universität wien

DIPLOMARBEIT

DIFFERENTIALRECHNUNG: EIN SCHULBUCHVERGLEICH UND WESENTLICHE ASPEKTE VON EXTREMWERTAUFGABEN IM UNTERRICHT

zur Erlangung des akademischen Grades
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)
an der Fakultät für Mathematik
der Universität Wien

Verfasserin:	Anita Ramharter
Matrikelnummer:	0300884
Studienkennzahl:	A 190/406/423
Studienrichtung:	LA Mathematik/Chemie
Betreuer:	Univ. Prof. Dr. Hans Humenberger

Wien, im Juni 2009

Dem Denken sind keine Grenzen gesetzt.

Man kann denken, wohin und soweit man will.

Ernst Jandl

DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich meinen Eltern, Inge und Herbert Ramharter, danken, die mich, solange ich denken kann, unterstützt und mir diese Ausbildung ermöglicht haben.

Der Dank richtet sich aber auch an Freunde und Freundinnen, Studienkollegen und –kolleginnen, die mich auf meinem Bildungsweg begleitet haben und mir immer mit Rat und Tat beigestanden sind. Durch Freunde wird der Weg zwar nicht kürzer, dafür aber heller.

Zu guter Letzt möchte ich meinem Betreuer, Univ. Prof. Dr. Hans Humenberger für sein Engagement danken. Er stand mir in zahlreichen Gesprächen mit wertvollen Tipps und Ratschlägen zur Seite.

INHALTSVERZEICHNIS

1 EINFÜHRUNG UND PROBLEMSTELLUNG

Die Motivation das Thema Differentialrechnung zu wählen, kam durch Univ. Prof. Dr. Hans Humenberger. Im WS 07/08 besuchte ich Vorlesung und Proseminar zum Thema Schulmathematik Differentialrechnung. Im gleichen Semester absolvierte ich das fachbezogene Praktikum und wurde dabei auf Schwierigkeiten – insbesondere bei Extremwertaufgaben – aufmerksam. Die SchülerInnen fragten immer wieder nach, wozu man die zweite Ableitung braucht. Außerdem waren sie von den eher theoretischen Beispielen nicht gerade begeistert. In dieser Zeit erkannte ich eine gewisse Notwendigkeit, die Aufgaben anwendungsorientierter zu gestalten und die Differentialrechnung so zu öffnen, dass es für SchülerInnen nicht nur darum geht, eine Aufgabe nach einem vorgegebenen Algorithmus zu lösen.

Das Kapitel der Differentialrechnung und insbesondere der Extremwertaufgaben weist mehrere – meiner Meinung nach – widersprüchliche Facetten auf.
Zum einen werden die SchülerInnen zu einem gewissen Algorithmusrechnen erzogen, und man ist als LehrerIn vielleicht froh darüber, dass die SchülerInnen die Aufgaben (Extremwertaufgaben, Kurvendiskussionen) „verstanden" haben. Verstehen wird bei Extremwertaufgaben oft aufgefasst als: erste Ableitung bilden, null setzen, den so berechneten Wert in die zweite Ableitung einsetzen und bestimmen, ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt. Extremwertaufgaben und Kurvendiskussionen sind sozusagen eine Anwendung eines fertigen Schemas. Hierzu ist zu sagen, dass es im Prinzip zwei Typen von LehrerInnen gibt. *Typ A* ist glücklich mit der jetzigen Situation, weil beim Algorithmusrechnen die SchülerInnen und sie selbst beschäftigt und nicht überfordert sind. Außerdem sind die Aufgaben korrekturfreundlich, nahezu unerschöpflich und sehr verlässlich. Sowohl LehrerInnen als auch SchülerInnen wissen, was richtig und was falsch ist.
Andererseits sehnt man sich als Lehrperson nach offeneren Aufgaben, inhaltlicher Tiefe und stärkerer Vernetzung mit der Lebenswelt der SchülerInnen. Hier kommt *Typ B* ins Spiel. Dieser Typ spürt die Eintönigkeit und versucht die starre und traditionelle Aufgabenkultur aufzubrechen, indem er eigene, tiefer gehende Aufgaben zusammenstellt. Algorithmusrechnen bietet zwar eine gewisse Sicherheit, aber man fragt sich des Öfteren, welchen Zweck Kurvendiskussionen (besser wäre die

Bezeichnung „Funktionsuntersuchung“) überhaupt erfüllen sollen. In Zeiten von Funktionenplotter kann und darf das oberste Ziel von Funktionsuntersuchungen nicht mehr das Zeichnen der Funktion sein (*siehe Kapitel 4*). Somit stecken SchülerInnen und LehrerInnen in der Klemme, da die Aufgaben einerseits leicht vergleichbare und sichere Ergebnisse liefern, andererseits schnell langweilig werden.

Ich möchte in meiner Diplomarbeit zunächst diese Widersprüchlichkeit und den didaktischen Hintergrund erläutern (*Kapitel 2*). Weiters werde ich gängige Schulbücher genauer unter die Lupe nehmen (*Kapitel 3*). Anhand von Beispielen zeige ich schließlich Möglichkeiten der Öffnung auf (*Kapitel 4*). Viele SchülerInnen und LehrerInnen sind es leid, Aufgabe für Aufgabe nach strengen Algorithmen zu lösen und sehnen sich nach Aufgaben aus der Lebenswelt der SchülerInnen und somit nach mehr Anwendungsorientierung.

2 FACHDIDAKTISCHE ASPEKTE

2.1 SchülerInnen – wie Tag und Nacht…

Wie schon eingangs erwähnt, gibt es zwei Typen von Lehrpersonen. Zu jedem LehrerInnen-Typ gibt es ein passendes SchülerInnen-Pendant.

So sind beispielsweise SchülerInnen vom *Typ A* sehr erfreut darüber, dass keine Begriffe und Beweise mehr verlangt werden. Dafür werden „richtige“ Beispiele gerechnet werden, bei denen man weiß, was man machen muss, damit man zur Lösung gelangt. Man braucht sich nur den Algorithmus zu merken, um auch die nächsten fünfzig Beispiele genauso lösen zu können. Des Weiteren tauchen keine unerwarteten Probleme oder Überraschungen auf, die diesen SchülerInnen-Typ frustrieren könnten. Dadurch ist dieses Stoffgebiet auch gut zu lernen.

Typ B erwartet sich vom Mathematikunterricht etwas mehr als nur Algorithmen auswendig zu lernen, um diese dann auf zahlreiche Beispiele anzuwenden. Diese SchülerInnen suchen Herausforderungen und wollen etwas Neues entdecken und begründen.

2.2 Didaktischer Hintergrund

Ich denke, dass ernsthafte Anwendungsbeispiele notwendig sind, um die Relevanz der Mathematik in der Welt und die Methode an sich glaubhaft zu machen. Dabei sollte auf die Entwicklung grundlegender Intuitionen Wert gelegt werden.

Heinrich Winter formulierte Mitte der 90er Jahre drei Grunderfahrungen, die der Mathematikunterricht anstreben und miteinander verknüpfen sollte:

(G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(G2) Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(G3) In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

(Quelle: http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienDB/45/muundallgemeinbildung.pdf (25.11.08))

Die SchülerInnen sollen erkennen können, welche Rolle Mathematik in der Umwelt spielt (→*G1*). Es ist auch wichtig zu begreifen, dass Mathematik eine eigene abstrakte Welt für sich ist, mit Symbolen, Bildern und Formeln (→*G2*). Heuristische Fähigkeiten und Problemlösefähigkeit (→*G3*) sind Grundlage für ein Verstehen der Welt. Um solche Fähigkeiten zu erlangen, ist es notwendig sich immer wieder gedanklichen Herausforderungen zu stellen. Mathematikunterricht ist meiner Meinung auch dazu da, die SchülerInnen zu schulen, solchen Herausforderungen mit einer freien, kreativen und positiven Haltung zu begegnen.

Der Einsatz eines Computers erweist sich für alle drei Grunderfahrungen als sehr hilfreich. Zum einen kann er für Modellbildungen und Simulationen verwendet werden (→*G1*), zum anderen werden die Grundvorstellungen von mathematischen Begriffen vor allem durch dynamische Visualisierung positiv beeinflusst (→*G2*). Darüber hinaus regt der Computer zu heuristisch-experimentellem Arbeiten beim Problemlösen (→*G3*) an. Gegner von Computereinsatz im Unterricht befürchten, dass das Erschließen von Begriffen, Zusammenhängen und Beweisen zur notwendigen, aber lästigen Angelegenheit wird.

Entscheidend für die Qualität des (Mathematik-)Unterrichts ist, keine der drei Grunderfahrungen zu vernachlässigen. Durch geeignete Wahl der Lerninhalte, lassen sich alle drei Grundvorstellungen miteinander vernetzen:

- Bei der Auswahl eines Themas sollte man darauf achten, dass es von Weite, Fülle und Sinn gekennzeichnet ist. (Quelle: Vorlesung Einführung in die Fachdidaktik, Stefan Götz, WS 07/08)

- Fundamentale Ideen ziehen sich wie ein „roter Faden“ durch ein Stoffgebiet und werden nach dem Spiralprinzip auf steigendem Niveau immer wieder behandelt (*Weite*).
- SchülerInnen sollen die vielfältige Anwendbarkeit und Relevanz von mathematischen Einzelgebieten erkennen können. (*Fülle*)
- Die gewählten Aufgaben sollten eine lebensweltliche Bedeutung für SchülerInnen aufweisen und im Alltagsdenken verankert sein. (*Sinn*)

- Um im Mathematikunterricht das Verständnis für das Inhaltliche zu stärken, sollte mehr Wert auf den Aufbau von Grundvorstellungen gelegt werden. Vorteilhaft wäre, bei Begriffsbildungen und Begründungen eher inhaltlich und weniger formal zu argumentieren.

- Erfolgreiche Lernprozesse zeichnen sich dadurch aus, dass neue Inhalte mit dem Vorwissen vernetzt werden. Hierbei unterscheidet man die vertikale und horizontale Vernetzung. Unter vertikalen Vernetzungen versteht man Ideen, die sich wie ein roter Faden durch ein Thema beziehungsweise durch einen ganzen (Unterrichts-)Gegenstand ziehen. Ein Beispiel hierzu wäre die Idee der Änderung. Absolute und relative Änderungen kommen in der Bruch- und Prozentrechnung schon in der Unterstufe vor und begleiten die SchülerInnen bis zum Ableitungsbegriff – als mittlere und lokale Änderungsrate – in der Oberstufe. Bei der horizontalen Vernetzung geht es um den Brückenschlag zwischen den drei großen Lernbereichen der Obenstufenmathematik, also der Analysis, der analytischen Geometrie und der Stochastik. Ein Beispiel für die Vernetzung mit der Stochastik ist die Normalverteilung. Das Bindeglied zwischen Analysis und Raumgeometrie sind Kurven.

- Der Mathematikunterricht sollte durch modellbildende Aktivitäten realitätsnäher gestaltet werden. Bei der mathematischen Modellierung wird der Modellbildungskreislauf – oft mehrfach – durchlaufen (*siehe Abbildung 1*).

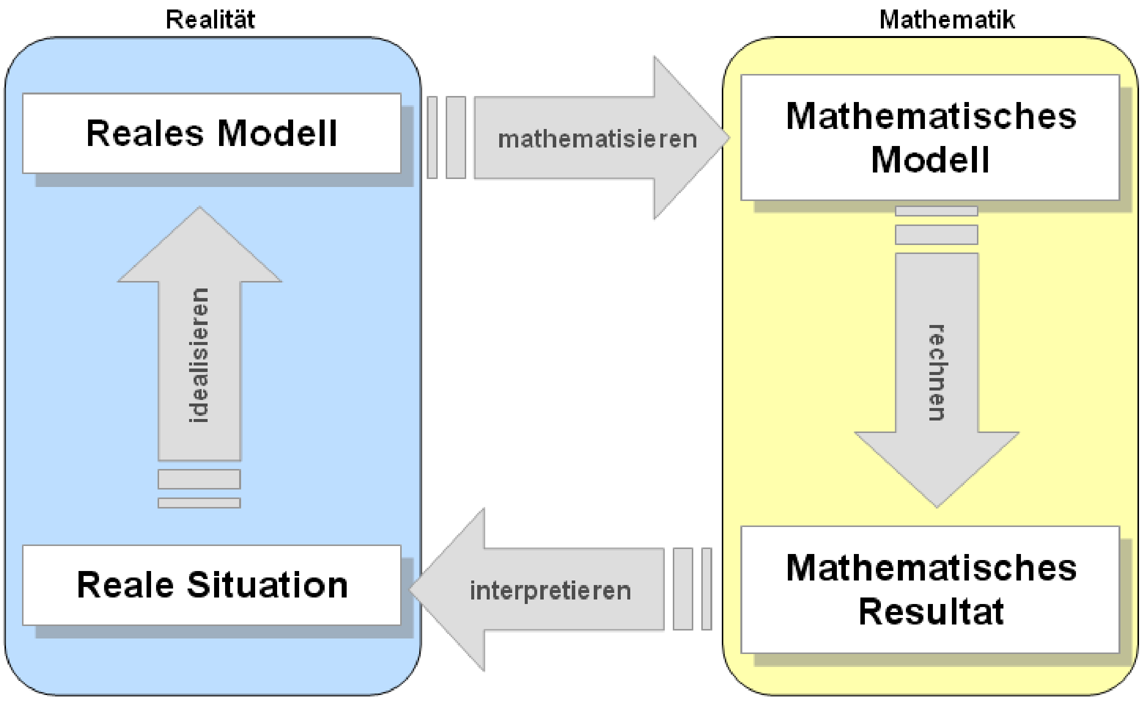


Abbildung 1: Der Modellbildungskreislauf

Viele Modellbildungskreisläufe sind im Grunde gleich. In *Abbildung 1* wird einer von vielen Modellbildungskreisläufen dargestellt. Zuerst überträgt man eine *reale Situation* aus dem Alltag durch Idealisieren in ein *reales Modell*. Im nächsten Schritt, der sich oft als der schwierigste erweist, wird das *reale* in ein *mathematisches Modell* überführt, wobei die in der Mathematik üblichen Zeichen und Formeln verwendet werden. Im dritten Schritt wird durch *Rechnen* das Modell innermathematisch gelöst und man erhält ein *mathematisches Resultat*. Durch einen Computer kann dieser Schritt beschleunigt werden. Das *Resultat* wird dann *interpretiert* und auf die reale Situation zu Beginn angewendet.

Wie können die drei Grunderfahrungen nun auf die Analysis umgelegt werden?
Die Erste betrachtet jene außermathematischen Probleme, die sich mit analytischen Begriffen und Methoden modellieren lassen. Ein Beispiel hierfür wäre eine Modellierung mithilfe des Ableitungsbegriffs (im Verständnis der lokalen Änderungsrate; *siehe Kapitel 4*).

Die zweite Grunderfahrung richtet den Blick auf den Prozess der Begriffsentwicklung (Grenzwert- und Ableitungsbegriff) und auf die Entwicklung und Leistungsfähigkeit analytischer Kalküle (Ableitungsregeln).
Die dritte Grunderfahrung wäre zum Beispiel das Argumentieren mit dem intuitiven Grenzwertbegriff. Der Ableitungsbegriff wird auf der Grundlage des intuitiven Grenzwertbegriffs im Sinne von „wird beliebig klein, wenn genügend nahe“ eingeführt.
Alle drei Grunderfahrungen zu vernetzen könnte bedeuten, nach Problemen in unserer Welt Ausschau zu halten, die durch analytische Grundbegriffe modellierbar sind, sich mit elementarer analytischer Theorie lösen lassen und auch heuristische Strategien herausfordern (*siehe Beispiele in Kapitel 4).*

2.3 Kritik

Meist werden die Grunderfahrungen *G1* (Anwendungsorientierung) und *G3* (heuristische Denk- und Arbeitsweisen) für *G2* (analytische Ideen und Zusammenhänge) vernachlässigt. Leider wird in der Praxis häufig *G2* dann noch auf den Kalkülaspekt reduziert.
Viele LehrerInnen wollen der inneren Systematik dar Analysis gerecht werden und geben in weiterer Folge heuristischen Denk- und Arbeitsweisen kaum Raum. (*Analysis verständlich unterrichten*, S. 4) Oft werden zugunsten der Analysis als entwickelte Theorie heuristische Arbeitsweisen und Anwendungen vernachlässigt. Durch die Art der Aufgaben und Prüfungen wird die Kalkülorientierung zusätzlich stärker betont. Anwendungen werden des Öfteren auf wenige maßgeschneiderte Aufgaben reduziert und Anwendungsorientierung im Sinne modellbildender Aktivitäten kommt so gut wie gar nicht vor. Das soll nicht heißen, dass kalkülhaftes Arbeiten zur Gänze „verboten“ sein soll. Ich denke, man sollte die richtige Balance zwischen heuristischen und kalkülhaften Arbeitsweisen finden.
Gerade weil die Analysis nicht als logische Fortsetzung und Verstärkung des Alltagsdenkens verstanden werden kann, ist es umso schwieriger (und auch notwendiger) das richtige Mittelmaß zwischen Anschaulichkeit und analytischem Denken zu finden, um den SchülerInnen nicht die Freude an der Mathematik zu nehmen.

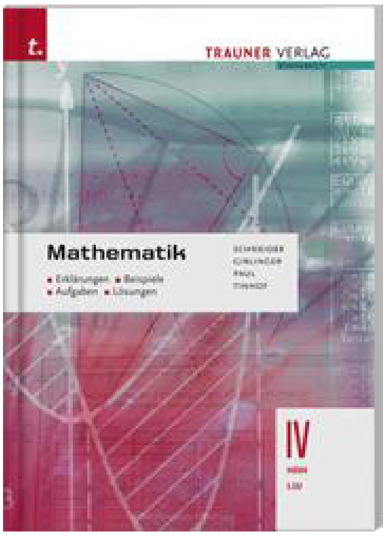
3 AUFBAU DER SCHULBÜCHER

Im kommenden Abschnitt werde ich mich mit ausgewählten Schulbüchern etwas genauer auseinandersetzen und diese auch kritisch beleuchten.

Meine Auswahl beschränkt sich auf vier Mathematikbücher, welche in unterschiedlichen Schultypen verwendet werden. Die Palette reicht vom „Klassiker der AHS“ bis zum eher unbekannten HAK Schulbuch.

<table>
<tr>
<td>

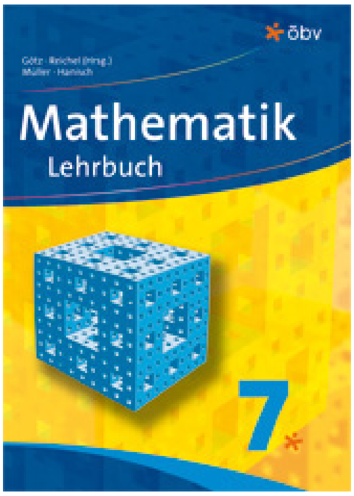
Mathematik IV (HAK, LW)



http://www.trauner.at/buchdetail.aspx?artnr=05122423&unterkat=17 (18.02.09)

</td>
<td>

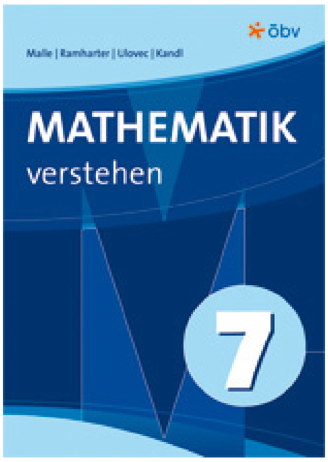
Mathematik Lehrbuch 7 (AHS)



http://www.oebv.at/sixcms/list.php?page=titelfamilie&titelfamilie=Mathematik-Lehrbuch&modul=produktdetail&isbn=3-209-04956-8 (18.02.09)

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Mathematik verstehen 7 (AHS)



http://www.oebv.at/sixcms/list.php?page=titelfamilie&titelfamilie=Mathematik+verstehen&modul=produktdetail&isbn=3-209-04952-0 (18.02.09)

</td>
<td>

Ingenieur-Mathematik 3 (HTL)

http://www.dorner-verlag.at/detailansicht.php?id=978-3-7055-0157-7 (18.02.09)

</td>
</tr>
</table>

3.1 Mathematik IV (Schneider, Girlinger, Paul, Tinhof)

Zu Beginn fällt auf, dass dieses Lehrbuch für Handelsakademien und höhere Lehranstalten für Land- und Forstwirtschaft schlicht und übersichtlich gestaltet ist und dass der Theorie- vom Aufgabenteil getrennt ist. Das Kapitel „Differenzialrechnung“ umfasst etwa 100 Seiten. Zuvor beschäftigt man sich mit Kurs- und Rentabilitätsrechnung, Investitionsrechnung, Aktienanalyse sowie Grenzwerten von Folgen und Funktionen. Die SchülerInnen werden mit „Sie“ angesprochen.
Schon in den ersten Zeilen ist die Rede von den Ursprüngen der Integralrechnung, Tangentenproblem und infinitesimalen Überlegungen. Infinitesimale Überlegungen werden hier mit „Überlegungen mit unendlich kleinen Schritten“ übersetzt. Allerdings werden die SchülerInnen mit dem Satz „Ohne infinitesimale Überlegungen arbeiten auch heute viele Computerprogramme“ ein wenig verwirrt. Der Leser fragt sich, wozu diese Information wohl dienen mag und man hat den Eindruck, als bräuchte man keine infinitesimalen Überlegungen.
In den nächsten Absätzen wird vom Tangentenproblem und über den geschichtlichen Hintergrund gesprochen. Die Autoren erklären, dass Kepler „gezeigt hatte, dass sich im Hochpunkt einer Kurve zwei „unendlich nahe“ beieinander liegende Ordinaten nicht voneinander unterscheiden“. Mit Fermats Methode kann man Extremstellen auffinden und die Steigung der Tangente berechnen – wozu das (in anwendungsorientierter Hinsicht) interessant sein könnte, wird nicht erwähnt. Dann wird die erste Ableitung $x \to y' = \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ohne jegliche Erklärung angeführt und erwähnt, dass Fermats Methode nicht bewiesen werden kann, weil Δx von Fermat nicht als unendlich klein aufgefasst wurde. Was die erste Ableitung zu bedeuten hat und was Fermats Methode überhaupt ist, wird nicht genauer erläutert. Im nächsten Absatz wird Leibniz mit seinem Aufsatz „Neue Methode für die Maxima-, Minima- und Tangentenbestimmung, die weder vor den gebrochenen noch vor den irrationalen Größen halt macht, und eine besondere Rechnungsart dafür“, seiner Schreibweise und seiner mangelnden Zeit für Mathematik als Beitrag zur heutigen Differentialrechnung erwähnt. Im darauf folgenden Abschnitt wird Newton mit seiner Fluxionsrechnung, als Hilfsmittel der Physik zur Berechnung der Geschwindigkeit, angeführt. Anschließend wird die Schwierigkeit der Definition eines Differentials verdeutlicht, indem die Sichtweisen verschiedener Mathematiker und Philosophen

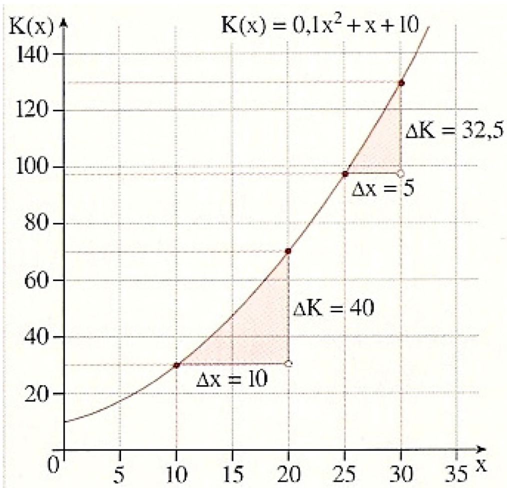
dargelegt werden. Alles in allem würde ich die Differentialrechnung nicht auf diese Art und Weise einführen, da für mich zu viele Begriffe vorkommen, mit denen die SchülerInnen nichts anfangen können, wie zum Beispiel Integralrechnung, Tangentenproblem, infinitesimale Überlegungen oder Fluxionsrechnung.

Wahrscheinlich aufgrund des Gebrauchs dieses Schulbuches an Handelsakademien und höheren Lehranstalten für Land- und Forstwirtschaft, weist das einführende Beispiel einen wirtschaftlichen Hintergrund auf.

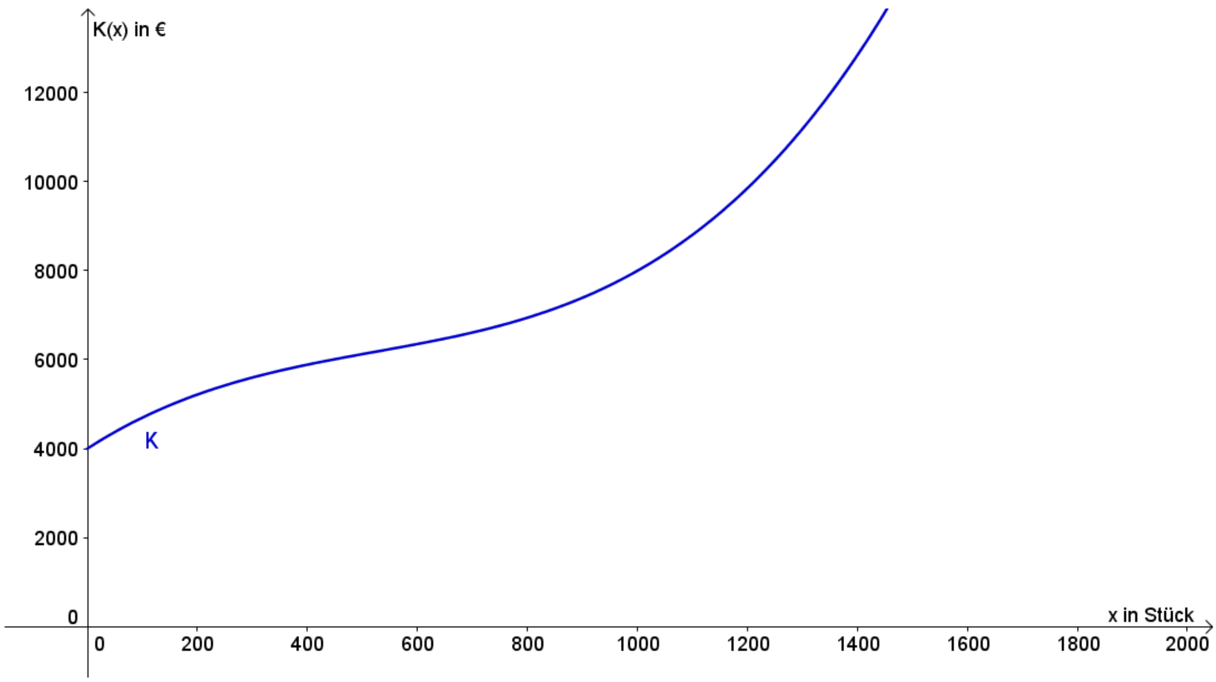
Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}1\,x^2 + x + 10$, wobei x die produzierte Menge in Mengeneinheiten (ME) und K die Kosten in Geldeinheiten (GE) ist.
Der Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und den dabei anfallenden Kosten lässt sich durch eine Wertetabelle darstellen:

x	0	5	10	15	20	25	30
K(x)	10	17,5	30	47,5	70	97,5	130

Hier fällt auf, dass die Kosten steigen, wenn größere Mengen produziert werden. Dies wird auch durch eine Grafik verdeutlicht:



Dieser Sachverhalt stimmt in den wenigsten Fällen mit der Realität überein. Üblicherweise nehmen die Kosten bei steigender Stückzahl langsamer zu. Somit verringern sich die Stückkosten, je mehr produziert wird. Ich würde diesen Sachverhalt beispielsweise mit folgender Funktion beschreiben:



Bevor überhaupt ein Stück eines Produktes produziert werden kann, fallen Fixkosten an. Angenommen diese Fixkosten liegen bei 4.000 € (Miete für die Produktionshalle, Löhne für Mitarbeiter, Kosten für Maschinen …). Ab einem gewissen Punkt nehmen die Kosten langsamer zu. Das wäre beispielsweise durch Mengenrabatte für die Rohstoffe zu erklären. Außerdem wird in diesem Bereich die Kapazität von Maschine und Mitarbeiter gut ausgenutzt. Es fallen weder Kosten für Überstunden noch Mehrkosten für Wartung und Ankauf von Maschinen an. Irgendwann ist der Punkt erreicht, bei dem die Kosten wieder steigen. Hier sind die wie schon erwähnten Kosten für Überstunden der Mitarbeiter, Wartung und Ankauf von Maschinen zu zahlen. Möglicherweise muss auch die Lagerhalle vergrößert werden. Rein intuitiv kann man sagen, dass es am günstigsten sein wird, wenn man etwa 1.000 Stück produziert. In diesem Bereich fallen kaum Mehrkosten an. Dazu kann man, wie im Schulbuch angeführt, die Kostenänderungen für verschiedene Bereiche, die durchschnittliche Kostenänderung und die Grenzkosten berechnen.

In den darauf folgenden Kapiteln werden der Differenzen- und der Differentialquotient genauer betrachtet. Leider werden sie nicht anhand des Einführungsbeispiels, sondern allgemein als (mittlere) Änderungsrate und Steigung der Sekante bzw. Tangente erklärt.

Der Differenzenquotient wird in zwei (sehr „x-lastigen“) Schreibweisen angegeben:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nach der Definition werden in einen Grafen drei Geraden eingezeichnet – die Sekante, Tangente und Passante – und anschließend wird noch ein Beispiel gerechnet.

Der Differentialquotient wird nur noch in einer Schreibweise angegeben:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x = x_0} = f'(x_0)$$

Danach folgen Erklärungen bezüglich Aussprache und „Charakteristik“ des Begriffes „Differentialquotient“, wie etwa: „Trotz des Namens Differenzialquotient handelt es sich nicht um einen Quotienten, sondern um einen Grenzwert. Es wäre falsch, durch d kürzen zu wollen.“ oder „Der Differenzialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten und beschreibt die Änderung des Funktionswerts an einer bestimmten x-Stelle und nicht ihren Durchschnittswert in einem Intervall.“ Hätte eine Einführung mit der Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit stattgefunden, könnte man nun auf diese Begriffe verweisen. Es folgen die Definition von Differenzierbarkeit und ein Beispiel. Wie schon beim einführenden Kostenbeispiel wird auch hier mit Intervallschachtelungen gerechnet. Dabei kann man gut sehen, dass sich der Differenzenquotient einem bestimmten Wert nähert, je kleiner das Intervall wird. Es folgt eine geometrische Deutung – eine inhaltliche Deutung und die Anwendungsorientierung bleiben leider aus.

B SbX

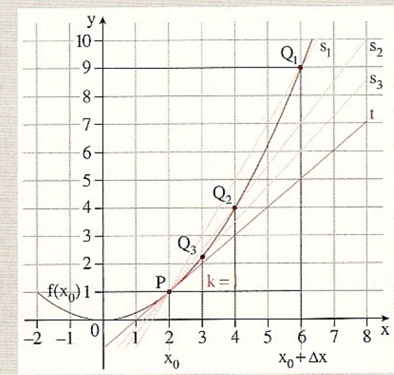
Wir berechnen die **Änderungsrate** der Funktion f mit $y = f(x) = \frac{x^2}{4}$ **an der Stelle** $x_0 = 2$.
Als Nullfolge für Δx wählen wir (4; 2; 1; 0,1; 0,01; …)

Wir erhalten eine Folge von Differenzenquotienten:

Intervall $[x_0; x]$	$\Delta x = x - x_0$	$\Delta y = f(x) - f(x_0) = \frac{1}{4}x^2 - 1$	Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
[2; 6]	4	8	2
[2; 4]	2	3	1,5
[2; 3]	1	1,25	1,25
[2; 2,1]	0,1	0,1025	1,025
[2; 2,01]	0,01	0,010025	1,0025
$x \to x_0$	$\Delta x \to 0$	$\Delta y \to 0$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 1$

Geometrische Deutung:

Durchläuft Δx die Werte einer Nullfolge, so ergibt sich z. B. eine Folge von Punkten $Q_1(6\,|\,9)$, $Q_2(4\,|\,4)$, $Q_3(3\,|\,2{,}25)$, …, die sich immer mehr dem Punkt $P(2\,|\,1)$ nähern. Entsprechend nähert sich die Folge der zugehörigen Sekanten $s_1, s_2, s_3, \ldots$ der Tangente im Punkt P, die Sekanten „drehen sich in die Tangente". Bei vollzogenem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ erhalten wir als Grenzwert der Sekantensteigungen die Tangentensteigung. Die **Steigung der Tangente** ist die **Steigung der Kurve in P.**



Wir müssen zeigen, dass sich dieser Grenzwert für **jede** Nullfolge ergibt.

Wir ermitteln den Differenzenquotienten

für das Intervall $[2; 2 + \Delta x]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(2+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1 + \Delta x + \frac{1}{4}(\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta x \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\Delta x\right)}{\Delta x} = 1 + \frac{1}{4}\Delta x$$

für ein beliebiges Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(x_0+\Delta x)^2 - \frac{1}{4}x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}x_0^2 + \frac{1}{2}x_0\,\Delta x + \frac{1}{4}(\Delta x)^2 - \frac{1}{4}x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta x \cdot \left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{4}\Delta x\right)}{\Delta x} = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{4}\Delta x$$

Dann wird der Differenzenquotient und (durch Grenzübergang $\Delta x \to 0$) der Differentialquotient berechnet.

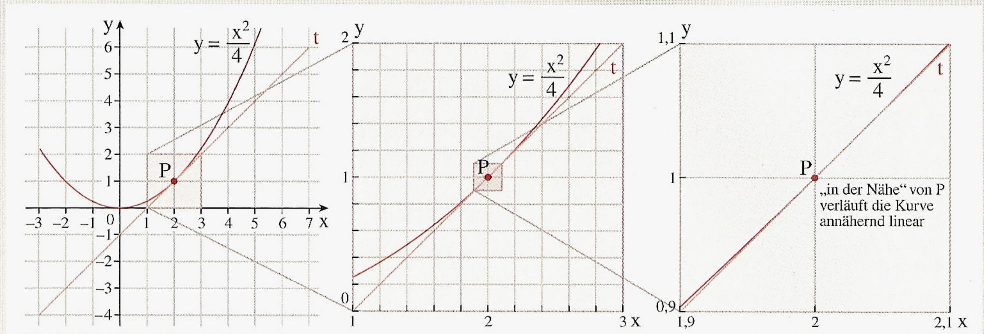
Den Differenzialquotienten erhalten wir durch den Grenzübergang $\Delta x \to 0$

an der Stelle $x_0 = 2$:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{1}{4}\Delta x\right) = 1$$

an der beliebigen Stelle x_0:

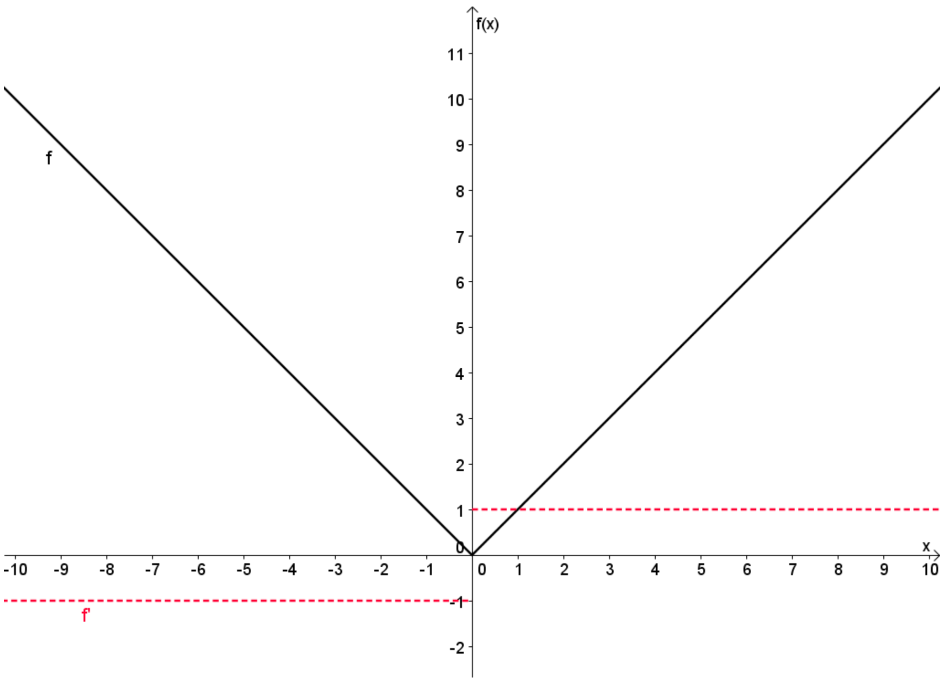
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{4}\Delta x\right) = \frac{1}{2}x_0$$



Ist eine Funktion an einer Stelle differenzierbar, so lässt sich ihre Steigung „in der Nähe“ dieser Stelle durch die Steigung der Tangente beschreiben.
Differenzierbar heißt: Die Funktion verläuft „in der Nähe“ der Stelle annähernd linear.

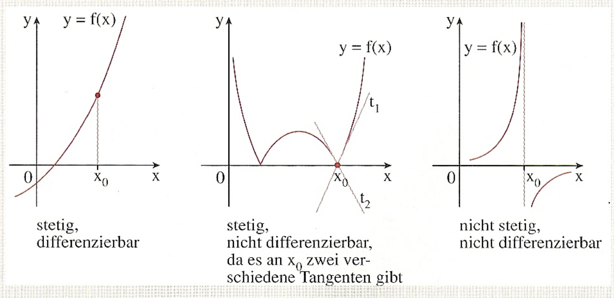
Weiters wird erwähnt, dass eine Funktion differenzierbar an einer Stelle ist, wenn sie „in der Nähe“ der Stelle annähernd linear verläuft. Diese Aussage könnte unter Umständen falsch aufgefasst werden, nämlich so:

Die Betragsfunktion $f(x)=|x|$ verläuft an der Stelle $x=0$ „von beiden Seiten linear“, folglich müsste sie – auch an der Stelle $x=0$ – differenzierbar sein.



Aber ich denke für den Anfang ist diese Bedingung über Differenzierbarkeit recht brauchbar. Außerdem wird später noch auf diese „falsche Auffassung“ mit genau diesem Beispiel hingewiesen.
Anschließend wird der Zusammenhang zwischen Tangente, Differentialquotient und dem Steigungswinkel der Tangente ($f'(x_0) = \tan\alpha$) erwähnt. Zum Schluss folgt noch ein Merksatz über das Verhalten eines Grafen an einer Stelle x_0 – je nach Vorzeichen der ersten Ableitung an dieser Stelle.
Im nächsten Kapitel geht es um die erste und in weiterer Folge um höhere Ableitungen. Zu Beginn wird die erste Ableitung definiert und ein Beispiel gerechnet. Bei diesem Beispiel wird zusätzlich erklärt, welche Befehle dem grafischen Taschenrechner gegeben werden müssen, damit man zum Ergebnis kommt. Als Nächstes wird den SchülerInnen das Thema „Stetigkeit und Differenzierbarkeit“ anhand folgenden Beispiels näher gebracht:

B Wir geben jeweils an, ob die zum gegebenen Grafen gehörige Funktion an der Stelle x_0 stetig und differenzierbar ist. Zu beachten ist dabei, dass Δx eine beliebige Nullfolge durchlaufen kann, wobei sich stets derselbe Grenzwert – bei Annäherung von links und von rechts – für $f(x_0)$ bzw. $f'(x_0)$ ergeben muss.



Ist eine Funktion f an einer Stelle x_0 differenzierbar, dann ist sie dort auch stetig.
Ist eine Funktion f an einer Stelle stetig, muss sie dort nicht differenzierbar sein.

Danach wird der Merksatz „Die Stetigkeit ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Differenzierbarkeit“ formuliert, welcher auch gleich durch ein Beispiel – nämlich der Betragsfunktion – untermauert wird. Hier wird auch nochmal darauf hingewiesen, dass sich diese Funktion an der Stelle $x=0$ nicht „linearisieren“ lässt – es bleibt der „Knick“ erhalten.
Bevor die Autoren auf höhere Ableitungen eingehen, werden die Begriffe Differenzenquotient, Differentialquotient und Ableitung nochmal in einer kurzen, zusammenfassenden Merkregel aufgegriffen und die zweite Ableitung definiert. Bei dem zu diesem Kapitel passenden Beispiel sollen die SchülerInnen die ersten vier Ableitungen der Funktion $y=x^3$ berechnen. Es folgen eine geometrische Deutung der zweiten Ableitung, eine Merkregel und ein Beispiel. Die erste bzw. zweite Ableitung

wird leider nur mit der Tangentensteigung bzw. mit dem Krümmungsverhalten und (noch) nicht mit physikalischen Größen, wie der Geschwindigkeit bzw. der Beschleunigung, in Verbindung gebracht.
Als Nächstes werden die Ableitungen der konstanten Funktion, der Potenz-, der Exponential-, der Logarithmus- und der Winkelfunktionen, jeweils mit Beispielen und Merksätzen, behandelt. Die Beispiele sind – bis auf eines – theoretisch und haben wenig bis gar nichts mit der Erfahrungswelt der SchülerInnen zu tun. Dafür sind bei den Beispielen die Begründungen für die daraus resultierenden Merksätze angegeben. Dabei wird immer der Differenzenquotient und (durch Grenzwertbildung) der Differentialquotient berechnet.

S $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ Potenzregel, Ableitung der Potenzfunktion

Begründung: Wir benützen die Zerlegungsregel
$a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$,
die sich aus der Summenformel der geometrischen Reihe ergibt.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \frac{(x+\Delta x - x) \cdot [(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x} =$$

$$= (x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} [(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}] = n \cdot x^{n-1}$$

Diese Ableitungsregel gilt nicht nur für natürliche Exponenten $n \geq 2$, sondern auch für beliebige reelle Exponenten (Begründung später).

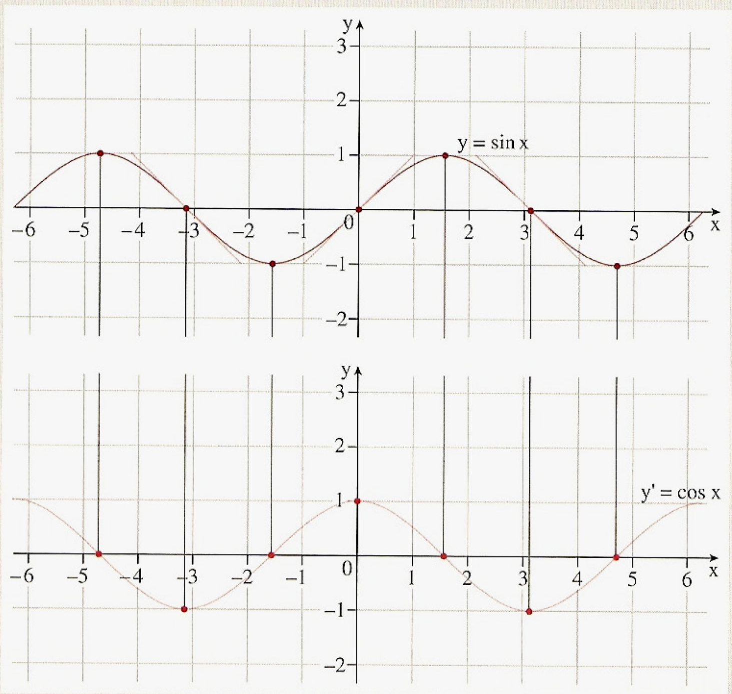
Dass die verwendete Zerlegungsregel gilt, kann auch durch einfaches Ausmultiplizieren gezeigt werden.
Bei der Logarithmusfunktion wird allerdings die Erklärung mit der Bemerkung „dies lässt sich ähnlich der Ableitung der Exponentialfunktion zeigen" weggelassen. Die Erklärung dazu, also warum $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, finde ich nicht so einfach und würde diese deshalb auch anführen. Außerdem ist die Bemerkung, warum der natürliche und nicht der dekadische Logarithmus verwendet wird, sehr unbefriedigend: „Da die Ableitung des natürlichen Logarithmus einfacher ist als die Ableitung des dekadischen Logarithmus, ist es sinnvoll in mathematischen Anwendungen mit dem natürlichen Logarithmus zu rechnen."
Auch bei den Winkelfunktionen erfolgen keine Erklärungen, mit der Begründung: „Die Herleitung erfordert komplizierte Grenzwertüberlegungen, weshalb wir darauf

verzichten.“ In *Kapitel 4* werde ich versuchen die Ableitung von Sinus und Kosinus anhand von ähnlichen Dreiecken zu erklären. Allerdings wird auf das grafische Verständnis viel Wert gelegt. Zu allen Grundfunktionen ist ein Graf angeführt. Die Autoren erklären anhand der Grafen ausführlich die Ableitung der einzelnen Funktionen und regen zu weiteren Überlegungen an.

5.4.5 Ableitung der Winkelfunktionen

B SbX

Wir zeichnen die Sinusfunktion $x \to \sin x$, ermitteln zeichnerisch oder mit einem technologischen Hilfsmittel die Tangentensteigungen für die Vielfachen von $\pi/2$ und tragen diese Tangentensteigungen in ein eigenes Koordinatensystem ein. Welcher Funktionsgraf geht durch die Tangentensteigungen?



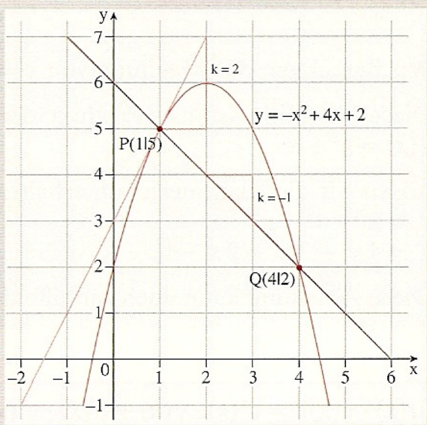
Meiner Meinung nach werden die SchülerInnen mit der unglücklich formulierten Frage „Welcher Funktionsgraf geht durch die Tangentensteigungen?“ verwirrt. Man weiß nicht so recht, was die Autoren damit meinen.

Im folgenden Kapitel werden Ableitungsregeln (Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) sowie die implizite Differenziation behandelt. Bei jedem Teilkapitel wird ein Merksatz formuliert, der anschließend meist durch eine Begründung und ein oder mehrere Beispiele untermauert wird.

Die Beispiele sind meines Erachtens gut gewählt und werden auch leicht verständlich und wie bei der Summenregel anhand eines Grafen erklärt:

B

Gegeben ist die Funktion mit
$y = f(x) = -x^2 + 4x + 2$.



– Wir zeichnen den Grafen im Intervall $[-2; 6]$ und die Sekante für das Intervall $[1; 4]$. Wir messen und berechnen die Sekantensteigung.

  $f(1) = 5$; $f(4) = 2$, die Sekante geht durch die Punkte $P(1|5)$ und $Q(4|2)$.

  Sekantensteigung:

  $$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2 - 5}{4 - 1} = \frac{-3}{3} = -1$$

  Wir berechnen die Sekantensteigung für das Intervall $[1; 1{,}1]$
  $f(1) = 5$; $f(1{,}1) = 5{,}19$:

  $$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1{,}1) - f(1)}{1{,}1 - 1} = \frac{5{,}19 - 5}{1{,}1 - 1} = \frac{0{,}19}{0{,}1} = 1{,}9$$

– Wir zeichnen die Tangente an der Stelle $x = 1$. Wir messen und berechnen die Tangentensteigung an der Stelle $x = 1$.
  Die Tangentensteigung erhalten wir mithilfe der Ableitung:
  $y' = -2x + 4$
  $k = y'(1) = 2$

  Wir messen und berechnen den Steigungswinkel der Tangente:
  $2 = \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(2) = 63{,}4°$

– Wir berechnen die Gleichung der Tangente im Punkt $(1|5)$:
  Setzen wir die Koordinaten des Punktes und die Steigung in die Tangentengleichung ein, können wir den Achsenabschnitt d berechnen:
  $t: y = k \cdot x + d$
  $5 = 2 \cdot 1 + d \quad \Leftrightarrow \quad d = 3$
  $t: y = 2x + 3$

Allerdings wirken die Begründungen durch die „x-lastige" Schreibweise meiner Meinung nach etwas unübersichtlich. Betrachten wir dazu die Begründung der Produktregel:

S

$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ kurz: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$ **Produktregel**

Begründung:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - \boxed{u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x)} - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x)\right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$,
da $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) = v(x)$ wegen der Stetigkeit von v.

Bei dieser Begründung wird außerdem mit keinem Wort erwähnt, dass ein Trick notwendig ist – dieser fällt sozusagen vom Himmel. Mir fällt auf, dass die Autoren oft zum Zeichnen der Funktionen anregen, indem sie die Eingabe in Mathcad und Taschenrechner darstellen. Die Begründung der Quotientenregel fehlt, obwohl es nicht schwer wäre, sie von der Produktregel herzuleiten (siehe dazu *Kapitel 4*). Die Ableitung des Reziprokwertes wird als Spezialfall der Quotientenregel angegeben.
Auch bei der Kettenregel wird keine Begründung angegeben. Dafür werden Beispiele genau besprochen.
Die implizite Differenziation wird anhand von Beispielen ausführlich erklärt, bevor auf die Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktion eingegangen wird. Die Erklärungen für die Ableitungen der beiden Funktionen fallen eher knapp aus. Vielmehr wird versucht durch Beispiele die Ableitungen zu erklären.

B

$y = e^{0,1x}$ mit Kettenregel: $y' = e^{0,1x} \cdot 0,1$

$y = e^{3x^2-7}$ $\qquad y' = e^{3x^2-7} \cdot 6x$

$y = 12 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 5$ $\qquad y' = 12 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) + 0 = -12x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

B

$$y = 3x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y' = 3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + 3x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = 3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2)$$

$$y(x) := 3 \cdot x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow 3 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot x^2\right) - 3 \cdot x^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot x^2\right)$$

$$-3 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot x^2\right) \cdot (x-1) \cdot (x+1)$$

$$y(x) := 3 \cdot x \cdot e^{-(x^2)/2}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)) = (3 - 3 \cdot x^2) \cdot e^{-(x^2)/2}$$

Die **Ableitung der Exponentialfunktion zu einer beliebigen Basis a** ergibt sich mithilfe der Kettenregel:

$y = a^x = e^{\ln a \cdot x}$, da $a = e^{\ln a}$ $\qquad y' = e^{\ln a \cdot x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$ $\qquad$ Daher: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Ich lese gespannt die Überschrift des nächsten Kapitels – nämlich „Anwendungen der Ableitung“. In diesem Abschnitt geht es um Geschwindigkeit und

Beschleunigung. Dabei wird anhand eines hervorragend gewählten Beispiels die Verbindung von Differentialquotient und Momentangeschwindigkeit hergestellt.

