DIPLOMARBEIT

Sobolevräume

(Definition und Einbettungssätze)

angestrebter akademischer Grad

Magister/Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin / Verfasser:	Sümeyya PAKSOY
Matrikel-Nummer:	0109291
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	Mathematik
Betreuerin / Betreuer:	O. Univ.Prof. Dr. Viktor LOSERT

Wien, am 07.04.2009

EINLEITUNG

In den 1930er Jahren haben die Entdeckungen des Mathematikers S. L. Sobolev viele Bereiche wie partielle Differentialgleichungen, Analysis, Differentialgeometrie und mathematische Physik stark beeinflußt. In 1938 wurde die Sobolev`sche Ungleichung (Einbettungssatz) veröffentlicht. Es gibt jetzt viele Varianten von dieser Ungleichung und sie sind heute noch interessant für ForscherInnen wegen den Anwendungen in verschiedenen Gebieten. Diese Arbeit beschäftigt sich mit den grundlegenden Eigenschaften von Sobolevräumen, insbesonders Einbettungssätze, und besteht aus drei Paragraphen.

Im ersten Paragraph werden zuerst die notwendigen Hilfsmitteln aus Distributionentheorie, soweit man für Sobolevräume braucht, zusammengefasst. Der Ableitungsbegriff wird verallgemeinert. Es sind die Unterschiede zwischen schwachen und klassischen Ableitungen erläutert. Zunächst sind die Sobolevräume $W^{m,p}(\Omega)$ mit der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ definiert. $W^{m,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum mit der Norm $\| \; \|_{m,p}$, insbesonders für $p = 2$ besitzt es eine Hilbertraumstruktur. Es ist $W_0^{m,p}(\Omega)$ als Abschließung von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$ definiert. Man kann äquivalente Normen darauf betrachten, wie man im §1.3. sieht. Es wird dann eine wichtige Ungleichung, die Poincare Ungleichung bewiesen. Die Sobolevräume negativer Ordnung werden als Dualräume von $W_0^{m,p}(\Omega)$ betrachtet und werden im §1.4. beschrieben. Im §1.5. werden Sobolev-Funktionen durch glatte Funktionen approximiert. Dazu dienen als wesentliche Werkzeuge Glättungsfunktion, Abschneidefunktion und die Zerlegung der Eins. Es ist bewiesen, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ ist, das heißt $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist. Mit Hilfe der Dichtheitsresultate beweist man einige Rechenregeln, wie Kettenregel und Produktregel für Sobolev-Funktionen. Mit dem Fortsetzungssatz werden die Funktionen in $W^{1,p}(\Omega)$ auf $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt für genügend glattes Ω. Den Fortsetzungssatz braucht man auch für die Beweise von Einbettungssätzen.

Im §2 werden Sobolevräume reellwertiger Ordnung mit Hilfe von Fouriertransformation definiert. Die nötigen Eigenschaften von Fouriertransformation sind ohne Beweis angegeben. Sie wird erst auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert, dann wird sie mittels Fourier-Plancherel-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ betrachtet. Der Raum $H^1(\mathbb{R}^n)$ wird mit der sogenannten Fourier-Plancherel-Transformation anders charakterisiert. Ein interessantes Resultat ist, dass die Räume $H^s(\mathbb{R}^n)$ und $H^m(\mathbb{R}^n) = W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ für $s = m$ übereinstimmen. Schließlich werden Sobolevräume ohne Fouriertransformation charakterisiert. Diese Charakterisierung ist also eine Verallgemeinerung vom Satz 1.32. Somit werden die grundlegenden Eigenschaften von Sobolevräumen in den ersten Pragraphen diskutiert.

Die Einbettungssätze im §3 zielen darauf, dass die Einbettungen von Sobolevräumen in anderen Räumen zu entdecken. Die Methode ist dass, die sogenannte Sobolev-Ungleichungen durch die Abschätzungen für beliebige Sobolev-Funktionen zu ergeben. Gehört zum Beispiel eine Funktion in $W^{1,p}(\Omega)$ zu einem anderen Raum? Es hängt also von den folgenden Fällen ab:

1. $1 \le p < n$
2. $p = n$
3. $n < p \le \infty$

Es werden die Einbettungen in Räume stetiger Funktionen und in L^p-Räumen untersucht. Die Ordnung p vom Zielraum $L^p(\mathbb{R}^n)$ kann nicht beliebig gewählt werden, man wird dann im §3.2. dazu motiviert. Die Randregularität ist auch wichtig, es ist in dieser Arbeit $\partial\Omega \in C^1$ vorausgesetzt. Man kann auch die Vorausssetzungen an den Raund abschwächen. Zunächst werden die Begriffe kompakte Operatoren und kompakte Einbettungen definiert. Als letztes wird der Rellich-Kondrachov-Kompaktheitssatz bewiesen.

Als Anhang werden einige Begriffe und Sätze die in dieser Arbeit angewendet werden, hinzugefügt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Herrn O. Univ.-Prof. Dr. Viktor Losert, für seine fachliche und hilfreiche Unterstützung bedanken. Meinem Vater Ethem Paksoy und meiner Mutter Pervin Paksoy, die mir immer zur Seite standen, danke ich auch ganz herzlichst. Ausserdem, möchte ich mich beim Verein WONDER, besonders bei Frau Nadire Kara und bei Herrn Yusuf Ziya Sula und Yusuf Kara, bedanken. Nicht zuletzt vom ganzen Herzen meinem Mann Kivanc Aydin, der mir immer, trotz räumlicher Entfernung, den Rückhalt gegeben hat.

1. Elementare Eigenschaften von Sobolevräumen

1.1. Testfunktionen und schwache Ableitungen

Wir behandeln in diesem Abschnitt die Testfunktionen und die schwachen Ableitungen, die die notwendigen Hilfsmittel für die Konstruktion von Sobolevräumen sind.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet. Wir bezeichnen den Vektorraum

$$\left\{\varphi \in C^\infty(\Omega,\mathbb{C}) : \operatorname{supp}\varphi = \overline{\{\varphi(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega \text{ ist kompakt}\right\}$$

mit $\mathcal{D}(\Omega)$. Die Elemente von $\mathcal{D}(\Omega)$ heißen Testfunktionen. Man nennt einen Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots.., \alpha_n)$, mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, einen Multiindex von der Ordnung

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots.. + \alpha_n .$$

Es ist $\alpha \leq \beta$ genau dann, wenn $\alpha_i \leq \beta_i$ für $i = 1, \ldots..., n$ gilt.

Wir definieren die partiellen Ableitungen nach dem Multiindex α durch

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots.., \partial x_n^{\alpha_n}} .$$

Die partielle Ableitung nach x_i bezeichnet man mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Sind K und Ω offene Mengen vom $\mathbb{R}^n$, schreibt man $K \subset\subset \Omega$, wenn $K \subset \overline{K} \subset \Omega$ und $\overline{K}$ kompakt ist, und sagt dass K kompakt enthalten in Ω ist.

Definition.1.1. Eine Folge $(\varphi_n)_n$ von Testfunktionen heißt gegen φ konvergent in $\mathcal{D}(\Omega)$, falls

1. $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ gleichmäßig, für jeden Multiindex α
2. Ein $K \subset\subset \Omega$ existiert, so dass supp($\varphi_n - \varphi$)$\subset$K für jedes n gilt.

Definition.1.2. Ein lineares Funktional $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ heißt Distribution auf Ω, falls sie stetig bezüglich der Konvergenz in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. D.h. T(φ_n)$\to$0 gilt, wenn $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. Für das Bild einer Testfunktion φ unter der Distribution T verwendet man die Schreibweise $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$. Der Raum von Distributionen auf $\mathcal{D}(\Omega)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Beispiel 1.3. Die Diracsche Delta-Distribution wird definiert durch

$$\delta(\varphi) = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

δ ist linear und stetig auf $\mathcal{D}(\Omega)$, somit ist es eine Distribution.
(Siddiqi, 2004 S. 221)

Es gibt Funktionen, die im üblichen Sinn nicht differenzierbar sind, aber sie sind noch integrierbar. Wir definieren also den Begriff der lokal integrierbaren Funktionen:

Definition 1.4. Eine fast überall auf Ω definierte Funktion nennt man lokalintegrierbar auf Ω, falls für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$, $f \in L^1(K)$ gilt. Man definiert dann den Raum $L^1_{loc}(\Omega)$ als Raum der Äquivalenzklassen von lokalintegrierbaren Funktionen.

Zu jeder Funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ entspricht eine Distribution in $\mathcal{D}'(\Omega)$ wie mit folgendem Satz beschrieben wird:

Satz 1.5. Für jede Funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt es eine Distribution T_f in $\mathcal{D}'(\Omega)$ definiert durch

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Beweis. Es ist klar, dass T_f ein lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. Jetzt ist die Stetigkeit zu zeigen. Sei $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Dann existiert nach der Definition ein K $\subset\subset \Omega$ so dass, supp($\varphi_n - \varphi$)$\subset$ K ist. Es gilt dann

$$\left|T_f(\varphi_n) - T_f(\varphi)\right| \leq \sup_{x\in K}\left|\varphi_n - \varphi\right| \int_K \left|u(x)\right| dx$$

Da $\varphi_n \to \varphi$ gleichmäßig in K, folgt dass die rechte Seite von der Ungleichung gegen 0 konvergiert. Somit ist T_f stetig.

Beispiel 1.6. Die Heaviside-Funktion auf $[-1,1]$

$$H(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\end{cases}$$

ist lokalintegrierbar und definiert die folgende Distribution

$$T_H(\varphi)=\int_{-1}^{1} H(x)\varphi(x)\,dx$$

(Reddy, 1986 S. 154)

Bemerkung 1.7.

1. Zwei lokalintegrierbare Funktionen auf Ω definieren die gleiche Distribution genau dann wenn sie fast überall übereinstimmen. (Hirsch, et al., 1999 S. 268,269)
2. Nicht jede Distribution $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ ist von der Gestalt $T=T_f$ mit f lokalintegrierbar. (Adams, 1975 S. 20)

Wir motivieren uns nun für die Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffes:
Sei $f\in C^1(\Omega)$ und $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. Weil φ außer den kompakten Teilmengen von Ω verschwindet, gilt dann

$$\int_\Omega f(x)\varphi'(x)dx=-\int_\Omega f'(x)\varphi(x)dx$$

Im mehr dimensionalen Fall gilt:

$$\int_\Omega D^\alpha f(x)\varphi(x)dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx \qquad (1)$$

wenn $f\in C^{|\alpha|}(\Omega)$.

In diesem Zusammenhang definieren wir die Ableitung einer Distribution $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$

Definition 1.8. Sei eine Distribution T gegeben, so ist die Ableitung der Ordnung α von T:

$$(D^\alpha T)(\varphi)=(-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi)$$

Da für $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $D^\alpha\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ ist, ist $D^\alpha T$ ein Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Somit besitzt jede Distribution in $\mathcal{D}'(\Omega)$ eine Ableitung beliebiger Ordnung in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Beispiel 1.9.

1. Sei $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$ im Beispiel 1.3. definierte Diracsche Delta-Distribution. Dann ist die Ableitung davon gegeben durch

$$D^{\alpha}\delta(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\varphi(0)$$

2. Die erste Ableitung von Heaviside-Funktion (wie im Beispiel 1.6. definiert) ist die Diracsche Delta-Distribution:

$$\begin{aligned} D^1(T_H)(\varphi) = -D^1(T_H)(\varphi') = \\ = (-1)^1 \int_{-1}^{1} H(x)\varphi'(x)\,dx = \\ = \varphi(0) = \delta(\varphi). \end{aligned}$$

(Adams, 1975 S. 21)

Wir wollen nun wissen ob die Formel (1) auch für die Funktionen, die nicht zu $C^{|\alpha|}(\Omega)$ gehören, gilt. Die linke Seite von (1) gilt für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. In diesem Fall ist die rechte Seite noch nicht klar. Wir lösen dieses Problem mit dem Begriff der schwachen Ableitung. (Evans, 2002 S. 242)

Definition 1.10. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \neq 0$ und f, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Die Funktion g ist eine schwache Ableitung von f der Ordnung α auf Ω ($g = D_w^{\alpha} f$), wenn für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt:

$$\int_{\Omega} f(x) D^{\alpha}\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x)\varphi(x)\,dx .$$

Wir bezeichnen mit $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_w$ die schwache Ableitung von f nach x_i.

