



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Musik und ihre mathematische Saite

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasserin:	Agathe Schaurhofer
Matrikel-Nummer:	0306958
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	A 190 406 313
Betreuerin:	Mag. Dr. Anita Dorfmayr

Wien, am 7. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Mathematiker beschäftigen sich mit Musik	6
2.1	Das Pythagoreische Stimmungsprinzip	6
2.2	Das Diatonische Stimmungsprinzip	10
2.3	Die Temperierte Stimmung	13
2.4	Leonhard Euler (1707-1783)	18
3	Musikalische Akustik	21
3.1	Schwingungen und Wellen	21
3.1.1	Die Harmonische Schwingung	23
3.2	Schall	26
3.2.1	Geschwindigkeit des Schalls	28
3.3	Konstruktive und destruktive Interferenz	29
3.4	Schwebung	32
4	Fourier-Analyse	35
4.1	Die Fourierreihe	35
4.2	Ein Anwendungsbeispiel	39
4.3	Sägezahnschwingung als Beispiel für die Fourierreihe	43
4.4	Klangfarbenspektren	46
4.4.1	Erstellte Klangfarbenspektren mit <i>overtone</i>	48
5	Mathematik in der Musik	53
5.1	Fibonacci-Zahlen und Goldener Schnitt	53
5.2	Stochastische Musik	59
5.2.1	Musikalisches Würfelspiel	59
5.2.2	Das Casinoquartett	67
5.2.3	Komponieren mit Hilfe von Markovketten	69

5.3	Bach: Die Zahlbeziehung in seiner Musik	80
6	Umsetzung im Projektunterricht	82
6.1	Projektunterricht - eine Begriffserklärung	82
6.2	Grundmuster der Projektmethode nach Frey	84
6.3	Konzeptbeschreibung	88
7	Module für Projektarbeit	90
7.1	Modul: Musikalisches Würfelspiel	90
7.2	Modul: Komponieren mit Markovketten	99
7.3	Modul: Musikalische Akustik mit GeoGebra	105
7.4	Modul: Klangspektrenanalyse	114
8	Rätsel	118
9	Glossar	120
10	Schlusswort	122
	Abbildungsverzeichnis	124
	Literaturverzeichnis	125

1 Einleitung

*„Mathematik ist Musik für den Verstand;
Musik ist Mathematik für die Seele.“¹*

Da ich selber eine leidenschaftliche Musikerin bin, kam ich rasch zu der Überzeugung, dass das Thema „Mathematik und Musik“ einen wunderbaren Arbeitstitel für meine Diplomarbeit darstellen würde und dies hat sich auch bewahrheitet.

Ausgegangen von der Überlegung, dass meine Arbeit später im Unterricht auch Verwendung finden soll, erstellte ich mein Konzept. Die Diplomarbeit gliedert sich nun in einen Theorieteil und einen Praktischen Teil - die Projektarbeit. Das erste Kapitel des Theorieteils beinhaltet das Thema: „Mathematiker beschäftigen sich mit Musik“. Angefangen bei Pythagoras und seinem pythagoreischen Stimmungsprinzip sollen die Veränderungen bzw. Entwicklungen bis hin zur heutigen temperierten Stimmung umrissen werden. Auch Leonhart Euler findet in diesem Kapitel Erwähnung, der auch einen Beitrag zur Musik leistete, indem er die Gradusfunktion definierte, eine Funktion zur Bestimmung der Stufe des Wohlklangs eines Intervalls.

Im nächsten Kapitel soll näher auf die musikalische Akustik eingegangen werden. Schwingungen und Schall werden definiert und ihre Bedeutung für Klang, Ton und Geräusch hervorgehoben. Weiters werden auch die konstruktive und destruktive Interferenz sowie die Schwebung näher betrachtet.

Im Kapitel: „Fourier Analyse“ soll im Wesentlichen nur die Bedeutung dieses Verfahrens für die Klanganalyse Erwähnung finden. Die Fourierreihe jedoch wird näher betrachtet werden und als Beispiel für diese soll die Sägezahnschwingung dienen. Den Abschluss dieses Kapitels bilden die mit *overtone* erstellten Klangfarbenspektren.

Das letzte Kapitel des Theorieteils handelt von der Mathematik in der Musik. Angefangen bei den Fibonaccizahlen und Goldener Schnitt geht es weiter zur stochastischen Musik. Auch auf Bach und die Zahlenbeziehung in seiner Musik wird in dieser Arbeit eingegangen.

Der praktische Teil beschäftigt sich mit der Umsetzung von gewählten Themen aus dem

¹Hall, S. 453

Theorieteil im Projektunterricht. Es wurden vier Module für einen Begabtenförderungskurs entwickelt.

Diese Arbeit soll als Beispiel dafür dienen, wie gut Musik und Mathematik miteinander harmonieren bzw. sich projektorientiert verbinden lassen.

In dieser Diplomarbeit sind alle Personenbezeichnungen der Einfachheit halber in der grammatikalisch näher liegenden Form angeführt. Wenn etwa von Lehrern die Rede ist, dann sind damit selbstverständlich auch Lehrerinnen gemeint.

Dankesworte

Ein besonderer Dank gilt meiner Familie, besonders meinen Eltern, die mir meine Ausbildung ermöglicht und in jeder Phase meines Lebens unterstützt haben. Vor allem aber auch meinem Freund, der mir immer mit Rat und Tat liebevoll zur Seite gestanden ist. Dank gilt meinen Studienkollegen für diese schöne Zeit. Ein weiterer besonderer Dank gilt natürlich Frau Mag. Dr. Anita Dorfmayr für die tolle Betreuung und Unterstützung während meiner Diplomarbeit.

2 Mathematiker beschäftigen sich mit Musik

2.1 Das Pythagoreische Stimmungsprinzip

Die Pythagoreer waren der Ansicht, dass die irdische Musik eine Nachbildung der himmlischen Musik sei, deren Harmonie auf Zahlen beruhte.¹ Das Monochord (Abb. 2.1), ein einsaitiges Instrument, lieferte ihnen die experimentellen Befunde dazu.

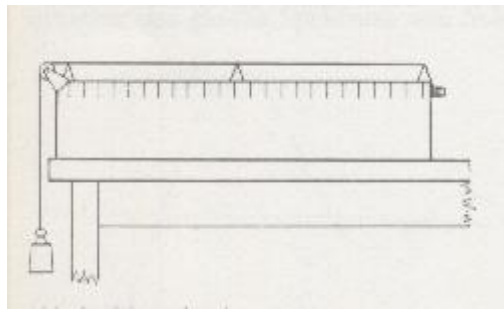


Abbildung 2.1: Monochord

Über den quaderförmigen Resonanzkörper ist eine Saite gespannt, die auf einem Ende befestigt ist und am anderen, mit einem Gewicht belastet, über eine Rolle geführt wird. Auf Grund des Gewichtes steht die Saite immer unter gleicher Spannung. Zupft man die Saite an, wird sie in Eigenschwingung versetzt, die sich auf den Resonanzkörper überträgt und einen deutlich vernehmbaren Ton liefert. Die Pythagoreer erzeugten verschieden hohe Töne, indem sie beim Monochord unter die Saite einen beweglichen Steg einführten, und somit die Länge der schwingenden Saite variierten. Die Spannung der Saite blieb dabei natürlich immer konstant. Folgendes konnten sie nun feststellen: Halbiert man die Saite (1:2) ergab sich zum Grundton ein harmonischer Oberton, die so genannte Oktav.

¹vgl. Hrg. Götze, S. 7

Man ging weiter und verkürzte den schwingenden Anteil auf zwei Drittel der ursprünglichen Länge. Das Intervall, das dabei entstand, war die Quint. Letztendlich brachten die Pythagoreer drei Viertel der ursprünglichen Länge zum Schwingen und es entstand die Quart. *Im Allgemeinen entspricht dem Nacheinanderausführen zweier Tonschritte das Multiplizieren der entsprechenden Verhältniszahlen.*² Zur Veranschaulichung diene dieses

Beispiel:

$$\begin{array}{rcccl} \text{Quinte} & + & \text{Quarte} & = & \text{Oktav} \\ \frac{3}{2} & \cdot & \frac{4}{3} & = & \frac{2}{1} \end{array}$$

Um den Charakter des Tonintervalls zwischen Quart und Quint, ausgehend vom gemeinsamen Grundton, feststellen zu können, bildet man den Quotienten der Längenverhältnisse.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcccl} \text{Quinte} & - & \text{Quarte} & = & \text{ganzer Ton} \\ \frac{3}{2} & \div & \frac{4}{3} & = & \frac{9}{8} \end{array}$$

Im Folgenden sollen die Intervalle zweier Töne nicht durch das Längenverhältnis der schwingenden Saiten, sondern durch ihre Kehrwerte, also das Verhältnis der Schwingungszahlen, erfasst werden. *„Ist l die Länge der schwingenden Saite und f deren Frequenz, so gilt $l = \frac{k}{f}$ mit geeignet gewähltem Proportionsfaktor k . Am Monochord ist die Länge des schwingenden Saitenabschnittes bei konstanter Saitenspannung umgekehrt proportional zur Frequenz. Daraus folgt, dass zwei Tonintervalle genau dann gleich sind, wenn sich ihre Frequenzen im gleichen Verhältnis zueinander verhalten.“*³. Mit Hilfe des Monochords kann man nun die Intervalle Prime (c), Quarte (f), Quinte (g), Oktave (c') mit den Verhältniszahlen $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2$ feststellen. Aber um eine vollständige C- Dur Tonleiter zu erhalten, muss man noch vier Leerstellen füllen. Die pythagoreische Tonleiter besteht aus fünf großen und zwei kleinen Tonschritten. Den großen Tonschritt erhält man in folgender Weise:

Setzt man $q_1 = \frac{3}{2}$ und $q_2 = \frac{4}{3}$, so gilt für den großen Tonschritt $q = \frac{q_1}{q_2} = \frac{9}{8}$. Die Schrittweite, die diesem Verhältnis entspricht, liegt bereits von f nach g vor, weiters wird sie

²Schröder, S. 49

³ebenda, S. 50

beim Weitergehen von c nach d, von d nach e als auch von g nach a und von a nach h adaptiert. Die Schwingungszahlen, welche die Schritte von e nach f und von h nach c' beschreiben, stehen noch offen. Für sie ergibt sich das Zahlenverhältnis $\frac{256}{243}$. Abgesehen von der Dreistelligkeit von Zähler und Nenner, fällt diese Schwingungszahl auch von der akustischen Seite her betrachtet aus dem Rahmen. Die Töne liefern keinen guten Zusammenklang.⁴

Übersicht des pythagoreischen Tonsystems:

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
bezogen auf tieferen Nachbarton	-	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

Tabelle 2.1: Pythagoreische Tonsystem

Bringt man nun die auf den Grundton c bezogenen Schwingungszahlen auf den gemeinsamen Nenner 384, dann erhält man folgende ganzzahlige fortlaufende Proportion:

$$384 : 432 : 486 : 512 : 576 : 648 : 729 : 768$$

Diese Tonleiter lässt sich nicht auf kleinere Verhältniszahlen reduzieren.

Eine andere Herleitungsmöglichkeit um diese Tonleiter zu erhalten, wäre der Quintenzirkel (Abb. 2.2).⁵

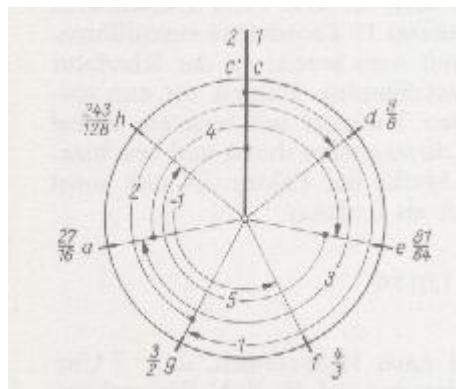


Abbildung 2.2: Quintenzirkel

⁴vgl. Schröder, S. 50/51

⁵vgl. ebenda, S. 51

Der abgebildete Kreis wird in sieben gleich große Sektoren geteilt und im Uhrzeigersinn jeweils mit der Tonbezeichnung beschriftet. Der oberste Teilungspunkt bildet den Ausgangspunkt und wird mit c bezeichnet. Da sich dieser mit c´ decken soll, bekommt er eine starke Markierung. Von diesem Punkt ausgehend, werden nun im Uhrzeigersinn Quintensprünge vollzogen und gelangen der Reihe nach zu g, d, a, e und h. Jeder Sprung entspricht einer Multiplikation der zuletzt erreichten Zahl mit $\frac{3}{2}$. Wird bei einem Quintensprung allerdings der oberste Teilungspunkt c überquert, so multipliziert man mit dem Faktor $\frac{3}{4}$ statt $\frac{3}{2}$.

Man kann also feststellen, dass mit dieser Methode gleichfalls die Verhältniszahlen der pythagoreischen Tonleiter erzeugbar sind. Jetzt fehlt nur noch die Verhältniszahl für f und die erhält man durch eine Quintendrehung entgegen dem Uhrzeigersinn. Es muss deshalb die Verhältniszahl von c mit dem Kehrwert von $\frac{3}{2}$ multipliziert werden und zusätzlich mit dem Faktor zwei versehen werden, da dieser Sprung als Überschreitung der Markierung zu werten ist. Der Quintenzirkel schließt aber nicht exakt. Wir können zwar die relativen Schwingungszahlen der sieben Töne dieser Tonleiter exakt auffinden, aber der zu c´ gehörige Faktor 2 kann mit diesem Vorgehen nicht konstruiert werden. Teilt man nun die fünf Ganztonschritte bzw. die fünf großen Intervalle der pythagoreischen Tonleiter in je zwei Teilintervalle, so werden bei einem Durchlauf der Oktav von c nach c´ 12 Tonschritte ausgeführt.⁶ Werden nun 12 Quinten hintereinander gelegt, so entspricht das sieben Umläufen (7 Oktaven) im Quintenzirkel.

Rechnerisch ergibt sich folgendes:

$$\frac{3^{12}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{531441}{524288} = 1,0136$$

Hätte sich der Quintenzirkel nach 12 Quintensprüngen bzw. nach 7 Umläufen exakt geschlossen, wäre die Lösung die Zahl Eins gewesen. Es entsteht daher zwischen der zwölften Quinte und der siebenten Oktav bzgl. eines gemeinsamen Grundtones eine Differenz ($1,0136 - 1 = 0,0136$) das als „Pythagoreisches Koma“ bezeichnet wird und etwa einem Achtelton entspricht. Vor allem die Streicher bedienen sich dieser pythagoreischen Tonstufe. Sie ermöglicht eine bessere Intonation.

Dieses Stimmungsprinzip, nach welchem alle Töne aus einer Quintenreihe abgeleitet

⁶vgl. Schröder, S. 51/52

werden, heißt pythagoreisches Stimmungsprinzip.⁷

2.2 Das Diatonische Stimmungsprinzip

Didymos (1. Jahrhundert vor Christus) entwickelte den Gedanken der Pythagoreer weiter, indem er am Monochord $\frac{4}{5}$ der ursprünglichen Saite zum Schwingen brachte und erhielt bezüglich des Grundtones die große Terz. „Der Kehrwert $\frac{5}{4}$ entspricht dem Verhältnis der Frequenzen.“⁸ Dieser Tonschritt ermöglicht es, eine weitere Tonleiter aufzubauen, nämlich die so genannte Diatonische Tonleiter, die für die Musiktheorie von großer Bedeutung ist. Ausgehend von den bisher bekannten Intervallen Oktav, Quinte, Quart und jetzt auch der großen Terz versucht man die übrigen Lücken der Tonleiter zu schließen.⁹

$$\begin{array}{ccccccc} c & \cdot & e & f & g & \cdot & c' \\ 1 & & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & & \frac{2}{1} \end{array}$$

Der Tonschritt bzw. der pythagoreische Ganztonschritt zwischen f und g bleibt unverändert. Zwischen e und f erhalten wir einen halben Tonschritt, der durch die Schwingungszahl $\frac{16}{15}$ festgehalten wird. Nun gilt es noch die Lücken zwischen c und e sowie zwischen g und c' zu füllen. Das d= $\frac{9}{8}$ erhält man, indem man von c einen pythagoreischen Ganztonschritt weitergeht, somit ergibt sich für den Übergang von d nach e der Faktor $\frac{10}{9}$. Die Leerstellen a und h kann man mit den vorgegebenen Intervallgrößen berechnen. So erhalte ich für h die Verhältniszahl $\frac{15}{8}$ bezüglich des Grundtones c, wenn ich von e eine Quinte nach oben gehe ($\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$). Für das Intervall von h nach c' ergibt sich somit automatisch der halbe Tonschritt $\frac{16}{15}$. Der Abstand zwischen g und h entspricht dem einer großen Terz, da $\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{4}$ bzw. $\frac{15}{8} \div \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$ beträgt. Es ist daher nahe liegend, dass das Intervall a so angepasst wird, dass g - a einem großen und a - h einem kleinen Ganztonschritt entspricht. „Damit ist die Konstruktion der acht Töne umfassenden diatonischen Tonleiter aus den Brüchen $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$ und $\frac{16}{15}$ abgeschlossen.“¹⁰

⁷vgl. Schröder S. 53

⁸vgl. ebenda, S. 54

⁹vgl. ebenda, S. 54

¹⁰vgl. ebenda, S. 55

Übersicht des diatonischen Tonsystems:

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c´
Schwingungszahl bezogen auf c	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{1}$
bezogen auf tieferen Nachbarton	-	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Tabelle 2.2: Diatonische Tonsystem

Die Verhältniszahlen für die Frequenzen der diatonischen Tonleiter können in folgender fortlaufenden Proportion geschrieben werden:

$$24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48$$

Grundakkord, Dominantakkord und Subdominantakkord besitzen die selben gekürzten Verhältniszahlen 4 : 5 : 6. Die diatonische Tonleiter wird auch als „reine“ Tonskala bezeichnet, da sie der Forderung nach einen harmonischen Zusammenklang der Töne gerecht wird.

Aus der Tabelle 2.3 erhalten wir für die bekanntesten Intervalle der reinen Stimmung folgende Zahlenverhältnisse:

Oktave	c´-c	2:1
Septime	h-c	15:8
Sexte	a-c	5:3
Quinte	g-c	3:2
Quarte	f-c	4:3
Große Terz	e-c	5:4
Kleine Terz	g-e	6:5
Große Sekunde	d-c	9:8
Kleine Sekunde	e-d	10:9

Tabelle 2.3: Zahlenverhältnisse der bekanntesten Intervalle

In der diatonischen Tonleiter lassen sich je Oktave fünf Quinten, fünf Quartan, drei große und drei kleine Terzen feststellen.

Auf Grund der Fülle der Tonintervalle, die kleinen Verhältniszahlen entsprechen und einen guten Zusammenklang liefern, ist die diatonische Stimmung der pythagoreischen eindeutig überlegen (vor allem bei der Interpretation polyphoner Musik.)¹¹

¹¹vgl. Schröder, S. 56

Wir bringen nun die auf den Grundton c bezogenen Schwingungszahlen des diatonischen Tonsystems auf den gemeinsamen Nenner 384, um die Verhältniszahlen der diatonischen Stimmung und der pythagoreischen Stimmung besser vergleichen zu können (Tabelle 2.4).

Tonbezeichnung	c	d	e	f	g	a	h	c´
pythagoreische	384	432	486	512	576	648	729	768
diatonische	384	432	480	512	576	640	720	768

Tabelle 2.4: Verhältniszahlen der pythagoreischen und diatonischen Stimmung

Aus der Tabelle 2.4 geht nun hervor, dass der Grundakkord (c-e-g) des pythagoreischen Tonsystems den Verhältniszahlen 384 : 486 : 576 entspricht. Für den Grundakkord (c-e-g) des diatonischen Tonsystems können wir entsprechend 384 : 480 : 576 ablesen. Wir bringen diese nun jeweils auf teilerfremde Verhältniszahlen, so erhalten wir die Proportionen 64 : 81 : 96 für die pythagoreische und 4 : 5 : 6 für die diatonische Stimmung. Die kleineren und daher auch einfacheren Verhältniszahlen sprechen für die Überlegenheit des diatonischen Tonsystems.

Bisher hatten wir eine Reihenfolge der Verhältniszahlen, die der Dur-Tonart entsprechen. Kommen wir nun zur Moll-Tonart:

Um eine Moll-Tonart zu erhalten müssen wir eine zyklische Vertauschung der Intervalle und eine Inversion der zwischen den Halbtonschritten liegenden Intervalle $9/8$ und $10/9$ vornehmen: $9/8, 16/15, 10/9, 9/8, 16/15, 9/8, 10/9$.

Die Verhältniszahlen für die Frequenzen der diatonischen Tonleiter können, wenn man sie zuvor auf gleichen Nenner 120 bringt, in folgender fortlaufenden Proportion geschrieben werden:¹²

$$120 : 135 : 144 : 160 : 180 : 192 : 216 : 240$$

Der Grundakkord besteht aus dem Zahlentripel 10 : 12 : 15.¹³

¹²vgl. Schröder, S. 57

¹³vgl. ebenda, S. 57

2.3 Die Temperierte Stimmung

Fünfzehn Jahrhunderte lang kam es zu keiner Verbesserung des Tonsystems. Man machte sich keine Gedanken darüber, wie man die Tonskala konzipieren könnte um ein gemeinsames Musizieren von verschiedenen Instrumenten zu ermöglichen. Erst ab der Zeit der Renaissance kam es zu einer Rückbesinnung auf das Wissen der Antike. Vor allem die Kirchenmusik, aber auch Tanz und Volksbelustigungen gaben den nötigen Ansporn, sich mit Musik auseinanderzusetzen und diese weiterzuentwickeln bzw. Musik aktiv auszuüben. Die Entwicklung von Musikinstrumenten war unumgänglich. Orchester entstanden und gleichzeitig das Problem der Unmöglichkeit eines harmonischen Zusammenspiels unterschiedlichster Instrumente. Das Ziel war nun, Instrumente mit fester Tonlage so zu gestalten, um sie aufeinander abstimmen zu können.

Folgende Anspruch galt es zu befriedigen: *“Alle durch das Instrument mit fester Tonlage verfügbaren Töne müssen die Funktion des Grundtones einer Tonleiter übernehmen können.”*¹⁴

Es ist daher nahe liegend, dass man zum Beispiel an Tasteninstrumenten mit festgesetzter Tonlage in der Klaviatur zwischen jeden Ganztonschritt ein Taste integriert und somit den ganzen Schritt in zwei halbe unterteilt. An einem Beispiel soll nun gezeigt werden, welche Komplikationen entstehen können, wenn man die „reine“ Stimmung bewahren möchte.¹⁵

Beispiel:

Kann ein anderer Ton außer c als Grundton gewählt werden, wenn die bisher festgelegten Verhältniszahlen eingehalten werden sollen?

(1) Wir wählen cis´ und wollen zeigen, dass dieser nicht als Grundton gewählt werden kann, wenn man sich für die dazu benötigten Tonschritte der Schwingungszahlen der „reinen“ (diatonischen) Tonleiter bedient.

Um cis´ zu erhalten gehen wir zum Beispiel vom d eine Septime hinauf. Diese entspricht der Schwingungszahl für das Intervall c - h und wir erhalten somit einen zwischen c´ und d´ liegenden Ton „cis´“. Die Verhältniszahl für die Frequenz dieses Tones ergibt

¹⁴Schröder, S. 64

¹⁵vgl. ebenda, S. 64

sich durch eine einfache Rechnung:

$$f_1 = 27 \cdot \frac{15}{8} = 50,625$$

27 entspricht der Verhältniszahl für die Frequenz von d und $\frac{15}{8}$ steht für die Schwingungszahl von h bezogen auf c (siehe Tabelle 2.2).

Wir setzen nun cis' als neuen Grundton ein und gehen von diesem zum Beispiel weiter nach f'. f' erhält man indem man f_1 mit der Schwingungszahl für die große Terz $\frac{5}{4}$ multipliziert (siehe Tabelle 2.2):

$$\frac{(27 \cdot 15)}{8} \cdot \frac{5}{4} = 63,28125$$

Wir erhalten für f' das Ergebnis 63,28125. Dem bisherigen Aufbau der Tonleiter zur Folge sollten wir aber als Ergebnis den Wert 64 erhalten:

$$\frac{48 \cdot 16}{15} \cdot \frac{5}{4} = 64$$

48 entspricht der Verhältniszahl für die Frequenz von c' (doppelte von c) und $\frac{16}{15}$ steht für die Schwingungszahl für einen halben Tonschritt (siehe Tabelle 2.2).

Wie man sehen kann, erhält man keine identen Lösungen, d.h. die berechnete Note cis' kann auf Grund der bisher festgelegten Verhältniszahlen nicht als Grundton eingesetzt werden.

(2) Geht man umgekehrt von f' mit der Verhältniszahl 64 eine große Terz hinunter dann erhält man folgendes Ergebnis:

$$64 \cdot \frac{4}{5} = 51,2$$

Der auf diese Weise gefundene Ton wird als „des“ (= enharmonische Verwechselte zu cis') bezeichnet und bildet den Grundton der des-Dur Tonleiter.

Wir fassen zusammen:

Geht man vom d eine große Septime hinauf erhalten wir das cis' mit der Verhältniszahl

50,625. Diese Verhältniszahl entspricht zwar nicht der vom reinen cis' (mit 15,2), aber die große Septime ist rein.

Geht man von f' (mit der Verhältniszahl 64) eine große Terz hinunter erhalten wir für das des' die Verhältniszahl 51,2.

Um diese Reinheit der Intervalle (große Septime, große Terz) zu bewahren, kam es zur folgenden Idee:

Eine mögliche, aber vor allem spieltechnisch umständliche Lösung, sollte die Klaviatur eines Klavichords mit 19 Tonschritten in der Oktave (Abb. 2.3), bringen.

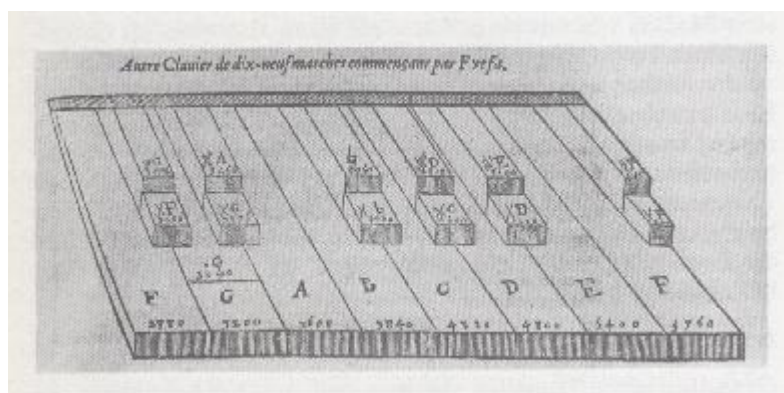


Abbildung 2.3: Klaviatur des Klavichords

Wie man aus dem Bild entnehmen kann, werden die kurzen Tasten halbiert, so dass der vordere Abschnitt die reine Septime bezüglich des Tones d liefert und der hintere Abschnitt der („reinen“) Verhältniszahl von cis' entspricht und mit f' die reine große Terz bildet.

Letztendlich musste man aber dieses Konzept verwerfen, denn abgesehen von der Spielbeeinträchtigung stieß man immer wieder auf neue unlösbare Schwierigkeiten. Die Lösung des Problems musste lauten, Abstriche bezüglich der Reinheit der Intervalle vorzunehmen. Die Forderung war eine Oktave mit 12 Tonschritten, mit der Möglichkeit, dass jeder dieser 12 Töne als Grundton einer Tonleiter eingesetzt werden kann. Es blieb daher keine andere Lösung, als jedem Tonschritt dieselbe Größe zuzuordnen.¹⁶

¹⁶vgl. Schröder, S. 65/66

Im Jahre 1585 erfand Simon Stevin, ein Kaufmann, Zivil- und Militäringenieur eine Methode Tasteninstrumente zu stimmen: „Er definierte das Frequenzverhältnis der kleinen Sekund, (d.h. das Frequenzverhältnis zweier aufeinander folgender Töne der zwölfstimmigen Tonleiter) als die $\sqrt[12]{2}$ genannte Größe.“¹⁷ Es handelt sich hierbei um eine „unendliche Dezimalzahl“.

$$\sqrt[12]{2} = 1,059463094...$$

Betrachten wir aber die Zahl nur mit den ersten neun Stellen nach dem Komma, dann ergibt sich daraus eine „endliche Dezimalzahl“, die zwölfmal mit sich selber multipliziert genau „2“ ergibt. Zwölf Tonschritte bzw. 12 kleine Sekunden ergeben somit genau die gewünschte reine Oktav.¹⁸

Genauer formuliert:

Möchte man von einem Ton mit der Frequenz f einen Halbtonschritt höher gehen, dann lautet die Rechnung: $f \cdot \sqrt[12]{2}$, bei einem Ganztonschritt: $f \cdot \sqrt[12]{2^2}$.