B

Der freie Fall als ein Spezialfall der gleichmäßig beschleunigten Bewegung erfolgt nach der Weg-Zeit-Funktion mit $s(t) = \frac{g}{2}t^2$, wobei $g = 9{,}81\ m/s^2$ die Erdbeschleunigung, s der zurückgelegte Weg in m und t die Zeit in sec ist.

Für unsere Zwecke runden wir: $g \approx 10$, dann gilt vereinfacht: $s(t) = 5t^2$

t	0	1	2	3	4	5	6
s	0	5	20	45	80	125	180

Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ eines frei fallenden Körpers im Zeitintervall [3; 5]?

In diesem Zeitintervall [3; 5] legt der fallende Körper $\Delta s = s(5) - s(3) = 125 - 45 = 80$, also 80 m zurück.

Bezogen auf dieses Zeitintervall erhalten wir:

$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(5) - s(3)}{5 - 3} = \frac{80}{2}$, also 40 m/s

Welche Geschwindigkeit hat der fallende Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 3$ s?

Wir verkleinern die Zeitdifferenz:

Intervall [3; t]	Zeitdifferenz Δt	Wegdifferenz Δs	mittlere Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t}$
[3; 5]	2	80	40
[3; 4]	1	35	35
[3; 3,1]	0,1	3,05	30,5
[3; 3,01]	0,01	0,3005	30,05
$t \to 3$	$\Delta t \to 0$	$\Delta s \to 0$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} \to 30$

Die mittlere Geschwindigkeit nähert sich für kleinere Zeitdifferenzen der Geschwindigkeit 30 m/s, dieser Grenzwert heißt **Momentangeschwindigkeit.**

D

Existiert für jede beliebige Nullfolge von Δt der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t = t_0} = v(t_0),$$

so heißt dieser Grenzwert **Momentangeschwindigkeit** zum **Zeitpunkt t_0.**

B

Fortsetzung des Beispiels:

Wir erhalten als Ableitung der Weg-Zeit-Funktion des freien Falls mit $s(t) = 5t^2$ die Funktion der (Momentan-)Geschwindigkeit mit $v(t) = 10t$.

$v(1) = 10$ m/s; ein frei fallender Körper hat nach 1 s die Geschwindigkeit 10 m/s;
$v(2) = 20$ m/s; ein frei fallender Körper hat nach 2 s die Geschwindigkeit 20 m/s;
usw.

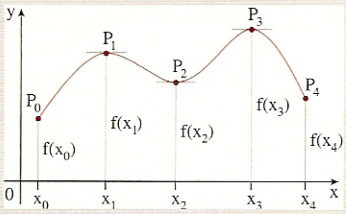
Wir erhalten eine zweite Interpretation des Differenzialquotienten: Die Änderungsrate einer Weg-Zeit-Funktion eines bewegten Körpers beschreibt dessen Geschwindigkeit.

Für meinen Geschmack hätten die Autoren ruhig auch das Kapitel „Differentialrechnung“ mit diesem Beispiel einleiten können. Ein paar Seiten weiter wird die Momentanbeschleunigung hergeleitet und definiert. Anschließend werden noch Beispiele gerechnet. Dabei geht es um den senkrechten Wurf, den Flächeninhalt eines Quadrats, die Kreisfläche und das Kugelvolumen. Die Beispiele sind interessant und werden verständlich erklärt.
Bevor das Kapitel „Differenzialrechnung“ mit dem Aufgabenteil abgeschlossen wird, gehen die Autoren noch kurz auf partielle Ableitungen ein und stellen den SchülerInnen eine anwendungsorientierte Denksportaufgabe, bei der es um eine Bakterienkultur geht, vor.

Ein kurzer historischer Ausflug leitet das Kapitel „Funktionsdiskussion“ ein. Danach folgt ein Beispiel, bei dem mithilfe von Grafen die Zusammenhänge zwischen Monotonie-, Krümmungsverhalten und den Ableitungen erklärt wird. Anschließend folgen genauere Erklärungen zu Monotonie, Tangente und dem Newton-Verfahren. Die Tangente wird als Gerade, die durch den Punkt $P_o(x_0/y_0)$ geht und dort Steigung $k=f'(x_0)$ hat, definiert. In weiterer Folge wird erklärt, welche Befehle dem Taschenrechner gegeben werden müssen, um die Tangente zu zeichnen. Das Newton-Verfahren wird verständlich – auch für Excel – erklärt.
Die Autoren verwenden die Begriffe „relative und absolute“ für die eher gewohnten Bezeichnungen „lokale und globale“ Extremstellen, das stört aber keineswegs. Ich denke, dass diese Bezeichnungen für SchülerInnen vielleicht sogar leichter zu verstehen sind, als die traditionellen. Weiters wird großer Wert darauf gelegt, dass der Unterschied zwischen Extrem*stelle*, Extrem*wert* und Extrem*punkt* klar ist. Die Merksätze erscheinen keineswegs aus dem Nichts, sondern werden anhand von Beispielen entwickelt. Es wird vieles begründet und der Anschauung entnommen.
Zum Thema Extrempunkte werden zwei Beispiele Schritt für Schritt und anschaulich mit Grafen durchgerechnet.

B

Wir ermitteln Extrem**stellen,** Extrem**werte** und Extrem**punkte** des Grafen der Funktion $f: x \rightarrow y = f(x)$ im Intervall $[x_0; x_4]$.



$P_1(x_1 \mid f(x_1))$, $P_3(x_3 \mid f(x_3))$	relative Hochpunkte
$P_3(x_3 \mid f(x_3))$	absoluter Hochpunkt
$x_1; x_3$	Stellen der relativen Hochpunkte
x_3	Stelle des absoluten Hochpunkts
$f(x_1), f(x_3)$	Extremwerte: relative Maxima
$f(x_3)$	Extremwert: absolutes Maximum
$P_0(x_0 \mid f(x_0))$	absoluter Tiefpunkt
$P_2(x_2 \mid f(x_2))$	relativer Tiefpunkt
x_0	Stelle des absoluten Tiefpunkts
x_2	Stelle des relativen Tiefpunkts
$f(x_0)$	Extremwert: absolutes Minimum
$f(x_2)$	Extremwert: relatives Minimum

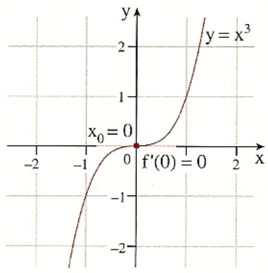
Mithilfe der ersten Ableitung können relative Extrema elegant berechnet werden, da in jedem relativen Extremum eine waagrechte Tangente vorliegen muss.

S

Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum:

x_0 ist Stelle eines relativen Extrems von $f \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0$

Beachten Sie:



- Die Umkehrung gilt nicht. Aus $f'(x_0) = 0$ folgt nicht, dass x_0 eine Extremstelle ist.
  Dies sieht man an der Funktion mit $y = x^3$. Die Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ gleich null, die Funktion hat also an der Stelle $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente. Die Stelle $x_0 = 0$ ist aber keine Extremstelle.
- Für Randextrema liegt in der Regel keine waagrechte Tangente vor (siehe voriges Beispiel).
  Um Randextrema zu ermitteln, müssen die Punkte am Rand des Definitionsbereichs zusätzlich untersucht werden.

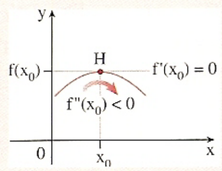
Wie kann nun entschieden werden, ob eine Stelle mit waagrechter Tangente eine Extremstelle ist?

Mithilfe der zweiten Ableitung erhalten wir eine hinreichende Bedingung für Extremstellen.

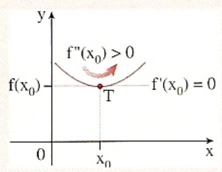
S

Hinreichende Bedingung für ein relatives Extremum:

$f'(x_0) = 0$ und	$f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow x_0$	Stelle des relativen Maximums
waagrechte	Rechts-	$f(x_0)$	relatives Maximum
Tangente	krümmung	$H(x_0 \mid f(x_0))$	relativer Hochpunkt

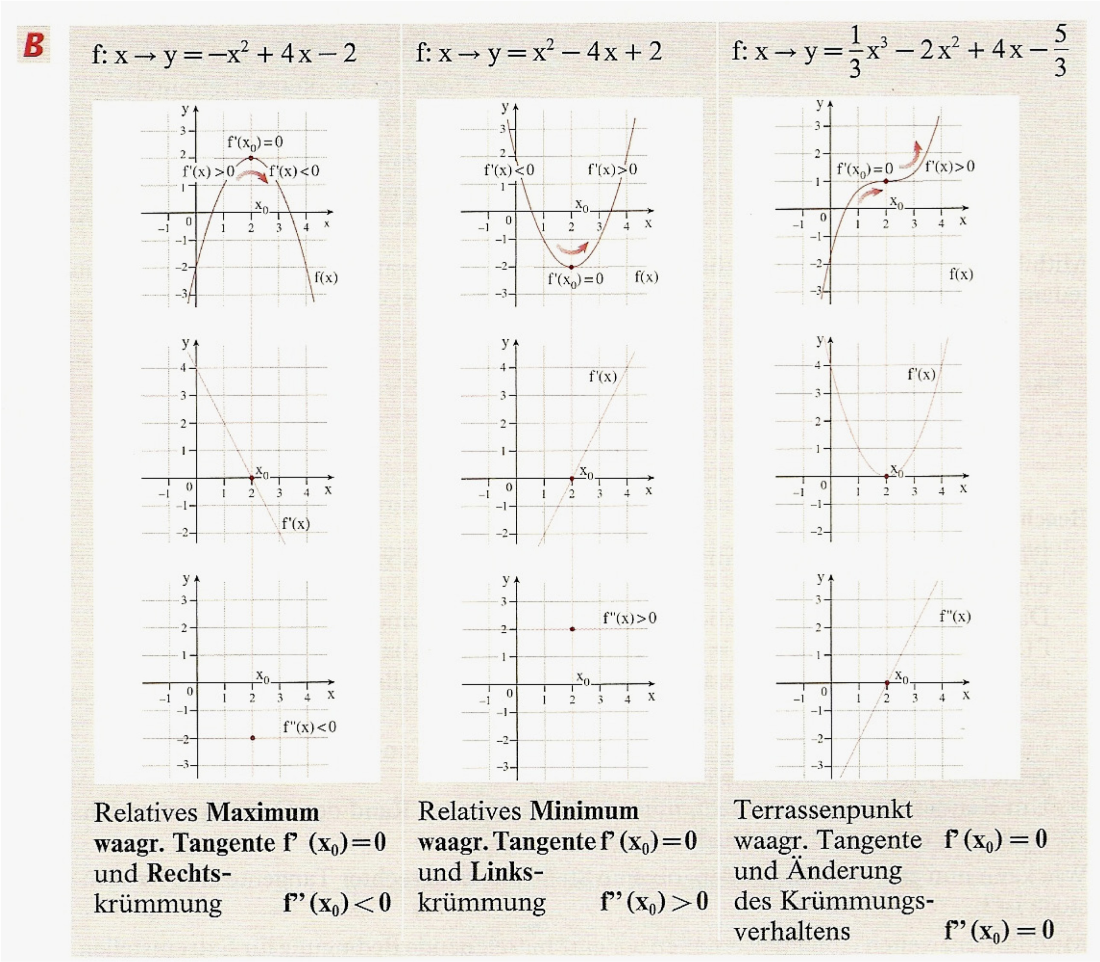


$f'(x_0) = 0$ und	$f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow x_0$	Stelle des relativen Minimums
waagrechte	Links-	$f(x_0)$	relatives Minimum
Tangente	krümmung	$T(x_0 \mid f(x_0))$	relativer Tiefpunkt



In einem ersten Schritt berechnen wir alle Stellen mit waagrechter Tangente, indem wir die Gleichung $f'(x) = 0$ lösen.

Ist x_0 eine Stelle mit waagrechter Tangente, ermitteln wir in einem zweiten Schritt $f''(x_0)$. Für $f''(x_0) \neq 0$ liegt eine Extremstelle vor. Für $f''(x_0) = 0$ müssen weitere Überlegungen angestellt werden.



Auch im Abschnitt „Wendepunkte“ werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen eher entwickelt als einfach nur aufgezählt. Begründungen sucht man allerdings vergebens.

Beim Kapitel „Durchführen der Funktionsdiskussion“ erfolgt zunächst eine Auflistung der charakteristischen Merkmale von Funktionen, die untersucht werden sollen. Dazu zählen Definitionsmenge, Symmetrie, Polstellen, Lücken, Asymptoten, Achsenschnittpunkte, Extrempunkte und Wendepunkte. Letztendlich soll auch noch der Graf gezeichnet werden. In diesem Schulbuch wird unterschieden zwischen Polynomfunktionen, rationalen Funktionen und Exponentialfunktionen. Bei den Polynomfunktionen wird von vornherein erwähnt, dass sie überall stetig und beliebig oft differenzierbar sind. Es gibt keine Polstellen, Lücken oder Asymptoten. Am Beginn wird ein Musterbeispiel gerechnet. Die Funktion wird sowohl „per Hand“ als auch mit dem grafischen Taschenrechner „diskutiert“. Übrigens bin ich der Meinung, dass der Begriff Funktionen*diskussion* nicht zu dem passt, was hier passiert. Da nicht diskutiert wird, würde ich den Begriff „Funktionsuntersuchungen“ vorziehen (Näheres dazu in *Kapitel 4*). Bei den rationalen Funktionen wird gleich zu Beginn auf die

„Unstetigkeit“ an den Stellen, an denen der Nenner null ist hingewiesen. In vielen Schulbüchern werden solche Stellen als „unstetig“ bezeichnet, dabei ist die Funktion dort einfach nicht definiert. Aus diesem Grund verwende ich in diesem Zusammenhang den Ausdruck „nicht definiert“. Dann wird – genauso wie beim nächsten Kapitel „Exponentialfunktionen“ – ein Musterbeispiel gerechnet.
Im darauf folgenden Abschnitt geht es um das Aufstellen von Funktionsgleichungen. Dazu werden zwei Beispiele vorgerechnet, wobei sogar auf das Lösen eines Gleichungssystems mit Matrizen zurückgegriffen wird. Dieser Verweis auf ein vergangenes Kapitel ist übrigens der Einzige in den Abschnitten „Differentialrechnung“ und „Funktionsdiskussion“.
Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit Extremwertaufgaben. Nach einer kurzen Einleitung folgt das erste Beispiel, bei dem es um den maximalen Flächeninhalt eines rechteckigen Grundstücks geht. Mithilfe dieses Beispiels werden die Begriffe Zielfunktion und Nebenbedingung sowie die einzelnen Schritte bis zum Ergebnis erklärt. Dabei wird allerdings auch die zweite Ableitung verwendet, was nicht notwendig ist. Es genügt, die Ränder zu betrachten. Näheres dazu in *Kapitel 4*. Positiv ist zu erwähnen, dass immer ein Ergebnissatz angeführt und so das Ergebnis auf das Problem zu Beginn bezogen wird. Bei „unberandeten“ Extremwertaufgaben wird allerdings nicht der Grenzwert gebildet, sondern einfach gesagt, dass man die Randwerte nicht zu betrachten braucht, weil keine brauchbare „Figur“ entsteht oder dass die Randwerte nicht definiert sind. Das steht im Widerspruch zu dem Beispiel zu Beginn dieses Abschnittes. Hier haben die Autoren auch die Randwerte betrachtet und mit dem berechneten Extremwert verglichen. Ich denke, man sollte zumindest erwähnen, dass beispielsweise das berechnete Minimum wirklich das absolute Minimum ist, wenn die Funktion sowohl links als auch rechts vom Minimum nach unendlich strebt. Nach drei durchgerechneten Beispielen wird der Rechengang erklärt, wobei auch auf das Vereinfachen der Zielfunktion, etwa durch Quadrieren, eingegangen wird.
Als Nächstes wird der minimale Materialverbrauch bei einer Konservendose berechnet. Hier wird der Lösungsweg sowohl für grafische Taschenrechner als auch für Excel beschrieben. Die restlichen Aufgaben sind gut gewählt und haben auch etwas mit der Erfahrungswelt der SchülerInnen zu tun.
Im nächsten Kapitel wird die Methode der kleinsten Quadrate beschrieben. Diese Methode wird auch bei der Stochastik zum Legen einer Regressionsgerade

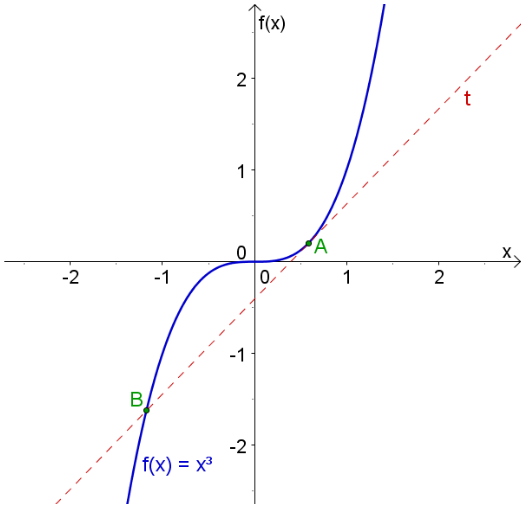
verwendet. Nach einer anwendungsorientierten Denksportaufgabe, bei der es um Verzinsung geht, folgt noch der Aufgabenteil.

Fazit: Dieses Buch ist sehr übersichtlich in den Farben rosa und grau gestaltet. In jedem Kapitel findet man Definitionen, Merksätze und vorgerechnete Beispiele. Geometrische Deutungen nehmen genügend Platz ein, was auch wichtig ist. Allerdings habe ich an manchen Stellen inhaltliche Auffassungen vermisst. Man hätte beispielsweise auf die Bedeutung der ersten bzw. zweiten Ableitung als Geschwindigkeit und Beschleunigung schon eher eingehen können. Erst am Schluss der zwei großen Kapitel „Differentialrechnung“ und „Funktionsdiskussion“ befinden sich Beispiele, was aber kein Nachteil ist. Ganz im Gegenteil: man hat nicht das Gefühl, dass ein Beispiel vor- und zwanzig genauso nachgerechnet werden. Der Inhalt wird mit verständlichen Sätzen auf den Punkt gebracht. Es wird nicht unübersichtlich oder schwammig. Alles in allem ein brauchbares Schulbuch für Handelsakademien und höhere Lehranstalten für Land- und Forstwirtschaft, das den Computereinsatz in den Klassenzimmern fördert.

3.2 Mathematik Lehrbuch 7 (Götz, Reichel, Müller, Hanisch)

Zu Beginn merkt man, dass dieses Buch im Vergleich zum Vorigen bunter ist und die Seiten voller geschrieben sind. Auch die Anrede der SchülerInnen ist anders – hier wird der Gymnasiast mit „du“ angesprochen. Bevor man zum Kapitel „Differentialrechnung“ – das sich über etwa 120 Seiten erstreckt – kommt, beschäftigt man sich mit komplexen Zahlen und algebraischen Gleichungen.

Auch hier beginnen die Autoren mit einer geschichtlichen Einleitung. Dabei geht es um die voneinander unabhängigen Entwicklungen von Newton und Leibniz. Leibniz ging von einem geometrischen und Newton von einem physikalischen Problem aus – nämlich dem Tangentenproblem und der Momentangeschwindigkeit. Diese beiden Sichtweisen werden anschließend kurz erklärt. Weiter geht es mit meist physikalischen Problemstellungen, die zur Differentialrechnung führen sollen. So eine Problemstellung wäre beispielsweise: „Ermitteln der momentanen Induktionsspannung bei elektromagnetischer Induktion“. Die Begriffe Funktionsgrenzwert, Funktion und Stetigkeit werden kurz wiederholt, bevor eine „Maßzahl“ gesucht wird, die angibt „wie schnell“ Δy bei x_0 gegen 0 strebt, wenn Δx gegen 0 strebt. Über diese Maßzahl, die meiner Meinung nach eher Verwirrung stiftet, gelangt man zum Tangentenproblem. Mir fällt schon auf den ersten Seiten auf, dass die Autoren sehr oft auf vergangene Kapitel verweisen. So auch beim Begriff der Tangente. In diesem Fall wird auf die Kreistangente verwiesen. Die Tangente wird als Gerade, die die Kurve (oder hier: den Kreis) *genau in einem* Punkt berührt, definiert, wobei berühren wiederum mit schneiden gleichgesetzt wird. Das kann man so nicht sagen, denn die Tangente im Punkt A schneidet im folgenden Beispiel die Funktion auch noch in einem weiteren Punkt B:



Sogar in Fußnoten, die für die Übersichtlichkeit nicht unbedingt vorteilhaft sind, kommen Verweise vor. Man merkt, dass die Autoren penibel genau auf die Exaktheit der Formulierungen achten. Sowohl die Sekanten- als auch die Tangentensteigung werden unter Verwendung des Tangens angegeben. Nach der Definition der Tangente als Gerade mit der Steigung $k = \tan\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ wird ein Musterbeispiel, bei dem die Steigung der Tangente in einem Punkt gesucht ist, gerechnet.

Als Nächstes richtet sich das Augenmerk auf die lineare Approximation der Kurve durch die Tangente. Zur besseren Verständlichkeit wird mit einer Lupe in die Funktion „hineingezoomt“. Dann folgen schon die Tangentengleichung und die (sehr „x-lastige“) Definition von Differenzen- und Differentialquotient.

Definition:
Δy heißt **Differenz,** dy heißt **Differential** der Funktion f bei x_0.
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ heißt **Differenzenquotient** von f bei x_0,
$\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ heißt **Differentialquotient** von f bei x_0.

Warum gerade die Tangente jene Gerade ist, die die Kurve bestmöglich approximiert, wird als Nächstes erklärt. Dieses Kapitel steht unter einem Plus, das bedeutet, dass es anspruchsvoller und aufwendiger ist.

Im folgenden Abschnitt wird das Problem der Momentangeschwindigkeit beschrieben. Nach einer eher komplizierten Einleitung mit Verweisen auf vergangene und später folgende Kapitel wird festgestellt, dass „wir bevorzugt Zeit-Weg-Gesetze betrachten, weil sie im Grunde nichts anderes sind als die gewohnte Darstellung y=y(x), nur eben mit anderen Bezeichnungen und Bedeutungen.“ An dieser Stelle werden die SchülerInnen aufgefordert, diese Aussage zu erläutern. Schließlich wird der Begriff „Momentangeschwindigkeit“ genauer unter die Lupe genommen. Dabei stößt der Leser auf ein uraltes Paradoxon: „Wenn du einen fliegenden Pfeil betrachtest, so steht er im Moment der Betrachtung still. (Ein „Moment“ hat ja die Zeit-„Dauer“ 0, sodass keine Zeit für eine Ortsänderung vorhanden ist.) Da dies für jeden Moment gilt, kann sich der Pfeil niemals weiterbewegen, obwohl er augenscheinlich fliegt!“ Nach dieser einleuchtenden Erklärung regen die Autoren mit den Worten „Diskutiere den Gedankengang!“ zum Meinungsaustausch an. Man gelangt schließlich über die mittlere Geschwindigkeit und Grenzwerte zur Definition der Momentangeschwindigkeit. Danach wird ein Beispiel gerechnet. Darauf aufbauend wird die Approximation einer ungleichförmigen durch eine gleichförmige Bewegung erklärt. Nach einem Beispiel folgt die Zusammenfassung und Erklärung der Zusammenhänge zwischen Momentan- und mittlerer Geschwindigkeit mit Tangenten- und Sekantensteigung. Der Differenzenquotient wird dabei als mittlere und der Differentialquotient als momentane Änderungsrate bezeichnet.

Zu Beginn des nächsten Kapitels wird die Definition der Ableitungsfunktion angegeben. Ausführliche Erklärungen zum grafischen und rechnerischen Ableiten folgen. Das grafische Differenzieren wird anhand der Sinusfunktion durchgeführt. Die SchülerInnen sollen selbst die Vorgangsweise beschreiben und so die Aufgabe lösen. Es folgen die Lösung und ein Merksatz zur Ableitung der Sinus- und Cosinusfunktion. Da das grafische Differenzieren – abgesehen von einfachen Fällen – ungeeignet ist, geht man zum rechnerischen Differenzieren über. Die SchülerInnen werden meiner Meinung nach mit folgendem Satz und dem darauf folgenden Beispiel ein wenig verwirrt:
„Um die Funktionsgleichung der Ableitung f' von „komplizierten“ Funktionen f zu finden, berechnen wir den Differentialquotienten an der Stelle x_0, wobei wir jedoch x_0 als *Formvariable* auffassen. Wir demonstrieren die Vorgangsweise an den Potenzfunktionen:“

Beispiel E: Ermittle die Gleichung der Ableitung f' der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$!

Lösung: Wir berechnen

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x}$$

Mittels des binomischen Lehrsatzes (vgl. LB 6. Kl. S. 94) erhält man für

$$(x_0 + \Delta x)^n = x_0^n + \binom{n}{1} \cdot x_0^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2} \cdot x_0^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n$$

und somit nach Subtraktion von x_0^n und Division durch Δx:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\binom{n}{1} \cdot x_0^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x_0^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right)$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ streben alle Summanden gegen 0, mit Ausnahme des ersten.

Unter Beachtung von $\binom{n}{1} = n$ gilt somit: $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$

Zum Einen finde ich den Ausdruck „Formvariable" unpassend und zum Anderen macht der Verweis auf den binomischen Lehrsatz das Beispiel nicht gerade einfacher. Ich würde die Bezeichnung „Parameter" dem Ausdruck „Formvariable" vorziehen, da es sich um beliebige, aber *feste* Werte handelt. Gerade das Wort „Variable" beschreibt doch beliebige Werte, die variieren können. Ich würde die Ableitung der Potenzfunktion eher mit der Zerlegungsformel zeigen. Siehe dazu *Kapitel 4*. Nach der Angabe der Ableitungen für Potenz- und konstanten Funktion folgen ein Beispiel und der Aufgabenteil.

Im kommenden Kapitel geht es um Regeln für das Differenzieren zusammengesetzter und verketteter Funktionen. Zunächst wird die Summen- und Differenzenregel auf eine sehr unübersichtliche und – wie schon öfter erwähnt – „x-lastige" Art und Weise beschrieben. Zusätzliche Indizes bei den Funktionen (f_1 und f_2) machen den Beweis nicht einfacher:

1. Summen- und Differenzenregel

Geg.: $f = f_1 + f_2$, dh.: $y = f_1(x) + f_2(x)$

Ges.: f'

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f_1 + f_2](x_0 + \Delta x) - [f_1 + f_2](x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f_1(x_0 + \Delta x) + f_2(x_0 + \Delta x)] - [f_1(x_0) + f_2(x_0)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0)) + (f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \qquad f_1'(x_0) \qquad + \qquad f_2'(x_0) \end{aligned}$$

Nach dieser Begründung folgen Merksätze und ein Beispiel, bevor die Überschrift „Differentiation multiplikativer und additiver Konstanten" zu lesen ist. Ausdrücke wie

$f+c$ oder $f \cdot c$ sollen differenziert werden, wobei c eine Konstante darstellt. Die Produktregel wird im Großen und Ganzen genauso wie im Schulbuch zuvor (Mathematik IV) bewiesen, nur wird hier der Trick, der zum gewünschten Ergebnis führt, ausdrücklich erwähnt.

3. Produktregel

Geg.: $f = f_1 \cdot f_2$, dh.: $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$
Ges.: f'

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f_1 \cdot f_2](x_0 + \Delta x) - [f_1 \cdot f_2](x_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f_1(x_0+\Delta x) \cdot f_2(x_0+\Delta x)] - [f_1(x_0) \cdot f_2(x_0)]}{\Delta x}$$

Nun wenden wir einen Trick an, um f_1' und f_2' ins Spiel zu bringen: durch Subtrahieren und (zum Ausgleich) Addieren des Ausdrucks $f_1(x_0) \cdot f_2(x_0+\Delta x)$ im Zähler und anschließendes Herausheben erhalten wir

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x_0+\Delta x) \cdot f_2(x_0+\Delta x) - f_1(x_0) \cdot f_2(x_0+\Delta x) + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0+\Delta x) - f_1(x_0) \cdot f_2(x_0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0)}{\Delta x} \cdot f_2(x_0+\Delta x) + f_1(x_0) \cdot \frac{f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0)}{\Delta x} \right) =$$
$$= \qquad f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) \qquad + f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0)$$

Die Autoren fahren anschließend wieder mit Merksätzen und einem Beispiel fort. Im nächsten Schritt wird die Quotientenregel mithilfe der gerade angeführten Produktregel bewiesen und der dazu passende Merksatz protokolliert. Erneut werden Beispiele durchgerechnet, ehe die Kettenregel anhand einer Aufgabe beschrieben und formuliert wird. Bei dieser Aufgabe wird versucht mittels Produktregel die SchülerInnen zur Kettenregel zu leiten. Zu diesem Zweck sollen $(\sin x)^2$, $(\sin x)^3$ und $(\sin x)^4$ differenziert werden. Der Algorithmus der Kettenregel wird nicht gleich verraten. Bei der Begründung wird genau wie vorhin ein Trick verwendet, welcher auch hier farblich hervorgehoben wird. Auch das darauf folgende Beispiel wird durch Verwendung von Farben übersichtlicher.

Beispiel L: Differenziere **a)** $y = \sin x^2$, **b)** $y = (1-x)^{100}$, **c)** $y = (\sin(2x + \pi/3))^3$!

Lösung: (Die Ableitungen sind in den Farben der inneren und äußeren Funktionen unterlegt.)

a) Anders als in Beispiel K **a)** ist nun die Sinusfunktion die äußere Funktion und die Quadratfunktion die innere Funktion; man erhält daher:

$$y' = \cos x^2 \cdot 2x$$

(*Warnung:* Schreibe statt $\cos x^2 \cdot 2x$ besser $2x \cdot \cos x^2$, um Fehlern wie $\cos 2x^3$ vorzubeugen!)

b) Im Prinzip könnte man diese Aufgabe ohne die Kettenregel lösen. Wie? Mit der Kettenregel gelingt es aber sehr viel einfacher:

$$y' = 100 \cdot (1-x)^{99} \cdot (-1)$$

c) Hier sind drei Funktionen verkettet. Ganz außen die 3. Potenz, in der Mitte die Sinusfunktion, ganz innen eine lineare Funktion:

$$y' = 3 \cdot (\sin(2x + \pi/3))^2 \cdot \cos(2x + \pi/3) \cdot 2$$

Das implizite Differenzieren wird verständlich anhand von Beispielen erklärt. Die Umkehrregel steht wieder unter einem Plus, welches darauf hinweist, dass das Kapitel anspruchsvoller ist. Danach werden vermischte Aufgaben auf verschiedene Arten vorgerechnet, ehe der Aufgabenteil angeführt ist.

Bei diesem Schulbuch wird zuerst die Ableitung der Logarithmusfunktion betrachtet, bevor auf die Ableitung der Exponentialfunktion und der Winkelfunktionen eingegangen wird. Die Ableitung der Sinusfunktion wurde schon (in einem Beispiel) zuvor hergeleitet:

183 Denke den folgenden Beweis für $(\sin x)' = \cos x$ genau durch und bereite darüber ein kurzes Referat vor!

Wir müssen berechnen:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x}$$

Wegen des Zusammenhanges (vgl. LB 5. Kl. S. 205)

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

kann man $f'(x_0)$ umformen zu

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right)$$

Nun strebt aber (siehe unten) der Teilausdruck $\dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ für $\Delta x \to 0$ gegen 1.

Somit strebt der Gesamtausdruck für $\Delta x \to 0$ gegen $\cos x_0$, und zwar unabhängig von der Wahl von x_0. Daher ist die Behauptung tatsächlich für *jedes* $x = x_0$ wahr:

$$f'(x) = \cos x$$

Zu zeigen bleibt noch, dass tatsächlich gilt: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Für $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ gilt gemäß Fig. 2.15:

$$\begin{array}{lllll}
A_{\Delta OCB} & \leqslant A_{\text{Sektor } OCB} & \leqslant A_{\Delta OCD} & \\
\frac{1 \cdot \sin x}{2} & \leqslant \frac{1^2 \cdot x}{2} & \leqslant \frac{1 \cdot \tan x}{2} & \\
\sin x & \leqslant x & \leqslant \tan x & \mid : \sin x > 0 \\
1 & \leqslant \frac{x}{\sin x} & \leqslant \frac{1}{\cos x} & \mid \text{Kehrwertbildung} \\
1 & \geqslant \frac{\sin x}{x} & \geqslant \cos x & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \mid x \to 0 \\
1 & \geqslant \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} & \geqslant 1 &
\end{array}$$

Ergebnis: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

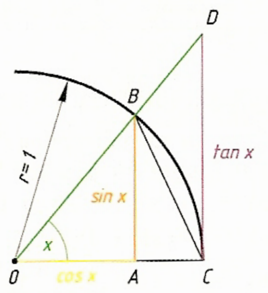


Fig. 2.15

Da das verwendete Additionstheorem schwierig zu merken ist und relativ wenig gebraucht wird, würde ich an dieser Stelle die Ableitung des Sinus mit „ähnlichen Dreiecken" zeigen. Siehe dazu *Kapitel 4*.

Nun aber zurück zu den Ableitungen weiterer wichtiger Funktionen. An dieser Stelle fällt mir auf, dass in diesem Buch weniger Wert auf Grafen gelegt wird. Während im Schulbuch Mathematik IV ein gemeinsamer Graf der Funktion und dessen Ableitung angeführt wurde, wird hier bei gar keiner Funktion der Graf aufgezeichnet. Dafür wird hier nicht nur die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion $ln\ x$, sondern auch der „allgemeinen" Logarithmusfunktion ${}^{a}log\ x$ dargestellt. Auch die Winkel- und Kreisfunktionen werden hier ausführlicher behandelt als im zuerst betrachteten Schulbuch. Nicht nur die Ableitung der Tangensfunktion, sondern auch die der Cotangens-, Arcussinus-, Arcuscosinus- und Arcustangesfunktion sind zu finden. Die SchülerInnen sollen dabei die Ableitungen selbst herleiten. In der Zusammenfassung werden noch einmal einige grundlegende Funktionen in einer Tabelle aufgelistet. Frustrierend finde ich Sätze, wie: „Ergänze die Tabelle gegebenenfalls und lerne sie gewissenhaft auswendig! Du wirst sie „auf Schritt und Tritt" – besonders auch in der 8. Klasse – benötigen!" Allein aufgrund der Tatsache, dass wichtige Ableitungen des Öfteren bestimmt werden müssen, denke ich, dass SchülerInnen diese schnell „im Kopf" haben werden. Somit muss man das Auswendiglernen der Ableitungen nicht extra erwähnen. Danach folgt der Aufgabenteil, bei dem die SchülerInnen zwei Seiten lang größtenteils zum Differenzieren, Herleiten und Beweisen aufgefordert werden.

Sowohl auf höhere Ableitungen und ihre Bedeutung als auch auf das Horner-Schema wird im nächsten Kapitel eingegangen. Zunächst wird die physikalische Bedeutung der ersten, zweiten und dritten Ableitung diskutiert. Außerdem stellt sich die Frage, ob es Funktionen gibt, die sich zwar einmal, aber kein zweites Mal differenzieren lassen und ob es möglich ist, höhere Ableitungen sofort, also ohne zuvor die erste, zweite,… Ableitung berechnet zu haben, zu bilden. Anhand der Sinusfunktion und einer Polynomfunktion wird die Bildung von höheren Ableitungen erklärt. Besonders stark vermisse ich die Grafen in diesem Kapitel. Die SchülerInnen könnten die Ableitungen mit Grafen verknüpfen, falls diese angeführt werden.
Das (erweiterte) Horner-Schema, welches zur Berechnung von Funktionswerten verwendet wird, erklären die Autoren als Nächstes. Dann folgen die Aufgaben und das Kapitel „Rückblick und Ausblick". Dabei wird die historische Entwicklung der Differentialrechnung genauer durchleuchtet. Außerdem wird der Zusammenhang von Differenzierbarkeit und Stetigkeit thematisiert. Des Weiteren wird das Differenzieren

als Abbildung betrachtet. Dabei wird schon auf das Ermitteln der Stammfunktion – also das Integrieren – vorgegriffen. Überdies wird festgestellt, dass man mit Differentialoperatoren und Differentialen ähnlich wie mit gewöhnlichen Variablen rechnen kann. Ein Beispiel wird sogar mithilfe eines GTR vorgestellt. Auch dieses Schulbuch setzt sich – allerdings etwas ausführlicher als in Mathematik IV – mit partiellen Ableitungen auseinander. Am Schluss folgen der Aufgabenteil und ein Exkurs zu Bézier-Kurven, welcher aber für SchülerInnen nicht sehr fesselnd dargestellt wird.

Das Kapitel der Kurvendiskussionen erstreckt sich über 45 Seiten. Wie schon erwähnt, stellt mich der Begriff „Kurvendiskussion“ nicht ganz zufrieden, Näheres dazu in *Kapitel 4*. Schon auf den ersten zwei Seiten werden die SchülerInnen vom Text regelrecht erschlagen. Es wird betont, dass die Kurvendiskussion in der Realität gebraucht wird, zum Beispiel für die Form einer neuen Sprungschanze. Die SchülerInnen werden dazu aufgefordert, die wichtigsten Funktionen(klassen) der 5. und 6. Klasse und deren Eigenschaften in Partner- oder Gruppenarbeit unter Verwendung geeigneter Skizzen zu wiederholen. Unter Anderem werden auch die Probleme beim Herauslesen von Eigenschaften aus Funktionsgrafen dargelegt. So wird beispielsweise das Zeichnen von Grafen ohne Computer als „mühseliges Unterfangen“ bezeichnet und die Ablesegenauigkeit kritisiert. Dann wird noch mal kurz der Zusammenhang von den ersten Ableitungen mit der Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung erläutert, worauf die SchülerInnen in Gruppen- oder Partnerarbeit die „inneren Zusammenhänge“ zwischen den Eigenschaften der Funktionen $f\colon y=f(x)$ und ihren Ableitungsfunktionen f' und f'' anhand folgender Figur untersuchen sollen.

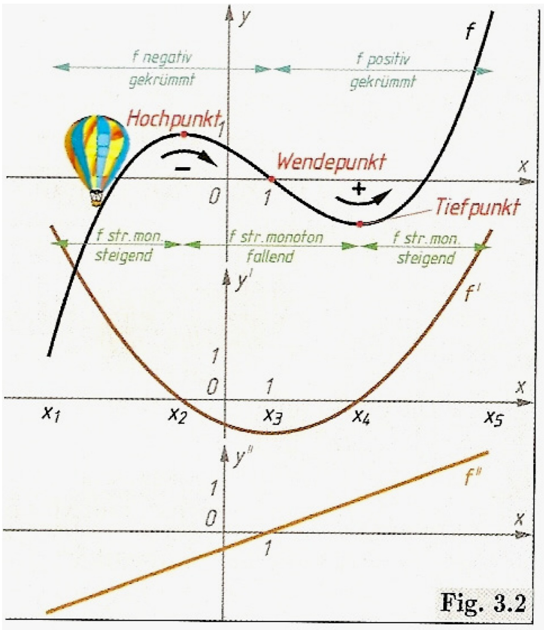


Fig. 3.2

Die x-Achse ist die Zeitachse, die Flughöhe wird durch die y-Achse angegeben. Das heißt, zwischen x_1 und x_2 sowie zwischen x_4 und x_5 befindet sich der Ballon im Steigflug und die Flughöhe nimmt zu. Zwischen x_2 und x_4 verringert sich die Flughöhe. An diesem Einstiegsbeispiel halte ich zwar die „negative Zeit“ für problematisch, dafür werden hier die Funktion und ihre Ableitungsfunktionen in ein und demselben Koordinatensystem dargestellt, was die Zusammenhänge zwischen Funktion und deren Ableitungsfunktionen anschaulich darstellt.

Durch dieses Beispiel soll die Relevanz der Eigenschaften einer Funktion, wie etwa Monotonie, lokales Maximum bzw. Minimum, Krümmungsverhalten und Symmetrie demonstriert werden. Anschließend werden die hinreichenden Bedingungen für lokale Extrema und Wendestellen sowie die zu untersuchenden Eigenschaften übersichtlich notiert. Nach dem Aufgabenteil wird die erste Kurvendiskussion exemplarisch Punkt für Punkt vorgerechnet. In diesem Schulbuch sollen Definitionsmenge, Stetigkeit, Polstellen, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte (samt Wendetangente), Monotonieverhalten, Krümmungsverhalten, asymptotisches Verhalten, Graf (notfalls unter Verwendung einer zusätzlichen Wertetabelle), Symmetrie(beweis) und Periodizitäts(beweis) bestimmt werden, wobei der Einsatz eines Computers oder Taschenrechners (TI-92) empfohlen wird. Nach diesem ersten Musterbeispiel werden die SchülerInnen aufgefordert, die Eigenschaften der Polynomfunktionen aus diesem Beispiel herauszulesen und zu begründen. Anschließend folgt eine detaillierte Auflistung der Eigenschaften. Auch eine (eindeutig lösbare) Umkehraufgabe (Modellbildungsaufgabe) wird angeführt und vorgerechnet. Auf den ersten Blick scheint die Bezeichnung „Modellbildungsaufgabe“

in diesem Zusammenhang etwas unglücklich gewählt, da das Beispiel nicht realitätsbezogen ist und daher auch keine Modellbildung in unserem Sinne (siehe S 6) benötigt. Wenn das Beispiel aber als Problem, für das SchülerInnen erst ein Modell finden müssen, um es zu lösen, aufgefasst wird, so kann man von einer Modellbildungsaufgabe sprechen. Die SchülerInnen sollen außerdem das Ergebnis diskutieren und begründen, ob die Eindeutigkeit des Ergebnisses immer gegeben sein muss. Die Antworten stehen wie schon des Öfteren gleich in der nächsten Zeile. Schließlich sollen die SchülerInnen versuchen, selbst Umkehraufgaben (ohne konkrete Zahlen) zu erfinden, die zu einer eindeutigen Lösung führen. Ich habe das Gefühl, dass dem Lehrer die Arbeit – nämlich Fragen zu stellen – abgenommen wird. Das Schulbuch stellt konkrete Fragen und die korrekten Antworten stehen meist gleich im Anschluss. Dieses Buch stellt sozusagen das „ideale Gespräch" zwischen Lehrer und SchülerInnen dar. Ich würde es für sinnvoller halten, wenn erst gar keine Fragen gestellt werden, sondern anhand von Beispielen die Merksätze und Begründungen erklärt werden. Natürlich kommt es darauf an, wie das Schulbuch eingesetzt wird – etwa als Beispielsammlung oder als „Lehrerersatz". Mit „Lehrerersatz" meine ich: „Wir schlagen das Buch auf Seite 90 auf und beginnen mit dem Kapitel der Kurvendiskussionen." 45 Seiten später wurden hunderte Kurvendiskussionen – ohne jeglichen Bezug zur Realität – durchgerechnet. Kurvendiskussionen sind – und das merkt man besonders in diesem Schulbuch – zu einer mathematischen Disziplin geworden, bei der es nur um das algorithmische Denken geht. Wozu wochenlang Kurvendiskussionen auf solche Art und Weise gerechnet werden, fragt niemand. Um die Anwendungsorientierung von Kurvendiskussionen zu rechtfertigen, wird das Beispiel zu Beginn auf eine Sprungschanze umgemünzt. Danach folgen Aufgaben, bevor erneut eine – diesmal anwendungsorientierte – Modellbildungsaufgabe vorgestellt wird. Bei diesem Beispiel geht es um den Finanzminister und das Steuersystem. Die Autoren fahren mit etlichen Aufgaben zum Thema „Funktionsgleichungen ermitteln" und „allgemeine Eigenschaften von Polynomfunktionen" fort, bevor eine Kurvendiskussion einer rationalen Funktion beschrieben wird. Genauso wie vorhin auch werden die zehn zu untersuchenden Eigenschaften abgewickelt, die Eigenschaften von rationalen Funktionen aufgezählt, eine Umkehraufgabe vorgerechnet und Aufgaben gestellt, bevor die Fortsetzung der anwendungsorientierten Modellbildungsaufgabe folgt. Wieder wird der Aufgabenteil angeführt ehe die Diskussion von Winkelfunktionen durchgeführt wird. Abermals werden die zu überprüfenden Punkte ausführlich und präzise bearbeitet. Diesmal handelt die Umkehraufgabe von einem Oszilloskop, das die meisten SchülerInnen wahrscheinlich noch nie gesehen haben und an dieser Stelle kennen lernen. Dann folgen Aufgaben, eine weitere Fortsetzung des „Finanzminister-Beispiels“ und wieder Aufgaben. Das Kapitel „Diskussion von Exponential- und Logarithmusfunktion“ ist im Grunde genauso aufgebaut, wie die vorangegangenen Kapitel. Anschließend werden Funktionen mit „Spitzen“ genauer betrachtet und diskutiert. Die Definitionen, hinreichenden und notwendigen Bedingungen sowie die Vorzeichenwechselbedingungen von lokalen Extrema und Wendestellen werden sogleich genau diskutiert und begründet. Hier wird übrigens ein globales Maximum so definiert, dass alle Funktionswerte aus der Definitionsmenge „echt kleiner“ und nicht kleiner oder gleich sind als der Extremwert.

Gleich am Beginn des Kapitels „Rückblick und Ausblick“ wird diskutiert, ob im Computerzeitalter Kurvendiskussionen überhaupt noch zeitgemäß sind. Nach fast 40 nicht enden wollenden Seiten empfinde ich den Satz „Diese Art der Kurvendiskussion hat zwar im Zeitalter des Computers an Bedeutung verloren, ist aber keineswegs unwichtig geworden.“ etwas frustrierend. Wenn diese Art der Kurvendiskussion an Bedeutung verloren hat, könnte man dieses Kapitel doch „fortschrittlicher“ gestalten. Weiters wird zugegeben, dass „schon sehr einfache und allgegenwärtige Programme (wie zB Excel) gestatten, den Grafen einer Funktion punktweise bzw. als Polygon zu zeichnen und aus diesem die Eigenschaften der Funktion (grob) „herauszulesen“.“ Aber schon im nächsten Satz wird der Computer insofern kritisiert, dass diese Programme Sprung-, Pol- und Knickstellen nicht richtig verarbeiten und darstellen.
Gerade weil solche Stellen besonders bedeutsam sind, wird an dieser Stelle die Schmelzwärme als Beispiel angeführt. Dazu sollen die SchülerInnen erklären können, warum die Temperatur erst wieder steigt, wenn das gesamte Eis geschmolzen ist. Solche Überlegungen halte ich für sehr wertvoll und förderlich für das Verstehen der Welt.

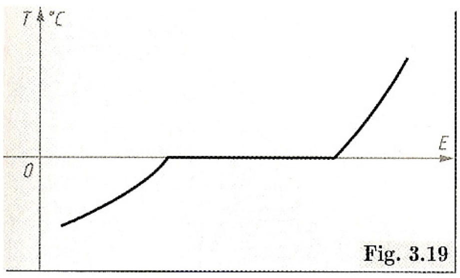
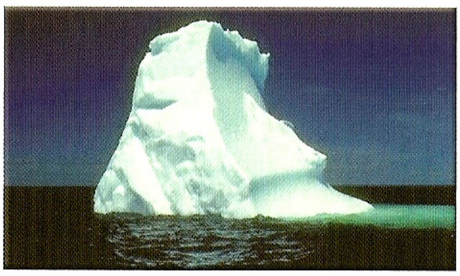


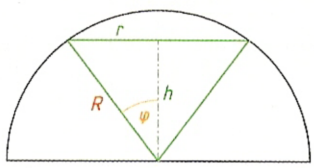
Fig. 3.19



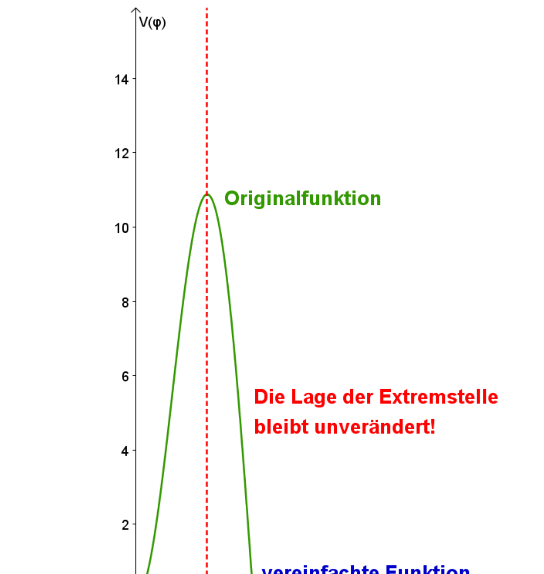
Dennoch schätze ich den Computer als hilfreiches Mittel zur Bewältigung (mathematischer) Probleme. Gerade weil allgemein bekannt ist, dass dem Computer nicht blind vertraut werden darf, würde ich den Einsatz für sinnvoll erachten. Genau an solchen Stellen hätten SchülerInnen die Chance, die Mathematik sowohl als „mächtiges Instrument“ als auch dessen Bedeutung in unserer „Computerwelt“ kennen zu lernen. Außerdem werden die SchülerInnen im kritischen Umgang mit einem Computer geschult und sie merken, dass sie selbst auch mitdenken müssen, um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten.
Als Nächstes wird der Schnittwinkel zweier Kurven definiert, wobei nicht erwähnt wird wozu man diese Berechnungen brauchen könnte.
Falls kein Computer zur Verfügung steht, schafft das kommende Kapitel Abhilfe. Hier wird erklärt, wie Handskizzen anzufertigen sind. Als Hintergrund dient das bereits angeeignete Wissen über Polynom- und rationale Funktionen, wobei die gesuchte Funktion durch die Lage der Asymptoten bestimmt wird. Ich persönlich würde eine Handskizze wahrscheinlich eher durch die Lage der Extrempunkte mithilfe des Satzes von der Monotoniezerlegung anfertigen. Dieser besagt, dass die Nullstellen der ersten Ableitung jedes Definitionsintervall einer differenzierbaren Funktion f in Teilintervalle zerlegt, in denen f streng monoton ist. Damit ist eine schnelle Skizzierung des Grafen möglich.
Im kommenden Abschnitt geht es um die Vererbung von Eigenschaften, wie etwa der Differenzierbarkeit einer Funktion, die sich wiederum aus differenzierbaren Funktionen zusammensetzt. Bevor der Aufgabenteil und ein anwendungsorientierter Exkurs über Kurven folgen, werden Kurvenscharen, Funktionenklassen und die Vorgangsweise bei Modellbildungen genauer besprochen.

