. Er enthält allgemeine Informationen über das Spiel, Spieler sowie den oder die Beobachter.
Für die Positionsangabe des Spielers kann A für Aufbau, F für Flügel (mit Seitenangabe links/ rechts) und C für Center (mit Seitenangabe) geschrieben werden.
Beim Standort ist die ungefähre Distanz zum Spielfeld, die Höhe des Standorts in Bezug zum Spielfeld sowie die nächstgelegene Spielfeldmarkierung anzugeben. Wird der Standort während der Beobachtung gewechselt so ist dies am Beobachtungsbogen zu vermerken. Unter Punkt 4. können Bemerkungen über Rechts-/ Linkshänder, Verletzungen des Spielers, usw. angeführt werden.

In der ersten Probebeobachtung sollen nur die unter den Punkten 5-8 angeführten Beobachtungskategorien beobachtet werden, in der zweiten können jene Kategorien, die durch Schiedsrichterentscheidungen – sofern von ihm wahrgenommen – bestätigt werden, hinzugenommen werden. Diese Kategorien sind im Beobachtungsbogen kursiv geschrieben.
Erst in der dritten Probebeobachtung sollten weitere Beobachtungskategorien eingeführt werden, dafür sollten andere aber ausscheiden da die Beobachtung sonst zu komplex wird. Den Schülern wird es nicht mehr gelingen, alles zu erfassen.
Die Beobachtungskategorien, die nicht beobachtet werden sollen, werden zur besseren Übersicht aus dem Beobachtungsbogen gestrichen. Eine entsprechende Vervielfältigung des Beobachtungsbogens vor Beginn der ersten Untersuchungen wird empfohlen.

Obwohl es für die statistische Auswertung genügen würde, die Häufigkeiten des Auftretens der verschiedenen Variablen mit Strichen festzuhalten, empfiehlt es sich, zwecks der Vergleichbarkeit der Beobachtungsbögen und mit der Videoaufzeichnung, die jeweilige Spielminute des Eintretens des beobachteten Ereignisses anzugeben. Zum Beispiel:

				Summe
9.	Ballgewinne	Off. Rebound	3, 11, 12, 17	4

Anhang 8: Beobachtungsbogen Spielzüge

1.	Datum: _____________	Spielbeginn: ____:____Uhr	Ort: ____________________
2.	SPIELER:	Name: __________________	Nr.: ____________________
	Team: ______________	Position: ________________	Spieleinsatz (min):________
3.	BEOBACHTER:	Name: __________________	Standort: ________________
		Beob.dauer (Spielabschnitt/ Minuten): __________________	
4.	Sonstige Bem. :	____	

				Summe	Punkte
5.	**[GI]**	[FeP1]			
6.		[AfaV]			
7.		[RvA]			
8.		[RvV]			
9.	**[GoE]**	[FaFe]			
10.		[FeP2]			
11.		[RvA]			
12.		[RvV]			
13.		[Unt]			
14.		[BBV]			
15.	**[GoKW]**	[FaFe]			
16.		[RvA]			
17.		[RvV]			
18.		[Unt]			
19.		[BBV]			
20.	**[G/KWoE]**	[AfaV]			
21.		[RvA]			
22.		[RvV]			
23.		[FeWu]			
24.	**[G/KWmE]**	[KE]			

Punkte Give & Go: _______

Summe **Punkte**

25.	[ABoE]	[oE]			
26.		[andV]			
27.		[Vmit]			
28.		[RvA]			
29.		[RvV]			
30.	[AB/KWoE]	[FeWu]			
31.		[RvA]			
32.		[RvV]			
33.	[AB/KWmE]	[KE]			
34.	[PBoE]	[andV]			
35.		[Vmit]			
36.		[RvA]			
37.		[RvV]			
38.	[PB/KWoE]	[FeWu]			
39.		[RvA]			
40.		[RvV]			
41.	[PB/KWmE]	[KE]			