Aus der folgenden Tabelle 2.5 kann man leicht entnehmen, wie gut sich die von Stevin erfundene temperierte Stimmung an die reine Stimmung annähert:¹⁹

	pythagoreische Stimmung	diatonische Stimmung	temperierte Stimmung
c	1	1	1
d	1,12500	1,12500	1,12246
e	1,26563	1,25000	1,25992
f	1,33333	1,33333	1,33484
g	1,50000	1,50000	1,49831
a	1,68750	1,66667	1,68179
h	1,89844	1,87500	1,88775
c'	2	2	2

Tabelle 2.5: Vergleich der Schwingungszahlen bezogen auf den Grundton c in der Dezimalschreibweise

Beispiel:

Wählt man etwa f (Be-Tonart) als Grundton einer Dur- Tonleiter in temperierter Stimmung, so erhält man folgende Töne: f - g - a - b - c' - d' - e' - f'. Wählt man hingegen h (Kreuz-Tonart) als Grundton meiner Dur- Tonleiter in temperierter Stimmung, so erhält

¹⁷Taschner, S. 40

¹⁸vgl. ebenda, S. 40

¹⁹vgl., Schröder, S. 67

man folgende Töne: h - cis' - dis' - e' - fis' - gis' - ais' - h'.

Bei ais und b spricht man von einer „enharmonischen Verwechslung“. Sie „teilen“ sich eine Taste auf dem Klavier, sowie cis - des, dis - es, fis - ges, gis - as.

Mit der temperierten Stimmung fällt das pythagoreische Koma weg.

2.4 Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler versuchte die ästhetischen Phänomene der Musik mathematisch zu erfassen und ging von der Überlegung aus, das Verhältnis der Konsonanzen zu den ganzen Zahlen unter Betrachtung psychologischer Gesichtspunkte zu begründen. Euler ging von der Annahme aus, dass die Menschen an den Dingen Gefallen finden, in denen eine gewisse Vollkommenheit zu erkennen ist. *„Die Vollkommenheit eines Dinges sei aber dadurch bestimmt, daß alles an ihm auf die Erreichung seines Endzweckes hinarbeite.“*²⁰ Und wo diese Vollkommenheit ist, ist auch Ordnung. Bei den Tönen könne nur für Tonhöhe und Dauer, auf Grund der Intervalle und Rhythmus, eine Ordnung zum Vorschein treten. Es würde zwar auch noch eine Ordnung der Tonstärke möglich sein, für diese fehle es aber an einem Maße. *„Wie nun im Rhythmus zwei oder drei oder vier gleiche Noten der einen Stimme auf eine, zwei oder drei Noten der anderen Stimme fallen können, wobei wir die Regelmäßigkeit einer solchen Anordnung leicht bemerken, besonders wenn sich dieselbe oft hintereinander wiederholt, und uns eine solche Ordnung gefällt, so gefiele es uns auch besser, wenn wir bemerkten, daß zwei, drei oder vier Schwingungen eines Tones auf eine, zwei oder drei eines anderen kämen, als wenn das Verhältnis der Schwingungszeiten irrational oder nur durch große Zahlen darstellbar sei.“*²¹

Es folgt daraus, dass der Zusammenklang zweier Töne uns umso mehr gefällt, wenn die ganzen Zahlen, durch die ihr Schwingungsverhältnis ausgedrückt werden können, klein sind.

Er definierte daher zahlentheoretisch den „gradus suavitatis“, den Grad der Annehmlichkeit, zur Bestimmung der Stufe des Wohlklanges. Er kann auf verschiedene musikalische Phänomene wie Intervalle, Rhythmen, Akkorde und auch Formproportionen angewendet werden. Den Mittelpunkt der Definition bildet die Gradusfunktion Γ für natürliche Zahlen, die in folgender Art und Weise erklärt wird:

Ist $a \in \mathbb{N}$ das Produkt der Primzahlpotenzen

$$p_1^{e_1}, p_2^{e_2}, \dots, p_n^{e_n},$$

so ist

²⁰vgl. Helmholtz, S. 375

²¹Ebenda, S. 376

$$\Gamma(a) = 1 + \sum_{k=1}^n e_k p_k - \sum_{k=1}^n e_k$$

da zum Beispiel

$$60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

ist, hat man

$$\Gamma(60) = 1 + (2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5) - (2 + 1 + 1) = 9$$

d.h. 60 besitzt als Grad der Annehmlichkeit den Wert 9. Die Gradusfunktion für (gekürzte) Brüche $\frac{a}{b}$ erhält man aus der Fortsetzung

$$\Gamma\left(\frac{a}{b}\right) := \Gamma(a \cdot b)$$

so besitzt zum Beispiel die kleine Dezime $12 : 5$ wie die natürliche Zahl 60 den Annehmlichkeitsgrad 9.²²

Möchte man die Stufe²³ des Wohlklangs eines Akkordes finden, zum Beispiel die des Moll-Dreiklangs in Grundstellung mit den Verhältniszahlen²⁴ $10 : 12 : 5$, dann sucht man (=Euler) das kleinste gemeinsame Vielfache (=kgV) von 10, 12, 5. Demnach hat der Moll-Dreiklang in Grundstellung die Stufenzahl von 60, nämlich 9, da 60 durch 10, 12, 15 ohne Rest teilbar ist.

Die folgende Tabelle 2.6 zeigt die Stufen des Wohlklangs einzelner Intervalle und Akkorde.²⁵ Auf der Stufe 1 und 2 stehen Einklang und Oktav, diese werden als besonders angenehm empfunden.

²²vgl. Hrg. Götze, S. 10

²³Mit jeder weiteren höheren Stufe nimmt der Grad der Annehmlichkeit ab.

²⁴Weiter Verhältniszahlen für Akkorde siehe auch Unterkapitel: Fibonaccizahlen und Goldener Schnitt

²⁵vgl. Hrg. Götze, S. 11 und vgl. Helmholtz, S. 377

Gradusfunktion Γ	Intervalle
1	Einklang
2	Oktav ($\frac{1}{2}$)
3	Duodezim ($\frac{1}{3}$); Doppeloktave ($\frac{1}{4}$)
4	Quinte ($\frac{2}{3}$)
5	Quarte ($\frac{3}{4}$)
6	große Dezime; Undezime
7	große Sexte; große Terz
8	kleine Sexte; kleine Terz
9	Septime ($\frac{4}{7}$); Durdreiklang; Dur-Quartsextenakkord; Moll-Sextenakkord
10	Dur- Sextenakkord; Moll-Quartsextenakkord

Tabelle 2.6: Stufen des Wohlklangs

Für eine vertiefende Auseinandersetzung mit diesem Thema siehe das Buch „Die Lehre von den Tonempfindungen - als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik“ von Hermann von Helmholtz.

3 Musikalische Akustik

Die Akustik ist ein Teilgebiet der Physik, die sich mit der Ausbreitung von Longitudinalwellen in Gasen, Festkörpern und Flüssigkeiten beschäftigt. Von wichtiger Bedeutung sind die Ausbreitung von Schall in Luft und die bei uns Menschen ausgelösten Schallempfindungen, die je nach Amplitude und Frequenzverlauf als Ton, Geräusch oder Knall wahrgenommen werden.¹

3.1 Schwingungen und Wellen

Unter einer Schwingung bzw. Oszillation versteht man den Verlauf einer periodischen Zustandsänderung, wenn ein System auf Grund einer Störung aus der „Null- oder Ruhelage“² gebracht und durch eine Rückstellkraft wieder in die Richtung des Ausgangszustandes gezwungen wird.³

Man denke zum Beispiel an einen Metallquader einer Masse M , der auf einer Feder befestigt ist.

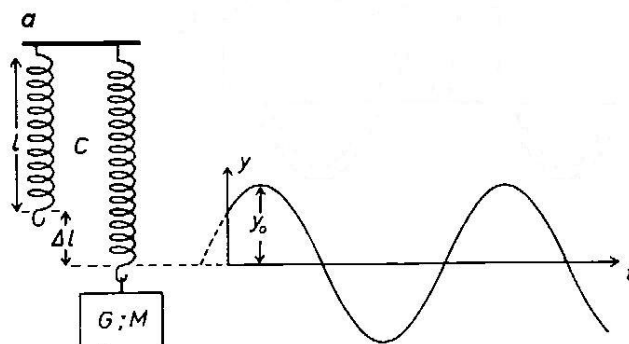


Abbildung 3.1: Feder mit einem Metallquader der Masse M

¹vgl. Hering, Martin, Stohrer, S. 490

²Güth, S. 51

³<http://de.wikipedia.org/wiki/Schwingung>

In der Abbildung 3.1 ist eine Feder mit einem Metallquader der Masse M bzw. Gewicht G dargestellt. y beschreibt die Auslenkung aus der Ruhelage (Elongation). y_0 entspricht dem maximalen Wert der Auslenkung.

Die Ruhelage entspricht der Länge $l + \Delta l$.

„Die statische Dehnung Δl ist der Gewichtskraft G des Klotzes proportional.“⁴ Den Proportionalitätsfaktor nennen wir C , ein Maß für die Elastizität der Feder.

Es gilt:

$$\Delta l = C \cdot G$$

„Je größer C ist, desto größer ist die Federdehnung Δl bei gleich bleibendem Gewicht G .“⁵ Diese Gleichung wird als das „Hookesche Gesetz“ oder auch „lineares Kraftgesetz“ bezeichnet. Es besagt, dass jede Materialdeformation, die durch eine Kraft bewirkt wird, dieser Kraft proportional ist (mit dieser Kraft linear anwächst)⁶. Für die zum Beispiel im Geigenbau verwendeten Materialien tritt dieses Gesetz in Kraft. Weiters gilt:

„Je weicher die Feder, d.h. je größer ihre Federung C ist, desto kleiner ist die Schwingungsfrequenz v .“⁷

$$v = \frac{1}{2\pi\sqrt{MC}}$$

Wie man aus der Formel entnehmen kann ist v nicht nur von C , sondern auch von der Masse M des Metallklotzes abhängig und es gilt:

„Je größer M ist, desto tiefer ist die Frequenz, oder wenn man die Frequenz als Tonhöhe versteht, desto tiefer ist der Ton.“⁸

Die Frequenz, gemessen in Hertz (Hz), nimmt in der musikalischen Akustik einen wichtigen Stellenwert ein, denn sie gibt uns die Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde an und diese Kenntnis ist für Stimmung der Instrumente von entscheidender Bedeutung. Um das gemeinsame Musizieren im Orchester, Ensembles usw. zu ermöglichen, wählt man einen einheitlichen Bezugspunkt, den so genannten Kammer- oder Normalton a . Seine Tonhöhe bzw. Frequenz wurde im Verlauf der Musikgeschichte mehrfach variiert. 1939 setzte man auf einer internationalen Konferenz in London den nun gebräuchlichen Stimmton a^1 mit 440Hz fest.

⁴Güth, S. 51

⁵Ebenda S. 51

⁶Ebenda, S 51

⁷Ebenda, S. 51

⁸Ebenda, S. 51

Das bedeutet nun, dass die nach dem Kammerton gestimmte A-Saite einer Geige 440 Schwingungen pro Sekunde vollführt.

Zusätzlich zur Frequenz ν ist auch die Bezeichnung „Kreisfrequenz“ (Winkelgeschwindigkeit) ω gebräuchlich. Sie ergibt sich durch die Multiplikation:

$$\omega = 2\pi\nu \text{ in } s^{-1}$$

Weiters gilt:

„Wenn ν die Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde ist, so ist die „Periodendauer“ oder „Schwingungsdauer“ T der Kehrwert von ν , also“⁹

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Als Beispiel sei nun wieder die gestimmte A-Saite der Geige erwähnt, die demnach für eine Hin- und Herschwingung bzw. für eine Schwingungsperiode $T_a = \frac{1}{440}$ Sekunden bzw. 0,00227 Sekunden benötigt. Umgerechnet in Millisekunden, dem Tausendstel einer Sekunde, entspricht dieses Ergebnis 2,27ms.¹⁰

Zusammenfassend soll nun bewusst darauf hingewiesen werden, dass die Höhe und Tiefe eines Tones von der Frequenzzahl abhängig ist, d.h. *„hohe Schwingungszahlen entsprechen hohen Tönen und niedrige Schwingungszahlen entsprechen tiefen Tönen.“*¹¹ Für die Tonstärke ist hauptsächlich die Amplitude zuständig. Die Lautstärke des Tones wächst mit der Größe der Amplitude.

3.1.1 Die Harmonische Schwingung

Eine Schwingung wird als harmonische Schwingung bezeichnet, wenn die Frequenzen der Oberschwingungen im ganzzahligen Verhältnis zur Grundfrequenz stehen. Eine solche Schwingungsgruppe wird als „Klang“ (natürlicher Ton) bezeichnet. Im Unterschied dazu steht die Definition für den musikalischen „Ton“ (reiner Ton), der durch eine einzelne Sinusschwingung erzeugt wird. Bei Tönen und Klängen handelt es sich stets um periodische Schwingungen.¹²

⁹Güth, S. 52

¹⁰vgl. Hall, S. 35

¹¹Ziegenrucker, S.10

¹²vgl. Hall, S. 67 und vgl. DTV, S. 17

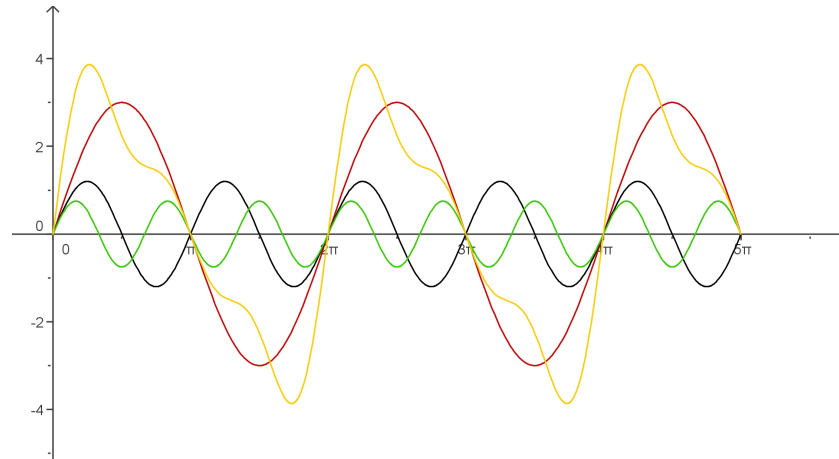


Abbildung 3.2: Eine harmonische Schwingung ergibt einen Klang

Die Abbildung 3.2 zeigt eine harmonische Schwingung (gelb), die sich ergibt, wenn man die Grundschiwingung (rot) und die beiden Oberschwingungen (schwarz und grün) überlagert, d.h. addiert. Die Grundschiwingung bzw. Grundfrequenz ergibt den hörbaren Grundton. Die Oberschwingungen sind die so genannten Obertöne, die je nach Instrument, gespielten Ton (hoher oder tiefer, lauter oder leiser Ton) und spielerischem Können verschieden stark ausgeprägt sind und zusätzlich zum Grundton wahrgenommen werden. Sie bestimmen die so genannte Klangfarbe eines jeden Instruments.

Beispiel:

Wir berechnen nun Obertöne die im ganzzahligen Verhältnis zur Grundfrequenz stehen. Betrachten wir wieder unseren Kammerton a^1 mit der Grundfrequenz $f_1 = 440\text{Hz}$. Dann erhalte ich durch eine einfache Rechnung folgende Obertöne:

$$f_2 = f_1 \cdot 2 = 880\text{Hz}$$

$$f_3 = f_1 \cdot 3 = 1320\text{Hz}$$

$$f_4 = f_1 \cdot 4 = 1760\text{Hz}$$

$$f_5 = f_1 \cdot 5 = 2200 Hz$$

...

Diese Frequenzen sind jeweils im Abstand von 440Hz voneinander entfernt und bilden daher eine Folge, die man als Teiltonreihe oder auch Partialtonreihe (manchmal auch als harmonische Reihe) bezeichnet.¹³

Als Gegenpart zu den Klängen betrachten wir das Geräusch. Seine Schwingungen sind aperiodisch und die dazugehörige Partialtonreihe unharmonisch, das bedeutet, dass das Verhältnis der Oberfrequenzen zur Grundfrequenz nur in Bruchproportionen wie 1 : 1, 1 : 2 etc. ausdrückbar ist.

Eine harmonische Schwingung lässt sich durch folgende allgemeine Gleichung darstellen.¹⁴

$$y(t) = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Die Gleichung steht für das Weg-Zeitgesetz der harmonischen Schwingungen und wird weiters beschrieben durch:

- die Kreisfrequenz bzw. Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- die von den Anfangsbedingungen abhängigen Konstanten $\hat{y}$ (Amplitude/Scheitelwert) und φ_0 (Nullphasenwinkel).

¹³vgl. <http://www.geogebra.org/de/examples/fourier/index.htm>, vgl. Hall, S. 139

¹⁴Physik für Ingenieure, S. 345

Charakteristische Größen im Überblick:¹⁵

Kenngröße	Bedeutung
Momentanwert $y(t)$	momentane Auslenkung zur Zeit t
Amplitude	maximaler Wert der Auslenkung
Nullphasenlage φ_0 (Anfangsphase)	Anfangslage des schwingenden Systems zur Zeit $t=0$
allgemeiner Phasenwinkel (Momentanphase) φ	$\varphi = \omega t + \varphi_0$ Summe der Phasenlage eines Punktes zur Zeit t (ωt) und des Nullphasenwinkels φ_0
Phasen	augenblicklicher Zustand einer Schwingung (bestimmt durch zwei Schwingungsgrößen, z.B. Weg und Zeit)

Tabelle 3.1: Charakteristische Größen

3.2 Schall

Der Unterschied zwischen einer Schwingung und einer Welle besteht darin, dass es sich bei einer Schwingung um eine lokale, mehr oder weniger regelmäßige Änderung einer physikalischen Größe in der Zeit handelt, hingegen die Welle das räumliche und zeitliche Fortschreiten einer solchen Bewegung meint.¹⁶

Schall ist eine vibrierende Störung und wird als Wellenerscheinung bezeichnet, die sich von seinem Entstehungsort her ausbreitet¹⁷.

Als Longitudinal- oder Längswelle, wandert der Schall zum Beispiel von einem vibrierenden Lautsprecher in einer komprimierbaren Substanz wie die der Luft radial nach außen (Abb.: 3.3).

¹⁵vgl. Hering, Martin, Stohrer, S. 346:

¹⁶vgl. Barkowsky, S. 28

¹⁷vgl. Hall, S. 24

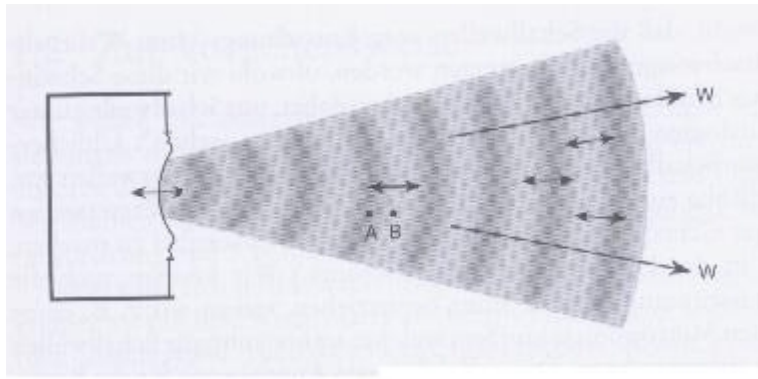


Abbildung 3.3: Ausbreitung von Schallwellen

Das Wellenmuster „wandert“, aber die Teilchen der Luft bewegen sich nur innerhalb eines kleinen Bereichs vor und zurück und parallel zur Ausbreitungsrichtung des Wellenmusters. Die dunkleren Abschnitte in Abbildung 3.3 bezeichnet man als Verdichtungen, das bedeutet, dass hier Luftdruck und Dichte größer sind, als sie es im Ruhezustand wären. Im Unterschied dazu liegen im Bereich der Verdünnungen Dichte und Luftdruck unterhalb der Werte als sie es ohne Schallwellen wären. Der Abstand zwischen zwei Wellenhügeln (entlang der Ausbreitungsrichtung) wird als Wellenlänge bezeichnet und mit dem griechischen Buchstaben λ versehen. *Die Wellenlängen des Schalls reichen von ungefähr $\lambda = 2\text{cm}$ für die höchsten noch hörbaren bis zu $\lambda = 20\text{m}$ für die tiefsten Töne.*¹⁸

Das Trommelfell im Ohr reagiert auf diese entstehenden Druckschwankungen. Das menschliche Gehör ist quasi ein biologischer Schallwandler, der für die Lautstärke- und Schallfrequenzempfindung zuständig ist.¹⁹

Der für uns Menschen wahrnehmbare Frequenzbereich liegt ungefähr zwischen 20Hz und 20 000Hz. Dies entspricht ungefähr einem Umfang von 10 Oktaven. Die niedrigen Frequenzen werden demnach als tiefe und die hohen Frequenzen als hohe Tonhöhe empfunden.

¹⁸vgl. Hall, S. 25

¹⁹vgl. Hering, Martin, Stohrer, S. 490

3.2.1 Geschwindigkeit des Schalls

Führt man mit einem Menschen ein Gespräch, der einem unmittelbar gegenübersteht, bekommt man den Eindruck, dass die Schallwellen im selben Moment in unserem Ohr ankommen, in dem sie gesprochen werden. Hat man zur Schallwelle jedoch einen Abstand von mindestens 20 Meter, so wird man feststellen können, dass sie etwas Zeit für die Zurücklegung dieses Weges brauchen. Ein Beispiel dafür wäre ein Dirigent, der von den Konzertbesuchern, die im hinteren Teil des Saales ihre Plätze einnehmen, doch eine größere Distanz entfernt steht. Die Armbewegungen, die beim Dirigieren durchgeführt werden und die ankommenden Schallwellen weisen einen deutlichen Zeitunterschied auf. Von manchen Menschen wird diese Tatsache als sehr unangenehm empfunden.

Die Schallwellen sind jedoch immer noch so schnell, dass es nicht einfach ist, ihre Geschwindigkeit genau zu messen.

„Die Geschwindigkeit von Schallwellen in trockener Luft bei Raumtemperatur ($T = 20^\circ\text{C}$) beträgt $v_{20} = 344$ Meter pro Sekunde; 344 m/s entsprechen 1.238 km/h .“²⁰ Das bedeutet, dass der Schall ungefähr 3 Sekunden benötigt, um einen Kilometer zurückzulegen und im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit, die fast eine Million mal schneller ist, sich daher relativ langsam bewegt.

Es ist vor allem für Musiker folgende Tatsache von Bedeutung, „dass Luft ein nicht-dispersives Medium ist“.²¹ Darunter ist zu verstehen, dass sich alle Schallwellen, unabhängig von ihrer Frequenzzahl, mit derselben Geschwindigkeit ausbreiten. Wäre dies nicht so, würden hohe und tiefe Töne, die eigentlich zur selben Zeit wahrgenommen werden sollten, sprich Akkorde, unsere Ohren zu unterschiedlichen Zeiten erreichen und folglich ein komplett verfälschtes, chaotisches Klangerlebnis darstellen.

Wir haben im Zuge dieser Arbeit drei grundlegende physikalische Eigenschaften kennen gelernt, mit denen sich jede wiederholende Welle beschreiben lässt:

- die Frequenz f in Hertz (Hz)
- die Wellenlänge λ in Meter (m)
- die Geschwindigkeit v in ms^{-1}

Ihre Beziehung kann in der Gleichung $v = \lambda \cdot f$ ausgedrückt werden und gilt für jede Form von Wellen. Kennen wir zwei Größen, dann kann sofort die dritte berechnet werden.

²⁰Hall, S. 25

²¹Ebenda, S. 26

Beispiel:

Stellen wir uns eine angeschlagene Stimmgabel bei 20°C im Freien (damit wir eine störende Reflexion ausschließen können) vor. Die Stimmgabel gibt den Kammerton a^1 mit 440 Schwingungen pro Sekunde an, d.h. es bewegen sich 440 Verdichtungszone pro Sekunde von ihr weg und zwar eine nach der anderen. Ist eine Sekunde vergangen, dann hat sich die allererste bereits 344m entfernt. Könnte man den Klang in einer Momentaufnahme von oben betrachten, so würde diese zu diesem Zeitpunkt 440 vollständige Wellen, gleichmäßig verteilt über 344m zeigen. Die Wellenlänge λ bzw. der Abstand zwischen je zwei Wellenkämmen beträgt demnach:²²

$$\begin{aligned}v &= \lambda \cdot f \Leftrightarrow \\ \lambda &= \frac{v}{f} \\ \lambda &= \frac{344ms^{-1}}{440ms^{-1}} = 0,782m = 78,2cm\end{aligned}$$

3.3 Konstruktive und destruktive Interferenz

Als Interferenz bezeichnet man die Überlagerung von zwei oder mehreren Schallsignalen mit gleicher Frequenz, die sich durch Addition ihrer Amplituden entweder auslöschen oder verstärken. Wir gehen nun von einem Beispiel in der Praxis aus, das die Interferenz veranschaulichen soll:

In einem Raum sind zwei Lautsprecher (Schallquellen) angebracht, die beide an einem Verstärker angeschlossen sind. Beiden Lautsprechern sind exakt dieselben Klänge zu entnehmen, d.h. die Schallsignale haben dieselbe Frequenz. Was wird nun passieren, wenn diese gleichfrequenten Schallsignale, die aus unterschiedlichen Richtungen kommen, zur selben Zeit in einem Punkt aufeinandertreffen?²³

²²vgl. Hall, S. 36

²³vgl. ebenda, S. 82

Betrachten wir nun folgende Abbildung 3.4:

Die beschrifteten Punkte sollen die Zuhörer symbolisieren.

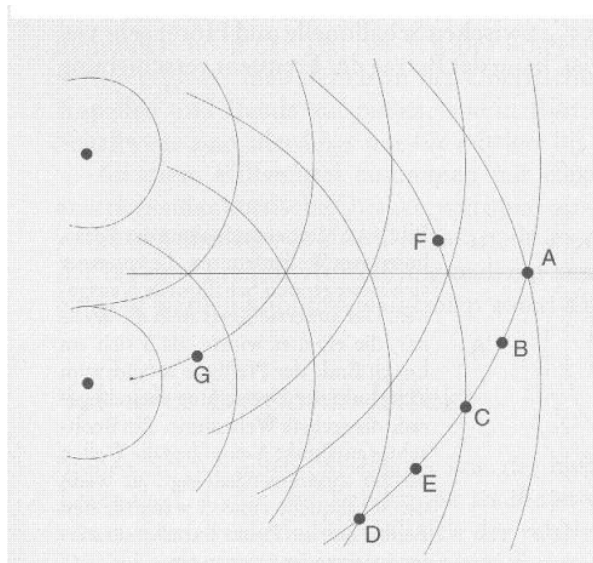


Abbildung 3.4: Zwei Lautsprecher, die idente Klänge erzeugen

Die gleichfrequenten Schallsignale, die von beiden Lautsprechern ausgehen, überlagern sich an bestimmten Punkten bzw. Linien im Raum. Zuhörer A sitzt von beiden Schallquellen gleich weit entfernt. Bei ihm treffen die beiden Schallsignale zur selben Zeit ein; man sagt in diesem Fall, die beiden Signale sind beim Zuhörer A in Phase. Die Interferenz oder Störung bei Zuhörer A hat daher die doppelte Amplitude wie eine Welle alleine. Der Zuhörer B sitzt eine halbe Wellenlänge weiter von einem Lautsprecher entfernt als vom anderen. Das bedeutet nun, dass sich die Ankunftszeiten der Schallsignale bei dem Zuhörer B um eine halbe Schwingungsperiode unterscheiden. Die Wellen sind daher bei B 180° phasenverschoben und die Interferenz ist auf Grund der Addition ihrer gleich großen Amplituden Null.²⁴

Im Zeitverlaufs- Graphen werden die konstruktive Interferenz (=Verstärkung) und die destruktive Interferenz (=Auslöschung) noch besser veranschaulicht:

²⁴vgl. Hall, S. 82/83

Situation für Zuhörer A:

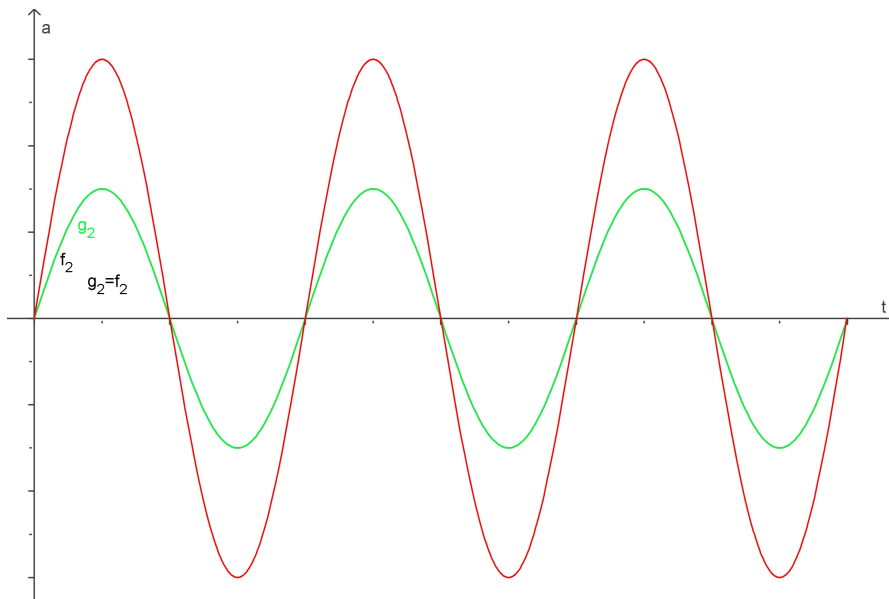


Abbildung 3.5: Konstruktive Interferenz (=Verstärkung)

Das Signal f_2 wird in der Abbildung 3.5 von dem Signal g_2 verdeckt und das ist auch der Grund dafür, warum man nur die grüne Schwingung sehen kann, es sind aber dennoch beide vorhanden. Beide Signale bzw. Schwingungen haben dieselbe Amplitude - sie verstärken sich. Durch Überlagerung (d.h. Addition ihrer Amplituden) erhält man die gesamte Störung. In der Abbildung entspricht dies der roten Linie.