Nun folgt das lang ersehnte Kapitel „Einige Anwendungen der Differentialrechnung“, das von Extremwertaufgaben, Taylor-Polynome und dem Newton’schen Näherungsverfahren handelt. Bei der Einleitung wird erklärt, dass wegen des direkten Größenvergleichs mit den Randwerten der Einsatz der zweiten Ableitung überflüssig ist. Aus mir nicht nachvollziehbaren Gründen wird trotzdem bei dem einführenden Musterbeispiel, welches sich mit dem flächengrößten Rechteck befasst, das Maximum durch Bildung der zweiten Ableitung bestätigt. Dabei bräuchte man nur den Funktionswert der Extremstelle (also den Extremwert) zu berechnen und mit den Randwerten vergleichen. Näheres dazu aber im *Kapitel 4*. Anhand dieses Beispiels wird der Ablauf des Rechenganges von Extremwertaufgaben vorgestellt sowie Begriffe, wie „Zielfunktion“ und „Nebenbedingung“ genau erklärt. Allerdings halte ich die Bezeichnung „einstellige Zielfunktion“ für verwirrend. Damit ist die Gleichung der Zielfunktion, die nur mehr von einer Variable abhängt, gemeint.

Als Nächstes werden Extremwertaufgaben mit Formvariablen behandelt. Dazu wird (leider) ein Beispiel ohne jeglichen Praxisbezug gewählt. In eine Halbkugel mit dem Radius R ist ein Drehkegel von a) größtem Volumen und b) größter Oberfläche einzuschreiben, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt.



Das bedeutet, dass die Funktion zunächst vom Radius des einzuschreibenden Drehkegels r und dessen Höhe h abhängig ist. Durch Einsetzen der Nebenbedingung, die man mithilfe des pythagoreischen Lehrsatzes erhält, sind das Volumen und die Oberfläche nur noch von einer Variablen abhängig. Das Beispiel wird im darauf folgenden Abschnitt fortgesetzt, wobei diesmal die Funktion vom Öffnungswinkel φ abhängt und anschließend durch weglassen konstanter Faktoren vereinfacht wird. An dieser Stelle vermisse ich die Funktionsgrafen, die das Vereinfachen – beispielsweise durch weglassen von konstanten Faktoren – veranschaulichen würden:



Bei dieser Gelegenheit hätte man auch das Vereinfachen durch Quadrieren (einer nichtnegativen Funktion) auf anschauliche Art und Weise – nämlich durch Grafen – verdeutlichen können.
Anschließend wird eine Extremwertaufgabe besprochen, die keine eindeutige Lösung besitzt. Die Nebenbedingung des dazu gerechneten Beispiels ergibt sich diesmal aus dem Strahlensatz. Bevor der Aufgabenteil folgt, wird den SchülerInnen noch ein „Rezept" zum Lösen von Extremwertaufgaben mit auf den Weg gegeben. Dieser gewissermaßen unerschöpfliche Aufgabenteil (82 Aufgaben!) ist (leider) mit Überschriften versehen, die es den SchülerInnen fast unmöglich machen, eigenständig die Nebenbedingung herauszufinden. Die Gliederung wird folgendermaßen vorgenommen: Aufgaben zur Theorie, Aufgaben mit einer explizit (durch eine Formel) gegebenen Nebenbedingung, Aufgaben, deren Nebenbedingungen mit dem Strahlensatz herleitbar sind, Aufgaben, deren Nebenbedingung mit dem pythagoreischen Lehrsatz herleitbar sind, Aufgaben mit (Hilfs-)Winkeln und vermischte Aufgaben. Die meisten Beispiele handeln von geometrischen Figuren, wie zum Beispiel Rechtecken, Rauten, Prismen, Drehkegeln, Kugeln, Kreisen usw.
Auch das Newton'sche Näherungsverfahren zum Ermitteln von Nullstellen wird ausführlich mit Musterbeispielen, Merksätzen und einem anschließenden Aufgabenteil erläutert.
Die Sinusfunktion wird im Kapitel „Taylor-Polynome" versucht zu approximieren. Wie gewohnt, werden auch hier detaillierte Erklärungen erbracht und Aufgaben gestellt.
Auch die Regel von l'Hospital samt Beweis und anschließenden Aufgaben sind in diesem Schulbuch zu finden.
Im letzten Kapitel „Rückblick und Ausblick" der Differentialrechnung geht es um Optimierungsaufgaben und deren Praxisbezug, Extremwertaufgaben mit mehrstelligen Funktionen, Approximation einer Funktion an einer Stelle x_0 durch Potenzreihen sowie Spline-Funktionen. Bevor zum Abschluss des Kapitels ein anwendungsorientierter Exkurs folgt, wird der Aufgabenteil angeführt. Dieser Abstecher handelt von einem alten Kasten, der in eine neue Wohnung gebracht werden soll, wobei man nicht weiß, ob das geliebte Möbelstück um eine schmale Ecke transportiert werden kann. Ein alltägliches Problem, das den SchülerInnen sicherlich auch bekannt ist.

Fazit: Dieses Schulbuch zeichnet sich durch einen quasi unerschöpflichen Aufgabenpool aus. Außerdem versuchen die Autoren mit Kommentaren, wie zum Beispiel „Erläutere!“, „Diskutiere den Gedankengang!“ oder „Begründe!“ die SchülerInnen zum Nachdenken anzuregen. Mir fällt auch auf, dass konkrete Fragen an die SchülerInnen gerichtet werden, die aber meist in der nächsten Zeile beantwortet werden. Die ständigen Verweise auf vorangegangene und später folgende Kapitel habe ich eher als störend empfunden. In diesem Schulbuch ist für meinen Geschmack zu viel Text. Ich würde vielmehr auf die Intuition der SchülerInnen setzen. Durch die „x-lastige“ Schreibweise wirkt vieles komplizierter als es eigentlich ist. Der breit gefächerte Inhalt wird den SchülerInnen sicher auf höchstmöglichem Niveau und sehr detailliert nähergebracht, erfordert aber ein gewisses „Durchhaltevermögen“.

3.3 Mathematik verstehen 7 (Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl)

Beim ersten Durchblättern des Buches fällt auf, dass die einzelnen Kapitel aus kurzen, leicht verständlichen Theorieteilen, bei denen oft auch Musterbeispiele gerechnet werden, aufgebaut sind. Nach jedem Theorieteil werden Grundaufgaben, oder manchmal auch weiterführende Aufgaben gestellt. Außerdem wird der Leser durch einen einleitenden Satz nach der Überschrift auf das kommende Kapitel eingestimmt. Beispielsweise ist nach der Überschrift „Extremwertaufgaben" folgendes zu lesen: „In diesem Abschnitt lösen wir Probleme durch die Berechnung von globalen Maximum- bzw. Minimumstellen von Funktionen." Solche einfachen und einladenden Sätze halte ich für sehr sinnvoll.
Interessant ist hier auch die Anordnung der Kapitel. Die Autoren beginnen – im Gegensatz zu den anderen zwei Schulbüchern – mit dem Differenzenquotienten als mittlere Änderungsrate und schließen mit dem Kapitel „Historisches zur Differentialrechnung". Die Autoren zuvor haben immer mit dem historischen Hintergrund auf diesen großen Abschnitt eingestimmt. Auch die Extremwertaufgaben stehen hier an einer anderen Stelle, nämlich noch vor den Ableitungsregeln, wie etwa Produkt- oder Quotientenregel. Genauso wie in Mathematik Lehrbuch 7 werden auch hier die SchülerInnen mit „du" angesprochen. Die Differentialrechnung wird den SchülerInnen hier auf rund 120 Seiten näher gebracht. Ehe auf diese eingegangen wird, befasst man sich mit Gleichungen höheren Grades und Nullstellen von Polynomfunktionen.
Wie schon erwähnt wird mit dem Differenzenquotienten begonnen. Dazu berechnen die SchülerInnen aus einem Fahrplan zunächst die mittlere Geschwindigkeit eines Zuges in verschieden langen Streckenabschnitten. Es folgt eine Grundaufgabe, bei der die mittlere Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers in angegebenen Zeitintervallen berechnet werden soll.
Auch bei der nächsten Aufgabe wird auf die Erfahrungswelt der SchülerInnen Wert gelegt. Schritt für Schritt wird der Differenzenquotient „entwickelt" bevor schließlich eine „einfach wirkende" Definition aufgeschrieben wird. Dazu ein Auszug aus dem Buch:

Die mittlere Änderungsrate

2.03 In nebenstehender Tabelle sind die zu verschiedenen Uhrzeiten t eines Tages gemessenen Temperaturen T(t) an einem bestimmten Ort angegeben.

Uhrzeit t	Temperatur T(t) in °C
8	9
12	13
14	17

1) Berechne die Temperaturzunahme im Zeitintervall [8; 12] bzw. [12; 14].
2) Gib die Temperaturzunahme im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ an.
3) Berechne die mittlere Temperaturzunahme pro Stunde im Zeitintervall [8; 12] bzw. [12; 14]. In welchem dieser Zeitintervalle nimmt die Temperatur im Mittel pro Stunde schneller zu?
4) Gib die mittlere Temperaturzunahme pro Stunde im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ an.

Lösung:
1) Temperaturzunahme im Zeitintervall $[8; 12] = 13 - 9 = 4$ (°C)
Temperaturzunahme im Zeitintervall $[12; 14] = 17 - 13 = 4$ (°C)
2) $T(t_2) - T(t_1)$
3) Die mittlere Temperaturzunahme pro Stunde erhält man, indem man die Temperaturzunahme durch die Zeitdauer dividiert.
Mittlere Temperaturzunahme pro Stunde im Zeitintervall $[8; 12] = \frac{4}{4} = 1$ (°C/h)
Mittlere Temperaturzunahme pro Stunde im Zeitintervall $[12; 14] = \frac{4}{2} = 2$ (°C/h)
Obwohl in beiden Zeitintervallen die Temperatur um 4 °C zunimmt, nimmt die Temperatur im Zeitintervall [12; 14] im Mittel pro Stunde schneller zu als im Zeitintervall [8; 12], weil das Zeitintervall kürzer ist.
4) $\frac{T(t_2) - T(t_1)}{t_2 - t_1}$

Ausdrücke der Form $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ oder $\frac{T(t_2) - T(t_1)}{t_2 - t_1}$ haben wir bereits in Mathematik verstehen 6 (Seite 54, 55) kennen gelernt. Man bezeichnet sie als Differenzenquotienten oder mittlere Änderungsraten. Allgemein definiert man:

Definition: Es sei f: A → ℝ eine reelle Funktion und [a; b] ⊆ A. Dann heißt die reelle Zahl

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

der **Differenzenquotient** oder die **mittlere Änderungsrate von f in [a; b].**

Der Vorteil dieser Definition liegt in deren Überschaubarkeit, da diese im Vergleich zu den anderen nicht „x-lastig“ ist.

Im Anschluss wird ein Beispiel, bei dem es um die Volumszunahme eines Ballons geht, gerechnet und Grundaufgaben gestellt. Auch der Zusammenhang zwischen Vorzeichen des Differenzenquotienten und dem „Verhalten“ der Kurve wird verständlich erläutert. Wieder werden Grund- und weiterführende Aufgaben, bei denen hauptsächlich Begründungen verlangt werden, angeführt, bevor die Autoren mit den verschiedenen Deutungen des Differenzenquotienten fortfahren. Dabei wird sowohl auf einfache und verständliche Formulierungen, als auch auf das intuitive Verständnis der SchülerInnen Wert gelegt. So wird der Differenzenquotient (die mittlere Änderungsrate) als Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente in *[a;b]*, als mittlere Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit in *[a;b]* oder als der Faktor, mit dem die Änderung der Argumente in *[a;b]* multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte in *[a;b]* zu erhalten, gedeutet.

Auch beim Musterbeispiel wird darauf geachtet, dass Verschiedenes gefragt, aber im Grunde immer dasselbe berechnet werden soll. Konkret meine ich damit:

2.22 Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2$.

a) In welchem Verhältnis steht die Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente im Intervall [1; 2]?

b) Wie groß ist die mittlere Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit im Intervall [2; 3]?

c) Wievielmal stärker wachsen im Intervall [5; 10] die Funktionswerte als die Argumente?

Lösung:

a) $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{2-1} = \frac{9}{1}$

Das Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente im Intervall [1; 2] beträgt 9 : 1.

b) $\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2^2}{3-2} = 15$

Die mittlere Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit im Intervall [2; 3] beträgt 15.

c) $\frac{f(10)-f(5)}{10-5} = \frac{3 \cdot 10^2 - 3 \cdot 5^2}{10-5} = 45 \Rightarrow f(10) - f(5) = 45 \cdot (10-5)$

Im Intervall [5; 10] wachsen die Funktionswerte 45-mal so stark wie die Argumente.

Erst am Schluss wird der Differenzenquotient als Steigung der Sekante aufgefasst. Die Autoren beginnen beim Steigungsdreieck einer linearen Funktion – also sozusagen bei Null – und betrachten erst dann nichtlineare Funktionen und deren Sekantensteigung in einem Intervall.

Als Nächstes geht es um den Differentialquotient, der hier in einem anschaulichen und anwendungsorientierten Kontext, nämlich als Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt, auftaucht. Das einführende Beispiel und vor allem die Erklärungen dazu sind erstklassig gewählt:

Die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt

2.38 Für den Weg s(t), den ein Körper beim freien Fall in der Zeit t zurücklegt, gilt näherungsweise $s(t) = 5t^2$ (t in Sekunden, s in Meter).

a) Berechne die mittleren Geschwindigkeiten eines frei fallenden Körpers in den Zeitintervallen [3; z] für z = 4; 3,5; 3,1; 3,01; 3,001.

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3?

Lösung:

a) $\overline{v}(3;z) = \frac{s(z)-s(3)}{z-3} = \frac{5\cdot z^2 - 45}{z-3} = \frac{5\cdot(z^2-9)}{z-3} = \frac{5\cdot(z-3)\cdot(z+3)}{z-3} = 5\cdot(z+3)$

Diese Formel gilt nur für $z \neq 3$, weil sonst der Nenner der Brüche gleich 0 wäre.

Setzt man für z die angegebenen Werte ein, erhält man die in der nebenstehenden Tabelle angeführten mittleren Geschwindigkeiten.

Zeitintervall [3; z]	Mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}(3; z)$
[3; 4]	35
[3; 3,5]	32,5
[3; 3,1]	30,5
[3; 3,01]	30,05
[3; 3,001]	30,005

b) Wir bezeichnen die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3 mit v(3). Was soll man darunter überhaupt verstehen? Es liegt nahe, die mittlere Geschwindigkeit in einem immer kleineren Zeitintervall [3; z] zu ermitteln, dh. z immer näher bei 3 zu wählen, wodurch man eine immer bessere Näherung für die gesuchte Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3 erhält. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3 kann man als **Grenzwert** dieser mittleren Geschwindigkeiten auffassen, wenn sich z **unbegrenzt** der Zahl 3 nähert (dh. in beliebige Nähe von 3 kommt). Auf Grund der Tabelle vermuten wir, dass dieser Grenzwert 30 ist, dass also v(3) = 30 m/s beträgt.

In der letzten Aufgabe haben wir auf Grund der Tabelle vermutet, dass der Grenzwert der mittleren Geschwindigkeiten gleich 30 ist. Können wir diesen Grenzwert auch berechnen? Können wir nicht einfach in der Formel $\overline{v}(3,z) = 5\cdot(z+3)$ für die Variable z = 3 setzen? Wir würden dann tatsächlich $5\cdot(3+3) = 30$ erhalten. Leider können wir so nicht vorgehen, weil die Formel $\overline{v}(3,z) = 5\cdot(z+3)$ nur für $z \neq 3$ gilt. Wir können aber folgendermaßen argumentieren: Wenn sich z unbegrenzt der Zahl 3 nähert, dann nähert sich $z+3$ unbegrenzt der Zahl $3+3=6$ und somit $5\cdot(z+3)$ unbegrenzt der Zahl $5\cdot 6 = 30$.

Dass die Geschwindigkeit v(3) der **Grenzwert** (lat.: **limes**) der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}(3,z)$ ist, wenn sich z unbegrenzt der Zahl 3 nähert, schreibt man kurz so an:

$$\mathbf{v(3) = \lim_{z\to 3} \overline{v}(3,z)}$$

Man liest dies: v(3) ist der Limes von $\overline{v}(3,z)$ für z gegen 3.

Ein Körper bewege sich gemäß der Zeit-Ort-Funktion $s: t \mapsto s(t)$. Man nennt

$$v(t) = \lim_{z\to t} \overline{v}(t,z) = \lim_{z\to t} \frac{s(z)-s(t)}{z-t}$$

die **Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t**.

Anhand des nächsten Beispiels haben die SchülerInnen die Möglichkeit den Differentialquotienten als Änderungsrate aufzufassen. Dabei geht es um einen mit Wasser gefüllten Behälter, bei dem aufgrund eines Lochs die Flüssigkeit ausläuft. Es sollen mittlere Volumsänderungsgeschwindigkeit und Volumsänderungsgeschwindigkeit V'(t) gedeutet und berechnet werden. Außerdem möchte man wissen, wann der Behälter leer ist. Damit die SchülerInnen sehen, dass die Änderungsrate nicht nur von der Zeit abhängig sein kann, sondern auch von anderen Parametern, wie zum Beispiel dem Radius, wird ein weiteres Beispiel vorgerechnet. Dabei geht es, wie schon beim Differenzenquotienten, um einen kugelförmigen Ballon, der aufgeblasen wird, also sein Volumen verändert. Auch hier sind Grund- und weiterführende Aufgaben angeführt.

In gleicher Weise wie beim Differenzenquotienten wird an dieser Stelle auf die Deutung des Differentialquotienten eingegangen. Es wird verdeutlicht, dass man sich unter dem Differentialquotienten an einer Stelle x näherungsweise einen Differenzenquotienten in einer sehr kleinen Umgebung von x vorstellen kann. Somit können die drei Deutungen des Differenzenquotienten (siehe oben) auf den Differentialquotienten umgemünzt werden, wenn dazugesagt wird, dass man in der Nähe der Stelle x bleibt.

Um zu klären, was nun eine Tangente überhaupt ist, beziehen sich die Autoren auch auf die schon bekannte Kreistangente. Im Unterschied zu anderen Schulbüchern werden hier die Schwachstellen der „Tangentendefintion durch den Kreis“ diskutiert. Es wird verständlich erläutert, dass man ja bei einer Funktion weder einen Mittelpunkt noch einen Radius hat. Noch dazu kann es sein, dass die Tangente mit dem Grafen mehr als einen Punkt gemeinsam hat.

Erst jetzt gehen die Autoren auf die bekannte Definition der Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigung und auf den Zusammenhang zwischen Vorzeichen des Differentialquotienten und Steigung der Funktion an einer Stelle x ein. Beim dazu passenden Musterbeispiel regen die Autoren zum Computereinsatz an. Nun wird der Steigungswinkel einer Gerade und insbesondere der Tangente bestimmt.

Im nächsten Abschnitt werden andere gebräuchliche Schreibweisen aufgezeigt, wie beispielsweise die Leibniz’sche. Die Vor- und Nachteile dieser Bezeichnung werden diskutiert. Damit die SchülerInnen sehen können, wie man diese Schreibweise „anwendet“, werden zwei Beispiele vorgestellt.

Des Weiteren wird die Anwendung des Differentialquotienten verdeutlicht, indem Beispiele aus Physik und Technik gerechnet werden, bei denen der Differentialquotient einerseits als Steigung gedeutet wird und andererseits zur Definition von Begriffen, wie etwa der Geschwindigkeit, verwendet wird. Die nachstehenden Grundaufgaben sind größtenteils anwendungsorientiert. Dabei geht es unter Anderem um einen lotrecht nach oben geworfenen Stein, einen Zug, den

Treibstoffverbrauch, die Temperatur und um Kosten, die einem Betrieb bei der Produktion von x Mengeneinheiten entstehen.

Im nächsten Abschnitt werden Ableitungsregeln für Polynomfunktionen hergeleitet, damit das mühsame ausrechnen eines Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten nicht mehr durchgeführt werden muss. Es erfolgen Ableitungsregeln für konstante Funktionen, Potenzfunktionen, Funktionen mit konstanten Faktoren und für die Summe von Funktionen, die immer im Anschluss bewiesen werden. Als kleine Kostprobe sehen wir uns die Summenregel an:

Satz (Summenregel):
$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Beweis: Sei $f(x) = g(x) + h(x)$. Dann gilt:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{g(z) + h(z) - (g(x) + h(x))}{z - x} =$$

$$= \lim_{z \to x} \left(\frac{g(z) - g(x)}{z - x} + \frac{h(z) - h(x)}{z - x} \right) = g'(x) + h'(x) \qquad \square$$

Man sagt auch: Eine Summe darf gliedweise differenziert werden.

Anders als in anderen Schulbüchern besticht dieser Beweis durch seine Übersichtlichkeit. Auch die ausformulierten Sätze, die jeweils direkt unter den Beweisen angeführt sind, tragen meiner Meinung nach zum besseren Verständnis bei. Mir fällt auch auf, dass in diesem Schulbuch die mathematische Bezeichnung für „Ende des Beweises“, nämlich das Symbol □, verwendet wird. Anschließend werden sowohl Grund- und weiterführende Aufgaben, als auch Beweisaufgaben und Aufgaben zur Leibniz’schen Schreibweise gestellt.

Höhere Ableitungen werden als Nächstes bearbeitet, wobei gleich zu Beginn erwähnt wird, dass nur noch die dritte und keine höhere Ableitung gebraucht wird. Die zweite Ableitung interpretiert man als Beschleunigung.

Im Kapitel „Monotonie und Extremstellen von Funktionen“ wird zunächst der bereits bekannte Begriff „Monotonie“ wiederholt. Dazu verweisen die Autoren auf das Lehrbuch der letzten Klasse, schreiben aber zusätzlich die Definition auf. Danach wird auf globale und lokale Extremstellen eingegangen. Dazu wird beispielsweise die globale Maximumsstelle einer Funktion nicht so „streng“ wie in „Mathematik Lehrbuch 7“ oder in „Ingenieur-Mathematik 3“ definiert. Hier genügt es, dass alle Funktionswerte aus der Definitionsmenge kleiner *oder gleich* dem Extremwert sind. Die angeführten Definitionen und Begriffe zum Thema „lokale Extremstellen“ werden

anhand von ausgewählten Funktionen erklärt. Anschließend werden zwei Sätze, die den Zusammenhang von Monotonie und Extremstelle widerspiegeln, aufgeschrieben und bewiesen. Die Sätze samt Beweise sind übersichtlich dokumentiert und leicht zu verstehen.
Im nächsten Abschnitt werden Polynomfunktionen mit Hilfe der Ableitung untersucht. Dabei wird die Polynomfunktion, je nach Monotonieverhalten zerlegt. Wenn man das Vorzeichen der Tangentensteigung genauer betrachtet, fällt auf, dass folgende Sätze gelten müssen:

Satz (Monotoniesatz): Ist $f: A \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $I \subseteq A$ ein Intervall, dann gilt:
(1) Ist $f'(x) > 0$ für alle inneren Stellen $x \in I$, dann ist f streng monoton steigend in I.
(2) Ist $f'(x) < 0$ für alle inneren Stellen $x \in I$, dann ist f streng monoton fallend in I.

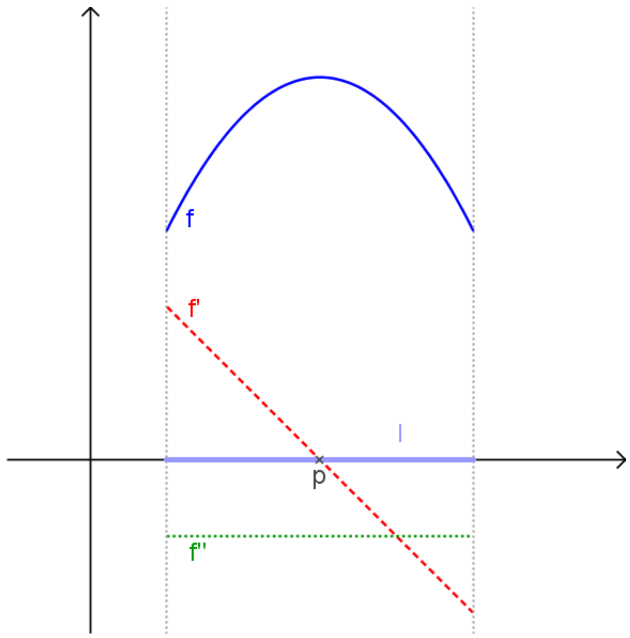
Satz (Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen): Ist p eine lokale Extremstelle einer Polynomfunktion f, dann ist $f'(p) = 0$.

Satz (vom einheitlichen Monotonieverhalten): Ist $f: A \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $I \subseteq A$ ein Intervall, dann gilt:
Besitzt f' keine Nullstelle im Inneren von I, dann ist f streng monoton in I.

Im Anschluss wird den SchülerInnen der Unterschied zwischen hinreichender und notwendiger Bedingung verständlich anhand eines Beispiels ($f(x)=x^3$) erklärt. Mithilfe der Monotonieüberlegungen kann ganz einfach der Graf skizziert werden, was an einem Beispiel illustriert wird. Genauso anschaulich wie Extremstellen werden auch Terrassenstellen mit einem Beispiel erklärt. Bevor auf die Krümmung und somit auf die zweite Ableitung eingegangen wird, setzen sich die Autoren noch mit Extremstellen von Polynomfunktionen in endlichen Intervallen auseinander. Dabei sollen die SchülerInnen erkennen können, dass Extremstellen auch am Rand liegen können. Solche Erkenntnisse sind überaus wichtig, besonders in Bezug auf die später folgenden Extremwertaufgaben.
Auch beim Kapitel „Krümmung“ dient die Erfahrungswelt der SchülerInnen als Fundament. Links- und rechtsgekrümmt wird mit dem nach links und nach rechts einschlagen beim Autofahren versinnbildlicht. Der Zusammenhang von Funktion und ihrer erster und zweiter Ableitung wird entwickelt und in einer Definition und einem Satz festgehalten. Auch das vorgerechnete Beispiel leitet elegant von der Krümmung zu den Wendepunkten über, ohne diese jedoch zu erwähnen. An dieser Stelle hätte man gleich den Wendepunkt als jenen Punkt, wo der Rechts- zum Linkseinschlag

wechselt, interpretieren können. Stattdessen wird nur der Wechsel vom Rechts- zum Linkseinschlag angeführt.

In der Folge werden hinreichende Bedingungen für lokale Extremstellen erarbeitet. Vermutungen wie etwa, „Ist $f'(p)=0$ und $f''(x)<0$ für alle $x \in I$ (d.h. f rechtsgekrümmt in I), dann ist p eine lokale Maximumstelle von f" werden protokolliert. An dieser Stelle könnte man außer der Funktion auch die erste und zweite Ableitungsfunktion zeichnen. Damit könnte man die vorherigen Vermutungen noch anschaulicher vermitteln.



Anschließend werden Wendestellen genauer behandelt. Dabei wird eine Definition angegeben, bevor die notwendige Bedingung entwickelt wird. Dass die Umkehrung des Satzes nicht gilt wird an einem passenden Gegenbeispiel verdeutlicht.

Eine notwendige Bedingung für Wendestellen

Satz (Notwendige Bedingung für Wendestellen): Ist p eine Wendestelle einer Polynomfunktion f, dann ist $f''(p) = 0$.

Beweis: Ist p eine Wendestelle von f, dann ist p eine lokale Extremstelle von f'. Daraus folgt notwendigerweise $(f')'(p) = 0$, also $f''(p) = 0$. □

Beachte: Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht.

Ist $f''(p) = 0$, so folgt nicht unbedingt, dass p eine Wendestelle von f ist. Ein Gegenbeispiel stellt die Funktion f mit $f(x) = x^4$ dar (Abb. 3.9). Es ist $f''(x) = 12x^2$ und somit $f''(0) = 0$, aber 0 ist keine Wendestelle von f.

Man kann also sagen: Die Bedingung $f''(p) = 0$ ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür, dass p eine Wendestelle von f ist.

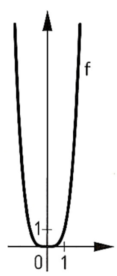


Abb. 3.9

Sowohl bei der notwendigen, als auch bei der hinreichenden Bedingung für Wendestellen würde eine Grafik, wo die Ableitungsfunktionen eingezeichnet sind, gut passen. Wieder findet man ein Arrangement aus Grund- und weiterführenden Aufgaben.

In der Folge werden typische Formen der Grafen von Polynomfunktionen zweiten, dritten und vierten Grades skizziert. Damit haben die SchülerInnen einen guten Überblick über das charakteristische Aussehen der verschiedenen Funktionen.

Im nachfolgenden Kapitel wird anhand eines Beispiels erklärt, wie die Termdarstellung einer Polynomfunktion aufgrund vorgegebener Bedingungen gefunden werden kann. Dann folgen etliche Aufgaben, darunter auch Computeraufgaben.

Im kommenden Kapitel „einige Anwendungen von Funktionsuntersuchungen" wird verdeutlicht, dass man die Untersuchung von Polynomfunktionen zum Lösen verschiedener Probleme verwenden kann. Dabei wird das Ermitteln von Nullstellen durch Abspalten eines Linearfaktors, das Ermitteln der Anzahl von Lösungen bzw. Nullstellen, der Beweis von Ungleichungen und das Ermitteln und Untersuchen von Lösungsmengen von Ungleichungen angeführt.

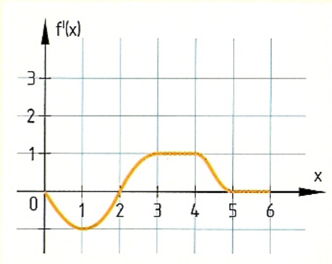
An dieser Stelle gehen die Autoren auf Extremwertaufgaben ein und beginnen mit einem Klassiker unter den Extremwertaufgaben, nämlich dem Rechteck mit maximalem Flächeninhalt bei festem Umfang. Dabei wird der Rechengang detailliert und verstehbar demonstriert. Nach diesem Beispiel wird noch einmal der Weg zum Ergebnis Schritt für Schritt herausgearbeitet. Leider wird auch in diesem Schulbuch die zweite Ableitung und nicht die Randwerte zum Begründen einer Extremstelle verwendet. Des Weiteren werden auch hier die Aufgaben nicht durchmischt. Damit meine ich, dass das Kapitel „Extremwertaufgaben" im Grunde nach Überschriften, wie etwa „Aufgaben mit dem pythagoreischen Lehrsatz" oder „Aufgaben mit dem Strahlensatz" unterteilt werden. Die SchülerInnen haben meiner Meinung nach nicht die Möglichkeit die Nebenbedingung eigenständig zu entwickeln. Nach einem Musterbeispiel werden immer dazu passende, meist mit einer Skizze versehene Aufgaben gestellt. Auch das Vereinfachen durch Weglassen eines konstanten Faktors oder Quadrieren (einer nichtnegativen Funktion) wird anschaulich erklärt. An dieser Stelle würde ich die Funktion plotten, um zu verdeutlichen, dass die Extremstelle durch das Vereinfachen nicht verschoben wird.

Im nächsten Abschnitt nehmen die Autoren die Zusammenhänge von Funktionen und ihren Ableitungsfunktionen genauer unter die Lupe. Dabei wird viel Wert auf das Verstehen der Zusammenhänge durch Skizzen gelegt.

Rekonstruktion einer Polynomfunktion aus der Ableitungsfunktion

3.181 Nebenstehend ist die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f dargestellt.

1) In welchen Intervallen ist die Funktion f streng monoton steigend, in welchen streng monoton fallend?
2) An welchen Stellen hat die Funktion f eine zur ersten Achse parallele Tangente?
3) Skizziere den ungefähren Verlauf der Funktion f unter der Annahme $f(0) = 0$.



Lösung:
1) f ist streng monoton fallend in [0; 2] und streng monoton steigend in [2; 5].
2) Für $x = 0$, $x = 2$ bzw. $5 \leq x \leq 6$.
3) Siehe Abb. 3.33

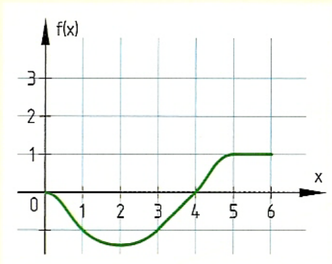


Abb. 3.33

Durch solche Aufgaben haben die SchülerInnen die Chance die Beziehungen und Eigenarten von Funktion und ihrer Ableitungsfunktion zu begreifen.

Erst jetzt beschäftigt man sich mit Untersuchungen weiterer Funktionen (Quadratwurzel-, Winkel-, Exponential-, Umkehr- sowie der rationalen Funktion) und weiteren Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten- und Kettenregel). Die SchülerInnen werden behutsam zu den Regeln geleitet, wie man anhand dieses Buchausschnittes gut sehen kann:

Quotientenregel

Die Funktion f mit $f(x)=\frac{x}{x+1}$ ist von der Form $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ mit $u(x)=x$ und $v(x)=x+1$. Solche Funktionen können wir bislang noch nicht differenzieren. Eine nahe liegende Vermutung wäre: $f'(x)=\frac{u'(x)}{v'(x)}$. Diese Vermutung ist jedoch falsch, wie die folgende Aufgabe zeigt.

4.01 Sei $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ mit $u(x)=x^2$ und $v(x)=x$. Zeige: $f'(x)\neq\frac{u'(x)}{v'(x)}$

Lösung: $f(x)=\frac{x^2}{x}=x$, also $f'(x)=1$. Nach der vermuteten Regel wäre jedoch $f'(x)=\frac{u'(x)}{v'(x)}=\frac{2x}{1}=2x$.

Eine korrekte Regel sieht etwas komplizierter aus:

Satz (Quotientenregel):

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beweis:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\frac{\frac{u(z)}{v(z)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{z-x}=\frac{u(z)v(x)-v(z)u(x)}{(z-x)v(z)v(x)}$$

Um diesen Differenzenquotienten durch die Differenzenquotienten von u und v ausdrücken zu können, fügen wir im Zähler $-u(x)v(x)+u(x)v(x)$ (also 0) ein und erhalten:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\frac{u(z)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-v(z)u(x)}{(z-x)v(z)v(x)}=$$

$$=\frac{v(x)[u(z)-u(x)]-u(x)[v(z)-v(x)]}{(z-x)v(z)v(x)}=$$

$$=\frac{1}{v(z)v(x)}\left[v(x)\frac{u(z)-u(x)}{z-x}-u(x)\frac{v(z)-v(x)}{z-x}\right]$$

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\frac{1}{v(x)v(x)}[v(x)u'(x)-u(x)v'(x)]=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \qquad \square$$

Auch bei den Beweisen werden Tricks beim Namen genannt und fallen nicht einfach so vom Himmel. Die Quotientenregel kann man jedoch relativ leicht von der Produktregel „ernten". Deshalb würde ich hier eine andere Beweisidee bevorzugen (siehe *Kapitel 4*). An dieser Stelle fällt mir auch die Reihenfolge der Faktoren auf. Ich würde die „übliche" Schreibweise $\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$ bevorzugen. Bei der Produktregel kann man eine ähnliche Vorgangsweise erkennen.

Der Computereinsatz wird beim Kapitel „Untersuchung von rationalen Funktionen" empfohlen. Genauso wie bei den Polynomfunktionen wird hier die Funktion mithilfe der Nullstellen der ersten Ableitung in verschiedene Monotonieintervalle zerlegt. Anschließend werden charakteristische Punkte durch Einsetzen der x-Werte in die Funktion aufgefunden. Somit kann die Funktion problemlos gezeichnet werden. Etliche Aufgaben verschiedenen Schwierigkeitsgrades sind folglich angegeben, bevor auf die Ableitung von Quadratwurzel- und Winkelfunktionen eingegangen wird. Bei der Ableitung von Sinus- und Cosinusfunktion verwenden die Autoren eine andere Schreibweise als sonst. Durch ein gut gewähltes Einstiegsbeispiel wird die Berechnung der Ableitung erleichtert:

4.54 Berechne die Steigung der Funktion f an der Stelle 0.

a) $f(x) = \sin x$ **b)** $f(x) = \cos x$

Lösung:

a) $\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} = \frac{\sin z}{z}$

$f'(x) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$

Um zu einer Vermutung bezüglich dieses Grenzwerts zu kommen, legen wir mit Hilfe des Taschenrechners die nebenstehende Tabelle an (Bogenmaß!).

z	$\frac{\sin z}{z}$
0,1	0,998334166
0,01	0,999983333
0,001	0,999999833
0,0001	0,999999998

Auf Grund der Tabelle vermuten wir:

$\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

Diese Vermutung ist richtig. Ein Beweis ist jedoch sehr aufwändig, weshalb wir darauf verzichten.

Wir erhalten: $f'(0) = 1$. (Kontrolliere am Graphen der Sinusfunktion.)

b) $\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\cos z - \cos 0}{z - 0} = \frac{\cos z - 1}{z}$

$f'(x) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z}$

Auf Grund der nebenstehenden Tabelle vermuten wir:

$\lim\limits_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0$

z	$\frac{\cos z - 1}{z}$
0,1	−0,049958347
0,01	−0,004999958
0,001	−0,000500000
0,0001	−0,000050010

Auch diese Vermutung ist richtig. Aber auch dafür ist ein Beweis sehr aufwändig, weshalb wir auf ihn verzichten.

Wir erhalten: $f'(0) = 0$. (Kontrolliere am Graphen der Cosinusfunktion.)

Unter Benutzung der Ergebnisse der letzten Aufgabe können wir nun Ableitungsregeln für die Sinus- und Cosinusfunktion herleiten. Im Beweis verwenden wir außerdem die folgenden Formeln des ersten Additionstheorems (siehe Mathematik verstehen 6, Seite 98):

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \quad \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

Satz **(Ableitung der Sinus- bzw. Cosinusfunktion):**

(1) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$ **(2)** $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

Beweis: Wir gehen von den Differenzenquotienten aus:

(1) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$

Nach der letzten Aufgabe ist $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ und $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. Somit erhalten wir:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$

(2) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} = \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h}$

Nach der letzten Aufgabe ist $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ und $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. Somit erhalten wir:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$ □

Wie man sieht, kann auch bei solchen Beweisen der Taschenrechner eingesetzt werden. Dadurch bleibt zwar eine „mathematische Lücke“, die aber meiner Meinung nach nicht stört. Ich persönlich lege mehr Wert auf Übersichtlichkeit und Grundverständnis seitens der SchülerInnen. Für meinen Geschmack nicht so anschaulich – sicherlich auch aufgrund der Schreibweise – wird die Ableitung der Sinusfunktion in „Mathematik Lehrbuch 7“ (siehe S 31) gestaltet.
Als Nächstes wird die Kettenregel zwar nicht vollständig bewiesen, aber gut verständlich beschrieben.

4.5 Die Kettenregel

In diesem Abschnitt leiten wir eine Ableitungsregel für Verkettungen von Funktionen her.

Die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ ist von der Form $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ mit $u(y) = \sqrt{y}$ und $v(x) = x^2 + 1$. Derartige Funktionen können wir bislang noch nicht differenzieren.

Ein nahe liegender Gedanke zur Herleitung einer Ableitungsregel besteht darin, den Differenzenquotienten so zu zerlegen:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{u(v(z))-u(v(x))}{z-x} = \frac{u(v(z))-u(v(x))}{v(z)-v(x)} \cdot \frac{v(z)-v(x)}{z-x}$$

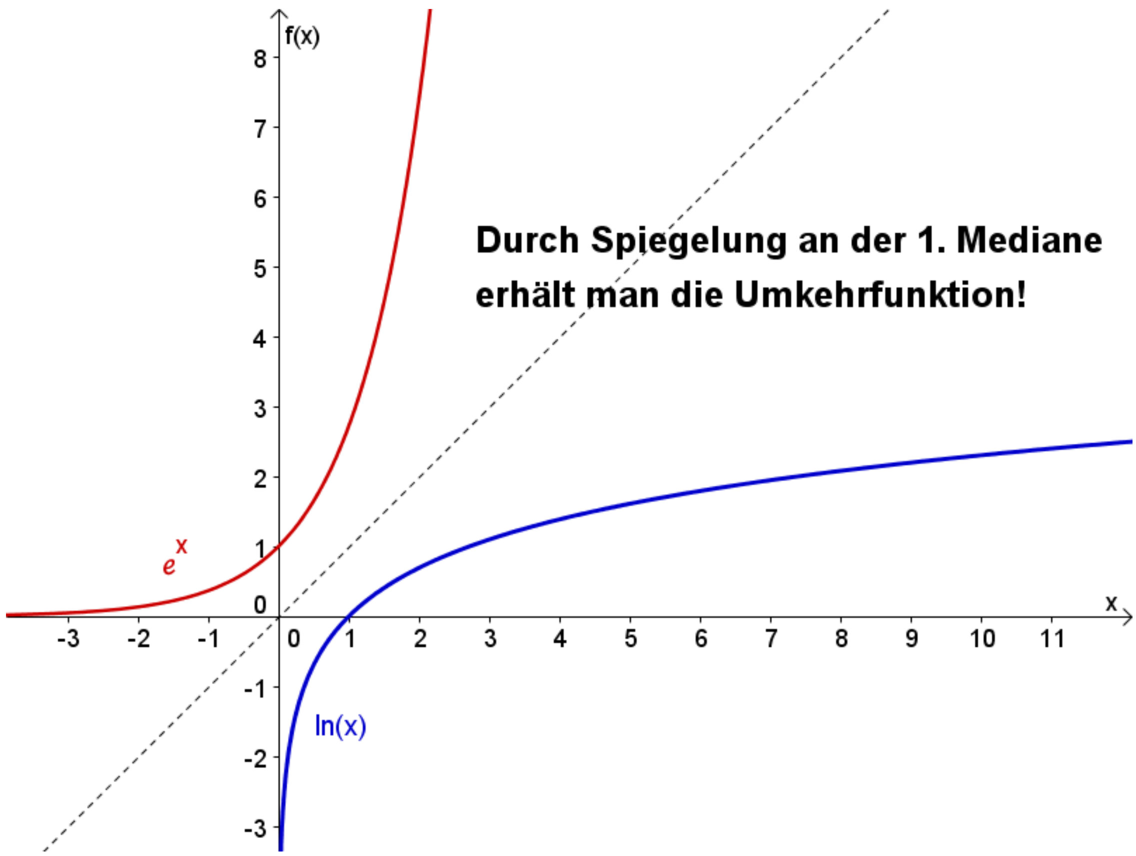
Nähert sich z unbegrenzt der Zahl x, so nähert sich v(z) unbegrenzt der Zahl v(x) und somit würde sich ergeben:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Leider ist diese Überlegung kein vollgültiger Beweis. Sie funktioniert u. a. deshalb nicht, weil vorausgesetzt werden muss, dass stets $v(z) \neq v(x)$ ist, da sonst der Nenner des ersten Bruches null wäre. Dies muss aber durchaus nicht immer der Fall sein. Man kann jedoch beweisen, dass die erhaltene Regel trotzdem richtig ist. Ein korrekter Beweis ist jedoch ziemlich kompliziert, weshalb wir ihn nicht führen wollen. Wir halten aber fest:

Satz (Kettenregel):
$$f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Beim Kapitel „Ableitung von Exponentialfunktionen“ wird wieder der Einsatz eines Computers empfohlen. Wieder wird die Ableitungsregel geschickt hergeleitet, sowie Aufgaben gestellt.
Im folgenden Abschnitt wird eine Ableitungsregel für die Umkehrfunktion einer Funktion hergeleitet, die insbesondere auf die Logarithmusfunktion angewendet wird. Somit ist der Zusammenhang zwischen Logarithmus- und Exponentialfunktion gut erkennbar. Dass diese beiden Funktionen „miteinander verwandt“ sind, könnte man noch durch Grafen verdeutlichen:



An dieser Stelle wird auch die Potenzregel für reelle Exponenten bewiesen, bevor auf die Berechnung von Änderungsgeschwindigkeiten eingegangen wird. Hier wird die Deutung des Differenzialquotienten als Änderungsgeschwindigkeit wieder aufgegriffen, wodurch dieser Abschnitt nach dem Motto „back to the roots“ einen runden Abschluss zum Kapitel „Untersuchungen weiterer Funktionen“ bietet.

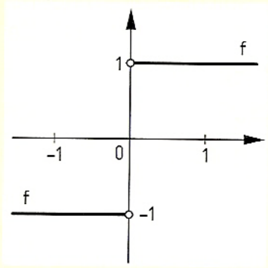
Im letzten großen Kapitel „Exaktifizierung der Differentialrechnung“ wird präzisiert, was man unter unbegrenztem Nähern versteht. Dadurch wird eine genauere Definition des Grenzwertes angegeben. Weiters werden auch Grenzwertregeln sowie die Begriffe „Differenzierbarkeit“ und „Stetigkeit“ genauer untersucht. Auch die Sätze für Funktionsuntersuchungen werden präzisiert und bewiesen. Zum Schluss erfolgt ein historischer Exkurs. Solch ein Kapitel halte ich für sinnvoll. An dieser Stelle kann etwas, das vielleicht über den „normalen“ Schulstoff hinausgeht, diskutiert, begründet und bewiesen werden. Betrachten wir auch dieses Kapitel etwas genauer.
Im Gegensatz zu den anderen Schulbüchern erfolgen erst jetzt detailliertere Grenzwertüberlegungen. Dabei wird nicht mit der bekannten ε-δ-Definition begonnen, sondern mit einem Beispiel, das später fortgesetzt wird:

5.01 Man ermittle $\lim\limits_{z \to 0} \frac{|z|}{z}$.

1. Lösungsversuch: Wenn sich z unbegrenzt der Zahl 0 nähert, dann nähert sich sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruches unbegrenzt der Zahl 0. Der Quotient $\frac{0}{0}$ ist aber nicht definiert. Wir kommen so nicht weiter.

2. Lösungsversuch: Es ist

$$f(z) = \frac{|z|}{z} = \begin{cases} -1 & \text{für } z < 0 \\ 1 & \text{für } z > 0 \end{cases}$$



Nähert sich z von rechts her unbegrenzt der Zahl 0, so nähert sich f(z) unbegrenzt der Zahl 1. Nähert sich z von links her unbegrenzt der Zahl 0, so nähert sich f(z) unbegrenzt der Zahl −1. Was bedeutet das? Gibt es zwei Grenzwerte? Oder ist weder 1 noch −1 Grenzwert? Wir können diese Frage nicht beantworten.

Die Funktionswerte *nähern* sich nicht nur ±1 – sie *sind* sogar immer ±1.

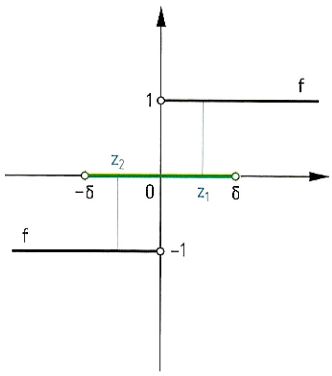
Klärung des Ausgangsproblems

Mit Hilfe der exakteren Definition des Grenzwertes können wir jetzt die eingangs gestellte Frage beantworten, ob es den Grenzwert $\lim\limits_{z \to 0} \frac{|z|}{z}$ gibt und wie groß er gegebenenfalls ist. Die Antwort lautet:

Satz: $\lim\limits_{z \to 0} \frac{|z|}{z}$ existiert nicht.

Beweis: Wir setzen zur Abkürzung

$$f(z) = \frac{|z|}{z} = \begin{cases} -1 & \text{für } z < 0 \\ 1 & \text{für } z > 0 \end{cases}$$



und führen einen indirekten Beweis. Angenommen, es gibt eine reelle Zahl q mit $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = q$. Dann muss es nach der Grenzwertdefinition zu $U_\varepsilon(q)$ mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $U_\delta(0)$ geben, sodass $f(z) \in U_{\frac{1}{2}}(q)$ für alle $z \in U_\delta(0) \setminus \{0\}$. Nun gibt es aber in jeder δ-Umgebung von 0 eine von 0 verschiedene Stelle z_1 mit $f(z_1) = 1$ und eine von 0 verschiedene Stelle z_2 mit $f(z_2) = -1$. Die Funktionswerte $f(z_1)$ und $f(z_2)$ haben voneinander den Abstand 2 und können daher nicht beide in $U_{\frac{1}{2}}(q)$ liegen. Widerspruch! □

Dies ist, vom Gefühl her, der richtige „Ort" für solche Aufgaben. Sie wirken an dieser Stelle weder künstlich noch erzwungen. Die SchülerInnen werden durch ausformulierte „Vorformen" der formalen Grenzwertdefinition behutsam zu dieser geleitet. Dabei beschäftigen sich die Autoren des Längeren mit der Bedeutung der Aussage $\lim\limits_{z \to p} f(z) = q$. Mit „Vorformen" der üblichen ε-δ-Definition meine ich:

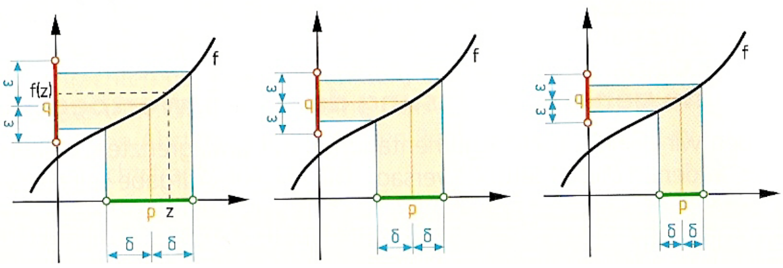
„Nähert sich z unbegrenzt der Zahl p, dann nähert sich $f(z)$ unbegrenzt der Zahl q."

„Der Abstand der Zahl $f(z)$ von q wird beliebig klein, wenn nur der Abstand der Zahl z von p hinreichend klein ist.“

„Der Abstand $|f(z)-q|$ wird beliebig klein, wenn nur der Abstand $|z-p|$ hinreichend klein ist.“

„Zu jeder (noch so kleinen) positiven Zahl ε kann eine positive Zahl δ gefunden werden, sodass $|f(z)-q|<\varepsilon$, wenn nur $|z-p|<\delta$ ist.

Dies wird in Abbildungen veranschaulicht:



Solche Überlegungen halte ich für sehr sinnvoll, da der Grenzwert- und später auch der Stetigkeitsbegriff für SchülerInnen eine gewisse Schwierigkeit beinhalten. Die Definition ist nicht konstruktiv, weil kein Hinweis auf q gegeben wird. Man kann damit nur seine Vermutung überprüfen. Genau das wird im Abschnitt „Grenzwertnachweise“ gemacht.

Im Kapitel „Differenzierbarkeit“, stellt man sich die Frage, ob die Ableitung einer Funktion immer existieren muss. Dazu wird das Einstiegsbeispiel wieder aufgegriffen:

5.21 In Abb. 5.2 ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = |x|$ dargestellt. Besitzt der Graph im Nullpunkt O eine Tangente?

Lösung: Falls eine solche Tangente existiert, hat sie die Steigung $f'(0)$. Wir berechnen also:

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z| - |0|}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z}$$

Im Abschnitt 5.1 (Seite 109) haben wir gezeigt, dass dieser Limes nicht existiert. Somit existiert auch die Ableitung $f'(0)$ nicht und somit besitzt der Graph von f im Nullpunkt keine Tangente.