Das folgende Beispiel illustriert den Unterschied zwischen klassicher und schwacher Ableitung. Die klassische Ableitung, wenn sie existiert, ist punktweise auf einem Intervall definiert und muß zumindest stetig sein. Die schwache Ableitung braucht aber nur Lokalintegrierbarkeit.

Beispiel 1.11.
Es sei $n=1$ und $\Omega=(-1,1)$. Wir betrachten die Funktion $f(x)=|x|$. Da $|x|\notin C^1(-1,1)$ existiert f' nicht auf dem Intervall $(-1,1)$. Es gilt aber mit partieller Integration

$$\int_{-1}^{1} f\varphi' dx = \int_{-1}^{0} f\varphi' dx + \int_{0}^{1} f\varphi' dx$$

$$= \varphi(0).0-\varphi(-1).1+\int_{-1}^{0}\varphi(x)dx+\varphi(1).1-\varphi(0).0-\int_{0}^{1}\varphi(x)$$

$$= -\int_{-1}^{1}\operatorname{sign}(x)\varphi(x)dx$$

Da $\varphi(-1)=\varphi(1)=0$, weil $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. Somit ist $f(x)=|x|$ schwach differenzierbar und $g(x)=\operatorname{sign}(x)$ ist die schwache Ableitung.
(Reddy, 1986 S. 159)

Bemerkung 1.12. Wenn $f\in C^{|\alpha|}(\Omega)$, dann stimmen die schwachen Ableitungen mit den Ableitungen im üblichen Sinn überein. Die Stetigkeit ist notwendig, wie man im folgenden Beispiel sieht.

Beispiel 1.13. Sei eine Funktion durch

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & \text{für } x\neq 0 \\ 0, & \text{für } x=0 \end{cases}$$

definiert. Die erste Ableitung von f ist keine schwache Ableitung von f weil $D^1 f$ nicht lokalintegrierbar auf $\mathbb{R}$ ist.
(Burenkov, 1998 S. 19)

Bemerkung 1.14. Die schwache Ableitung $D_w^\alpha f$ einer Funktion $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ existiert genau dann wenn ihre Ableitung $D^\alpha f$ durch eine Distrubition T_f wie im Satz 1.5. representiert wird.

Beispiel 1.15. Es sei $\Omega=\mathbb{R}$. Die schwache Abletitung von $f(x)=\operatorname{sign}x$ existiert nicht, da $D^1(\operatorname{sign}x)=2\delta(x)$ und kann nicht durch T_f representiert werden.
(Burenkov, 1998 S. 21)

Definition 1.16. Seien $\left(T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$. Die Folge konvergiert gegen die Distribution T, wenn

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) \to T(\varphi)$$

für alle $\varphi\in\mathcal{D}'(\Omega)$ gilt. Man bezeichnet mit $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. (Schmeisser S. 16) (Attouch, et al., 2005 S. 27)

Mit folgender Proposition wird gezeigt, dass die Abbildung $T \mapsto D^{\alpha}T$ für einen Multiindex $\alpha\in\mathbb{N}^n$ stetig ist.

Proposition 1.17. Sei $\alpha\in\mathbb{N}_0^n, \alpha\neq 0$. Die Abbildung

$$T\in\mathcal{D}'(\Omega) \mapsto D^{\alpha}T\in\mathcal{D}'(\Omega)$$

ist stetig, d.h. für eine Folge $\left(T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, gilt folgendes:

$$T_n \to T \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow D^{\alpha}T_n \to D^{\alpha}T \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Beweis. Sei $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $v\in\mathcal{D}(\Omega)$ durch Definition gilt:

$$\int_{\Omega} D_w^{\alpha} T_n v = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} T_n D_w^{\alpha} v \quad \forall v\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Für $v\in\mathcal{D}(\Omega)$ ist $D_w^{\alpha}v\in\mathcal{D}(\Omega)$. Da T_n gegen T konvergiert, folgt dann

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} T_n D_w^{\alpha} v = \int_{\Omega} D_w^{\alpha} T\, v.$$

Mit der Definition von D_w^{α}, gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} D^{\alpha}T_n v = (-1)^{\alpha}\int_{\Omega} T, D^{\alpha}v = \int_{\Omega} D^{\alpha}Tv.$$

(Attouch, et al., 2005 S. 27-28) □

Proposition 1.18. (Eindeutigkeit schwacher Ableitung) Die schwache Ableitung der Ordnung α, wenn sie existiert, ist eindeutig bis auf Lebesgue-Nullmengen.

Beweis. Es seien $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ und

$$\int_\Omega u D_w^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v}\varphi dx$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega (v - \tilde{v}) \varphi dx = 0$$

Wegen der Dichtheit von $\mathcal{D}(\Omega)$ gilt somit $v - \tilde{v} = 0$ fast überall. □

(Evans, 2002 S. 243) (Dobwolski, 2006 S. 86)

1.2. Sobolevräume ganzzahliger Ordnung

In diesem Paragraph werden wir Sobolevräume ganzzahliger Ordnung einführen und werden allgemeine Eigenschaften davon angeben. Wir beschränken uns zuerst auf die Ordnung $m \in \mathbb{N}$ und werden dann in §1.4. die Räume mit negativer Ordnung als Dualräume dazu betrachten.

Definition 1.19. Der Sobolevraum $W^{1,2}(\Omega)$ wir definiert durch

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_w \in L^2(\Omega) \text{ i=1,....,n} \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_\Omega \left(fg + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_w \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_w \right) dx$$

und der Norm

$$\|f\|_{1,2} = \left[\int_\Omega \left(f^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_w^2 \right) dx \right]^{1/2}$$

Diese Definition kann erweitert werden wenn man $L^2(\Omega)$ durch den Raum $L^p(\Omega)$ mit $1 \le p \le \infty$ ersetzt und die höhere Ableitungsordnung betrachtet:

Definition 1.20. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$. Der Sobolevraum $W^{m,p}(\Omega)$ wird definiert durch

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) : D_w^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ für } 0 \le |\alpha| \le m \right\}$$

und wird mit der Norm $\| \ \|_{m,p}$ versehen:

$$\|f\|_{m,p} := \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D_w^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p} \tag{1.1}$$

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \le m} \|D_w^\alpha f\|_\infty \tag{1.2}$$

Beispiel 1.21. Die Heaviside-Funktion ist in $L^p(-1,1)$ für $1 \le p \le \infty$. Sie ist aber nicht in $W^{1,p}(-1,1)$, weil ihre Ableitung die Diracsche δ-Distribution kann nicht durch eine Funktion in $L^p(-1,1)$ repräsentiert werden. (Renardy, et al., 2004 S. 205)

Es gelten folgende Eigenschaften von $W^{m,p}(\Omega)$-Funktionen für schwache Ableitungen.

Satz 1.22. Es seien $f, g \in W^{m,p}(\Omega)$ und $|\alpha| \le m$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

1. $D_w^\alpha f \in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$ und $D_w^\beta(D_w^\alpha f) = D_w^\alpha(D_w^\beta f) = D_w^{\alpha+\beta} f$ für alle Multiindizes α, β mit $|\alpha| + |\beta| \le m$.
2. Für jedes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in W^{m,p}(\Omega)$ und $D_w^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda D_w^\alpha f + \mu D_w^\alpha g$, $|\alpha| \le m$.
3. Wenn Ω_0 eine offene Menge von Ω ist, dann gilt $f \in W^{m,p}(\Omega_0)$.

Beweis. Wir beweisen nur den 1.Punkt. 2. und 3.Punkt sind klar.

Es sei $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann gilt $D_w^\beta \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Aufgrund der Definition von schwacher Ableitung folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega D_w^\alpha f D_w^\beta \phi dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D_w^\alpha D_w^\beta \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_\Omega D_w^{\alpha+\beta} f \phi dx \end{aligned}$$

Daher gilt $D_w^{\alpha}\left(D_w^{\beta} f\right) = D_w^{\alpha+\beta} f$. (Evans, 2002 S. 247) □

Das folgende Resultat zeigt uns dass die Sobolevräume mit Hilfe von L^p-Räumen und vom Begriff schwacher Ableitung konstruiert sind.

Satz 1.23. $W^{m,p}(\Omega)$ ist Banachraum für alle $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\| \ \|_{m,p}$ eine Norm für alle $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$. Wir prüfen also die Normeigenschaften für $\| \ \|_{m,p}$.

1. Es seien $f, g \in W^{m,p}(\Omega)$. Dann impliziert die Minkowski-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{m,p} &= \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \left\| D_w^{\alpha}(f+g) \right\|_p^p \right)^{1/p} \quad \text{(nach Satz 1.22.(2))} \\
&\le \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \left(\left\| D_w^{\alpha} f \right\|_p + \left\| D_w^{\alpha} g \right\|_p \right)^p \right)^{1/p} \\
&\le \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \left\| D_w^{\alpha} f \right\|_p^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \left\| D_w^{\alpha} g \right\|_p^p \right)^{1/p} \\
&= \|f\|_{m,p} + \|g\|_{m,p}
\end{aligned}$$

2. Nach Satz 1.22. (2) gilt

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{m,p} &= \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \left\| D_w^{\alpha}(\lambda f) \right\|_p^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} |\lambda| \left\| D_w^{\alpha} f \right\|_p^p \right)^{1/p} \\
&= |\lambda| \|f\|_{m,p}
\end{aligned}$$

3. Es gilt $\|f\|_{m,p} = 0$ genau dann wenn $f = 0$ fast überall.

Daraus folgt, dass $W^{m,p}(\Omega)$ ein normierter Raum ist. Es bleibt zu zeigen, dass $W^{m,p}(\Omega)$ vollständig ist. f_n sei eine Cauchy-Folge in $W^{m,p}(\Omega)$. Wegen der Definition von $W^{m,p}(\Omega)$ ist die Folge $\left(D_w^{\alpha} f_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ für $0 \le |\alpha| \le m$ und besitzt wegen der Vollständigkeit von $L^p(\Omega)$ einen Grenzwert g_{α}.

Sei f_n konvergent gegen f. Aus Konvergenz in $L^p(\Omega)$ folgt die Konvergenz im distributionellen Sinn. Aufgrund der Stetigkeit von der schwachen Ableitung nach Proposition 1.17. erhalten wir $D^\alpha f_n \to g_\alpha = D^\alpha f$ in $L^p(\Omega)$. Folglich ist f∈ $W^{m,p}(\Omega)$ und konvergiert die Folge gegen f in $W^{m,p}(\Omega)$. □

(Attouch, et al., 2005 S. 158)

Korollar 1.24. $W^{m,2}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit innerem Produkt

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{0\leq\alpha\leq m} \int_\Omega D_w^\alpha u \overline{D_w^\alpha v} dx$$

(Dobwolski, 2006 S. 89)

Bemerkung 1.25. Wenn $p = 2$ ist, wird oft für den Raum $W^{1,2}(\Omega)$ die Notation $H^1(\Omega)$ wegen der Hilbertraumstruktur (H ist Anfangsbuschtabe von Hilbert) verwendet. Für $p = 2$ wird dann der Raum $W^{m,2}(\Omega)$ mit $H^m(\Omega)$ bezeichnet. (Attouch, et al., 2005 S. 153)

Satz 1.26. $W^{m,p}(\Omega)$ ist seperabel für $1 \leq p < \infty$ und reflexiv. Wenn $1 < p < \infty$, dann ist $W^{m,p}(\Omega)$ gleichmäßig konvex. (Adams, 1975 S. 47)

Definition 1.27. $H_0^1(\Omega)$ wird als Abschließung von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$ definiert beziehungsweise, werden dann $W_0^{1,p}(\Omega)$ als Abschließung von $\mathcal{D}(\Omega)$ im Raum $W^{1,p}(\Omega)$, und $W_0^{m,p}(\Omega)$ wird als Abschließung von $\mathcal{D}(\Omega)$ im Raum $W^{m,p}(\Omega)$ definiert.