Situation für Zuhörer B:

In der Abbildung 3.6 sind die Signale phasenverschoben. Durch Überlagerung der beiden Schwingungen, bzw. durch Addition ihrer Amplituden ergibt die Gesamt-Störung Null und das Ergebnis ist keine Schwingung.

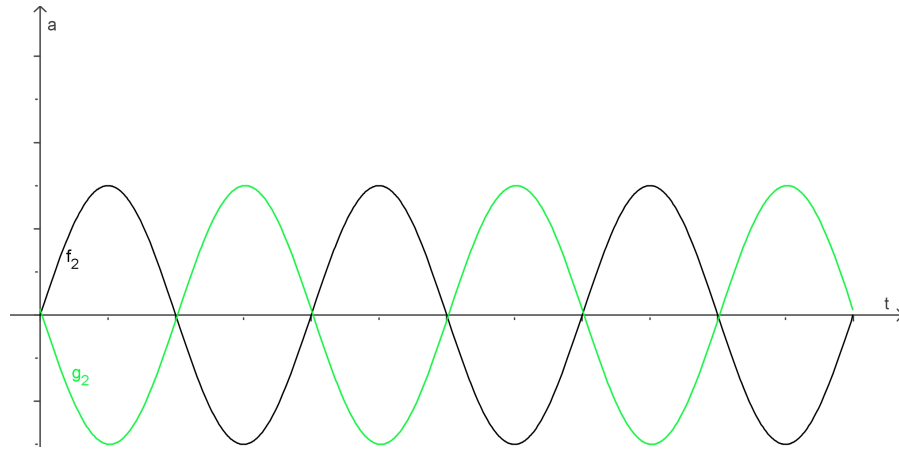


Abbildung 3.6: Destruktive Interferenz (=Auslöschung)

Kehren wir nun zur Frage zurück, die wir uns am Anfang gestellt haben: Was wird passieren, wenn diese gleichfrequenten Schallsignale, die aus unterschiedlichen Richtungen kommen, zur selben Zeit in einem Punkt aufeinander treffen? Nun, in unserem idealisierten Beispiel würde es an manchen Stellen gar keine Klangwahrnehmung geben und daher sollte man es eher unterlassen zwei Lautsprecher in einem Raum mit demselben Signal zu beschicken. In Wirklichkeit wird aber auf Grund der Reflexion von den Wänden die Schallverteilung ausgeglichen.²⁵

3.4 Schwebung

Unter einer Schwebung versteht man die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen gleicher Raumrichtung, aber mit geringen Frequenzunterschieden. Sind die Amplituden der beiden Schwingungen gleich, so spricht man von einer reinen Schwebung, sind sie nicht gleich, dann tritt eine unreine Schwebung auf.²⁶ Die Schwebungsfrequenz f_s erhält man durch die Differenz von f_1 und f_2 zweier harmonischer Schwingungen, so dass gilt: $f_s = f_1 - f_2$. Ihre Amplitude schwankt periodisch, sodass ein An- und Abschwellen der Lautstärke wahrgenommen wird. Diese Lautstärkeschwankungen werden vor allem beim Stimmen von Saiteninstrumenten hörbar.²⁷

²⁵vgl. Hall, S. 83/84

²⁶vgl. Hering, Martin, Stohrer, S. 372

²⁷DTV, S. 15

Beispiel:

Wir betrachten nun ein 1-Sekunden-Intervall. Zwei Wellen sollen sich zu Beginn des Intervalls exakt in Phase befinden. Wählen wir zum Beispiel für die erste Welle die Frequenz $f_1 = 262\text{Hz}$ und für die zweite $f_2 = 256\text{Hz}$, dann durchläuft die zweite Welle sechs ganze Zyklen weniger pro Sekunde, als die erste, da die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde (=Frequenz) der zweiten Welle (f_2) um 6Hz niedriger ist als die der ersten (f_1). Wenn nun eine Sekunde abgelaufen ist, dann kommen diese beiden Wellen gerade wieder zum sechsten Mal in Phase. Das bedeutet nun, dass sechs Schwebungen pro Sekunde entstanden sind. Musiker nutzen oft die Schwebungen zum Stimmen ihrer Instrumente. Denn je schnellere Schwebungen wahrgenommen werden, wenn man zwei Instrumente zusammenstimmen möchte, desto größer ist ihr Frequenzunterschied. Schwebungen, die langsamer als einmal pro 2-3 Sekunden sind, können nur schwer wahrgenommen werden, deshalb kann man mit einem Stimmungsergebnis mit einem Frequenzunterschied von 0,5Hz sehr zufrieden sein.²⁸

Beispiel für eine reine Schwebung dargestellt als Zeitverlaufsgraphen:

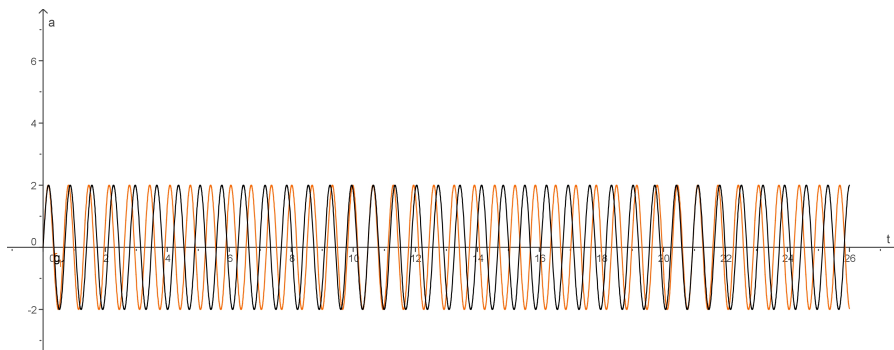


Abbildung 3.7: Überlagerung von zwei Sinusschwingungen mit geringem Frequenzunterschied

²⁸vgl. Hall, S. 85

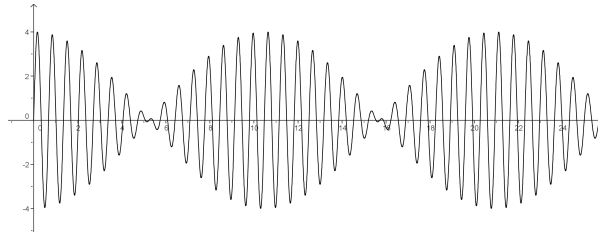


Abbildung 3.8: Reine Schwebung

In der Abbildung 3.7 sieht man zwei Sinusschwingungen mit gleicher Amplitude, aber mit unterschiedlicher Frequenz. Addiert man diese beiden abgebildeten Schwingungen, dann erhält man den Zeitverlaufsgraphen für die reine Schwebung (Abb.: 3.8).

4 Fourier-Analyse

Unter einer Fourier-Analyse oder harmonischen Analyse, benannt nach dem Mathematiker und Physiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), versteht man die Entwicklung einer periodischen Funktion $f(x) = f(x + 2\pi)$ in eine Reihe von elementaren Cosinus- und Sinusschwingungen, der so genannten Fourier- Reihe. Angewendet in der Klanganalyse bedeutet es die Möglichkeit, eine harmonische Schwingung (Klang) in ihre Spektralbestandteile bzw. Elementarschwingungen zu zerlegen.¹

4.1 Die Fourierreihe

Mit Hilfe der Fourierreihe kann man jede beliebige periodische Schwingungsform darstellen. Das Ziel lautet: wir wollen durch die Addition von Sinus- und Cosinusschwingungen periodische Funktion approximieren.

Die allgemeine Form der Fourierreihe ist:

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \dots + A_n \cos nx + B_n \sin nx, \quad n \rightarrow \infty$$

oder

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos kx + B_k \sin kx]$$

Mit steigender Anzahl der Terme wird die Approximation an die Originalfunktion (=jede beliebige periodische Schwingungsform, die man annähern möchte) exakter. Geht man mit der Zahl der Terme der Fourierreihe gegen ∞ , erhält man die Originalfunktion. Die einzelnen Terme der Fourierreihe bilden die Partialschwingungen (= Grundton und Obertöne) eines Klages.

¹vgl. Barkowsky, S. 27

Die Variable $x \in [0; 2\pi]$ steht für die Periode der Schwingung und f bedeutet die Frequenz. Weiters erhält man mit $x = \omega t$ und $\omega = 2\pi f$ die Abhängigkeit von t , der Zeit.²

Der Summand $\frac{A_0}{2}$ ist für die Verschiebung der Schwingung entlang der Ordinate verantwortlich, wenn er ungleich null ist.³

Das Ziel der Fourier-Analyse ist das Auffinden der Koeffizienten A_k und B_k . A_k und B_k legen die Phase und die Amplitude der Schwingung eines jeden Terms fest und sind durch folgende Integrale gegeben.

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Zur Herleitung der Integrale für die Fourier-Koeffizienten

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos kx + B_k \sin kx]$$

Nehmen wir an, dass die Fourierreihe $g(x)$ überall konvergent ist und $g(x)$ in allen Punkten x den Grenzwert $f(x)$ (=Originalfunktion) hat, dann kann man anstatt $g(x)$ gleich $f(x)$ schreiben, sodass:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos kx + B_k \sin kx]$$

Weiters sei $s \in [1, n]$ die Bezeichnung eines beliebigen Termes dieser Reihe, den man berechnen will, wobei später der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchgeführt wird. Wir multiplizieren als nächstes die Gleichung mit $\cos sx$.

$$f(x) \cdot \cos sx = \frac{A_0}{2} \cdot \cos sx + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos kx \cdot \cos sx + B_k \sin kx \cdot \cos sx]$$

²vgl. Barkowsky, S. 27

³vgl. ebenda, S. 37

Nun bildet man auf beiden Seite das Integral von $x = 0$ bis $x = 2\pi$. „Die Fourier-Reihe ist für die Periode von 2π definiert.“⁴

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos sx \, dx &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{A_0}{2} \cdot \cos sx + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos kx \cdot \cos sx + B_k \sin kx \cdot \cos sx] \right\} dx \\ &= \frac{A_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos sx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos sx \, dx + B_k \int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos sx \, dx \right]\end{aligned}$$

Die Integrale $\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos sx \, dx$ und $\int_0^{2\pi} \cos kx \, dx$ sind für ganzzahlige s und k immer gleich 0.

Das kann man zeigen indem man folgende Formel für das Verwandeln eines Produkts in eine Summe anwendet:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \\ \int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos sx \, dx &= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin x(k - s) \, dx}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos x(k + s) \, dx}_0 = 0\end{aligned}$$

Beide Integrale werden Null, da jeweils über eine vollständige Periode integriert wird.⁵

Folgendes bleibt übrig:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos sx \, dx = \sum_{k=1}^N \left[A_k \int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos sx \, dx \right].$$

Wird nun der Fall betrachtet, bei dem $k = s$ mit $s \geq 1$ ist, dann fällt das Summenzeichen weg und man bekommt:

⁴vgl. ebenda, S. 38

⁵http://abi06.jcrg.de/facharbeiten/Facharbeit_PhysikLK_04-06_Sebastian_Fiedlschuster.pdf

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos sx \, dx = A_s \int_0^{2\pi} \cos sx \cdot \cos sx \, dx.$$

Das $\int_0^{2\pi} \cos sx \cdot \cos sx \, dx$ ergibt den Wert π , wenn $k = s$ ist. Dies kann man zeigen indem man wieder die Formel

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

anwendet und man erhält:⁶

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos sx \cdot \cos sx \, dx &= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos x(k - s) \, dx}_{1 \cdot 2\pi} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos x(k + s) \, dx}_0 = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos sx \cdot \cos sx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos x(k - s) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi \end{aligned}$$

Hier ist $k = s$. Wir erhalten die Gleichung:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos sx \, dx = A_k \cdot \pi.$$

Um A_k auszudrücken, formen wir um und erhalten:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx.$$

Da der Kosinus von 0 gleich 1 ist, kann man $k = 0$ setzen und es gilt:⁷

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \, dx.$$

⁶http://abi06.jcrg.de/facharbeiten/Facharbeit_PhysikLK_04-06_Sebastian_Fiedlschuster.pdf

⁷Barkowsky, S. 40

Die Herleitung des Integrals für $B_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx$ folgt analog.

Addiert man A und B, so erhält man die Amplitude a der resultierenden Schwingung.
Es gilt:⁸:

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}$$

4.2 Ein Anwendungsbeispiel

Gegeben sei die Rechteckskurve

$$f(x) = \begin{cases} +1, & \text{bei } 0 < x \leq \pi \\ -1, & \text{bei } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}.$$

Gesucht ist die Fourierreihe von f(x).⁹

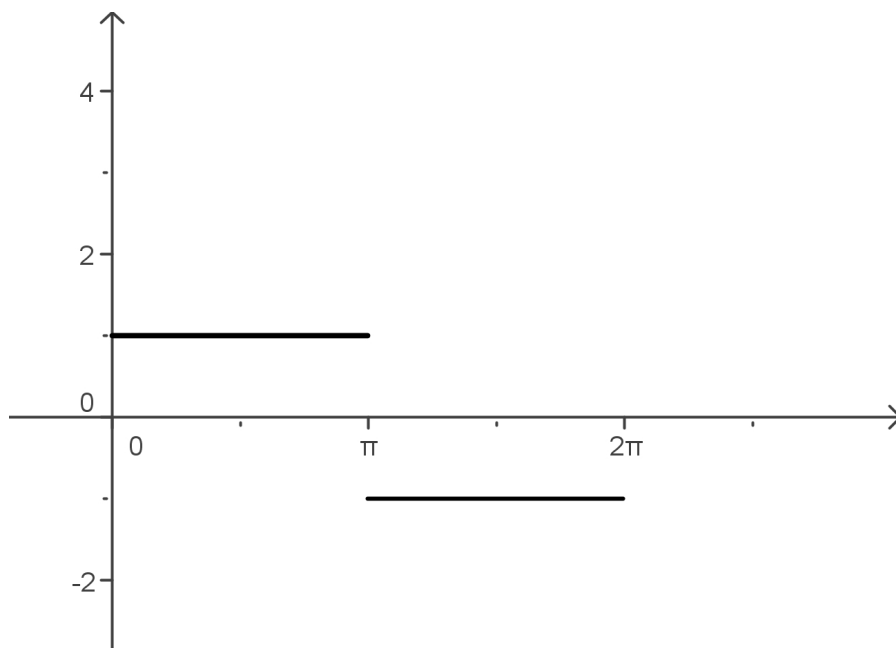


Abbildung 4.1: Rechteckskurve

⁸vgl. Barkowsky, S. 31

⁹vgl. http://www.pi5.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/mathe-ss06/vorl_9.pdf

$f(x)$ ist eine ungerade Funktion: $f(x) = -f(-x)$, d.h. der Funktionsgraph verläuft innerhalb einer Periode symmetrisch zum Ursprung.

Somit ist: $A_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx = 0$ und $A_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = 0$.¹⁰

Würde man zu einer zum Ursprung symmetrischen Funktion eine achsensymmetrische Funktion (bzgl. der y-Achse) addieren, dann geht für die Funktion die Symmetrie zum Ursprung verloren. Daher muss die Approximation für eine ungerade Funktion aus einer Summe von ungeraden Funktionen bestehen. Deswegen müssen alle Koeffizienten für die geraden Cosinus-Glieder Null sein.¹¹

Die Fourierreihe hat daher folgende Form:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx$$

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{-\cos kx}{k} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi k} \cdot [-\cos k\pi - (-\cos 0)] \\ &= \frac{2}{\pi k} \cdot [-\cos k\pi + \cos 0] \end{aligned}$$

Für $\cos(k\pi)$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$\cos k\pi = \begin{cases} -1, & \text{für } k = 1, 3, 5, \dots, \\ +1, & \text{für } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

¹⁰vgl. Leupold, S. 54

¹¹vgl. http://abi06.jcrg.de/facharbeiten/Facharbeit_PhysikLK_04-06_Sebastian_Fiedlschuster.pdf

$$\begin{aligned}
 B_k &= \frac{2}{k\pi} \cdot (1 + 1) \text{ für } k = 1, 3, 5, \dots \\
 &= \frac{4}{k\pi} \\
 B_k &= \frac{2}{k\pi} \cdot (-1 + 1) \text{ für } k = 2, 4, 6, \dots \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f lautet also:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}
 \end{aligned}$$

Wenn man nun die Fourierreihe von $f(x)$ mit $k = 1$ berechnet, erhält man die rote Funktion, für $k = 3$ erhält man die gelbe (Abb. 4.2).

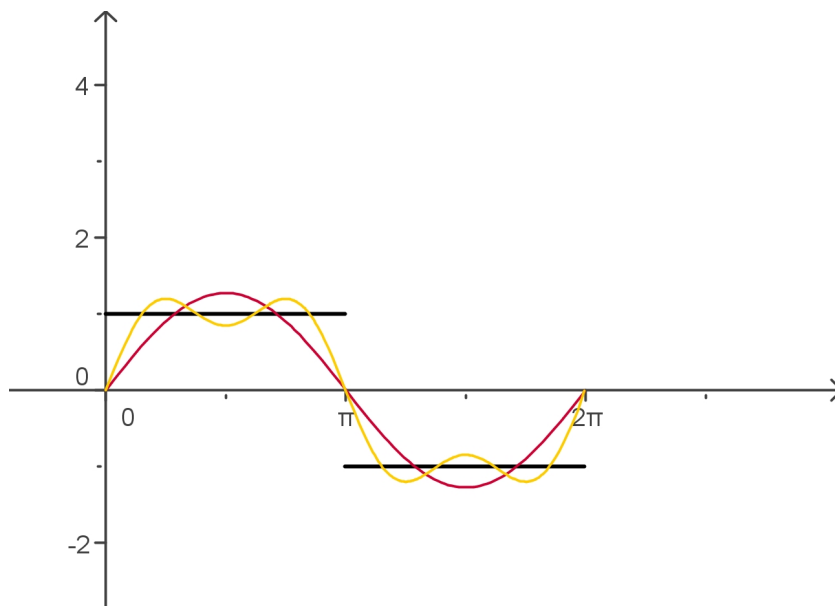


Abbildung 4.2: $f(x)$ mit $k = 1$ und $k = 2$

Wählt man für $k = 17$, dann nähert sich die Fourierreihe schon ziemlich gut an die gegebene Funktion (schwarz) an (Abb. 4.3).

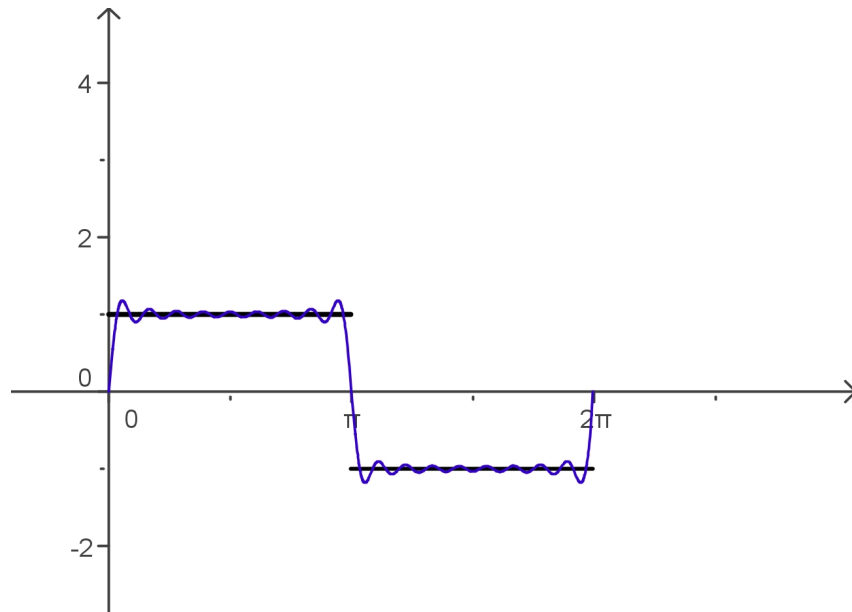


Abbildung 4.3: $f(x)$ mit $k = 17$

4.3 Sägezahnsschwingung als Beispiel für die Fourierreihe

Eine Möglichkeit die Saite eines Streichinstrumentes in Schwingungen zu versetzen, ist der Bogen. Man drückt die Bogenhaare auf die Saite und zieht ihn entweder in Aufstrich- oder Abstrichbewegung parallel zum Steg bis zur Spitze bzw. zum Frosch des Bogens. Während man zieht nehmen die Haare die Saite ein Stück des Weges mit, bis die Haftung nicht mehr reicht und die Saite sich durch die wachsende Spannung losreißt und zurückschnellt. Das Zurückschnellen passiert mit solch einer Geschwindigkeit, dass der auf der Saite haftende Kolophoniumfilm so stark erhitzt, sodass das Kolophonium schmilzt und flüssig wird. In diesem Zustand bildet es ein Gleitmittel auf dem die Saite gut abgleitet, bis ihre zuvor gespeicherte Energie verbraucht ist und sie wieder zur Ruhe kommt. Das Kolophonium erstarrt in dem Moment, wenn die Gleitbewegung und die einhergehende Hitzeentwicklung aufhören und wird zu einem Klebemittel, dass das Zusammenschweißen von Saite und Bogenhaare bewirkt. „Der Bogen nimmt die Saite wieder mit, bis die Schweißnaht reißt und die Saite wieder abgleitet. Dann beginnt das Spiel von vorne.“¹²

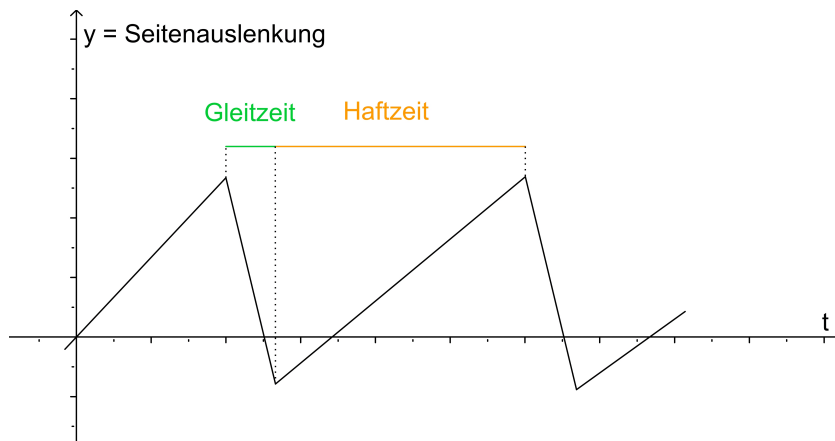


Abbildung 4.4: Sägezahnkurve

¹²Güth, S. 72

Die Sägezahnkurve (Abb. 4.4) liefert die Beschreibung der Saitenbewegung, während der Bogen die Saite führt. Wir nennen h die „Haftzeit“, da in dieser Zeit die Saite am Bogen haftet. Mit g bezeichnen wir die „Gleitzeit“, da in dieser Zeit die Saite abgleitet. Man spricht hier von einer typisch selbsterregten Schwingung. Die Schwingungsfrequenz und Anregungsphase wird von der Saite selbst bestimmt, in dem sie Haft- und Gleitzeit im Rhythmus ihrer Eigenschwingung steuert. Die Schwingung regelt und erhält sich somit selbsttätig. Der Bogen liefert nur die Energie, die verbraucht wird.¹³

Eine ähnliche Sägezahnkurve wird dargestellt, wenn man die Kraft der schwingenden Saite betrachtet, die für das Hin- und Herschütteln des Steges verantwortlich ist.

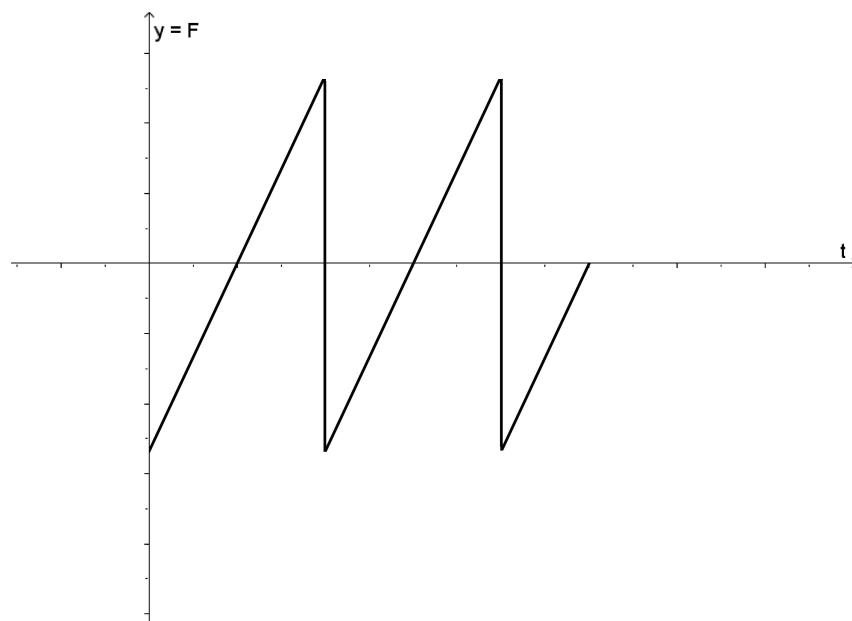


Abbildung 4.5: Die durch die Kraft der schwingenden Saite entstehende Sägezahnkurve

Es ist eindeutig zu erkennen, dass diese Schwingung nicht die geringste Ähnlichkeit mit den Sinusschwingungen hat. Man kann aber zeigen, dass eine Ähnlichkeit bestehen kann, indem man harmonische Sinusschwingungen so kombiniert, dass ihre Summe der Sägezahn-schwingung möglichst nahe kommt.

Die Abbildung 4.6 zeigt sechs harmonische Sinusschwingungen, die benötigt werden, um die Darstellung der violetten Schwingung (Abb. 4.7) zu erhalten. Die jeweiligen Amplituden und Frequenzen wurden bewusst gewählt. Beim genaueren Betrachten der Abb. 4.6

¹³vgl. Güth, S. 73

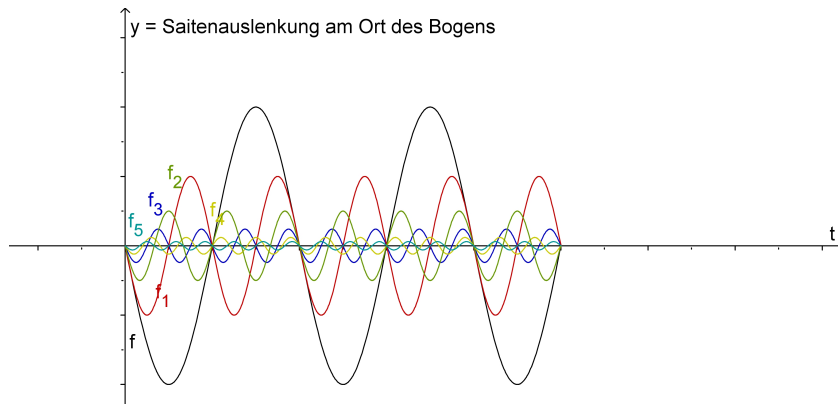


Abbildung 4.6: Darstellung der einzelnen Sinusschwingungen

kann man feststellen, wie die jeweiligen Parameter der einzelnen Schwingungen gewählt werden müssen, um eine optimale Annäherung an die Sägezahnkurve zu gewährleisten. Die Frequenzen der einzelnen Komponenten müssen sich verdoppeln und die Amplituden halbieren.