Punkte Block: _______

Punkte gesamt: _______

Punkte pro Spielminute: _______

Anhang 9: Zeitplan

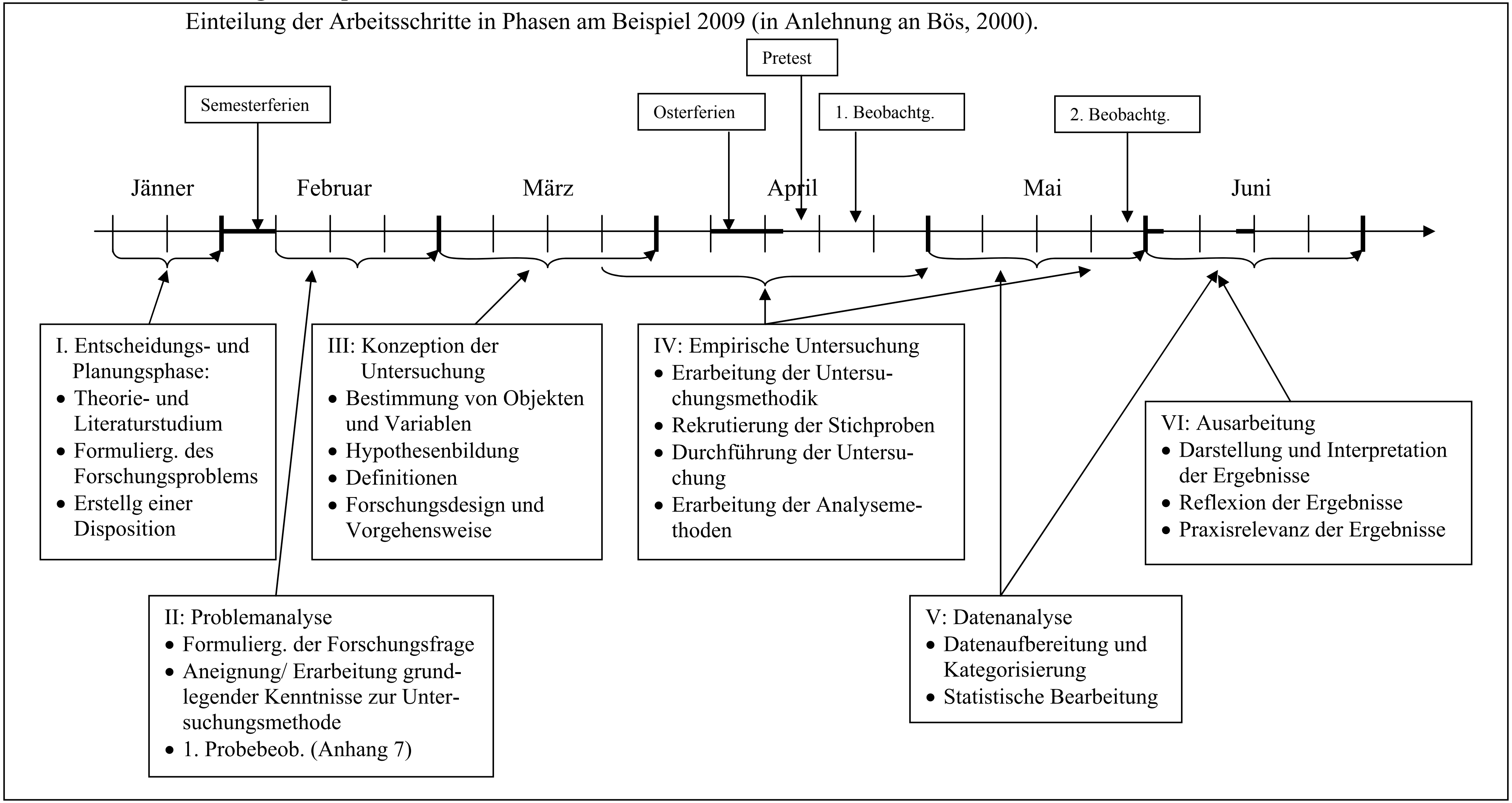


Abbildung 47: Zeitplan des Forschungsprozess

Übersicht

Die Aneignung wahrscheinlichkeitstheoretischer und statistischer Grundkenntnisse ist in der heutigen Gesellschaft, in der man ständig mit statistischen Informationen in Kontakt gerät, unumstößlich. Umso wichtiger erscheint nicht nur ein recht früher, sondern auch ein sehr praxisbezogener Unterricht in der Schule.