Bemerkung 1.28.

1. Man bezeichnet also den Raum $W_0^{m,2}(\Omega)$ mit $H_0^m(\Omega)$
2. Es ist leicht zu sehen, dass $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ gilt. (Adams, 1975 S. 45)

Beispiel 1.29.

1. Seien Ω und f wie im Beispiel 1.11. Somit gehört $D_w^1 f = \text{sign}|x|$ zu $L^\infty(\Omega)$ und f zu $W^{1,p}(\Omega)$ für $1 \leq p \leq \infty$. Wenn man diese Argumentation verallgemeinert, sieht man dass eine stückweise stetig differenzierbare

Funktion zu $W^{1,\infty}(a,b)$ für ein beschränktes Intervall (a,b) gehört, wenn die stückweise definierte Ableitung beschränkt ist.

2. Wir betrachten nun eine auf einem beschränkten Intervall von $\mathbb{R}$ stetige Funktion, die nicht zu $W^{1,p}$ gehört. Sei $\Omega=(-1,1)$ und $f(x)=|x|^{\alpha}$ für $0<\alpha\le 1$. Es gilt $f'(x)=\operatorname{sign}x\,\alpha|x|^{\alpha-1}$. Somit gilt

$$\int_{-1}^{1}|f'(x)|^{2}\,dx=\int_{-1}^{1}\alpha^{2}\,|x|^{2\alpha-2}\,dx\,.$$

Folglich gilt $f'(x)\in L^{2}(-1,1)$ für $2\alpha-2<1$, das heißt, $\alpha>\frac{1}{2}$. Damit liegt $f(x)=|x|^{\alpha}$ in $W^{1,2}(-1,1)$ wenn $\alpha>\frac{1}{2}$. Dann ist $f\notin W^{1,2}(-1,1)$ für $\alpha\le\frac{1}{2}$

(Attouch, et al., 2005 S. 154)

1.3. Äquivalente Normen, Poincare-Ungleichung

Für $\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$ offen wird die Norm $\|\ \|_{m,p}$ anders definiert in (Burenkov, 1998 S. 30) :

$$\|f\|_{m,p}^{*}:=\|f\|_{p}+\sum_{|\alpha|=m}\|D_{w}^{\alpha}f\|_{p}^{p} \tag{1.3}$$

Die Normen (1.1) und (1.3) sind im Allgemeinen nicht äquivalent. Sie sind äquivalent, wenn die offene Menge $\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$ einen „quasiresolved-Rand“ besitzt. (siehe Burenkov,1998 S.165). Die Norm (1.3) ist aber äquivalent zu

$$\|f\|_{m,p}^{(1)}:=\left\{\int_{\Omega}\left(|f|^{p}+\sum_{|\alpha|=m}|D_{w}^{\alpha}f|^{p}\right)dx\right\}^{1/p}$$

für $1\le p<\infty$ und für $p=\infty$

$$\|f\|_{m,\infty}^{(1)}=\max\left\{\|f\|_{\infty},\ \max\|D_{w}^{\alpha}\|_{\infty}\right\}$$

Das heißt, es gilt:

$$c_{1}\|f\|_{m,p}^{(1)}\le\|f\|_{m,p}^{*}\le c_{2}\|f\|_{m,p}^{(1)}$$

wobei c_1, c_2 unabhängig von f sind. Da c_1 und c_2 abhängig nur von n, p sind.

Wir betrachten dann den schwachen Gradienten von Ordnung m

$$\nabla_w^m f = \left(\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}, \ldots\ldots, \partial x_{i_m}} \right)_w \right)_{i_1,\ldots\ldots, i_m = 1}^n .$$

Dann ist die Norm (1.3) äquivalent zu

$$\|f\|_{m,\,p}^{(2)} = \left(\int_\Omega \left(\|f\|^p + \left\|\nabla_w^p f\right\|^p \right) dx \right)^{1/p} .$$

Wir beweisen nun die Poincare-Ungleichung, welche sehr nützlich für viele mathematische Probleme ist.

Satz 1.30. Poincare- Ungleichung. Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, welche beschränkt in einer Richtung ist. Sei $1 \leq p \leq \infty$, dann existiert eine Konstante C, die nur von n, p und Ω abhängig ist, so dass gilt:

$$\|u\|_p \leq C \left\|\nabla_w^1 u\right\|_p \text{ für alle } u \in H_0^1(\Omega) .$$

Beweis. Weil $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,\,p}(\Omega)$ (durch Definition von $W_0^{1,\,p}(\Omega)$) ist, müssen wir die Ungleichung für alle $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ beweisen. Da Ω in einer Richtung beschränkt ist, existieren reelle Zahlen a<b so dass $\Omega \subset [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Weil u in C^1 liegt, gilt:

$$u(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} (t, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)\, dt \text{ für alle } x \in \Omega .$$

Es folgt aus Schwarz-Ungleichung, dass

$$|u(x)|^2 \leq (b-a) \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 (t, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, dt$$

$$\leq (b-a) \int_a^{b} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 (t, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, dt$$

für alle $x \in \Omega$.

Wir integrieren die Ungleichung auf $[a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$, und erhalten die Ungleichung

$$\|u\|_2 \leq (b-a)^2 \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2^2 .$$

Wegen $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leq \left|\nabla_w^1 u\right|$ ist das Resultat bewiesen.

Die Ungleichung gilt für $W_0^{1,p}(\Omega)$, weil $W_0^{1,p}(\Omega)$ Abschließung von $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. □
(Hirsch, et al., 1999 S. 354) (Attouch, et al., 2005 S. 168) (Evans, 2002)

1.4. Dualität

Wir betrachten nun Sobolevräume negativer Ordnung:
Definition 1.31. Man versteht unter den Raum $H^{-1}(\Omega)$ den Dualraum zum Raum $H_0^1(\Omega)$; d.h. das ist der Raum der beschränkten linearen Funktionale auf $H_0^1(\Omega)$. Wir werden mit folgendem Satz sehen, dass

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

gilt.
(Evans, 2002 S. 283)

Weil $H_0^1(\Omega)$ eine Hilbertraumstruktur hat und $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht ist, ist es leicht den Dualraum von $H_0^1(\Omega)$ zu beschreiben. Man kann also den Dualraum $H^{-1}(\Omega)$ mit Hilfe vom Rieszschen Darstellungssatz charakterisieren:

Satz 1.32. Sei T ein Element von $H^{-1}(\Omega)$, dann existieren die Funktionen $g_0, \ldots, g_n$ in $L^2(\Omega)$ so dass,

$$T = g_0 + \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)_w \quad \text{und}$$

$$\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf\left\{ \left(\sum_{i=0}^{n} \|g_i\|_2^2 \right)^{1/2} : T = g_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)_w \ \text{für } g_0, \ldots, g_n \in L^2(\Omega) \right\}$$

Beweis. Es seien $f, g \in H_0^1(\Omega)$. Wir definieren das innere Produkt

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega \nabla_w^1 f . \nabla_w^1 g + fg\, dx$$

Sei T ein Element von $H^{-1}(\Omega)$. Mittels Rieszscher Darstellungssatz kann man die Existenz eines eindeutig bestimmten Elementes $g \in H_0^1(\Omega)$ akzeptieren, so dass

$$\forall f \in H_0^1(\Omega),\ T(f) = \langle f, g\rangle$$

gilt.

Seien $g_0 = g$ und $g_i = -\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_w$, dann gilt

$$T(f) = \int_\Omega \left(fg_0 - \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx$$

$$= \left\langle g_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)_w, f \right\rangle$$

Wir können daher T mit einer Distribution von der Form $g_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)_w$ mit $g_{0,........,} g_n \in L^2(\Omega)$ identifizieren. Die Norm ist dann durch

$$\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|g\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega g_i(x)^2\, dx \right)^{1/2}$$

definiert. Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ von der Form $T = g_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)_w$ mit $g_{0,........,} g_n \in L^2(\Omega)$ erfüllt $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ folgendes

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_\Omega \left(g_0\varphi - \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega g_i(x)^2\, dx \right)^{1/2} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Zu jedem Element T aus $\mathcal{D}(\Omega)$ gibt es also eine eindeutig bestimmte Ausdehnung in $H_0^1(\Omega)$. Außerdem gilt:

$$\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} g_i(x)^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

Daraus folgt die Aussage

$$\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n} \|g_i\|_2^2 \right)^{1/2} : T = g_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)_w \text{ für } g_0, \ldots.., g_n \in L^2(\Omega) \right\} . \square$$

Das obige Theorem kann für Sobolevräume höherer Ordnung verallgemeinert werden. Man verwendet die Dualität zwischen $L^p(\Omega)$ und $L^{p'}(\Omega)$ mit $1/p + 1/p' = 1$, und erhält den folgenden Satz:

Satz 1.33. Sei $1 \leq p < \infty$. Der Dualraum zum Raum $W_0^{m,p}(\Omega)$ ist $W^{-m,p'}(\Omega)$ mit $1/p + 1/p' = 1$,

$$T = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq n} D_w^{\alpha} g_{\alpha} , \; g_{\alpha} \in L^{p'}(\Omega)$$

$$\|T\|_{-m,p'} = \inf \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |g_{\alpha}|^{p'}(x) dx : T = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq n} D_w^{\alpha} g_{\alpha} \right\}$$

(Evans, 2002 S. 283,284) (Attouch, et al., 2005) (Maz`ja, 1985)

Beispiel 1.34. Wenn man die Funktionen in $L^2(\Omega)$ m-Mal differenziert dann erhält man ein Funktional in $H_0^m(\Omega)$. Man nehme zum Beispiel die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Wir wissen, dass $D^1 H(x) = \delta$, die Diracsche δ-Distribution. Somit gilt $\delta \in H^{-1}(\Omega)$. (Reddy, 1986 S. 178)

1.5. Approximation von Funktionen, Dichtheitsresultate

Wir wollen nun die Sobolev-Funktionen durch glatte Funktionen approximieren. Dazu braucht man die **Glättungsfunktionen**:

Definition 1.35.

1. Wir definieren $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\eta(x) := \begin{cases} C\exp\left(\dfrac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & \text{für } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

Die Konstante $C > 0$ ist so gewählt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1$.

2. Für jedes $\varepsilon>0$, setzt man

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Wir nennen η Standardmollifier. Die Funktionen η_ε erfüllen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon dx = 1, \ \text{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon).$$

Das Integral

$$(\eta_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

existiert fast überall für $u \in L^p$ und heißt die regularisierte Funktion zu u.

(Dobwolski, 2006 S. 74) (Evans, 2002 S. 629)

Wir werden mit folgendem Lemma zeigen, dass Sobolev-Funktionen lokal durch den Mollifier approximieren lassen.

Lemma 1.36. Es sei u: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $u = 0$ außerhalb von Ω . Dann gilt:

1. Sei $\text{supp}(u) \subset\subset \Omega$, dann ist $\eta_\varepsilon * u \in \mathcal{D}(\Omega)$ für $\varepsilon <$dist(supp(u), $\partial\Omega$)
2. Wenn $u \in L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$, dann ist $\eta_\varepsilon * u \in L^p(\Omega)$ und $\|\eta_\varepsilon * u\|_p \leq \|u\|_p$,

   $\eta_\varepsilon * u \to u$ in $L^p(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$.
3. Sei $u \in C(\Omega)$. Dann gilt $\eta_\varepsilon * u \to u$ gleichmäßig auf eine kompakt enthaltene Teilmenge $G \subset\subset \Omega$ von Ω für $\varepsilon \to 0$.

Beweis.

1. Es gilt $(\eta_\varepsilon * u)(x) = 0$ für dist(x, supp(u)) $\geq \varepsilon$. Man bezeichne mit D_i^h den Differenzenquotienten

$$D_i^h = \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$$

für $i = 1, \ldots\ldots, n$.