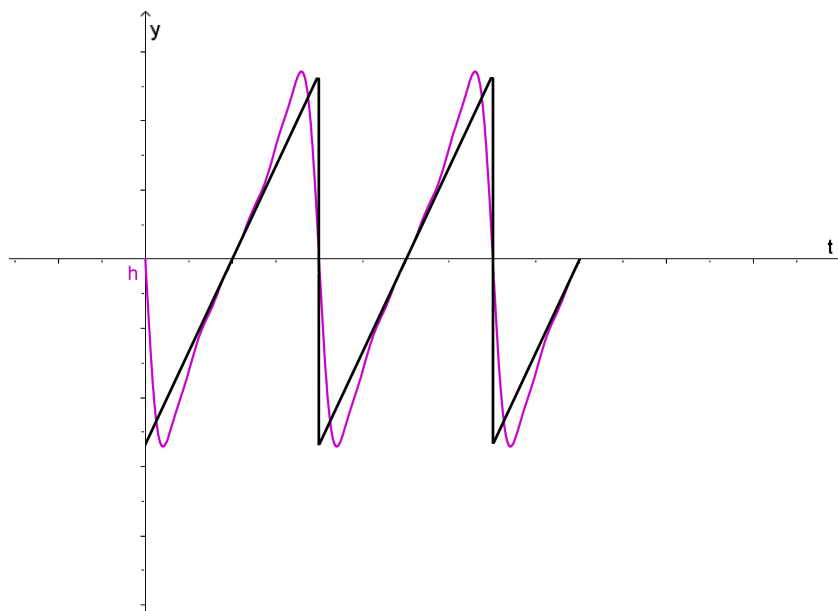


Abbildung 4.7: Annäherung der Überlagerungskurve an die Sägezahnkurve

Geht man mit der Zahl der zu addierenden einzelnen harmonischen Schwingungen gegen unendlich, könnte man sie sogar exakt darstellen.

Die Addition einer periodischen Funktion aus Sinuskomponenten bzw. Sinusschwingungen bezeichnet man als die Fourier- Synthese.¹⁴

¹⁴vgl. Güth, S. 75

4.4 Klangfarbenspektren

Unter einem Klangfarbenspektrum versteht man die Zusammensetzung oder Überlagerung der einzelnen harmonischen Teilschwingungen eines Klanges. Zu diesen Teilschwingungen gehört die Grundschiwingung, die den Ton bestimmt und die einzelnen Oberschwingungen, die so genannten Obertöne (siehe Unterkapitel 3.1.1 „Die harmonische Schwingung“).

Mit Hilfe der Fourier-Analyse¹⁵ kann man nun die komplizierte Überlagerungsschwingung (z.B. Abb. 4.11) eines Klanges in seine einzelnen Teilschwingungen zerlegen. Die Amplituden und Frequenzen der einzelnen Teilschwingungen werden dann im frequenzabhängigen Amplituden- bzw. Klangfarbenspektrum (Abb. 4.12) aufgeschlüsselt. Im Unterschied zum zeitabhängigen Diagramm können an Hand des Amplitudenspektrums die Phasenlage der Ausgangsschwingung nicht abgelesen werden.¹⁶

Beispiel : Dieses Beispiel soll nur zur Veranschaulichung dienen! Die Abbildung 4.11 zeigt uns die resultierende Schwingung, die sich ergibt, wenn man die Schwingungen der Abbildungen 4.8, 4.9, 4.10 überlagert, d.h. addiert.

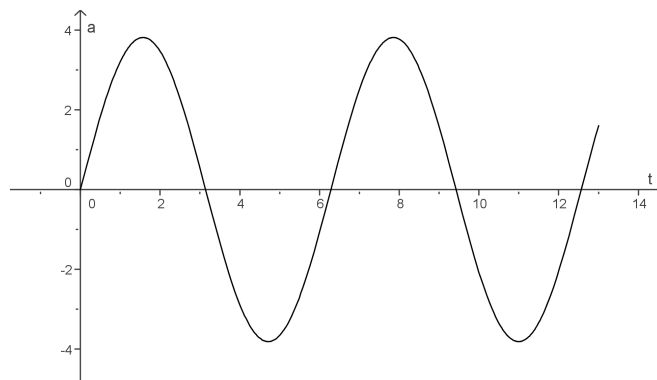


Abbildung 4.8: 1. Teilschwingung

¹⁵Eine exakte Beschreibung dieses Verfahrens würde den Rahmen der Diplomarbeit sprengen.

¹⁶vgl. http://abi06.jcrg.de/facharbeiten/Facharbeit_PhysikLK_04-06_Sebastian.Fiedlschuster.pdf, vgl. Hering, Martin, Stohrer S. 374

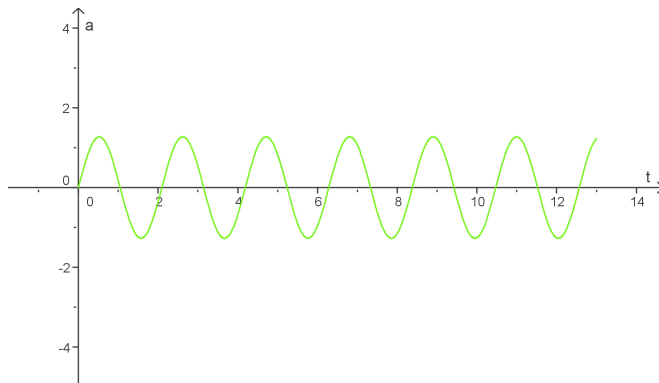


Abbildung 4.9: 2. Teilschwingung

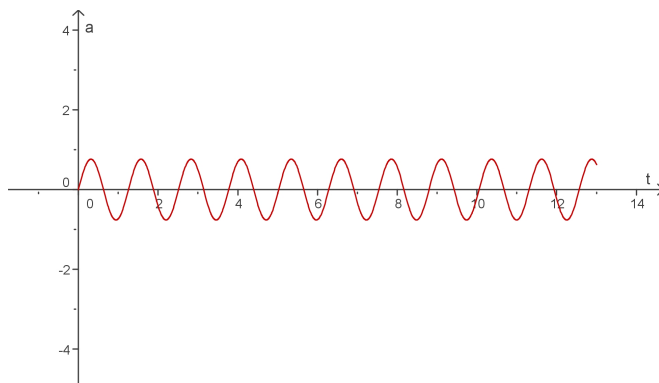


Abbildung 4.10: 3. Teilschwingung

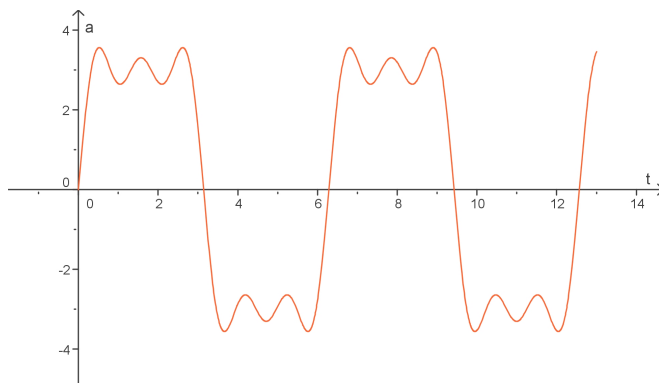


Abbildung 4.11: Überlagerungsschwingung

Das Amplitudenspektrum in Abbildung 4.12 erhält man mit Hilfe der Fourier- Analyse, die unsere resultierende Schwingung in die einzelnen Elementarschwingungen (Abb. 4.7, 4.8, 4.9) zerlegt. Wir erhalten ein Amplitudenspektrum, welches uns zeigt, welche Frequenzen mit welchen Amplituden beteiligt sind.

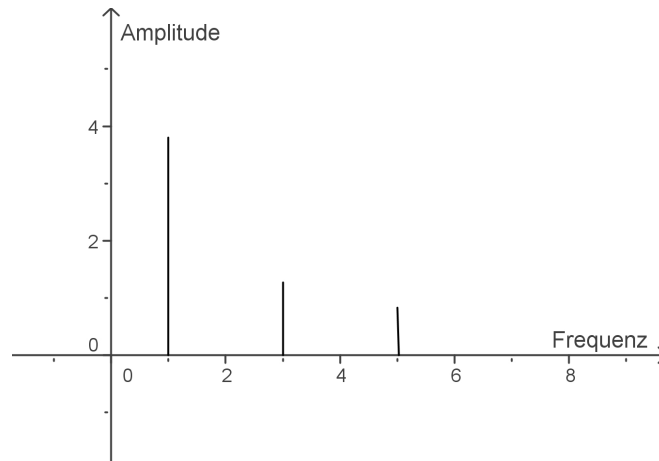


Abbildung 4.12: Amplitudenspektrum

4.4.1 Erstellte Klangfarbenspektren mit overtone

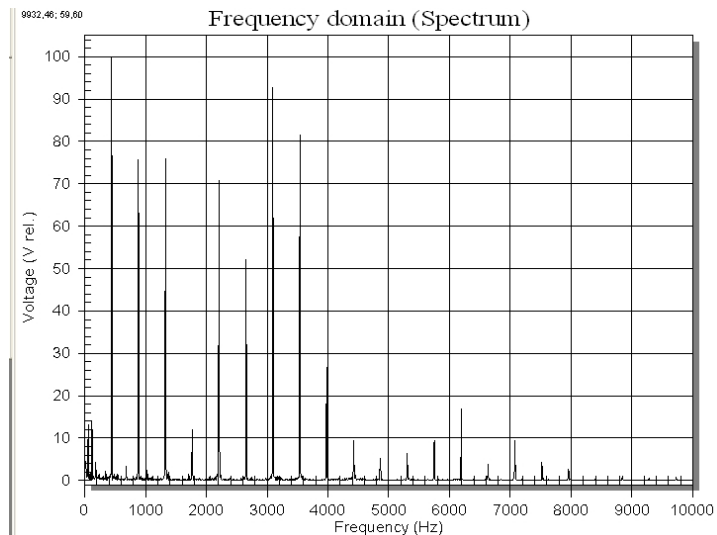
overtone ist eine kostenlose Software, die unter <http://www.clab.unibe.ch/overtone/> heruntergeladen werden kann. Sie wurde für Physiker entwickelt, um im Bereich der Akustik Experimente wie zum Beispiel Klanganalysen durchführen zu können. Im Internet findet man unter <http://www.aplu.ch/overtone/hauser/hauser.pdf> eine Vielzahl von Klangspektrenanalysen der verschiedensten Instrumente. Für diese Diplomarbeit wurden jedoch eigene erstellt.

Violine

Das erste erstellte Spektrum (Abb. 4.13) ist das einer Violine. Auf der horizontalen Achse sind die Frequenzen aufgetragen und auf der vertikalen Achse die dazugehörigen Amplituden in Prozent, bezogen auf den maximalen Ausschlag des Signals.¹⁷

Das Spektrum (Abb. 4.13) zeigt das a^1 mit 441,4Hz ohne Vibrato. Diese Angabe entspricht der Grundfrequenz. Ihre dazugehörige Amplitude wird mit 100 Prozent angegeben, das bedeutet, dass der Grundton im Vergleich zu seinen zahlreichen Obertönen am stärksten ausgeprägt ist.

¹⁷vgl. http://abi06.jcrg.de/facharbeiten/Facharbeit_PhysikLK_04-06_Sebastian_Fiedlschuster.pdf



Piano

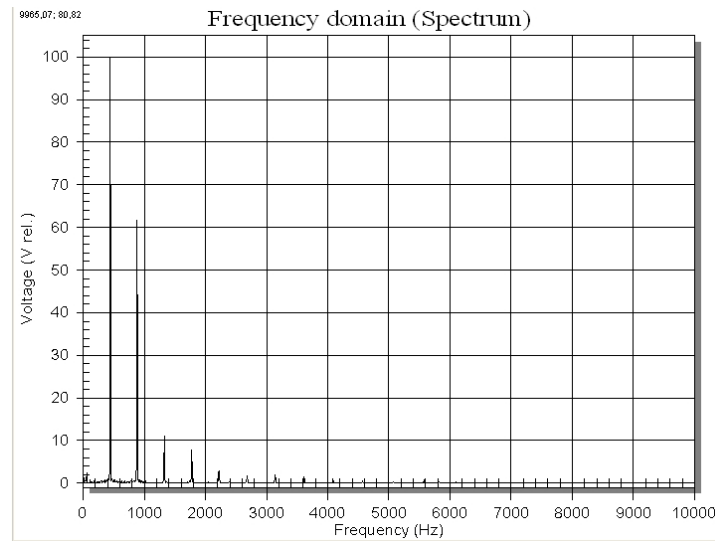


Abbildung 4.15: Klangspektrum eines Pianos

Dieses Klangspektrum (Abb. 4.15) zeigt das a^1 mit 441,4Hz von einem Piano. Das Obertonspektrum ist sehr schwach ausgeprägt, mit nur drei Obertönen, wobei der 2. und 3. schon besonders leise vertreten sind. Man muss dazu aber auch sagen bzw. berücksichtigen, dass das Piano bei der Aufnahme geschlossen war und vermutlich die Obertöne dadurch gedämpft wurden.

Querflöte

Das Spektrum (Abb. 4.16) zeigt den aufgeschlüsselten Klang a^1 der Querflöte. Der erste Oberton ist wieder, wie bei der Viola, stärker ausgeprägt als der Grundton. Neben einem 2. relativ starken Oberton, sind der 3. und 4. Oberton schon sehr schwach vertreten.

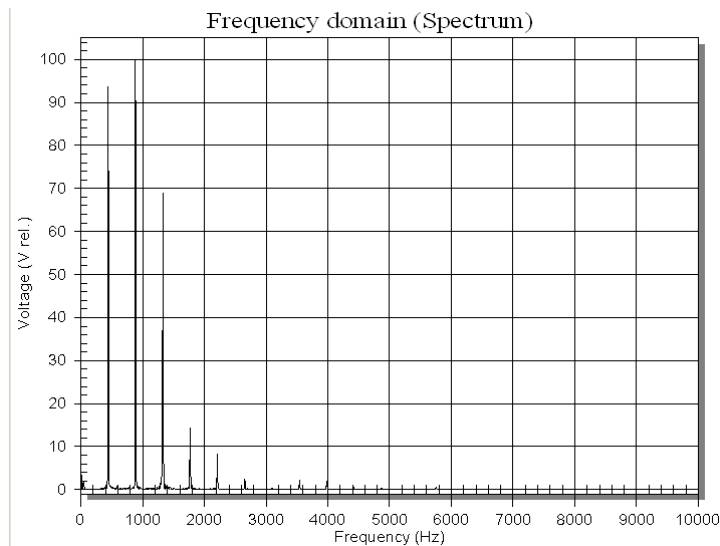


Abbildung 4.16: Klangspektrum einer Querflöte

Klarinette

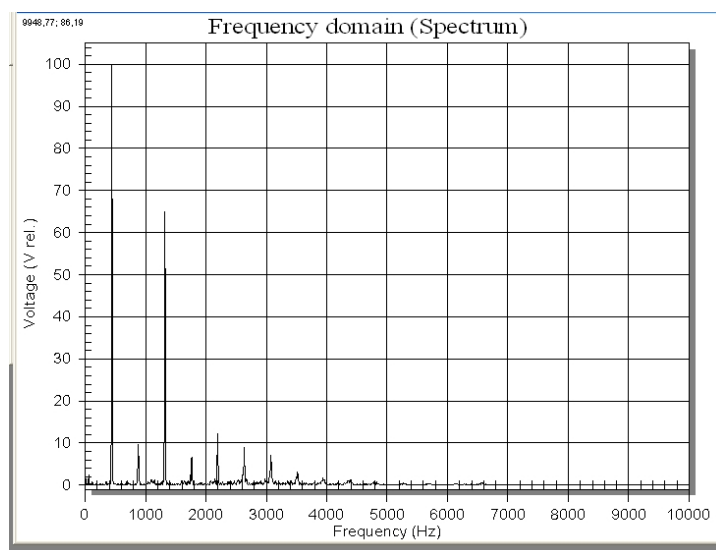


Abbildung 4.17: Klangspektrum einer Klarinette

Dieses Klangspektrum (Abb. 4.17) zeigt das a^1 mit 441,4Hz einer Klarinette. Im Vergleich zur Querflöte besitzt die Klarinette ein breiteres Spektrum.

Gitarre

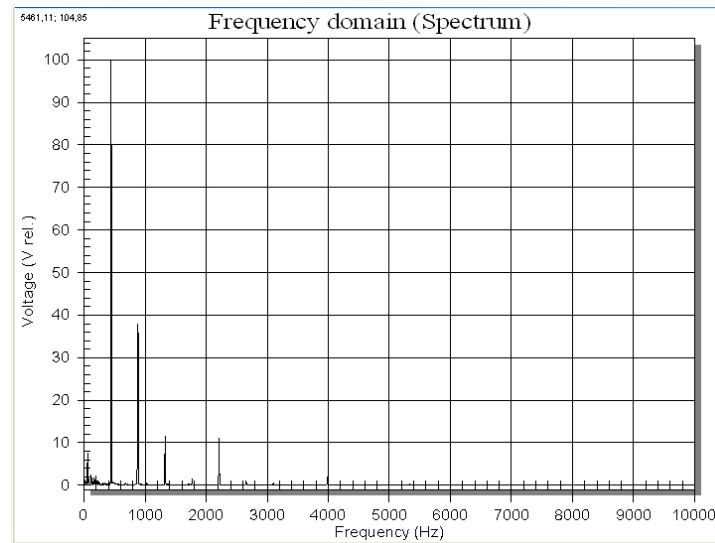


Abbildung 4.18: Klangspektrum einer Gitarre

Die Gitarre besitzt ein schmales Spektrum. Der 2. und 3. Oberton sind im Vergleich zum 1. Oberton relativ schwach vertreten. Der obere Frequenzbereich liegt nur bei ungefähr 2000 Hz. Im Vergleich zur Viola besteht im Klangspektrum schon ein sehr großer Unterschied. Man muss hierbei aber auch berücksichtigen, dass bei der Gitarre die Saite natürlich gezupft und auf der Bratsche der Ton gestrichen wurde.

Diese Beispiele sollten nur einen kleinen Einblick in die Klanganalyse geben. Die Aufnahmequalität kann mit Sicherheit noch verbessert werden.

Die oben angeführten Klangbeispiele wurden über ein Mikrofon mit dem Windows Audiorecorder aufgenommen.

Zur Analyse:

Die Analyse von Klangspektren können natürlich noch viel genauer durchgeführt werden, indem man zum Beispiel die Spektren von hohen und tiefen Tönen eines Instruments vergleicht. Welche sind stärker ausgeprägt, welche weniger stark usw.

Dieses Thema eignet sich ideal für ein Projekt und daher hat die Autorin auch ein Modul dazu entwickelt.

Das Modul Klangspektrenanalyse bietet Anregungen, wie man bei der Untersuchung von Klangspektren vorgehen kann.

5 Mathematik in der Musik

5.1 Fibonacci-Zahlen und Goldener Schnitt

Die Fibonacci-Zahlen sind nach dem im Jahr 1175 geborenen Mathematiker Leonardo von Pisa benannt. In seinem Buch *Liber abaci* (= *das Buch des Abakus*) behandelt er das so genannte Kaninchenproblem, das auf die Fibonacci-Folge hinführt deren „Herleitung“ ich im folgenden erklären möchte.

Wie entwickelt sich die Kaninchenpopulation, wenn man von folgenden Annahmen ausgeht:¹

1. *Jedes Kaninchenpaar wird im Alter von 2 Monaten gebärfähig.*
2. *Jedes Paar bringt (von da an) jeden Monat ein neues Paar zur Welt.*
3. *Alle Kaninchen leben unendlich (∞) lang.*

Unter Berücksichtigung dieser Annahmen folgt:

Im ersten Monat lebt 1 Paar.

Im zweiten Monat lebt 1 Paar und wird gebärfähig, sodass im dritten Monat bereits 2 Paare leben.

Im vierten Monat leben 3 Paare, da das erste Paar ein neues Paar zur Welt bringt; ein Paar wird gebärfähig.

Im fünften Monat leben 5 Paare, da das erste Paar, das zweite Paar jeweils ein neues Paar zur Welt bringt; ein Paar wird gebärfähig ...

Es gilt nun folgender rekursiver Ansatz:

¹Beutelspacher, S. 87ff

Sei f_n die Bezeichnung für die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat, dann gilt:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \text{für } n \geq 1$$

mit

$$f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_2 = 1$$

und $f_1, f_2, f_3, \dots$ bezeichnen wir als **Fibonacci-Zahlen**.

Die ersten Folgenglieder der unendliche Fibonacci-Folge lauten:²

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Der Goldene Schnitt

Der Goldene Schnitt unterliegt folgender Definition:

Definition: Sei $\overline{AB}$ Länge einer Strecke. Ein Punkt T von $\overline{AB}$ teilt $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt, falls sich die größere Teilstrecke zur kleineren so verhält wie die Gesamtstrecke zur größeren Teilstrecke (Abb. 5.1).³

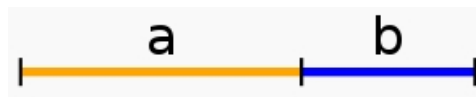


Abbildung 5.1: Teilung im Verhältnis des Goldenen Schnittes

Die Erkenntnis über den Goldenen Schnitt und die einhergehende Faszination reichen bis in die Antike zurück, findet man ihn doch auch dort bereits in der Architektur. Heute jedoch wissen wir von seinen zusätzlichen zahlreichen Erscheinungsformen in den unterschiedlichsten Bereichen wie in der plastischen, malerischen aber auch musikalischen Kunst, sowie in der Natur, Mathematik und wie bereits erwähnt in der Architektur.⁴

²http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt

³vgl. ebenda, S. 15

⁴vgl. Beutelspacher, S. 9

Bezeichnen wir nun die größere Teilstrecke mit a und die kleinere mit b, dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Wir formen die Gleichung nun so um, dass wir eine quadratische Gleichung erhalten; mit Hilfe der Auflösungsformel lässt sich folgender Ausdruck berechnen:

$$\begin{aligned} a^2 - ab - b^2 &= 0 \\ a_{1,2} &= \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + b^2} \\ &= \frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{5} b}{2} \\ a &= b \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{a}{b} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Die zweite Lösung $\frac{a}{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ist für uns nicht von Relevanz, daher wird sie hier nicht berücksichtigt.

Das Verhältnis a zu b wird in der mathematischen Literatur mit dem griechischen Buchstaben ϕ bezeichnet. Dieses Verhältnis wird „Goldener Schnitt“ genannt.

$$\phi = \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Wir erhalten die irrationale Zahl: 1,618033988...⁵

Das Verhältnis der Quotienten zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ nähert sich dem Goldenen Schnitt. Es ergibt sich folgender

Satz: Die Folge $\frac{f_2}{f_1}, \frac{f_3}{f_2}, \frac{f_4}{f_3}, \frac{f_5}{f_4}, \dots$ (f_k sind Fibonacci-Zahlen) ist konvergent; ihr Grenzwert ist ϕ .⁶

⁵vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt

⁶Beutelspacher, S. 94

Beweis. Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir

$$x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} (n \geq 1)$$

Wir müssen zeigen, dass die Folge $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ gegen ϕ konvergiert.

Schritt 1: Es gilt

$$x_n = 1 + \frac{1}{x_n - 1} \text{ für } n \geq 2.$$

Es ist nämlich

$$1 + \frac{1}{x_n - 1} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = \frac{(f_n + f_{n-1})}{f_n} = \frac{f_{n+1}}{f_n} = x_n.$$

Schritt 2: Es gilt

$$|\phi - x_n| = \frac{|\phi - x_{n-1}|}{(\phi \cdot x_{n-1})}.$$

Dies folgt so:

$$\phi - x_n = 1 + \frac{1}{\phi} - \left(1 + \frac{1}{x_{n-1} - 1}\right) = \frac{1}{\phi} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{(x_{n-1} - \phi)}{(\phi \cdot x_{n-1})}.$$

Daraus folgt die Behauptung, da ϕ und x_{n-1} positiv sind.

Schritt 3: Es ist

$$|\phi - x_n| \leq \frac{|\phi - x_2|}{\phi^{n-2}}.$$

Denn: Aus dem zweiten Schritt folgt zunächst wegen $x_{n-1} \leq 1$ die Ungleichung

$$|\phi - x_n| \leq \frac{|\phi - x_{n-1}|}{\phi}$$

und es ergibt sich daraus

$$|\phi - x_n| \leq \frac{|\phi - x_{n-1}|}{\phi} \leq \frac{|\phi - x_{n-2}|}{(\phi \cdot \phi)} \leq \dots \leq \frac{|\phi - x_2|}{\phi^{n-2}}.$$

Da $\phi > 1$ ist, wird demnach der Ausdruck $|\phi - x_n|$ mit wachsendem n beliebig klein. Es nähert sich also x_n der Zahl ϕ beliebig nahe an. Das heißt aber nichts anderes als dass die Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$ den Grenzwert ϕ hat. Anders formuliert: Die Folge $\frac{f_2}{f_1}, \frac{f_3}{f_2}, \frac{f_4}{f_3}, \dots$ konvergiert gegen ϕ .⁷ $\square$

Der Goldene Schnitt kann in der Musik auf zwei mögliche Arten auftreten:

(1) Die Frequenzen zweier Töne können im Goldenen Verhältnis zueinander stehen.

Der berühmte Physiologe und Physiker Hermann von Helmholtz erklärt in seiner Arbeit „Die Lehre von den Tonempfindungen“, dass innerhalb des Oktavenumfangs nur sechs konsonierende, dreistimmige Akkorde auftreten:⁸

1. C E G	Durdreiklang	2. C Es G	Molldreiklang
3. C F A	Dur- Quartsextakkord	4. C F As	Moll- Quartsextakkord
5. C Es As	Dur- Sextakkord	6. C E A	Moll- Sextakkord

Betrachtet man nun die Verhältnisse der Schwingungszahlen der Töne der einzelnen Akkorde genauer, so wird man feststellen können, dass jeweils das erste und letzte Glied, zwei aufeinander folgende Zahlen der Fibonacci Folge bilden, oder man kann durch vorhergehender Division auf ein solches Zahlenpaar rückschließen.

Der Durdreiklang C E G besitzt die Verhältniszahlen 4 : 5 : 6. Das Anfangs- und Endglied lässt sich reduzieren auf das Verhältnis 2 : 3 und diese Zahlen sind aufeinander folgende Glieder der Fibonacci Folge. Bei dem Dur-Quartsextakkord C F A mit den Verhältniszahlen 3 : 4 : 5 kann man dies sofort erkennen sowie bei dem Dur-Sextakkord C Es As mit dem Verhältnis 5 : 6 : 8. Bei dem Molldreiklang C Es G mit 10 : 12 : 15 erhält man das Verhältnis 2 : 3. Für den Moll- Quartsextakkord C F As mit 15 : 20 : 24 und für den Moll-Sextakkord C E A mit 12 : 15 : 20 erhält man durch Division die beiden Verhältnisse 5 : 8 und 3 : 5.⁹

Bildet man aus diesen sechs dreistimmigen Akkorden vierstimmige, indem man zum ersten oder zweiten Ton die Oktav hinzunimmt, dann lässt sich folgendes feststellen:

Ergänzt man zu dem Durdreiklang C E G die Oktav c des ersten Tones, so erhält man einen vierstimmigen Akkord mit dem Schwingungszahlenverhältnis 4 : 5 : 6 : 8. Daraus lässt sich erkennen, dass nicht nur das erste und dritte, sondern auch das zweite und

⁷Beutelspacher, S. 95

⁸vgl. Helmholtz, S. 350

⁹vgl. Pfeifer, S. 206

vierte Glied, Zahlen zweier benachbarter Glieder der Fibonacci Folge bilden. Das erste und vierte Glied stehen im Verhältnis 1 : 2, auch diese beide Zahlen sind benachbarte Glieder der Fibonacci Folge.¹⁰

(2) Die Längen der einzelnen Teile einer Komposition können sich wie der Goldene Schnitt verhalten.