In der vorliegenden Arbeit wird zu Beginn auf die Geschichte, sowie den Stellenwert der Statistik in Gesellschaft, Schule und Sport eingegangen.

Im Hauptteil finden sich wesentliche Inhalte zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, die mit Beispielen aus dem Sport aufbereitet werden. Damit soll das Interesse der Schüler geweckt und die Praxisrelevanz der Stochastik verdeutlicht werden.

Es findet sich unter anderem ein Kapitel zur Computeranwendung, das den Schülern einfache statistische Operationen und Darstellungsformen näher bringen soll. Ein abschließendes Kapitel zu einer empirischen Untersuchung am Beispiel einer Spielerbeobachtung im Basketball, inklusive statistischer Auswertung, soll Lehrern sowie Schülern von Wahl- oder Freifächern helfen, ihr Wissen anzuwenden und zu vertiefen. Dabei soll der Überprüfung der Hypothese nachgegangen werden, ob eine spezielle Trainingsmaßnahme positive Auswirkungen auf das Zusammenspiel innerhalb eines Teams haben kann.

Im Anhang lassen sich Biographien zweier bedeutender Mathematiker nachlesen, die große Beiträge zur Entwicklung der Stochastik lieferten.

Abstract

In our society the acquisition of basic knowledge about probability and statistics is very important as everyone is exposed to statistical information on a daily basis.

For this reason statistics should be taught at school as early as possible with practical orientation.

At the beginning of this essay you can read about the history of statistics and their place in society, school and sports.

The main part deals with statistics and probability theory. Examples concerning sports are provided, as I believe that students are mainly interested in this theme.

There´s also a chapter about the use of computers in statistics to show pupils how to represent statistical informations.

The final chapter about an empirical study of a players´ observation in basketball with statistical interpretation enables interested pupils and teachers to use and extend their knowledge. The hypothesis, if a special training has positive influences on the interplay in school-teams should be tested.

Biographies of two leading mathematicians, who made important contributions to statistics and theory of probability can be found in the appendix.

Verwendete Literatur

Fachliteratur:

Albert, J., Bennett, J. & Cochran, J. J. (Hrsg.). (2005). *Anthology of Statistics in Sports*. Philadeliphia: SIAM.

Alemann, H.v. (1984). *Der Forschungsprozess. Eine Einführung in die Praxis der empirischen Spzialforschung* (2., durchges. Aufl.). Stuttgart: Teubner Verlag.

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Hrsg). (2004). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Dordrecht, Kluwer: Academic Publishers.

Bosch, K. (1996). *Das große Lehrbuch der Statistik*. München, Wien: R. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH.

Bosch, K. (1999). *Grundzüge der Statistik: Einführung mit Übungen* (2., erg. Aufl.). München, Wien, Oldenbourg: R. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH.

Bosch, K. (2003). *Statistik für Nichtstatistiker*. (4., vollst. überarb. Aufl.). München: R. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH.

Bös, K., Hänsel, H. & Schott, N. (2000). *Empirische Untersuchungen in der Sportwissenschaft: Planung – Auswertung – Statistik*. Hamburg: Czwalina.

Eder, F. X., Berger, H., Casutt-Schneeberger J. & Tantner, A. (2006). *Geschichte Online. Einführung in das wissenschaftliche Arbeiten*. Köln, Weimar: Böhlau Verlag Ges.m.b.H & Co.KG.

F. A. Brockhaus (1973a). *Brockhaus Enzyklopädie Bd. 2* (17. völlig neubearb. Aufl.). Wiesbaden: F. A. Brockhaus.

F. A. Brockhaus (1973b). *Brockhaus Enzyklopädie Bd. 5* (17. völlig neubearb. Aufl.). Wiesbaden: F. A. Brockhaus.

F. A. Brockhaus (1973c). *Brockhaus Enzyklopädie Bd. 11* (17. völlig neubearb. Aufl.). Wiesbaden: F. A. Brockhaus.

F. A. Brockhaus (1973d). *Brockhaus Enzyklopädie Bd. 18* (17. völlig neubearb. Aufl.). Wiesbaden: F. A. Brockhaus.

Czwalina, C. (1976). *Systematische Spielerbeobachtung in den Sportspielen. Zur Beobachtung sportspielspezifischer motorischer Qualifikationen in Basketball, Handball, Fußball und Volleyball sowie Tennis und Tischtennis*. Schorndorf bei Stuttgart: Verlag Karl Hofmann.