Es gilt

$$D_i^h \eta_\varepsilon * u(x) = \frac{1}{h}\int \left(\eta_\varepsilon(x + he_i - y) - \eta_\varepsilon(x - y)\right) u(y)\, dy\,.$$

Da konvergiert der Differenzenquotient gleichmäßig gegen die erste partielle Ableitung nach x_i. Nach dem Satz von Lebesgue(siehe A.4.) gilt dann

$$\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} * u(x) = \int \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y)\, u(x)\, dx\,.$$

Daraus folgt also mit der Induktion

$$D^\alpha \eta_\varepsilon * u(x) = \int D^\alpha \eta_\varepsilon(x - y)\, f(x)\, dx$$

für jeden Multiindex α. Somit gilt die erste Aussage des Lemmas.

2. Sei $u \in L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$. Mit Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}
\left|\eta_\varepsilon * u(x)\right| &= \left|\int \eta_\varepsilon(x - y)\, u(y)\, dy\right| \\
&\leq \left(\int \eta_\varepsilon(x - y)\, dy\right)^{1/q} \left(\int \eta_\varepsilon(x - y)\left|u(y)\right|^p dy\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Mit Satz von Fubini folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\eta_\varepsilon * u(x)\right|^p dx &\leq \int\int \eta_\varepsilon(x - y)\left|u(y)\right|^p dy\, dx \\
&= \int \left|u(y)\right|^p dy \int \eta_\varepsilon(x - y)\, dx \\
&= \left\|u\right\|_p^p \qquad\qquad (*)
\end{aligned}$$

Da $C_0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ ist, gibt es eine Approximierende $\phi \in C_0(\Omega)$ mit $\left\|u - \phi\right\|_p < \frac{\eta}{3}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\eta_\varepsilon * \phi(x) - \phi(x)\right| &= \left|\int \eta_\varepsilon(x-y)\left(\phi(y)-\phi(x)\right)dy\right| \\ &\le \sup_{|y-x|<\varepsilon} \left|\phi(y)-\phi(x)\right| .\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung konvergiert gegen 0 für $\varepsilon \to 0+$. Da $\operatorname{supp}(\phi)$ kompakt ist, gilt dann für genügend kleines ε $\|\eta_\varepsilon * u - u\| < \frac{\eta}{3}$ und folgt daraus die Behauptung.

3. Die Aussage folgt aus Punkt 2.

(Dobwolski, 2006 S. 74,75) (Adams, 1975 S. 29) □

Lemma 1.37. Es sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Wenn $G \subset\subset \Omega$, dann gilt $D^\alpha(\eta_\varepsilon * u) = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$ für $|\alpha| \le m$, und $\eta_\varepsilon * u \to u$ in $W^{m,p}(\Omega)$.

Beweis. Sei $\varepsilon < \operatorname{dist}(\partial G, \partial\Omega)$, dann gilt

$$\begin{aligned}D_w^\alpha(\eta_\varepsilon * u) &= \int_\Omega D_w^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D_w^\alpha u(y)dy \\ &= \eta_\varepsilon * D_w^\alpha u .\end{aligned}$$

Mit dem Lemma 1.36. folgt, dass $D_w^\alpha(\eta_\varepsilon * u) \to D_w^\alpha u$ in $L^p(G)$ und $\eta_\varepsilon * u \to u$ in $W^{m,p}(G)$. □

Die folgenden zwei Lemmata geben uns wichtige Hilfsmitteln, Abschneidefunktion und Zerlegung der Eins, die für Approximations- und Dichtheitsresultate (insbesonders Satz von Meyers und Serrin) eine grosse Rolle spielen.

Lemma (Abschneidefunktion) 1.38. Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge. Dann gibt es eine Abschneidefunktion $\tau \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $0 \le \tau \le 1$, und $\tau = 1$ in K. Wenn $\operatorname{dist}(\partial K, \partial\Omega) = \delta$, so kann man τ so wählen, dass $\left|D_w^k \tau\right| \le c\delta^{-k}$ in $\Omega \setminus K$, $k \in \mathbb{N}$ wobei die Konstante c von k und n, aber nicht von K und Ω abhängt. (Dobwolski, 2006 S. 90)

Beweis. Da K kompakt ist, gilt $\delta > 0$. Die Menge

$$\hat{K} = \overline{\bigcup_{x\in K} B(x,\delta/2)}$$

ist kompakt. Es gilt $\operatorname{dist}\left(\partial\hat{K},\partial\Omega\right)=\delta/2$ und $\operatorname{dist}\left(\partial\hat{K},\partial K\right)=\delta/2$. Dann definiert man die Funktion $\tau=\eta_{\delta/4}*\chi_{\hat{K}}$. Es gilt die Abschätzung

$$\left|D_w^k\eta_{\delta/4}(x)\right|\le c\delta^{-n-k}$$

Weil $\chi_{\hat{K}}=1$ für $y\in B(x,\delta/4)$ folgt, dass

$$\left|D_w^k\eta_{\delta/4}(x)\right|\le \int_{B(x,\delta/4)}\left|D_w^k\eta_{\delta/4}(x-y)\right|\chi_{\hat{K}}(y)\,dy\le$$
$$\le c(n,k)\,\delta^{-k}$$

Somit ist τ die gesuchte Abschneidefunktion. □

Lemma 1.39. (Zerlegung der Eins). Seien $\{\Omega_k\}_{k=1,.....,n}$ offene Mengen, welche die kompakte Menge K überdecken. Dann gibt es reellwertige Funktionen ψ_k, $k=1,......,n$, mit den folgenden Eigenschaften

$$\sum_{k=1}^{n}\psi_k=1,\ \psi_k\in C_0^\infty\left(\Omega_k\right),\quad 0\le\psi_k\le 1,\quad \sum_{k=1}^{n}\psi_k=1 \text{ in } K$$

Beweis. Um jeden Punkt $x\in\Omega_k$ wählen wir eine Umgebung U_x so dass $U_{x,i}=U_x\subset\subset\Omega_i$ gilt. Das System $\{U_{x,i}\}$ von Mengen ist eine Überdeckung von K. Es besitzt also eine endliche Teilüberdeckung. Es seien $U_1^i,......,U_{n_i}^i$ die Umgebungen in dieser Teilüberdeckung. Für die durch $G_i=\overline{\bigcup_{k=1}^{n_i}U_k^i}$ definierte Menge gilt $G_i\subset\subset\Omega_i$. Nach Lemma 1.26. gibt es eine Abschneidefunktion $\tilde{\tau}_i\in\mathcal{D}\left(\Omega_i\right)$ bezüglich $\{G_i,\Omega_i\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$0\le\tau_i\le 1,\ \tau(x):=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tau}_i(x)\ge 1$ in K.

Man setze $\Omega:=\bigcup_{i=1}^{n}\operatorname{supp}\left(\tilde{\tau}_i\right)\supset K$. Es gibt eine offene Menge Ω_0 mit $K\subset\Omega_0\subset\subset\Omega$. Für eine Abschneidefunktion ψ bezüglich $\{K,\Omega_0\}$ definiere man

$$\psi_i(x) := \begin{cases} \dfrac{\tilde{\tau}_i(x)\psi(x)}{\tau(x)} & \text{für } x \in \Omega_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen $\psi_i, ..., \psi_n$ besitzen die gewünschten Eigenschaften. □
(Dobwolski, 2006 S. 90)

Eine Verallgemeinerung von Produktregel ist die **Leibnizsche** Formel:
Lemma 1.40. Wenn $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $u \in W^{m,p}(\Omega)$, dann ist $\phi u \in W^{m,p}(\Omega)$ und

$$D_w^\alpha(\phi u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \phi D_w^{\alpha-\beta} u$$

wobei $\binom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ und $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{k=1}^{n} \binom{\alpha_k}{\beta_k}$ für $\beta \le \alpha$ ist.

Beweis. Wir beweisen das Lemma für $|\alpha| = 1$, der allgemeine Fall mit $|\alpha| > 1$ folgt dann durch Induktion. Für alle $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \zeta u D^\alpha \phi dx &= \int_\Omega u D^\alpha(\zeta\phi) dx - \int_\Omega u\left(D^\alpha \zeta\right)\phi dx \\ &= -\int_\Omega \left(\zeta D_w^\alpha u + u D^\alpha \zeta\right)\phi dx . \end{aligned}$$

Daher gilt $D_w^\alpha(\zeta u) = \zeta D_w^\alpha u + u D^\alpha \zeta$. (Evans, 2002 S. 248) □

Approximation durch C^∞-Funktionen

Mit dem Satz von Meyers und Serrin übertragen sich viele Eigenschaften von klassisch differenzierbaren Funktionen auf Sobolev-Funktionen.

Satz 1.41. (Meyers und Serrin). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$.

Beweis. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \text{ und } \|x\| < k \right\}$$

und $\Omega_0 = \emptyset$ .Wir definieren für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$G_k := \Omega_{k+1} \cap \left(\overline{\Omega_{k-1}} \right)^c$$

Dann ist G_k eine offene Überdeckung von Ω. Sei $\psi_k \in \mathcal{D}(G_k)$ mit $\psi_k \geq 0$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k = 1$ eine C^{∞}-Zerlegung der Eins in Ω. Es gilt $\operatorname{supp} \psi_k \subset G_k$, $\psi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$. Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Man konstruiert mit ψ_k die Abschneidefunktionen. Dann haben die Funktionen $\psi_k u$ kompakten Träger in G_k. Nach dem Lemma 1.28. ist dann $\psi_k u \in W^{m,p}$. Es ei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und man wähle ε_k so klein, dass

$$\left\| \eta_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u \right\|_{m,p} \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

und

$$\operatorname{supp}\left(\eta_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) \right) \subset G_k .$$

Man definiere eine Funktion $\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_k} * (\psi_k u)(x)$ und beachte, dass für jedes x nur endlich viele Terme nicht verschwinden. Daher $\varphi \in C^{\infty}$ und

$$\|u - \varphi\|_{m,p} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\psi_k u - (\psi_k u) * \eta_{\varepsilon_k} \right) \right\|_{m,p}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left(\psi_k u - (\psi_k u) * \eta_{\varepsilon_k} \right) \right\|_{m,p}$$

$$\leq \varepsilon$$ □

(Attouch, et al., 2005) (Dobwolski, 2006)

Produkt- und Kettenregel für Sobolev-Funktionen

Mit Hilfe des Satzes Meyers und Serrin kann man die folgenden Rechenregeln für klassisch differenzierbare Funktionen auf Sobolev-Funktionen übertragen.

Satz(Produktregel) 1.42. Seien f, g $\in W^{1,2}(\Omega)$, dann ist $fg \in W^{1,1}(\Omega)$ und $D_w^1(fg) = D_w^1 f\, g + f\, D_w^1 g$.

