



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Die rechnerische Nachbildung der Sitar

Verfasser

Sadjad Siddiq

angestrebter akademischer Grad

Magister der Philosophie (Mag. phil.)

Wien, im Mai 2010

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 316

Studienrichtung lt. Studienblatt: Musikwissenschaft

Betreuer: Dr. Christoph Reuter

## Danksagungen

Zum Gelingen dieser Arbeit haben viele Leute beigetragen. Zuallererst möchte ich mich bei Herrn Professor Christoph Reuter für die beste Betreuung, die man sich als Diplomand erhoffen kann, bedanken. Seine ansteckende Neugier, seine Begeisterung für die Thematik und seine Unterstützung bei wissenschaftlichen und formellen Fragen haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Bei allen Mitarbeitern des Instituts für Wiener Klangstil bedanke ich mich, dass ich die Messungen im hervorragend ausgestatteten Labor des Instituts durchführen konnte. Ganz besonderer Dank gilt Frau Sandra Carral und Herrn Alexander Mayer, die sich sehr viel Zeit für mich genommen haben und mir einen umfassenden Einblick in die Messtechnik und ihre mathematischen Hintergründe gegeben haben.

Ich bedanke mich bei Professor Matti Karjalainen und Henri Penttinen von der technischen Universität Helsinki, die sich Zeit für ein sehr interessantes und anregendes Gespräch genommen haben, und auch später stets ein offenes Ohr für meine Fragen hatten. Bei meinen Eltern bedanke ich mich für die Möglichkeit, dass ich mein Studium ohne finanzielle Sorgen durchführen konnte. Meiner Mutter danke ich außerdem für das Korrekturlesen meiner Arbeit und meinem Vater für die Sitar. Meinen Brüdern danke ich für viele wertvolle fachliche und auch sprachliche Hinweise und im Voraus für die Erledigung eines nicht zu unterschätzenden Teiles des administrativen Aufwands, der mit dem Einreichen einer Diplomarbeit einher geht.

Auch meinen Freunden bin ich zu Dank verpflichtet. Kaisa danke ich für die Hilfe bei der Beschaffung wichtiger Artikel, Sana und Sarah für ihre Motivation und im Voraus für die Erledigung anstehenden Papierkrams, Elisabeth für die Hilfe beim Satz mathematischer Formeln, Jakob dafür, dass er dem Verein Talaash Speicher im Internet zur Verfügung gestellt hat, den wir für wissenschaftliche Arbeiten verwenden können und Tam danke ich dafür, dass er mich auf die Idee gebracht hat die Arbeit in LaTeX zu schreiben. Bernhard, Daphne, Dörte, Adnan, Tauqir und Marion, um nur einige zu nennen, bin ich für die seelische Unterstützung dankbar, die ich während dem Schreiben dieser Arbeit erhalten habe.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Beweggründe . . . . .	7
1.2	Fragestellung . . . . .	8
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	9
1.4	Klangbeispiele . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Physikalische Modellierung</b>	<b>11</b>
2.1	Physikalische Modelle als Beschreibung von Musikinstrumenten . . . . .	11
2.2	Anwendungsbereiche physikalischer Modelle . . . . .	11
2.2.1	Anwender physikalischer Modelle . . . . .	11
2.2.2	Physikalische Modelle als Klangerzeuger . . . . .	13
2.2.3	Vermarktung in Synthesizern . . . . .	13
2.3	Arten physikalischer Modelle . . . . .	15
2.3.1	Einteilung nach der Art der Berechnung . . . . .	15
2.3.2	Andere Einteilungsmöglichkeiten . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Die Sitar</b>	<b>19</b>
3.1	Allgemeines . . . . .	19
3.2	Aufbau . . . . .	19
3.3	Saiten . . . . .	19
3.4	Spieltechnik . . . . .	21
3.5	Stege . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Die Saitenschwingung</b>	<b>23</b>
4.1	Die ideale Saite . . . . .	23
4.1.1	Die Wellengleichung . . . . .	23
4.1.2	Die Schwingung der idealen Saite . . . . .	25
4.2	Die realistische Saite . . . . .	26
4.2.1	Die Schwingung der realistischen Saite . . . . .	26
4.2.2	Dämpfung . . . . .	26
4.2.3	Dispersion . . . . .	27
4.3	Die Saite der Sitar . . . . .	30
4.3.1	Die Stegform als Klangfärber . . . . .	30