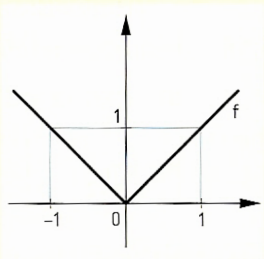


Abb. 5.2

Die letzte Aufgabe zeigt, dass die Ableitung einer Funktion nicht unbedingt existieren muss. Es ist daher gerechtfertigt, den Funktionen, deren Ableitung existiert, einen eigenen Namen zu geben.

Auch das Thema „Stetigkeit“ nimmt genügend Platz ein. Dabei werden Sprung- und Oszillationsstellen betrachtet. Stetigkeitsregeln und die Stetigkeit elementarer Funktionen werden bewiesen. Auch der Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit wird hergestellt und bewiesen:

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang zwischen der Differenzierbarkeit und der Stetigkeit her.

Satz: Ist eine reelle Funktion f: $A \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $p \in A$ differenzierbar, dann ist f an der Stelle p stetig.

Beweis: Es gilt, wie man durch Kürzen leicht sieht:

$$f(z) = f(p) + \frac{f(z) - f(p)}{z - p} \cdot (z - p)$$

Daraus folgt nach den Grenzwertregeln:

$$\lim_{z \to p} f(z) = \lim_{z \to p} f(p) + \lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p} \cdot \lim_{z \to p} (z - p) = f(p) + f'(p) \cdot 0 = f(p) \qquad \square$$

Kurz: Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit. Die Umkehrung dieses Satzes gilt aber nicht. Aus der Stetigkeit folgt nicht die Differenzierbarkeit. Zum Beispiel ist die Funktion f mit $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 stetig (Aufgabe 5.25), aber an dieser Stelle nicht differenzierbar, wie wir im vorigen Abschnitt gezeigt haben.

Dass aus Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt, könnte man noch einfacher zeigen. Dabei beginnt man mit der Definition des Differentialquotienten: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Wenn nun x dem Wert a immer näher kommt, geht der Nenner gegen Null. Deshalb muss auch der Zähler gegen Null gehen, denn sonst würde $f'(a)$ gleich $\pm\infty$ sein. Somit ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ und das ist gerade die Definition von Stetigkeit.

Sätze über stetige Funktionen, darunter der Maximum-Minimum-Satz, der Nullstellensatz und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung werden aufgeschrieben. Monotonie- und Krümmungssatz sowie notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extremstellen und Wendestellen werden als Nächstes präziser formuliert und bewiesen.

Der geschichtliche Hintergrund der Differentialrechnung ist als Lesestoff gedacht und wird am Schluss der Differentialrechnung ausführlich behandelt. Als Abschluss wird über Vor- und Nachteile einer exakten Fundierung gesprochen. Als Vorteile werden die bessere Absicherung der Resultate, die bessere Mitteilbarkeit, die Vertiefung des

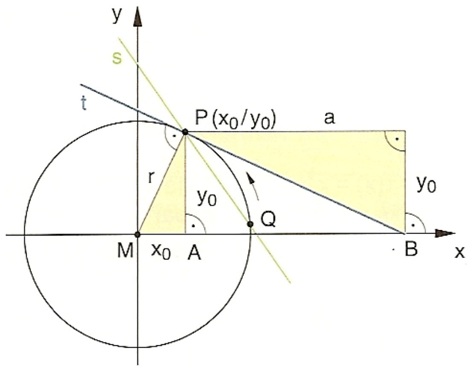
Verständnisses, die Kritische Überprüfung von Anwendungen und die Ästhetik eines logischen Aufbaus angeführt. Der Verlust von anschaulich-intuitiven Vorstellungen und die Kompliziertheit der Darstellung werden als nachteilig empfunden.

Fazit: Dieses Schulbuch besticht durch seine Übersichtlichkeit bezüglich Schrift, Text und Farbe. Was mir an diesem Buch besonders gut gefallen hat, waren die verschiedenen Zugänge und Formulierungen. Eine Sache wurde immer auf verschiedene Arten erklärt. Außerdem wird das Thema den SchülerInnen „häppchenweise" näher gebracht. Damit meine ich, dass ich nie das Gefühl hatte vom Text „erschlagen" zu werden.
Dies ist das einzige Schulbuch dessen Einführung in die Differentialrechnung nicht auf dem Tangentenproblem basiert. Das Thema wird den SchülerInnen mit der Momentan- und der Durchschnittsgeschwindigkeit verständlich vermittelt.

3.4 Ingenieur-Mathematik 3 (Timischl, Kaiser)

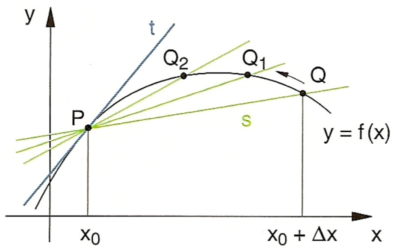
Auch in diesem Buch werden Farben gezielt eingesetzt. Vorgerechnete Beispiele werden blau, Zusammenfassungen gelb, Rechnungen mit dem Voyage 200 rot und Rechnungen mit dem TI 89 grün hervorgehoben. Merksätze und Definitionen sind rot beziehungsweise grün umrahmt. Dieses Schulbuch ist für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten für den dritten Jahrgang vorgesehen. Die SchülerInnen werden hier mit „du“ angesprochen. Dem Kapitel „Differentialrechnung“ gehen die Abschnitte „Folgen und Reihen“ und „Diskrete Systeme“ voraus. Die Abschnitte „Differentialrechnung“ und „Anwendung der Differentialrechnung“ umfassen etwa 100 Seiten.

Einleitend wird kurz erklärt, dass die Differentialrechnung die Beschreibung der Veränderung zeitlicher oder räumlicher Größen ermöglicht und sich unter anderem mit Steigungen, Geschwindigkeiten und Wachstumsraten befasst. Auch die Pioniere Newton und Leibniz werden in einem Satz erwähnt, bevor die Autoren mit dem Tangentenproblem beginnen. Auch hier nimmt man Bezug auf die Kreistangente, die aus der Sekante durch P und Q, wenn Q sich unbegrenzt dem Punkt P nähert, entsteht. Zur Veranschaulichung wird folgende Abbildung zur Verfügung gestellt:



Die Gleichung der Kreistangente t im Punkt P wird ermittelt. Mithilfe von Ähnlichkeit der Dreiecke erhält man die Tangentensteigung. Durch Einsetzen der gerade berechneten Steigung und der Koordinaten des Berührpunktes P in die Tangentengleichung ($y=k{\cdot}x+d$) ermittelt man den y-Achsenabschnitt d. Schließlich erhält man für die Kreistangente den Ausdruck $t: y=-\frac{x_0}{y_0}\cdot x+\frac{r^2}{y_0}$. An dieser Stelle ist

man schon meilenweit von der eingangs erwähnten „Beschreibung der Veränderung zeitlicher und räumlicher Größen durch die Differentialrechnung“ entfernt.
Im nächsten Schritt geht man bei Funktionen genauso wie beim Kreis vor. Dies wird durch folgende Abbildung verdeutlicht:



Dass die Tangente nicht immer existieren muss, wird zu diesem Zeitpunkt schon angemerkt. Ich würde hier „umgekehrt“ vorgehen und ein neu gelerntes Verfahren zuerst anwenden und festigen, bevor ich auf Ausnahmen zu sprechen komme.
Wie schon erwähnt, halte ich so einen Einstieg in die Differentialrechnung für nicht gerade „schülergerecht“ und würde deshalb eine Einleitung durch die Momentangeschwindigkeit vorziehen (*siehe Kapitel 4*).
Das erste Musterbeispiel beschäftigt sich mit der Gleichung der Tangente an den Grafen der Funktion $y=x^2$ im Punkt $P(1/1)$. Zunächst wird die Sekanten- und daraus die Tangentensteigung berechnet. Begriffe, wie „Ableitung der Funktion an einer Stelle“ und „differenzierbar“ werden dabei erstmals verwendet. Letztendlich wird wieder die Gleichung der Tangente angeführt. Auch die Eingabebefehle für den GTR „Voyage 200“ werden detailliert erklärt. Aus diesem Beispiel entwickelt man nun die Steigung der Tangente sowie den Tangentenbegriff an sich. Die Autoren empfinden „anschauliche Erklärungen“ wie: „Die Tangente ist eine Gerade, welche eine Kurve berührt“ als unbefriedigend und notieren deshalb folgende Definitionen:

Die Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existiert.

Dieser Grenzwert heißt **Ableitung** oder **Differentialquotient** von $y = f(x)$ an der Stelle x_0. Er wird mit $y'(x_0)$, $f'(x_0)$ oder $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ (gesprochen: dy nach dx für $x = x_0$) bezeichnet.

Das Bilden der Ableitung wird **Ableiten** oder **Differenzieren** genannt.

Wie auch bei anderen Schulbüchern, stelle ich auch hier die „x-lastige“ Schreibweise in Frage. Allein durch eine ungünstige Satzstellung könnte Verwirrung gestiftet werden. Dies zeigt folgender Buchausschnitt:

Wir halten fest:

(1) Die Ableitung (der Differentialquotient) $y'(x_0)$ ist der *Grenzwert des Differenzenquotienten* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

SchülerInnen könnten den Doppelpunkt falsch, nämlich als Divisionszeichen, auffassen. Das kann meiner Meinung nach durch einfaches ändern der Satzstellung vermieden werden.

Weiters wird festgehalten, dass differenzierbar an einer Stelle x_0 bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle linear approximierbar ist und der Funktionsgraf und die Tangente „praktisch“ gleich verlaufen. Dass die Tangente die beste lineare Approximation ist, wird zwar erwähnt aber nicht genauer thematisiert.

Im nächsten Beispiel beschäftigt man sich mit der Frage, ob immer eine Tangente existiert. Dazu wird sowohl der Graf der Funktion $y=|x^2-1|$ an der Stelle $x_0=1$ als auch die Heaviside-Funktion an der Stelle $x_0=0$ genauer untersucht.

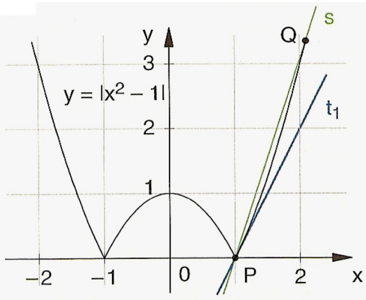


Abb. 4.5 a) t_1 als Sekantengrenzlage in P

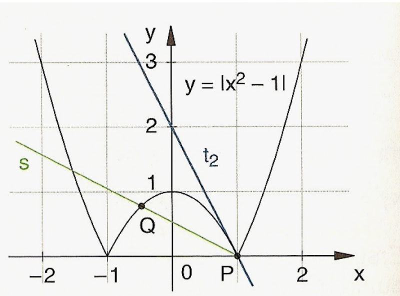


Abb. 4.5 b) t_2 als Sekantengrenzlage in P

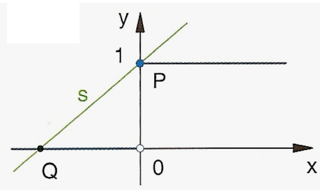


Abb. 4.6 Nicht differenzierbar an der Unstetigkeitsstelle $x_0 = 0$

Dabei wird festgestellt, dass in beiden Fällen die Funktionen an den „interessanten Stellen“ nicht differenzierbar sind. Man merkt, dass die Autoren schon auf den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit abzielen, welcher anschließend auch gleich als Merksatz notiert wird.
Das nächste Beispiel befasst sich mit der Ableitung und der Tangente. Bei der Berechnung der Ableitung an einer Stelle x_0 wird durch Verallgemeinerung die Ableitungsfunktion gebildet. Das heißt, dass die Tangente nicht mehr auf eine bestimmte Stelle $x=x_0$ festgelegt wird. Stattdessen wird die Stelle x „offen gelassen“. Überdies wird ein Punkt mit waagrechter Tangente gesucht und auch gefunden. Auch hier wird der korrekte Gebrauch des Voyage 200 verständlich erklärt.
Der erste Abschnitt klingt durch eine Zusammenfassung, bei dem die wichtigsten Begriffe, wie etwa Tangente oder Differenzierbarkeit, übersichtlich angeführt sind, aus. An dieser Stelle würde auch eine Tabelle den Zusammenhang zwischen Tangente, Sekante, Geschwindigkeit, Differenzen- und Differentialquotient auf anschauliche Art und Weise auf den Punkt bringen. Siehe dazu *Kapitel 4*.
Im Anschluss auf den Aufgabenteil folgt das nächste Kapitel „Ableitung elementarer Funktionen“. Gleich Eingangs wird erklärt, dass die Berechnung der Ableitung einer Funktion als Grenzwert des Differenzenquotienten im Allgemeinen nicht nötig ist, wenn man die Ableitungen gebräuchlicher Funktionen und Ableitungsregeln kennt. So beginnen die Autoren mit der Ableitung einer konstanten und der Potenzfunktion. Dabei wird der Beweis vor der Merkregel angeführt. Die Ableitung der Potenzfunktion wird nicht allgemein, sondern für $y=x^3$ „bewiesen“. Im kommenden Musterbeispiel wird sowohl die Potenzregel für natürliche als auch für reelle Exponenten gezeigt. Im Unterschied zu anderen Schulbüchern wird hier die Ableitung der Potenzfunktion nicht allgemein beweisen und es wird keine Unterscheidung zwischen natürlichen und reellen Exponenten gemacht. Als Nächstes wird der Schnittwinkel zweier Grafen thematisiert. Dabei sticht hervor, dass die Autoren auf korrekte Arbeitsweisen und Rechengänge Wert legen. So wird beispielsweise bei der Berechnung des Schnittwinkels auf einen (nicht sehr geläufigen) Summensatz verwiesen:

Schnittwinkel zweier Graphen

Der Schnittwinkel φ der Graphen von $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ (Abb. 4.11) ist der Winkel zwischen den *Tangenten* im Schnittpunkt S der Graphen: $\varphi = \alpha - \beta$

Vorgangsweise:

(1) Aus der Gleichung $f_1(x) = f_2(x)$ wird die x-Koordinate x_0 des Schnittpunkts S bestimmt.

(2) $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ ableiten.
$\tan\alpha = f_1'(x_0)$, $\tan\beta = f_2'(x_0)$

(3) $\tan\varphi = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$; daraus φ
(siehe "Ingenieur-Mathematik 2", 1. Summensatz, Seite 142, oder Beispiel 5.15, Seite 143).

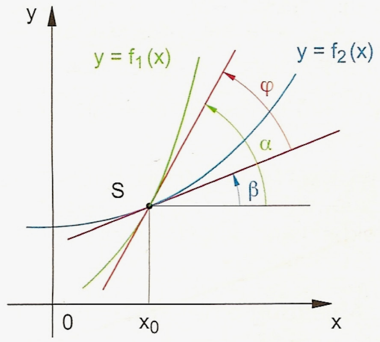


Abb. 4.11 Schnittwinkel zweier Graphen

In den nächsten Beispielen werden der Schnittwinkel zweier Grafen und die Normale auf einen Grafen berechnet. Auf den praktischen Nutzen dieser Berechnungen wird nicht eingegangen.

Exponential-, Logarithmus-, Kreis-, Arkus- und Hyperbelfunktionen samt Ableitungen werden nur mehr in einer Tabelle ohne Beweis aufgelistet. Die besondere Stellung der Exponentialfunktion und insbesondere auch der Zahl e wird folgendermaßen begründet: „*Sie ist die einzige Funktion, die sich selbst zur Ableitung und an der Stelle 0 den Wert 1 hat.*“ Auf die unterschiedlichen Ableitungen von Potenz- und Exponentialfunktion wird mit folgendem Beispiel hingewiesen: $y=x^2$, $y'=2x$; aber $y=2^x$, $y'=2^x \cdot ln2$. Vor dem Aufgabenteil werden die Ableitungen elementarer Funktionen, Schnittwinkel zweier Grafen und Normale auf einen Grafen nochmals zusammenfassend angeführt.

Im kommenden Abschnitt werden die Ableitungsregeln (Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) genauer besprochen. Unter anderem beschäftigt man sich auch mit Schnittwinkel zwischen zwei Tangenten, mit exponentiellem Wachstum und Sättigungsgrenze sowie der impliziten Differentiation. Der Aufbau ist immer gleich: Zuerst wird der Merksatz angeführt, in manchen Fällen folgt dann ein Beweis bevor schließlich einige Beispiele gerechnet werden. Auch hier wird die Anwendung des GTR (TI 89 und Voyage 200) durch Erklärungen gefördert. Im nächsten vorgerechneten Beispiel wird eine Linearisierung einer Funktion an einer Stelle durchgeführt. Dabei wird der Punkt, an den die Tangente gelegt werden soll, als „Betriebspunkt“ bezeichnet. Was ein Betriebspunkt genau ist, wird nicht weiter erklärt. Auch die Berechnung des Schnittwinkels zwischen zwei Tangenten wird vorgestellt.

Bei der Einleitung der Kettenregel wird auf etwas Bekanntes – nämlich die Winkelfunktionen – zurückgegriffen. Dass die Funktion $y=sinx$ abgeleitet $y'=cos(x)$ ergibt, ist zu diesem Zeitpunkt schon bekannt. Die Ableitung von $y=sin(2x)$ ist aber nicht, wie man vermuten könnte, $y'=cos(2x)$ sondern $y'=2\cdot cos(2x)$. An dieser Stelle wird allerdings auf das falsche Beispiel verwiesen. Dabei handelt es sich wahrscheinlich um einen Tippfehler.

Auf das exponentielle Wachstum mit Sättigungsgrenze wird als Nächstes genauer betrachtet, bevor auf die implizite Differentiation eingegangen wird. Für die Einleitung dient die Beschreibung des Tangentenproblems. Zu Beginn wurde ja die Kreistangente ohne Differentialrechnung berechnet. Jetzt hat man das „mathematische Rüstzeug“, um die Kreistangente auf mehrere Arten zu bestimmen. Bei der ersten Variante drückt man y explizit aus und berechnet die Ableitung. Bei der anderen Alternative drückt man y nicht mehr explizit aus, sondern leitet gleich ab. So wird die Vorgangsweise bei der Berechnung mithilfe des impliziten Differenzierens verdeutlicht. Es folgen detaillierte Erklärungen, ein Merksatz und zur Übung noch ein Beispiel. Dabei wird auch das logarithmische Differenzieren, also das Differenzieren nach dem Logarithmieren, erklärt. Alle Regeln und die implizite Differentiation werden zum Schluss noch mal im Überblick zusammengefasst. Zu diesem Thema werden etliche (nicht einfache) Aufgaben gestellt. Die SchülerInnen sollen zum Beispiel Ausdrücke, wie $y=\frac{x\cdot e^{-2\cdot x+1}}{2\cdot e^{x}\cdot(x+1)}$ differenzieren. So etwas „Verschachteltes“ habe ich in den anderen Schulbüchern nicht gesehen. Ob die SchülerInnen solche Aufgaben per Hand differenzieren sollen oder ob der Taschenrechner verwendet werden darf, ist wohl die Entscheidung des Lehrers.

Beim Abschnitt „Höhere Ableitungen“ werden die Ableitungen 1., 2., …, n-ter Ordnung besprochen und die verschiedenen Schreibweisen erläutert. Um die Vorgangsweise zu illustrieren werden unter anderem von Polynom- und Kreisfunktionen die höheren Ableitungen gebildet. Diese Aufgaben werden auch für grafische Taschenrechner erklärt. An dieser Stelle wird bereits eine Umkehraufgabe gerechnet:

Beispiel 4.23 : Ermittlung einer Polynomfunktion ✓

Von der Gleichung einer Parabel $y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ kennt man: $f(2) = 3$, $f'(2) = 2$. Ihre zweite Ableitung ist identisch gleich -1. Bestimme den Scheitel der Parabel.

Lösung

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$f'(x) = 2a \cdot x + b$

$f''(x) = 2a$

Einsetzen der Werte aus der Angabe ergibt ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten a, b und c:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2^2 \cdot a + 2 \cdot b + c = 3 \\ \text{II:} & 4a + b = 2 \\ \text{III:} & 2a = -1 \end{array}$$

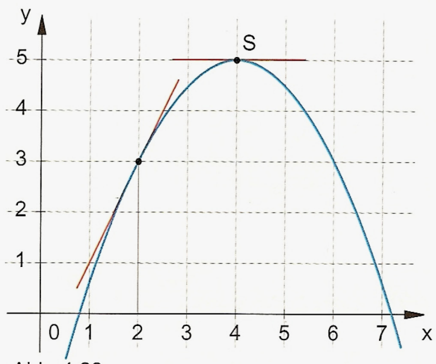


Abb. 4.23

Daraus: $a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$ und $c = -3$. Die gesuchte quadratische Funktion (Polynomfunktion vom Grad 2) lautet somit: $y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 4x - 3$. Der Scheitel S ist jener Punkt, in dem die Tangente die Steigung null hat: $y' = -\frac{1}{2} \cdot 2x + 4 = -x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$.

Wegen $y(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 3 = 5$ gilt $S(4/5)$.

Damit wird schon ein wenig auf das Kapitel „Kurvenuntersuchungen“ vorgegriffen. Vor dem Aufgabenteil werden zusammenfassend die unterschiedlichen Schreibweisen und Erklärungen noch einmal angeführt.

Als Nächstes gehen die Autoren auf das Differential einer Funktion ein und definieren dieses als $dy=f'(x_0) \cdot dx$. In diesem Zusammenhang wird auch ein interessantes Beispiel vorgerechnet. Dabei wird näherungsweise die Zeit, in der sich das Kapital K_0 verdoppelt, gesucht.

Beispiel 4.25 : Näherung für die Verdoppelungszeit

Ein Kapital K_0 wird zu $i = p\%$ Jahreszinsen verzinst. Nach wie vielen Jahren wächst es bei Zinseszins auf das Doppelte?

Lösung

Ist K_n das Kapital nach n Jahren, so gilt: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$. Für $K_n = 2 \cdot K_0$ folgt:

$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + i)^n \quad | : K_0$$

$$2 = (1 + i)^n \quad | \text{ logarithmieren}$$

$$\ln 2 = n \cdot \ln (1 + i)$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln (1 + i)}$$

Wir betrachten nun die Funktion $y = f(x) = \ln x$ und berechnen ihr Differential dy an der Stelle $x_0 = 1$ für $dx = i$:

$f'(x) = \frac{1}{x}$; $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1} = 1$; $dy = f'(x_0) \cdot dx = 1 \cdot i = i$.

Da $\Delta y = \ln (1 + i) - \ln 1 = \ln (1 + i) \approx dy = i$, folgt $n = \frac{\ln 2}{\ln (1 + i)} \approx \frac{\ln 2}{i}$.

Setzt man noch $i = \frac{p}{100}$, wobei p der Prozentwert der jährlichen Kapitalsteigerung ist, und weiters $\ln 2 = 0{,}693\ldots \approx 0{,}70$, so erhält man die einfache *Näherungsformel für die Verdoppelungszeit*: $n \approx \frac{70}{p}$.

Diese Näherungsformel gilt für alle Größen, für die prozentuelle Zunahme p pro Zeitschritt gleichbleibend angenommen werden kann. Nimmt man beispielsweise eine konstante prozentuelle Preissteigerung eines Artikels von $i = 3{,}5\% = 0{,}035$ pro Jahr an, so hat sich der Preis in etwa $\frac{70}{3,5} = 20$ Jahren verdoppelt. Die Verdoppelungszeit nach $n = \frac{\ln 2}{\ln (1 + i)}$ würde 20,15 Jahre betragen.

Dass die Näherungsformel nicht für *alle* Größen gilt, sollte angemerkt werden. Sie stimmt nur für relativ kleine p, genauer gesagt, wenn $0<p<10$.

Auch mit Messfehlern und der Messunsicherheit befasst man sich intensiv. Beispiele werden überwiegend aus dem Bereich der Physik gewählt. Dabei geht es meist um Strom, Spannung, Kapazität und Widerstand, aber auch um geometrische Figuren, wie beispielsweise Kreise und Dreiecke.

Nur in diesem Schulbuch wird die Ableitung einer Funktion beziehungsweise Kurve in Parameterdarstellung relativ detailliert anhand von etlichen Beispielen verdeutlicht. Es folgen eine Zusammenfassung und der Aufgabenteil.

Am Schluss des ersten großen Kapitels fällt mir auf, dass der Zusammenhang von Durchschnitts- beziehungsweise Momentangeschwindigkeit mit dem Differenzen- beziehungsweise dem Differentialquotienten nicht erläutert wurde, was auch im zweiten großen Abschnitt „Anwendung der Differentialrechnung“ nicht geschieht. Dieser ist im Großen und Ganzen in die Themenbereiche „Differentialquotient in Naturwissenschaft und Technik“, „Unbestimmte Ausdrücke“, „Kurvenuntersuchungen“ und „Extremwertaufgaben“ gegliedert.

Zu Beginn versuchen die Autoren die Begriffe „Differenzen- und Differentialquotienten“ mit mittlerer und momentaner Änderungsrate sowie der Sekanten- und Tangentensteigung zu verknüpfen. Die am häufigsten verwendeten

Größen in Physik, Technik oder Wirtschaft, die als Differentialquotienten definiert sind, werden in einer Tabelle angeführt:

Änderungsrate	Schreibweise	Name
des Weges s mit der Zeit t	$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$	Geschwindigkeit
der Geschwindigkeit v mit der Zeit t	$a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$	Beschleunigung
der verrichteten Arbeit W (etwa eines Automotors) mit der Zeit t	$P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$	Leistung
der durch einen Leiter fließenden elektrischen Ladung q mit der Zeit t	$i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$	elektrische Stromstärke
der durch eine Fläche strömenden Wärmemenge Q mit der Zeit t	$P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$	Wärmestrom
der Temperatur T mit der Eindringtiefe x in eine Wand	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{dT}{dx}$	Temperaturgefälle oder Temperaturgradient
der Kosten K eines Gutes mit der produzierten Menge x	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{dK}{dx}$	Grenzkosten

Die harmonische Schwingung wird in einem Beispiel genauer betrachtet. Dabei soll die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a des schwingenden Körpers für unterschiedliche Zeitpunkte berechnet werden. Außerdem wird die grafische Darstellung mithilfe des Voyage 200 genau erklärt.

Im nächsten vorgerechneten Beispiel geht es um die Bewegung eines Objekts:

Beispiel 5.3 Bewegung eines Objektes ✓

Eine Stange von 6,0 m Länge lehnt gegen eine Wand (Abb. 5.4). Der Fußpunkt A der Stange wird mit einer Geschwindigkeit von 0,50 m/s horizontal weggezogen. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das obere Stangenende B nach unten, wenn A gerade einen Abstand von 3,0 m von der Wand besitzt?

Lösung

Ist x der Abstand des unteren Stangenendes A von der Wand, so ist $\dot{x} = 0{,}5$ m/s. Bezeichnet y die Entfernung des oberen Stangenendes B vom Boden, so ist $\dot{y}$ gesucht.

Zwischen x und y gilt die Beziehung: $x^2 + y^2 = 6{,}0^2\ \text{m}^2$.

Daraus: $y = \sqrt{36\ \text{m}^2 - x^2}$.

Ableitung nach t ergibt nach der Kettenregel:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{36\ \text{m}^2 - x^2}} \cdot \dot{x} = -\frac{x \cdot \dot{x}}{\sqrt{36\ \text{m}^2 - x^2}}.$$

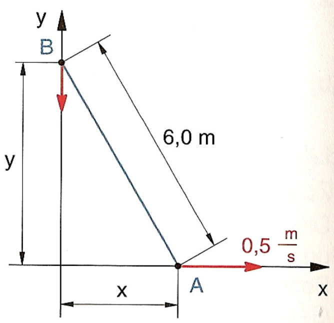


Abb. 5.4

Einsetzen für x und $\dot{x}$ ergibt: $\dot{y} = -\frac{3\ \text{m} \cdot 0{,}5\ \text{m}\,\text{s}^{-1}}{\sqrt{36\ \text{m}^2 - 3^2\ \text{m}^2}} = -0{,}29\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Das negative Vorzeichen drückt aus, dass $y(t)$ erwartungsgemäß eine streng monoton fallende Funktion ist.

Bei dieser Aufgabe findet eine „Verschmelzung“ der Begriffe „Ableitung“ und „Geschwindigkeit“ statt. Diese Art von Aufgaben konnte ich zwar in den anderen Schulbüchern nicht finden, halte sie aber für interessant, da viele verschiedene Aspekte in dieser Aufgabe zusammentreffen.

Als Nächstes werden unbestimmte Ausdrücke definiert und mithilfe der Regel von de l’Hospital berechnet. Das Verhalten im Unendlichen von Exponential-, Potenzfunktion und logarithmischer Funktion wird zwar aufgeschrieben aber nicht weiter veranschaulicht.

> **Monoton steigende Funktionen im Vergleich:**
> Die Exponentialfunktion $y = e^x$ geht schneller nach ∞ als die Potenzfunktion $y = x^n$ ($n > 0$), und diese wiederum schneller als die logarithmische Funktion $y = \ln x$.

Die Regel von de l’Hospital wird auf etliche Aufgaben, die einen unbestimmten Ausdruck ergeben würden, angewendet.

Auf Kurvenuntersuchungen und Extremwertaufgaben wird ziemlich genau eingegangen. Dabei erklären die Autoren, dass die ersten beiden Ableitungen ganz wesentlich für das Verhalten einer differenzierbaren Funktion sind. Der Zusammenhang von Monotonie- und Krümmungsverhalten mit den Ableitungen wird geometrisch verdeutlicht. An dieser Stelle wird gut veranschaulicht, wie die erste Ableitung aus der Funktion „entsteht“. Weiters fällt auf, dass in keinem anderen Schulbuch die Begriffe „Gipfelpunkt“ und „Talsohle“ für Maximum und Minimum verwendet werden.

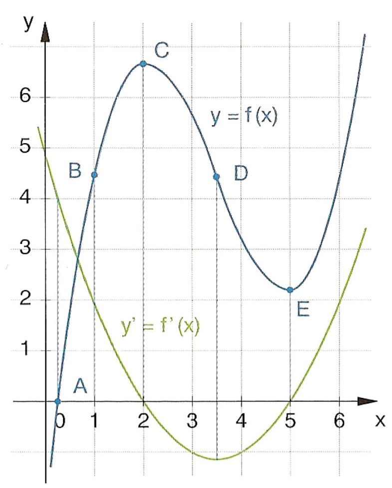


Abb. 5.13 Graphen von f (x) und f' (x)

Wir betrachten in Abb. 5.13 den Graphen einer Funktion $y = f(x)$. Die Steigung im Punkt A ist ziemlich groß; das kommt durch einen großen Wert für $f'(x)$ an dieser Stelle zum Ausdruck (über 4). Danach wird die Steigung geringer, in B ist sie etwa 2. Im Punkt C ist der ”Gipfel” erreicht, die Steigung ist 0. Danach fällt der Graph, zuerst langsam; in D ist das stärkste Gefälle, die Steigung am stärksten negativ! Beim Weitergehen wird das Gefälle immer kleiner, bis im Punkt E die ”Talsohle” erreicht ist; die Steigung in E ist genauso wie vorher in C gleich 0. Dann steigt der Graph wieder an.

In Abb. 5.13 ist neben dem Graphen von $y = f(x)$ auch jener der Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ gezeichnet; sie gibt an jeder Stelle die Steigung des Graphen von $y = f(x)$ an. *Versuche den Verlauf des Graphen von $y' = f'(x)$ zu verstehen!*

Besonders wichtige Punkte des Graphen von $y = f(x)$ sind der ”Gipfelpunkt” C, wo die Funktion ein Maximum besitzt, und die ”Talsohle” E mit einem Minimum der Funktion.

Auch die notwendigen und hinreichenden Kriterien für lokale Extrema werden formuliert. Das Vorzeichenwechselkriterium findet hier ebenfalls Platz, bevor sich die SchülerInnen mit den notwendigen und hinreichenden Kriterien für Wendepunkte befassen. Eine Kurvenuntersuchung – diesen Begriff würde ich, wie schon des Öfteren erwähnt, durch „Funktionsuntersuchung" erstetzen – wird exemplarisch vorgerechnet. Hier fällt auf, dass die zu untersuchenden Eigenschaften nicht Punkt für Punkt, wie in anderen Schulbüchern, vorgegeben, sondern charakteristische Stellen, wie etwa Extremstellen, einfach berechnet werden. Auch die Betragsfunktion wird genau erklärt. Weil Polynomfunktionen wegen ihrer Einfachheit für die Praxis von hoher Bedeutung sind, beschäftigen sich die Autoren damit als Nächstes. Einige Umkehraufgaben werden vorgerechnet und ein Beispiel zur Kostenfunktion wird auch angeführt. Im Vergleich zum Schulbuch „Mathematik IV" wird hier eine, für meine Begriffe, realistische Kostenfunktion angegeben:

Beispiel 5.13 : Kostenfunktion als kubische Funktion ✓

Die Kosten K(x), die bei der Erzeugung eines Gutes anfallen, steigen mit der produzierten Warenmenge x (in Stückzahlen, in Tonnen oder dgl.). Die Funktion K(x), die Kostenfunktion, kann in einfacher Weise als *lineare* Funktion mit positiver Steigung angenommen werden. Zutreffender wird jedoch der Kostenverlauf im Allgemeinen durch eine monoton steigende *kubische* Funktion wiedergegeben.

Untersuche die Kostenfunktion $K(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + 65 \cdot x + 50$ (Geldeinheiten)

Lösung

$K'(x) = x^2 - 14x + 65$; $K''(x) = 2x - 14$; $K'''(x) = 2$.

Der Graph von $y' = K'(x) = x^2 - 14x + 65$ ist eine sich nach oben öffnende Parabel; um ihre Scheitelstelle zu bestimmen, setzen wir $(K')' = K'' = 2x - 14 = 0$; daraus $x_S = 7$; die y-Koordinate des Scheitels beträgt $y_S = 7^2 - 14 \cdot 7 + 65 = 16$; da der Scheitel S(7/16) der tiefstgelegene Punkt der Parabel ist, ist stets $y' > 0$, d.h. die *Kostenfunktion $y = K(x)$ ist streng monoton steigend*.

$y'' = K''(x) = 2x - 14 = 0 \Rightarrow x = 7$; wegen $K'''(7) \neq 0$ ist $x = 7$ Wendestelle.

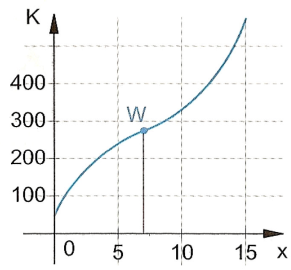


Abb. 5.24 Kubische Kostenfunktion

Eine kubische Kostenfunktion ist ein oft brauchbares Modell für eine Kostenfunktion, die oft einen s-förmigen Verlauf zeigt: Bei einer Erhöhung der Produktionsmenge x steigen anfänglich die Kosten stark an; danach folgt um den Wendepunkt W ein Bereich mit geringerem Anstieg. Danach steigen die Kosten wieder stark an, da eine weitere Erhöhung der Produktion beispielsweise nur mit teuren Zusatzkosten, Überstunden und dgl. erfolgen kann. Man spricht vom **Gesetz des schließlich zunehmenden Kostenzuwachses** ($K''(x) > 0$ ab der Wendestelle).

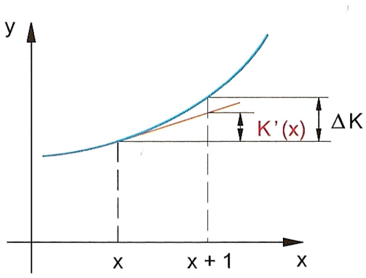


Abb. 5.25 Grenzkosten K'(x)

Wir bilden das Differential der Kostenfunktion an einer Stelle x für den Zuwachs dx (Abb. 5.25):

$dK = K'(x) \cdot dx$

Setzt man $dx = \Delta x = 1$, erhöht man also die Produktionsmenge um eine Einheit, so gilt für den Kostenzuwachs ΔK:

$\Delta K \approx dK = K'(x)$.

Die Ableitung $K'(x)$ gibt daher für eine gegebene Produktionsmenge x näherungsweise den Kostenzuwachs an, wenn die Produktionsmenge auf $x + 1$ erhöht wird. $K'(x)$ wird als **Grenzkosten(funktion)** bezeichnet. Dann kann man auch sagen:

Die Grenzkosten sind näherungsweise gleich den Kosten für die zuletzt produzierte Mengeneinheit. Dies gilt natürlich nur, wenn die produzierten Einheiten genügend klein sind.

Im Bauwesen könnte das darauf folgende Beispiel, das von der Biegelinie handelt, von Interesse sein. Besonders genau setzt man sich mit dem Thema „Krümmung eines Graphen" auseinander. Dazu werden einige Formeln hergeleitet:

Krümmung eines Graphen

Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann eine qualitative Aussage gemacht werden, ob der Graph links- oder rechtsgekrümmt ist. Wie stark jedoch eine Krümmung ist, konnte bisher nicht gesagt werden.

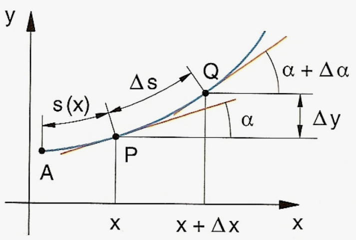


Abb. 5.29 Maß für die Krümmung

Wir betrachten (Abb. 5.29), wie stark sich der Steigungswinkel α der Tangente ändert, wenn man von einer Stelle x zur Stelle $x + \Delta x$ weitergeht. Dabei wird der Graph von P nach Q durchlaufen. Die Länge des Kurvenbogens, gemessen von einem beliebig gewählten festen Punkt A ändert sich von $s(x)$ auf $s(x) + \Delta s$.

$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, die Änderung des Steigungswinkels α bezogen auf die Änderung der Bogenlänge s, ist ein Maß für die Stärke der mittleren Krümmung des Graphen zwischen P und Q.

Die Krümmung *im* Punkt P wird dementsprechend als Grenzwert dieses Differenzenquotienten definiert:

Krümmung eines Graphen in einem Punkt P: $\kappa = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$

Die Krümmung κ lässt sich durch die Funktion $y = f(x)$ und ihre Ableitungen ausdrücken:
$\tan\alpha = f'(x) \Rightarrow \alpha = \arctan[f'(x)]$.

Mit Hilfe der Kettenregel folgt: $\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}[\arctan y'] \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{1 + y'^2} \cdot y'' \cdot \frac{dx}{ds}$.

Es bleibt noch die Berechnung von $\frac{dx}{ds}$. Aus Abb. 5.29 entnimmt man, dass für kleines Δx in guter Näherung gilt: $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ oder auch $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$. Daraus entsteht durch Grenzübergang $\Delta x \to 0$, wenn $y = f(x)$ differenzierbar ist: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$.

Damit folgt schließlich:

Krümmung in rechtwinkligen Koordinaten: $\kappa(x) = \frac{y''}{\left[1 + y'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$.

Der Nenner $\left[1 + y'^2\right]^{\frac{3}{2}}$ ist stets positiv. Daher hat die Krümmung κ das gleiche Vorzeichen wie die zweite Ableitung y".

Bevor eine „Diskussion" einer gebrochenrationalen Funktion vorgezeigt wird, werden doch noch sechs zu untersuchende Eigenschaften angeführt. Dazu zählen Definitionsbereich, Stetigkeit, Polstellen, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen, Asymptoten, Extrema und Wendestellen. Schließlich soll der Graf gezeichnet werden. An dieser Stelle wird erwähnt, dass bei anwendungsorientierten Aufgaben öfter von diesem Schema abgewichen wird. Eine „Diskussion" einer gebrochen rationalen Funktion und der Gauß'sche Glockenkurve werden exemplarisch durchgeführt, bevor wieder auf die gedämpfte Schwingung eingegangen wird. Etliche Aufgaben mit physikalischem Hintergrund werden als Übungsaufgaben an die SchülerInnen weitergegeben.

Als Einleitung zu den Extremwertaufgaben, die auch hier erst zum Schluss behandelt werden, wird zunächst erwähnt, dass das globale Maximum oder Minimum zu bestimmen ist. Auch die Begriffe „Zielfunktion" und „Nebenbedingung", sowie die generelle Problematik, wie etwa das Finden der Nebenbedingung, werden erklärt. Als Einstiegsbeispiel wird nur in diesem Schulbuch nicht mit dem Klassiker, dem „flächengrößten Rechteck mit gegebenen Umfang", begonnen, sonder mit dem „volumsgrößten offenen Behälter". Dazu wird aus einem rechteckigen Blech durch Herausschneiden der Ecken ein offener Behälter geformt. Anhand des nächsten Beispiels wird das Vereinfachen der Zielfunktion verständlich veranschaulicht. Durch die Grafen im selben Koordinatensystem können die SchülerInnen gut erkennen, dass sich die Lage des Extremums durch Vereinfachen der Zielfunktion nicht ändert.

Beispiel 5.21 : Vereinfachung der Zielfunktion

Welches Rechteck von gegebenem Umfang $u = 8{,}0$ cm hat die kleinste Diagonale d?

Lösung

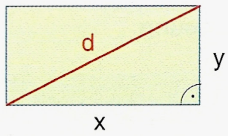


Abb. 5.50

$d = \sqrt{x^2 + y^2}$, wobei x und y die Rechteckseiten sind. Die Diagonale hängt also von den Variablen x und y ab. Im Folgenden rechnen wir wieder mit den Zahlenwerten der Größen, alle Längen sind in cm gegeben.

Zwischen x und y besteht auf Grund der Aufgabenstellung die *Nebenbedingung*:

$u = 2x + 2y = 8$ ist. Daraus kann etwa y durch x ausgedrückt werden: $y = 4 - x$. Durch Einsetzen in die Zielfunktion wird diese zu einer Funktion von einer Variablen:

$d(x) = \sqrt{x^2 + (4 - x)^2}, \; x \geqslant 0.$

Zur Bestimmung des Minimums von d(x) kann man davon Gebrauch machen, dass sich die Lage eines Extremums beim Quadrieren nicht ändert! Denn von allen Quadratwurzeln ist diejenige die kleinste (die größte), deren Radikand am kleinsten (am größten) ist. Abb. 5.51 zeigt die Funktion d(x) und $d^2(x)$. Man kann daher zur Bestimmung der Extremalstellen das Quadrat der Zielfunktion untersuchen!

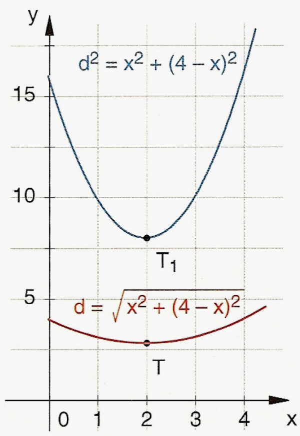


Abb. 5.51

$f(x) = d^2(x) = x^2 + (4 - x)^2;$

$f'(x) = 2x + (-2) \cdot (4 - x) = 4x - 8;$

$f''(x) = 4.$

Lösung der Gleichung $f'(x) = 4x - 8 = 0$: $x = 2$;

$f''(2) = 4 > 0 \Rightarrow x = 2$ ist eine Minimumstelle von f(x).

$x = 2$ ist auch eine Minimur nstelle von $d(x) = \sqrt{f(x)}$;

$y = 4 - x = 2$; daher ist das gesuchte Rechteck mit minimaler Diagonale eine Quadrat mit der Seite 2 cm. $d_{min} = 2 \cdot \sqrt{2}$ cm $\approx 2{,}83$ cm.

Bei den vorgerechneten Aufgaben fällt auf, dass auch in diesem Schulbuch die zweite Ableitung und nicht die Randwerte zum Überprüfen, der berechnete Extremstelle, verwendet werden. Die Verwendung des grafischen Taschenrechners TI 98, sowie des Computeralgebrasystems Mathcad werden durch detaillierte Erklärungen gefördert.

Die vorgerechneten Beispiele sind meiner Meinung nach gut gewählt und haben auch mit der Erfahrungswelt der SchülerInnen zu tun. Der Stellenwert der Differentialrechnung wird durch Beispiele, bei denen es beispielsweise um Gewinnmaximierung geht, verdeutlicht.

Dass eine Extremstelle auch am Rand liegen kann, wird durch das Beispiel der zerbrochenen Glasplatte illustriert.

Im nachstehenden Aufgabenteil sind größtenteils Beispiele mit anwendungsorientiertem Kontext und nicht nur geometrische Figuren – wie in anderen Schulbüchern – angeführt. Dabei geht es beispielsweise um einen Läufer, der in kürzester Zeit von einem zum anderen Punkt kommen soll, oder um einen Gewinn der maximiert werden soll.

Fazit: Leider wird auch in diesem Schulbuch die Differentialrechnung mit dem Tangentenproblem eingeführt. Eine „alternative“ Einleitung durch Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit steht hier nicht zur Verfügung. Meiner Meinung nach kann auch in einer HTL die Einführung verständlich mithilfe der Geschwindigkeit durchgeführt werden. Im Vergleich zu den anderen Schulbüchern wird hier sehr oft auf Winkelsätze zurückgegriffen. Außerdem werden vergleichsweise oft Beispiele mit physikalischem Hintergrund gerechnet.

4 PERSÖNLICHE SCHWERPUNKTSETZUNG

Wie die Überschrift schon verrät, möchte ich in diesem Kapitel meine persönlichen Schwerpunkte zum Thema „Differentialrechnung“ darlegen. Extremwertaufgaben liegen mir dabei besonders am Herzen, da der Mathematikunterricht durch solche Aufgaben mit Leben gefüllt und realitätsnäher gestaltet werden kann. Mir ist wichtig, dass Extremwertaufgaben möglichst früh im Unterricht behandelt werden. Im Idealfall sind die Aufgabenstellung realitätsnah und die Lösungsmöglichkeiten vielseitig. Da ich in diesem Teil meiner Diplomarbeit mehr Wert auf Extremwertaufgaben legen möchte, werde ich auf vorangehende Kapitel nicht bis ins Detail eingehen, sondern lediglich Verbesserungsvorschläge liefern, und an das ein oder andere Schulbuch verweisen.

4.1 Einführung der Differentialrechnung

Im vorigen Kapitel der Schulbuchkritik habe ich auf einige Dinge hingewiesen, die ich anders machen würde. Für mich ist die Einleitung der Differentialrechnung über die Momentangeschwindigkeit (wie im Schulbuch „Mathematik verstehen 7“) gut verständlich mithilfe eines passenden Beispiels dargestellt und ich würde deshalb diesen Einstieg dem klassischen Einstieg über das Tangentenproblem vorziehen. Nicht zuletzt deswegen, weil oft das Problem, warum man überhaupt die Tangente in einem Punkt wissen möchte, gar nicht zum Thema wird. Außerdem verliert man nicht aufgrund algebraischer Rechnungen das eigentliche Problem aus den Augen – die Vorstellung von Geschwindigkeit „trägt“ weit über den Sachkontext hinaus. So gelangt man also von der mittleren zur lokalen Änderungsrate (also von der Durchschnitts- zur Momentangeschwindigkeit). Die immer kleiner werdenden Zeitintervalle fallen dabei nicht vom Himmel, sondern ergeben sich natürlich. Wie sonst sollte man sich der Momentangeschwindigkeit nähern, wenn nicht mit immer kleiner werdenden Zeitintervallen? Außerdem ist es ja auch interessant zu wissen, wie der Tachometer zu einer Momentangeschwindigkeit kommt. Das bedeutet, dass ein echter Anlass für diese Berechnungen existiert – sie sind keinesfalls unmotiviert. Gerade aufgrund der Tatsache, dass SchülerInnen besonders in dieser Schulstufe

mit dem Thema „Motorisierung“ zu tun haben, bietet sich der Einstieg über Geschwindigkeiten an. Manche fahren schon Motorrad, andere machen vielleicht gerade den Führerschein. Außerdem denke ich, dass einige wertvolle Diskussionen entstehen könnten.
Um die Zusammenhänge zwischen den Begriffen noch klarer darzustellen, könnte man abschließend auch eine Tabelle in folgender Art und Weise anfertigen:

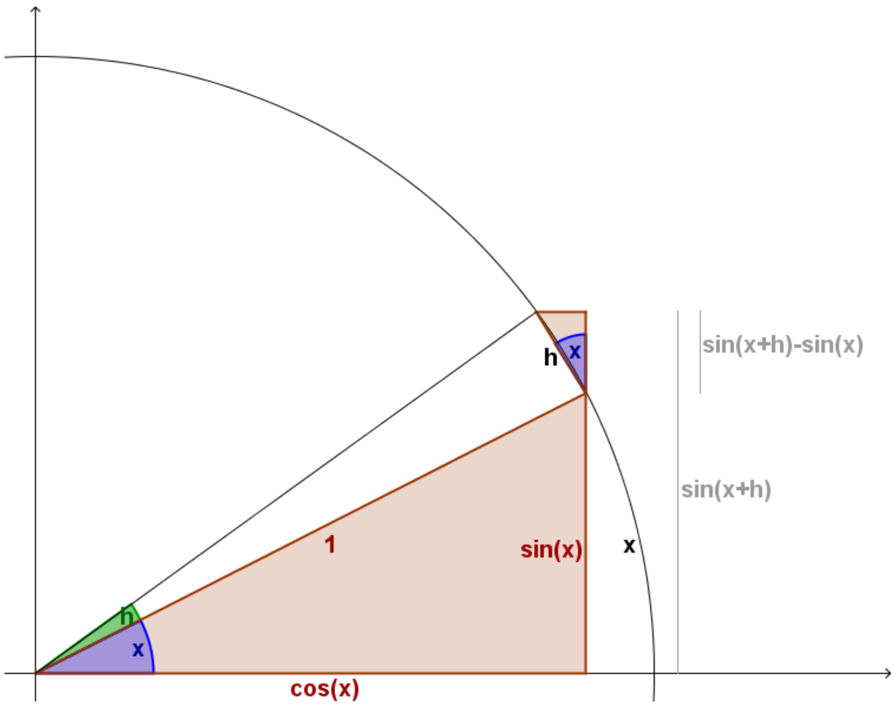
	Inhaltlich	**Algebraisch**	**Geometrisch**
In einem Intervall	Mittlere Änderungsrate	Differenzenquotient $\overline{f}[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	Sekantensteigung
Lokal (Grenzwert)	Lokale Änderungsrate	Differentialquotient $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	Tangentensteigung

Welche Schreibweise man bevorzugt, ist Geschmackssache. Ich verwende am liebsten die in der Tabelle angeführte Schreibweise des Differenzen- und Differentialquotienten. Im Vergleich zu der anderen Schreibweise $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ erscheint mir die oben angeführte übersichtlicher. Im kommenden Abschnitt „Ableitungsregeln“ werden wir jedoch sehen, dass auch diese Schreibweise ab und zu benötigt wird.