Der ungarische Komponist Béla Bartók (1881 - 1945) machte sich, nach Meinung von Ernő Lendvai, einem Musikwissenschaftler, die Fibonacci-Zahlen und den Goldenen Schnitt in seinen Kompositionen in raffinierter Weise zu Nutze. Als gutes Beispiel dafür ist die Sonate für zwei Klaviere und Schlagzeug zu erwähnen. Das gesamte Werk ist im Goldenen Verhältnis strukturiert, selbst in den kleinsten Details ist dieses zu erkennen. Zum Beispiel:

Die Sonate ist in vier Sätzen gegliedert und zählt insgesamt 6432 Achtelnoten. Der zweite Satz beginnt nach 3975 Achtelnoten. Multipliziert man nun 6432 mit $\phi = 1,618$ so erhält man 3974,9 und gleichzeitig den Beweis für das Auftreten des Goldenen Schnittes. Weiters ist zu erwähnen, dass sich auch im ersten Satz, Hauptteil und Durchführung zur Reprise im Goldenen Schnitt verhalten.¹¹

Der Musiker selbst, hat sich nie über dieses mathematische Gestaltungsmittel geäußert. Auch in Mozarts Klaviersonate KV 333 lässt sich der Goldene Schnitt im Verhältnis Exposition zu Durchführung/Reprise nachweisen. Bei Mozart geht man aber von der Vermutung aus, dass dieser den Goldenen Schnitt nicht bewusst verwendet hat, sondern nur auf Grund seiner Intuition nahe gekommen ist.¹² Hier stellt sich natürlich verstärkt die Frage: Ist in allen schönen ästhetischen Dingen dieser Welt dieses Goldene Verhältnis nachzuweisen bzw. assoziiert man automatisch damit Ästhetik?

¹⁰vgl. Pfeifer, S. 207

¹¹vgl. Beutelspacher, S. 169/170

¹²vgl. <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2007/Siller.pdf>

5.2 Stochastische Musik

Musik ohne Zufall gibt es nicht. Grundsätzlich kann man sagen, dass zum Beispiel die Interpretation von Musik immer mit Zufall verbunden ist. Ein Beispiel dafür wäre die musikalische Aufführungspraxis eines Geigers. Die Qualität der musikalischen Darbietung hängt immer von mehreren Faktoren ab:

- Ist er ein Berufsmusiker?
- Wie kann er mit Lampenfieber umgehen?
- Wie ist die Tagesverfassung?
- Trifft man den Geschmack des Kritikers bzw. des Publikums?
- Manchmal kann man zwischen verschiedenen vorkomponierten Kadenzen wählen?
- Wähle ich ein langsames Tempo oder doch eher ein beschwingtes?
- usw.

Man spricht deswegen von Zufall bzw. Zufallsprozess, weil die Künstler gewisse persönliche Entscheidungen fällen dürfen und müssen.¹³

Besonders im 20. Jahrhundert gewann der Zufall als Gestaltungsmittel in der Musik an wichtiger Bedeutung und gleichzeitig mit ihr die Komponisten Karlheinz Stockhausen, Jannis Xenakis, Pierre Boulez und John Cage.

5.2.1 Musikalisches Würfelspiel

Im 18. Jahrhundert, zur Zeit des berühmten Wolfgang Amadeus Mozarts (1756-1791) und Johann Philipp Kirnbergers (1721-1783), waren musikalische Würfelspiele ein beliebter Zeitvertreib für die Gesellschaft. Im Folgenden werden wir die Idee, die dahinter steckt, näher betrachten.

¹³vgl. http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm

Würfelspiel von Johann Philipp Kirnberger

Kirnbergers Intention war, Liebhaber der Musik, die der Setzkunst nicht mächtig waren, für einen Moment in die Rolle des Komponisten schlüpfen zu lassen, der mit Hilfe einer Komposition, einer Tabelle und ein oder auch zwei Würfeln sich in der Lage befand, innerhalb einer kurzen Zeit, ein neues Stück zu komponieren.

„Ich gestehe aufrichtig, daß ich selbst der erste gewesen, welcher recht herzlich gelacht hat, als mir, nach einigen schlaflosen Nächten, die Verbesserung und Ausführung dieses Unternehmens, dessen Erfindung mir nur sehr unvollkommen zu Händen gekommen, so gut gelungen war.“¹⁴



Abbildung 5.2: Titelblatt

¹⁴Kupper, S. 86/ Johann Philipp Kirnberger: Der allzeit fertige Polonoisen- und Menuettencomponist, Berlin 1757, S. 5

Tabelle der Würfe zu Polonoisen.

Zum ersten Theile.

mit einem Würfel	1	2	3	4	5	6					
mit zwei Würfeln	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 Wurf	70	10	42	62	44	72	114	123	131	138	144
2 Würfe	34	24	6	8	56	30	112	116	147	151	153
3 Würfe	68	50	60	36	40	4	126	137	143	118	146
4 Würfe	18	46	2	12	79	28	87	110	113	124	128
5 Würfe	32	14	52	16	48	22	89	91	101	141	150
6 Würfe	58	26	66	38	54	64	88	98	115	127	154

Tabelle 5.1: Zahlentabelle für die Polonoisen

Beim Würfelspiel können nur die Oberstimmen verändert werden, der harmonische Ablauf d.h. die feste Form, Rhythmus, Taktanzahl, Wiederholungen und Generalbass bleiben gleich. Der Stil der Kompositionen, sei es nun ein Walzer, Polonaise, Menuett oder Trio soll und muss erhalten bleiben, um ein neues „sinnvolles“ Stück zu „würfeln“.

Ein Beispiel:

Eine Polonaise besteht aus zwei Teilen, einer ist sechs Takte und der zweite ist 8 Takte lang. Wir spielen mit zwei Würfeln und betrachten dazu die Tabelle von oben. In der ersten Zeile stehen die Einträge mit den möglichen auftretenden Augenzahlen, wenn man einen Würfel verwendet. Für die zweite Zeile gilt dasselbe, nur mit zwei Würfeln. In den nächsten Zeilen stehen die möglichen Ausgänge bzw. die Taktnummern für den ersten Wurf, den zweiten Wurf, usw.

Wir spielen nun mit zwei Würfeln und erhalten für den ersten Wurf die Augensumme 6. Sieht man nun in der Tabelle nach, dann steht in der Spalte 6 der Takt Nummer 44 und das ist unser erster Takt in der neuen Komposition. Ergibt der nächste Wurf die 9, so folgt als nächster Takt die Nummer 116.¹⁵

¹⁵vgl. Kupper, S. 84/85



Abbildung 5.3: Die ersten zwei Takte der neuen gewürfelten Komposition

Eine mögliche Variation einer Polonoise nach Kirnbergers Würfelspiel könnte so aussehen:



Abbildung 5.4: Eine mögliche vollständige Komposition nach Kirnbergers Würfelspiel

Würfelspiel von Wolfgang Amadeus Mozart

Mit dem Namen Wolfgang Amadeus Mozart werden zwei musikalische Würfelspiele in Verbindung gebracht, zum Einen handelt es sich dabei um die „Anleitung, so viel Wal-

zer man will mit Würfeln zu componiren, ohne musikalisch zu seyn oder Composition zu wissen“¹⁶ und zum Anderen um die „Anleitung, Englische Contretänze mit zwei Würfeln zu componiren, so viele man will, ohne etwas von der Musik oder der Composition zu verstehen“.¹⁷ Es ist jedoch zu erwähnen, dass man nicht mit 100 prozentiger Sicherheit feststellen kann, ob Mozart tatsächlich der Autor dieser Spielerei ist. Sie schienen nämlich weder im Köchelverzeichnis auf, noch gab „die Liste der zweifelhaften und unterschobenen Werke Mozarts“¹⁸ darüber Auskunft. Diese Tatsache gab Paul Löwenstein den Ansporn, trotzdem zu beweisen, dass die beiden Würfelspiele von Mozart stammen. Die dazu erhaltenen Forschungsergebnisse dürften unter anderem der Grund dafür gewesen sein, dass Alfred Einstein im Jahre 1937 die Würfelspiele in der dritten bearbeiteten Auflage des Köchelverzeichnisses integriert hat.

Spiel- Anleitung für Mozarts musikalische Würfelspiel

Jeder mögliche Walzer, der entstehen kann, besteht grundsätzlich aus zwei Teilen zu je acht Takten (A, B, C, D, E, F, G, H).

Für das Spiel benötigt man zwei Würfel, die folgenden beiden, vom Komponisten festgelegten Zahlentabellen (Tabelle 5.2 und Tabelle 5.3), den Notenteil mit den Taktnummern und ein Notenpapier. Das Spiel kann nun beginnen. Würfelt man zum Beispiel für den ersten Takt eine 8, dann sucht man in der ersten Spalte neben der Zahl 8 die Nummer des Taktteils. Wir erhalten den Takt 152. Erwürfelt man für den zweiten Takt zum Beispiel eine 4, dann erhalten wir den Takt 95 usw. Der achte Takt gilt gleichzeitig auch für die Wiederholung und man setzt ihn unter die erste Wiederholungs-Klammer. Bei der Wiederholung geht man dann weiter zur zweiten Klammer, für die man zusätzlich eine neue Taktnummer würfelt.¹⁹

¹⁶Haupenthal, S. 321

¹⁷Ebenda, S. 321

¹⁸Haupenthal, S. 321 und Paul Löwenstein: Mozart Kuriosa, in ZfMw XII, Leipzig 1929/39, S. 342ff; Zitat S. 342

¹⁹vgl. ebenda, S. 323

Zahlentabellen für Mozarts Musikalisches Würfelspiel²⁰

Takt Augensumme	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	63	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Tabelle 5.2: Zahlentabelle für den 1. Walzerteil

Takt Augensumme	A	B	C	D	E	F	G	H
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	179
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	44	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Tabelle 5.3: Zahlentabelle für den 2. Walzerteil

Das musikalische Würfelspiel ist ein hervorragendes Beispiel dafür, wie gut die Erkenntnisse der Mathematik auf dem Gebiet der Stochastik in der Musik Verwendung finden können.²¹

²⁰vgl. http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm

²¹vgl. Hauptenthal, S.1

Beim Würfeln handelt es sich um so genannte Laplace'sche-Experimente. „Dies sind Zufallsexperimente mit nur endlich vielen möglichen Ausgängen, die überdies als gleichwahrscheinlich angesehen werden.“²² Das dazugehörige mathematische Modell ist der Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsraum. Darunter versteht man einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ der Ordnung n , bei dem die Ergebnismenge Ω eine endliche Menge von $n \geq 1$ Elementen, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und P das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß mit $P(\omega) = \frac{1}{n}$ für jedes $\omega \in \Omega$ ist.²³

Ist ein Ereignis A eines Laplace'schen Zufallsexperiments in g Elementarereignisse zerlegbar, so errechnet man die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A mit der Formel²⁴

$$P(A) = \frac{g}{n} = \left(\frac{\text{„Anzahl der für } A \text{ günstigen Elementarereignisse“}}{\text{„Anzahl aller möglichen Elementarereignisse“}} \right)$$

Auch die Kombinatorik (d.h. das Untersuchen von Permutationen, Kombinationen und Variationen) findet in der Würfelmusik ihre Bedeutung und Anwendung.

Es werden folgende Definitionen motiviert:

Definition: Unter einer Permutationen versteht man die Zusammenstellungen von je n Elementen, wobei sich die Zusammenstellungen untereinander nur durch die Reihenfolge der Elemente unterscheiden. Wir sprechen von **Permutationen mit Wiederholung**, wenn nicht alle der n Elemente verschieden sind.²⁵

Satz: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$ ist die Anzahl der Permutationen n verschiedener Elemente. Treten unter den n Elementen je $m_1, m_2, \dots, m_k$ gleiche Elemente mit $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ auf, dann gibt es $P_n^{m_1, m_2, \dots, m_k} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$ mögliche Permutationen.²⁶

Definition: Unter **Kombinationen** k -ter Klasse versteht man die Zusammenstellungen zu je k Elementen, die ohne Berücksichtigung der Anordnung aus n gegebenen Elementen ausgewählt werden. Dürfen die ausgewählten Elemente mehrmals auftreten, dann spricht man von **Kombinationen mit Wiederholung**.²⁷

²²Bauer, S.7

²³vgl. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie, S.7f

²⁴vgl. Leupold, S. 349

²⁵vgl. ebenda, S.329

²⁶vgl. ebenda, S. 329

²⁷vgl. ebenda, S. 331

Definition: Unter **Variationen** k-ter Klasse versteht man die Zusammenstellungen zu je k Elementen, die unter Berücksichtigung der Anordnung aus n gegebenen Elementen ausgewählt werden. Dürfen die ausgewählten Elemente mehrmals auftreten, dann spricht man von **Variationen mit Wiederholung**.²⁸

Überblick für die Berechnungen:²⁹

Wählen „k aus n“	Reihenfolge	
	Kombinationen	Variationen
ohne Wiederholung	$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
mit Wiederholung	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

Tabelle 5.4: Formeln für Berechnungen

Die Würfelmusik kann ideal als Motivation zur Einführung der Themen Kombinatorik und Laplace´sche Wahrscheinlichkeit im Unterricht verwendet werden.

5.2.2 Das Casinoquartett

Im Jahre 1952 wurde auf dem Institut des Herrn Prof. Dr.-Ing. Wilhelm Fucks³⁰ mit Hilfe eines Roulettes ein musikalischer vierstimmiger Satz konstruiert. Die Vorgangsweise war folgende:

Die einzelnen Stimmen spielen jeweils in einer Oktav, die jeweils verschieden sind und unmittelbar aneinander anschließen. Die Tondauern (1/4 Noten) sind für alle Noten gleich gewählt. Nur die Tonhöhen können variieren. Pausen werden ausgeschlossen. Die Töne entstanden aus dem Zahlenmaterial, die die Ergebnisse des Roulettespiels im Spielkasino in Bad Neuenahr lieferten. Genauer formuliert bedeutet das, dass jeder Zahl nur Tonhöhen zugeordnet wurden.³¹ Die Ergebnisse die ein Roulette liefern kann, sind die Zahlen 0 bis 36. Die Ergebnisse (ohne der Null) rechnet man modulo 12 in Werte aus 1,2,...,12 um, „so kann man diesen Ergebnissen Tonhöhen einer Oktave gemäß der Tabelle

²⁸vgl. ebenda, S. 330

²⁹vgl. Reichel, S. 82

³⁰Deutscher Physiker (1902 - 1990)

³¹vgl. Fucks, S. 41

12-er-Rest	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ton	c	cis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a	ais	h

Tabelle 5.5: Übersicht der Restklassen

zuordnen.³²

„Dadurch hat man die 36 Zahlen in den Bereich der ersten 12 Zahlen herein projiziert und die gewünschte Intervallbreite von einer Oktav = 12 Halbtonschritte zur Verfügung.“³³ Mit diesem Konzept war es möglich eine künstliche Musik zu konstruieren bzw. komponieren.

Für die Vollständigkeit folgt die Definition der Restklassen:

Definition: Ist $n \in \mathbb{N}$, dann bezeichnet man die Menge aller ganzen Zahlen, die bei der Division durch n den gleichen Rest lassen, eine Restklasse modulo n .

Für $a \in \mathbb{Z}$ bezeichnet man mit $[a]$ die Restklasse aus denjenigen ganzen Zahlen, die den gleichen Rest wie a lassen.³⁴

³²http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm

³³Fucks S. 43

³⁴vgl. Duden, S. 349

Casino-Quartett
(W. FUCKS, erzeugt mit Roulette-Ergebnissen)



Abbildung 5.5: Casinoquartett

5.2.3 Komponieren mit Hilfe von Markovketten

Die Analyse von Musik stellt ein sehr interessantes Thema dar, wie wir bereits an Hand des Beispiels von Béla Bartóks Sonate für zwei Klaviere und Schlagzeug (siehe 5.1) gesehen haben. In Folge soll versucht werden, ein Werk in Bezug auf Tonfolgen so zu analysieren, dass man im Stande ist, ohne Kenntnisse der Kompositionstechnik des Komponisten ein ähnliches Werk zu „komponieren“. Das geht, indem man jedem Ton seine Folgetöne und die zugehörige Wahrscheinlichkeit dieser Folgetöne (Übergangswahrscheinlichkeit) zuordnet. Die Kenntnisse der Stochastik sollen hierbei unterstützende Arbeit leisten. Als eine dieser Methoden sind die Markovketten zu nennen. Die Anfänge der Theorie möchte die Autorin an einem einfachen Beispiel demonstrieren. Betrachten wir zuvor noch die

Definiton der Markovkette.³⁵

Die Markovkette

Stochastische Prozesse bilden ein wichtiges Thema im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie. Für ihre Modellierung eignen sich Folgen von Zufallsgrößen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit höchstens abzählbarem Wertebereich S , die weiters eine Abhängigkeitsstruktur aufweisen, die durch die so genannte Markov-Eigenschaft beschrieben wird.

Definition: Identifiziert man S mit $\mathbb{Z}$, dann besitzt $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Markov-Eigenschaft, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ mit

$$P(X_n = i \cap X_{n-1} = i_{n-1} \cap \dots \cap X_0 = i_0) > 0$$

die Gleichung

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i \cap X_{n-1} = i_{n-1} \cap \dots \cap X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

erfüllt ist.³⁶

X_n interpretieren wir als Zustand des stochastischen Prozesses zur Zeit n . S beschreibt den Zustandsraum. Weiters sagen wir, der Prozess sei zur Zeit n im Zustand i , falls $X_n = i$ ist. Bezeichnen wir ferner $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0$ als Vergangenheit, X_{n+1} als Zukunft und X_n als Gegenwart des Prozesses relativ zum Zeitpunkt n , dann versteht man unter der Markov-Eigenschaft dies:

„Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der stochastische Prozess zukünftig in einem bestimmten Zustand befindet, hängt alleine vom gegenwärtigen Zustand und von n ab, nicht aber davon, welche Zustände das System in der Vergangenheit durchlaufen hat.“³⁷

Solche Prozesse mit abzählbarem Zustandsraum und der Markov-Eigenschaft nennt man Markovketten. Die Wahrscheinlichkeit $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ heißt (1- Schritt-) Übergangswahrscheinlichkeit und bezeichnen sie als $p_{ij}(n)$.³⁸

³⁵vgl. http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm

³⁶Hesse, S. 324

³⁷Ebenda, S. 324

³⁸Ebenda, S. 325

Manche Melodieführungen bekannter, klassischer Sinfonien, Konzerte und natürlich auch Pop- und Rockmusik sind uns so vertraut, dass nur drei oder vier Anfangstöne ausreichen um das Stück zu erkennen (Man denke beispielsweise an den Anfang Beethovens 5. Sinfonie oder Mozarts „Eine kleine Nachtmusik“)

Es kommt zu folgender Definition: „Eine Melodie ist die Aufeinanderfolge von Tönen, die einer gegenseitigen Bedingung unterworfen sind.“³⁹

Wir überprüfen nun die n (mit $n = 0,1,2,3,4$) charakteristischen Anfangstöne einer Melodie und versuchen dabei herauszufinden, inwieweit diese das Fortlaufen der Melodie, nämlich den Ton $n + 1$ bestimmen. Mit Hilfe der zuvor erläuterten stochastischen Methode wird dies möglich. Die Idee dahinter ist diese, dass man versucht, Melodieführungen zu kennzeichnen, um dann umgekehrt eine Melodie mit denselben Kennzeichen zu erzeugen. Dieser Vorgang soll nun an Hand des folgenden Spirituals mit der doch sehr bekannten Melodie demonstriert werden.⁴⁰

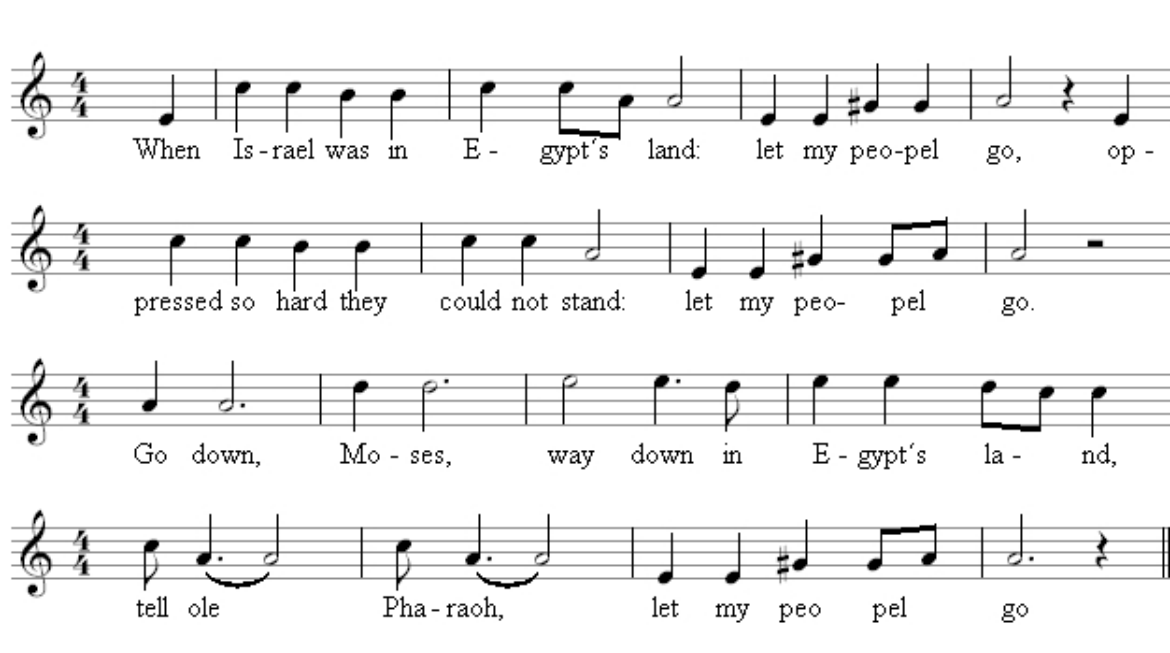


Abbildung 5.6: Go down Moses

³⁹Kupper, S. 96

⁴⁰vgl. http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm

Um ein ähnliches Stück zu komponieren, nimmt man Teiltonfolgen oder Tonketten (in der Mathematik würde man von Markovketten sprechen) heraus und untersucht die Möglichkeiten ihrer Fortsetzung. Für die in Frage kommenden Folgetöne bestimmen wir dann die absoluten Häufigkeiten. Die musikalischen Parameter (Tempo, Tondauer, Rhythmus,...) werden bei der Analyse nicht berücksichtigt, sondern wir konzentrieren uns nur auf die Tonhöhenfolge.

Für die Analyse der Tonketten betrachten wir nun folgende Tabelle (5.6):⁴¹

⁴¹vgl. http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm

Sie gibt uns Auskunft über die Übergangswahrscheinlichkeiten. Wie man diese erhält soll an einem Beispiel gezeigt werden.

ST	aH	Grenzen	1.FT	aH	Grenzen	2.FT	aH	Grenzen	3.FT
E	2	0,25	c	2	1	c	2	1	H
	3	0,625	E	3	1	Gis	3	1	Gis
	3	1	Gis	3	1	Gis	3	1	A
c	6	0,5	c	1	0,16666	c	1	1	H
				2	0,5	H	2	1	H
				3	1	A	1	0,33333	A
							1	0,66667	C
	2 4	0,666667 1	H A	1	1	H	1	1	E
				2	1	A	2	1	c
				1	0,25	E	1	1	E
				2	0,75	E	2	1	E
				1	1	c	1	1	A
H	2	0,25	H	2	1	c	2	1	c
	2	1	c	2	1	c	2	1	A
A	1	0,083333	d	1	1	d	1	1	e
	1	0,166667	c	1	1	A	1	1	E
	5	0,583333	A	2	0,4	E	1	0,5	E
							1	1	C
				1	0,6	d	1	1	d
				2	1	A	1	0,5	A
							1	1	d
	5	1	E	3	0,6	E	3	1	Gis
				2	1	c	2	1	c
Gis	3	0,5	Gis	3	1	A	1	0,333333	E
							2	1	A
	3	1	A	1	0,333333	E	1	1	c
				2	1	A	1	0,5	A
d	1	0,25	d	1	1	e	1	1	e
	1	0,5	c	1	1	c	1	1	a
	2	1	e	2	1	e	2	1	d
e	2	0,5	e	2	1	d	1	0,5	e
							1	1	c
	2	1	d	1	0,5	e	1	1	e
				1	1	c	1	1	c

Tabelle 5.6: Tonketten bis zur Tiefe 3 und Übergangswahrscheinlichkeiten

Die verwendeten Abkürzungen „ST, aH, FT“ stehen für Startton, absolute Häufigkeit

und Folgeton.

Beispiel:

Betrachten wir den Startton E. Für diesen kommen 8 Folgetöne in Frage. c tritt zweimal als Folgeton auf, daher erhalte ich für c die Übergangswahrscheinlichkeit $\frac{2}{8} = 0,25$. E tritt dreimal auf, die Übergangswahrscheinlichkeit ist daher $\frac{3}{8} = 0,375$, ebenso für Gis. Die Wahrscheinlichkeit, dass nun c oder E als Folgeton eintritt, erhält man durch Addition der Wahrscheinlichkeiten: $0,25 + 0,375 = 0,625$. Die Wahrscheinlichkeit, dass c, E oder Gis eintritt ist 1.

Als Startton bezeichnet man den ersten Ton einer Tonkette. In unserem Beispiel wurden alle im Spiritual vorkommenden Töne (E, c, H, A, Gis, d, e,) einmal als Startton gewählt, wobei die Großbuchstaben der eingestrichenen und die Kleinbuchstaben der zweigestrichenen Oktav entsprechen.

Vom Startton ausgehend bestimmt man anschließend die so genannten Folgetöne. Betrachten wir den Startton E. Für dieses E kommen 3 Folgetöne in Frage, das c, das E und das Gis. Die absolute Häufigkeit gibt an, wie oft der jeweilige Folgeton vorkommt, demnach folgen zweimal das c, dreimal das E und dreimal das Gis. Den 2. Folgeton erhält man, indem man die jeweiligen Folgetöne der Tonketten „E c“, „E,E“ und „E,Gis“ betrachtet und den 3. Folgeton erhält man, indem man die jeweiligen Folgetöne der Tonketten „E,c,c“, „E,E,Gis“, „E,Gis,Gis“ betrachtet.

Weiters werden den Tonketten die so genannten Tiefen zugeordnet. Es kommt zur folgenden Definition:

„Als Tonkette der Tiefe n bezeichnen wir n+1 aufeinander folgende Tonhöhen eines Stückes, Pausen rechnen wir dabei wieder nicht ein.“⁴²

Tonketten der Tiefe 0 entsprechen somit einzelnen Tönen. Tonketten der Tiefe 1 haben demnach zwei aufeinander folgende Töne usw.