Czwalina, C. (1997). *Richtlinien für Zitate, Quellenangaben, Anmerkungen, Literaturverzeichnisse u.ä*. (6., überarb. Auflage). Hamburg: Czwalina.

Deutscher Basketballbund e. V. (2000). *Offizielle Basketballregeln für Männer und Frauen beschlossen vom Internationalen Basketball-Verband (FIBA)*. Karlsruhe: Badenia Verlag.

Heinemann, K. (1998). *Einführung in die Methoden und Techniken empirischer Forschung im Sport*. Schorndorf: Verlag Karl Hofmann.

Hochstädter D. (1996). *Statistische Methodenlehre. Ein Lehrbuch für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler*. (8., überarb. Aufl.). Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.

Krappel, P. (1997). *Basketball für die Schule*. Wien: Eigenverlag.

Matthäus, W.-G & Schulze, J. (2008). *Statistik mit Excel. Beschreibende Statistik für jedermann*. (3., überarb. und erw. Aufl.). Wiesbaden: B. G. Teubner Verlag.

Medler, M., Miehlke, M. & Schuster, A. (1995). *Basketball Teil 2. Spielreihen zur Gruppentaktik*. (2. Aufl.). Neumünster: Sportbuch-Verlag.

Panknin, M. (1974). *Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik für die Klassen 1-6*. (2., neubearb. Aufl.). Bochum: Verlag Ferdinand Kamp.

Reichel, H. Chr. (Hrsg.) (1992). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. (3. Aufl.). Wien, Hölder-Pichler-Tempsky.

Remmert, H. (2002). *Spielbeobachtung im Basketball*. Hamburg: Czwalina.

Rockmann, U. & Bömermann, H. (2006). *Grundlagen der sportwissenschaftlichen Forschungsmethoden und Statistik.* Schorndorf: Hofmann-Verlag.

Sachs, L. (2004). *Angewandte Statistik. Anwendung statistischer Methoden*. (11., überarb. und aktualisierte Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Schulze, P. M. & Dexheimer, V. (2006). *Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Aufgaben und Lösungen*. Frankfurt am Main: Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH.

Singer, R. & Willimczik, K. (Hrsg.). (2002). *Sozialwissenschaftliche Forschungsmethoden in der Sportwissenschaft*. Hamburg: Czwalina Verlag.

Weineck, J. (2002). *Optimales Training. Leistungsphysiologische Trainingslehre uner besonderer Berücksichtigung des Kinder- und Jugendtrainings*. (12. Auflage). Balingen: Spitta Verlag GmbH.

Willimczik, K. (1999). *Statistik im Sport: Grundlangen, Verfahren, Anwendungen*. (4., überarbeitete Aufl.). Hamburg: Czwalina.

Zech, H. (1971). *Das große Lexikon des Sports*. Frankfurt: Fischer Verlag.

Internet:

BBSR. Homepage Basketball-Schiedsrichter (29. Mai 2005). Impr.: Axel Beckmann Internet Management. Zornheim. Zugriff am 21.7.2008 unter http://www.bbsr.de/regel/grund/kompakt/regel_zusammenfassung_2000.htm

bm:ukk. Homepage des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur (Impr.). Wien. Zugriff am 28.7.2007 unter http://www.bmukk.gv/schulen/unterricht/lp/Lehrplaene_AHS1539.xml

BSO. Homepage der Österreichischen Bundes-Sportorganisation (Impr.) (2003). Wien. Zugriff am 21.7.2008 unter http://www.bso.or.at/main.asp?kat1=10&kat2=129&kat3=&vid=1