4.3.2	Messaufnahmen der Saite . . . . .	31
4.3.3	Beobachtungen und Analyse der Saite mit flachem Steg . . . . .	31
4.3.4	Die Wechselwirkung zwischen Saite und Steg . . . . .	33
4.3.5	Der Beitrag der Dispersion zur Wechselwirkung . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Der Resonanzkörper der Sitar</b>	<b>36</b>
5.1	Die Wirkung des Resonanzkörpers . . . . .	36
5.2	Der Resonanzkörper als Übertragungsfunktion . . . . .	37
5.2.1	Die akustische Admittanz . . . . .	37
5.2.2	Die Messung der Admittanz . . . . .	37
5.3	Die durchgeführten Messungen . . . . .	38
5.3.1	Die Messumgebung . . . . .	38
5.3.2	Die Wahl des Anregungssignals . . . . .	38
5.3.3	Die verwendeten Geräte . . . . .	40
5.3.4	Die Aufbereitung der Messergebnisse . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Die Planung des physikalischen Modells</b>	<b>42</b>
6.1	Anforderungen an das physikalische Modell . . . . .	42
6.2	Anforderungen an das Programm . . . . .	43
6.2.1	Überlegungen im Vorfeld der Entwicklung . . . . .	43
6.2.2	Hürden bei der Programmierung physikalischer Modelle . . . . .	43
6.2.3	Zielsetzung der Entwicklung . . . . .	46
6.3	Die Wahl eines geeigneten Modellierungsverfahrens . . . . .	47
6.4	Die Ausgangssituation der Modellierung . . . . .	49
6.4.1	Das Festlegen der Vorgaben . . . . .	49
6.4.2	Vorgaben zur Berechnung . . . . .	50
6.4.3	Die Anregung der Saite . . . . .	50
6.4.4	Die Form des Steges . . . . .	51
6.4.5	Die Verstärkung des Resonanzkörpers . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Das Masse-Feder-Modell der Sitar</b>	<b>54</b>
7.1	Funktionsweise eines Masse-Feder-Modells . . . . .	54
7.1.1	Grundlagen . . . . .	54
7.1.2	Berechnung . . . . .	54
7.1.3	Physikalischer Bezug von Masse-Feder-Modellen . . . . .	56
7.1.4	Schwierigkeiten beim Entwurf von Masse-Feder-Modellen . . . . .	57
7.2	Das Masse-Feder-Modell der Sitar-saite . . . . .	58
7.2.1	Der Nutzen eines Masse-Feder-Modells . . . . .	58
7.2.2	Einfache Masse-Feder-Modelle . . . . .	58
7.2.3	Implementierung . . . . .	60
7.2.4	Die Modellierung des flachen Steges . . . . .	61

7.2.5	Anfangswerte . . . . .	61
7.2.6	Klangausgabe . . . . .	62
7.3	Akustische Analyse . . . . .	62
7.3.1	Das analysierte Signal . . . . .	62
7.3.2	Ungültigkeit des Young-Helmholtz Gesetzes . . . . .	63
7.3.3	Abwärts gleitende Formanten . . . . .	63
7.3.4	Nichtlinearität . . . . .	63
7.3.5	Dispersion . . . . .	64
7.4	Zusammenfassung und Bewertung . . . . .	67
<b>8</b>	<b>Das FDM-Modell der Sitar</b>	<b>68</b>
8.1	Die Funktionsweise von FDM-Modellen . . . . .	68
8.1.1	Allgemeines . . . . .	68
8.1.2	Finite Differenzen . . . . .	68
8.1.3	Die Wellengleichung mit finiten Differenzen . . . . .	68
8.1.4	Die Berechnung der Dispersion . . . . .	70
8.1.5	Implementierung und Digitalisierung . . . . .	71
8.1.6	Tonhöhe . . . . .	72
8.1.7	Dämpfung . . . . .	73
8.1.8	Anfangswertbelegung . . . . .	73
8.1.9	Klangausgabe . . . . .	73
8.2	Das FDM-Modell der Sitarσαite . . . . .	74
8.2.1	Die Repräsentation der Saite . . . . .	74
8.2.2	Initialisierung . . . . .	74
8.2.3	Feinabstimmung der Tonhöhe . . . . .	75
8.2.4	Die Wechselwirkung mit dem Steg . . . . .	75
8.2.5	Dämpfung . . . . .	75
8.2.6	Dispersion . . . . .	75
8.3	Akustische Analyse . . . . .	75
8.3.1	Das analysierte Signal . . . . .	75
8.3.2	Ungültigkeit des Young-Helmholtz Gesetzes . . . . .	76
8.3.3	Abwärts gleitende Formanten . . . . .	76
8.3.4	Nichtlinearität . . . . .	77
8.3.5	Dispersion . . . . .	77
8.4	Zusammenfassung und Bewertung . . . . .	78
<b>9</b>	<b>Das Wellenleitermodell der Sitar</b>	<b>80</b>
9.1	Die Funktionsweise von Wellenleitern . . . . .	80
9.1.1	Grundlagen . . . . .	80
9.1.2	Digitalisierung . . . . .	81