Die Schwierigkeit liegt jetzt darin, dass man die Tonketten nicht zu lange wählt, denn sonst würden wir das Originalstück erhalten, aber auch umgekehrt darf sie nicht zu kurz geraten, weil sonst im neuen Werk kaum Strukturen des ursprünglichen Stückes zu hören

⁴²http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm

wären.⁴³ Ein weiterer Punkt, der berücksichtigt werden muss um eine vernünftige Anwendung der Markovketten zu gewährleisten, bezieht sich auf das Datenmaterial bzw. die Anzahl der Muster. Diese muss so umfangreich sein, dass eine gemeinsame Struktur auf statistischem Wege gefunden werden kann. Weiters muss das Datenmaterial homogen sein, dass überhaupt eine gemeinsame Struktur darin enthalten ist. „Andererseits sollte es heterogen sein, um genügend Spielraum für die Synthese offenzulassen.“⁴⁴

Erzeugen von Zufallszahlen durch Experimente:

Für diese Tonhöhenverteilung benötigen wir nun Zufallsexperimente mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die den statistischen Eigenschaften (siehe Tabelle 5.6) gerecht werden. Dafür kommen prinzipiell zwei Arten von Experimenten in Frage:

1. Zufallszahlen können durch reale Experimente, sei es nun mit Würfeln, Kugeln oder Urnen erzeugt werden,
2. Zufallszahlen können durch Simulation mit dem Rechner, sei es nun zum Beispiel mit Derive oder TI-Interaktiv erzeugt werden. In diesem Fall spricht man auch von Pseudozufallszahlen, da der Benutzer keine nähere Kenntnis über die Zufälligkeit der ausgegebenen Werte des Rechners besitzt.⁴⁵

Die Autorin berechnete ihre Zufallszahlen mit Hilfe von TI Inter Aktive:

Befehl: `rand(180)`

.479135, .552752, .940066, .008787, .473022, .449945, .810196, .890776, .354941, .76918,
.15901, .510755, .323866, .697067, .720569, .825327, .295402, .765551, .153972, .327448,
.136024, .573283, .676491, .464884, .076771, .684085, .73175, .813984, .285958, .142804,
.364103, .399273, .452313, .523137, .21386, .871037, .337787, .515774, .006436, .169472,
.655886, .070501, .02868, .59977, .730682, .707708, .051146, .398212, .979294, .703968,
.047528, .392037, .208132, .228432, .753307, .880983, .544896, .525363, .611355, .339474,
.810613, .436868, .938107, .400955, .050726, .298923, .166451, .056795, .851863, .559331,
.296159, .565377, .073914, .132756, .562595, .530892, .958074, .251396, .745444, .466373,
.671219, .353631, .202842, .542463, .005275, .92479, .216661, .105769, .317647, .276968,
.238057, .500135, .767749, .706723, .01542, .421881, .888122, .876971, .488066, .776281,

⁴³vgl. http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm

⁴⁴Kupper, S. 119

⁴⁵vgl. http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufal_und_musik.htm

.677952, .196064, .320745, .863663, .321107, .018602, .243211, .361231, .7917, .89724, .902545, .771502, .612507, .137581, .866575, .79951, .706233, .324357, .87785, .421241, .904567, .895563, .149434, .424487, .159311, .692977, .765438, .897026, .926769, .410257, .314776, .106132, .325677, .84753, .150917, .251204, .479424, .292735, .168597, .760669, .417905, .875409, .158598, .356796, .437278, .774408, .746976, .542467, .352792, .899638, .631985, .15433, .019746, .693433, .898385, .490952, .156111, .579382, .788073, .192923, .759663, .074495, .094036, .22726, .034081, .821122, .824203, .424832, .762889, .619881, .212608, .188783, .131344, .239745, .29551, .497867, .147198, .589683, .272893, .142798

Mit Hilfe dieser Zufallszahlen, kann man gemäß der zuvor bestimmten Übergangswahrscheinlichkeiten den Folgeton „würfeln“. Der solchermaßen gefundene Ton wird der Tonkette hinzugefügt. *„Für das so entstehende neue Ende (Weglassen des ersten Tons der ursprünglichen Folge) kann man erneut eine Fortsetzung erwürfeln und so durch Fortsetzung des Verfahrens eine Tonhöhenfolge bestimmen, deren Teilfolgen bis zu einer bestimmten Länge alle im Original enthalten sind.“*⁴⁶

Für unseren Spiritual wählen wir Tonketten der Tiefe 1, 2 und 3.

Tiefe 1

Für unsere erste Komposition wählen wir die Tiefe 1 und als Startton das E. Starttöne kann man prinzipiell festsetzen oder auch würfeln, hierbei sind den Komponisten keine Grenzen gesetzt. Danach nimmt man die erste Zahl unserer Pseudozufallszahlen und vergleicht sie mit den in Frage kommenden Übergangswahrscheinlichkeiten. In unserem Fall wären dies die Grenzen 0,25; 0,625 und 1 (siehe Tabelle für die Übergangswahrscheinlichkeiten). Die auf vier Nachkommastellen reduzierte Zufallszahl lautet 0,4791. Diese Zufallszahl ist weder kleiner noch gleich 0,25 - sie ist bereits größer und scheidet daher aus. Das E ist unser neuer Ton, da die Übergangswahrscheinlichkeit 0,625 größer ist als 0,4791. Jetzt springen wir wieder zurück zum Startton E. Die neue Pseudozufallszahl lautet 0,5527. Auch diese Zahl ist wieder zu groß um c zu erhalten, dafür aber kleiner als 0,625 und wir erhalten wiederum ein E als Folgeton. Betrachten wir nun die folgende Tabelle: Nach dem dritten E kommt ein Gis, da 0,9400 größer ist als 0,625 und wir springen daher zum Startton Gis und es folgt derselbe Ablauf.

⁴⁶http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm

Die Tonart von „Go down moses“ ist A- Moll. Diese Tatsache gilt es zu berücksichtigen, da natürlich auch unsere Komposition diese Tonart besitzt. Der Schlusston muss demnach ein A sein. Um dies zu verwirklichen stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Zum Einen besteht die Möglichkeit, dass der Schlusston auf Grund der geeigneten Zufallszahl tatsächlich ein A ist, zum Anderen könnte man die Notenwerte kürzen und weitere Töne einbauen, solange bis ein A eintritt oder man setzt ganz einfach den Schlusston. In diesem Beispiel beendete die Autorin die Komposition vorzeitig und setzte im letzten Takt eine ganze Pause.⁴⁷

Mit Hilfe der Tabelle und eines Notenschreibprogramms kann man die neue Komposition zu Papier bringen. Die Notenwerte sind hauptsächlich dem Originalstück angepasst.

ZZ	Ton	ZZ	Ton	ZZ	Ton	ZZ	Ton	ZZ	Ton
	E	0,4791	E	0,5527	E	0,9400	Gis	0,0087	Gis
0,4730	Gis	0,4499	Gis	0,8101	A	0,8907	E	0,3549	E
0,7691	Gis	0,1590	Gis	0,5107	A	0,3238	A	0,6970	E
0,7205	Gis	0,8253	A	0,2954	A	0,7655	E	0,1539	c
0,3274	c	0,1360	c	0,5732	H	0,6764	c	0,4648	c
0,7677	A	0,6840	E	0,7317	Gis	0,8139	A	0,2859	A
0,1428	c	0,3641	c	0,3992	c	0,4523	c	0,5231	H
0,2138	H	0,8710	c	0,3377	c	0,5157	H	0,0064	H
0,1694	c	0,6558	H	0,0705	H	0,0286	H	0,5997	c
0,7306	A	0,7077	E	0,0511	c	0,3982	c	0,9792	A

Tabelle 5.7: Tabelle zur Tiefe 1

⁴⁷vgl. http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.



Abbildung 5.7: „Komposition“ zur Tiefe 1

Tiefe 2

Für die Tiefe 2 gilt im Prinzip der gleiche Ablauf, nur springen wir nicht schon nach dem ersten Folgeton, sondern erst nach dem zweiten zum Startton. Als Starttöne der Tiefe 2 wählen wir E und Gis. Die erste Zufallszahl lautet 0,7039. In diesem Fall bräuchte man keine Zufallszahl, denn es steht nur Gis zur Verfügung und dieser gilt als neuer Folgeton. Wir springen wieder zum Startton Gis und es folgt wieder derselbe Ablauf.

In diesem Beispiel ist der Schlusston A eingetreten, ohne die Wahrscheinlichkeit dabei zu manipulieren.

ZZ	Ton	ZZ	Ton	ZZ	Ton	ZZ	Ton	ZZ	Ton
	E,Gis	0.7039	Gis	0.0475	A	0.3920	A	0.2081	E
0.2284	E	0.7533	Gis	0.8809	Gis	0.5448	A	0.5253	A
0.6113	A	0.3394	E	0.8106	c	0.4368	c	0.9381	A
0.4009	E	0.0507	E	0.2989	Gis	0.1664	Gis	0.0567	A
0.8518	A	0.5593	d	0.2961	d	0.5653	e	0.0739	e
0.1327	d	0.5625	c	0.5308	c	0.9580	A	0.2513	E
0.7454	c	0.4663	c	0.6712	A	0.3536	E	0.2028	E
0.5424	Gis	0.0052	Gis	0.9247	A	0.2166	E	0.1057	E
0.3176	Gis	0,2769	Gis	0,2380	A	0,5001	A	0,7677	A
0,7067	A	0.0154	E	0.4218	E	0.8881	Gis	0.8769	Gis
0.4880	A								

Tabelle 5.8: Tabelle zur Tiefe 2



Abbildung 5.8: „Komposition“ zur Tiefe 2

Tiefe 3

Auch für die Tiefe 3 gilt derselbe Ablauf wie für Tiefe 1 und 2, aber erst nach dem dritten Folgeton springen wir zum Startton zurück. Im vorletzten Takt verkürzte die Autorin die Notenwerte und integrierte weitere zwei Töne bevor das gewünschte A eintrat.

ZZ	Ton	ZZ	Ton	ZZ	Ton	ZZ	Ton	ZZ	Ton
	E,c,c	0.7762	H	0.6779	H	0.1960	c	0.3207	c
0.8636	A	0.3211	A	0.0186	E	0.2432	E	0.3612	Gis
0.7917	Gis	0.8972	A	0.9025	A	0.7715	E	0.6125	c
0.1375	c	0.8665	H	0.7995	H	0.7062	c	0.3243	c
0.8778	A	0.4212	C	0.9045	A	0.8955	E	0.1494	E
0.4244	Gis	0.1593	Gis	0.6929	A	0.7654	A	0.8970	E
0.9267	c	0.4102	c	0.3147	H	0.1061	H	0.3256	c
0.8475	c	0.1509	A	0.2512	A	0.4794	E	0.2927	E
0.1685	Gis	0.7606	Gis	0.4179	A				

Tabelle 5.9: Tabelle zur Tiefe 3

Die Qualität dieser Kompositionen ist sicher in Frage zu stellen. Es handelt sich bei diesem Beispiel auch nur um eine grundlegende Idee, die vom Schwierigkeitsgrad so gewählt wurde, dass sie ohne Einsatz des Computers verdeutlicht werden kann. Wesentlich bessere Ergebnisse erhält man durch Stilanalysen, die Komposition ermöglichen, die großen Komponisten zugeschrieben werden. Diese sind aber auf Grund höhere technischer Anforderungen für diese Diplomarbeit nicht umsetzbar. Für weiterführende Informationen und Literatur siehe [1].



Abbildung 5.9: „Komposition“ zur Tiefe 3

Komposition durch Permutation

Der Spiritual kann auch gut als Einführungsbeispiel zur Kombinatorik eingesetzt werden und dazu betrachtet man zunächst wieder die absolute und relative Häufigkeit, der im Spiritual vorkommenden Töne. Wir erhalten folgende Tabelle (5.10):

Tonhöhe T	E	Gis	A	H	c	d	e
absolute Häufigkeit $H(T)$	8	6	12	4	12	4	4
relative Häufigkeit $h(T)$	0,16	0,12	0,24	0,08	0,24	0,08	0,08

Tabelle 5.10: Absolute und relative Häufigkeit der vorkommenden Töne

Der Spiritual besteht aus sieben verschiedenen Tönen. Man benötigt daher sieben verschiedenfarbige Kugeln und von jeder Farbe die nötige Anzahl. Danach werden die Kugeln in einer Urne durchgemischt und eine nach der anderen herausgezogen. Mit dem Schlusston verhält es sich genau so, wie beim Komponieren mit Hilfe von Markovketten; wird der Ton A nicht als letzter Ton gezogen, dann wird er gesetzt oder mit einem anderen ausgetauscht.⁴⁸

5.3 Bach: Die Zahlbeziehung in seiner Musik

Zahlenbeziehungen spielen in der Kompositionstechnik des unumstritten genialen Musikers Johann Sebastian Bach (1685-1750) eine wichtige Rolle. Zu Lebzeiten Bachs war die „*kultisch- symbolische Bedeutung von Zahlen*“⁴⁹ sehr präsent. Man nimmt zu Recht

⁴⁸vgl. http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm

⁴⁹Taschner, S. 27

an, dass Bach keine Note unüberlegt setzte, im Gegenteil, er wollte vor allem religiöse Aussagen mit Hilfe von den sich aus den Noten ergebenden Zahlenrelationen mit seinen Kompositionen verschmelzen. Weiters war Bach fasziniert vom Rationalismus, insbesondere von Gottfried Wilhelm Leibniz, einem wesentlichen Hauptvertreter und bedeutenden Mathematiker, der sie verstand, die Kunst des Kombinierens. Bach wird stark von dieser Kunst geleitet.

Seinen Namen B A C H unterwarf er der Kombinatorik und so stößt man oft auf die Versetzung der vier seinem Namen entnommenen Töne a, b, c, h. Musikalisch gesehen entspricht die Reihung a - b - h - c, die einer aufsteigenden und die Anordnung c - h - b - a die einer absteigenden Tonfolge. Der Name selber bzw. die Anordnung b - a - c - h entspricht dem Kreuz (Abb. 5.10).⁵⁰



Abbildung 5.10: Notenausgabe

Ein berühmtes Beispiel:

Die Kunst der Fuge ist ein Werkzyklus bestehend aus vierzehn Fugen und vier Kanons. In der ersten Fuge wird das Grundthema in d- Moll vorgestellt und die folgenden 12 Fugen sind Variationen (auch Kontrapunkte genannt), über dieses Thema.⁵¹ Die 14. Fuge basiert auf dem Thema b - a - c - h.

⁵⁰vgl. Taschner, S. 27

⁵¹vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Die_Kunst_der_Fuge

6 Umsetzung im Projektunterricht

6.1 Projektunterricht - eine Begriffserklärung

Es ist vorwegzunehmen, dass es sich bei dem Begriff Projekt um einen sehr dehnbaren handelt, denn es ist durchaus umstritten, was wirklich als Projekt zu gelten hat. Auf jeden Fall hat seine Herkunft nicht nur didaktische, sondern auch bildungspolitische Wurzeln. Die Projekt-Idee entstand in Zeiten politischer und sozialer Umwälzung zu Beginn des 20. Jahrhunderts und wurde ab der 1968er Bewegung wieder ins Leben gerufen um neue Wertvorstellungen, wie zum Beispiel emanzipierte Selbstverwirklichung, Partizipation und Umweltschutz, in die schulische Ausbildung zu integrieren.¹

Hans Christian REICHEL definiert „Projekt“ bzw. „Projektorientierten Unterricht“ durch zwei charakteristische Komponenten:²

(1) Die „inhaltliche“ oder „materielle“ Komponente

Es soll beim Projektunterricht vor allem

- *um die Herstellung von Beziehungsreichtum,*
- *um das Aufzeigen neuer Aspekte alten Wissens,*
- *um die Anwendung und Bezüge zur außermathematischen Welt,*
- *um die Bewertung mathematischer Inhalte und Methoden,*
- *um fächerübergreifende Aspekte und*
- *um erfahrungsbezogene und für den Schüler interessante Themen*

¹vgl. Meyer, S. 336 und Reichel S. 56/57

²Ebenda, S.19ff

gehen, wobei nicht alle Punkte gleichzeitig realisierbar sind, sondern Schwerpunkte gesetzt werden müssen.³

(2) Die „methodische“ Komponente

Hier gilt es primär die Schlagwörter:

- *Learnig by doing*
- *Lernen in der Gruppe (soziales Lernen)*

zu erwähnen, die Lerninhalte und Lernformen in sich ergänzende Beziehungen bringen sollen.⁴

Die detaillierte Vorbereitung, so REICHEL, ist von allererster Bedeutung. Der Projektunterricht soll nicht in Form von Lehrtexten mit Aufgaben im Buch durchgezogen werden, sondern es geht vielmehr darum, die Möglichkeiten in diesem Rahmen zu nutzen und der individuellen Entfaltung bzw. selbstständigen Arbeiten freie Bahn zugeben. Das gilt für die Schüler, vor allem aber auch für die Lehrer. Die sind nämlich angehalten (auch lehrplangemäß), völlig individuell vorzugehen und das bedarf zusätzlich natürlich einer guten Planung und Vorbereitung. „Die Gefahr oberflächlicher Unverbindlichkeit und diffuser Verzettlung“⁵ beim Projektunterricht ist stets präsent und deshalb sollte der Lehrer nach REICHEL über folgende Punkte schon vor Projektbeginn Bescheid wissen.⁶

- *Zweck und Ziel des Projekts.*
- *Welche Projektart paßt zu welchem Stoff?*
- *Welche mathematischen Probleme könnten sich ergeben?*
- *Sind notwendige Erkenntnisse schon ausreichend bereitgestellt, oder sollen diese erst erarbeitet werden?*
- *Mögliche Methoden und Fragenkomplexe durchdenken!*

³Reichel, S. 19

⁴vgl. ebenda, S.19/20

⁵Reichel, S. 55

⁶ebenda, S. 55/56

- *Wo sollen Schwerpunkte gesetzt werden:*
 - *Gruppenarbeit - Einzelarbeit,*
 - *Arbeit in der Stunde - Arbeit zu Hause,*
 - *Innermathematisch - außermathematische Ziele und Motive,*
 - *Eher theoretische - eher angewandte Schwerpunkte.*
- *Soll das Projekt fachimmanent oder fächerübergreifend sein?*
- *Mitarbeit anderer Personen (Kollegen, außerschulische Personen).*
- *Informationsgrundlagen (Buch, selbst erheben, Zeitschriften, ...).*
- *Dokumentation des Projekts - als Abschluss unbedingt notwendig! (Soll eine Präsentation auch außerhalb der Klasse erfolgen?)*
- *Leistungsbeurteilung: Schwerpunkt auf schriftlichen Beiträgen oder auf der Beobachtung der Mitarbeit (wohl vorherrschend)?*
- *Dauer des Projekts inklusive Vorbereitungsarbeiten der Schüler.*
- *Ist eine Blockung von Stunden sinnvoll oder nötig (Stundenplankoordination!)?*
- *Ausmaß der geplanten Anleitungen bzw. Hilfestellungen.*

6.2 Grundmuster der Projektmethode nach Frey

Frey möchte mit seinem „Grundmuster der Projektmethode“ einen idealisierten Projektablauf darstellen. Der Aufbau seiner Projektmethode erfolgt durch die einzelnen Komponenten, die anschließend noch näher erklärt werden. Für Frey ist es selbstverständlich, dass besonders am Anfang noch nicht alle Komponenten in die Projektarbeit mit eingeschlossen werden, das ist auch nicht notwendig, aber Ziel ist es dennoch am Aufbau der Projektmethode zu arbeiten.⁷

⁷Frey, S. 62

Erklärungen zu den einzelnen Komponenten

1. Projektinitiative

Ein Projekt beginnt mit einer Idee, die von den verschiedensten Bereichen des Lebens inspiriert werden kann. Es sind diesen Ideen keine Grenzen gesetzt. D. h. man versteht unter einer Initiative ein Angebot, das von Mitgliedern einer Lerngruppe oder aber auch von Außenstehenden unterbreitet werden kann. Die Beteiligten entscheiden, ob und wie sie die Projektinitiative aufgreifen, die zu diesem Zeitpunkt, wohlbemerkt, noch ohne Bildungswert ist. Sie kann allmählich zur Bildung werden, aber das inkludiert eine Bereitschaft zur Auseinandersetzung.⁸

2. Auseinandersetzung mit der Projektinitiative

Um dieser Phase des Projekts einen Rahmen zu verleihen, legen die Teilnehmer einen Zeitpunkt fest, an dem sie mit der Besprechung über die Projektinitiative fertig sein wollen. Die Zeitspanne ist je nach Voraussetzung entsprechend zu wählen. Natürlich besteht auch die Möglichkeit, für die Art und Weise der Auseinandersetzung einige Spielregeln aufzustellen. Zum Beispiel könnte man darauf achten, dass jeder Beteiligte zu Wort kommen soll. Jeder soll seine Meinung kundtun. Die Auseinandersetzung soll so geführt werden, dass die dafür bestimmten und allgemein akzeptierten Regeln nicht gebrochen werden. Gleichzeitig fördert eine derartige Vorgehensweise die soziale Kompetenz. Durch das ständige Äußern eigener Bedürfnisse und Gefühle werden gleichzeitig Betätigungswünsche kundgetan und eventuell damit einhergehend, die Selbsttitulierung eines Experten oder aber auch Vorschläge für qualifizierte Fachleute usw. Natürlich kann die Auseinandersetzung mit der Projektinitiative auch mit einem negativen Resultat enden. Das wäre dann der Fall, wenn sie zum Beispiel keine Zustimmung findet oder aus anderen Gründen nicht umsetzbar ist. Das Projekt wird dann abgebrochen.⁹

3. Gemeinsame Entwicklung der Projektinitiative zum Betätigungsgebiet

Bei diesem Punkt angelangt, dürfen sich nun die Beteiligten dazu äußern, was sie im Konkreten tun möchten. Weiters sind die für die Bildung wichtigen und vor allem mach-

⁸vgl. Frey, S. 55/56

⁹vgl. ebenda, S. 57

baren Punkte herauszuarbeiten. Pläne sollen entwickelt und das Zeitbudget erstellt werden. Besondere Bedeutung liegt vor allem darin, „*wer, wie, was tut*“¹⁰ und eventuell auch „*warum jemand etwas tut*“.¹¹ Es soll auf die Form und Qualität bewusst geachtet werden. Im Laufe der Entwicklung des Betätigungsgebietes wird immer deutlicher, dass sich die ursprüngliche Ideensammlung zum Thema, die während der Auseinandersetzung mit der Projektinitiative zustande kam, als unstrukturierte Arbeitsliste herausstellt, die es nach Prioritäten zu ordnen gilt. Die Einigung darüber überfordert oftmals besonders die jungen Projektteilnehmer, die dann auch auf Abbruch der Planungsphase drängen. In solchen Fällen sollte man wieder die Projektskizze zur Hand nehmen, einen groben Zeitplan entwerfen und die Details von einem Fixpunkt zum nächsten planen.¹²

4. Aktivität im Betätigungsgebiet/Projektdurchführung

Ist das Betätigungsgebiet entwickelt, folgt der nächste Schritt - die Durchführung eines Planes. Jeder Teilnehmer kann sich nun vertieft mit seinem Tätigkeitsbereich beschäftigen. Zur Organisation der Aktivitäten ist aber noch zu sagen, dass grundsätzlich alle Formen der Tätigkeitsorganisation möglich sind: Gruppentätigkeit und Einzeltätigkeit; die Schüler können sich steuernde, zuliefernde, kontrollierende und ausführende Tätigkeiten zuteilen. Die Teilnehmer müssen sich im Klaren sein, dass sie nach ihren Vorstellungen die Tätigkeitsbereiche einteilen können und keineswegs alle alles tun müssen.¹³

5. Beendigung des Projektes

Der Abschluss eines Projekts kann nach drei verschiedenen Varianten erfolgen.

- (1) Es kann mit einem „*bewussten Abschluss*“¹⁴ enden. Man präsentiert die Ergebnisse der Öffentlichkeit in Form einer Ausstellung, Vorführung, usw.
- (2) Man bringt ein Projekt zum Abschluss, indem die Projektinitiative wieder aufgegriffen wird und vergleicht den Endstand bzw. das Endprodukt mit den Anfängen.
- (3) Das Projekt läuft aus, gilt aber als Bereicherung für den Alltag. Die Beteiligten haben eine Tätigkeit gelernt, die im Berufsleben oder in der Freizeit ausgeübt wird.

In umfangreichen Projekten ist es möglich, dass diese Abschlüsse kombiniert oder ge-

¹⁰Frey, S.57

¹¹Ebenda, S.57

¹²vgl. ebenda, S. 58

¹³Ebenda, S. 59

¹⁴Ebenda, S. 59

mischt in Erscheinung treten. Kleinere Projekte enden nur in einer der drei Abschlussvarianten.¹⁵

6. Fixpunkte

Fixpunkte werden dann im Projektablauf integriert, wenn auf Grund von „*blinder Betriebsamkeit, Orientierungslosigkeit und fehlende Abstimmung zwischen Einzelnen und Teilgruppen*“¹⁶, die Auszeit angesagt ist. Diese Phase nützen die Teilnehmer um für mehrere Minuten inne zu halten. Sie nutzen Fixpunkte aber auch für andere Zwecke:

- *Die TeilnehmerInnen informieren sich gegenseitig über die letzten Tätigkeiten.*
- *Sie fertigen Notizen über die letzte Phase an und formulieren Anregungen für die nächste.*
- *Sie organisieren die nächsten Schritte.*
- *Sie vergegenwärtigen sich den Stand der Arbeiten angesichts des Gesamtvorhabens.*¹⁷

Große Projekte verlangen die Kooperation untereinander, damit die Teilnehmer wieder den fachlichen und organisatorischen Überblick gewinnen.

7. Metainteraktion/Zwischengespräch

Die Teilnehmer beschäftigen sich in der Metainteraktion mit dem Geschehen in der Gruppe. Sie versuchen inhaltliche und zwischenmenschliche Probleme, die eventuell auf Missverständnissen beruhen, zu klären und mögliche auftretende zu verhindern. Anders formuliert, sie nützen diese Phase zur Aufarbeitung von Beziehungsproblemen.¹⁸

¹⁵vgl. Frey, S. 60

¹⁶Ebenda, S.60

¹⁷Ebenda, S. 126

¹⁸Ebenda, S. 61

6.3 Konzeptbeschreibung

„Wer ein Projekt beginnt, sollte solche Theorien kennen, sich aber hüten, ihnen sklavisch zu folgen. Das Leben verläuft nicht geradlinig, manchmal in Sprüngen, zumeist überraschend, Projekte auch.“¹⁹

Im Folgenden möchte die Autorin nun das Projekt „Musik und ihre mathematische Seite“ beschreiben, das für den Rahmen einer Sommerakademie für Begabtenförderung²⁰ (oder Workshoptage) konzipiert wurde. Wie man dem Titel entnehmen kann, spricht das Thema nicht nur die Schüler an, die sich für Mathematik begeistern, sondern im besten Fall auch für Musik interessieren und praktizieren.

Die Module:

Im Zuge dieser Diplomarbeit wurden vier Module ausgearbeitet. Als Vorlage für den didaktischen Kommentar diente die Homepage: „Regionales Fachdidaktikzentrum Mathematik und Informatik“, die im Internet unter <http://rfdz.ph-noe.ac.at/index.php?id=70> zu finden ist²¹. Der Arbeitsumfang wurde jeweils so konzipiert, dass sie eine Arbeitszeit von ca. 6 Stunden in Anspruch nehmen werden. Die Schüler bearbeiten die Aufgaben in der Gruppe selbstständig. Die Module beinhalten auch Lehrervorträge, deren Inhalt unter anderem dem theoretischen Teil der Diplomarbeit zu entnehmen sind.

Zur Organisation:

Die Zielgruppe dieses Projekts sind Schüler, die bereits die 11. Schulstufe absolviert haben, da einzelnen Inhalte der Module bereits an diesem Wissen anknüpfen.

Weiters ist es von Vorteil, wenn die beteiligten Schüler ein oder vielleicht auch mehrere Instrumente beherrschen und auch auf den Begabtenförderungskurs mitnehmen; in einzelnen Modulen sollen diese nämlich Verwendung finden. Wenn möglich sollte jeder Schüler mit einem Laptop ausgestattet sein.

¹⁹Raml, S.3; Hänsel/Müller, S. 8

²⁰Der Begabtenförderungskurs dauert neun Tage. Die von der Autorin erarbeiteten Module nehmen vier Tage in Anspruch. Nähere Informationen findet man auf der Webseite: <http://www.lsr-noe.gv.at/file/SoAk.OS.2009.pdf>

²¹http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/lernpfade/lernpfad_wetter/zusatzmaterial/did_kommentar.pdf

Portfolio:

Die Schüler sollen ein Portfolio führen. Dieses beinhaltet ein Inhaltsverzeichnis, ein Lern-tagebuch und die Ausarbeitungen zu den einzelnen Modulen.

Zum Ablauf:

Zu Beginn des Begabtenförderungskurses werden gleich große Gruppen gebildet, die maximal vier Personen zählen. Diese bleiben bis zum Schluss der Woche bestehen. Im besten Fall soll dabei berücksichtigt werden, dass sich in jeder Gruppe verschiedene Instrumentalisten befinden.

Jede Gruppe wird dann jeden Tag jeweils ein Modul bearbeiten. Den Abschluss der Woche bildet die Darbietung der einzelnen „Kompositionen“ der jeweiligen Gruppen sowie ein HotPotatoes Rätsel für die Selbstkontrolle.

Aufgaben des Lehrers:

Die Schüler sollen zu Beginn der Woche darüber informiert werden, was sie zu erwarten haben und dazu zählt vor allem der Tagesablauf mit den einzelnen Modulen. Gemäß Frey soll der Lehrer den Schülern gewisse Freiheit gewähren. Es sind hier vor allem die Phasen der Metainteraktion und Einteilung der Tätigkeitsbereiche in der Gruppe zu erwähnen.