BTG. Homepage Basketball Burscheid (2002). Zugriff am 31.7.2008 unter http://www.basketball.burscheid-one.de

FIBA. Homepage der Fédération Internationale de Basketball (2007). Kontakt: International Basketball Federation. Cointrin/Geneva (CH). Zugriff am 16.7.2008 unter http://www.fiba.com/pages/eng/fc/baskBasi/p/openNodeIDs/926/selNodeID/926/basiRule.html

Fis. Homepage des Internationalen Ski-Verbandes. Kontakt: FIS Headquaters. Oberhofen/ Thunersee (CH). Zugriff am 16.8.2008 unter http://www.fis-ski.com/uk/disciplines/alpineskiing/cupstandings.html?suchen=rue&suchcompetitorid=&suchseason=2008&sector=AL&suchgender=L&suchcup=WC&suchnation=&discipline=&search=Search

Geretschläger, R., Koth, M. u.a. (20.Oktober 2004). Kommentar zum Lehrplan der AHS-Oberstufe „Mathematik“. Zugriff am 17.4.2008 unter http://www.gemeinsamlernen.at

Hudec, M. (Leitg.). stat4u: Projekt des Instituts für Scientific Computing der Uni Wien in Zusammenarbeit mit der Österreichischen Statistischen Gesellschaft. Zugriff am 29.7.2007 unter http://www.stat4u.at

Justus-Liebig-Universität Gießen (Hrsg). Homepage der Universität Gießen. Zugriff am 31.7.2008 unter http://www.uni-giessen.de

NBA. Homepage der National Basketball Association (2008). Impr.: NBA Media Ventures. New York. Zugriff am 16.7.2008 unter http://www.nba.com/media/rule_book_2007-08.pdf

News. news networld internetservice GmbH (Hrsg. und Inh.) (1995). Zugriff am 20.7.2008 unter http://www.news.at/?/articles/0826/270/210829.shtml

ÖfB. Homepage des Österreichischen Fußball-Bundes (2005). Kontakt: Ernst-Happel-Stadion. Wien. Zugriff am 20.7.2007 unter http://www.oefb.at/show_page.php?pid=539
Statistik Austria. Homepage der Statistik Austria (2008). Impr.: Medieninhaber Statistik Austria. Wien. Zugriff am 13.10.2007 unter http://www.statistik.at

Statistisches Landesamt Baden-Würtemberg (2004). Kontakt: Statistisches Landesamt, Stuttgart. Zugriff am 6.10.2008 unter http://www.statistik.baden-wuerttemberg.de/Veroeffentl/Monatshefte/essay.asp?xYear=2004&xMonth=11&eNr=11

UEFA. Homepage zur Fußball-Europameisterschaft 2008. Kontakt: UEFA Union des Asscia-tions Européennes de Football. Zugriff am 20.7.2008 unter http://www.uefa.at
Wikipedia. Die freie Enzyklopädie. Impressum: Wikimedia Deutschland – Gesellschaft zur Förderung Freien Wissens e. V. Frankfurt am Main.
Zugriff am 13.10.2007 unter http://de.wikipedia.org/wiki/Statistik_%28Sport%29
Zugriff am 15.8.2008 unter http://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I._Bernoulli und
http://de.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_Laplace

Lehrbücher:

Bürger, H., Fischer, R., Malle, G., u.a. (1991). *Mathematik Oberstufe 3*. Wien: F. Seitenberg Ges.m.b.H.

Bürger, H., Fischer, R., Malle, G., u.a. (1993). *Mathematik Oberstufe 4*. (2. Auflage). Wien: F. Seitenberg Ges.m.b.H.

Floderer, M., Fischer A. & C. (2000). *Mach mit Mathematik 1*. Wien: öbv&htp VerlagsgmbH & Co. KG.

Floderer, M., Fischer A., Fischer C. & Gross, P. (2006). *Mach mit Mathematik 2.* Lehrerausgabe. Wien: öbv&htp VerlagsgmbH & Co. KG.

Floderer, M., Fischer A. & C. (2004). *Mach mit Mathematik 3*. (2. Aufl.). Wien: öbv&htp VerlagsgmbH & Co. KG.