9.1.3	Anfangswertbelegung . . . . .	82
9.1.4	Reflexion . . . . .	82
9.1.5	Tonhöhe . . . . .	83
9.1.6	Wellenleiter anderer Größen . . . . .	84
9.1.7	Implementierung . . . . .	84
9.1.8	Ausgangssignal . . . . .	85
9.1.9	Filter in Wellenleitern . . . . .	85
9.1.10	Optimierung . . . . .	89
9.2	Das Wellenleitermodell der Sitar . . . . .	91
9.2.1	Die Modellierung des flachen Steges . . . . .	91
9.2.2	Dämpfung mittels Tiefpassfiltern . . . . .	92
9.2.3	Dispersion mittels Allpassfilter . . . . .	93
9.3	Akustische Analyse . . . . .	94
9.3.1	Das analysierte Signal . . . . .	94
9.3.2	Ungültigkeit des Young-Helmholtz Gesetzes . . . . .	94
9.3.3	Abwärts gleitende Formanten . . . . .	95
9.3.4	Nichtlinearität . . . . .	95
9.3.5	Die Form der schwingenden Saite . . . . .	96
9.3.6	Dispersion . . . . .	96
9.4	Zusammenfassung und Bewertung . . . . .	98
<b>10</b>	<b>Abschließende Betrachtungen und Ausblick</b>	<b>99</b>
10.1	Übersicht über die vorgeschlagenen Modelle . . . . .	99
10.2	Einschränkung der vorgeschlagenen Modelle . . . . .	99
10.3	Mögliche Verfeinerung der vorgeschlagenen Modelle . . . . .	101
10.4	Mögliche Erweiterungen der vorgeschlagenen Modelle . . . . .	102
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>105</b>
	<b>Anhang</b>	<b>111</b>
	Zusammenfassung . . . . .	111
	Lebenslauf . . . . .	112

# 1 Einleitung

## 1.1 Beweggründe

Physikalische Modelle sind ein faszinierendes Verfahren zur Synthese von Instrumentenklängen. Hinter dem sagenhaften Klang, den einige neue Modelle bieten, steckt vielschichtiges und detailliertes Wissen zur Entstehung des Klanges im wirklichen Instrument. Die Berechnung der Wirklichkeit hat jedoch neben der musikalischen Anwendung auch in der Erforschung der Instrumente großes Interesse geweckt. Die Nachbildung eines Instruments als physikalisches Modell ist ein Vorgang, bei dem umfassendes Wissen um die Feinheiten physikalischer Einzelheiten der Klangentstehung gefragt ist, in dem aber gleichzeitig auch wichtige Erkenntnisse zu Tage treten und die wahre Bedeutung von Phänomenen, die bei einer oberflächlichen Betrachtung der Materie als unwichtig erscheinen, erkannt wird. Schon die entstehenden Modelle bieten eine Versuchsumgebung, in der Theorien zu Mechanismen der Klangentstehung entwickelt und getestet werden können ohne aufwändige Versuche zu inszenieren.

Akustische Untersuchungen zu gezupften Saiteninstrumenten gibt es viele, die meisten beschäftigen sich jedoch mit Instrumenten der westlichen Musik. Die klanglichen - und somit auch die akustischen - Anforderungen an Instrumente der südasiatischen Musik sind jedoch anders und das Wissen über die Akustik westlicher Instrumente lässt sich nicht uneingeschränkt auf Instrumente anderer Musikkulturen übertragen. Während in der westlichen Klassik beispielsweise der Zusammenklang vieler Instrumente oder die Harmonie wesentliche Bestandteile einer Komposition sind, gibt es Harmonie und Orchester in der klassischen südasiatischen Musik nicht, dafür spielen der Rhythmus und die kunstvolle Ausgestaltung der Töne eine viel wichtigere Rolle, die sie stärker ins Zentrum der Aufmerksamkeit rücken. Das Spiel mit einem breiten Klangfarbenspektrum und seine Variation ist also für Solisten wesentlich.