4.2 Ableitungsregeln

In manchen Schulbüchern wurden Begründungen zu diversen Ableitungsregeln entweder gar nicht oder sehr kompliziert angegeben. Im Rahmen dieser Arbeit möchte ich auf die Ableitung von Sinus und Kosinus, auf die Ableitung der Potenzfunktion und auf die Quotientenregel genauer eingehen.

Die ***Ableitung von Sinus und Kosinus*** werde ich nun durch „ähnliche Dreiecke“ am Einheitskreis zeigen:



Wenn h genügend klein ist, dann kann man die Krümmung der einen Seite im kleinen „Dreieck“ vernachlässigen. Betrachte nun die beiden entstandenen ähnlichen Dreiecke. Die Dreiecke sind ähnlich, da zwei Winkel gleich sind: Der Winkel x und der 90°-Winkel. Man kann folgende Beziehung erkennen:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\frac{\cos(x)}{1}$$

Durch Grenzwertbildung folgt schon, dass $\sin(x)'=\cos(x)$:

$$\sin(x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\cos(x)$$

In analoger Weise, kann man die Ableitung von Kosinus berechnen, worauf ich hier nicht genauer eingehen möchte.

Der Vorteil dieser Plausibilitätsbetrachtung liegt darin, dass man sich keine komplizierten Additionstheoreme merken muss. Obwohl ich normalerweise die andere Schreibweise (*siehe Tabelle S. 75*) bevorzuge, kann man an dieser Stelle gut sehen, dass auch die andere Schreibweise gebraucht wird.

Mit der ***Ableitung der Potenzfunktion*** beschäftigen wir uns als Nächstes. Dabei wird die Zerlegungsformel $x^n-a^n=(x-a)\cdot\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+\ldots+x\cdot a^{n-2}+a^{n-1}\right)$ gebraucht, welche durch einfaches Ausmultiplizieren der rechten Seite bewiesen werden kann. Dabei sieht man, dass alle Summanden bis auf x^n und a^n wegfallen. Nun aber zurück zur Ableitung der Potenzfunktion. Wir schreiben den Differentialquotienten auf, wenden die Zerlegungsformel an und erhalten das Ergebnis:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+\ldots+x\cdot a^{n-2}+a^{n-1}\right)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+\ldots+x\cdot a^{n-2}+a^{n-1}\right)=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}\right)}_{a^{n-1}}+\underbrace{\lim_{x\to a}\left(x^{n-2}\cdot a\right)}_{a^{n-1}}+\ldots+\underbrace{\lim_{x\to a}\left(x\cdot a^{n-2}\right)}_{a^{n-1}}+\underbrace{\lim_{x\to a}\left(a^{n-1}\right)}_{a^{n-1}}=n\cdot a^{n-1}$$

Man sieht, dass die Begründung weder langatmig noch kompliziert ist und auch ohne binomischen Lehrsatz auskommt.

Wie schon bei der Schulbuchkritik erwähnt, kann man für die ***Quotientenregel*** $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$ entweder einen völlig eigenständigen Beweis durchführen (*siehe S. 51*) oder man „erntet“ sie aus der Produktregel:

$$\frac{f}{g}=h\Leftrightarrow f=g\cdot h\overset{\text{Produktregel}}{\Rightarrow}f'=g'\cdot h+g\cdot h'\Rightarrow h'=\frac{f'-g'\cdot h}{g}\overset{h=\frac{f}{g}}{=}\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

Somit muss kein eigenständiger Beweis geführt werden und das „gerade erarbeitete“ kann gewinnbringend angewendet werden.

4.3 Funktionsuntersuchungen

Wie schon bei der Schulbuchkritik erwähnt, halte ich den Begriff „Kurvendiskussion“ für unpassend. Zum einen geht es um keine Kurven, sondern um Funktionen und zum anderen findet auch keine Diskussion im eigentlichen Sinne statt. Viel mehr werden einzelne Punkte nach einem starren Konzept detailliert abgearbeitet. Die Berechnungen erfolgen meist mechanisch und kalkülhaft. Dabei fehlen heuristische Denkweisen und die SchülerInnen verstehen oft nicht was sie da eigentlich tun. Vor allem bleibt die Frage, wozu diese Berechnungen wohl dienen mögen, offen.
An dieser Stelle möchte ich auf die Art und Weise, *wie* der Mathematikunterricht aufgefasst werden kann, näher eingehen. Mathematik kann sowohl als *Produkt* als

auch als *Prozess* verstanden werden. Ersteres richtet den Blick eher auf die Resultate und strebt die Abgeschlossenheit an, während der Prozessgedanke in eine andere Richtung lenkt. Hier stehen die Entwicklung des Wissens und die Entdeckung von Zusammenhängen im Vordergrund. Dadurch kann eine gewisse Offenheit zugelassen werden. Beide Sichtweisen gehören zu einem gültigen Bild der Mathematik und sind wichtige Bestandteile des Unterrichts. Aber lediglich die zweite Sichtweise, also Mathematik als Prozess, ermöglicht eine offene Unterrichtsführung, welche wiederum den Erwerb heuristischer Fähigkeiten ermöglicht. Dies formulierte Heinrich Winter in der dritten Grunderfahrung (*siehe S. 3*). Hier, beim Thema „Funktionsuntersuchungen“, steht meist der Kalkül und nicht der wie gerade erwähnte Prozess im Vordergrund. Dass die Nutzung algorithmischer Methoden nicht immer schlecht sein muss, zeigt die Geschichte. Viele entscheidende Fortschritte basieren auf systematischen Kalkülen. Man denke z.B. an das babylonische Verfahren zum Wurzelziehen, das auch heute noch in Computern zum Einsatz kommt. Im Unterricht besteht aber trotzdem die Gefahr, dass die Vermittlung normierter Kenntnisse und Verfahren sowie deren maßgeschneiderte Anwendung auf bestimmte Aufgabentypen im Zentrum stehen.

Gerade die Charakteristik der klassischen Funktionsuntersuchungen – nämlich die Abhandlung von Punkten – führt mich als Nächstes auf einen nicht zu verachtenden Teilbereich der Mathematik: dem Üben.

Üben

Das Thema „Üben“ genießt im Hinblick auf mathematikdidaktische Diskussionen zwei unterschiedliche Sichtweisen. Einerseits wird es als wichtig und wesentlich für erfolgreiche Lernfortschritte angesehen, wobei daraus oft die Meinung entsteht, dass Mathematiklernen bloß eine Frage des richtigen Übens ist. Andererseits erscheint es wenig attraktiv und wird dadurch in der didaktischen Diskussion oft vernachlässigt. Erarbeiten neuer Inhalte, Modellbilden und kreatives Problemlösen erscheinen oft unvereinbar mit dem Üben und werden deshalb nicht selten als Gegensatz dazu angesehen.

Man fragt sich des Öfteren, wozu komplexe Termumformungen, aufwendige Exponential- und logarithmische Gleichungen ohne jeglichen Anwendungszweck geübt werden sollen. Auch das klassische Kapitel der Funktionsuntersuchung ist augenscheinlich etwas, was auf keine vernünftige Weise angewendet werden kann.

Und dennoch hat es sich – weil es ja geübt werden muss – zu einem eigenständigen Kapitel der Schulmathematik etabliert. (nach http://www.acdca.ac.at/material/allgem/buch/buch96_5konzepte.pdf ([Freudenthal, 1977, zitiert nach Kronfellner 1978, S. 164]) S. 201)
Gerade bei Funktionsuntersuchungen erfolgt das Üben nicht selten sinnentleert. Dabei werden die Formeln und Kalküle von den SchülerInnen oft ohne jegliches Verständnis und vollkommen mechanisch angewandt. Dieses Verhalten wird zusätzlich unterstützt, wenn die zugehörigen Prüfungsaufgaben auf kalkülhafte Vorgangsweisen abzielen. Übrigens werden die Aufgaben zur Reifeprüfung noch immer von Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben und Volumsberechnungen beherrscht. Eine Reihe von Aufgabengruppen, die sich nach einem bestimmten Muster lösen lassen, werden systematisch behandelt und eingeübt – nicht zuletzt als „Musterbeispiele", die zur Reifeprüfung gegeben werden können. Dadurch sinkt die Bereitschaft, das Erlernte auf neue Situationen (inner- und außermathematischer Natur) anzuwenden auf ein Minimum. Auch der Bezug zur Anwendung fehlt. Man hat das Gefühl, dass Terme regelrecht „ausgeschlachtet" werden. Gerade deshalb sollte man als Lehrperson versuchen vor allem Aufgaben zu Funktionsuntersuchungen zu öffnen. Damit meine ich, dass die Perspektiven in verschiedener Hinsicht geändert werden sollten. Das Schaffen einer neuen Aufgabenkultur, die vor allem nichtalgorithmische Teile stärker betont, sollte oberstes Ziel sein. Dabei könnte die Einbeziehung von mehr Sachkontexten diesen Abschnitt wieder mit Leben erfüllen. Des Weiteren würde ich die Nutzung elektronischer Hilfsmittel, wie etwas CAS zum Zeichnen des Grafen, bevorzugen.

Betrachten wir zunächst eine Aufgabe mit „traditioneller" Fragestellung:

Diskutiere die Polynomfunktion $y = \frac{1}{8} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x + 2$ und zeichne ihren kartesischen Graphen im Intervall [-5,5]!

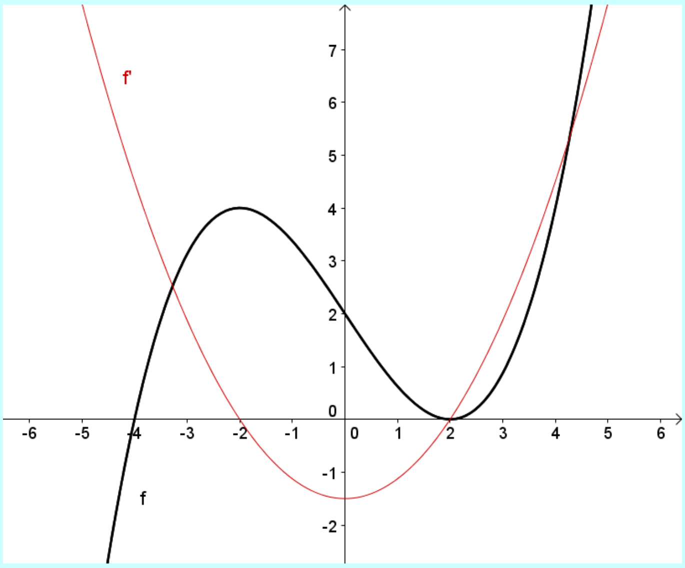
(Quelle: *Mathematik Lehrbuch 7, Beispiel 298 a)*)

Jeder kennt dann das Prozedere: Man berechnet Null-, Extrem- und Wendestellen, bestimmt Monotonie-, Krümmungs- und asymptotisches Verhalten bis man letzten Endes den Graf zeichnet. In manchen Schulbüchern gehen die Autoren noch auf Symmetrie und Periodizität ein.

Die Öffnung dieser Aufgabe könnte zum Beispiel wie folgt aussehen:

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktionenschar $f(x)=\frac{1}{4a}\cdot x^3-\frac{3}{a}\cdot x+a\ \ (a>0,\ x\in R)$.

a) Die Zeichnung zeigt die Grafen von f und f' im selben Koordinatensystem. Welchen Wert hat der Parameter a?



b) Der Graf der Funktion f ist punktsymmetrisch zum Punkt P(0|2). Begründe dies mit und ohne Rechnung. (Hinweis: Verschiebe die Funktion f so, dass der Punkt P in den Ursprung rückt. Welchem „Funktionstyp" gehört die dadurch entstehende Funktion an?)

c) Warum kann der Wendepunkt nur auf der y-Achse liegen, egal wie man den Parameter a wählt?

Die verschiedenen Fragestellungen schaffen die Voraussetzungen für eine andere Herangehensweise an das Thema „Funktionsuntersuchungen". Bei a) lernen die SchülerInnen aus den Grafen die benötigten Informationen abzulesen. In Punkt b) wird das verraten, was bei „klassischen Kurvendiskussionen" eigentlich das Ergebnis ist – nämlich dass der Graf der Funktion f punktsymmetrisch ist. Die Schwierigkeit liegt darin, dies sowohl mit als auch ohne Rechnung zu begründen. Möchte man ohne Rechnung auskommen, so stelle man sich vor, dass die Funktion f so verschoben wird, dass der Wendepunkt im Ursprung liegt. Die so verschobene Funktion ist gegeben durch $\tilde{f}(x)=\frac{1}{4a}\cdot x^3-\frac{3}{a}\cdot x$. Man sieht, dass die Funktion $\tilde{f}$ eine ungerade Funktion dritten Grades, also punktsymmetrisch zum Ursprung ist. Die Addition das Parameters a stellt lediglich eine vertikale Verschiebung um a dar. Die Punktsymmetrie bleibt durch diese Verschiebung erhalten. Somit ist f

punktsymmetrisch um den Punkt P(0|a). Durch solche Fragestellungen wird vor allem die dritte Grunderfahrung nach Winter (*siehe S. 3*) stärker in den Vordergrund gestellt. Die nichtalgebraischen Teile wurden durch die Art der Fragen stärker betont. Durch die Fragestellung in c) wird zwar verraten, dass der Wendepunkt auf der y-Achse liegen muss, aber warum das in diesem Beispiel immer so sein muss – egal wie der Parameter a gewählt wird – finden die SchülerInnen selbst heraus. Die sonst so fantasielose Wendepunktberechnung wird in eine etwas herausfordernde und anspruchsvollere Frage eingebettet. An dieser Stelle wäre der Einsatz eines dynamischen Geometrieprogramms, wie etwa GeoGebra, durchaus gewinnbringend. Die SchülerInnen können (besonders beim Verwenden des Schiebereglers) erkennen, dass die zweite Ableitung immer durch den Ursprung geht, ganz egal welchen Wert der Parameter a annimmt.

Auch im folgenden Beispiel wird von den SchülerInnen eine eher „gedankenarme“ Funktionsuntersuchung gefordert:

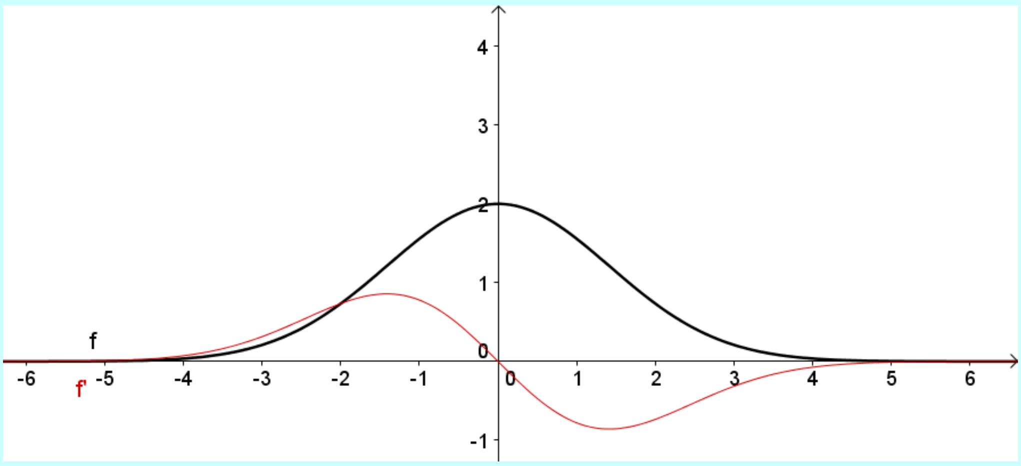
Diskutieren Sie die Funktion $y = 4 \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot x^2}$ und zeichnen Sie ihren Grafen.

(Quelle: *Mathematik IV, Beispiel 6.029 b)*)

Genauso wie vorhin auch, kann die Aufgabe durch andere Akzentsetzungen etwas spannender gestaltet werden. Quelle: *Analysis verständlich unterrichten* (S. 147-152):

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktionenschar $f(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2a} \cdot x^2}$ $(a>0,\ x \in R)$.

a) Bestimme anhand der Zeichnung den Parameter a.



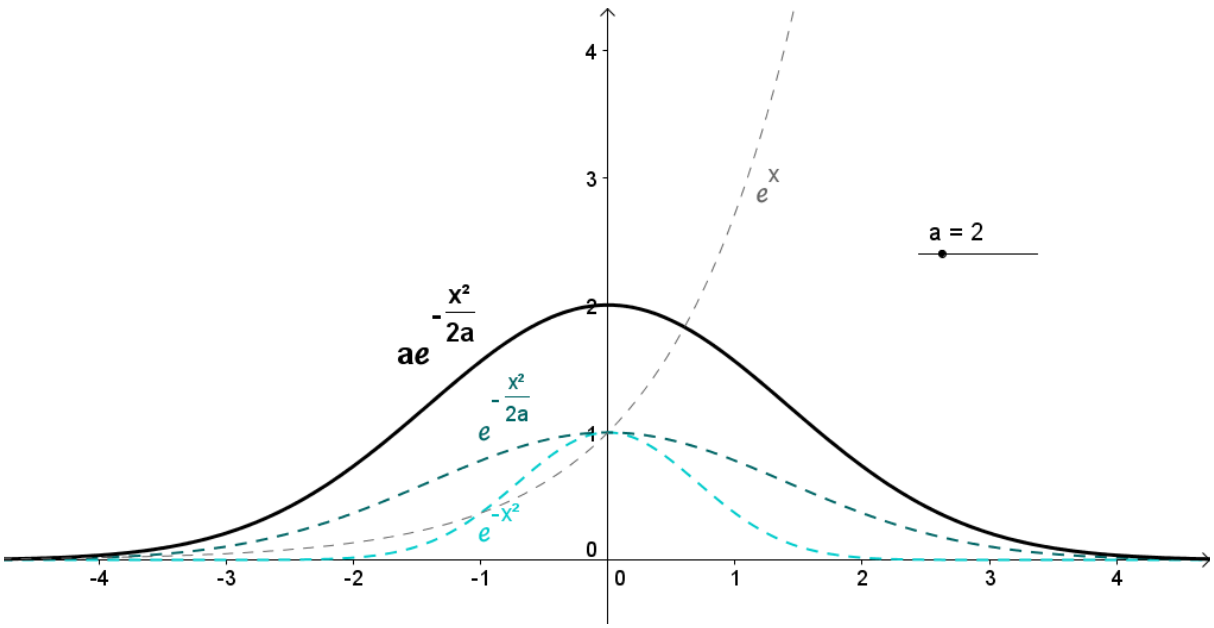
b) Gibt es Eigenschaften, die für alle Funktionen der Schar gelten? (mit Begründung!)

c) Bestimme die lokalen Extrempunke von f. Begründe das Ergebnis auch ohne Rückgriff auf die Differentialrechnung.

d) In welcher Weise spiegeln sich die Wendepunkte von f als besondere Punkte im Grafen von f'? Gilt dieser Zusammenhang allgemein?

e) Für welche a schneiden einander die Grafen von f und f'? Berechne ggf. den Schnittpunkt S_a. Auf welcher Kurve liegen alle diese Schnittpunkte? Gib eine Gleichung an.

Auch in diesem Beispiel betrachtet man eher Kurvenscharen als einzelne Funktionen. Dadurch sind offene Fragestellungen wie b), die mehr Raum für heuristische Aktivitäten lassen, möglich. Außerdem werden die SchülerInnen zum Erkunden, Probieren und Begründen eher herausgefordert, als durch eine Aufgabenstellung traditioneller Art. Die Vorgehensweise ist nicht durch ein vorher genau festgesetztes Schema vorgegeben. Beim Punkt c) kann beispielsweise auf die Eigenschaften der Exponentialfunktion zurückgegriffen werden. Man könnte die Funktion $f(x)$ regelrecht „aufbauen" und so die Lage der Extremwerte anschaulich begründen:



Auf den ersten Blick mag dieser „Mischmasch" an Grafen zwar verwirrend wirken, aber diese Funktionen entstehen nicht auf einmal, sondern in Etappen. Dabei geht man von der Exponentialfunktion e^x (hier hellgrau dargestellt) aus. Dann verändert man diesen Ausdruck Schritt für Schritt, sodass man die Funktion $f(x)$ erhält.

Zunächst wird die Funktion e^{-x^2} durch Quadrieren und mithilfe des Kehrwerts gebildet. Durch die Multiplikation der Hochzahl $-x^2$ mit $\frac{1}{2a}$ erhält man den Ausdruck $e^{-\frac{1}{2a}\cdot x^2}$ und es kommt, abhängig vom Parameter a, zu einer Verbreiterung beziehungsweise Verschmälerung. Die Multiplikation von $e^{-\frac{1}{2a}\cdot x^2}$ mit dem Parameter a bewirkt eine vertikale Streckung beziehungsweise Stauchung, je nach Größe des Parameters a. Auch hier kann der Computer wunderbar eingesetzt werden. Besonders gut gefällt mir (beispielsweise in GeoGebra), dass die Grafen der Funktionen „beobachten" werden können, je nachdem wie sich der Parameter a ändert. Welche Folgen eine Variation der Parameter hat, kann man gut erkennen. Aufgrund der Tatsache, dass die Lage der Extremstelle durch diese „Manipulationen" nicht verändert wird, kann das „Ergebnis" auf diese Art und Weise begründet werden. Auch die Fragestellungen in d) und e) unterscheiden sich von den traditionellen hinsichtlich ihrer abwechslungsreichen Herangehensweise.

So oder so ähnlich könnte eine Funktionsuntersuchung aussehen, die nicht so stark auf die Verwendung (auswendig) gelernter Algorithmen und Kalküle abzielt. Durch diese Art der Öffnung wird auch eine Variation des Schwierigkeitsgrades ermöglicht. Somit kommt man dem individuellen Lernen wieder einen Schritt näher. Wie man unschwer erkennen kann, habe ich dabei auch auf den Computer nicht verzichtet. Auf welche Weise CAS das Üben beziehungsweise den Mathematikunterricht beeinflussen und ob durch den Computereinsatz neue, vielleicht noch komplexere Übungsfelder entstehen, versuche ich als Nächstes abzuwägen.

Computereinsatz

Kurvendiskussionen sind nach wie vor eines der wesentlichen Themen der Oberstufe beziehungsweise auch der Reifeprüfung, und ich denke, das wird noch einige Zeit so bleiben. Aber das Ziel einer Kurvendiskussion kann nicht mehr darin liegen, den Grafen zu zeichnen, denn dies erledigt heutzutage ein Rechner. Man sollte eher versuchen die Aufgaben hinsichtlich der zuvor genannten Punkte zu öffnen (*siehe Bsp. 1 und 2*). Der Schwerpunkt sollte dabei auf Verständnis gelegt werden. Solche – sonst eher langweiligen Aufgaben – werden durch veränderte Fragestellungen interessanter gestaltet.

Die Vorteile des Computereinsatzes liegen klar auf der Hand. So kann ein Computer zur visuellen Unterstützung von Lernprozessen beitragen. Den SchülerInnen werden kalkülhafte Berechnungen abgenommen. Durch diese „gewonnene“ Zeit kann wiederum mehr Wert auf das Entwickeln von Grundvorstellungen gelegt werden. Darüber hinaus können auch weiter zurückliegende Inhalte im Kontext aktueller Probleme – eventuell unter einem neuen Aspekt – wiederholt werden. Auch innermathematische und fächerübergreifende Projekte können leichter durchgeführt werden. Durch den Einsatz eines Computers kann (auch in schülerbezogenen Arbeitsformen, wie etwa Partner-, Gruppen- oder Projektunterricht) die Selbstständigkeit und Selbstverantwortung geschult und zum Entdecken angeregt werden. Der Computer kann sich für die SchülerInnen als ein hilfreiches Werkzeug zum Lösen von Aufgaben etablieren. Voraussetzung dafür ist, dass der Computer auch tatsächlich jederzeit – bei Hausübungen aber auch bei Prüfungen – zur Verfügung steht. Das soll aber nicht heißen, dass der Rechner immer verwendet werden *muss*. Einfache Termumformungen und das Skizzieren von Grafen sollten auch ohne elektronische Hilfsmittel durchgeführt werden können.

An dieser Stelle muss ich feststellen, dass der Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln auch Gefahren in sich bergen können. Zum einen wird die Bedeutung des Computers in Hinblick auf die Veränderung des Unterrichts oft überschätzt. Der Computer ist auch kein „Allheilmittel“, das allen alles beibringt. Zweifelsohne muss den SchülerInnen zuerst die richtige und sinnvolle Benutzung (nicht nur Bedienung) der Rechner beigebracht werden. Dabei sollte man darauf achten, dass die SchülerInnen nicht in jeder Situation sofort zum Rechner greifen und sie somit einfache Umformungen oder Rechnungen nicht mehr im Kopf lösen können. Das kann dazu führen, dass die Rechenfertigkeiten darunter leiden und die SchülerInnen nicht mehr *denken*, sondern nur noch tippen. Auch die Sinnhaftigkeit der Ergebnisse sollte stets kritisch hinterfragt werden. Eine weitere Schwierigkeit des vernünftigen Computereinsatzes stellt die mangelnde Ausstattung (Computer, Beamer usw.) in den Klassenzimmern dar.

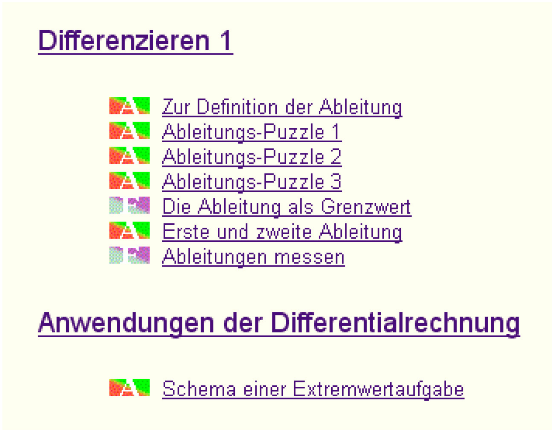
Trotz alledem sollte der Computer als Chance zur Verbesserung der Lernsituation verstanden werden. Dessen Einsatz könnte dazu beitragen, dass Ziele besser oder anders erreicht werden als bisher. Die Bedeutung numerischer, iterativer und approximativer Methoden hat zugenommen. Diese Tatsache sollte sich auch im Mathematikunterricht widerspiegeln.

Das Internet

Sowohl LehrerInnen als auch SchülerInnen benutzen das Internet für Vorbereitung, zur Recherche oder einfach nur um mit anderen Menschen zu kommunizieren. So ist das Internet für uns ein täglicher Begleiter geworden, der kaum noch vom modernen Leben wegzudenken ist. An manchen Schulen wird e-Learning bereits mithilfe einer geeigneten Software für Online-Lernplattformen (z.B. *Moodle*) erfolgreich genutzt. Ein Vorteil ist sicherlich, dass abstrakte Inhalte mithilfe von Simulationen, Audio- und Videodokumenten verständlich erklärt werden können. Die Lerninhalte können dabei – genauso wie bei *Wikipedia* – vernetzt werden (Kumulativität). Die traditionellen Bildungsformen wird e-Learning allerdings nicht ersetzen können. Es dient lediglich als sinnvolle Unterstützung des Lernprozesses. Ein weiterer Vorteil ist der ökonomische Aspekt: Man ist sowohl zeitlich als auch räumlich unabhängig und nicht an irgendwelche Öffnungszeiten von Bibliotheken gebunden. Das ist besonders in Hinsicht auf lebenslanges Lernen, das meist parallel zum Beruf erfolgt, wichtig. Jemanden, der gerne Computer und Internet nutzt, wird diese neue Form des Lernens Freude machen. Ein gravierender Nachteil ist sicherlich die Qualität, welche über ein breites Spektrum variiert. Die Palette reicht von akademischen Texten über freie Erfindungen. Die Aufgabe des Lehrers ist nun, Schwachsinn von qualitativ hochwertigen Texten zu unterscheiden, was nicht immer leicht ist. Eine große Anzahl von Lernpfaden und attraktiver Unterrichtsideen und –materialien sind auf zahlreichen Homepages engagierter LehrerInnen zu finden. Ein Beispiel hierfür wäre *mathe online*. Auf der Homepage ist folgendes zu lesen:

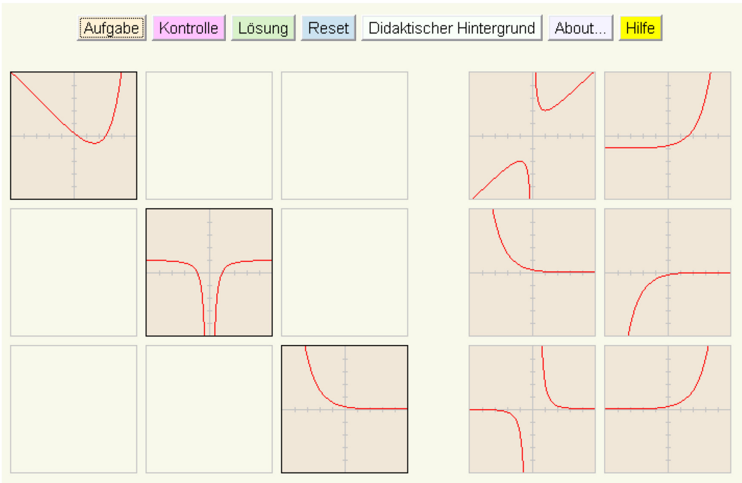
„mathe online versucht, dieser Situation Rechnung zu tragen, moderne didaktische Konzepte durch multimediale und interaktive Techniken zu realisieren und damit zur Entwicklung von zeitgemäßen Standards für die Bereiche Schule, Universität und Erwachsenenbildung beizutragen." (Quelle: http://www.mathe-online.at/einfuehrung.html (12.03.09))

Hier wird nicht zu viel versprochen, denn auf der Homepage (http://www.mathe-online.at/ (12.03.09)) befinden sich eine Reihe von dynamischen Features, Puzzles zum Selbermachen, Links, Online Werkzeugen (wie z.B. dem Computer-Algebra-System *Mathematica*) und interaktive Tests. Auch Einsatzmöglichkeiten, Unterrichtsvorschläge und Downloads sind hier zu finden. Um einen kleinen Einblick über die Möglichkeiten der Nutzung zu erhalten, sehen wir uns die Homepage zum Thema Differentialrechnung etwas genauer an.



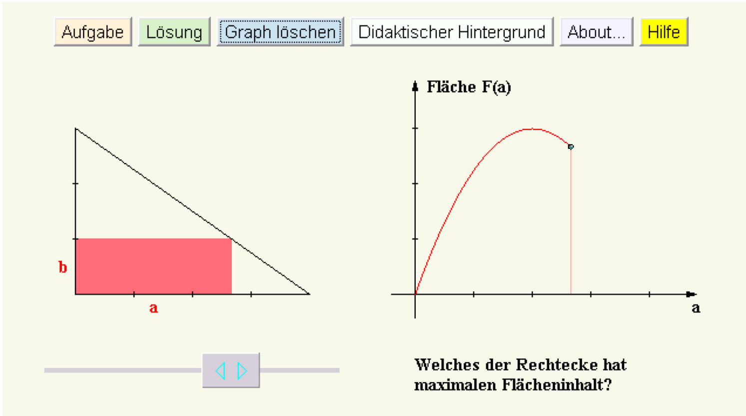
(Quelle: http://www.mathe-online.at/galerie.html (12.03.09))

Besonders gut gefallen mir die Ableitungspuzzles, welche in den verschiedensten Schwierigkeitsstufen angeboten werden. Dabei sollen die Kästchen so ausgefüllt werden, dass unter jeder Funktion ihre Ableitung steht.



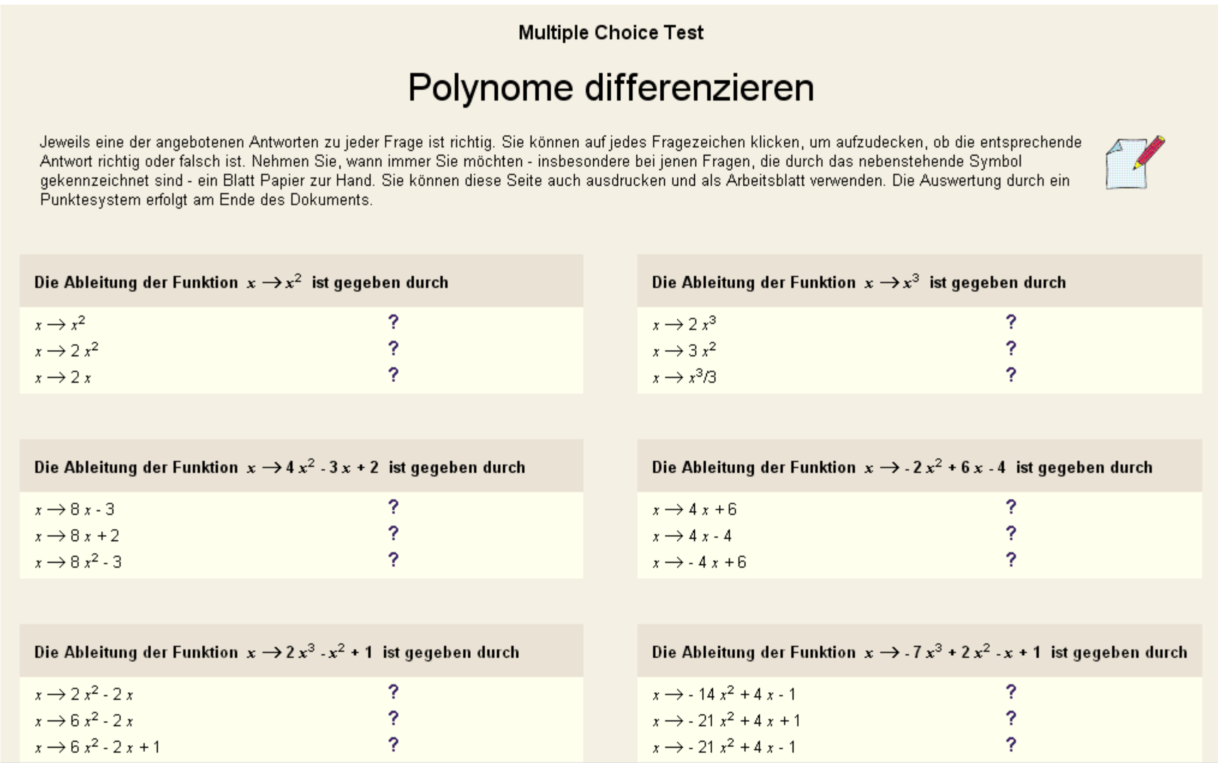
(Quelle: http://www.mathe-online.at/galerie/diff1/diff1.html#ableitung (12.03.09))

Zum Thema „Extremwertaufgaben“ wird ein Applet zur Verfügung gestellt, das anhand eines einfachen Beispiels illustriert, welche Rolle die Zielfunktion und deren Ableitung spielen. Durch ziehen an dem Balken, wird die „Entstehung“ der Zielfunktion einleuchtend veranschaulicht. Hinter dem Button „Lösung“ verbirgt sich – zusätzlich zur graphischen Darstellung – ein möglicher Rechengang.



(Quelle: http://www.mathe-online.at/galerie/anwdiff/anwdiff.html#es (12.03.09))

Auch mathematische Hintergründe in Form von Texten zum Stoff werden angeboten. Weiters ist ein mathematisches Lexikon zu finden, in dem die wichtigsten mathematischen Begriffe kurz beschrieben werden. Als Nächstes fallen mir interaktive Tests auf, die den SchülerInnen helfen sollen, ihr Wissen zu überprüfen und Schwachstellen herauszufinden. Etliche Multiple Choice Tests, aber auch Puzzles oder Zuordnungen stehen zur Verfügung. Dabei findet meist am Ende des Tests eine Auswertung nach einem Punktesystem statt.


Multiple Choice Test

Polynome differenzieren

Jeweils eine der angebotenen Antworten zu jeder Frage ist richtig. Sie können auf jedes Fragezeichen klicken, um aufzudecken, ob die entsprechende Antwort richtig oder falsch ist. Nehmen Sie, wann immer Sie möchten - insbesondere bei jenen Fragen, die durch das nebenstehende Symbol gekennzeichnet sind - ein Blatt Papier zur Hand. Sie können diese Seite auch ausdrucken und als Arbeitsblatt verwenden. Die Auswertung durch ein Punktesystem erfolgt am Ende des Dokuments.

Die Ableitung der Funktion $x \to x^2$ ist gegeben durch

$x \to x^2$	?
$x \to 2x^2$	?
$x \to 2x$	?

Die Ableitung der Funktion $x \to x^3$ ist gegeben durch

$x \to 2x^3$	?
$x \to 3x^2$	?
$x \to x^3/3$	?

Die Ableitung der Funktion $x \to 4x^2 - 3x + 2$ ist gegeben durch

$x \to 8x - 3$	?
$x \to 8x + 2$	?
$x \to 8x^2 - 3$	?

Die Ableitung der Funktion $x \to -2x^2 + 6x - 4$ ist gegeben durch

$x \to 4x + 6$	?
$x \to 4x - 4$	?
$x \to -4x + 6$	?

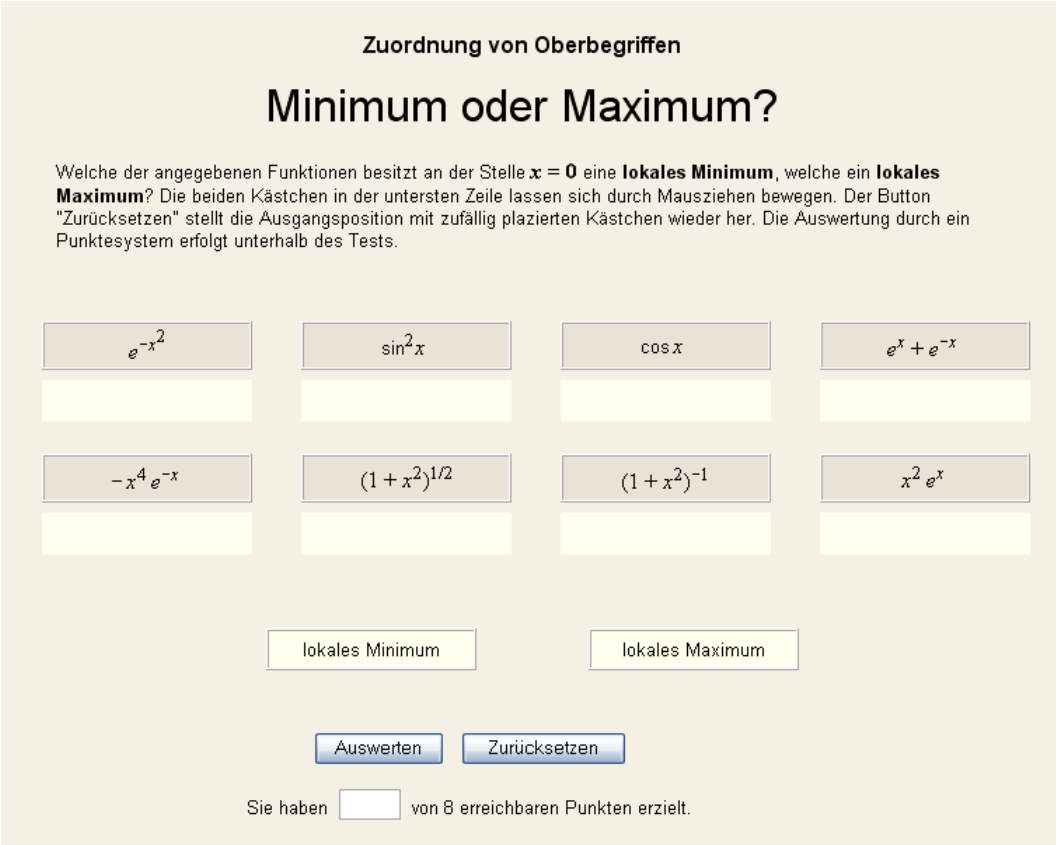
Die Ableitung der Funktion $x \to 2x^3 - x^2 + 1$ ist gegeben durch

$x \to 2x^2 - 2x$	?
$x \to 6x^2 - 2x$	?
$x \to 6x^2 - 2x + 1$	?

Die Ableitung der Funktion $x \to -7x^3 + 2x^2 - x + 1$ ist gegeben durch

$x \to -14x^2 + 4x - 1$	?
$x \to -21x^2 + 4x + 1$	?
$x \to -21x^2 + 4x - 1$	?

(Quelle: http://www.mathe-online.at/tests/diff1/poldiff.html (18.03.09))



(Quelle: http://www.mathe-online.at/tests/anwdiff/minmax.html (18.03.09))

Sogar ein 24-minütiger Film, der die Grundidee der Differentialrechnung vermitteln soll, ist auf *mathe online* zu finden. Falls man diesen Film offline nutzen möchte, besteht die Möglichkeit den Clip auf den eigenen PC zu laden.
Schon viele engagierte Personen haben persönliche Texte und Unterlagen online gestellt, sowie Lernpfade entwickelt. Durch Kombination von Animationen, Text und Übungsaufgaben (also die Richtige Mischung von Input und Output) macht das Erlernen eines neuen Kapitels richtig Spaß. Neben dem „Spaßfaktor“ ist auch die Möglichkeit der Kontaktaufnahme mit dem Verfasser eines Textes oder einer Animation ein nicht zu unterschätzender Vorteil.

Die Vorteile von *mathe online* sind kaum zu übersehen. Einmal angefangen, kann man sich kaum noch von den verschiedensten Anwendungsmöglichkeiten und Animationen losreißen. Der „Reiz des Neuen“ und die spielerische Art und Weise, wie ein Thema aufbereitet wird, bringen einen gewissen „Spaßfaktor“ mit sich. Durch *mathe online* wird das selbstständige Lernen – auch von zu Hause aus – gefördert. Somit ist individuelles Lernen möglich. Erstrebenswert wäre der gezielte Einsatz an geeigneter Stelle mittels Beamer im Regelunterricht, ohne großen administrativen

Aufwand (EDV-Raum) betreiben zu müssen. Die SchülerInnen können bequem von zuhause aus die einzelnen Beiträge nochmals aufrufen und Stoffgebiete noch weiter vertiefen. Um auf das Üben zurückzukommen: So macht Üben Spaß.

4.4 Extremwertaufgaben

Wie schon eingangs erwähnt, richte ich in diesem Kapitel den Blick vor allem auf Extremwertaufgaben. Zunächst möchte ich anführen, welche Aspekte mir bei diesem Thema besonders wichtig sind:

- **Möglichst früh im Unterricht**

  Viele LehrerInnen haben das Gefühl, dass zuerst das Kapitel der Funktionsuntersuchungen etliche Wochen detailliert besprochen werden muss, um Extremwertaufgaben behandeln zu können. Das nötige „Rüstzeug", um Extremwertaufgaben rechnen und verstehen zu können, ist aber schon viel früher vorhanden. Genau genommen reichen elementare Ableitungsregeln (Ableitung einer konstanten Funktion, additive/multiplikative Konstantenregel, Summen- und Differenzenregel, Ableitung der Potenzfunktion) und die Ableitung der Polynomfunktionen völlig aus, um auf die Anwendung der Differentialrechnung – den Extremwertaufgaben – einzugehen. Produkt- und Quotientenregel sowie Funktionsuntersuchungen können nach hinten verschoben werden. Dadurch spüren die SchülerInnen schon eher die Relevanz der Differentialrechnung in unserer Welt.

- **Ohne zweite Ableitung**

  Dass die zweite Ableitung für die Extremwertaufgaben nicht benötigt wird, ist den meisten LehrerInnen nicht bewusst. Bei Extremwertaufgaben sucht man immer „globale Extrema", also die größten oder kleinsten Funktionswerte auf einem bestimmten Intervall. Jedes solche globale Extremum liegt entweder am Rand oder im inneren des Intervalls. Jedes innere globale Extremum ist aber klarerweise auch inneres lokales Extremum. Für innere lokale Extremstellen x_0 gilt die notwendige Bedingung $f'(x_0) = 0$. Daher kann man globale Extrema wie folgt finden:

  1. Suche alle Nullstellen der ersten Ableitung: $x_1, \ldots, x_n$

2. Berechne die zugehörigen Funktionswerte $f(x_1),\ldots,f(x_n)$ sowie die Funktionswerte am Rand $f(a)$ und $f(b)$ (Bei berandeten Extremwertaufgaben setzt man einfach die Randwerte ein. Bei unberandeten Extremwertaufgaben sind Grenzwerte nötig. *Siehe Bsp. 6*)
3. Vergleiche die Funktionswerte. Der größte unter den Werten $f(a), f(x_1),\ldots,f(x_n), f(b)$ stellt das globale (absolute) Maximum dar, der kleinste das globale Minimum.

In der Schule wird oft die zweite Ableitung zur Überprüfung, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt, herangezogen. Diese entscheidet aber immer nur lokal und nie global. Außerdem ist die Überprüfung der Extremwerte mithilfe der zweiten Ableitung viel komplizierter zu verstehen als die Randwertuntersuchung. Überdies wäre die Berechnung der zweiten Ableitung in manchen Fällen sehr kompliziert. Aus diesen Gründen sollte zur Bestimmung globaler Extrema die „Randwertmethode" verwendet werden.

- **Praxisbezug**

  Damit die SchülerInnen die Bedeutung der Differentialrechnung in unserer Welt besser wahrnehmen können, wäre ein enger Realitätsbezug von Vorteil.

Welche Anforderungen müssen die Lerninhalte erfüllen, damit sie *verstanden* werden? Erfolgreiche Lernprozesse zeichnen sich durch zwei charakteristische Merkmale aus: sie sind *konstruktiv* und *kumulativ*. (Quelle: http://blk.mat.uni-bayreuth.de/aktuell/db/13/KMK_expertise.pdf (07.05.09)). Die Selbstständigkeit und das Engagement der SchülerInnen spielt, gerade weil Lernen konstruktiv (aufbauend) ist, eine große Rolle. Da sich das Lernen auch „steigert", also kumulativ ist, wird die Vernetzung neuer Inhalte mit dem Vorwissen zu einem wichtigen Bestandteil eines erfolgreichen Unterrichts.

Um dies alles zu bewerkstelligen, müssen natürlich auch gewisse *Qualitätskriterien* durchlaufen werden. So ist beispielsweise die Orientierung an fundamentalen Ideen, die Möglichkeit der inhaltlichen Vernetzung mit anderen Bereichen der Mathematik, der Aufbau von Grundvorstellungen sowie Anwendungsorientierung zwar nicht immer ohne Probleme realisierbar aber dennoch erstrebenswert.

Zu fundamentalen Ideen zählt man Messen, funktionale Zusammenhänge, Algorithmen, Iteration, Änderungsraten, Optimieren, räumliches Strukturieren, Symmetrie, Zufall und Wahrscheinlichkeit.
Bei der Auswahl der Lerninhalte sollte man auf vertikale und horizontale Vernetzung Wert legen. Unter vertikaler Vernetzung versteht man den „roten Faden" der sich durch ein Thema zieht. Bei der horizontalen Vernetzung sollte eine Verbindung zwischen den drei Lernbereichen (Analysis, analytischen Geometrie, Stochastik) hergestellt werden.
Um Grundvorstellungen gut aufbauen zu können, ist es erforderlich kalkülorientierte Teile zu Gunsten der inhaltlich orientierten Teile zu reduzieren. Wenn stärker inhaltlich und nicht ausschließlich formal argumentiert wird, können den SchülerInnen Begriffe und Begründungen viel verständlicher und klarer näher gebracht werden. So sollte eine Funktionsuntersuchung als kompetentes Werkzeug zum Auffinden der Eigenschaften von Funktionen und nicht als Anwendung von Kalkülen auf Funktionen und deren Ableitungen angesehen werden. Genauso könnte man die Bedeutung der Ableitung formulieren: für die einen wird die Ableitung als Idee des Überganges von der mittleren zur lokalen Änderungsrate angesehen, von anderen werden die Tangentensteigungen und die Ableitungsfunktionen nach syntaktischen Regeln zwar berechnet, deren Bedeutung aber nicht verstanden. Der Schwerpunkt im jetzigen Mathematikunterricht liegt meiner Meinung nach noch immer zu stark auf der syntaktischen Seite. Vor allem die Existenz von Computern würde den SchülerInnen kalkülhafte Berechnungen abnehmen.
Besonders in der heutigen Zeit ist Anwendungsorientierung gefragt wie nie – auch im Mathematikunterricht. Der Alltag wird immer komplexer und für SchülerInnen ist oft schwer nachzuvollziehen, dass Mathematik in der Realität eine große Rolle spielt. Das ist darauf zurückzuführen, dass die Mathematik in technischen Geräten und Computerchips „versteckt" ist. Umso wichtiger ist es, Aufgaben auszuwählen, die mit mathematischer Modellierung zu tun haben. Dabei wird (manchmal des Öfteren) der Modellbildungskreislauf (*siehe S. 6*) durchlaufen.
Bevor ich auf die Aufgaben eingehe, möchte ich noch kurz auf den „Stellenwert" der Extremwertaufgabe hinweisen. In den meisten Schulbüchern werden die Extremwertaufgaben meist erst ganz zum Schluss behandelt. Dadurch hat man das Gefühl, man bräuchte *alle* Aspekte der Differentialrechnung (höhere Ableitungen, Monotonie, Funktionsuntersuchungen). Ich würde sie möglichst früh in den Unterricht

einfließen lassen. Dadurch haben die SchülerInnen die Möglichkeit, eine sehr wichtige Anwendung der Differentialrechnung schon früher kennen zu lernen.

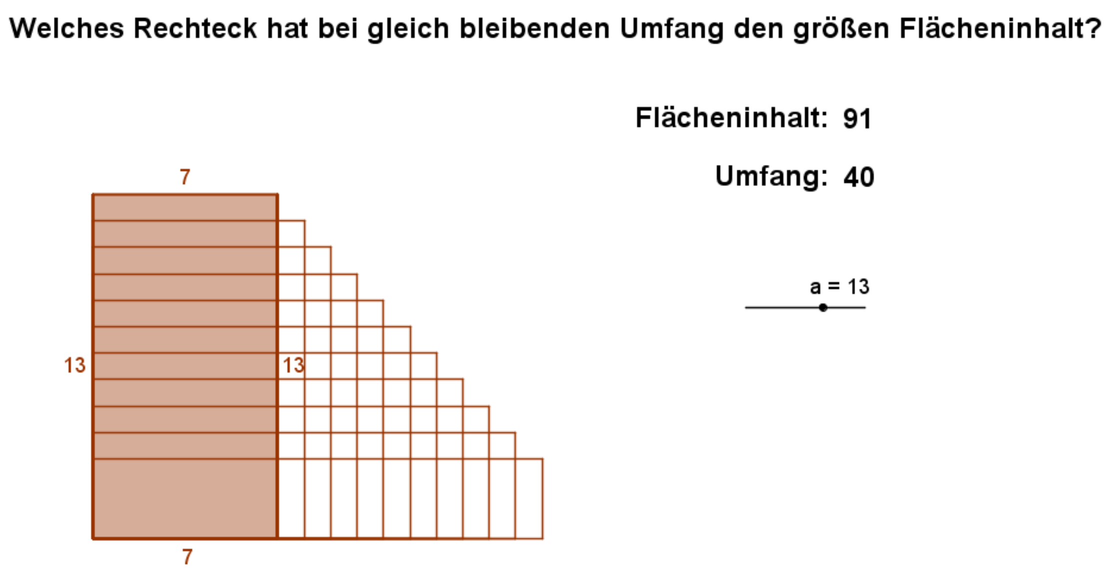
Nun aber zu den Beispielen, die ich hinsichtlich der oben genannten *Qualitätskriterien* (*S. 90*) näher ausführen möchte.