Beweis: Mit Satz von Meyers und Serrin gibt es Funktionen $f_k, g_k \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $f_k \to f$ und $g_k \to g$ in $W^{1,2}(\Omega)$.

$$\int_\Omega f_k g_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx = -\int_\Omega D_w^1 f_k\, g_k \varphi dx - \int_\Omega f_k D_w^1 g_k \varphi dx \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir

$$\int_\Omega D^1 \varphi f\, g dx = \int_\Omega \varphi\left(g D_w^1 f + f\, D_w^1 g\right) dx$$

Es gilt dann

$$D_w^1(fg) = D_w^1(f) g + f\, D_w^1(g) \qquad \square$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ kann man die Produktregel verallgemeinern:

Satz 1.43. Es seien $1 \leq p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Wenn $f \in W^{m,p}(\Omega)$ und $g \in W^{m,p'}(\Omega)$, dann ist $fg \in W^{m,1}(\Omega)$ und die schwachen Ableitungen von fg berechnet man also nach der Produktregel. (Alt, 1999 S. 109)

Satz(Kettenregel) 1.44. Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, $|f'| \leq M$ in $\mathbb{R}$, und es sei vorausgesetzt, dass $f(0) = 0$ oder Ω vom endlichen Maß ist. Dann ist für jede Funktion $g \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ auch $f \circ g \in W^{1,p}(\Omega)$ und $D_w^1(f \circ g) = (f' \circ g) D_w^1 g$.
(Dobwolski, 2006 S. 93)

Beweis. Wir beweisen den Satz für den Fall $f(0) = 0$. Es gilt die Abschätzung

$$|f \circ g(x)| = |f \circ g(x) - f(0)| \leq M|g(x)|$$

Daher $f \circ g \in L^p(\Omega)$. Man setze $u := (f' \circ g) D_w^1 g$ und es gilt analog

$$|u(x)| = |f' \circ g(x)||D_w^1 g(x)| \leq M|D_w^1 g(x)| \quad \text{und } |D_w^1 g(x)| \in L^p(\Omega).$$

Wir werden dann beweisen, dass $D_w^1(f\circ g)$ mit $f'\circ g D_w^1 g$ übereinstimmen. Nach dem Satz von Meyers und Serrin gibt es $g_k \in C^\infty(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $g_k \to g$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Man erhält nach der üblichen Kettenregel die Gleichung

$$\int_\Omega f'\circ g_k D_w^1 g_k \phi dx = -\int_\Omega f\circ g_k D^1\phi dx\, , \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Da $\operatorname{supp}(\phi)\subset\subset\Omega$ gibt es $\Omega'\subset\subset\Omega$ mit $\operatorname{supp}(\phi)\subset\subset\Omega'$. Es gilt nach der obigen Abschätzung

$$\int_\Omega \left|(f\circ g_k - f\circ g)D^1\phi\right| dx \le \left\|D^1\phi\right\|_\infty M\left\|g_k - g\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Somit haben wir die Konvergenz auf der rechten Seite erhalten. Für die linke Seite gilt analog

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega \left(f'\circ g_k D_w^1 g_k - f'\circ g D_w^1 g_k\right)\phi dx\right| \\ &\le \left|\int_\Omega f'\circ g_k \left(D_w^1 g_k - D_w^1 g\right)\phi dx\right| + \left|\int_\Omega \left(f'\circ g_k - f'\circ g\right) D_w^1 g \phi dx\right|. \end{aligned}$$

weil g_k gegen g in $W^{1,1}(\Omega')$ konvergiert, konvergiert dann eine Teilfolge g_{k_m} punktwiese fast überall gegen g und auch $D_w^1 g_{k_m}$ gegen $D_w^1 g$. Wegen der Stetigkeit von f' gilt dann $f'\circ g_{k_m} \to f'\circ g$ punktweise fast überall. Es gilt folgendes:

$$\left|\left(f'\circ g_k - f'\circ g\right)D_w^1 g\right| \le 2M\left|D_w^1 g\right|$$

Somit folgt die Konvergenz auf der linken Seite nach dem Satz von Lebesgue(siehe A.4.). (Dobwolski, 2006 S. 93-94) □

Approximation durch C_0^∞-Funktionen

Das folgende Lemma bildet einen Zusammenhang zwischen Soboleväume und $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ somit auch die Vervollständigung davon.

Lemma 1.45. Sei $m\in\mathbb{N}$, $1\le p<\infty$. Dann ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Äquivalent dazu ist, dass $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ Vervollständigung von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beweis. Sei $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Abschneidefunktion mit $\psi(x)=1$ auf $B(0,1)$ und man definiere $\psi_s(x)=\psi\left(\frac{x}{s}\right)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\psi_s \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\lim_{s\to\infty}\psi_s(x)=1$. Sei $f \in W^{m,p}(\Omega)$ und $f_s := \psi_s f$. f_s gehört noch zu $W^{m,p}(\Omega)$, da

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_s|^p \, dx \leq \|f\|_\infty^p \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx < \infty .$$

Mit der Leibniz-Formel(Lemma1.28.) konvergiert f_s gegen f für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

Man nun setze $\varphi_s = \eta_{1/s} * (\psi_s f)$. Dann $\varphi_s \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi_s \to f$ in $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ für $s \to \infty$. Denn

$$\begin{aligned}\left\|\eta_{1/s}(\psi_s f) - f\right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\|\eta_{1/s} f - f\right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + \left\|\eta_{1/s}(\psi_s f) - \eta_{1/s} f\right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left\|\psi_s f - f\right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} + c\left\|\eta_{1/s} f - f\right\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} .\end{aligned}$$

Der letzte Teil konvergiert also gegen 0 für $\frac{1}{s} \to 0+$.
(Burenkov, 1998 S. 15,37,41) (Attouch, et al., 2005 S. 159) □

Bemerkung 1.46. Für $p=\infty$ gilt Lemma 1.32. nicht. Ein Beispiel dazu ist $f=1$ auf $\mathbb{R}^n$. (Burenkov, 1998 S. 41)

Korollar 1.47. $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

Bemerkung 1.48. Im Allgemeinen stimmen die Räume $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $W^{1,p}(\Omega)$ nicht überein für $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. In diesem Fall gilt $W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega)$.

Beispiel 1.49. Es sei $\Omega = B(0,1)$ ein offener Ball um 0 mit Radius Eins. Die konstante Funktion $f=1$ gehört zu $W^{1,p}(\Omega)$, aber nicht zu $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sonst würde die Fortsetzung von f durch 0 ausserhalb von $B(0,1)$ zu $W^{1,p}(\Omega)$ gehören. Das gilt aber nicht, weil die ersten partiellen Ableitungen von Fortsetzungsfunktion den Träger Ω haben.
(Attouch, et al., 2005 S. 164)

1.6. Fortsetzungssatz

Unser Ziel ist es nun die Funktionen in $W^{1,p}(\Omega)$ auf $\mathbb{R}^n$ fortzusetzen, sofern die Randregularität ausreicht. Wir können eine Funktion $f \in W^{1,p}(\Omega)$ durch 0 ausserhalb von Ω, wie im Beispiel 1.37., fortsetzen. Im Allgemeinen funktioniert es nicht, wegen der Unstetigkeit am Rand von Ω. Wir müssen einen Weg finden, der uns ermöglicht die schwachen Ableitungen durch $\partial\Omega$ zu bewahren.

Satz 1.50 (Fortsetzungssatz). Sei Ω von der Klasse C^1. Zu jedem Gebiet Ω' mit $\Omega \subset\subset \Omega'$ existiert ein beschränkter linearer Operator

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

so dass für jedes $f \in W^{m,p}(\Omega)$ gilt:

1. $Ef = f$ in Ω
2. $\|f\|_{W^{m,p}(\Omega')} \leq c\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$
3. Ef hat den Träger in Ω'

Definition 1.51. Wir nennen Ef eine Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 1.52. Seien $\Omega = [-1,1]$ und $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$. Wir setzen die Funktion f auf $\mathbb{R}$ fort:

$$Ef(x) = \begin{cases} -1 & -\infty \leq x < -1 \\ \sin\frac{\pi}{2}x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq \infty \end{cases}$$

Ef besitzt die Eigenschaften, die der Fortsetzungssatz benötigt.

Als nächstes kommen die Werte von Funktionen $f \in W^{1,p}(\Omega)$ am Rand von Ω in Frage. Die Funktion $f \in L^p(\Omega)$ zu betrachten gibt uns keine ausreichende Information über $\partial\Omega$, weil $\partial\Omega$ Lebesgue-Maß null hat. Der Begriff Spuroperator löst dieses Problem für $1 \leq p < \infty$ und beschränktes Ω mit C^1-Rand. Der Satz besagt, dass ein beschränkter linearer Operator $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ existiert, so dasss

$Tf = f|_{\partial\Omega}$ wenn $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Man kann also den Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ als Kern von T betrachten; das heißt, $W_0^{1,p}(\Omega) = \{f \in W^{1,p}(\Omega) : Tf = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$

(Attouch, et al., 2005 S. 187-189) (Evans, 2002 S. 257-259)

2. Sobolevräume reellwertiger Ordnung

Sobolevräume und Fourierreihen

Wir werden die Fouriertransformation verwenden um die Sobolevräume reellwertiger Ordnung zu definieren. Mit diesem Zweck geben wir einige Eigenschaften von Fouriertransformation an.

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ \zeta \in \mathbb{R}^n$ definiert man die Fouriertransformierte von f durch:

$$\hat{f}\,(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix\zeta} dx$$

Es seien $a \in \mathbb{R}^n$ und f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die Translation von f um a durch $T_a f(x) = f(x-a)$. Offensichtlich ist T_a eine Isometrie auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $p \in [1,\infty]$. Für $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Faltung von f mit g durch

$$f * g(x) = \int f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

Wir geben nun einige grundlegende Eigenschaften von Fouriertransformation:

Satz 2.1. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x, \zeta \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda > 0$. Dann gelten:

1. $\widehat{(T_a f)}(\zeta) = e^{-ia\zeta} \hat{f}\,(\zeta)$
2. $\widehat{f * g}(\zeta) = (2\pi)^{n/2}\, \hat{f}\,(\zeta)\, \hat{g}(\zeta)$
3. $\int \hat{f}\,(\zeta)\, g(\lambda\zeta)\, d\zeta = \int f\,(\lambda\zeta)\, \hat{g}(\zeta) d\zeta$

Lemma 2.2. Es gilt folgende Formel für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}(\zeta) = i\zeta_j \hat{f}\,(\zeta)$$

(Kriegl, 2006 S. 150)

Wir formulieren dann die Fourierumkehrformel.

Satz 2.3(Fourierumkehrformel).

1. Für jedes f in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.
2. Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und gilt

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\zeta)\, e^{i\zeta x} d\zeta$$

Wir setzen $L := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \right\}$

Lemma 2.5. L ist ein dichter Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p < \infty$.

Wir können die Fouriertransformation mit Hilfe von Fourier-Plancherel Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ erweitern. Wir beschreiben mit folgendem Satz diese Transformation.

Satz 2.6. Es gibt einen unitären Operator, die sogenannte Fourier-Plancherel Transformation $\mathcal{F}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass die folgenden Aussagen gelten:

1. $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$, für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
2. Die Abbildung $\mathcal{F}$ ist ein isometrischer Isomorphismus von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$.
3. $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ gilt für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

(Meise, 1992 S. 115,116)

Bemerkung 2.7.

1. Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ setze man die Folge für $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|x| \le n} e^{-ix\zeta} f(x)\, dx$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = \mathcal{F}(f)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2. Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$f_n(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|\zeta|\le n} e^{ix\zeta} \mathcal{F}(f)(\zeta)\, d\zeta$$

gilt dann $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. (Attouch, et al., 2005 S. 181)

Korollar 2.8. Seien $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:

$$\|f\|_\infty \le \|\mathcal{F}f\|_1$$

Wir haben mit Bemerkung **1.25**. für den Raum $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ die Notation $H^1(\mathbb{R}^n)$ eingeführt. Mit Korollar **1.24.** ist ein $H^1(\mathbb{R}^n)$ Hilbertraum. Mittels folgendem Satz kann man den Sobolevraum $H^1(\mathbb{R}^n)$ anders charakterisieren:

Satz 2.9. Wir haben

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \left(1+|\zeta|^2\right)^{1/2} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

und für $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left(1+|\zeta|^2\right)^{1/2} \mathcal{F}f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Beweis. Sei $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Wegen der Dichtheit von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Folge f_n in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$**,** so dass $f_n \to f$ gilt. Nach dem Lemma 2.2. gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right)} = (i\zeta_j)\widehat{(f_n)}(\zeta)$$

Hier stimmt die Fouriertransformation mit Fourier-Plancherel Transformation für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ überein. Es gilt also

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right)(\zeta) = (i\zeta_j)\mathcal{F}(f_n)(\zeta).$$

Weil $f_n \to f$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$, folgt $\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial f}{\partial x_j}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Mit **Bemerkung 2.7.** ist die Fourier -Plancherel Transformation stetig; für eine Teilfolge f_{n_r} haben wir

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f_{n_k}}{\partial x_j}\right)(\zeta) \to \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_w(\zeta) \text{ für fast alle } \zeta \in \mathbb{R}^n \text{ und}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right)(\zeta) \to \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_w(\zeta) \text{ für fast alle } \zeta \in \mathbb{R}^n .$$

Somit gilt

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\zeta) = \left(i\zeta_j\right)\mathcal{F}f(\zeta) \text{ für fast alle } \zeta \in \mathbb{R}^n .$$