Seit der Teilung Britisch-Indiens durchlebt die klassische Musik in Pakistan schwierige Zeiten. Während sie sich in Indien eines großen Interesses erfreut, stößt sie in Pakistan auf wenig Resonanz (Chakraborty 2008). Neue Zugänge könnten hier Abhilfe schaffen und frisches Interesse an einem wichtigen Teil der Kultur wecken. Westliche Instrumente wurden durch verschiedene Verfahren der Musiksynthese weltweit einer breiten Schicht von Musikern zugänglich gemacht, da beispielsweise das Komponieren, Arrangieren und Probehören von Orchesterstücken auch für orchesterlose Komponisten dank umfangreicher Bibliotheken wie der „Vienna Symphonic Library“ oder „Edirol Orchestral“ kein

## 1 Einleitung

Problem mehr ist.

Synthetische Versionen südasiatischer Instrumente gibt es nicht in vergleichbarer Qualität. Wie oben erwähnt, spielt gerade bei diesen Instrumenten die genaue und feine Steuerung der Klangfarbe und somit der Spielweise eine zentrale Rolle, die in Wellentabellensyntheseverfahren aber auf Grund der beschränkten Anzahl an Aufnahmen schlecht reproduziert werden kann. Außerdem wird die Sitar für unterschiedliche Ragas anders gestimmt und hat durch die vielen Bordunsaiten immer andere Resonanzeigenschaften, was in auf Aufnahmen basierenden Synthesetechniken schwer imitiert werden kann. Ausgereifte physikalische Modelle können durch die Simulation der Klangerzeugung im Idealfall ein Klangspektrum bieten, das dem echten Instrument in nichts nachsteht. So könnten die Instrumente der südasiatischen Klassik einer breiten Schicht an kreativen Köpfen näher gebracht werden, was auch für das Ansehen dieser Tradition positive Auswirkungen hätte.

Die physikalische Erforschung, Erfassung und Erklärung der Klangerzeugung als physikalisches Modell soll außerdem ein kleiner Beitrag zur Verbesserung des benötigten Verständnisses sein, das für den Instrumentenbau grundlegend ist und somit eine offensichtliche Lücke in der Dokumentation der Welt der Musikinstrumente schließen. Diese Arbeit könnte in weiterer Folge auch in der Hinsicht einen kleinen Beitrag leisten, dass sie durch die rechnerische Nachbildung eine virtuelle Experimentierumgebung zur Verfügung stellt und bei Forschungen dienlich ist, wie beispielsweise am Sanjan Nagar Institut<sup>1</sup> in Lahore (Pakistan), wo derzeit an der Weiterentwicklung verschiedener südasiatischer Instrumente gearbeitet wird, um diese noch gezielter auf die klassische Musik (Südasiens) auszurichten.

### 1.2 Fragestellung

Die besondere Klangfarbe der Sitar entsteht dadurch, dass die schwingende Saite immer wieder gegen den breiten Steg schlägt. Ähnliche Mechanismen finden sich bei vielen anderen südasiatischen Instrumenten. Auch außerhalb Südasiens gibt es zahlreiche Saiteninstrumente, deren Klangfarbe durch das Aufschlagen der Saite auf Hindernisse geprägt ist. Die Kollision der schwingenden Saite mit Objekten ist Gegenstand einiger Forschungsarbeiten gewesen. Hier geht es um die Vertiefung und praktische Anwendung dieses Wissens durch die Erstellung physikalischer Modelle der Sitar. Gleichzeitig soll auch auf Probleme und Schwierigkeiten der physikalischen Modellierung von Musikinstrumenten eingegangen werden.

Obwohl der große Einfluss des Resonanzkörpers auf den Gesamtklang außer Frage steht, steht die Saitenschwingung im Vordergrund dieser Arbeit. Der Resonanzkörper wird nur als Mittel zur Verstärkung dieser angesehen und modelliert.