Wir beginnen mit einem Klassiker unter den Extremwertaufgaben: Dem flächengrößten Rechteck bei gegebenen Umfang. Diese Aufgabe wird hier in Anlehnung an „*Der Mathematikunterricht – Der Themenkreis Extremwertprobleme – Wege der Öffnung* (Jahrgang 47 – Heft 4 – August 2001, S. 9-14)“ besprochen:

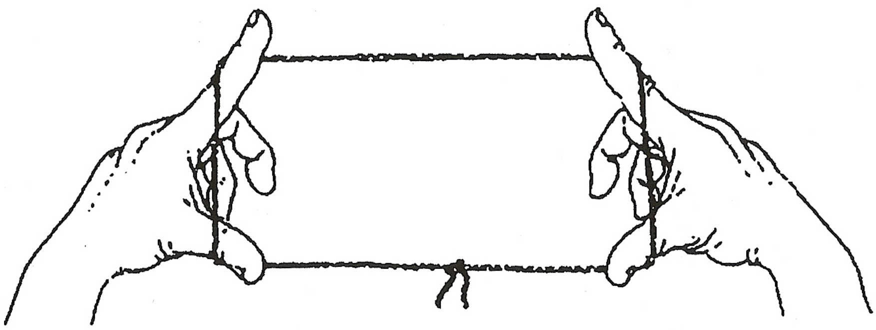
Beispiel 3: Flächengrößtes Rechteck

Du möchtest mit 40 cm Kupferdraht einen möglichst großen rechteckigen Platz für deine Salatpflanze einzäunen, um Schnecken davon abzuhalten das Gemüse zu fressen. Welche Länge und welche Breite sollst du wählen, damit die Pflanze möglichst viel Platz hat?

Der erste Schritt besteht darin das Problem zu verstehen. Es ist oft schwierig den SchülerInnen die Problemstellung verständlich zu machen. Ihnen ist oft nicht bewusst, was sich überhaupt ändert. Viele sind überzeugt davon, dass hier Seitenlänge, Flächeninhalt *und* Umfang variieren. Deshalb sollte man – bevor man sich mit der der Problem*lösung* befasst – stärker mit der Problem*stellung* auseinandersetzen. Um ein besseres Verständnis zu erlangen, könnte man beispielsweise mithilfe eines Computers (hier GeoGebra) die Seitenlängen variieren und dabei den Flächeninhalt und den Umfang „beobachten“:



Auch hier habe ich wieder den Schieberegler verwendet. Mithilfe des Computers werden alle konkurrierenden Rechtecke mit 40 cm Umfang durchlaufen und die SchülerInnen können erkennen, dass die Seitenlängen und der Flächeninhalt variieren, während der Umfang immer gleich bleibt. Hier kann man auch die Ränder, also wenn eine der Seiten Null ist, gut erkennen. In dieser Grenzlage ist der Flächeninhalt minimal – nämlich Null.
Falls kein Computer zur Verfügung steht, gibt es auch eine andere und unkomplizierte Möglichkeit die Problemstellung zu illustrieren – nämlich ein Fadenspiel:



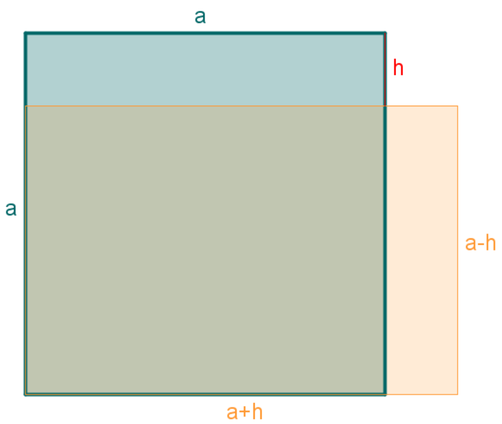
(Quelle: Der Mathematikunterricht – Jahrgang 47 Heft 4/2001, S. 9)

Dabei wird eine etwa 40 cm lange Schnur an den beiden Enden verknotet und so zwischen den Fingern aufgespannt, dass die Seitenlängen verändert werden können. Dazu kann eine Liste angefertigt werden, in der Seitenlängen, Flächeninhalt und Umfang eingetragen werden. Die Problemstellung wird dabei ebenso verdeutlicht.

Die SchülerInnen haben also im ersten Schritt verstanden, wo überhaupt das „Problem" liegt und haben dabei wahrscheinlich auch schon das flächengrößte Rechteck mit einem Umfang von 40 cm gefunden – das Quadrat. Wie kann man aber nun erklären, warum der Flächeninhalt der konkurrierenden Rechtecke bis zum Quadrat zunimmt und danach in gleicher Weise wieder abnimmt? Wieso ist das Quadrat optimal? Um diese Fragen zu klären können wir uns verschiedene Lösungsvarianten zu Nutze machen. Man kann grob zwischen geometrischen und algebraischen Varianten unterscheiden:

Geometrische Variante: Flächenvergleich

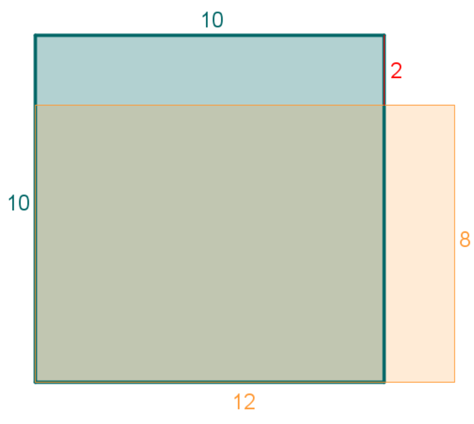
Diese Aufgabe kann mithilfe dieser Methode schon lange vor der Differentialrechnung, also vor der 7. Klasse, gelöst werden. Somit kann das Beispiel schon eher aufgegriffen werden und das Thema „Optimieren“ zieht sich wie ein roter Faden durch die Schullaufbahn der SchülerInnen.



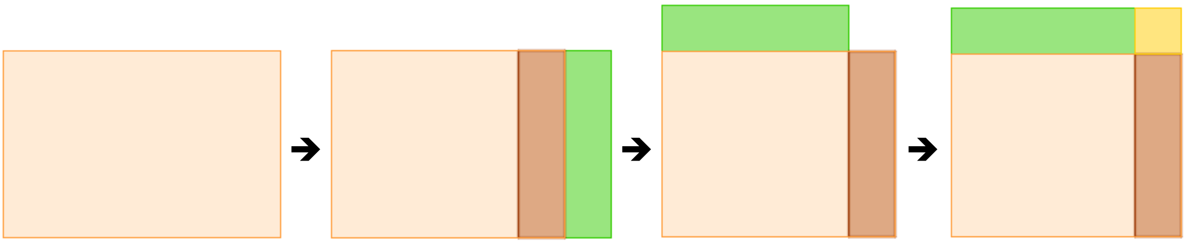
Zunächst gehen wir vom allgemeinen Quadrat mit der Seitenlänge a aus. Verkürzt man nun eine Seite um h cm, so muss man die andere um h cm verlängern, damit der Umfang fest bleibt. Das entstehende Rechteck hat den Flächeninhalt $(a+h)\cdot(a-h)=a^2-h^2<a^2$. Der Flächeninhalt des entstandenen Rechtecks ist also kleiner (nämlich genau um h^2) als der Flächeninhalt des Quadrates.

Möchte man die Aufgabe auf diese Art und Weise schon vor der 7. Klasse thematisieren, kann es sein, dass SchülerInnen Schwierigkeiten haben, mit Variablen zu rechnen. Aus diesem Grund könnte man diesen Beweis zusätzlich mit konkreten Zahlen durchführen:

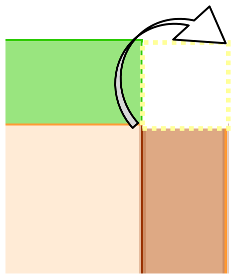
Wieder gehen wir vom Quadrat aus. Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt 10^2=100 cm² und der Umfang ist 10·4=40 cm. Verkürzt man nun eine Seite um 2 cm, so muss die andere Seite um 2 cm verlängert werden. Dadurch erhält man ein neues Rechteck, nämlich jenes mit Länge 12 cm und Breite 8 cm. Der Flächeninhalt dieses Rechtecks beträgt 12·8=96 cm² und ist damit kleiner als das Quadrat. Der Größenunterschied beläuft sich genau auf 2²=4 cm². Nun ist wichtig zu begreifen, dass auch jeder andere Wert statt 2 eingesetzt werden kann. Somit gilt allgemein, dass das Quadrat unter allen konkurrierenden Rechtecken mit gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt aufweist.



Um die SchülerInnen zu „eigenem Sehen“ zu ermutigen könnte man den Flächenvergleich auch von einem Rechteck ausgehend durchführen. Dabei versucht man aus einem nichtquadratischen Rechteck ein Quadrat mit gleichem Umfang aber größerem Flächeninhalt zu erhalten. Folgende Abbildungen sollen die Vorgehensweise verdeutlichen:



Stellen wir uns vor, dass das Rechteck aus einem Quadrat und einem rechteckigen Rest zusammengesetzt ist. Dann teilen wir diesen Rest auf zwei gleich große Streifen und ordnen einen davon anders an. Man sollte sich bewusst machen, dass bis jetzt weder Umfang noch Flächeninhalt verändert wurden. Dass der Flächeninhalt gleich geblieben ist, ist klar. Der Umfang bleibt bei diesem Schritt ebenfalls unverändert, da der grüne Streifen so angeordnet wurde, dass die gleiche Seitenlänge (nämlich die Seitenlänge des Quadrates) „freigelegt“ und wieder „verdeckt“ wurde. „Freigelegt“ wurde die längere Seite des roten Streifens (das ist ja gerade die Seitenlänge des Quadrates). Im selben Zug wurde die Seitenlänge des Quadrates durch den grünen Streifen „abgedeckt“. Somit ist kein Zuwachs des Umfangs festzustellen. Im letzten Schritt wird die Ecke „aufgeklappt“.



Der Umfang bleibt bei diesem Schritt ebenfalls unverändert, während die Fläche wird dadurch vergrößert wird. Somit gelangt man zu derselben Erkenntnis – das Quadrat ist das flächengrößte Rechteck.

Ich denke, dass geometrische Lösungsvarianten die SchülerInnen mehr motivieren können als starre Algorithmen. Zum einen besticht diese Art durch die anschauliche Darstellung, zum anderen kann häufig mit geometrischen Sätzen oder einfachen funktionalen Zusammenhängen argumentiert werden. Nun weiter mit den algebraischen Varianten:

<u>Algebraische Varianten:</u>

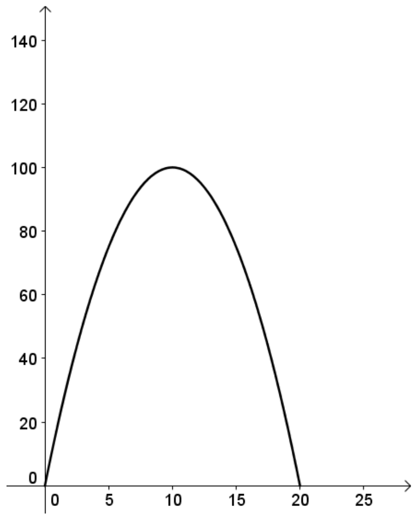
Als erste algebraische Methode möchte ich die *quadratische Ergänzung* anführen. Bei dieser Methode betrachtet man den Flächeninhalt A als Funktion der frei variierenden Seite x. Da der Umfang konstant bleiben muss, kann nur *eine* Rechtecksseite variieren. Die andere Seite ist $\frac{U}{2}-x$ und wir erhalten für den Flächeninhalt:

$$A(x)=x\cdot\left(\frac{U}{2}-x\right)=\frac{U}{2}\cdot x-x^2=-\left(x^2-\frac{U}{2}\cdot x+\left(\frac{U}{4}\right)^2-\left(\frac{U}{4}\right)^2\right)=-\left(x-\frac{U}{4}\right)^2+\left(\frac{U}{4}\right)^2=\left(\frac{U}{4}\right)^2-\left(x-\frac{U}{4}\right)^2$$

Durch Ausmultiplizieren, Umformen und Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat erhält man also den Ausdruck $A(x)=\left(\frac{U}{4}\right)^2-\left(x-\frac{U}{4}\right)^2$. Diese Umformungen haben sich gelohnt, denn jetzt kann man erkennen, wann $A(x)$ maximal wird. Der Flächeninhalt wird dann am Größten, wenn nichts von $\left(\frac{U}{4}\right)^2$ abgezogen wird, das heißt wenn $\left(x-\frac{U}{4}\right)^2$ den kleinstmöglichen Wert, nämlich Null, annimmt. Das bedeutet wiederum, dass x gleich $\frac{U}{4}$ sein muss. Somit ist auch die zweite Seite $\frac{U}{2}-\frac{U}{4}=\frac{U}{4}$. Daher sind die beiden Seiten gleich lang und das gesuchte Rechteck ist ein Quadrat.

Diese Variante bedient sich der Nichtnegativität von Quadraten. Also würde auch „wirklich" etwas von $\left(\frac{U}{4}\right)^2$ abgezogen werden, wenn $\left(x-\frac{U}{4}\right)^2$ nicht Null ist. Auch hier ist wichtig, sich zu überlegen, was variiert (nämlich $\left(x-\frac{U}{4}\right)^2$) und was fest bleibt (hier $\left(\frac{U}{4}\right)^2$). Diese Lösungsvariante scheint zunächst ungewohnt, da in der Schule (leider) nicht sehr oft auf diese Art und Weise argumentiert wird.

Eine andere Möglichkeit zur Lösung $x = \frac{U}{4}$ zu gelangen, besteht darin, sich der „Eigenschaften" einer Parabel zu bedienen. Der Ausdruck für den Flächeninhalt ($A(x) = x \cdot \left(\frac{U}{2} - x \right)$) beschreibt ja gerade eine Parabel, was man auch mit GeoGebra verdeutlichen kann. Um die Funktion zeichnen zu können, nehmen wir wieder an, dass der Umfang 40 cm beträgt.



Der Scheitelpunkt der Parabel, ist jener Punkt, an dem die Flächenfunktion den maximalen Wert annimmt und liegt immer in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen. Die beiden Nullstellen werden durch Nullsetzen der Funktion $A(x)$ gefunden und liegen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{U}{2}$. Daher muss der Scheitelpunkt und damit das Maximum bei $x = \frac{U}{4}$ liegen. Somit erhalten wir als Resultat wieder das Quadrat.

An dieser Stelle könnte man mit der wohl bekanntesten algebraischen Methode, die sich der *Differentialrechnung* bedient, fortfahren. Die SchülerInnen müssen wissen, dass man mithilfe der Differentialrechnung die Extremstellen einer Funktion bestimmen kann. Dabei liefern die Nullstellen der ersten Ableitung die möglichen „Kandidaten" für Extremstellen. Meist werden eine Zielfunktion und eine Nebenbedingung formuliert. In unserem Fall wäre die Zielfunktion der Flächeninhalt $A(x,y)=x \cdot y$, der den größtmöglichen Wert annehmen soll. Die Nebenbedingung ergibt sich aus der Beziehung zwischen den beiden Seiten x und y mit dem gegebenen Umfang: $40=2 \cdot x+2 \cdot y$. Danach drückt man eine Variable durch die andere aus: $y = \frac{40 - 2 \cdot x}{2} = 20 - x$. Anschließend setzt man diesen Ausdruck für y in den

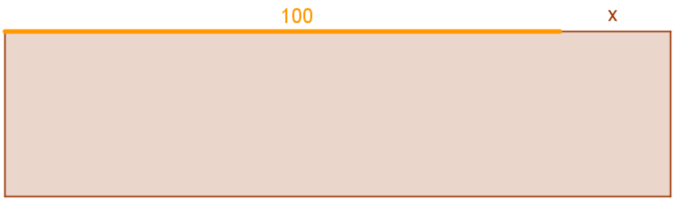
Flächeninhalt $A(x,y)$ (=Zielfunktion) ein, wodurch dieser nur noch von einer Variable, nämlich x, abhängt: $A(x) = x \cdot (20 - x)$. Die Funktion wurde vorhin schon gezeichnet, also könnte man den Extremwert auch grafisch bestimmen. Um ganz genaue Ergebnisse zu erhalten, berechnet man zunächst die erste Ableitung ($A'(x) = 20 - 2 \cdot x$) und setzt diese dann Null. Schließlich erhält man die Extremstelle $x=10$ als Kandidat. Ob der berechnete Wert nun wirklich das Maximum ist, finden wir am Einfachsten durch Einsetzen der Randwerte in die Funktion $A(x)$ heraus. Die Randwerte sind „Grenzlagen" unserer Figur. Betrachten wir noch einmal das Rechteck mit 40 cm Umfang. Die variable Seite x kann alle Werte von Null bis höchstens 20 cm annehmen. In den Fällen $x=0$ und $x=20$ ist das Rechteck zu einem Strich entartet. Der Flächeninhalt ist in beiden Fällen $A(0)=A(20)=0$. Unser berechneter Extremwert liefert im Gegensatz dazu $A(10)=100$ Somit liegt an der Stelle $x=10$ auch wirklich das Maximum. Weiters kann man folgern, dass auch die zweite Seite y gleich 10 sein muss. Wieder erhält man als Lösung ein Quadrat.

Bei dieser Lösungsmethode wird oft die zweite Ableitung verwendet. Dabei genügt es, den Extremwert zu berechnen und mit den Randwerten zu vergleichen. Dass die zweite Ableitung nicht immer zum gewünschten Ergebnis führt zeigt folgendes Beispiel:

Exkurs: Zweite Ableitung – ein Irrweg?

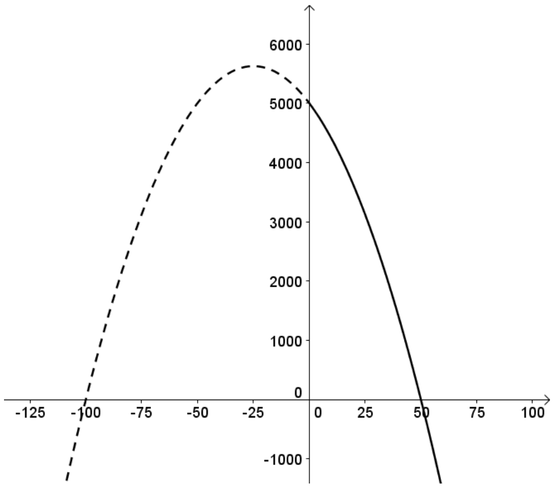
100 m eines Zaunes stehen schon, 200 m sollen so hinzugefügt werden, dass ein Rechteck möglichst großer Fläche eingezäunt wird.

Im ersten Schritt fertigen wir eine Skizze an, die die Situation verdeutlicht:



Die längere Seite ist also $(100+x)$ Meter lang. Insgesamt soll der Zaun 300 Meter lang sein. Zieht man davon $2 \cdot (100+x)$ Meter ab und halbiert, so erhält man die kürzere Rechtecksseite: $300 - 2 \cdot (100 + x) = 300 - 200 - 2x = 100 - 2x \overset{:2}{\Rightarrow} 50 - x$ Somit ist die zweite Seite des Rechtecks $(50\text{-}x)$ Meter lang. Also ergibt sich für den Flächeninhalt $A(x) = (100 + x) \cdot (50 - x) = 5000 - 50 \cdot x - x^2$. Die erste Ableitung ist daher

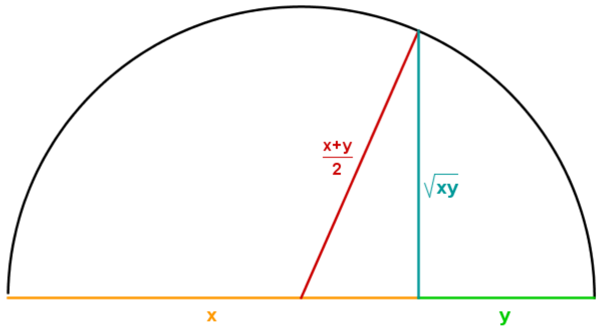
$A'(x) = -50 - 2 \cdot x$. Die Gleichung $A'(x) = 0$ ergibt $x = -25$. Das würde doch bedeuten, dass man wieder 25 m abreißen soll? Davon war aber nie die Rede. Also ist klar, dass x nicht negativ sein kann. An dieser Stelle ist es dringend notwendig, sich die Bedeutung des Ergebnisses vor Augen zu führen und den Sinn zu hinterfragen. Aber spätestens beim Betrachten der Randwerte erkennt man, dass da etwas nicht stimmen kann. Das Stückchen x kann von Null bis 50 jeden Wert annehmen. Also ist das Ergebnis $x = -25$ nicht „zulässig". Diese Erkenntnis erlangt man nicht, wenn man blind die zweite Ableitung verwenden würde, denn $A''(x) = -2$ und somit ist auch $A''(-25) = -2$. Dadurch liegt an der Stelle $x = -25$ das Maximum. Es stimmt auch, dass an dieser Stelle das Maximum liegt, aber es liegt nicht im erlaubten Intervall $0 \le x \le 50$.



Somit muss die Extremstelle am Rand liegen, nämlich bei $x=0$. Das ist auch plausibel, wenn man bedenkt, dass man an der Stelle $x=0$ am wenigsten von der optimalen Form des Quadrats, die man ja erhalten würde, wenn man 25 m abreißt, entfernt ist. An der Stelle $x=0$ weicht man vom „optimalen" Flächeninhalt möglichst wenig ab. Auch an der Funktion $A(x) = 5000 - 50 \cdot x - x^2 = 5000 - (50 \cdot x + x^2)$ kann man erkennen, dass der Ausdruck seinen größten Wert annimmt, wenn x gleich Null ist. Genau dann nimmt die Klammer den kleinstmöglichen Wert, nämlich Null, an. Ratsam wäre, die Randwerte schon vor den Berechnungen zu bestimmen. Bei diesem Beispiel sieht man, dass die zweite Ableitung für diese Berechnungen keine verlässliche „Aussage" liefert. Aus (nicht nur) diesem Grund sollte sie in Bezug auf Extremwertaufgaben keine Bedeutung haben. Warum die zweite Ableitung nicht benötigt wird, habe ich bereits am Beginn dieses Kapitels (*siehe S. 89*) erklärt.

Nun aber wieder zurück zum flächengrößten Rechteck und damit zu einer weiteren algebraischen Methode, die sich der *Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel (Mittelungleichung)* bedient:

Für beliebige Zahlen $x, y \geq 0$ gilt die Ungleichung $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x=y$ ist.



Um dies zu veranschaulichen, benötigen wir den *Höhensatz*:
In jedem rechtwinkeligen Dreieck gilt, dass das Quadrat der Höhe gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte ist, also $h^2=p \cdot q$
In unserem Fall ist das Produkt der Hypotenusenabschnitte $h^2=x \cdot y$. Dieses Produkt ist der Flächeninhalt des Rechecks mit den Seitenlängen x und y. Es gilt die Ungleichung $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$. Das bedeutet, dass auch die Ungleichung $x \cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ gilt. Die Gleichheit $x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ ist nur dann erfüllt, wenn x gleich y ist. Ansonst ist $x \cdot y$ kleiner als $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Da der Ausdruck $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)$ gerade den Flächeninhalt eines Quadrats beschreibt, bedeutet die Gleichung $x \cdot y \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ doch gerade, dass der Flächeninhalt eines umfanggleichen Rechtecks immer kleiner als der Flächeninhalt eines umfanggleichen Quadrats ist. Die Flächeninhalte sind nur dann gleich, wenn die Seiten des Rechtecks (x und y) gleich groß sind. Somit erhält man als flächengrößtes Rechteck ein Quadrat.

Auf den ersten Blick mögen diese Methoden sehr ungewohnt sein, aber mich fasziniert dennoch, auf wie viele verschiedene Arten ein Problem gelöst werden kann. Genau diese Faszination und die Mächtigkeit der Mathematik sollten auch die

SchülerInnen erfahren dürfen. Aus diesem Grund sollten ihnen diese verschiedenen Ansätze nicht vorenthalten werden. Um so eine große Vielfalt an Lösungsmöglichkeiten überhaupt behandeln zu können, ist es unumgänglich, sich einer Aufgabe länger zu widmen. Ich denke, dass es viel effektiver ist, den SchülerInnen wenige Aufgaben zu geben als ihnen eine Fülle von zusammenhanglosen Fragen zu stellen.

Bevor ich auf das nächste Beispiel eingehe, möchte ich die Aufgabe des flächengrößten Rechtecks bezüglich der oben genannten *Qualitätskriterien* (*siehe S. 90*) durchleuchten:

Individuelle Entfaltung und Selbstständigkeit ist dann möglich, wenn den SchülerInnen nicht immer alles „vorgekaut“ wird. Manche Lösungsansätze können die SchülerInnen mit hilfreichen Hinweisen und genügend Zeit sicher auch selbstständig erarbeiten. Ob es nun besser ist, die SchülerInnen zu leiten oder ihnen Zeit für eigene Lösungsansätze zu geben, kann hier meiner Meinung nach nicht beantwortet werden, da mehrere Faktoren, wie zum Beispiel das Naturell der Lehrperson oder die Vorlieben der SchülerInnen, den „Weg“ zur Lösung beeinflussen. Verwendet man diese Aufgabe als Einstiegsbeispiel, würde ich persönlich den „Mittelweg“ bevorzugen. Dabei würde ich die SchülerInnen so gut wie möglich leiten, aber ihnen so viel wie möglich selbst erarbeiten lassen.

Die Orientierung an fundamentalen Ideen ist insofern gegeben, da die SchülerInnen Seitenlängen abmessen, funktionale Zusammenhänge erkennen können und den Flächeninhalt optimieren. Auch die „Symmetrie der Parabel“ kann man zu fundamentalen Ideen zählen.

Bei diesem Beispiel findet eine inhaltliche Vernetzung mit anderen Bereichen der Mathematik, vor allem zwischen Geometrie und Algebra, statt. Weiters können die SchülerInnen erkennen, dass beispielsweise bei der geometrischen Lösungsvariante binomische Formeln verwendet werden.

Wäre keine geometrische Form (also hier das Rechteck) vorgegeben, könnte man Verbindungen zu anderen Figuren, wie beispielsweise dem Kreis, herstellen. Bei gegebenem Umfang hat der Kreis unter allen Formen den größten Flächeninhalt. Um eine weitere Verbindung (etwa zur Prozentrechnung) zu schaffen, könnte man sich anschließend noch die Frage stellen, um wie viel Prozent das kreisförmige im Gegensatz zum quadratischen Gehege größer ist. Dazu berechnet man zunächst die beiden Flächeninhalte $A_{Quadrat} = 100$ cm² und $A_{Kreis} \approx 127$ cm². Das bedeutet, dass die

Pflanze um 27% mehr Platz hat. Damit ist die kreisförmige Umzäunung um mehr als ein Viertel größer als die quadratische.

Besonders mit der Fragestellung des Beispiels (*siehe S. 92*) kann die Neugierde auf andere Naturwissenschaften, wie etwa der Chemie geweckt werden. Die SchülerInnen fragen sich vielleicht, warum Schnecken durch einen Kupferdraht aufgehalten werden. Insbesondere im Frühling, wenn im häuslichen Garten viele kleine Pflanzen abgefressen werden, fragt man sich doch, wodurch solche Tiere abzuhalten sind. Nach Recherche im Internet stellt sich heraus, dass sogar Schneckenringe aus Kupfer zum Verkauf angeboten werden, die den Salat vor den ungeliebten Schnecken beschützen sollen:

Exkurs: Schutz der Salatpflanzen

(Quelle: http://www.manufactum.de/Produkt/193893/1442881/3/SchneckenringKupfer6Stueck.html (21.04.09))

Auf dieser Seite ist zusätzlich folgende Erklärung zu finden:

„Dass Schnecken bei Berührung mit Kupfer einen elektrischen Schlag bekommen, ist eine Theorie, die ebenso weit verbreitet wie unbewiesen ist. Als sicher gilt hingegen, dass der von den Schnecken erzeugte Schleim in Verbindung mit Kupfer zu einer chemische Reaktion führt, die die Schleimhaut der Schnecken durch Oxidationsprozesse schädigt – und die Tiere letztlich davon abhält, einen Kupferstreifen zu überkriechen. Diese Ringe kommen daher mit einer einfachen geraden Form aus, wichtig ist allein das Material: reines Kupferblech."

Nach diesem kurzen Ausflug in die Biologie beziehungsweise Chemie beschäftigen wir uns wieder mit der Aufgabe, die auch zum Aufbau von Grundvorstellungen beiträgt. So werden zum Beispiel bei der geometrischen Lösungsmethode, Kompetenzen erworben, die über den Bereich der Mathematik hinausgehen. Damit möchte ich auf das Argumentieren etwa beim Flächenvergleich hinweisen.

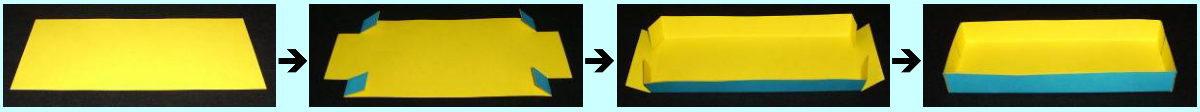
Ein nicht zu unterschätzender Punkt ist die Anwendungsorientierung, die bei dieser Aufgabe nur zum Teil gegeben ist. Bei diesem Beispiel liegt das Augenmerk eher auf der Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten, was meistens einen eher vernachlässigten

Aspekt bei Extremwertaufgaben darstellt. Auch der Computer erweist sich als förderliches Medium sowohl beim Verstehen als auch beim Lösen des Problems.

Die nächste Aufgabe wird in Anlehnung an „*Der Mathematikunterricht – Der Themenkreis Extremwertprobleme – Wege der Öffnung* (Jahrgang 47 – Heft 4 – August 2001, S16-18)" diskutiert:

Beispiel 4: Die volumsgrößte Schachtel

Aus einem rechteckigen Karton mit den Maßen 20 cm x 10 cm soll eine oben offene Schachtel gebastelt werden. Dazu schneidet man die Ecken so ein, dass vier gleich große Quadrate entstehen, die mit den Seitenwänden der entstehenden Schachtel verklebt werden können. Folgende Bilder sollen die Vorgehensweise verdeutlichen:



Wie weit muss man einschneiden, damit möglichst viel in die fertige Schachtel passt?

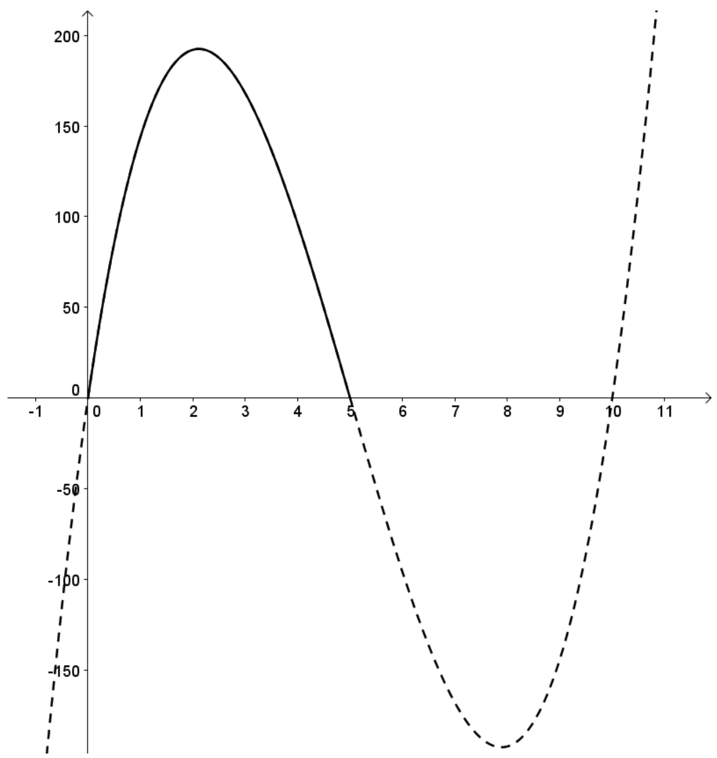
Dieses Beispiel findet man in diversen Schulbüchern in etwas abgewandelter Form. Dabei werden die Ecken nicht nur ein- sondern abgeschnitten. Der Vorteil des Einschneidens besteht darin, dass die aufstehenden Ecken als Klebefläche verwendet werden können. Würde man die Ecken wegschneiden, müsste man mit Klebestreifen arbeiten, was eine nicht perfekt geklebte Schachtel zur Folge hätte. Der Nachteil des Einschneidens ist jedoch, dass bei einer großen Schnitttiefe eine sehr schmale Schachtel entsteht und die verhältnismäßig großen Ecken im Weg sind. Dadurch wird das Verkleben erschwert.

Einer der schwierigsten Schritte ist sicherlich die Übersetzung des realen Problems in die Mathematik mit ihren Begriffen und Symbolen. Zunächst sind wir bemüht, aus dem in Worten formulierten Problem, der „Textaufgabe", eine Funktionsgleichung zu gewinnen. Wir wissen nur, dass möglichst viel in die Schachtel passen soll, das bedeutet, dass das Volumen möglichst groß sein soll. Wieder machen wir uns bewusst, was hier variiert – nämlich die Schnitttiefe. Wir nennen sie x und machen uns noch bevor wir beginnen zu Rechnen über die Größen, die x annehmen kann, Gedanken. Die Schnitttiefe x kann höchstens so groß sein, wie die halbe Breite des Kartons, also 5 cm. In diesem Fall entsteht nur eine senkrechte Fläche aber keine Schachtel. Wir erhalten also eine „entartete" Figur. Schneidet man immer weniger und weniger ein, gelangt man schließlich zur zweiten „Grenzlage", nämlich $x=0$. Auch hier erhält man keine Schachtel, sondern eine waagrechte Fläche. In beiden Fällen ist auch das Volumen gleich Null. Somit erhalten wir für die Schnitttiefe x das Intervall: $0 \le x \le 5$. Als Nächstes kann das Volumen V der entstehenden Schachtel in Abhängigkeit von der Schnitttiefe x dargestellt werden:

$$V(x) = Länge \cdot Breite \cdot Höhe = (20 - 2 \cdot x) \cdot (10 - 2 \cdot x) \cdot x$$

Bei diesem Beispiel erahnt man nicht sofort die gesuchte Schnitttiefe, für die das Volumen maximal wird, da die ersten beiden Klammern mit steigendem x immer kleiner werden, während der dritte Faktor wächst.

Um zu einer Lösung zu gelangen, genügt es die Funktion zu zeichnen:



Das gesuchte Maximum liegt bei einer Schnitttiefe von $x \approx 2$ cm. Die Voraussetzung für diese (grafische) Lösungsmethode ist ein CAS oder ein grafikfähiger Taschenrechner. Der theoretische Aspekt wird hier stark in den Hintergrund gestellt.

Um ein genaues Ergebnis zu erhalten und die Kraft des Ableitungskalküls zu verdeutlichen, gehen wir den „theoretischen Weg“. Wir berechnen die erste Ableitung und setzen sie Null. Dieses Verfahren liefert die „Kandidaten“ für mögliche Extremstellen:

$$V(x) = (20 - 2 \cdot x) \cdot (10 - 2 \cdot x) \cdot x = 4 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 200 \cdot x$$

$$V'(x) = 12 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 200 \overset{V'(x)=0}{\Rightarrow} x_1 = 5 + \frac{5}{\sqrt{3}} = 7{,}9 \wedge x_2 = 5 - \frac{5}{\sqrt{3}} = 2{,}1$$

Da x nur zwischen 0 und 5 liegen darf, kommt nur x_2 als Lösung in Frage. Um zu überprüfen, ob an der Stelle $x_2=2{,}1$ wirklich das Maximum der Funktion $V(x)$ liegt, berechnen wir den Funktionswert an dieser Stelle und die Randwerte. Wie schon oben erwähnt, erhält man an den Rändern „nur" eine Fläche, somit ist das Volumen $V(0)=V(5)=0$. Im Gegensatz dazu entsteht bei einer Schnitttiefe von 2,1cm wirklich eine Schachtel mit dem Volumen $V(2{,}1)=192{,}4$ cm³>0. Also befindet sich der Extremwert wirklich an der berechneten Stelle $x_2 \approx 2{,}1$.

Die Gefahr besteht nun darin, nur mehr das Schema (Funktionsterm finden, ableiten und die Ableitung dann Null setzen) anzuwenden, ohne über genügend Verständnis der grundlegenden Begriffe und Zusammenhänge zu verfügen. Oft wird dieses Schema, welches das rasche und zum größten Teil mechanische Lösen vieler Extremwertaufgaben ermöglicht, zu schnell entwickelt. Der Schwerpunkt liegt dann eindeutig auf dem Lösen von Aufgaben. Warum ein Schema bei einigen Aufgaben funktioniert und bei anderen nicht, bleibt für manche SchülerInnen oft ein Rätsel, da das Schema einfach „nur" angewendet wird, ohne sich kritisch mit den Gesetzmäßigkeiten, auf denen es beruht, auseinanderzusetzen. Legt die Lehrperson andererseits zu viel Wert auf die Theorie, kann es sein, dass viele SchülerInnen die „Lust" an der Mathematik verlieren. Ich denke, dass die wenigsten SchülerInnen in so einem Maß am Stoff der reinen Mathematik interessiert sind, wie sich das so manche Lehrperson wünschen würde. Viele SchülerInnen finden gerade die Anwendbarkeit der Mathematik auf praktische Probleme reizvoll. Genau das könnte die nötige Motivation entstehen lassen, um sich etwas genauer und aus eigenem Antrieb mit so manchen Problemen genauer zu befassen. Dass für eine erfolgreiche und selbstständige Anwendung der Mathematik auf praktische Probleme eine hinreichende Einsicht in die theoretischen Grundlagen erforderlich ist, erkennen die SchülerInnen meiner Meinung nach von selbst. Gerade die Beschäftigung mit ausgewählten Anwendungen sollte hier im Vordergrund stehen, damit allen SchülerInnen die Bedeutung der Mathematik in unserer Welt bewusst wird.

Auf individuelle Entfaltung und Selbstständigkeit habe ich bei diesem Beispiel nicht großen Wert gelegt. Dafür wird das räumliche Vorstellungsvermögen geschult, da aus einem zweidimensionalen „Objekt" ein dreidimensionales entsteht. Auch hier werden Geometrie und Algebra miteinander verknüpft.

Wie schon des Öfteren erwähnt, sollen Aufgaben auch das selbstständige, aktive Problemlösen fördern, ohne ständig das standardisierte Handeln auf der syntaktischen Ebene in den Vordergrund zu stellen. Das soll nicht bedeuten, dass Einzel-, Gruppen- oder Teamarbeit von Hause aus besser ist, als der traditionelle fragend-entwickelnde Unterricht. Ich denke, jede Lehrperson sollte für sich die richtige Balance zwischen Instruktion (durch den Lehrer) und Konstruktion (durch den Schüler) finden. Das folgende Beispiel bietet der Lehrperson die Möglichkeit der besseren Integration und „Aktivierung“ der SchülerInnen. Es geht nämlich um die „beste“ 1-Liter-Verpackung. Auch bei dieser Aufgabe sind der Kreativität keine Grenzen gesetzt. Möchte man die Rechnung so einfach wie möglich gestalten, sollte man darauf achten, dass die Verpackung kaum von einem Quader mit quadratischer Grundfläche abweicht. SchülerInnen die Herausforderungen suchen, können auch optimale Verpackungen berechnen, die Eigenheiten, wie etwa eine rechteckige Grundfläche, aufweisen. Die SchülerInnen könnten geeignete Milch- oder Saftverpackungen von zu Hause mitnehmen, die dann aufgeschnitten und vermessen werden. Schon allein aufgrund der Tatsache, dass die Lehrperson die „Lösungen“ nicht kennt, wird ein Beispiel authentischer. Und Authentizität kann sicher nicht schaden. Zusätzlich wird Teamarbeit und Selbstverantwortung geschult. Nun aber zum Beispiel:

Beispiel 5: ökonomische Verpackungsindustrie

Orangensaft und Milch gehören zu einem guten Frühstück. Dank überlegter Verpackungssysteme ist die Lagerung aber auch die Frischhaltung kein Problem mehr. Aber arbeiten Unternehmen, wie etwa Tetra Pak umweltfreundlich und wirtschaftlich? Wie viel Karton wird gebraucht und wie stark weichen die Verpackungen von der „optimalen“ Größe bzw. Gestalt ab? Um diese Fragen zu klären, nehmen wir verschiedene Verpackungen genauer unter die Lupe:

Befassen wir uns zunächst mit der *Becel pro-activ* Verpackung. Um dem Geheimnis der optimalen Gestalt auf die Spur zu kommen, trinken wir den Inhalt und klappen die Verpackung so auf, dass wir ein Faltnetz erhalten:

Die Höhe der Milchverpackung bezeichnen wir mit h, die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche mit a. „Boden“ und „Deckel“ werden beim Auseinanderfalten genau in der Hälfte „geteilt“. Dadurch kann auch die Halbe Seitenlänge $\frac{a}{2}$ in das Faltnetz eingezeichnet werden.

Anschließend messen wir die Länge der Seite a und der Höhe h: $a=7{,}1$ cm und $h=19{,}8$ cm. Damit die Verpackung dicht ist, müssen die Kanten miteinander verklebt werden. Dadurch entsteht ein $0{,}8$ cm breiter Rand an drei Seiten (im Faltnetz schwarz eingezeichnet). Nun können wir den Materialverbrauch bestimmen, indem wir die Mantelfläche berechnen. Das geht schnell, da wir nur den Flächeninhalt des Faltnetzes bestimmen müssen: Das zu berechnende Rechteck ist $29{,}2$ cm lang und $28{,}5$ cm breit. Somit ergibt sich ein Flächeninhalt (d.h. Materialverbrauch) von $832{,}2$ cm². Außerdem können wir nachrechnen, ob überhaupt ein Liter in diese Verpackung passt. Das Volumen des Quaders beträgt: $V(a,h) = Grundfäche \cdot Höhe =$ $= a^2 \cdot h = 7{,}1^2 \cdot 19{,}8 \approx 998\,$cm³. Betrügt der Hersteller? Ist wirklich um 2 cm³ weniger Milch enthalten als angegeben? Diese Vermutung stimmt natürlich nicht, da die Verpackung etwas nachgibt und auf diese Weise sicherlich noch 2 cm³ und somit ein Liter hineinpassen. Ein „chemischer Leihe“ könnte sagen, dass bei den meisten 1-Liter-Verpackungen sogar noch „Luft“ zum Aufschütteln Platz findet. In Wirklichkeit wird die Milch in sauerstofffreier Atmosphäre verpackt. Um eine Oxidation der Aromastoffe und Verwesungsprozesse so gut wie möglich zu verzögern oder gar zu vermeiden, wird Stickstoff und Kohlendioxid verwendet.

Um ökonomisch und umweltfreundlich zu arbeiten, muss der Materialverbrauch möglichst gering sein. Wir dürfen gespannt sein, ob der berechnete Wert von $832{,}2$

cm² optimal ist. Der Materialverbrauch ist von zwei Variablen – nämlich der Höhe h und der Seite a – abhängig und kann folgendermaßen berechnet werden:

$$M(a,h) = (4 \cdot a + 0{,}8) \cdot \left(2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot \frac{a}{2} + h \right) = 1{,}28 + 7{,}2 \cdot a + 4 \cdot a^2 + 0{,}8 \cdot h + 4 \cdot a \cdot h$$

Damit der Materialverbrauch nur noch von einer Variable abhängt, ersetzen wir eine Variable durch die andere. Zu diesem Zweck benutzen wir das, was wir bereits wissen – nämlich das Volumen V. An dieser Stelle erinnern wir uns, dass wir festgestellt haben, dass die Verpackung ein wenig nachgibt. Somit ergibt sich das Volumen $V(a,h) = a^2 \cdot h = 998$ cm³. Daraus kann die Höhe h berechnet werden: $h = \frac{998}{a^2}$. Setzt man dies in die obige Formel des Materialverbrauchs $M(a,h)$ ein, so ist dieser nur noch von einer Variable, nämlich a abhängig, und man kann ableiten.

$$M(a) = 1{,}28 + 7{,}2 \cdot a + 4 \cdot a^2 + \frac{798}{a^2} + \frac{3992}{a}$$

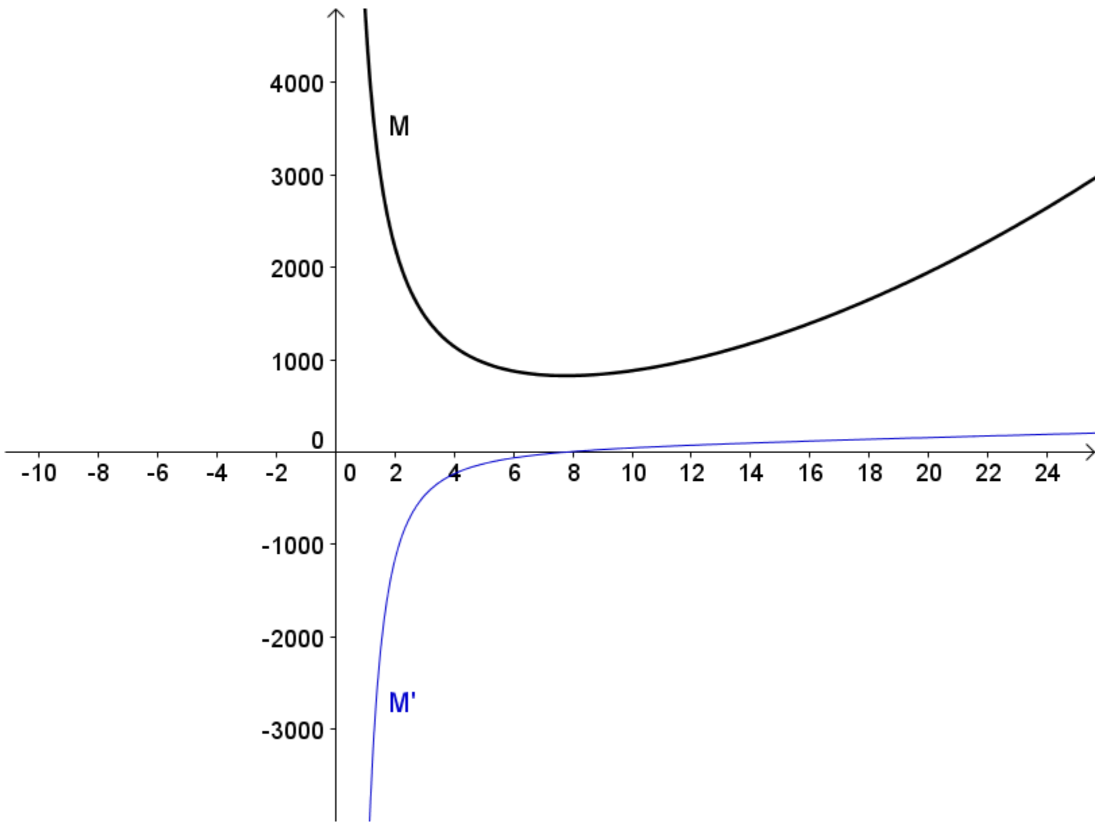
$$M'(a) = 7{,}2 + 8 \cdot a - \frac{1596}{a^3} - \frac{3992}{a^2}$$

Setzt man nun die erste Ableitung Null, um die Kandidaten für mögliche Extrema zu erhalten, gelangt man mithilfe eines CAS zur Lösung $a=7{,}8$ cm. Um zu überprüfen, ob es sich wirklich um das Minimum handelt, berechnen wir die Randwerte. Da es sich in diesem Fall um eine unberandete Extremwertaufgabe handelt, können wir keine konkreten Werte einsetzen. Wir betrachten deshalb die Grenzwerte der Funktion $M(a)$, wenn die Seite a gegen Null beziehungsweise Unendlich strebt:

$$\lim_{a \to 0} M(a) = \lim_{a \to 0} \left(1{,}28 + \underbrace{7{,}2 \cdot a}_{\to 0} + \underbrace{4 \cdot a^2}_{\to 0} + \frac{798}{\underbrace{a^2}_{\to \infty}} + \frac{3992}{\underbrace{a}_{\to \infty}} \right) = \infty$$

$$\lim_{a \to \infty} M(a) = \lim_{a \to \infty} \left(1{,}28 + \underbrace{7{,}2 \cdot a}_{\to \infty} + \underbrace{4 \cdot a^2}_{\to \infty} + \frac{798}{\underbrace{a^2}_{\to 0}} + \frac{3992}{\underbrace{a}_{\to 0}} \right) = \infty$$

Dadurch ist an der Stelle $a=7{,}8$ wirklich das gesuchte Minimum. Um dies zu verdeutlichen, können die Funktion $M(a)$ und deren Ableitung $M'(a)$ gezeichnet werden:



Nun kann auch die optimale Höhe berechnet werden. Man erhält $h=16{,}4$ cm. Somit liegt der optimale Materialverbrauch bei: $M(7{,}8)=825{,}7$ cm².

Um zu klären, ob umweltfreundlich und wirtschaftlich gearbeitet wurde, vergleichen wir die berechneten mit den tatsächlichen Werten:

Seite *a*		**Höhe *h***		**Materialverbrauch *M***	
tatsächlich	berechnet	tatsächlich	berechnet	tatsächlich	berechnet
7,1	7,8	19,8	16,4	832,2	825,7 m²
Abweichung: 0,7 cm		Abweichung: 3,4 cm		Abweichung: 6,5 cm²	

Durch Verbreitern der Seite a und verkleinern der Höhe h, würde man 6,5 cm² einsparen. Geht der Hersteller wirklich so verschwenderisch um? Um diese Fragen zu beantworten, sehen wir uns den prozentuellen Mehrverbrauch an. Der Hersteller weicht also nur um $\frac{M(7{,}1)-M(7{,}8)}{M(7{,}8)}=\frac{832{,}2-825{,}7}{825{,}7}=0{,}00787\approx 0{,}8\%$ vom optimalen

Materialverbrauch ab. Dieser Wert erscheint wenig drastisch, wenn man dabei bedenkt, dass die Abweichung von der optimalen Seitenlänge im Vergleich dazu sehr groß ist – sie liegt bei etwa 9%.