7 Module für Projektarbeit

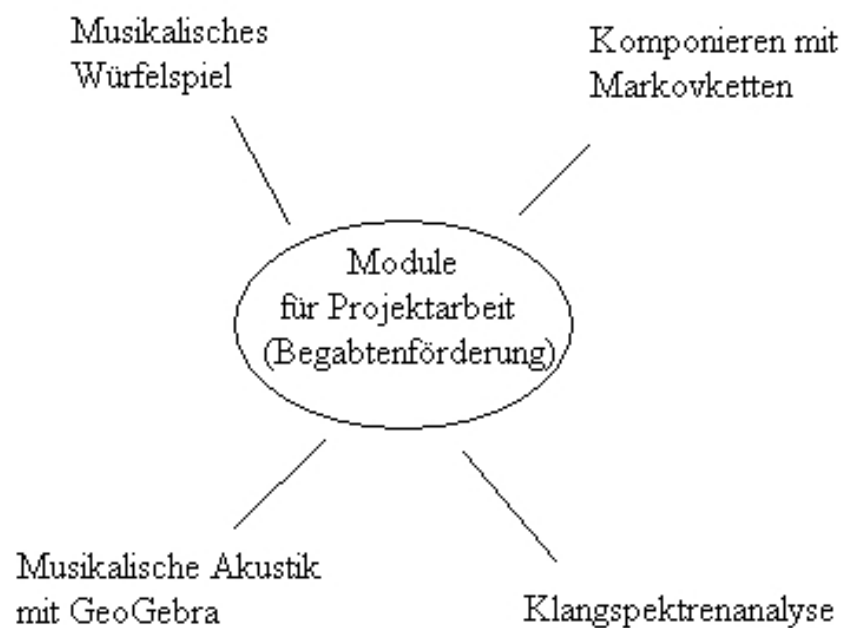


Abbildung 7.1: Übersicht der Module

7.1 Modul: Musikalisches Würfelspiel

1. Didaktischer Kommentar

In diesem Modul wird den Schülern das musikalische Würfelspiel näher gebracht und gleichzeitig demonstriert, wie auf spielerische Art und Weise die Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie Verwendung finden kann.

(a) Intuitive Phase:

Nachdem den Schülern das Spiel erklärt wurde, dürfen sie selber zum Komponisten werden und Walzer komponieren bzw. würfeln. Ihnen wird bewusst werden, dass sehr viele verschiedene Walzer entstehen können - wie wird aber die genaue Anzahl berechnet?

(b) Exaktifizierende Phasen:

Die entstandenen Walzer müssen mit Hilfe eines Notenschreibprogramms festgehalten werden. Danach sind die einzelnen Aufgaben zu lösen, die am Ende des Tages im Plenum zu besprechen sind.

(c) Festigungsphase:

Sie müssen die Walzer einstudieren, da am Ende der Woche ein Vorspiel angesetzt ist.

Kurzinformation:

Schulstufe	7. Schulstufe
Dauer	6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik und Musik
Verwendete Medien	Notenschreibprogramm, 2 Würfel, Notentabellen, Notentafeln, Instrumente
Technische Voraussetzungen	Computer, Drucker
Autor	Agathe Schaurhofer

Voraussetzungen:

- Technische Voraussetzungen: Computer, Drucker
- Technisches Vorwissen: Grundlegender Umgang mit dem Computer

Lerninhalte und Lernziele:

Lerninhalte	Lernziele
Kombinatorik	Kenntnisse der Definitionen (Variation, Kombination, Permutation) Formeln wissen und anwenden können
Laplace'sche Wahrscheinlichkeit	Kenntnis der Definition und ihre Anwendung
Musik und Stochastik	Bewusst werden: Mathematik und ihre außermathematische Anwendung
Musizieren	Blattspielkompetenzen fördern

Didaktischer Hintergrund:

Dieses Projekt soll am Beispiel „Musikalisches Würfelspiel“ einen außermathematischen Bezug zur Kombinatorik und Laplace'sche Wahrscheinlichkeit herstellen.

Einsatz im Unterricht (bzw. auf der Begabtenförderungswoche):

Pro Gruppe soll ein Computer zur Verfügung stehen, um mit dem Notenprogramm arbeiten zu können. Da die entstandenen Walzer ausgedruckt werden, erhält so jeder Schüler die jeweiligen „Gruppenkompositionen“.

Lernmedien der Schüler:

Die Schüler arbeiten sowohl mit dem Computer als auch mit Papier und Bleistift und mit ihren Instrumenten.

Leistungsfeststellung/Leistungsbeurteilung:

Eine Leistungsbeurteilung ist in einer Begabtenförderungswoche nicht notwendig, stattdessen dürfen am Ende der Woche die Schüler ein Hot Potatoes-Rätsel lösen. Dieses soll zur Selbstkontrolle dienen.

2. Anleitung für Lehrer

Damit die Schüler dieses Modul bearbeiten können, sind vom Lehrer die grundlegenden Definitionen und Sätze der Kombinatorik und der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit zu erklären. Die Schüler müssen auf einen Wissensstand gebracht werden, da man nicht davon ausgehen kann, dass alle bereits in der siebenten Klasse von dieser Thematik gelernt haben.

Weitere Aufgaben des Lehrers:

- Notentafeln erhält man im Musik-Fachgeschäft
- Jeder Gruppe soll ein eigener Raum zur Verfügung stehen.
- Besprechen des Tagesablaufs.
- Notentafel und Notentabellen für jede Gruppe ausdrucken und vor Beginn der Arbeit mit den Schülern besprechen.

- Für jede Gruppe sind zwei Würfeln zu Verfügung zu stellen.
- Hinweise zum Bedienen des Notenschreibprogramms.
Es kann jedes Notenschreibprogramm verwendet werden, diese sind aber kostenpflichtig. Es empfiehlt sich Rat bei den Musiklehrern einzuholen.
- Das Arbeitsblatt mit den mathematischen und musikalischen Aufgaben für alle Schüler ausdrucken.
- Am Ende des Tages müssen die Aufgaben gemeinsam besprochen werden.

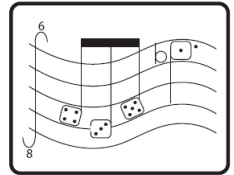
Der Lehrervortrag soll folgende Punkte beinhalten:

1. Vortrag: Laplace'sche Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik:

- Was versteht man unter der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit?
- Definitionen für Permutation, Variation, Kombination
- Formeln für die Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten

2. Vortrag: Spielanleitung

- Spielanleitung, diese ist dem Theorieteil zu entnehmen!



Modul: Musikalisches Würfelspiel

Bei diesem Modul könnt ihr auf spielerische Art und Weise zum Komponisten werden. Im 18. Jahrhundert galt die Würfelmusik als netter Zeitvertreib für die feine Gesellschaft. Heute seid ihr an der Reihe; würfelt euren eigenen Walzer!

Laplace'sche Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik: Lehrervortrag

Spielanleitung: Lehrervortrag

Erstellt einen Zeitplan für den heutigen Tag. Ihr habt sechs Stunden Zeit.

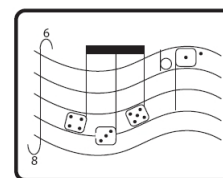
Musik-Aufgaben:

1. Komponiere vier Walzer, nach der Spiel-Anleitung und halte sie mit dem zur Verfügung gestellten Notenprogramm fest!
2. Eine weitere Möglichkeit wäre: Setzt euch im Kreis auf, jeder würfelt, sucht und singt/spielt die Melodie seines Taktes und schreibt diesen auf ein Notenpapier. Dann gebt das Würfelspiel und Notenpapier dem Nachbarn weiter, dieser wiederholt den Vorgang und spielt den gesamten bisher entstandenen Walzer. Das Spiel wird solange in dieser Weise fortgesetzt, bis der Walzer fertig komponiert ist.
3. Bereitet die Stücke für das Vorspiel vor.

Ihr könnt zwischen Aufgabe 1 und 2 wählen!

Mathematik-Aufgaben:

1. Berechne die Anzahl der unterschiedlichen Walzer!
2. Ein guter Pianist benötigt für das Durchspielen eines Walzers (mit Wiederholung des ersten Teils) ca. 20 Sekunden Zeit. Wie viel Zeit würde vergehen, wenn man alle möglichen Walzer (d.h. ohne dass sich ein gleicher Walzer wiederholt) spielen würde und dabei 1 Sekunde Pause berücksichtigt?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass für den ersten Takt (2. Walzerteil) die Taktnummer 65 gewürfelt wird?
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Walzerteil aus den Taktnummern 96, 95, 165, 167, 99, 2, 110, 24 besteht?
5. Wie sehen die Walzer aus, die mit größter/kleinsten Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden?
6. Besteht die Möglichkeit, dass zwei Spieler denselben Walzer würfeln?
7. Aus welchem Teilgebiet der Mathematik könnte man zu dem musikalischen Würfelspiel Aufgaben stellen?
8. Welche Formeln werden auftreten? Finde die passenden Definitionen und Sätze heraus!
9. Diskutiert über diese Art des Komponierens? Kann man überhaupt von Komponieren sprechen? Könnt ihr euch für das Spiel begeistern? Verfasst eure Meinung schriftlich!



Lösungen für das Modul: Musikalische Würfelspiel

1. Berechne die Anzahl der unterschiedlichen Walzer!

1. Teil: 11^8 Möglichkeiten

2. Teil: 11^8 Möglichkeiten

$$11^8 \cdot 11^8 = 11^{16} = 4,6 \cdot 10^{16}$$

2. Ein guter Pianist benötigt für das Durchspielen eines Walzers (mit Wiederholung des ersten Teils) ca. 20 Sekunden Zeit. Wie viel Zeit würde vergehen, wenn man alle möglichen Walzer (d.h. ohne dass sich ein gleicher Walzer wiederholt) spielen würde und dabei 1 Sekunde Pause berücksichtigt?

$$11^{16} \cdot 21 : 3600 : 24 : 365,25 = 30556570359,3 \text{ Jahre}$$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass für den ersten Takt (2. Walzerteil) die Taktnummer 65 gewürfelt wird?

Um Taktnummer 65 zu erhalten, benötigt man Augensumme 10. Die günstigen Ausfälle sind:

Augensumme 10 : $5 + 5, 6 + 4, 4 + 6$

$$P(10er) = \frac{3}{36}$$

$$P(10er) = \frac{1}{12}$$

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Walzerteil aus den Taktnummern 96, 95, 165, 167, 99, 2, 110, 24 besteht?

$$\begin{aligned}
 P(96) &= P(2er), \text{ also } \frac{1}{36} \\
 P(95) &= P(4er), \text{ also } \frac{3}{36} \\
 P(165) &= P(11er), \text{ also } \frac{2}{36} \\
 P(167) &= P(7er), \text{ also } \frac{6}{36} \\
 P(99) &= P(8er), \text{ also } \frac{5}{36} \\
 P(2) &= P(5er), \text{ also } \frac{4}{36} \\
 P(110) &= P(4er), \text{ also } \frac{3}{36} \\
 P(24) &= P(4er), \text{ also } \frac{3}{36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(96/95/165/167/99/2/110/24) &= \frac{1}{36} \cdot \frac{3}{36} \cdot \frac{2}{36} \cdot \frac{6}{36} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{36} \cdot \frac{3}{36} \\
 &= 2,297 \cdot 10^{-9}
 \end{aligned}$$

5. Wie sehen die Walzer aus, die mit größter/kleinsten Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden?

Der Walzer, der mit größter Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird, besteht aus den Taktnummern, der Zeile „Augensumme 7“.

Der Walzer, der mit kleinster Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird, besteht aus den Taktnummern, der Zeile „Augensumme 2“ bzw. „Augensumme 12“.

6. Besteht die Möglichkeit, dass zwei Spieler denselben Walzer würfeln?

Ja!

7. Aus welchem Teilgebiet der Mathematik könnte man zu dem musikalischen Würfelspiel Aufgaben stellen?

Kombinatorik, Laplace'sche Wahrscheinlichkeit

8. Welche Formeln treten auf?

$$P(A) = \frac{\text{Günstigen}}{\text{Möglichen}}$$

Variation mit n^k Möglichkeiten

9. Diskutiert über diese Art des Komponierens? Kann man überhaupt von Komponieren sprechen? Könnt ihr euch für das Spiel begeistern? Verfasst eure Meinung schriftlich!

-

7.2 Modul: Komponieren mit Markovketten

1. Didaktischer Kommentar

In diesem Modul wird den Schülern an einem einfachen Beispiel gezeigt wie die Kenntnisse der Stochastik für die „Erzeugung“ von Musik Verwendung finden.

(a) Exaktifizierende Phasen:

Die Schüler müssen die Tabelle für die Übergangswahrscheinlichkeiten erstellen. Dazu gehören die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Töne, die Grenzen und die Folgetöne. Danach müssen sie mit Hilfe von TI Inter Aktiv die Zufallszahlen berechnen.

(b) Festigungsphase:

Die Schüler müssen die Kompositionen mit Tiefe 1,2,3 im Notenschreibprogramm festhalten.

Kurzinformation:

Schulstufe	7. Schulstufe
Dauer	6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik und Musik
Verwendete Medien	Notenschreibprogramm, Notenausgabe von „Go down Moses“
Verwendete Materialien	farbige Kärtchen oder Kugeln, Urnen
Technische Voraussetzungen	Computer, TI Inter Aktive (oder ein anderer Rechner, der Zufallszahlen erzeugen kann), Kopfhörer
Autor	Agathe Schaurhofer

Voraussetzungen:

- Technische Voraussetzungen: Computer, TI Inter Aktive, Notenschreibprogramm
- Technisches Vorwissen: Grundlegender Umgang mit dem Computer

Lerninhalte und Lernziele:

Lerninhalt	Lernziel
Markovketten	Kenntnis der Definition Berechnen von absoluten/relativen Häufigkeiten Verstehen und Berechnen von Übergangswahrscheinlichkeiten
Tabelle für Übergangswahrscheinlichkeiten	Erstellen dieser Tabelle Richtiger Umgang mit dieser Tabelle
Permutation	Berechnen der Anzahl der möglichen Anordnungen
Musik und Stochastik	Bewusst werden: Mathematik und ihre außermathematische Anwendung

Didaktischer Hintergrund:

Dieses Modul soll an Hand eines einfachen Beispiels die Bedeutung von stochastischen Prozessen und ihre Verwendung in der Musik näher bringen.

Einsatz im Unterricht:

Pro Gruppe wird ein Computer benötigt, auf dem TI Inter Active und das Notenschreibprogramm installiert sind.

Lernmedien der Schüler:

Die Schüler arbeiten sowohl mit dem Computer, als auch mit Papier und Bleistift und mit ihren Instrumenten.

Leistungsfeststellung/Leistungsbeurteilung:

Eine Leistungsbeurteilung ist in einer Begabtenförderungswoche nicht notwendig, stattdessen dürfen am Ende der Woche die Schüler ein Hot Potatoes-Rätsel lösen. Dieses soll zur Selbstkontrolle dienen.

2. Anleitung für Lehrer

In diesem Modul wird ein Themengebiet der Mathematik behandelt, dass nicht im Lehrplan verankert ist - die Markovketten. Die Schüler werden daher auch nicht darüber Bescheid wissen.

Weitere Aufgaben des Lehrers:

Es zählt nun zur wichtigen Aufgabe des Lehrers, die Schüler mit diesem Thema vertraut zu machen und ihnen das grundlegende Verständnis von stochastischen Prozessen in schülergerechter Art näher zu bringen.

Weitere Aufgaben des Lehrers:

- Besprechen des Tagesablaufs!
- Einführung in das Komponieren mit Markovketten.
- Das Arbeitsblatt mit den Aufgaben für alle Schüler austeilen.
- Die Notenausgabe vom Spiritual „Go down Moses“ für alle austeilen.
- Hinweise zur Bedienung von TI Inter Aktive für die Erzeugung von Pseudozufallszahlen.
- Hinweise zum Bedienen des Notenschreibprogramms.
Es kann jedes Notenschreibprogramm verwendet werden, diese sind aber kostenpflichtig. Es empfiehlt sich Rat bei den Musiklehrern einzuholen.
- Am Ende des Tages soll ein gemeinsames Feedback erstellt werden.

Aus dem Modul „Musikalisches Würfelspiel“, sollte den Schülern das Thema Kombinatorik vertraut sein. Denn auch der Spiritual eignet sich sehr gut für die Motivation dieses Themengebiets. Was ist zu tun?

- Den Gruppen sind eine bestimmte Anzahl von verschiedenfarbigen Kärtchen oder Murmeln bzw. Kugeln und eine „Urne“ zur Verfügung zu stellen.

Der Lehrervortrag soll folgende Punkte beinhalten:

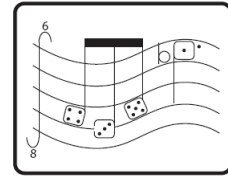
Einführung in das Thema stochastische Prozesse - Markovketten:

- Was versteht man unter einem stochastischen Prozess?
- Definition der Markovketten

Wie funktioniert das Komponieren mit Markovketten?

Es sind folgende Punkte zu erklären:

- Was sind Tonfolgeketten und was bedeutet in diesem Zusammenhang Tiefe 1/2/3
- Wie stellt man die Tabelle für die Übergangswahrscheinlichkeiten her
- Richtiger Umgang mit der Tabelle
- Wie wählt man die Notenwerte der neuen Komposition
- Wie wählt man den Schlusston



Modul: Komponieren mit Markovketten

Die Kunst des Komponierens zu beherrschen, wie einer der großen Komponisten der vergangenen Zeit...- wäre schön, wenn das so einfach wäre! Es gibt jedoch Methoden, die es uns ermöglichen, aus einem bereits existierenden Musikstück, ein neues zu komponieren. An einem einfachen Beispiel soll euch in Grundzügen demonstriert werden, wie man mit Hilfe der Kenntnisse der Stochastik, insbesondere der stochastischen Prozesse, einer bekannten gegebenen Melodie eine neue, in der Struktur ähnliche, zuordnen kann.

Einführung in das Thema Stochastische Prozesse- Markovketten: Lehrervortrag

Wie funktioniert das Komponieren mit Markovketten? Lehrervortrag

Aufgaben:

- Berechnet mit Hilfe von TI Inter Aktive die Zufallszahlen.
- Erstellt eine Tabelle für die Übergangswahrscheinlichkeit und beginnt zu komponieren!
- Die Anfangstöne kannst du selber wählen! Achte auf den Schlusston!
- Komponiere mit Tief 1,2,3!
- Schreibt die neu entstanden Kompositionen im Notenprogramm auf!
- Bei Kompositionen mit Tiefe 3 benötigt man kaum noch Zufallszahlen, da die meisten Übergangswahrscheinlichkeiten für gewisse Töne zu 100 Prozent gegeben sind. Was bedeutet das für unser Verständnis von Wahrscheinlichkeit?
- Spielt das Stück mit eurem Instrument!
- Erfindet einen Liedtext, der mit den von dir gewählten Notenwerten und Rhythmus harmoniert.

- Diskutiert über die Qualität des Stückes!

Auch in diesem Modul finden die Kenntnisse der Kombinatorik Verwendung!

- Setzt die Kugel mit den Noten in Verbindung, mischt sie in einer Urne durch und zieht eine nach der anderen heraus. Notiert die entstehende Melodie mit Hilfe des Notenprogramms.
- Achtet wieder auf den Schlusston!
- Übernimmt die Notenwerte vom Original-Spiritual!

7.3 Modul: Musikalische Akustik mit GeoGebra

1. Didaktischer Kommentar

Im Mittelpunkt stehen wichtige Begriffe aus der musikalischen Akustik, deren Inhalte in Form von GeoGebra-Aufgaben bearbeitet werden sollen.

(a) Intuitive Phase:

Nachdem die Schüler eine Einführung in das Arbeiten mit GeoGebra erhalten haben, ist ihre erste Aufgabe, den Korpus eines Cellos, dargestellt als Bild, mit Hilfe von selber gewählten Funktionen zu approximieren. Die Schüler lernen durch das Experimentieren, wie Funktionsterme gewählt werden müssen, um die gewünschten Funktionsgraphen zu erhalten.

(b) Exaktifizierende Phasen:

Mit Hilfe der dynamischen Software GeoGebra sollen die Schüler wichtige Begriffe aus der musikalischen Akustik selbstständig erarbeiten.

(c) Festigungsphase:

Die Lösungen der Aufgaben müssen schriftlich festgehalten und am Ende des Tages im Plenum besprochen werden.

Kurzinformation:

Schulstufe	7. Schulstufe
Dauer	6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik und Musik
Verwendete Medien	GeoGebra (kostenlos), Instrumente
Technische Voraussetzungen	Computer
Autor	Agathe Schaurhofer

Voraussetzungen:

- Technische Voraussetzungen: Computer, GeoGebra, ev. Instrumente
- Technisches Vorwissen: Grundlegender Umgang mit dem Computer

Lerninhalte und Lernziele:

GeoGebra	grundlegende Kenntnisse für das selbstständige Arbeiten mit GeoGebra Erstellen von dynamischen „Arbeitsblättern“
Harmonische Schwingung	Kenntnis der Definition „Klang“ Kenntnis der Definition „Ton“ Kenntnis der Definition „Oberton“ richtiges Ablesen und notieren der Schwingungen
Musikalische Parameter	Verstehen des Zusammenhangs Amplitude-Tonstärke Verstehen des Zusammenhangs Frequenz-Tonhöhe
Interferenz	Verstehen: Wie kommt es zur Auslöschung bzw. Verstärkung
Fouriersynthese	Addition von Schwingungen, deren Amplituden und Frequenzen so gewählt werden müssen, um eine Sägezahnkurve darstellen zu können.
Fourier-Analyse	Kenntnis: findet Anwendung in der Klanganalyse Kenntnis: Zerlegt einen Klang in die einzelnen Teilschwingungen

Einsatz im Unterricht:

Um ein sinnvolles Arbeiten zu ermöglichen soll für jeden Schüler ein Computer zur Verfügung stehen, damit ein selbständiges Erarbeiten der GeoGebra- Aufgaben gewährleistet wird. Diese Aufgaben sollen auch als Vorbereitung für das Modul: Klangspektralanalyse gelten.

Lernmedien der Schüler:

Die Schüler arbeiten am Computer und mit Papier und Bleistift. Die Ausarbeitungen bzw. Ergebnisse sollen im Portfolio festgehalten werden.

Leistungsfeststellung/Leistungsbeurteilung:

Eine Leistungsbeurteilung ist in einer Begabtenförderungswoche nicht notwendig, stattdessen müssen/dürfen am Ende der Woche die Schüler ein Hot Potatoes- Rätsel lösen. Dieses soll zur Selbstkontrolle dienen.

2. Anleitung für Lehrer

Die Lösungen der einzelnen Aufgaben kann man dem Theorieteil entnehmen. Am Ende des Tages sind die GeoGebra-Aufgaben gemeinsam zu besprechen.

Weitere Aufgaben des Lehrers:

- Es ist darauf zu achten, dass jedem Schüler ein Computer zur Verfügung steht!
- Es sind zwei Lehrervorträge zu halten.

Der Lehrervortrag soll folgende Punkte beinhalten:

Das Basiswissen für die Vorträge ist dem Theorieteil zu entnehmen.

1. Vortrag: Einführung in das selbstständige Arbeiten mit GeoGebra:

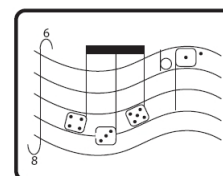
- Grundlegende Kenntnisse für den Umgang mit GeoGebra vermitteln: Wie benutzt man das Algebrafenster und die Eingabezeile
- Wie werden Funktionen in die Eingabezeile eingegeben?
- Wie werden die Schieberegler erstellt?
- Wie speichert man die GeoGebra-Bilder auf die gewünschte Größe ab?
- Wie erstellt man eine Webseite (html)?

2. Vortrag: Wellen - Longitudinalwellen - Schallwellen:

- Unterschied zwischen Schwingungen und Wellen erklären!
- Was versteht man unter Longitudinalwellen? Wie breiten sie sich aus!
- Geschwindigkeit des Schalls

3. Vortrag: Fourier-Analyse:

- Wo findet die Fourier-Analyse Verwendung?
- Überleitung herstellen zum Modul: Klangspektrenanalyse



Modul: Musikalische Akustik mit GeoGebra

Dieses Modul behandelt wichtige Begriffe aus der Musik, die mit Hilfe der Kenntnisse aus der Mathematik und Physik den Schülern näher gebracht werden sollen. Der Inhalt eignet sich ideal für die Nutzung der dynamischen Mathematik Software GeoGebra. Die Aufgaben, die damit erstellt wurden, sollt ihr selbstständig erarbeiten.

(1) Einführung in das selbstständige Arbeiten mit GeoGebra: Lehrervortrag

(2) Das Bild zeigt ein Cello.

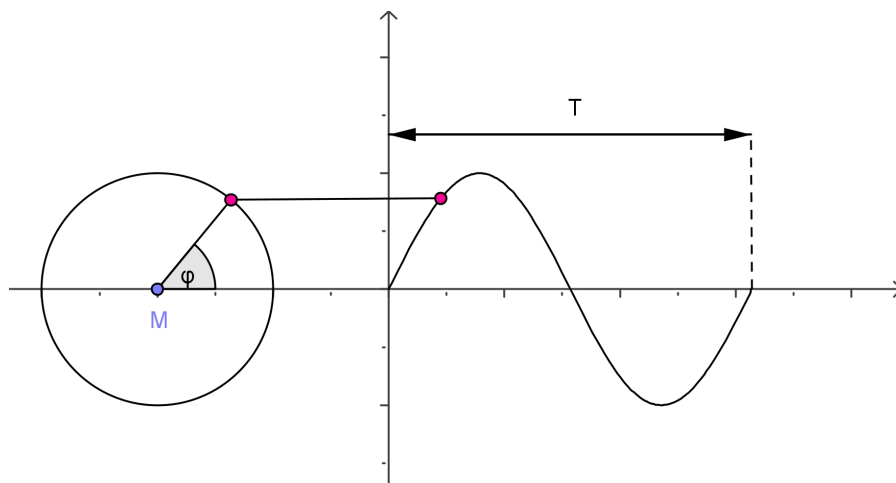


Abbildung 7.2:

- Versuche nun Funktionen zu finden, die deiner Meinung nach die einzelnen Rundungen des Korpus gut approximieren.
- Verwende nicht den Bewegungsmodus um die Funktion zu verschieben, sondern überlege dir bewusst, wie die verschiedenen Funktionen aussehen müssen.
- Gib sie anschließend in der Eingabezeile ein.

(3) Schwingungen:

Harmonische Schwingungen lassen sich an Hand der gleichförmigen Kreisbewegung anschaulich beschreiben. Dies sollte dir bereits aus der 6. Klasse AHS bekannt sein. Beschreibe nun folgende Darstellung:



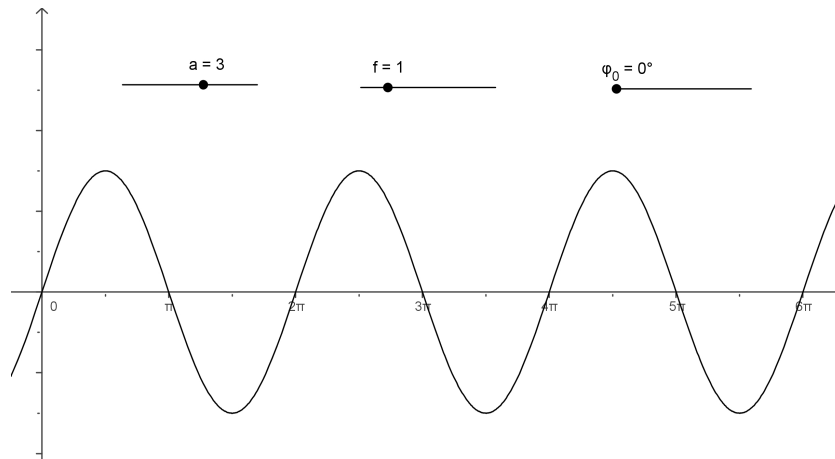
1. Welche Funktion ist abgebildet?
2. Wie sind die Achsen zu beschriften?
3. Formuliere in einem vollständigen Satz, wie diese Funktion bzw. Schwingung aus diesem Einheitskreis als Darstellung im Koordinatensystem abgeleitet wird!

$T = \frac{1}{f}$ und steht für die Periodendauer. Sie entspricht dem zeitlichen Abstand zwischen zwei Minima oder Maxima. f steht für die Frequenz (Einheit: Hertz).