Nach dem Satz 2.7. gehört $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_w(\zeta)$ für $f \in H^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ zu $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ und somit auch $i\zeta_j\mathcal{F}f$ .Mit der obigen Argumantation und damit, dass $\mathcal{F}$ eine Isometrie ist, folgt dass für $f \in H^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ auch $\left(i\zeta_j\right)\mathcal{F}f(\zeta)$,und somit auch $\left(1+|\zeta|^2\right)^{1/2}\mathcal{F}f$ zu $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ gehört. Außerdem gilt für ein $f \in H^1\left(\mathbb{R}^n\right)$:

$$\begin{aligned}\|f\|_{H^1\left(\mathbb{R}^n\right)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2(x) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2(x)\,dx\right)^{1/2} \\ &= \left\|\mathcal{F}f(\zeta)\right\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}^n\right)} + \sum_{j=1}^{n}\left\|\mathcal{F}\left(D_j f\right)\right\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}^n\right)} \\ &= \left\|\left(1+|\zeta|^2\right)^{1/2}\mathcal{F}f\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}^n\right)} .\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

(Attouch, et al., 2005 S. 181-182)

Mit Hilfe von Fourier-Plancherel Transformation definiert man den Sobolev-Raum:
Definition 2.10. Für $s \in [0,\infty)$ sei

$$H^s = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \left(1+|\zeta|^2\right)^{s/2}\mathcal{F}f(\zeta) \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|\zeta|^2\right)^s \mathcal{F}f(\zeta)\overline{\mathcal{F}g}(\zeta)d\zeta$$

und der entsprechende Norm

$$\|f\|_s := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\zeta|^2\right)^s |\mathcal{F}f(\zeta)|^2 \, d\zeta \right)^{1/2}$$

Für $s \in (-\infty, 0)$ sei H^s die vollständige Hülle von $L^2(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm $\| \ \|_s$. Man nennt H^s den Sobolevraum zum Exponenten $s \in \mathbb{R}$. (Haslinger, 2006)

Wir beschreiben nun den Raum H^s:

Proposition 2.11. Sei $s \in \mathbb{R}^+$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist ein Hilbertraum. Wenn $s = m \in \mathbb{N}$, folgt dann $H^s(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n) = W^{m,2}(\Omega)$. Das ist der Sobolevraum, den wir in §1 definiert haben. Es wird für $m \geq 1$ eine andere Norm als Definition 1.10 definiert

$$\|f\|_m^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} B_{k,\alpha} \left\| D_w^\alpha f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

mit $B_{k,\alpha} := \dfrac{k!}{(k-|\alpha|)!\alpha_1!.....\alpha_n!}$, da $B_{k,\alpha} \neq 1$.

Beweis. □ (Attouch, et al., 2005 S. 185)

Lemma 2.12. Es gilt in H^{s-1} für $f \in H^s$ und $1 \leq j \leq n$

$$D_j f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$

(Meise, 1992 S. 120)

Bemerkung.2.13. Der Differenzenquotient im Lemma 2.12. konvergiert für $s \geq 1$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ist $f \in H^s \cap C^1(\mathbb{R}^n)$, dann stimmt $D_j f(x)$ mit $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)_w$ überein. Es gilt somit $D_j f(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)_w$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Man kann nun eine Beschreibung der Sobolevräume angeben, ohne die Fouriertransformation zu benutzen. Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung vom Satz 1.32.

Lemma 2.14. Für $s \in \mathbb{R}$ gelten:

1. $\|f\|_s^2 = \|f\|_{s-1}^2 + \sum_{i=1}^{n} \|D_j f\|_{s-1}^2$ für $f \in H^s$

2. $H^s = \left\{ g = g_0 + \sum_{j=1}^{n} D_j g_j : g_j \in H^{s+1}, j = 0, ..., n \right\}$ und ist die Norm

$$\|g\|_s^* = \inf \left\{ \left(\|g_0\|_{s+1}^2 + \sum_{j=1}^{n} \|g_j\|_{s+1}^2 \right)^{1/2} : g = g_0 + \sum_{j=1}^{n} D_j g_j, g_j \in H^{s+1}, j = 0, ..., n \right\}$$

äquivalent zu $\| \; \|_s$.

(Meise, 1992 S. 121)

Definition 2.15. Sei $s \in \mathbb{R}^+$. Ganauso wie in §1 bezeichnet man mit $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ den Dualraum zum Raum $H^s(\mathbb{R}^n)$.

3. Einbettungssätze

In diesem Kapitel untersuchen wir ob die Sobolevräume in anderen Räumen enthaltend sind. Man beantwortet die Frage in welchen Räumen die Sobolevräume enthalten sind mittels Einbettungsungleichungen. Der Typ dieser Räume hängt von den Fällen $1 \le p < n$, $p = n$ und $n < p \le \infty$ ab. Wir brauchen aber noch Voraussetzungen an den Rand von Ω. Es ist in den Sätzen $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 vorausgesetz, aber man kann die Voraussetzungen an den Rand abschwächen.

Die Einbettungssätze erlauben uns einen Zusammenhang zwischen Sobolevräumen und Räumen stetiger Funktionen, insbesonders Hölderräume zu bilden.

Für den Fall $p = 2$ haben wir unsere Frage mit Satz 3.9. mittels Fourier-Plancherel Transformation beantwortet.

Wir führen zuerst die notwendigen Begriffe ein:

Definition 3.1. Es seien E und F zwei normierte Räume. Man sagt E ist stetig eingebettet in F wenn $E \subset F$. Man betrachte den Identitätsoperator $\mathrm{Id}: E \to F$ von E nach F mit $\mathrm{Id}\, f = f \ \forall f \in E$. Man nennt dann Id den Einbettungsoperator.

Definition 3.2. Seien E und F zwei normierte Räume. Man sagt E ist stetig eingebettet in F wenn $E \subset F$ und der entsprechende Einbettungsoperator stetig ist. D.h. Es existiert $c > 0$ so dass $\forall f \in E$

$$\|f\|_E \le c\|f\|_F .$$

Man bezeichnet dann die stetige Einbettung mit $E \hookrightarrow F$.

(Burenkov, 1998 S. 119-120)

3.1. Einbettungen in Räume stetiger Funktionen

Satz(Morrey) 3.3. Sei $n < p < \infty$. Dann ist die Einbettung

$$\|f\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

stetig für alle $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, wobei $\gamma := 1 - n/p$; d.h. jedes Element $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ist Hölder-stetig mit Ordnung γ, und die Konstante c nur von p und n abhängt.

Beweis. Es genügt die Abschätzung für $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ zu beweisen, weil $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ist. Es sei also Q ein Würfel mit Kantenlänge $r > 0$ und $x, y \in Q$ mit $|x-y| = r$. Es gilt

$$f(z) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt} u\left(x + t(z-x)\right)(z-x)\,dt$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|f(z) - f(x)\right| &\leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n |z_i - x_i| \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x + t(z-x)\right)(z-x)\right| dt \\ &\leq r \int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x + t(z-x)\right)(z-x)\right| dt \end{aligned}.$$

Mit $\tilde{f} = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(z)\,dz$ bezeichnen wir den Mittelwert von f über Q. Man setze den Mittelwert ein:

$$\left|\tilde{f} - f(x)\right| \leq \frac{r}{|Q|}\int_Q dz \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x + t(z-x)\right)(z-x)\right| dt.$$

Mit Satz von Fubini erhält man

$$\left|\tilde{f} - f(x)\right| \leq \frac{1}{r^{n-1}}\int_Q dt \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x + t(z-x)\right)(z-x)\right| dx.$$

Wir führen die Koordinatentransformation $\zeta = tz + (1-t)x$ mit $dz = t^{-n} d\zeta$ durch:

$$\left|\tilde{f} - f(x)\right| \leq \frac{1}{r^{n-1}}\int_Q dt \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\zeta)\right| \frac{d\zeta}{t^n}$$

Für festes t machen wir den Integrationsbereich ein Würfel mit Kantenlänge tr. Somit gilt:

$$\left|\tilde{f} - f(x)\right| \leq \frac{1}{r^{n-1}}\int_0^1 t^{-n} \int_{Q_{tr}} dt \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\zeta)\right| d\zeta dt.$$

Mittels Hölder-Ungleichung gilt:

$$\left|\tilde{f}-f(x)\right| \le \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^1 t^{-n} \left|Q_{tr}\right|^{1/p'} dt \left(\int_{Q_{tr}} \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\zeta)\right|^p d\zeta \right)^{1/p}.$$

Es folgt aus den obigen Ungleichungen dass

$$\begin{aligned}\left|\tilde{f}-f(x)\right| &\le \frac{r^{n/p'}}{r^{n-1}} \int_0^1 \frac{t^{n/p'}}{t^n} dt \left(\int_{Q_{tr}} \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\zeta)\right|^p d\zeta \right)^{1/p} \\ &\le \frac{r^{1-n/p}}{1-n/p} \left\|\nabla_w^1 f\right\|_{L^p(Q)}.\end{aligned}$$

Die gleiche Abschätzung gilt für y, und es folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\left|f(y)-f(x)\right| \le \left|\tilde{f}-f(x)\right| + \left|f(y)-\tilde{f}\right|.$$

Es gilt daher:

$$\left|f(y)-f(x)\right| \le \frac{2r^{1-n/p}}{1-n/p} \left\|\nabla_w^1 f\right\|_{L^p(Q)} \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n r = 2\left|x-y\right|.$$

Wir haben gezeigt, dass für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein offenr Würfel Q mit Kantenlänge $r = 2\left|x-y\right|$ existiert. Daraus folgt dann die Ungleichung für beliebige Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$. □

Definition 3.4. Man sagt f^* ist eine Version von f wenn $f = f^*$ fast überall gilt.

Satz 3.5. Sei Ω eine offene beschränkte Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand , und seien $n < p < \infty$ und $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann hat f eine Version $f^* \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, für $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, mit der Abschätzung

$$\left\|f^*\right\|_{C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)} \le c\left\|f\right\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

wobei c nur von p, n und Ω abhängt. (Evans, 2002 S. 269)

Beweis. Weil Ω einen C^1-Rand besitzt, gibt es nach Satz 1.50. eine Fortsetzung $Ef = \overline{f}$, so dass $f = \overline{f}$ in Ω und $\overline{f}$ einen kompakten Träger hat. Nach Lemma 1.36. existieren Funktionen $f_n \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ mit $f_n \to \overline{f}$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Nach Satz von Morrey existiert eine Funktion $f^* \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, so dass $f_n \to f^*$ in $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ ist. Daraus folgert man, dass $f = f^*$ fast überall auf Ω gilt. Nach dem Satz(Morrey) gilt die Ungleichung

$$\|f_n\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le c\|f_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Mit der Konvergenz von Folge f_n gilt

$$\|f\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \qquad \square$$

Satz 3.6. Sei Ω eine offene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $p > n$. Dann ist der Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ stetig in den Raum $C^0(\bar{\Omega})$ eingebettet. Es gibt also eine Konstante C, die von n und p abhängt. Dann gilt die Abschätzung

$$\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} \le C\|\nabla_w^1 f\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ für alle } f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(Gilbarg, et al., 2001 S. 155) (Sauvigny, 2005 S. 194)

Korollar.3.7. $C^m(\bar{\Omega})$ wird stetig in den Raum $W_0^{k,p}(\Omega)$ eingebettet für $0 \le m < k - n/p$ das heißt,

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\bar{\Omega}).$$

(Gilbarg, et al., 2001 S. 158)

Satz 3.8. Sei $s > 0$ und $2s > n$. Dann ist die Einbettung

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$$

stetig.