Götz, S., Reichel, H. Chr., Müller, R. & Hanisch, G. (2005). *Lehrbuch der Mathematik 7*. (4. Aufl.). Wien: öbv&hpt VerlagsgmbH & Co. KG.

Götz, S., Reichel, H. Chr., Müller, R. & Hanisch, G. (2006). *Lehrbuch der Mathematik 8*. (4. Aufl.). Wien: öbv&hpt VerlagsgmbH & Co. KG.

Lehrerarbeitsgemeinschaft Gollmann – Gutschi – Lipnig – Schuster – Wiltsche (2004). *Lebendige Mathematik 2.* Lehrerausgabe. (2. Aufl., Nachdruck). Wien: öbv&hpt VerlagsgmbH & Co. KG.

Lehrerarbeitsgemeinschaft Gollmann – Gutschi – Lipnig – Schuster – Wiltsche (2002). *Lebendige Mathematik 3*. (1. Aufl., Nachdruck). Wien: öbv&hpt VerlagsgmbH & Co. KG.

Lewisch, I. (2000). *Mathematik. Verstehen – Üben – Anwenden Band 1*. (5. Aufl.). Wien: R. Oldenbourg Ges.m.b.H.

Lewisch, I. (2001). *Mathematik. Verstehen – Üben – Anwenden Band 2*. (5. Aufl.). Wien: R. Oldenbourg Ges.m.b.H.

Lewisch, I. (2002). *Mathematik. Verstehen – Üben – Anwenden Band 3*. (5. Aufl.). Wien: R. Oldenbourg Ges.m.b.H.

Lewisch, I. (2003). *Mathematik. Verstehen – Üben – Anwenden Band 4*. (5. Aufl.). Wien: R. Oldenbourg Ges.m.b.H.

Reichel, H. Chr., Litschauer, D. & Groß, H. (2000). *Das ist Mathematik 2.* Lehrerausgabe. Wien: öbv&hpt VerlagsgmbH & Co. KG.

Rovina, K. & Schmid, F. (2002). *Blickpunkt Mathematik 1.* Wien: öbv&hpt VerlagsgmbH & Co. KG.

Rovina, K. & Schmid, F. (2003). *Blickpunkt Mathematik 2.* Lehrerausgabe. Wien: öbv&hpt VerlagsgmbH & Co. KG.

Rovina, K. & Schmid, F. (2004). *Blickpunkt Mathematik 3.* Wien: öbv&hpt VerlagsgmbH & Co. KG.

Schröder, Wurl & Wynands. (2002). *Massstab 3*. Wien: E. Dorner GmbH.

Url, Raubik, u.a. (2002). *Die Welt der Mathematik 3*. Wien: Dorner Verlag.

Url, Raubik, u.a. (2003). *Die Welt der Mathematik 4*. Wien: Dorner Verlag.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Daniela Kaindl
Geburtsdatum:	10.03.1984
Geburtsort:	Baden / NÖ
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Familienstand:	ledig
Kinder:	keine
Wohnort:	2540 Bad Vöslau, Brunngasse 30
Mobil:	0650/ 988 8850
e-mail:	dani-kai@gmx.at

Eltern:	Gabriele Kaindl (Hauptschullehrerin)
	Alfred Kaindl (HTL – Fachlehrer)
Geschwister:	Stefan Kaindl (19 Jahre, Student)

Ausbildungsweg:

1990 – 1994	Volksschule Gainfarn
1994 – 1998	Bundesrealgymnasium Berndorf
1998 – 2002	BORG Wiener Neustadt unter besonderer Berücksichtigung der sportlichen Ausbildung,
2002 – 2008	Lehramtstudium „Mathematik“ kombiniert mit „Bewegung und Sport“ an der Universität Wien

Ausbildungen:

2001	Lehrwart „Fit für Erwachsene“, Rettungsschwimmer
2002	Instruktor für „Snowboarden“
2005	Snowboard-Landeslehrer
2006	Alpinkurs
2008	Ski Anwärter und LS1

Interessen: Snowboarden, Skifahren, Laufen, Turnen, Motorrad fahren, …