(4) Von Tönen und Klängen:

Wenn man in der Musik, von einem „schönen Ton“ spricht, dann ist das ein umgangssprachlicher Ausdruck für Klang (=“natürlicher Ton“). Ein „reiner Ton“ kann nur elektronisch erzeugt werden und wird im Unterschied zu den Klängen durch eine einzige Sinuswelle beschrieben. Die allgemeine Form einer harmonischen Schwingung lautet:

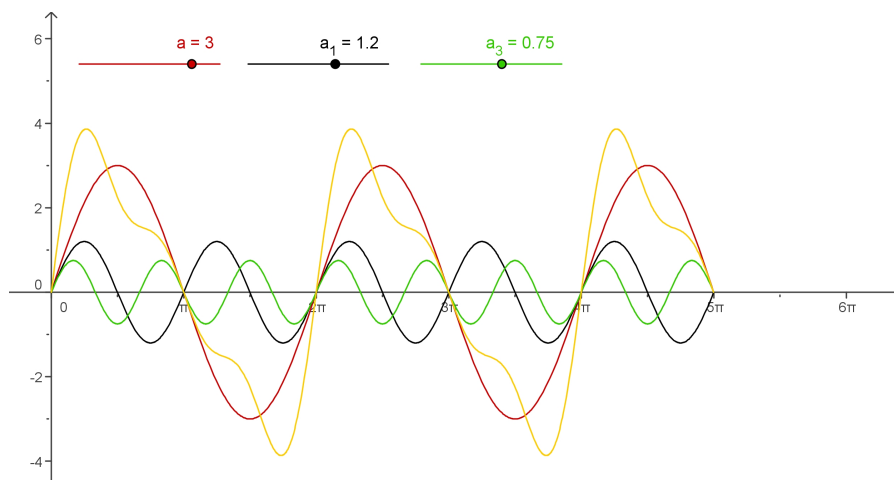
$$y(t) = a \sin(ft + \varphi_0)$$



1. Benütze die Schieberegler und beobachte die Veränderungen der Schwingung!
2. Notiere deine Beobachtungen!
3. Erkläre die Unbekannten a (Amplitude), f (Frequenz), φ_0 (Nullphasenwinkel) schriftlich! In welcher Einheit wird f gemessen?
4. Um welche musikalischen Parameter könnte es sich dabei handeln?
5. Wie werden dann in Folge dessen die Tonhöhe und Tonstärke bestimmt? Hinweis: Der Kammerton a^1 wird auf 440Hz gestimmt!

Ein Klang wird durch die Überlagerung (=Addition) harmonischer Schwingungen beschrieben. Nimm dein Instrument und spiel einen vollen Ton ohne Vibrato, zum Beispiel den Kammerton a^1 . Je nach Qualität des Instruments wirst du feststellen können, dass abgesehen vom gespielten Ton (=Grundton) noch andere, die so genannten Obertöne hörbar werden. Der Reichtum und Intensität dieser Obertöne bestimmt die Klangfarbe eines jeden Instruments.

Auf diesem Bild siehst du die Überlagerung von harmonischen Schwingungen!



1. Wie verhalten sich die einzelnen Schwingungen (in Bezug auf die Frequenz) zueinander? Notiere die einzelnen Schwingungen schriftlich!
2. Stelle den mathematischen Bezug zwischen einem Grundton und seinen Obertönen (=Teil- oder Partialton) her und formuliere diesen schriftlich! Verwende vorerst nicht die Schieberegler! Hinweis: Die Grundfrequenz entspricht der niedrigsten Frequenz. Sie bestimmt den Ton.
3. Wie lautet nun die genau Definition des „Klages“?
4. Im Unterschied zu den Klängen steht das Geräusch. Wie ist dieses dann zu definieren?

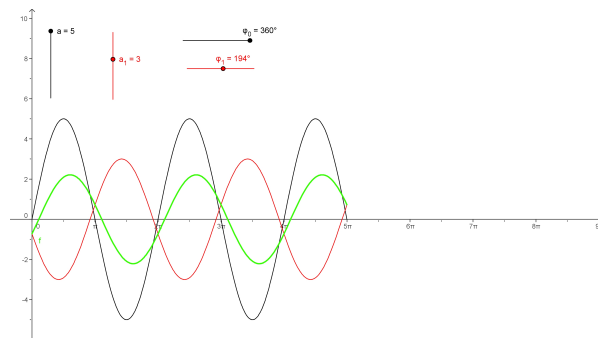
(5)Wellen - Longitudinalwellen: Lehrervortrag

(6)Schall: Lehrervortrag

(7) Konstruktive und destruktive Interferenz

Werden gleichfrequente Wellen mit bestimmter Phase überlagert, dann können drei Fälle eintreten:

1. Sie verstärken sich (konstruktive Interferenz)
2. Sie schwächen sich ab (bestimmt durch die Phasendifferenz)
3. Es kommt zur Auslöschung (destruktive Interferenz)

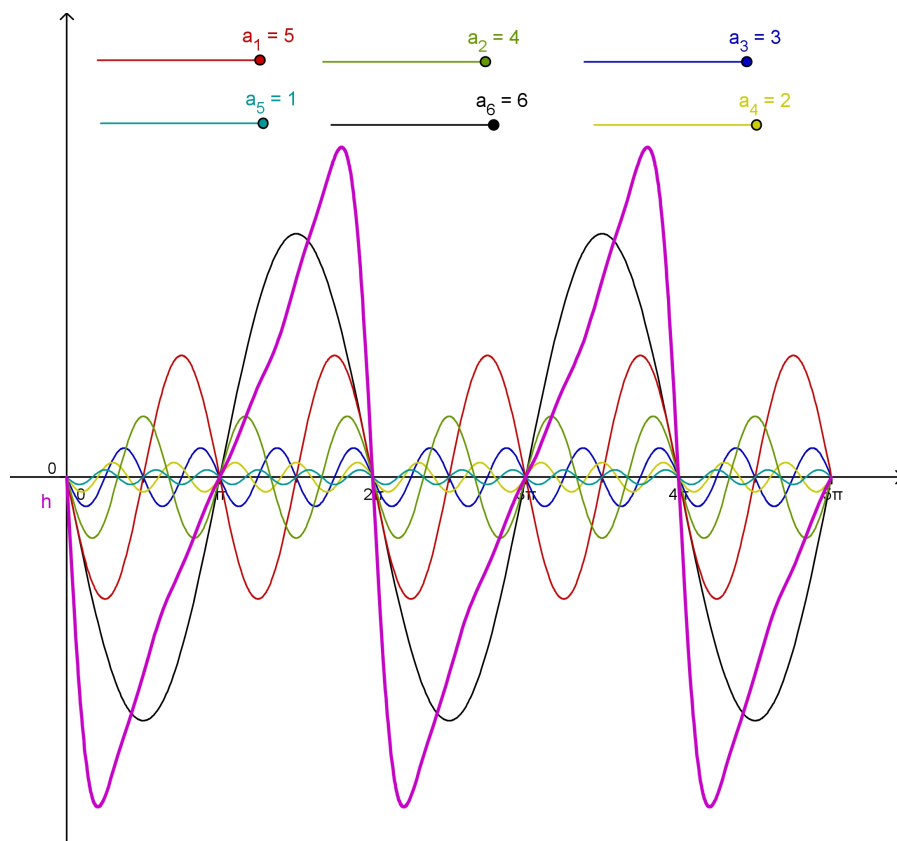


1. Wie müssen die Phasen nun gewählt werden, damit es zu einer Verstärkung kommt?
Verwende die Schieberegler!
2. Wie kommt es zur Auslöschung?

Notiere deine Beobachtungen!

(8) Fouriersynthese:

Mit Hilfe der Fouriersynthese, benannt nach dem Mathematiker und Physiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), kann man durch die Überlagerung (=Addition) von periodischen Schwingungen jede beliebige periodische Schwingungsform darstellen.



1. Wie müssen demnach die einzelnen Sinuskomponenten gewählt werden, damit sie eine Sägezahnkurve annähern.
2. Verwende die Schieberegler für die Amplituden der einzelnen Sinuskomponenten und stelle die Überlagerungsschwingung als Sägezahnschwingung dar.
3. Wie verhalten sich die Amplituden und Frequenzen der einzelnen Sinusschwingungen zueinander?
4. Notiere die einzelnen Schwingungen!

(9) Fourier-Analyse:

Die Fourier-Analyse ermöglicht die Zerlegung eines Klanges in seine einzelnen Sinusschwingungen, die wir als Teiltöne (= Grundton und Obertöne) bezeichnen.

Fourier-Analyse: Lehrervortrag

7.4 Modul: Klangspektrenanalyse

1. Didaktischer Kommentar

Im Mittelpunkt dieses Moduls steht die Analyse von Klangspektren.

(a) Intuitive Phase:

Nachdem die Schüler Einführung in die Bedienung von *overtone* bekommen haben, können sie selber zu Experimentieren beginnen und sich so mit dem Programm vertraut machen.

(b) Exaktifizierende Phasen:

Die Schüler müssen das erzeugte Klangspektrum beschreiben und mit anderen Instrumenten vergleichen. Sie müssen genau dokumentieren, welchen Ton sie auf welche Art und Weise gespielt haben.

(c) Festigungsphase:

Sie müssen Klangspektren von verschiedenen Instrumenten erstellen und die Unterschiede und Besonderheiten in ihrem Portfolio festhalten.

Kurzinformation:

Schulstufe	7. Schulstufe
Dauer	6 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik und Musik
Verwendete Medien	Internet, verschiedene Instrumente
Technische Voraussetzungen	Computer, Internet, <i>overtone</i> , Mikrofon, Lautsprecherboxen, Stimmgerät
Autor	Agathe Schaurhofer

Voraussetzungen:

- Technische Voraussetzungen: Computer, Internet, Software *overtone*, Mikrofon, Lautsprecher, verschiedene Instrumente
- Technisches Vorwissen: Grundlegender Umgang mit dem Computer

Lerninhalte und Lernziele:

Lerninhalt	Lernziel
Tonstärke	Kenntnis: Stärke des Tons ist von der Amplitude abhängig
Tonhöhe	Kenntnis: die Frequenz bestimmt die Tonhöhe
Amplitudenspektrum	Kenntnis: Was ist ein Amplitudenspektrum Umgang mit <i>overtone</i> Analysieren von Klangspektren
Klang	Kenntnis: Besteht aus mehreren Teiltönen
Übung	Erstellen von eigenen Klangspektren

Didaktischer Hintergrund:

Dieses Modul soll den Schülern die Möglichkeit bieten, durch selbstständiges Experimentieren die Klangqualität ihrer Instrumente zu erforschen, in dem sie auf die verschiedenen musikalischen Parameter Rücksicht nehmen. Gleichzeitig können sie das Wissen aus dem Modul: Fourier-Analyse und GeoGebra nun auch praktisch umsetzen bzw. anwenden.

Einsatz im Unterricht:

Jeder Gruppe muss ein Computer mit Lautsprecherboxen und Mikrofon zur Verfügung stehen, um sinnvoll arbeiten zu können. Die einzelnen Experimente sollen dann von jedem Schüler im Portfolio genauestens dokumentiert werden. Im Zentrum steht die Analyse. Durch geschicktes Vorgehen der Schüler können sie vieles über die Abhängigkeit der musikalischen Parameter aus dem Klang- bzw. Amplitudenspektrum entnehmen - nach dem Prinzip selbstständiges Erfahren und Lernen.

Lernmedien der Schüler:

Die Schüler arbeiten mit dem Computer und Mikrofon sowie mit Papier und Bleistift und mit ihren Instrumenten.

Leistungsfeststellung/Leistungsbeurteilung:

Eine Leistungsbeurteilung ist in einer Begabtenförderungswoche nicht notwendig, stattdessen müssen/dürfen die Schüler und Schülerinnen am Ende der Woche ein Hot Potatoes-Rätsel lösen. Dieses soll zur Selbstkontrolle dienen.

2. Anleitung für Lehrer

Der Lehrer soll die Schüler gut in den Umgang mit der Analyse-Software *overtone* einführen, damit die Schüler rasch zum wesentlichen Teil - die Analyse - fortschreiten können.

Weitere Aufgaben des Lehrers:

- Jeder Gruppe soll ein eigener Raum zur Verfügung stehen.
- Besprechen des Tagesablaufs.
- Es ist darauf zu achten, dass jeder Computer über einen Internetanschluss verfügt, um die Software *overtone* herunterladen zu können.
- Jeder Computer ist mit einem Mikrofon und Lautsprecherboxen auszustatten.
- Der Lehrer soll darauf achten, dass mindestens ein Stimmgerät vorhanden ist.
- Organisation: Jeder Gruppe muss ein Raum zur Verfügung stehen, damit sinnvolle Klangspektren erzeugt werden können.
- Gemeinsames vergleichen und besprechen der Klangspektren.

Der Lehrervortrag soll folgende Punkte beinhalten:

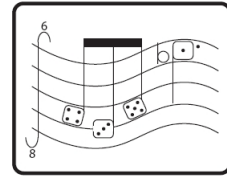
Vortrag: Einführung in das Arbeiten mit der Software *overtone*:

Erkläre:

- Aufbau der Software „overtone“: Was kann man mit *overtone* alles machen?
- Welche Ton- und Geräuschaufnahmen stellt *overtone* bereits zur Verfügung?
- Wie analysiert man diese und welche Hilfsmittel stehen dafür zur Verfügung?
- Wie kann man eigene Aufnahmen machen und mit *overtone* analysieren?

Hinweis:

Die Seite <http://www.aplu.ch/overtone/hauser/hauser.pdf> enthält eine gut Anleitung zum Bedienen der Software *overtone*.



Modul: Klangspektrenanalyse

Einführung in das Arbeiten mit der Software „*overtone*“: Lehrervortrag

Du hast im Modul: Fourier-Analyse und Geogebra einiges über die musikalischen Parameter und die Klangspektrenanalyse (Fourier-Analyse) erfahren!

Erstellt nun eigene Klangspektren. Nehmt unterschiedliche Töne von euren Instrumenten auf und notiert dabei genau:

- welche
- mit/ohne Vibrato
- mit oder ohne Nachdruck (zum Beispiel mittels des Bogens)
- laute und/oder leise
- tiefe und/oder hohe
- ...

Töne ihr gespielt habt!

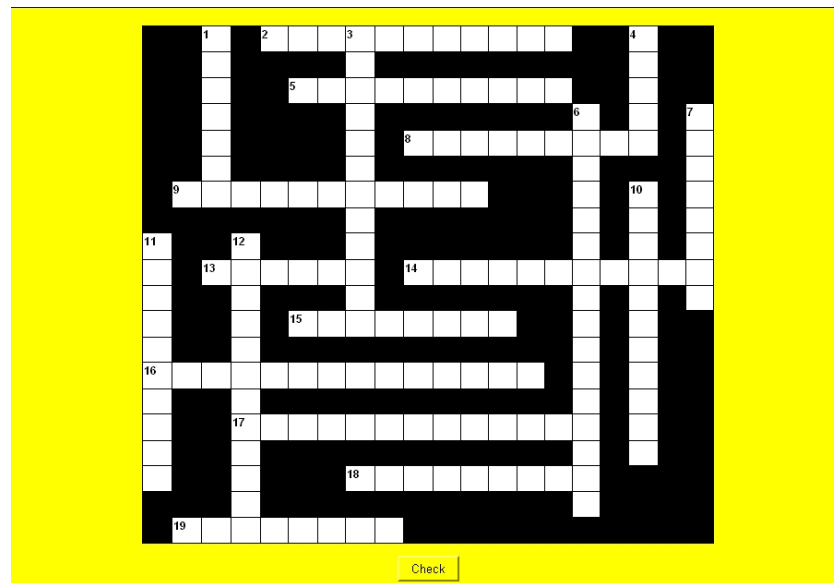
- (1) Versucht herauszufinden, welche Töne große und kleine Obertonspektren aufweisen.
- (2) In welchem Frequenzbereich liegen die Partialtöne?
- (2) Vergleicht die gleichen Instrumente!
- (3) Vergleicht verschiedene Instrumente!
- (4) Nehmt auch Geräusche und Vokale auf!

Geht auf die Unterschiede ein und notiert eure Erfahrungen und Analysen.

Den Beobachtungen sind keine Grenzen gesetzt!

8 Rätsel

Am Ende der Begabtenförderungswoche soll ein mit Hilfe der Software *Hot Potatoes*-erstelltes Rätsel als Selbstkontrolle dienen.



1. Sie wird durch die Schwingungszahl bestimmt!
2. Durch die Überlagerung welcher Schwingungen entsteht ein Klang?
3. Bedeutend für das Thema Stochastische Prozesse!
4. So wird der „natürliche“ Ton bezeichnet!
5. Ein anderes Wort für Oberton!
6. ... steht für die Anfangslage des schwingenden Systems zur Zeit $t=0$!
7. Mit Hilfe dieser Software kann man Klangspektrenanalysen durchführen!

8. Tritt beim Stimmen von Saiteninstrumenten auf!
9. Welche Interferenz bewirkt eine Auslöschung?
10. Wie nennt man die Zusammenstellungen zu je k Elementen, die unter Berücksichtigung der Anordnung aus n gegebenen Elementen ausgewählt werden?
11. Worauf haben das Obertonspektrum und die Intensität Einfluss?
12. Die Verstärkung zweier Signale nennt man destruktive Interferenz!?
13. Wer schrieb eine Anleitung für musikalische Würfelspiele?
14. Wie bezeichnet man die Anzahl der möglichen Anordnungen?
15. Wie bezeichnet man die Addition einer periodischen Funktion aus Sinusschwingungen?
16. Sie ermöglicht die Zerlegung eines Klanges in seine Elementarschwingungen!
17. Wie nennt man die Zusammenstellungen zu je k Elementen, die ohne Berücksichtigung der Anordnung aus n gegebenen Elementen ausgewählt werden?
18. Maximaler Wert der Auslenkung!
19. Gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an!

9 Glossar

Die Begriffe werden mit Hilfe des *dtv-Atlas Musik* bzw. *ABC Musik* erklärt.

Dissonante Intervalle

Dazu zählen die große und kleine Sekunde, die große und kleine Septime, sowie die verminderten und übermäßigen Intervalle.

Enharmonische Verwechslung

Am Klavier können die schwarzen Tasten entweder vom unteren oder vom oberen Stammton aus benannt werden. Zum Beispiel: cis-des oder fis-ges.

Geräusch

Die Schwingungen sind unperiodisch und die dazugehörige Teilfolge unharmonisch.

Kadenz

Die Kadenz ist eine virtuose solistische Darbietung innerhalb eines klassischen Instrumentalkonzerts, z.B. Violinkonzert

Klang

Im Unterschied zum „reinen“ Ton bezeichnet man den „natürlichen“ Ton als Klang. Er besteht aus einer hörbaren Summe von Grund- und Obertönen, d.h. zum Grundton kommen weitere periodische Schwingungen, die ganzzahlige Vielfache der Grundschwingungen sind. Sie werden auch als Partial- oder Teiltöne bezeichnet. Das Oszillogramm zeigt eine komplizierte Überlagerungskurve.

Klangspektrum

Stärke und Anzahl der Obertöne bilden das Klangspektrum.

Konsonante Intervalle

Konsonanz bedeutet Zusammenklang. Die reine Prime, Oktave, Quinte, Quarte große und kleine Terz, große und kleine Sexte sind konsonante Intervalle.

Obertöne

Obertöne werden auch als Partial- oder Teiltöne bezeichnet. Obertöne sind periodische Schwingungen, die im ganzzahligen Verhältnis zur Grundschwingung (=Grundton) stehen.

Ton

Ein „reiner“ Ton ergibt sich durch eine einzelne Sinusschwingung und kommt in der Musikpraxis nur selten vor. Er ist nur elektronisch herstellbar.

10 Schlusswort

Diese Diplomarbeit soll einen kleinen Einblick darüber geben, auf welche Weise in den unterschiedlichsten Bereichen der Musik die Mathematik Verwendung finden kann. Sei es nun in der musikalischen Akustik oder aber auch als Hilfsmittel beim Komponieren. „Musik“ ist daher ein ideales Beispiel für außermathematische Anwendungen.

Wie wir gesehen haben bietet dieses Thema auch gute Möglichkeiten für den Einsatz der dynamischen Software GeoGebra. Das Modul: Musikalische Akustik und GeoGebra sollte dafür unter anderem auch als Anregung dienen. Den Schülern wird hierbei eine Möglichkeit geboten, selbstständig Begriffe aus der musikalischen Akustik zu erarbeiten. In Bezug auf den „Projektorientierten Unterricht“ möchte ich noch erwähnen, dass ich H. C. Reichels Definition des Projekts durch die zwei Komponenten, die inhaltliche und die methodische, als sehr sinnvoll betrachte (siehe Kapitel 6). Sie boten mir einen ersten guten Überblick darüber, worum es eigentlich im Projektunterricht genau zu gehen hat. Als Grundmuster für die Projektmethode schien mir das Modell von Frey sehr übersichtlich und auch nachvollziehbar.

Abschließend möchte ich noch bemerken, dass es sich bei dem Projekt „Musik und ihre mathematische Saite“ um ein erfahrungsbezogenes und vor allem für die Schüler interessantes außermathematisches Thema handelt. Ich bilde meine Meinung aus dieser Überzeugung heraus, dass Musik einfach ein wichtiger Bestandteil der Jugend ist und schließe mit den Worten:

*„Musik soll ein Teil unseres Lebens sein,
wer ohne Musik lebt, weiß nicht wie arm er ist!“*

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schröder, E.: <i>Mathematik im Reich der Töne</i> . Teubner-Verlag, Leipzig 1982, S. 48	6
2.2	Schröder, E.: <i>Mathematik im Reich der Töne</i> . Teubner-Verlag, Leipzig 1982, S. 51	8
2.3	Schröder, E.: <i>Mathematik im Reich der Töne</i> . Teubner-Verlag, Leipzig 1982, S. 66	15
3.1	Güth, W.: <i>Einführung in die Akustik der Streichinstrumente</i> . S. Hirzel Verlag, Stuttgart/Leipzig 1995, S. 52	21
3.2	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	24
3.3	Hall, D. E.: <i>Musikalische Akustik</i> . Schott, Mainz 2008, S. 22	27
3.4	Hall, D. E.: <i>Musikalische Akustik</i> . Schott, Mainz 2008, S. 82	30
3.5	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	31
3.6	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	32
3.7	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	33
3.8	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	34
4.1	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	39
4.2	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	41
4.3	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	42
4.4	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	43
4.5	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	44
4.6	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	45
4.7	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	45
4.8	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	46
4.9	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	47
4.10	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	47
4.11	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	47
4.12	Erstellt mit GeoGebra, Agathe Schaurhofer	48

4.13	Erstellt mit <i>overtone</i> von Agathe Schaurhofer	49
4.14	Erstellt mit <i>overtone</i> von Agathe Schaurhofer	49
4.15	Erstellt mit <i>overtone</i> von Agathe Schaurhofer	50
4.16	Erstellt mit <i>overtone</i> von Agathe Schaurhofer	51
4.17	Erstellt mit <i>overtone</i> von Agathe Schaurhofer	51
4.18	Erstellt mit <i>overtone</i> von Agathe Schaurhofer	52
5.1	http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt	54
5.2	Kupper, H.: <i>Computer und Musik</i> . BI-Wiss.-Verlag, Mannheim 1994, S. 82	60
5.3	Kupper, H.: <i>Computer und Musik</i> . BI-Wiss.-Verlag, Mannheim 1994, S. 85	62
5.4	Kupper, H.: <i>Computer und Musik</i> . BI-Wiss.-Verlag, Mannheim 1994, S. 89	63
5.5	http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/nchrist/MAMUSI/4Zufall . .	69
5.6	Erstellt mit einem Notenprogramm, Agathe Schaurhofer	71
5.7	Erstellt mit einem Notenprogramm, Agathe Schaurhofer	78
5.8	Erstellt mit einem Notenprogramm, Agathe Schaurhofer	79
5.9	Erstellt mit einem Notenprogramm, Agathe Schaurhofer	80
5.10	Erstellt mit einem Notenprogramm, Agathe Schaurhofer	81
7.1	Erstellt mit <i>paint</i> , Agathe Schaurhofer	90
7.2	http://www.cello.org/uploadedfiles%5Cimages%5CFGuadagnini	108

Literaturverzeichnis

- [1] http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/~nchrist/MAMUSI/4Zufall_und_musik.htm
[Stand: 06.03.2009]

- [2] http://abi06.jcrg.de/facharbeiten/Facharbeit_PhysikLK_04-06_Sebastian_Fiedlschuster.pdf [Stand: 27.05.2009]

- [3] http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt [Stand: 01.05.2009]

- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Schwingung> [Stand: 01.05.2009]

- [5] <http://www.geogebra.org/de/examples/fourier/index.htm> [Stand: 01.05.2009]

- [6] <http://www.geogebra.org/de/examples/fourier/Arbeitsblaetter/uebersicht.htm>
[Stand: 01.05.2009]

- [7] <http://www.aplu.ch/overtone/hauser/hauser.pdf> [Stand: 19.04.2009]

- [8] <http://www.clab.unibe.ch/overtone/> [Stand: 19.04.2009]

- [9] <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~ieem/BzMU/BzMU2007/Siller.pdf>
[Stand: 04.05.2009]

- [10] <http://www.cello.org/uploadedfiles%5Cimages%5CFGuadagnini>[Stand: 30.05.2009]

- [11] <http://rfdz.ph-noe.ac.at/index.php?id=70> [Stand: 03.04.2009]

- [12] http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/lernpfade/lernpfad_wetter/zusatzmaterial/ [Stand: 03.04.2009]

- [13] http://www.pi5.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/mathe-ss06/vorl_9.pdf [Stand: 25.05.2009]

- [14] Barkowsky, J.: *Das Fourier-Theorem in musikalischer Akustik und Tonpsychologie*. Europäischer Verlag der Wissenschaften, Frankfurt am Main 1996

- [15] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin, New York 2002

- [16] Beutelspacher, A. und Petri, B.: *Der Goldene Schnitt*. Mannheim 1995

- [17] Frey, K.: *Die Projektmethode*. Beltz Verlag, Weinheim und Basel 1982 (2002)

- [18] Fucks, W.: *Mathematische Analyse der Formalstruktur von Musik*. Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1958

- [19] Hrg. Götze, H. und Wille, R.: *Musik und Mathematik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1985

- [20] Güth, W.: *Einführung in die Akustik der Streichinstrumente*. S. Hirzel Verlag, Stuttgart/Leipzig 1995

- [21] Hall, D.E.: *Musikalische Akustik*. Schott, Mainz 2008
- [22] Hauptenthal, G.: *Geschichte der Würfelmusik in Beispielen. 1. Teilband: Text*
Dissertation, Saarbrücken 1994
- [23] Hänsel, D. und Müller, H.: *Das Projektbuch Sekundarstufe*. Beltz, Weinheim Basel
1988
- [24] Helmholtz, H. v.: *Gesammelte Schriften* (Hrg. Brüning J.) *Die Lehre von der
Tonempfindung als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. Georg Olms
Verlag, Hildesheim 2003
- [25] Hering, E. und Martin, R. und Stohrer, M.: *Physik für Ingenieure*. Springer- Verlag,
Berlin, Heidelberg 1997
- [26] Krenzel, U.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Vieweg
Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 2002
- [27] Kupper, H.: *Computer und Musik*. BI-Wiss.-Verlag, Mannheim 1994
- [28] Leupold, W.: *Mathematik - ein Studienbuch für Ingenieure*. Fachbuchverlag Leipzig,
1995
- [29] Meyer, H.: *Unterrichtsmethoden - II: Praxisband*, Cornelsen Verlag, Berlin 1987
- [30] Michels, U.: *dtv-Atlas Musik*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 2001
- [31] Mozart, W. A.: *Musikalische Würfelspiele - Eine Anleitung Walzer und Schleifer
mit zwei Würfeln zu komponieren*. Schott, 1956

- [32] Pfeifer, F. X.: *Der Goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst*. 1969
- [33] Hrg. Reichel, H. C.: *Fachbereichsarbeiten und Projekte 2*. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1991
- [34] Hrg. Reichel H. C.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 1*. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1987
- [35] Raml, R.: *Statistische Planung - Erhebung - Analyse. Ein Unterrichtprojekt*. Diplomarbeit, Wien 2002
- [36] Schröder, E.: *Mathematik im Reich der Töne*. Teubner-Verlag, Leipzig 1982
- [37] Schülerduden - *Die Mathematik II*. Bibliographisches Institut und F. A. Brockhaus AG, Mannheim 1991
- [38] Taschner, R.: *Der Zahlen gigantischer Schatten*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden 2005
- [39] Ziegenrucker, W.: *A B C Musik*. Breitkopf u. Härtel, Wiesbaden 2004

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Agathe Schaurhofer
Geburtsdatum: 13. April 1985
Geburtsort: Steyr/Oberösterreich
Staatsbürgerschaft: Österreich

Ausbildung

1991 - 1995 Volksschule Zeillern
1995 - 1999 Private Mädchenhauptschule der Franziskanerinnen Amstetten
1999 - 2003 Oberstufenrealgymnasium mit Instrumentalunterricht Melk
2003 - 2009 Studium an der Universität Wien für Lehramt Mathematik und Geschichte

Wien, am 7. Juni 2009