Beweis. Sei $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Es folgt nach der Definition von $H^s(\mathbb{R}^n)$ $\left(1+|\zeta|^2\right)^{s/2} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Man setze $g = \left(1+|\zeta|^2\right)^{s/2} \mathcal{F}f$. Es gilt dann $\mathcal{F}f = g\left(1+|\zeta|^2\right)^{-s/2}$ und $f = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$. Wenn $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, stimmen dann $\bar{\mathcal{F}}$ mit inverse Fouriertransformation überein. Daraus folgt, dass $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Da $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g\left(1+|\zeta|^2\right)^{-s/2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ genau dann wenn $\left(1+|\zeta|^2\right)^{-s/2}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, das heißt, wenn das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\zeta|^2\right)^{-s/2} d\zeta$ endlich ist. Wegen der Voraussetzung $2s > n$ konvergiert dieses Integral. Somit ist unsere Behauptung bewiesen. □

(Attouch, et al., 2005 S. 192-193)

Satz 3.9. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $s - k > \frac{n}{2}$. Dann ist die Einbettung stetig

$$H^s\left(\mathbb{R}^n\right) \hookrightarrow C_0^k\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Beweis. Sei $f \in H^s\left(\mathbb{R}^n\right)$. Nach Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\int \left(1+|\zeta|^2\right)^k |\mathcal{F}f(\zeta)| d\zeta = \int \left(1+|\zeta|^2\right)^{k-s} \left(1+|\zeta|^2\right)^s |\mathcal{F}f(\zeta)| d\zeta$$
$$\leq \|f\|_s \left(\int \left(1+|\zeta|^2\right)^{2(k-s)} d\zeta \right)^{1/2} = C\|f\|_s .$$

Sei $k = 0$, gilt $\mathcal{F}f \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ und nach Korollar 2.8. folgt daher $f \in C_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ und

$$\|f\|_0 \leq \|\mathcal{F}f\|_1 \leq C\|f\|_s$$

Für $k \geq 1$ ist $f \in C_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ und auch $D_w^1 f \in C_0\left(\mathbb{R}^n\right)$. Es gilt nach Korollar 2.8.

$$\|D_i f\|_\infty \leq \|i\zeta_i \mathcal{F}f\|_1 \leq C\|f\|_s .$$

Durch Iteration dieser Aussage erhält man also die Behauptung. □
(Meise, 1992 S. 120)

Beispiel. 3.10. Wir haben im Beispiel 1.29. (2) gezeigt, dass die Funktion $f(x) = |x|^\alpha$ mit $0 < \alpha \leq 1$ für $\Omega = (-1,1)$ zu $W^{1,p}(\Omega)$ genau dann gehört, wenn $\alpha > \frac{1}{2}$ gilt. Die Bedingung vom Satz 3.9. garantiert, dass $\alpha > 0$ gilt. Daher ist die Funktion f stetig.

3.2. Einbettungen in Lebesgue-Räume

Motivation 3.11. In den nächsten Sätzen wollen wir beweisen, dass für $1 \le p < n$ eine Konstante c existiert und die Ungleichung von der Form

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le c\|\nabla_w^1 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1}$$

für alle $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ erfüllt. In dieser Ungleichung kann die Zahl q nicht beliebig gewählt werden. Sie hat eine spezielle Form. Bei Skalierung $f \mapsto f_\lambda(x)$ haben wir

$$f_\lambda(x) := f(\lambda x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda > 0.$$

Wenn man f_λ in die Ungleichung (1) einsetzt, erhält man dann

$$\|f_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le c\|\nabla_w^1 f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2}$$

und

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda x)|^q dx\right)^{1/q} \le c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_w^1 f(\lambda x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Wir wählen $y = \lambda x$

$$\left(\frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^q dy\right)^{1/q} \le c\left(\frac{\lambda^p}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_w^1 f(y)|^p dy\right)^{1/p}.$$

Somit gilt

$$\frac{1}{\lambda^{1/q}}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\lambda}{\lambda^{1/p}}\|\nabla_w^1 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

und

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le c\lambda^{1+n/q-n/p}\|\nabla_w^1 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Die Ungleichung hat nur dann einen Sinn, wenn $1+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}=0$ gilt. D.h. $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$, $q=\frac{np}{n-p}$. Wir sind nun motiviert für die folgende

Definition 3.12. Es sei $1 \le p < n$. Man versteht unter dem Sobolev-Exponent die Zahl

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

oder auch $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, $p* > p$.

Der folgende Satz zeigt, dass die Ungleichung (1) nur für $q = p*$ gilt.

Satz(Gagliardo- Nirenberg- Sobolev) 3.13. Sei $1 \le p < n$. Dann gilt die stetige Einbettung

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^n)$$

Das heißt, es existiert eine Konstante c, abhängig nur von n und p so dass für alle $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\|f\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \le c\|\nabla_w^1 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(Attouch, et al., 2005 S. 196) (Evans, 2002 S. 263-265)

Beweis. Es ist äquivalent, die Ungleichung für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ oder für $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ zu beweisen. Weil $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ist, können wir mittels des Satzes eine Folge f_n von Funktionen in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ finden, so dass f_n gegen f konvergiert in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen daher

$$\|f_n\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \le c\|\nabla_w^1 f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Mit Lemma von Fatou folgt dann

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} &\le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \\ &\le c\lim_{n\to\infty}\|\nabla_w^1 f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = c\|\nabla_w^1 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Wir können also den Satz für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ beweisen.

Es sei zuerst $p = 1$.

Weil f einen kompakten Träger hat, für jedes $i = 1,......,n$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_n)dy$$

und auch

$$\left|f(x)\right| \le \int_{-\infty}^{x_i} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_n)\right| dy\,.$$

Es gilt dann

$$\left|f(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_n)\right| dy$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \le \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_n)\right| dy\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1\,.$$

Wir integrieren diese Ungleichung bezüglich x_1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \le \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_n)\right| dy\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_n)\right| dy\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

Auf die rechte Seite wenden wir die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung an und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_n)\right| dy\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \le$$

$$\le \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_n)\right| dx_1 dy\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Es gilt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \le \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},...,x_n)\right| dx_1 dy\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Wir integrieren die Ungleichung wieder bezüglich $x_2, x_3, ..., x_n$ und finden dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|f\right|^{\frac{n}{n-1}} dx \le \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| dx\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla_w^1 f\right| dx\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Damit ist die Behauptung für $p=1$ bewiesen.

Wir betrachten nun den Fall $1<p<n$. Wir definieren eine Funktion $g:=|f|^{\gamma}$ für $\gamma>1$ und setzen in die obige Ungleichung ein. Dann gilt für $p'=\frac{p}{p-1}$:

$$\begin{aligned}\left\||f|^{\gamma}\right\|_{L^{n/n-1}(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla_w^1 |f|^{\gamma}\right| dx = \gamma\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{\gamma-1}\left|\nabla_w^1 f\right| dx \\ &\leq \gamma\left\||f|^{\gamma-1}\right\|_{p'}\left\|\nabla_w^1 f\right\|_p .\end{aligned}$$

Wir wählen γ so, dass $\frac{\gamma n}{n-1}=\frac{(\gamma-1)p}{p-1}$ gilt, und setzen $\gamma=\frac{(n-1)p}{n-p}$ in $\frac{\gamma n}{n-1}=\frac{(\gamma-1)p}{p-1}=\frac{np}{n-p}=p*$ ein und das beweist unsere Abschätzung. □

Eine einfache Folgerung von Gagliardo- Nirenberg- Sobolev-Satz ist die Poincare-Ungleichung, die wir im Satz 1.19. für, in einer Richtung beschänktes, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ bewiesen haben:

Satz 3.14. Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f\in W_0^{1,p}(\Omega)$ für $1\leq p<n$. Dann gilt

$$\|f\|_{L^q(\Omega)}\leq c\left\|\nabla_w^1 f\right\|_{L^p(\Omega)}$$

Für jedes $1\leq q\leq p*$, die Konstante c abhängig von n, p, q und Ω.

(Evans, 2002 S. 265,266) (Attouch, et al., 2005 S. 198)

Beweis. Sei $f\in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann existieren Funktionen $f_n\in\mathcal{D}(\Omega)$, die gegen f in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ konvergieren. Wir setzen jede Funktion f_n zu einer Funktion $\tilde{f}$ fort, die, außer Ω, null ist. Es gilt also $\|\tilde{f}\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^{p*}(\Omega)}$.Mit dem Gagliardo- Nirenberg- Sobolev-Satz folgt dann

$$\|f\|_{L^q(\Omega)}\leq c\left\|\nabla_w^1 f\right\|_{L^{p*}(\Omega)}$$

wenn $1\leq q\leq p*$. □

Satz 3.15. Es sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Man nehme an, dass $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist. Sei $1 \le p < n$ und $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann ist $f \in L^{p^*}$ mit

$$\|f\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le c\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

wobei die Konstante c nur von n und p abhängig ist. (Evans, 2002 S. 265)

Beweis. Weil $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert dann eine Fortsetzung $Ef = \overline{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, so dass $f = \overline{f}$ in Ω, wobei $\overline{f}$ einen kompakten Träger hat, und es gilt die Ungleichung $\|\overline{f}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Weil f einen kompakten Träger hat, existiert nach Lemma 1.36. Funktionen in $W^{1,p}(\Omega)$ gegen $\overline{f}$ konvergieren. Nach dem Satz(Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) gilt die Ungleichung

$$\|f_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le c\|\nabla_w^1 f_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

und f_m konvergiert gegen $\overline{f}$ in $L^{p^*}(\Omega)$, beziehungsweise $\nabla_w^1 f_m$ konvergiert gegen $\nabla_w^1 \overline{f}$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Daher folgt die Ungleichung

$$\|f\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le c\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \square$$

Satz 3.16. Sei $p = n$. Dann ist die folgende Einbettung stetig für $1 \le q < n$.

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

(Attouch, et al., 2005 S. 202)

3.3. Kompakte Einbettungen

Wir beginnen mit dem Begriff „kompakte Einbettung“.

Definition 3.17. Seien A und B Banach-Räume mit $A \subset B$. Man sagt A ist kompakt eingebettet in B, wenn folgende Bedingungen gelten

1. $\|x\|_B \le C\|x\|_A$ für $x \in A$ und eine Konstante C.
2. Jede beschränkte Folge in A ist präkompakt in B.

Man bezeichnet also die kompakte Einbettung mit $A \subset\subset B$. (Evans, 2002)

Wir brauchen Kolmogorov's Kompaktheitskriterium in $L^p(\mathbb{R}^n)$, um den Rellich-Kondrachov Kompaktheitssatz zu beweisen.

Satz 3.18. Sei $p \in [1, +\infty[$ und sei $\mathcal{K}$ eine Teilmenge von $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\mathcal{K}$ relativ kompakt in $L^p(\mathbb{R}^n)$, wenn die folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathcal{K}$ ist beschränkt in $L^p(\mathbb{R}^n)$,
2. $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\{|x|>R\}}|f(x)|^p dx = 0$ gleichmäßig bezüglich $f \in \mathcal{K}$
3. $\lim\limits_{h\to 0}\|T_a f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$ gleichmäßig bezüglich $f \in \mathcal{K}$ wobei $T_a f(x) = f(x-a)$ die Translation von f um a ist.

Wir können nun den Kompaktheitssatz formulieren und beweisen.

Satz(Rellich-Kondrachov Kompaktheitssatz) 3.19. Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand, dann hat man folgende kompakte Einbettungen:

1. Wenn $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ für ein $q < p^*$.
2. Wenn $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ für ein $1 \le q < \infty$.
3. Wenn $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset C^0(\overline{\Omega})$.