Um die Änderungsrate noch besser zu verdeutlichen, kann eine Zusatzfrage gestellt werden:

Um wie viel Prozent weicht der Materialverbrauch vom optimalen Wert ab, wenn die Seitenlänge a um weitere 9% verkürzt wird? Schätze zuerst!

Man könnte annehmen, dass eine Änderung um weitere 9% eine Änderung von etwa 0,8·2=1,6% beim Materialverbrauch herbeiführen würde. Diese Vermutung lässt sich rechnerisch allerdings schnell widerlegen:

Die „neue" Seitenlänge a ist wieder um 0,7 cm kürzer und beträgt somit 6,4 cm. Berechnet man nun den Materialverbrauch und vergleicht ihn mit dem Optimalwert, bemerkt man, dass die prozentuelle Änderung um einiges größer ist, als vielleicht erwartet: $\frac{M(6{,}4)-M(7{,}8)}{M(7{,}8)}=\frac{854{,}5-825{,}7}{825{,}7}=0{,}0348\approx 3{,}5\%$

Man kann sehr gut erkennen, dass in der Umgebung des Extremwertes der Funktionswert nicht besonders vom optimalen Wert abweicht, da in der Nähe des Extremwerts die Funktion relativ „flach" verläuft. In unserem Beispiel bedeutet das, dass sich Abweichungen in der Nähe der Extremstelle nicht so stark auf den Materialverbrauch auswirken. Je weiter man sich von der Extremstelle entfernt, umso mehr entfernt sich der Funktionswert vom Extremwert und in unserem Fall der Materialverbrauch vom optimalen Wert. Genau diese Überlegungen stellte auch schon FERMAT an. Er bemerkte, dass sich die Werte einer Funktion in der Nähe des Maximums oder Minimums nur wenig ändern. Wenn wir mit Hilfe der Differentialrechnung eine Extremstelle bestimmen und die erste Ableitung Null setzen, greifen wir genau auf diese Erkenntnisse zurück.

Dass die Ableitung an der Extremstelle x_0 gleich Null ist (also $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$), bedeutet für kleine $|h|$ in guter Näherung $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\approx 0$. Für kleine $|h|$ gilt weiters $f(x_0+h)-f(x_0)\approx 0\cdot h=0$ und folglich in guter Näherung $f(x_0+h)\approx f(x_0)$. Genau das bedeutet doch, dass sich in der Nähe der Extremstelle x_0 der Funktionswert nur geringfügig ändert.

Wie man sieht, gewinnt auch die Theorie durch Einbeziehung geschichtlicher Aspekte an Lebendigkeit. Was mir an diesem Beispiel sehr gut gefällt, ist die Tatsache, dass Praxis und Theorie einander abwechseln und parallel zueinander behandelt werden können. So kann die starre Struktur von Theorie- und Aufgabenteil etwas aufgebrochen werden.

Die anderen zwei Verpackungen können auf die gleiche Weise berechnet werden.

Gehen wir nun davon aus, dass die Verpackung keine quadratische Grundfläche aufweisen muss.

Folgender Satz wird hier angewendet: *Eine Summe von mehreren veränderlichen Größen besitzt ein regelmäßiges Minimum, wenn das Produkt dieser Größen unter seinen Gleichheitswert nicht herabsinkt. Unter dem Gleichheitswert einer Funktion von mehreren Argumenten verstehen wir denjenigen Wert, den die Funktion annimmt, wenn die Argumente einander gleich werden, …* (Quelle: Mathematikunterricht II S. 26)

Der Liter Milch soll also in einer quaderförmigen Verpackung mit den Quaderkanten a, b und c Platz finden. Das Volumen ist dann $a \cdot b \cdot c$ und die zu minimierende Oberfläche $2 \cdot (ab+bc+ac)$. Da $a \cdot b \cdot c$ konstant ist, ist es auch $(ab) \cdot (bc) \cdot (ac)$.

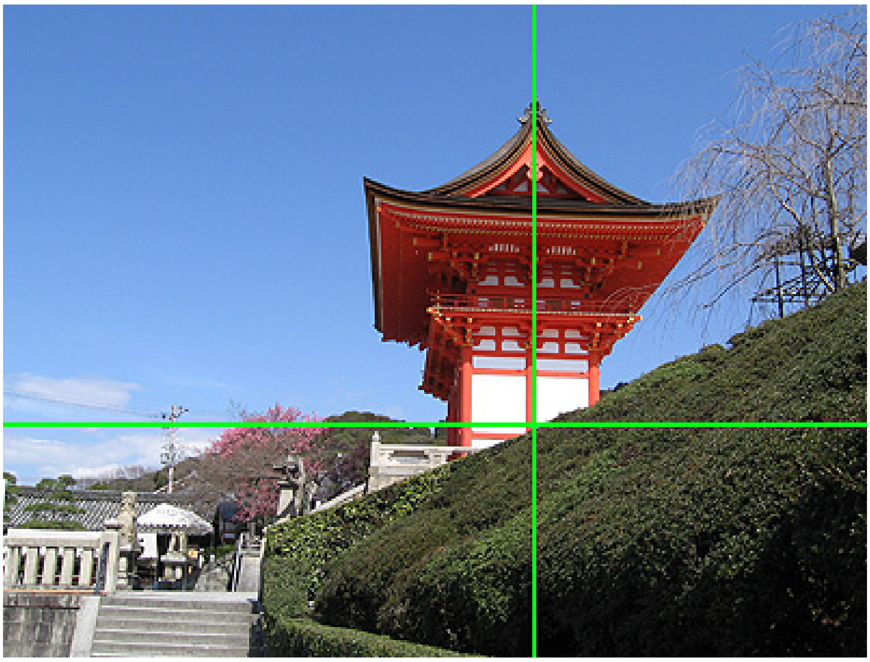
Die Summe $ab+bc+ac$ nimmt genau dann ihren kleinsten Wert an, wenn alle drei Summanden einander gleich sind. Insbesondere ist dann auch $2 \cdot (ab+bc+ac)$ minimal. In letzter Folge bedeutet dies, dass alle drei Seiten gleich lang sind, also $a=b=c$. Das bedeutet, dass bei gegebenem Volumen der Würfel die kleinste Oberfläche und damit den geringsten Materialverbrauch aufweist.

Aus dem Volumen ergibt sich die Seitenlänge a: $1000 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1000} = 10$ cm. Daraus ergibt sich ein Materialverbrauch von $6 \cdot a^2 = 600$ cm². Man würde also über 200 cm² Karton einsparen. Warum sieht man in keinem Geschäft eine Milchverpackung mit diesen Maßen? Um diese Frage zu beantworten, beziehen wir unser Faltnetz mit ein. Berücksichtigen wir die Klebestreifen, so liegt der Materialverbrauch bei $M(a,h) = (4 \cdot a + 0{,}8) \cdot \left(2 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot \frac{a}{2} + h\right) \overset{\substack{a=10 \\ h=10}}{=} 40{,}8 \cdot 21{,}6 = 881{,}3$ cm².

Man sieht also: Ohne Berücksichtigung der Klebefalzen wäre der Würfel die optimale Verpackung. Werden Klebestreifen mit einbezogen, so ergibt sich ein

Materialverbrauch von 881,3 cm², welcher deutlich sowohl über dem berechneten (825,7 cm²) als auch dem tatsächlichen Wert (832,2 cm²) liegt.
Wie sieht es aber bei Verpackungen aus, die nur einen halben Liter fassen? Kommen diese dem Würfel nahe? Um diese Fragen zu beantworten kann eine solche Verpackung ebenfalls vermessen werden.

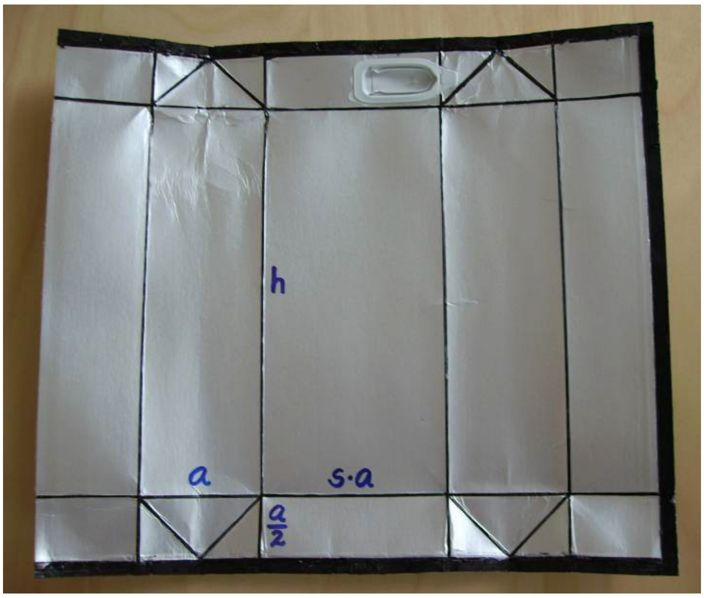
Jeder von uns hat sicherlich schon einmal eine Milchpackung benutzt die keine quadratische, sondern eine rechteckige Grundfläche aufweist. Interessanterweise bemerkt man beim Vermessen, dass die Seitenverhältnisse nahe dem goldenen Schnitt (etwa 1:1,6) liegen. Die kürzere Seite verhält sich zur längeren, wie die längere Seite zur Summe beider Seiten, also $a:b=b:(a+b)$. Dieses Verhältnis gilt als Inbegriff für Ästhetik und Harmonie. Dass auch in der Kunst der goldene Schnitt als ideale Proportion gilt, kann man an Gemälden von Leonardo Da Vinci erkennen. Auch heute spielt der goldene Schnitt noch eine große Rolle. Denken wir dabei an die Fotografie, wo Fotos als besonders schön und interessant empfunden werden, wenn die Unterteilung nach dem goldenen Schnitt erfolgt und interessante Motive an solchen Stellen liegen:



(Quelle: http://www.kunstkurs-online.de/Seiten/fotografie/bildgestaltung-foto/bild-unterteilung.php (27.04.09))

Auch in der Fernsehtechnik setzen sich immer mehr Geräte mit dem beliebten 16:9 Format durch. Die Vermutung liegt nahe, dass auch der Hersteller dieser Milchverpackung auf die Ästhetik großen Wert legt.

Durch das Festsetzen des Faktors s kann die Zielfunktion letztlich auf eine Variable zurückgeführt werden. Sehen wir uns auch in diesem Fall das Faltnetz genauer an:



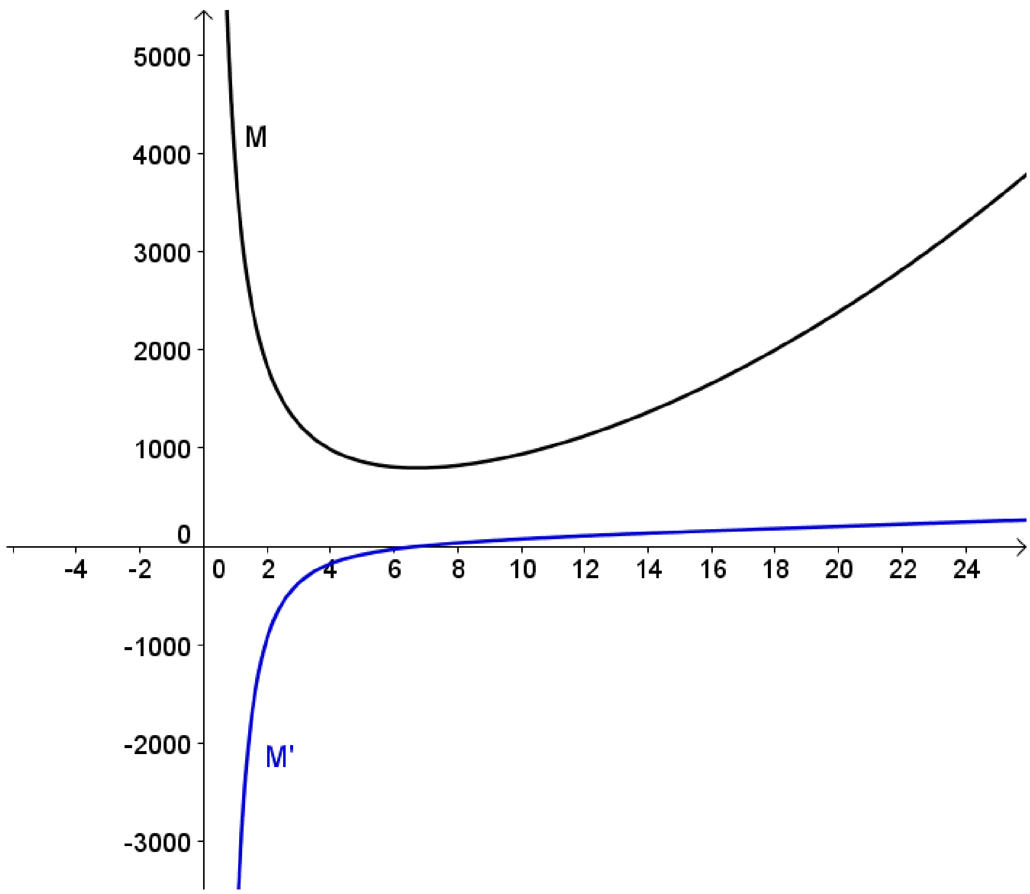
Wieder bezeichnen wir die Höhe der Verpackung mit h, die in diesem Fall $19{,}5$ cm ausmacht. Diese Verpackung weist, wie schon erwähnt, keine quadratische, sondern eine rechteckige Grundfläche auf. Eine der beiden Rechtecksseiten bezeichnen wir mit a, die andere mit $s{\cdot}a$. Durch Abmessen der einzelnen Seiten kann s bestimmt werden: $a=5{,}8$ cm, $s{\cdot}a=9$ cm $\Rightarrow$ $s=\frac{9}{5{,}8}=1{,}55$. Man sieht, dass s der Verhältniszahl des goldenen Schnitts schon sehr nahe kommt. Auch $\frac{a}{2}=2{,}9$ cm kann eingezeichnet werden. Stellen wir uns dazu vor, wie die Verpackung auseinander gefaltet wird und das Faltnetz entsteht. Die Seite a wird dabei „geteilt". Auch in diesem Fall müssen die Kanten miteinander verklebt werden, wodurch ein $0{,}8$ cm breiter Rand an drei Seiten (im Faltnetz schwarz eingezeichnet) benötigt wird. Um den Materialverbrauch zu bestimmen, berechnen wir den Flächeninhalt des Faltnetzes: Das zu berechnende Rechteck ist $30{,}4$ cm lang und $26{,}9$ cm breit. Somit liegt der Materialverbrauch bei $817{,}8$ cm². An der Stelle fällt auf, dass bei dieser Verpackung sogar noch weniger Material gebraucht wird, als bei jener mit quadratischer Grundfläche. Wir wollen wissen, ob es theoretisch möglich ist, noch weniger Material zu verbrauchen. Welche Werte sind optimal? Der Materialverbrauch kann bestimmt werden durch:

$$M(a,h)=(2\cdot a+2\cdot 1{,}55\cdot a+0{,}8)\cdot\left(2\cdot 0{,}8+2\cdot\frac{a}{2}+h\right)=1{,}28+8{,}96\cdot a+5{,}1\cdot a^2+0{,}8\cdot h+5{,}1\cdot a\cdot h$$

Damit der Materialverbrauch nur noch von einer Variable abhängt, ersetzen wir eine Variable durch die andere. Dazu berechnen wir das Volumen: $V = a \cdot 1{,}55 \cdot a \cdot h = 1{,}55 \cdot a^2 \cdot h \approx 1017$ cm³. Hier stellen wir sogar fest, dass etwas mehr als 1L in die Verpackung passen würde. Durch umformen erhalten wir $h = \frac{1017}{1{,}55 \cdot a^2}$.

Dies setzt man nun in die obige Formel des Materialverbrauchs $M(a,h)$ ein, wodurch dieser nur noch von einer Variable, nämlich a abhängig ist.

$$M(a) = 1{,}28 + 8{,}96 \cdot a + 5{,}1 \cdot a^2 + \frac{524{,}9}{a^2} + \frac{3346{,}3}{a}$$



Bilden wir die erste Ableitung und setzen diese Null, so erhalten wir Kandidaten für mögliche Extrema:

$$M'(a) = 8{,}96 + 10{,}2 \cdot a - \frac{1049{,}8}{a^3} - \frac{3346{,}3}{a^2}$$

Mithilfe eines CAS gelangt man zur Lösung $a=6{,}7$ cm. Um zu überprüfen, ob es sich wirklich um das Minimum handelt, berechnen wir die Randwerte. Dazu betrachten wir die Grenzwerte der Funktion $M(a)$, wenn die Seite a gegen Null beziehungsweise Unendlich strebt:

$$\lim_{a\to 0} M(a) = \lim_{a\to 0}\left(1{,}28 + \underbrace{8{,}96\cdot a}_{\to 0} + \underbrace{5{,}1\cdot a^2}_{\to 0} + \underbrace{\frac{524{,}9}{a^2}}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{3346{,}3}{a}}_{\to\infty}\right) = \infty$$

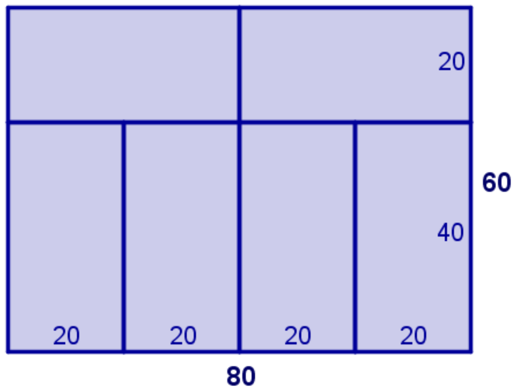
$$\lim_{a\to \infty} M(a) = \lim_{a\to \infty}\left(1{,}28 + \underbrace{8{,}96\cdot a}_{\to \infty} + \underbrace{5{,}1\cdot a^2}_{\to \infty} + \underbrace{\frac{524{,}9}{a^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{3346{,}3}{a}}_{\to 0}\right) = \infty$$

Der berechnete Wert $a=6{,}7$ cm ist also wirklich die Minimumstelle der Funktion M(a), da die Funktion an den Rändern gegen ∞ strebt. Die optimale Höhe und die andere Seite der rechteckigen Grundfläche können bestimmt werden. Man erhält $h=14{,}6$ cm und $1{,}55\cdot a=10{,}4$ cm. Der optimale Materialverbrauch liegt demnach bei $M(6{,}7)=801{,}4$ cm². Dieser Wert weicht vom tatsächlichen um etwa 16 cm² ab. Der prozentuelle Mehrverbrauch liegt bei $\frac{M(5{,}8)-M(6{,}7)}{M(6{,}7)} = \frac{817{,}8-801{,}4}{801{,}4} = 0{,}0204 \approx 2\%$. Diese Abweichung wird in Kauf genommen, weil auch noch andere Faktoren als die Minimierung des Materialverbrauchs eine wesentliche Rolle spielen:

Hätte die Milchpackung wirklich die Maße 6,7x10,4x14,6 cm, entstehen wieder neue Probleme. So wäre eine geschickte Lagerung in der Kühlschranktür nicht mehr möglich. Beim Vermessen meiner Kühlschranktür habe ich bemerkt, dass diese Milchpackung– wenn überhaupt – nur ganz knapp hineinpassen würde:

Gibt es Kühlschranktüren, in die diese Milchverpackung hineinpasst? An dieser Stelle könnte man die durchschnittliche Tiefe einer Kühlschranktür bestimmen. Dazu können die SchülerInnen „ihre“ Kühlschranktür zu Hause vermessen. Aus diesen Daten wird dann der Mittelwert berechnet. Somit schafft man auch eine Verbindung zu anderen Bereichen der Mathematik, wie etwa der Statistik. Wie man sieht, sind der Phantasie keine Grenzen gesetzt.
Nicht nur bei der Lagerung im Kühlschrank, sondern auch beim Transport und im Verkauf würden Probleme auftreten. Werfen wir dazu einen Blick in den Supermarkt:

Üblicherweise werden mehrere Milchpackungen (hier 12 Stück) in einen Karton gepackt. Diese Kartons werden dann auf einer Palette gestapelt und können so Platz sparend transportiert und gelagert werden.
Rechnet man mit der tatsächlichen Größe der Milchpackung (also mit einer Grundfläche von etwa 6x9 cm), so ergeben sich für einen Karton die ungefähren Maße 20x40 cm. Auf obigem Bild kann man gut erkennen, wie die Kartons in einer „Ebene“ auf der Palette geschlichtet sind:



Die Kartons passen also lückenlos auf eine kleine Normpalette (60x80 cm). Aber auch große Normpaletten (80x120 cm) könnten problemlos verwendet werden. Dadurch sind der Transport und die Lagerung kein Problem. An dieser Stelle können wir an Lagerhallen, vorgesehene Plätze im Supermarkt oder Produktionsmaschinen denken, die schon seit Jahrzehnten auf diese Normmaße zugeschnitten werden. Die „optimale“ Milchpackung hingegen würde nicht auf solche Paletten passen, wodurch also auch bezüglich des Transports Probleme entstehen würden.
Man kann also sagen, dass für die Hersteller nicht nur der geringste Materialverbrauch zählt. Die Milchpackung muss auch manchen Gegebenheiten, wie etwa den Maßen eine Kühlschranktür, „angepasst“ werden.

Man könnte sogar noch einen Schritt weiter gehen: Wenn die Verpackung an gar keine Form gebunden wäre, so würde sich bei der Kugel der minimale Materialverbrauch ergeben. Da ein Liter hineinpassen soll, ergibt sich der Radius aus dem Volumen: $1000 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ somit ist $r = \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 3}{4 \cdot \pi}} = 6{,}2$ cm. Der Materialverbrauch lässt sich leicht errechnen: $M(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \approx 483$ cm². Durch diese Verpackung bräuchte man weniger Karton und auch die Umwelt wird nicht so stark belastet, weil auch weniger Müll anfällt. Warum sind solche Verpackungen nicht Gang und Gebe? Was spricht gegen diese Art der Verpackung? Solche Fragen geben wieder Raum für individuelle Erklärungen und Theorien. Durch die kugelförmige Bauweise sind beispielsweise eine Platz sparende Lagerung (im Kühlschrank aber auch in den Geschäften), eine vernünftige Handhabung und ein ökonomischer Transport kaum möglich. Gäbe es wirklich solche Milchpackungen, dann könnte man sich die Frage stellen, wie man die Kugeln schlichten müsste, um den Raum am effektivsten auszufüllen. An dieser Stelle könnte man sogar auf die Kristallsysteme in der Chemie eingehen. Das Aussehen einer Verpackung bestimmen sicherlich auch die Produktionsmaschinen, die zurzeit eben hauptsächlich quaderförmige Milch- oder Saftverpackungen produzieren.

Bei diesem Beispiel liegt das Augenmerk zum einen auf der individuellen Entfaltung und Selbstständigkeit der SchülerInnen. Zum anderen wird auch Wert auf die Orientierung an fundamentalen Ideen gelegt. Räumliches Denken wird geschult, die Milchpackung wird vermessen und durch die Zusatzfrage (*siehe S. 110*) wird auch auf Änderungsraten verstärkt eingegangen.
Auch bei diesem Beispiel findet eine Vernetzung mit der Geometrie statt. Weiters wird den SchülerInnen die Mengeneinheit „1 Liter“ wieder vor Augen geführt. Es kann sicherlich nicht schaden, wenn wiederholt wird, dass 1 L = 1 dm³ = 1000 cm³.
Ich denke, dass dieses Beispiel auch einen Beitrag zum Aufbau der Grundvorstellungen liefert. Durch die Fragestellung nehmen die SchülerInnen die Rolle der Mathematik in unserer Welt besser wahr, als wenn nur nach dem volumsgrößten Quader gefragt wird. Außerdem setzen sich die SchülerInnen auch mit außermathematischen Problemen, wie etwa dem Suchen von Erklärungen, warum manche Verpackungen nicht in Geschäften zu finden sind oder warum rein rechnerisch gar kein Liter in manche Verpackungen passen dürfte, auseinander. Solche Fragen halte ich für sehr wichtig, da die SchülerInnen lernen zu argumentieren und Erklärungen für alltägliche Phänomene zu finden. Die Rolle der Mathematik in der Umwelt wird immer bewusster wahrgenommen, je lebensnäher die Beispiele sind und je intensiver die Aufgaben mit der Lebenswelt der SchülerInnen vernetzt werden.

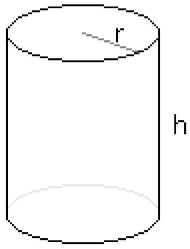
Folgendes Beispiel wird in Anlehnung an *Analysis verständlich unterrichten* (S. 170-173, S. 199-202) besprochen. Wir folgen den vier Schritten des Modellbildungskreislaufes (*siehe S. 6*):

Beispiel 6: Die optimale Konservendose

Du bist Produktdesigner in einer Firma, die Suppen verkauft. Da du das Produkt (1L Tomatensuppe) so günstig wie möglich verkaufen willst, stellst du dir die Frage, welche Form und welche Abmessungen deine Verpackung haben muss, damit der Materialverbrauch minimal ist.

Im ersten Schritt übertragen wir die reale Situation in ein reales Modell. Um am Produkt mehr verdienen zu können, müssen die Kosten für Verpackung möglichst gering gehalten werden. Das reale Modell wird anschließend in das mathematische Modell übertragen. Dazu modellieren wir die Dose mit einem Zylinder. Also stellt sich die Frage, bei welchen Abmessungen (Radius, Höhe) ein Zylinder mit dem Volumen 1L minimale Oberfläche besitzt.

Wir versuchen das Problem innermathematisch zu Lösen:

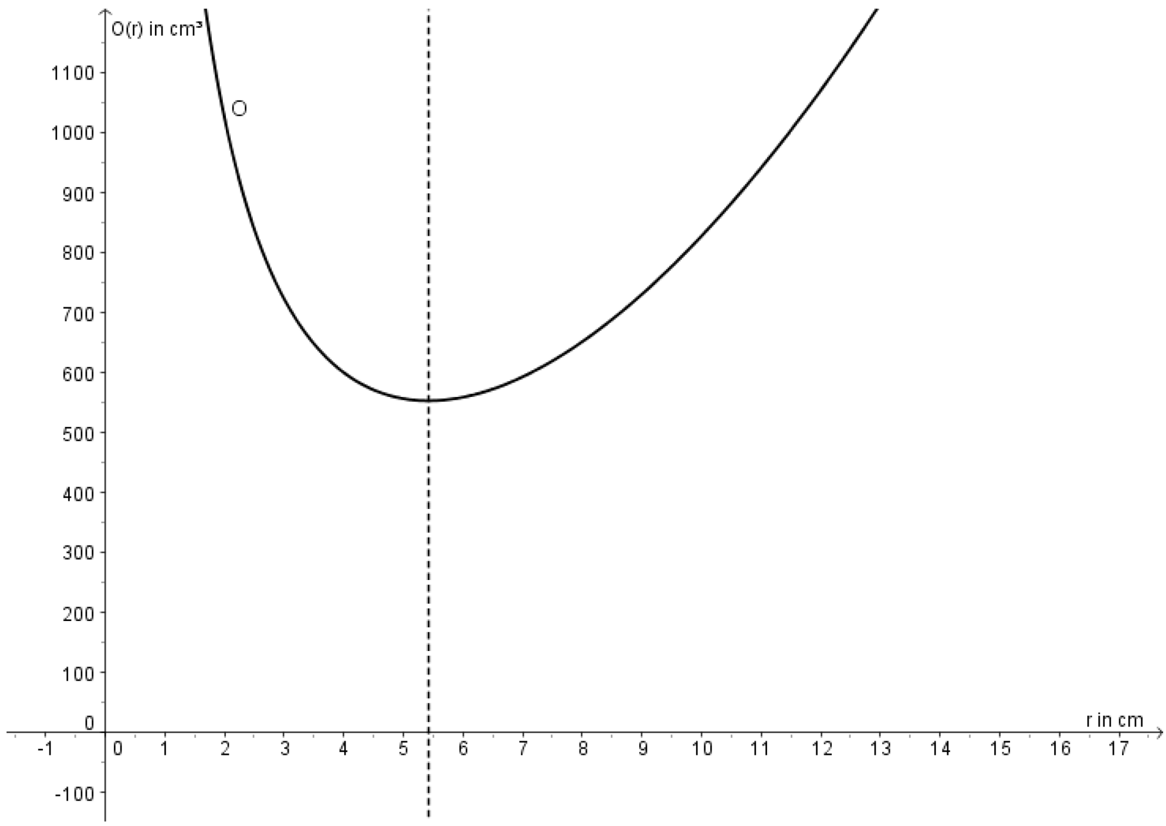


Die Oberfläche $O(r,h) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ soll minimal werden. Nach Elimination der Höhe h über die Nebenbedingung $\pi \cdot r^2 \cdot h = 1000$ (Radius r und Höhe h in cm) erhält man die Zielfunktion $O(r) = 2 \cdot \left(\pi \cdot r^2 + \frac{1000}{r} \right)$ wobei $r>0$.

Die erste Möglichkeit besteht darin das Ergebnis auf empirisch-numerischem Wege zu bestimmen:

Wenn r immer größer wird, so nimmt der Summand πr^2 zu, der Summand $\frac{1000}{r}$ nimmt aber ab. Somit ist es nicht so einfach zu erkennen, für welchen Radius die Oberfläche minimal ist. Auch Überlegungen wie diese sollten im Unterricht Raum finden, zumal die Lösung nicht offensichtlich ist.

Um das gesuchte Minimum ausreichend genau bestimmen zu können, zeichnen wir den Grafen $O(r)$ mit einem Funktionenplotter (GeoGebra) und lesen den gesuchten Radius ab:



Das gesuchte Minimum liegt bei $r_{min} \approx$ 5,4 cm mit zugehöriger Höhe $h_{min} \approx$ 10,9 cm. Also ist der optimale Zylinder näherungsweise genauso hoch wie breit. Um genaue Werte zu erhalten, wählt man die zweite Möglichkeit (*siehe unten*).
Wie man sieht, kann auch ohne Ableitungsbegriff die Aufgabe gelöst werden. Durch das Plotten der Funktion wurde die Bedeutung des theoretischen Kalküls in den Hintergrund gestellt.

Die zweite Möglichkeit bedient sich der Differentialrechnung und wir verwenden unseren leistungsfähigen Ableitungskalkül:

$$O'(r) = 2 \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot r - \frac{1000}{r^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\min} = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2 \cdot \pi}} = 5{,}4\,\text{cm}$$

Bei diesem Beispiel handelt es sich um eine unberandete Extremwertaufgabe. Der Nachteil hier ist, dass man die Ränder nicht einfach einsetzen kann, um herauszufinden, ob der berechnete Wert nun wirklich ein Minimum ist. Wir betrachten die Grenzwerte der Funktion $O(r)$, wenn der Radius gegen Null beziehungsweise Unendlich konvergiert: $\lim_{r \to 0} O(r) = \infty$ und $\lim_{r \to \infty} O(r) = \infty$

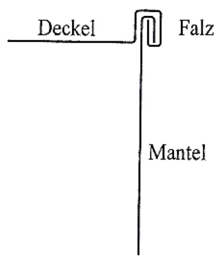
Die beiden Grenzwerte gehen gegen unendlich, daher muss an der berechneten Stelle das Minimum liegen. Das heißt für r_{min} ist die Oberfläche der Dose minimal. Man sieht, dass hier die zweite Ableitung nicht gebraucht wird.

Die zugehörige Höhe h_{min} ist dann

$$h_{\min} = \frac{1000}{\pi \cdot r_{\min}^2} = \frac{1000}{\pi \cdot \left(10 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2 \cdot \pi}}\right)^2} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2 \cdot \pi}}}{\pi \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi}} = 2 \cdot 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2 \cdot \pi}} = 2 \cdot r_{\min}$$

Also ist die Höhe der optimalen Dose wirklich exakt so groß wie der Durchmesser. Die Rechnung hat sich dahingehend gelohnt, dass theoretische Überlegungen angestellt wurden, welche für Verständnis und Einsicht sehr wichtig sind. Im Idealfall werden diese theoretischen Überlegungen mit anschaulichen Mitteln (z. B. dem Graf) verknüpft.
Ich denke, dass vermehrt darauf geachtet werden sollte, die Beziehung zwischen dem empirisch-numerischen und dem theoretischen Standpunkt in den Vordergrund zu stellen. Leider wird in der Praxis oft ausschließlich der zweite Lösungsweg bevorzugt. Nun wieder zurück zu unserem Beispiel.

Nun wollen wir natürlich wissen, ob unser Modell auch in der Praxis verwendet wird. Wir suchen die Konfrontation mit der Realität und gehen in den Supermarkt. Dort bemerken wir, dass gar keine Konservendose zu finden ist, die genauso hoch wie breit ist. Was ist hier los? Entweder den anderen Dosenherstellern ist der Materialverbrauch egal oder irgendetwas stimmt mit unserem Modell nicht. Wir versuchen das Modell in einem zweiten Anlauf noch zu verfeinern:
Bei näherem Hinsehen fällt uns auf, dass zum Zusammenfügen von Mantel, Boden und Deckel Überstände benutzt werden. Nach Aussage des Herstellers rechnen wir mit folgenden Zuschlägen: in der Höhe 1,0 cm (je 5 mm für Boden und Deckel), im Durchmesser 1,5 cm (an beiden Seiten 0,75 cm) und in der Mantellänge 0,2 cm.
Erneut versuchen wir das Problem innermathematisch zu lösen:



Notwendige Überstände

Der Materialverbrauch in Abhängigkeit von Radius r und Höhe h (in cm) der Dose ist dann:

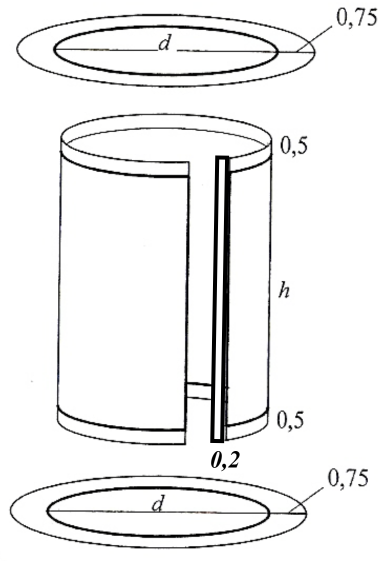
$$(r+0,75)^2 \cdot \pi$$

+

$$(2 \cdot r \cdot \pi + 0,2) \cdot (h + 2 \cdot 0,5)$$

+

$$(r+0,75)^2 \cdot \pi$$



Also definieren wir eine neue Funktion $\widetilde{O}$ und der der Materialverbrauch ist gegeben durch $\widetilde{O}(r,h) = 2 \cdot (r+0,75)^2 \cdot \pi + (2 \cdot r \cdot \pi + 0,2) \cdot (h+1)$. Eine Variable kann wieder durch die Nebenbedingung $r^2 \cdot \pi \cdot h = 1000$ eliminiert werden. Somit ist der Materialverbrauch $\widetilde{O}(r) = 2 \cdot (r+0,75)^2 \cdot \pi + \frac{2000}{r} + \frac{200}{r^2 \cdot \pi} + 2 \cdot r \cdot \pi + 0,2$ wobei $r>0$.

Nun sucht man noch die Nullstelle der ersten Ableitung $\widetilde{O}'(r) = 4 \cdot (r+0,75) \cdot \pi - \frac{2000}{r^2} - \frac{400}{r^3 \cdot \pi} + 2 \cdot \pi$ (mithilfe eines CAS). Dieses liefert das Ergebnis $r_{opt} \approx 5,06$ cm. Somit ist die Höhe $h_{opt} \approx 12,43$ cm. Die Dose ist also deutlich höher als breit.

Wieder konfrontieren wir unser Modell mit der Realität. Wir stellen nun fest, dass die berechneten Abweichungen nicht mehr wesentlich von den realen abweichen. Durch die Verfeinerung des Modells sind wir der Wirklichkeit näher gekommen. Aber halt! Vielleicht sind für deinen Chef andere Gesichtspunkte bedeutsamer. Wie zum Beispiel die Handlichkeit der Dose, die Ästhetik der Form, die Beschränkung durch den Doseninhalt. (z.B. Würstchen), die Maße der gelieferten Bleche oder die Lagerung in Regalen usw.. Wie man sieht können auch andere Faktoren eine wichtige Rolle spielen.

Ähnlich wie schon beim Beispiel der optimalen Milchverpackung können die SchülerInnen selbst aktiv mitarbeiten und sich individuell entfalten, indem sie beispielsweise verschiedene Konservendosen in unterschiedlichen Supermärkten vermessen und anschließend feststellen, wie stark die berechneten von den

tatsächlichen Werten abweichen. Da Dosen ein alltägliches Produkt für SchülerInnen sind, kann auch jeder von zu Hause eine leere Dose mitnehmen, die dann gemeinsam mit den anderen KlassenkameradInnen unter die Lupe genommen werden kann. Je authentischer, desto besser. Deswegen würde ich die SchülerInnen selbst die Dosen mitnehmen lassen. Das fördert die Selbstständigkeit und Verantwortung gegenüber einer Gruppe.
Der Modellbildungskreislauf wird nicht nur ein Mal durchlaufen, wodurch sich auch das Ergebnis verbessert und realitätsnäher wird. Messen und räumliches Denken spielen auch in diesem Beispiel eine große Rolle. Wie auch bei den vorigen Beispielen besteht eine starke Vernetzung zur Geometrie.
Auch die Grundvorstellungen werden durch solche alltäglichen Beispiele stärker betont. Den SchülerInnen wird vor Augen geführt, dass die Mathematik einen begrenzten, aber relevanten Nutzen haben kann. Natürlich könnte man als Lehrperson einfach nur fragen, bei welchen Abmessungen ein Zylinder minimale Oberfläche hat. Das würde zwar viel Zeit ersparen, weil kein Diskussionsbedarf besteht und dadurch keine zeitraubenden Fragen gestellt werden (außer: „wozu brauchen wir das einmal?"), aber diese Methode zieht, abgesehen von der Sinnfrage, weitere Nachteile mit sich. Einer davon ist, dass man nur bis zum ersten Ergebnis – genauso hoch wie breit – kommt. Weiter zu fragen würde keinen Sinn machen. Außerdem wird auch kein Bezug zur Lebenswelt der SchülerInnen hergestellt und dadurch fragen sich die SchülerInnen – meiner Meinung nach auch zu Recht – wozu sie diese Aufgabe lösen müssen.

Im folgenden Beispiel versuchen wir, andere Lösungsvarianten – im Hinblick auf eine stärkere Betonung der Geometrie – in den Vordergrund zu stellen. Die Aufgabe wurde aus der Vorlesung *Schulmathematik Geometrie* (SS 08), die von Stefan Götz gehalten wurde, entnommen:

Beispiel 7: Mathe und Fußball

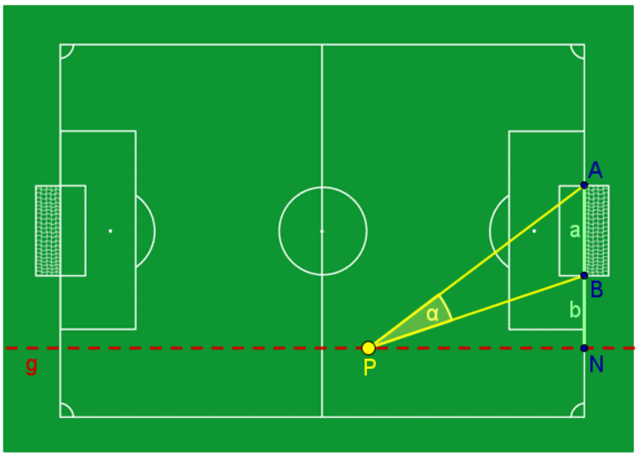
Um eure Fußball-Schulmannschaft auf Vordermann zu bringen, beschließt der Trainer den Spielern eine Mathematik Nachhilfestunde zu erteilen. Was hat Mathematik mit Fußball zu tun?

Angenommen der rechte Stürmer läuft mit dem Ball Richtung Tor. Da genau vor dem Tor Spieler und Tormann der gegnerischen Mannschaft das Tor verteidigen, beschließt der Spieler nicht direkt auf das Tor zuzulaufen. Man könnte sagen, dass sich der Spieler auf einer „imaginären Linie" bewegt, die parallel zur Seitenlinie verläuft. Dann versucht er von einer seitlichen Position ein Tor zu schießen. Damit sich die Spieler etwas vorstellen können, zeigt euch der Trainer folgendes Bild:

(Quelle: http://www.kjf-sm.de/layout.php4?URL=/aktivitaeten/2006/sport2006.htm (09.04.09))

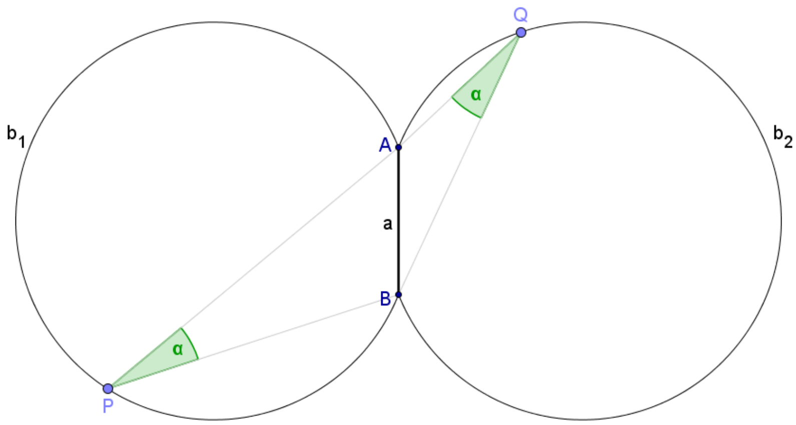
Welche Schussposition ist die „optimale"?

Die Schwierigkeit besteht hier beim Idealisieren und Mathematisieren der Situation. Zunächst nehmen wir an, dass sich der Spieler auf einer „Linie" bewegt. Diese Linie bezeichnen wir als Gerade g. Den Spieler selbst „reduzieren" wir auf den Punkt P. Wir können folgendes mathematisches Modell anfertigen:



(Quelle Fußballfeld: http://www.footballfuture.at/files/img/concept-pics/fussballfeld.gif (09.04.09))

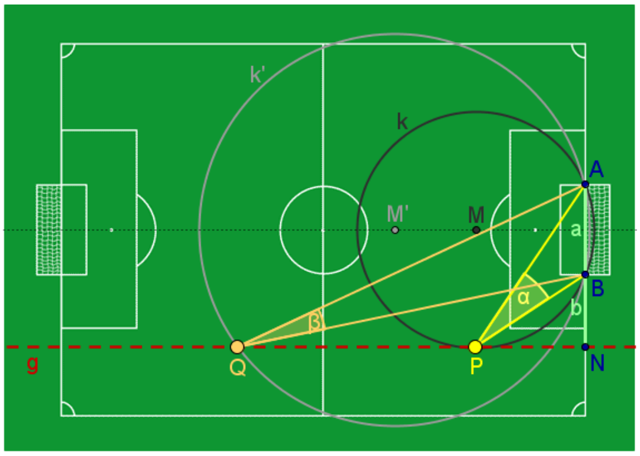
Wenn der Punkt P verschoben wird, sieht man, dass sich der Winkel α ebenfalls ändert. Steht der Spieler P weit weg vom Tor, ist auch der Winkel α klein. Läuft der Spieler Richtung Tor, wird der Winkel immer größer, bis er schließlich an den gesuchten Punkt gelangt, an dem der größte Schusswinkel vorliegt. Läuft er an diesem Punkt vorbei, nimmt der Winkel wieder ab, bis er schließlich im Punkt N den Wert Null annimmt.
Um den Punkt mit der optimalen Schussposition zu finden, stellen wir uns folgende Frage: Wo liegt die Menge aller Punkte, von denen aus man eine bestimmte Strecke (hier die Torbreite a) unter einem bestimmten Winkel sieht? Um diese Frage zu beantworten, blicken wir in die 4. Klasse zurück. Diese Punkte befinden sich alle auf einem Kreis – genauer gesagt auf dem Kreisbogenpaar $b = b_1 \cap b_2$.



Angenommen wir befinden uns auf dem Fußballfeld und die Strecke a ist die Breite des Tores. Dann sieht man das Tor immer unter dem selben Winkel α, egal auf welchem Punkt ($\in b_1 \cap b_2$) man gerade steht. Der Sehwinkel ist also immer gleich groß. Dies kann mithilfe des *Peripheriewinkelsatzes* begründet werden:

> *Peripheriewinkel sind entweder gleich groß oder supplementär (das heißt sie ergänzen einander auf 180°). Sie sind stets halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.*

Suchen wir nun unter allen Kreisen jenen, bei dem der Sehwinkel α am Größten ist. Betrachten wir die Situation am Fußballfeld. Um herauszufinden, an welchem Punkt die Schussposition optimal ist, zeichnen wir zwei Kreise k und k' ein:



Die Mittelpunke M und M' liegen dabei auf der Streckensymmetrale von AB, die parallel zu g (=imaginäre Linie, auf der sich der Spieler befindet) verläuft. Ansonst würden die Kreise nicht durch die Punkte A und B gehen. Der Radius des kleineren Kreises k beträgt $\frac{a}{2}+b$. Der Radius des größeren Kreises k' ist größer als $\frac{a}{2}+b$.

Bei welchem Kreis ist der Sehwinkel am Größten? Unterscheiden wir dazu drei Fälle:

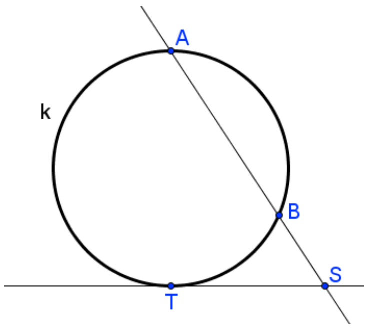
- Hat der Kreis einen kleineren Radius als $\frac{a}{2}+b$, so berührt der Kreis die Linie auf der sich der Spieler befinden soll nicht. Somit werden diese Kreise ausgeschlossen.
- Der Kreis k berührt die Gerade g in genau einem Punkt P und hat den Radius $\frac{a}{2}+b$. Den zugehörigen Sehwinkel bezeichnen wir mit α. Bevor wir auf diesen Fall genauer eingehen, betrachten wir den dritten Fall:
- Der Kreis k' schneidet die Gerade g in zwei Punkten und der Radius ist größer als $\frac{a}{2}+b$. Da die beiden Schnittpunkte auf demselben Kreisbogen liegen, sind ihre Sehwinkel gleich groß. Daher genügt es, sich mit einem Punkt Q zu befassen. Den zugehörigen Sehwinkel bezeichnen wir mit β.

Nun beschäftigen wir uns mit der Frage, welcher Winkel größer ist? Der Sehwinkel α oder β?

Dazu verwenden wir wieder den Peripheriewinkelsatz. Da der Kreis k' einen größeren Radius hat als der Kreis k, ist auch der Zentriwinkel $\angle$AM'B kleiner als $\angle$AMB. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt nun, dass β halb so groß ist, wie der Zentriwinkel $\angle$AM'B und genauso, dass α halb so groß ist, wie der Zentriwinkel $\angle$AMB. Da nun der Zentriwinkel $\angle$AM'B kleiner war als $\angle$AMB, ist auch $\beta<\alpha$.

Dadurch scheiden auch Kreise mit einem größeren Radius als $\frac{a}{2}+b$ aus. Also ist der Punkt P wirklich der optimale Schusspunkt mit dem maximalen Winkel α auf das Tor.

Um die Entfernung von der Toroutlinie bestimmen zu können verwenden wir den *Sekanten-Tangenten-Satz*:



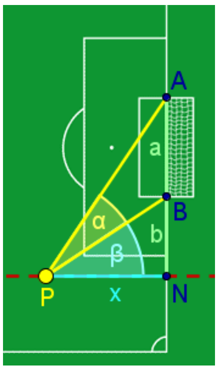
Gegeben ist ein Kreis k mit einer Tangente und einer Sekante, die einander in einem Punkt S außerhalb des Kreises schneiden. Bezeichnet man den Berührpunkt der Tangente als T die Schnittpunkte der Sekante mit dem Kreis als A und B, so gilt:

$\overline{ST}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$

Legen wir diesen Satz auf unsere Situation um. Dazu bezeichnen wir den Abstand zur Toroutlinie (also $\overline{PN}$) als x. Dann ist $x^2 = (a+b) \cdot b$ und $x = \sqrt{(a+b) \cdot b}$.

Bei dieser Lösungsvariante ist es unbedingt notwendig, dass die SchülerInnen Sicherheit und Übung im Umgang mit geometrischen Begriffen und Sätzen haben. Damit die SchülerInnen die Relevanz von Peripheriewinkelsatz und Sekanten-Tangenten-Satz in der Welt begreifen, kann dieses Beispiel auch an geeigneter Stelle schon vor der Differentialrechnung behandelt werden.

Eine andere Möglichkeit dieses Beispiel zu lösen bedient sich der Winkelfunktionen und Additionstheoreme:



Da $\tan(\alpha+\beta) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a+b}{x}$ und $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ folgt $\frac{a+b}{x} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$. Weiters ist $\tan\beta = \frac{b}{x}$. Also setzen wir ein und formen um:

$$(a+b) \cdot \left(1 - \frac{b}{x} \cdot \tan\alpha\right) = x \cdot \tan\alpha + b$$

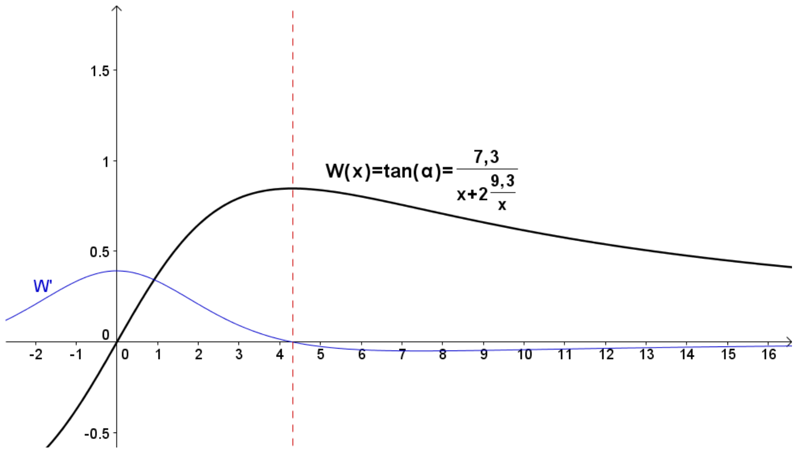
$$a - \frac{a \cdot b}{x} \cdot \tan\alpha + b - \frac{b^2}{x} \cdot \tan\alpha = x \cdot \tan\alpha + b$$

$$x \cdot \tan\alpha + \frac{a \cdot b}{x} \cdot \tan\alpha + \frac{b^2}{x} \cdot \tan\alpha = a$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{x + b \cdot \left(\frac{a+b}{x}\right)}$$

Der Winkel α wird dann maximal, wenn $\tan\alpha$ maximal wird. Das ist dann der Fall, wenn der Bruch maximal wird, was wiederum bedeutet, dass der Nenner minimal sein muss. Der Nenner ist dann minimal, wenn die beiden Ausdrücke einander gleich sind, also: $x = b \cdot \left(\frac{a+b}{x}\right) \;\Rightarrow\; x^2 = b \cdot (a+b) \;\Rightarrow\; x = \sqrt{b \cdot (a+b)}$

Angenommen, wir befinden uns tatsächlich auf einem Fußballfeld und der Spieler läuft 2 Meter neben dem Tor, dann ist $b=2$ m und die Torbreite $a=7,3$ m. Die Funktion kann gezeichnet und die Extremstelle abgelesen werden:



Die Funktion $W(x)$ und der Winkel α nehmen den größten Wert an, wenn der Spieler etwa 4 Meter vor der Toroutlinie auf das Tor schießt. Durch Einsetzen erhält man ein genaueres Ergebnis: Der Spieler sollte $x \approx \sqrt{2 \cdot (9{,}3)} \approx 4{,}3$ Meter vor der Toroutlinie schießen.

Schließlich kann das Ergebnis auch noch mit der Ableitung begreiflich gemacht werden. Wir berechnen mithilfe eines CAS die erste Ableitung $W'(x) = -\frac{a \cdot \left(1 - \frac{b \cdot (a+b)}{x^2}\right)}{\left(\frac{b \cdot (a+b)}{x} + x\right)^2}$, die bei Nullsetzen das schon bekannte Ergebnis $x = \sqrt{b \cdot (a+b)}$ liefert.

Diese Aufgabe besticht durch ihre Anwendung im Sport und somit durch ihren Bezug zur Lebenswelt der SchülerInnen. Man sieht, dass auch hier Mathematik eine Rolle spielt. Bei der ersten Lösungsvariante liegt das Augenmerk auf der Vernetzung mit der Geometrie. Sonst so „trockene“ Sätze werden in diesem Beispiel begreifbar gemacht und dadurch lebendiger. Bei der zweiten Lösungsmöglichkeit wird eher theoretisch argumentiert, was aber auf dasselbe Ergebnis führt.

Hier wurde auch zum Aufbau der Grundvorstellungen beigetragen. Man erhält das Ergebnis durch verschiedene Varianten, die wenig kalkülhaftes Denken zulassen. Durch inhaltliches Argumentieren bleibt man nahe am Beispiel. An dieser Stelle muss aber auch erwähnt werden, dass der Peripheriewinkelsatz vielleicht und der Sehnen-Tangenten-Satz höchstwahrscheinlich gar nicht im Unterricht besprochen werden. Ob die beiden Sätze „nur“ wegen diesem Beispiel gemacht werden sollen, ist der Lehrperson überlassen. Ich denke, dass in diesem Beispiel für jeden etwas dabei ist.

Im nächsten Beispiel sollen sich die SchülerInnen in die Lage eines geschäftstüchtigen Hotelbesitzers versetzen:

Beispiel 8: Hotelbesitzer

Du bist stolzer Besitzer eines Hotels. Das Hotel verfügt über 120 Doppelzimmer, die schon seit Monaten ausgebucht sind. Nun denkst du über eine Preiserhöhung nach. Dein unternehmerischer Geist sagt dir, dass pro aufgeschlagenem € zwei Doppelzimmer weniger gebucht werden. Der bisherige Preis betrug 40€ pro Doppelzimmer. Um wie viel kannst du den Preis erhöhen, damit du größtmöglichen Gewinn erzielen kannst?

Die eigentliche Schwierigkeit besteht darin, die differenzierbare Funktion zu bestimmen. Zu diesem Zweck fertigen wir zuerst eine Tabelle an, damit uns das aufstellen der Gewinnfunktion leichter fällt:

Preiserhöhung p	Doppelzimmer z	Gewinn g
0	120	$120 \cdot 40 = 4800$
1	$120 - 2 \cdot 1 = 118$	$118 \cdot (40 + 1) = 4838$
2	$120 - 2 \cdot 2 = 116$	$116 \cdot (40 + 2) = 4872$
3	$120 - 2 \cdot 3 = 114$	$114 \cdot (40 + 3) = 4902$
4	$120 - 2 \cdot 4 = 112$	$112 \cdot (40 + 4) = 4928$
$\cdots$	...	...

27	$120-2\cdot 27=66$	$66\cdot(40+27)=4422$
…	...	...
50	$120-2\cdot 50=20$	$20\cdot(40+50)=1800$
…	...	...
p	$120-2\cdot p$	$(120-2\cdot p)\cdot(40+p)$

Daraus können wir die Zielfunktion bestimmen:

$g(p)=(120-2\cdot p)\cdot(40+p)=4800-80\cdot p+120\cdot p-2\cdot p^2=4800+40\cdot p-2\cdot p^2$

Nun ist die Funktionsgleichung bekannt, mit der die Bestimmung der Extremwerte leichter fällt.

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung, erhalten wir die Kandidaten für mögliche Extremstellen. Also bilden wir die erste Ableitung und setzen sie Null:

$g'(p)=40-4\cdot p=0\Rightarrow p=10$

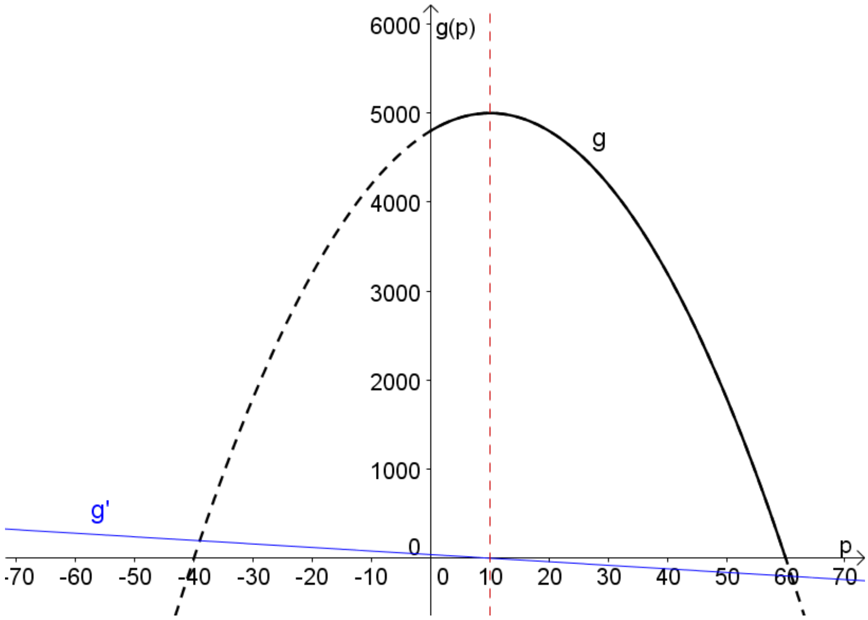
Wir überprüfen, ob bei $p=10$ wirklich das Maximum liegt, indem wir die Randwerte genauer betrachten:

Wird nichts aufgeschlagen, so ist $p=0$ und der Gewinn beträgt $g(0)=4800$ €

Ist $p=60$, werden also 60€ aufgeschlagen, dann werden keine Zimmer mehr gebucht. Daher beträgt der Gewinn $g(60)=0$ €.

Erhöht man den Preis allerdings um $p=10$€, so erwirtschaftet man einen Gewinn von $g(10)=5000$€.

Das kann durch den Grafen verdeutlicht werden:



Man kann das Ganze natürlich auch mit Zielfunktion und Nebenbedingung formulieren. Dabei wäre die Zielfunktion, dass der Gewinn $g(p,z) = (40+p) \cdot z$ maximal werden soll. Die Nebenbedingung ergibt sich aus der Anzahl der gebuchten Doppelzimmer z, die wiederum von der Preiserhöhung p abhängig ist: $z = 120 - 2 \cdot p$. Mithilfe der Tabelle ergibt sich die Gewinnfunktion $g(p)$ meiner Meinung nach von selbst.

Die Symmetrie der Parabel wird noch besser wahrgenommen, wenn man zur Extremwertbestimmung das Aufsuchen des Scheitelpunktes heranzieht. Eine Möglichkeit besteht darin, die Funktion *g(p)* so umzuformen, dass man den Scheitelpunkt ablesen kann: $g(p) = -2 \cdot p^2 + 40 \cdot p + 4800 = -2 \cdot (p-10)^2 + 5000$. Daraus ergibt sich die Lage des Scheitelpunktes *S=(10/5000).*

Eine weitere Möglichkeit die Lage des Extremums zu bestimmen bedient sich ebenfalls der Symmetrie der Parabel. Der Scheitelpunkt liegt immer zwischen den Nullstellen. Also berechnen wir die Nullstellen der Funktion *g(p):* $p_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100+2400} = 10 \pm 50 \Rightarrow p_1 = 60 \wedge p_2 = -40$. Der gesuchte „Mittelpunkt" der Nullstellen und somit x-Wert des Extremums lässt sich leicht berechnen und liegt bei $x = \frac{60-40}{2} = 10$. Der y-Wert kann durch einsetzen in die Funktion berechnet werden: *g(10)=5000*. Auch in diesem Fall erhält man die Lage des Scheitelpunktes *S=(10/5000).*

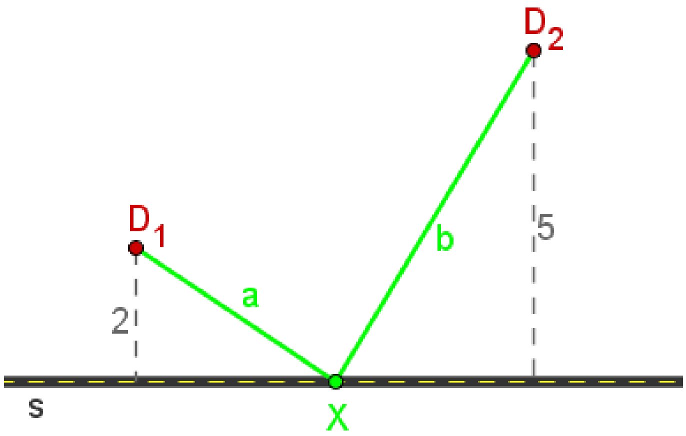
Wieder zielt das Beispiel auf die Relevanz der Mathematik im unserer Welt ab.

Beispiel 9: Umspannwerk

Entlang einer geradlinig verlaufenden Hauptstromleitung soll ein neues Umspannwerk gebaut werden, das zwei nahe liegende Dörfer mit Strom versorgen soll. Die beiden Dörfer liegen (auf der selben Seite) 2 bzw. 5 km Luftlinie von der Hauptstromleitung entfernt. Die Fußpunkte der Lote liegen 6 km weit auseinander. Wo muss nun das Umspannwerk gebaut werden, damit möglichst wenig Material für die Leitungen zu den beiden Dörfern gebraucht wird?

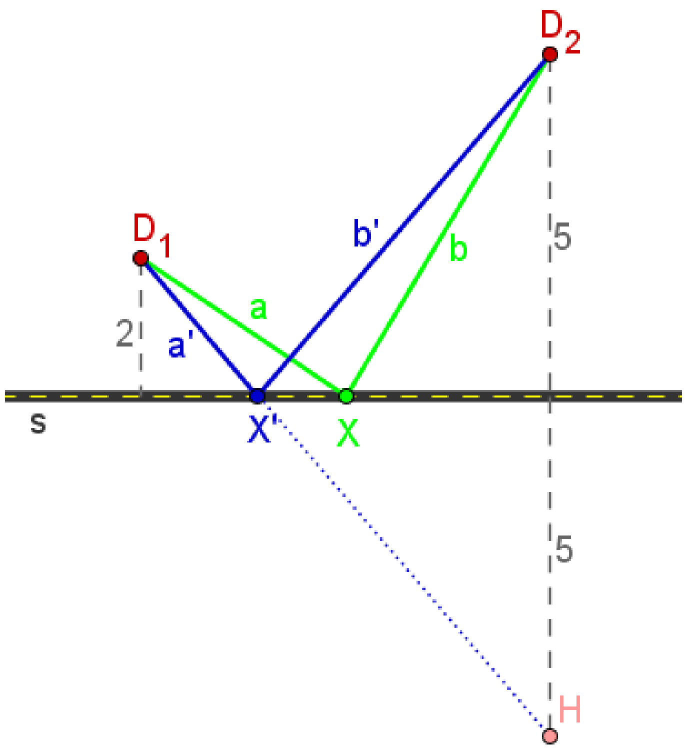
Um die Situation zu verdeutlichen zeichnen wir eine Skizze. Dabei nehmen wir an, dass die Hauptstromleitung s geradlinig verläuft. Wir bezeichnen die Stelle an dem das Umspannwerk gebaut werden soll mit X und die beiden Dörfer mit D_1 und D_2.

Gesucht ist nun jene Stelle X entlang der Hauptstromleitung s, die den Weg a+b so kurz wie möglich macht.



Auch dieses Beispiel lässt sich auf verschiedene Möglichkeiten lösen. Die erste Lösungsvariante bedient sich dem Prinzip von FERMAT bei der Reflexion des Lichtes: *Das Licht nimmt unter allen möglichen Wegen den, für den es die kürzeste Zeit braucht.*

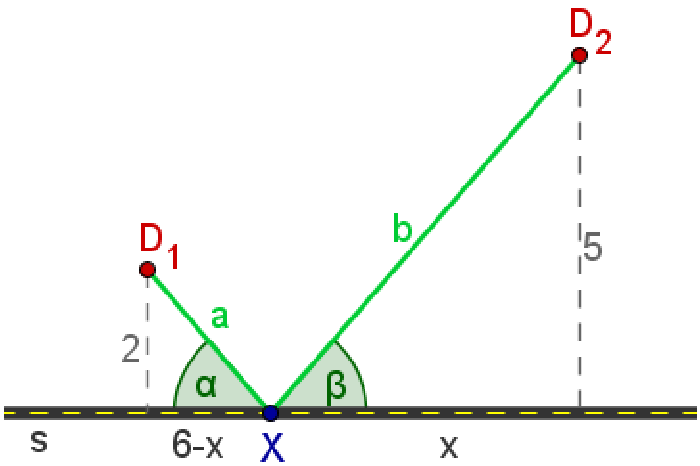
In diesem Fall *konstruieren* wir den optimalen Punkt X'. Stellen wir uns vor, dass die Hauptstromleitung s einen Spiegel darstellt. Um die optimale Position X' an der Straße zu finden, konstruieren wir den Hilfspunkt H. Dieser ist (genauso wie D_2) 5 km von der Straße entfernt. Im nächsten Schritt verbinden wir D_1 mit H. Diese Verbindungslinie schneidet die Gerade s an genau einer Stelle. Somit erhalten wir den gesuchten Punkt X'.



Die Strecke ($|D_1X|+|XD_2|$) ist genauso lang wie ($|D_1X|+|XH|$). Genauso gilt: $|D_1X'|+|X'D_2|=|D_1X'|+|X'H|$. Betrachte nun das Dreieck $\Delta(D_1XH)$. Die Hypotenuse $|D_1H|=|D_1X'|+|X'H|$ ist sicher kürzer als die Summer der beiden Katheten $|D_1X|+|XH|$. Da die Strecke $|D_1H|$ gleich lang ist wie $|D_1X'|+|X'D_2|$, stellt der so erhaltene Punkt X' die optimale Stelle für das Umspannwerk dar. Sollte das Umspannwerk an dieser Stelle gebaut werden, so sind die Verbindungswege so kurz wie möglich, wodurch auch die Kosten und der Zeitaufwand für das Verlegen der Leitungen minimiert werden.

Überspitzt könnte man sagen, dass sich das Licht genauso verhält wie der wirtschaftende Mensch, der bestrebt ist mit minimalem Aufwand an Zeit und Geld einen bestimmten Zweck zu erfüllen. Diese Zeichnung kann allerdings auch als Reflexion eines Lichtstrahls, der von D_1 kommend in X' auf einen ebenen Spiegel trifft und von dort so reflektiert wird, dass er zum Punkt D_2 gelangt, auffassen.

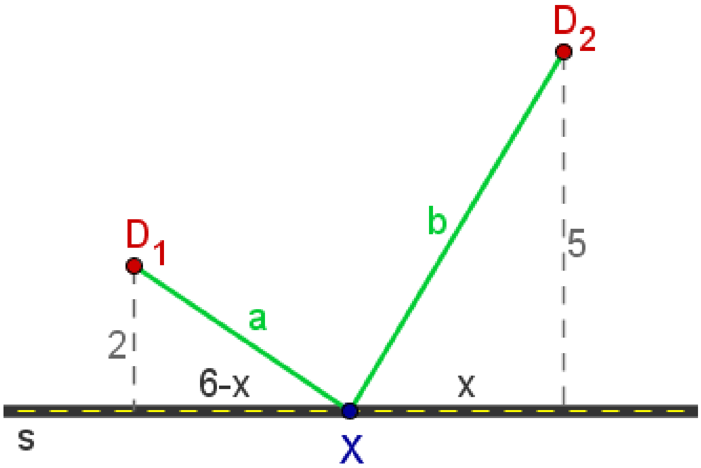
Eine weitere Möglichkeit, bei der der gesuchte Punkt X' *berechnet* wird, besteht darin, das *Reflexionsgesetz* anzuwenden: *Ein Lichtstrahl wird so reflektiert, dass sein Einfallswinkel gleich seinem Ausfallswinkel ist.*
Fertigen wir dazu eine neue Skizze der Situation an:



Wenn der Einfalls- genauso groß, wie der Ausfallswinkel sein soll, also $\alpha=\beta$, so ist auch $\tan(\alpha)=\tan(\beta)$. Da $\tan(\alpha)=\frac{Gegenkathete}{Ankathete}$ kann man auch schreiben: $\frac{2}{6-x}=\frac{5}{x}$.
Löst man diese Gleichung auf, so erhält man das Ergebnis $x=4{,}3$. Das bedeutet, dass das Umspannwerk in einer Entfernung von 4,3 Kilometer vom Lotpunkt von D_2

errichtet werden sollte, damit die Strecke a+b so kurz wie möglich ist und somit für die Leitungen möglichst wenig Material gebraucht wird.

Die dritte Variante bedient sich der Differentialrechnung. Zunächst wird die Wegfunktion aus den vorhandenen Informationen bestimmt. Der Weg a+b soll also minimiert werden.



$$W(x) = a + b = \sqrt{2^2 + (6-x)^2} + \sqrt{x^2 + 5^2} = \left(40 - 12 \cdot x + x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(x^2 + 25\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$W'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(40 - 12 \cdot x + x^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-12 + 2 \cdot x) + \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + 25\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2 \cdot x) =$$

$$= \frac{-12 + 2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{40 - 12 \cdot x + x^2}} + \frac{2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 25}} = -\frac{6 - x}{\sqrt{40 - 12 \cdot x + x^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}}$$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung erhält man

$$\frac{6 - x}{\sqrt{40 - 12 \cdot x + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}}$$

$$(6 - x) \cdot \sqrt{x^2 + 25} = x \cdot \sqrt{40 - 12 \cdot x + x^2}$$

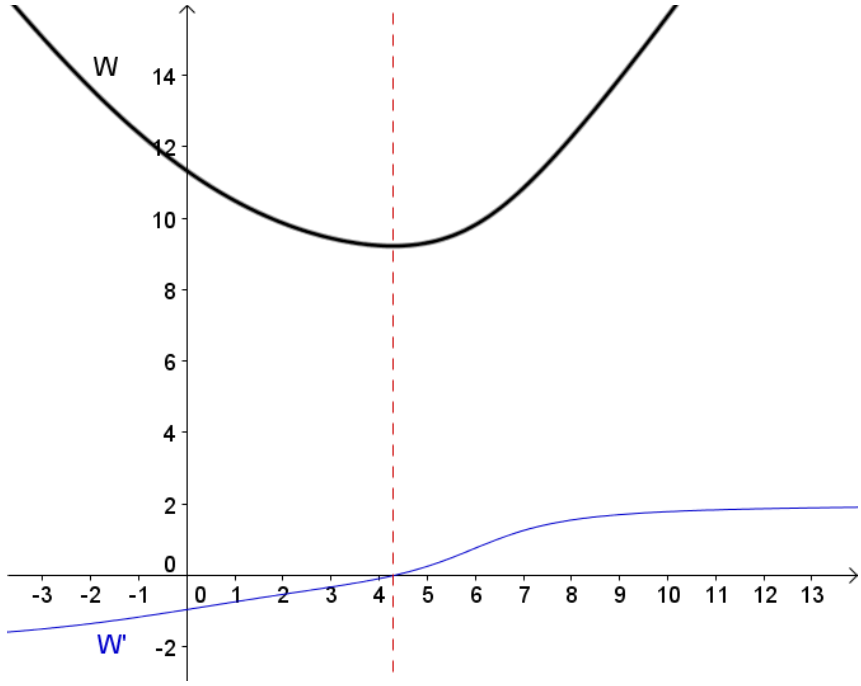
$$(6 - x)^2 \cdot \left(x^2 + 25\right) = x^2 \cdot \left(40 - 12 \cdot x + x^2\right)$$

$$36x^2 - 12x^3 + x^4 + 900 - 300x + 25x^2 = 40x^2 - 12x^3 + x^4$$

$$21x^2 - 300x + 900 = 0$$

Durch lösen der quadratischen Gleichung erhält man zwei mögliche Kandidaten für die Extremstelle: $x_1=4,3$ km und $x_2=10$ km. Da der Abstand zwischen den beiden Lotpunkten nur 6 km beträgt, scheidet die Lösung $x_2=10$ km aus. Bei genauerem Hinsehen, kann man erkennen, dass durch das Quadrieren diese zweite Lösung

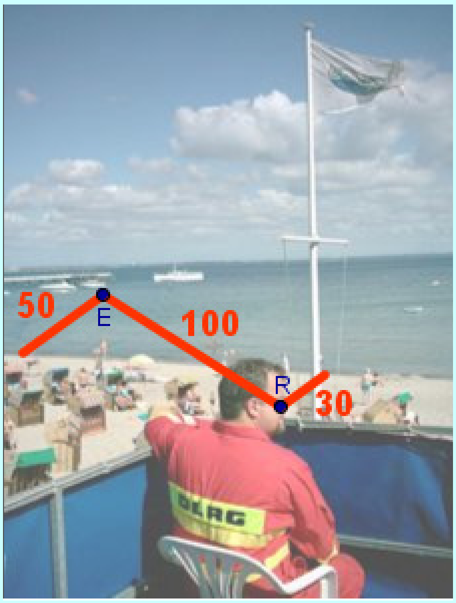
„künstlich erschaffen“ wurde. Die Lösung muss zwischen 0 und 6 liegen. Also kann nur $x_1=4,3$ km die Lösung sein. Um diese Vermutung zu überprüfen, betrachten wir die Randwerte, die an den Stellen $x=0$ und $x=6$ liegen müssen. Dazu berechnen wir $W(0)=11,3$ km, $W(6)=9,8$ km und $W(4,3)=9,2$ km. Wir erkennen, dass die Strecke a+b genau dann minimal wird, wenn das Umspannwerk etwa 4 km vom Lotpunkt von D_2 gebaut wird.



Auch bei diesem Beispiel kann man erkennen, dass in der Realität sicherlich auch andere Faktoren, wie etwa geografische Gegebenheiten, eine wichtige Rolle spielen. Dadurch ist die Anwendungsorientierung nur bedingt wahrzunehmen. Aber ich denke, dass es besser ist, wenn SchülerInnen die Aufgabe in einem anwendungsbezogenen Kontext kennen lernen. Nur dann ist es unumgänglich, dass zuerst die reale Situation in eine mathematische übertragen werden muss. Einer der wichtigsten Schritte bei Modellierungen ist der Rückschluss auf die Realität. Zu diesem Zweck könnte man die Lage von schon bestehenden Umspannwerke genauer untersuchen und den optimalen Punkt bestimmen. Hier kann sowohl eine Vernetzung mit anderen Fächern, wie etwa Geografie, als auch mit der Geometrie stattfinden.

Beispiel 10: Rettungsschwimmer

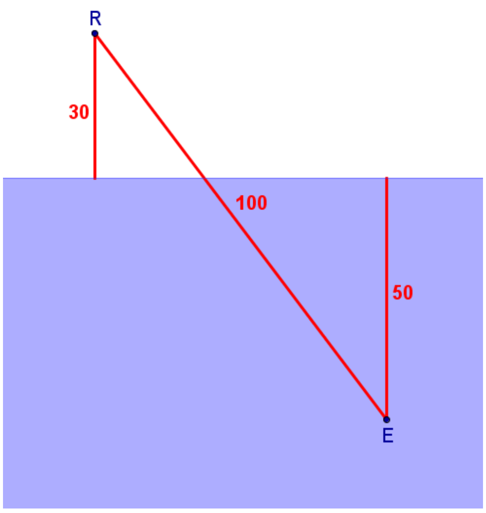
Ein Rettungsschwimmer sitzt in seiner Kabine und kontrolliert seinen Strandabschnitt. Plötzlich hört er einen nach Hilfe schreienden Schwimmer im Bereich der unbemannten Boote. Schließlich erspäht er den Ertrinkenden in einer geschätzten Entfernung von etwa 100 Meter Luftlinie zu seiner jetzigen Position. Sein Turm ist etwa 30 Meter vom Wasser entfernt. Der Rettungsschwimmer schätzt weiters, dass der Ertrinkende etwa 50 Meter vom Ufer entfernt ist. Betrachten wir die Situation und bezeichnen den Ertrinkenden mit E, den Rettungsschwimmer mit R:



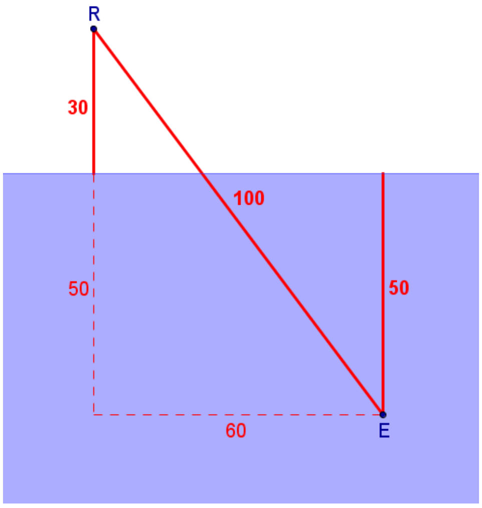
(Quelle Bild: http://www.heiden.dlrg.de/pics/tim2003-2.jpg (20.04.09))

An Land bewegt sich der Rettungsschwimmer schneller fort als im Wasser, nämlich 6 m/s. Im Wasser schwimmt er 2 Meter pro Sekunde. Unter welchem Winkel soll der Rettungsschwimmer ins Wasser springen?

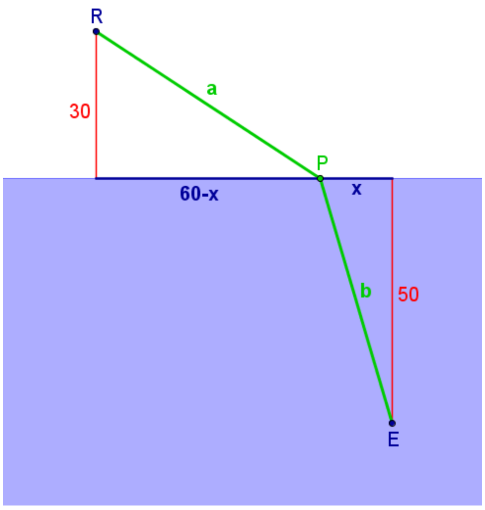
Fertigen wir zunächst wieder eine detaillierte Skizze an:



Mithilfe des pythagoreischen Lehrsatzes können wir berechnen, dass die beiden Lotpunkte von R und E 60 Meter auseinander liegen:



Da der Rettungsschwimmer an Land schneller ist als zu Wasser, liegt es nahe, nicht schnurstracks die 30 Meter zum Ufer zu laufen und dann zu schwimmen, sondern diagonal über den Strand zum Ufer zu laufen und erst dann den Weg im Wasser zurückzulegen. Der kürzeste Weg wäre die direkte Verbindung von R nach E, aber der Rettungsschwimmer wird darauf achten, die Strecke im Wasser zu verkürzen um dafür die Landstrecke zu verlängern, weil hier eine größere Geschwindigkeit entwickelt werden kann. Also ist der Punkt P gesucht, an dem der Rettungsschwimmer ins Wasser springen sollte, damit er die Person möglichst schnell retten kann.



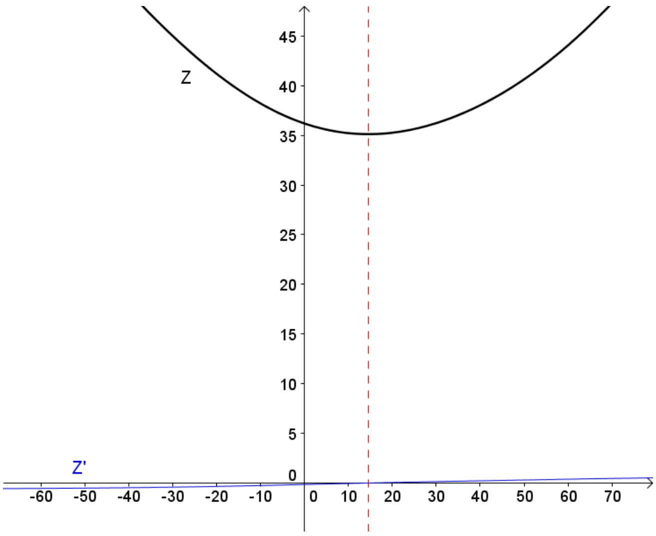
Wieder kann das Beispiel auf mehrere Arten gelöst werden. Die erste Lösungsmethode beruht auf der Differentialrechnung:

Wir suchen die Funktion, die minimiert werden soll. In diesem Fall soll die Zeit, minimal werden, damit der Ertrinkende so schnell wie möglich gerettet wird. Die gesuchte Funktion lautet:

$$Z(x) = Zeit_{Land} + Zeit_{Wasser} \overset{Zeit=\frac{Weg}{Geschw.}}{=} \frac{a}{6} + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{30^2 + (60-x)^2}}{6} + \frac{\sqrt{50^2 + x^2}}{2}$$

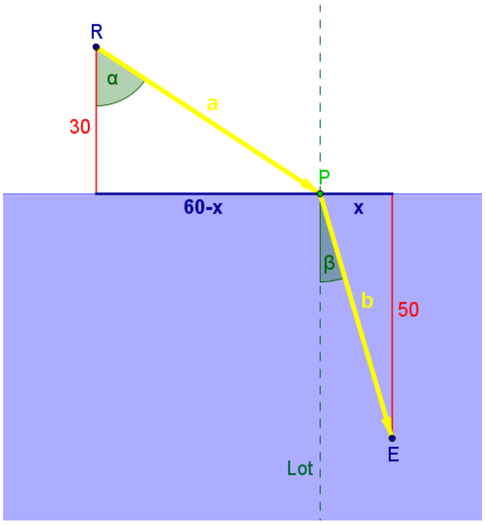
$$Z'(x) = -\frac{60-x}{6 \cdot \sqrt{30^2 + (60-x)^2}} + \frac{x}{2 \cdot \sqrt{50^2 + x^2}}$$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung erhält man einen Kandidaten für die Extremstelle. Diese befindet sich demnach bei $x \approx 14{,}49$ m. Durch Einsetzen der Randwerte in die Funktion $Z(x)$ finden wir heraus, ob das gesuchte Minimum wirklich an der berechneten Stelle liegt. Die Randwerte liegen bei $x=0$ und $x=60.$ Berechnen wir nun die Werte $Z(0)=36{,}2$ s und $Z(60)=44{,}1$ s, so sehen wir, dass der Funktionswert $Z(14{,}5)=35{,}1$ s tatsächlich ein Minimum darstellt. Verdeutlichen wir diese Situation, indem wir die Funktionen zeichnen:

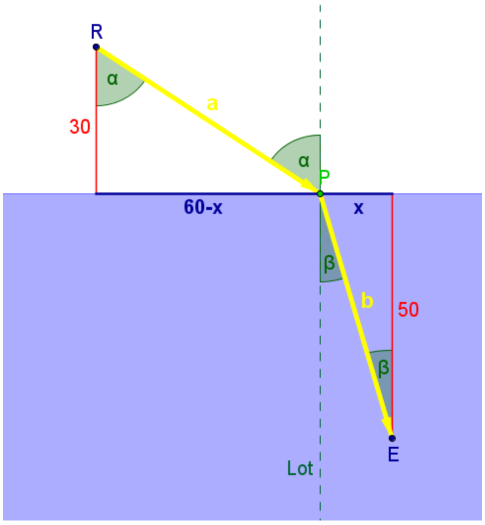


Das bedeutet, dass der Rettungsschwimmer $a = \sqrt{30^2 + (60-14{,}49)^2} \approx 54{,}5$ Meter im Sand und etwa $b = \sqrt{50^2 + 14{,}49^2} \approx 52{,}1$ Meter im Wasser zurücklegen muss, um schnellstmöglich zu der in Not befindlichen Person zu gelangen. Damit kommt der Rettungsschwimmer in etwas mehr als einer halben Minute an. Hier sieht man übrigens einen weiteren Vorteil von der Randwertmethode. Die Berechnung der zweiten Ableitung wäre sehr mühsam.

Durch dieses Beispiel ist es möglich den Brückenschlag zu anderen Fächern, wie etwa der Physik oder Chemie, herzustellen. Betrachten wir dazu folgende Situation: Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle R aus und trifft am Punkt P auf die Wasseroberfläche auf. Der Lichtstrahl wird zum Lot abgelenkt und gelangt schließlich zu dem Punkt E:



Dabei wird der Lichtstrahl mit dem Winkel α ausgestrahlt. Gelangt der Lichtstrahl auf die Wasseroberfläche, dann wird das Licht so abgelenkt, dass der Winkel α in den Winkel β übergeht. Diese Winkel sind an mehreren Stellen zu finden:



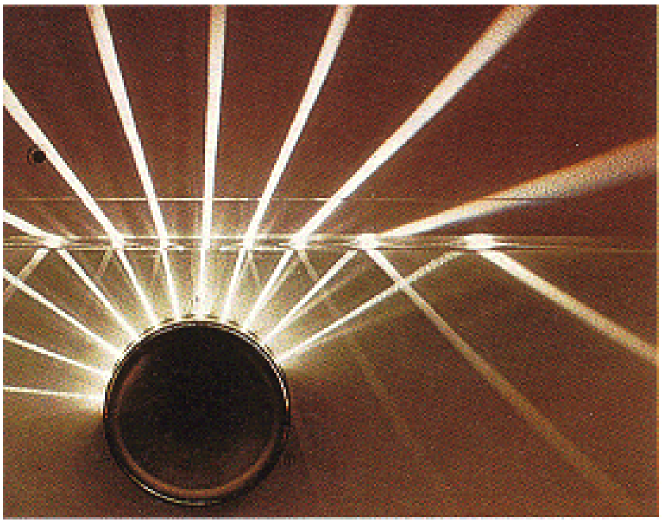
Das „Abknicken des Lichtstrahls“ hat mit den unterschiedlichen Geschwindigkeiten von Licht in Luft beziehungsweise in Wasser zu tun. Hier gilt das *Brechungsgesetz:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_{Luft}}{v_{Wasser}}$$

Wie stak der Lichtstrahl abgelenkt wird, wird durch das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten v_{Luft} und v_{Wasser} beeinflusst.

Betrachten wir nun die oben berechnete erste Ableitung. Dabei fällt auf, dass in beiden Brüchen die Länge der Gegenkathete durch die Länge der Hypotenuse dividiert wird: $Z'(x) = -\frac{\overbrace{60-x}^{Gegenkathete}}{6 \cdot \underbrace{\sqrt{30^2+(60-x)^2}}_{Hypotenuse}} + \frac{\overbrace{x}^{Gegenkathete}}{2 \cdot \underbrace{\sqrt{50^2+x^2}}_{Hypotenuse}}$. Somit können wir auch schreiben: $Z'(x) = -\frac{\sin\alpha}{6} + \frac{\sin\beta}{2}$. Durch Nullsetzen erhalten wir den Ausdruck $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{6}{2}$, also genau das Brechungsgesetz.

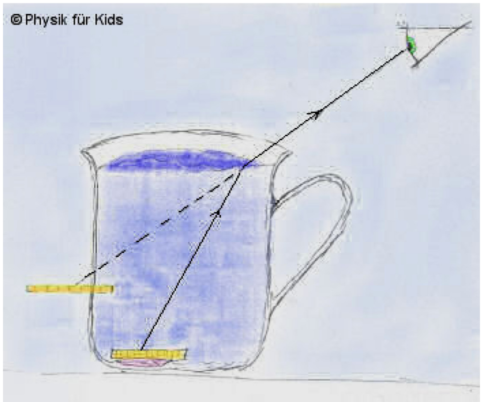
Um den Strahlensatz noch besser zu verdeutlichen, kann versucht werden eine Verbindung zur Physik herzustellen. Durch Recherche im Internet habe ich folgendes Bild gefunden, das meiner Meinung nach das Brechungs- und das Reflexionsgesetz verständlich darstellt. Die Lichtquelle ist dabei im Wasser. Die Lichtstrahlen werden abgelenkt (*Brechungsgesetz*), aber auch zum Teil reflektiert (*Reflexionsgesetz*), je nachdem in welchem Winkel die Lichtstrahlen ausgesendet werden:



(Quelle: http://www.dieter-heidorn.de/Physik/VS/Optik/K04_Brechung/K04_Brechung.html (21.04.09))

Dieses Beispiel zeigt, dass der *kürzeste* nicht unbedingt der *schnellste* Weg sein muss. Diese Tatsache spiegelt sich auch im Alltag wieder. Denken wir dabei an Navigationsgeräte oder Routenplaner, bei denen man auswählen kann, ob die kürzeste oder die schnellste Route gefahren werden soll. Anhand dieses Beispiels lassen sich so manche Alltagsphänomene erklären, wie etwa: Warum erscheint eine Münze im Wasser an einer Stelle, an der sie gar nicht sein dürfte?

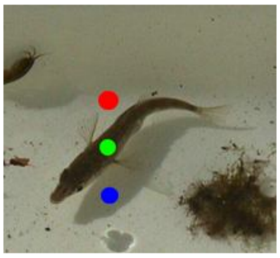
Ich denke, folgende Veranschaulichung sollte als Erklärung genügen:



(Quelle: http://www.physikfuerkids.de/lab1/versuche/becher/wiebecher.html (21.04.09))

Der Lichtstrahl, der eigentlich am Auge vorbeigehen sollte, wird durch den Übergang von Wasser in Luft gebrochen. Dadurch sieht man eine Münze am Boden des Glases und die andere „versetzt", welche sozusagen eine Täuschung ist, da das Gehirn davon ausgeht, dass sich Licht geradlinig ausbreitet (gestrichelte Linie). Dieses Phänomen hängt also mit der Brechung des Lichts zusammen.

Gelangt man in eine Situation, in der man selbst Nahrung herbeischaffen muss, sollte man folgende Frage beantworten können:



Wohin müsste man mit der geradeaus fliegenden Harpune zielen, um den schräg vor uns im Wasser schwimenden Fisch zu treffen?

- [ ] Oberhalb des Fisches (rot).
- [ ] Genau auf den Fisch (grün)
- [x] Unterhalb des Fisches (blau)

OK

(Quelle: http://leifi.physik.uni-muenchen.de/leifitest/aufgab09/09_11_19/aufgabe.htm (21.04.09))

Durch Einbeziehung von verschiedenen Alltagsphänomenen und Anwendungskontexten wird die Aufgabe geöffnet und ihr dadurch mehr Leben eingehaucht. Die SchülerInnen erkennen die Rolle der Mathematik in unserer Umwelt und können mathematische und physikalische Erscheinungen besser verstehen.

Dass sogar Tieren die Differentialrechnung im Blut liegt, zeigt folgender Auszug über einen Mathematikprofessor und seinen Hund. Am 07.11.08 wurde bei einer bekannten österreichischen Comedy Show, in der es darum geht, Fragen möglichst lustig zu beantworten, folgende Frage gestellt:

Warum ließ sich Wissenschaftler Tim Pennings von seinem Hund 40-mal hintereinander einen Tennisball aus einem See apportieren?

Soweit ich mich erinnern kann, wusste keiner die Antwort:

Pennings wollte herausfinden, ob sein Hund im Stande ist, ein so genanntes Optimierungsproblem zu lösen. Pennings hat zu diesem Zweck den Ball immer schräg ins Wasser geworfen - und Elvis, der natürlich auf dem schnellsten Weg zum Ball wollte, ist immer zuerst eine gewisse Strecke am Ufer entlang gelaufen und dann schräg auf den Ball zugeschwommen. Pennings hat genau nachgemessen - und seine Berechnungen haben ergeben, dass Elvis im Stande ist, seine Geschwindigkeit zu Wasser und zu Land so genau zu erfassen, dass es ihm fast immer gelungen ist, den optimalen Punkt zu treffen, um vom Land ins Wasser zu wechseln.

(Quelle: http://www.wasgibtesneues.at/?page_id=928 (12.05.09))

Manche finden es sicher fragwürdig, Mathematik für „Comedy-Zwecke“ zu „missbrauchen“, aber ich denke, dass dieses Beispiel lediglich eine alltägliche

Situation – nämlich das „Stöckchenwerfen“ – widerspiegelt und möglicherweise auch Anstoß für eine interessante Unterrichtsstunde sein kann. Wie interessant die Mathematik sein kann, wird in der Bevölkerung verstärkt wahrgenommen. Mathematik ist aufgrund der leicht verständlichen Antwort kein „komplexes Konstrukt“, mit dem man nichts anfangen kann.

Mit diesem kleinen Ausflug in die Welt des Fernsehens schließe ich das Kapitel „Persönliche Schwerpunktsetzung“. Diese zehn Beispiele sollten einen Einblick in die verschiedenen Lösungsmethoden geben. Als Resümee könnte man sagen, dass die Differentialrechnung längst nicht die einzige, aber eine sehr mächtige Lösungsvariante darstellt. Hat man erst einmal begonnen, sich mit einem Beispiel intensiver zu befassen, kann man sich kaum noch losreißen.

5 SCHLUSSWORT

Generell vertrete ich die Ansicht, dass auch das Thema „Differentialrechnung“ interessant gestaltet werden kann. Dabei ist es unumgänglich, so früh wie möglich die Relevanz der Mathematik in unserer Welt zu verdeutlichen. Insbesondere die Extremwertaufgaben sollten als spannende und echte Anwendung der Differentialrechnung gesehen werden. Eine möglichst frühe Eingliederung in den Unterricht wäre wünschenswert. Bei den meisten Schulbüchern könnte das Thema „Extremwertaufgaben“ schon viel früher aufgegriffen werden. Meiner Meinung nach beschäftigt man sich im Vorfeld zu lange mit Funktionsuntersuchungen, welche auch erst nach den Extremwertaufgaben besprochen werden können. Ein Punkt, auf den ich allgemein großen Wert lege, ist der Praxisbezug. Durch Extremwertaufgaben lässt sich auch dieser Punkt realisieren. Zum einen werden die Aufgaben immer interessanter, je länger und intensiver man sich mit ihnen beschäftigt, und zum anderen können diese Aufgaben auf eine Reihe von alltäglichen Situationen bezogen werden, wodurch Analogieschlüsse möglich sind. Dieser kleine Teil von Aufgaben soll nur eine Anregung sein, aber ich habe selbst gemerkt, dass man sich immer weiter und tiefergründig mit so manchen Aufgabenstellungen beschäftigen kann, und die Ergebnisse dann meist in realen Situationen wieder findet. Zu begründen, warum manche Berechnungen in der Praxis keine Relevanz erfahren, ist spannend und schwierig zugleich. Aber gerade beim Rückschluss auf die Realität, der auch außermathematische Erklärungen fordert, ergeben sich interessante und wertvolle Diskussionen. Die vielfältigen Lösungsmöglichkeiten stellen dabei einen besonderen Anreiz dar. Geometrische Lösungsansätze ermöglichen einen frühen Einsatz von Extremwertaufgaben im Unterricht und verbinden verschiedene Lerninhalte mit der Idee des Optimierens. Das Thema „Optimieren“ zieht sich dadurch wie ein roter Faden durch die verschiedenen Schulstufen. Schließlich wird den SchülerInnen in der 7. Klasse ein „effektives“ Werkzeug zum Lösen solcher Aufgaben bereitgestellt – die Differentialrechnung. Trotzdem sollte darauf geachtet werden, dass die Aufgaben nicht immer nach demselben Schema gelöst werden, da sonst durch die mangelnde Abwechslung schnell Langeweile aufkommen kann.

Ich denke, dass in Extremwertaufgaben noch ein enormes Potential bezüglich der Vernetzung mit anderen Fächern, wie etwa der Physik, Chemie, Geografie aber auch der Kunst und dem Werkunterricht steckt.
In manchen Aufgaben wird der minimale Materialverbrauch (Milchverpackung, Dose), in anderen die kürzeste Zeit (Rettungsschwimmer) gesucht. Gerade auch, wenn Geld im Spiel ist, soll so kostengünstig wie möglich gearbeitet werden. An dieser Philosophie wird sich wohl kaum so schnell etwas ändern. Aus diesem Grund haben Extremwertaufgaben, die eine „mathematische" Antwort auf manche alltagsrelevante Situationen liefern, besonders im Unterricht einen berechtigten Stellenwert.

Mich hat die Differentialrechnung im Laufe dieser Arbeit immer tiefer in ihren Bann gezogen. Mein Ziel ist es, die Faszination an der Mathematik und insbesondere an der Differentialrechnung auch meinen SchülerInnen zu vermitteln.

6 LITERATURLISTE

ACDCA – Austrian Center for Didactics of Computer Algebra. URL: http://www.acdca.ac.at/material/allgem/buch/buch96_5konzepte.pdf [12.03.09]

BECK, Uwe. 1982. *Mathematikunterricht zwischen Anwendung und reiner Mathematik.* Verlag Moritz Dieserweg, Frankfurth a. Main, Berlin, München

BLUM, Werner. 1979. *Der Mathematikunterricht – Zum Vereinfachten Grenzwertbegriff in der Differentialrechnung* (Jahrgang 25 – Heft 3 – 1979). Ernst Klett Verlag, Stuttgart

BORNELEIT, Peter; DANCKWERTS, Rainer; HENN, Hans-Wolfgang; WEIGAND, Hans-Georg. 2000. *Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe*. URL http://blk.mat.uni-bayreuth.de/aktuell/db/13/KMK_expertise.pdf [09.03.09].

CLAUS, Heinz Jörg. 1992. *Extremwertaufgaben*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt

DANCKWERTS, Rainer; VOGEL, Dankwart. 2001. *Der Mathematikunterricht – Der Themenkreis Extremwertprobleme – Wege der Öffnung* (Jahrgang 47 – Heft 4 – August 2001). Erhard Friedrich Verlag GmbH, Seelze

DANCKWERTS, Rainer; VOGEL, Dankwart. 2006. *Analysis verständlich unterrichten.* Spektrum Akademischer Verlag, München

Eine Galerie multimedialer Lernhilfen für Schule, Fachhochschule, Universität und Selbststudium. URL http://www.mathe-online.at/ [12.03.09]

FISCHER, Roland; MALLE, Günther. 1985. *Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.* BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien

GLATFELD, Martin; RÖHRL, Emanuel (Hrsg.). 1969. *Der Mathematikunterricht – Extremwertprobleme* (Jahrgang 15 – Heft 5 – Dezember 1969). Ernst Klett Verlag, Stuttgart

GLATFELD, Martin; RÖHRL, Emanuel (Hrsg.). 1972. *Der Mathematikunterricht – Extremwertprobleme II* (Jahrgang 18 – Heft 5 – Dezember 1972). Ernst Klett Verlag, Stuttgart

GLATFELD, Martin; RÖHRL, Emanuel (Hrsg.). 1977. *Der Mathematikunterricht – Extremwertprobleme III* (Jahrgang 23 – Heft 4 – September 1977). Ernst Klett Verlag, Stuttgart

GÖTZ, Stefan. WS 07/08. *Vorlesung Einführung in die Fachdidaktik*

GÖTZ, Stefan. SS 08. *Vorlesung Schulmathematik Geometrie*

GÖTZ, Stefan; REICHEL, Hans-Christian; MÜLLER, Robert; HANISCH, Günter. 2008. *Mathematik Lehrbuch 7.* öbv, Wien

HERGET, Wilfried; SOMMER, Rolf; WEIGAND, Hans-Georg; WETH, Thomas (Hrsg.). 2001. *Medien verbreiten Mathematik. Bericht über die 19. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 28. bis 30. September 2001 in Dillingen.* URL http://didaktik-der-mathematik.de/ak/mui/tagungsbaende/Tagungsband2001.pdf [09.03.09].

HEUGL, Helmut; KLINGER, Walter; LECHNER, Josef. 1996. *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen*. Addison-Wesley, Deutschland

HUMENBERGER, Hans; REICHEL, Hans-Christian. 1995. *Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien

HUMENBERGER, Hans. WS 07/08. *Vorlesung Schulmathematik Differentialrechnung*

MALLE, Günther. 1999. Didaktikhefte der österreichischen mathematischen Gesellschaft – Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentialquotienten (Heft 30 – 1999 – S. 67-78)

MALLE, Günther; RAMHARTER, Esther; ULOVEC, Andreas; KANDL, Susanne. 2007. *Mathematik verstehen 7.* öbvhpt Verlagsgesellschaft, Wien

ORF Comedy Show: Was gibt es Neues? Fragen 2008 (Archiv). URL: http://www.wasgibtesneues.at/?page_id=928 [13.04.09]

SCHNEIDER, Gerold; GIRLINGER, Helmut; PAUL, Markus; TINHOF, Friedrich. 2007. *Mathematik IV.* Trauner Verlag, Linz

TIMISCHL, Wolfgang; KAISER, Gerald. 2007. *Ingenieur-Mathematik 3.* E. Dorner, Wien

WINTER, Heinrich. *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. URL http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienDB/45/muundallgemeinbildung.pdf [25.11.2008]

7 LEBENSLAUF

Anita Ramharter

Wohnort:	Kleinschönau 14 3902 Vitis
Mobil:	+43 664 16 27 242
E-Mail:	roems@a1.net
Geboren am:	13.03.1985
Ort:	Waidhofen/Thaya
Familienstand:	ledig

Schule & Ausbildung

2003-2009	Studium Lehramt Mathematik und Chemie, Universität Wien
1999-2003	ORG mit bes. Berücksichtung der mus. Ausbildung, Krems
1995-1999	Hauptschule, Vitis
1991-1995	Volksschule, Vitis

Vitis, Mai 2009