Beweis. Es sei $p < n$. Der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Satz impliziert also

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \le c\|\nabla_w^1 f\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

Wir sollen dann zeigen, dass für eine beschränkte Folge f_n in $W^{1,p}(\Omega)$ eine Teilfolge $f_{n_k} \to f$ in $L^q(\mathbb{R}^n)$ existiert. Mit dem Fortsetzungssatz kann man annehmen, dass die Funktionen f_n einen kompakten Träger in einer beschränkten Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ haben. Wir können also schreiben Wir können also schreiben

$$\sup_n \|f_n\|_{W^{1,p}(U)} < \infty. \qquad (1)$$

Sei η_ε Standard Mollifier. Wir behaupten, dass

$$\eta_\varepsilon * f_n \to f \text{ gleichmäßig in } L^q\left(\mathbb{R}^n\right) \text{ für } \varepsilon \to 0. \tag{2}$$

Wenn f_n glatt sind, folgt dann mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}
\left|\eta_\varepsilon * f_n - f_n\right| &= \int_{B(0,1)} \eta(x-y)\left(f_n(x) - f_n(y)dy\right) \\
&= \left|\int_{B(0,1)} \int_0^1 \eta(x-y) \nabla_w^1 f_n\left(tx + (1-1)y\right)(x-y)dtdy\right| \\
&\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \int_0^1 \eta(x-y) \left|\nabla_w^1 f_n\left(tx + (1-t)y\right)\right| dtdy
\end{aligned}$$

Wir integrieren bezüglich x und mit Transformation $x - y \to z$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_V \left|\eta_\varepsilon * f_n - f_n\right| dx &\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(x-y) \int_0^1 \int_V \left|\nabla_w^1 f_n\left(tx + (1-t)y\right)\right| dxdydt \\
&= \varepsilon \int_0^1 \int_V \left|\nabla_w^1 f_n\left(tz + y\right)\right| dydt
\end{aligned}$$

Durch Approximation gilt diese Abschätzung für $f_n \in W^{1,p}(V)$. Damit haben wir

$$\left\|f_n - f\right\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon \left\|\nabla_w^1 f_n\right\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon c \left\|\nabla_w^1 f_n\right\|_{L^p(V)}.$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen der Beschränktheit von V. Da $\sup_n \left\|f_n\right\|_{W^{1,p}(U)} < \infty$, erhält man

$$\eta_\varepsilon * f_n \to f_n \text{ gleichmäßig in } L^1(V).$$

Weil $q < p^*$, wenden die Interpolationsungleichung für L^p-Normen(Anhang) an, also

$$\left\|\eta_\varepsilon * f_n - f_n\right\|_{L^q(V)} \leq \left\|\eta_\varepsilon * f_n - f_n\right\|_{L^1(V)}^{\theta} \left\|\eta_\varepsilon * f_n - f_n\right\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

wobei $1/q = \theta + (1-\theta)/p^*$, $0 < \theta < 1$ sind. Der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Satz impliziert dann:

$$\left\|\eta_\varepsilon * f_n - f_n\right\|_{L^q(V)} \leq c \left\|\eta_\varepsilon * f_n - f_n\right\|_{L^1(V)}^{\theta}.$$

Folglich $\eta_\varepsilon * f_n \to f_n$ gleichmäßig in $L^1(V)$ und $L^q(V)$.

Wir behaupten nun für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Folge $(\eta_\varepsilon * f_n)$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig.
Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} |\eta_\varepsilon * f_n| &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} |\eta_\varepsilon(x-y)||f_n(y)|dy \\ &\leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^1(V)} \leq c/\varepsilon^n < \infty \end{aligned}$$

und auch

$$\begin{aligned} |\nabla_w^1(\eta_\varepsilon * f_n)| &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla_w^1(\eta_\varepsilon(x-y))||f_n(y)|dy \\ &\leq \|\nabla^1\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f_n\|_{L^1(V)} \leq c/\varepsilon^{n+1} < \infty \end{aligned}$$

Dann folgt unsere Behauptung, dass $(\eta_\varepsilon * f_n)$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Es ist noch zu zeigen, dass eine Teilfolge existiert, so dass

$$\limsup_{j,k} \|f_{n_j} - f_{n_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta \tag{3}$$

gilt.
Wir haben schon gezeigt, dass $\eta_\varepsilon * f_n \to f_n$ gleichmäßig in $L^q(V)$. Wir betrachten nun die Funktionen f_n, die kompakte Träger in der beschränkten Menge V haben. Die f_n sind gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Wir können dann den Arzela-Ascoli Kompaktheitskriterium(siehe A.3.) verwenden. Man kann also akzeptieren, dass es eine Teilfolge $(\eta_\varepsilon * f_{n_k})$ von $(\eta_\varepsilon * f_n)$ gibt, die gleichmäßig konvergent in V ist. Dann gilt (3). □
(Attouch, et al., 2005)

Wir haben erst mit Sobolevräume ganzzahliger Ordnung gearbeitet. Sie sind Banachräume von Funktionen in $L^p(\Omega)$. Wir haben die Eigenschaften von Sobolev-Funktionen beobachtet. Mit den Dichtheitsresultaten werden viele Eigenschaften von klassich differenzierbaren Funktionen für Sobolev-Funktionen anwendbar. Wir haben zunächst mit Hilfe von Fouriertransformation die Sobolevräume beschrieben. Als letztes haben wir Einbettungssätze untersucht. Wir haben versucht die stetige Einbettungen von Sobolevräumen in den Räume von stetigen Funktionen und in den L_p-Räumen zu bilden. Mit bestimmten Voraussetzungen kann man also auch kompakte Einbettungen finden, wie wir mit dem Rellich-Kondrachov Kompaktheitssatz gezeigt haben.

ANHANG

A.1. Hölderräume, Hölder-Stetigkeit

Definition: Man versteht unter dem Raum $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, den Raum von in Ω beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen. $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ besteht also aus Funktionen, die beschränkte und gleichmäßig stetige Ableitungen für $|\alpha| \le m$ besitzen. Auf $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ definiert man die Norm

$$\|f\|_{m,\infty} := \max_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} \left|D^\alpha f(x)\right|$$

Definition: Eine Funktion auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt hölderstetig mit Exponent α mit $0 < \alpha < 1$, wenn für alle $x, y \in \Omega$ gilt

$$\left|f(x) - f(y)\right| \le c|x-y|^\alpha$$

wobei die Konstante c unabhängig von x und y ist. Für $\alpha = 1$ nennt man f lipschitzstetig. Die kleinstmögliche Konstante c wird wie folgt definiert

$$[f]_{C^\alpha} = \sup_{x\neq y} \frac{\left|f(x) - f(y)\right|}{|x-y|^\alpha}$$

Definition: Man bezeichnet mit $C^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ für $m \in \mathbb{N}_0, 0 < \alpha \le 1$, den Unterraum von Funktionen in $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$, deren Ableitungen von der Ordnung kleiner oder gleich m hölderstetig mit Exponent α bzw. lipschitzstetig sind. Man definiert auf $C^{m,\alpha}\left(\Omega\right)$ folgende Norm, die endlich ist:

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} := \sum_{|\alpha|\le m} \left\|D^\alpha f\right\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} + \sum_{|\alpha|=m} \left[D^\alpha f\right]_{C^\alpha} .$$

Satz: Der Raum $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ ist ein Banachraum.

A.2.Verallgemeinerte Hölder –Ungleichung. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le p_i \le \infty$ für $1 \le i \le n$ und $1 \le p \le n$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$$

Seien $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ für $1 \le i \le n$. Dann folgt die Ungleichung

$$\int_\Omega |f_1, \ldots, f_n| \, dx \le \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$

Beweis: Durch Induktion auf Hölder-Ungleichung (Evans, 2002)

A.3. Satz von Arzela-Ascoli. Sei eine Folge von Funktionen $f_n, n \in \mathbb{N}$, auf $\mathbb{R}^n$ gleichgradig gleichmäßig stetig mit

$$|f_n| \le K, \ n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n$$

für eine Konstante K. Dann existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge f_{n_k} und eine stetige Funktion f so dass f_{n_k} gegen f gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ konvergiert.
Gleichmäßig gleichgradig bedeutet dass für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|x - y| < \delta$ impliziert

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

A.4. Lebesguescher Grenzwertsatz über dominierte Konvergenz.
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und f_k eine punktweise konvergente Folge meßbarer Funktionen . Gibt es eine Funktion g in $L^1(\Omega)$ mit $|f_k(x)| \le g(x)$ für alle k und alle $x \in \Omega$, so gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x) \, dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k(x) \, dx.$$

(Dobwolski, 2006 S. 68)
A.5. Interpolationsungleichung für L^p -Normen.
Man nehme an, dass $1 \le s \le r \le t \le \infty$ mit

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}.$$

Sei also $f \in L^t(\Omega) \cap L^s(\Omega)$. Dann ist $f \in L^r(\Omega)$ und

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \le \|f\|_{L^s(\Omega)}^{\theta} \|f\|_{L^t(\Omega)}^{1-\theta}.$$

(Evans, 2002 S. 623)

Literaturliste

Adams, D. R. und Heddberg, L. 1996. *Potential Theory.* s.l. : Springer-Verlag, 1996.
Adams, R. A. 1975. *SobolevSpaces.* New York : Academic Press, 1975.
Alt, W. H. 1999. *Lineare Funktionalanalysis.* s.l. : Springer-Verlag, 1999.
Attouch, H., Buttazzo, G. und Michaille, G. 2005. *Variational analysis in Sobolev Spaces and BV Spaces.* s.l. : MPS-SIAM Series on Optimization, 2005.
Bergh J., Löfström J. 1976. *Interpolation Spaces.* s.l. : Springer-Verlag, 1976.
Burenkov, V., ,. 1998. *Sobolev Spaces on Domains.* s.l. : Teubner-Texte , 1998.
Dobwolski, M. 2006. *Angewandte Funktionalanalysis.* Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2006.
Dubinskij, J. 1986. *Sobolev Spaces of Infinite Order and Differential Equations.* s.l. : Teubner-Verlag, 1986.
Evans, L. 2002. *Partial Differential Equations.* s.l. : American Mathematical Society , 2002.
Gol`dstein, V. M. und Reshetnyak Yu, G. 1999. *Quasiconformal Mappings and Sobolev Spaces.* s.l. : Kluver Academic Publishers, 1999.
Haslinger, F. 2006. *Funktionalanalysis1,2.* 2006.
Hebey, E. 1999. *Sobolev Spaces on Riemann Manifolds.* New York : Springer-Verlag, 1999.
Hirsch, F. und Lacombe, G. 1999. *Elemens of Functional Analysis.* s.l. : Springer- Verlag, 1999.
Kufner, A. 1977. *Function Spaces.* s.l. : Noordhoff International Publishing, 1977.
—. 1980. *Weighted Sobolev Spaces.* s.l. : Teubner Verlagsgesellschaft, 1980.
Lebedev, V.L. 1997. *An Introduction to Functional Analysis and Computational Mathematics.* s.l. : Birkhäuser, 1997.
Ljusternik, L. A. und Sobolev, W. L. 1968. *Elemente der Funktionalanalysis.* 1968.
Maz`ja, V.G. 1985. *Sobolev Spaces.* s.l. : Springer- Verlag, 1985.
Meise, R. und Vogt, D. 1992. *Einführung in die Funktionalanalysis.* Wiesbaden : Vieweg, 1992.
Michlin, S.G. 1978. *Partielle Differential Gleichungen in der Mathematischen Physik.* Berlin : Akademie Verlag, 1978.
Nikol`skii, S.M. 1975. *Approximation of Functions of several Variablesand Imbed-ding Theorems.* s.l. : Springer-Verlag, 1975.
Riedrich, T. und Göpfert, A. 1980. *Funktionalanalysis,.* s.l. : Teubner Verlagsgesellschaft, 1980.
Schmeisser, C.,. *Skriptum zur Partiellen Diffrerential Gleichungen.*
Sobolev, S.L. 1964. *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik.* Berlin : Akademie-Verlag, 1964.
Stummel, F. 1969. *Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen.* s.l. : Springer Verlag , 1969.
Tanebe, Hiroki. *Functionalanalytic Methods for Partial Diffrential Equetions,.* s.l. : Mercel Dekker.
Turesson, B. O. 2000. *Nonlinear Ptential Theory and Weighted Sobolev Spaces.* Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 2000.
Wloka, J. 1982. *Partielle Diffrentialgleichungen.* Stutgart : B. G. Teubner, 1982.

Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name:	Sümeyya PAKSOY
Geburtsdatum:	01.03.1982
Geburtsort:	Develi/Türkei
Staatsangehörigkeit:	Türkei

Ausbildung

1988-1993:	Volksschule in Mersin/Türkei
1993-1999:	Gymnasium in der Türkei
2000-2001:	English Preperation School in Istanbul/Türkei
01/2002-02/2002:	International Deutschkurs in Wien
03/2002-04/2009:	Studium der Mathematik an der Universität Wien