---

<sup>1</sup>[www.sanjannagar.org](http://www.sanjannagar.org)

Der wesentliche Kern der Arbeit behandelt daher folgende Fragen:

1. Welche für den Klang relevanten Auswirkungen hat die Kollision zwischen Saite und Steg auf die Saitenschwingung?
2. Wie lässt sich basierend auf dem Wissen über die Saitenschwingung der Sitar ein physikalisches Modell programmieren?
3. Welche Schwierigkeiten stehen der Entwicklung eines möglichst natürlich klingenden Modelles im Weg?
4. Wie kann das physikalische Modell so weit optimiert werden, dass es möglichst schnell, bestenfalls in Echtzeit, laufen kann?

## 1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in zwei große Teile. Im ersten Teil dieser Arbeit soll der Klang der Sitar erforscht werden. Dazu wird vor allem die Schwingung der Saite untersucht.

Um das Zusammenspiel der vielen Parameter der Klangentstehung zu untersuchen, werden im zweiten Teil der Arbeit drei Programme entwickelt, die die physikalischen Vorgänge simulieren und so als Versuchsumgebung dienen können. Ziel der Programmierung soll eine möglichst naturgetreue und möglichst schnelle Simulation sein. Dabei soll auch auf die relevanten technischen Herausforderungen und besonderen Schwierigkeiten bei der Erzeugung künstlicher Instrumente und deren Lösung eingegangen werden.

Kapitel 2 gibt zunächst einen Überblick über die Arten, Möglichkeiten und Einsatzbereiche physikalischer Modelle in der Musik und Instrumentenakustik. In Kapitel 3 wird der Aufbau und die Spielweise der Sitar besprochen. Einzelheiten zur Schwingung der gezupften Saite werden in Kapitel 4 beschrieben. Dort wird auch der Ton der Sitar analysiert und versucht die Saitenschwingung der Sitar zu beschreiben. In Kapitel 5 wird die Messung des Resonanzkörpers der Sitar beschrieben, auch wenn dessen Beschreibung kein Anliegen dieser Arbeit ist.

Die verbleibenden Kapitel dokumentieren die Entwicklung mehrerer physikalischer Modelle. In Kapitel 6 wird die Auswahl der verwendeten Verfahren begründet. Dort werden auch Anforderungen an die Modelle formuliert. Die folgenden drei Kapitel beschäftigen sich je mit der Entwicklung und Bewertung eines Modells. Zuerst werden die theoretischen Grundlagen des Modells besprochen. Vor diesem Hintergrund wird die Entwicklung eines Sitarmodells erläutert. Anschließend wird das Modell anhand der im 4. Kapitel vorgestellten Besonderheiten der Sitar saite analysiert.

## **1.4 Klangbeispiele**

Klangbeispiele zu den in dieser Arbeit vorgestellten Modellen können von der Internetseite des Vereins Talaash heruntergeladen werden: [http://www.talaash.at/DA\\_sadjad](http://www.talaash.at/DA_sadjad).

## 2 Physikalische Modellierung

### 2.1 Physikalische Modelle als Beschreibung von Musikinstrumenten

Physikalische Modelle haben das Ziel, Vorgänge in Systemen auf der Grundlage physikalischer Abläufe zu beschreiben. Die Echtheit und das Ausmaß der Abstraktion zwischen den Modellen können stark variieren und hängen mit dem Ziel der Implementierung und dem Kenntnisstand über die physikalischen Abläufe zusammen.

In dieser Arbeit geht es um physikalische Modelle, die Musikinstrumente beschreiben sollen. Kojs, Serafin und Chafe (2007) geben in ihrem Aufsatz eine präzise Definition über physikalische Modelle im akustischen Sinne:

*„A physical model is a computer simulation of a sonic object (whether it be a musical instrument, an environmental phenomenon or an everyday object) based on understanding and implementation of the sound production mechanism.“* (Kojs, Serafin und Chafe 2007, S.61)

Bei physikalischen Modellen handelt es sich demnach um auf physikalischen Ansätzen beruhende, mathematische Beschreibungen eines Instruments (Russ 2009, S.10) Die Komplexität und Genauigkeit dieser Beschreibung hängt vom Zweck ab, was im folgenden Abschnitt erörtert wird.

### 2.2 Anwendungsbereiche physikalischer Modelle

#### 2.2.1 Anwender physikalischer Modelle

Die Gründe für die Erschaffung physikalischer Modelle sind breit gefächert, denn physikalische Modelle von Musikinstrumenten können in vielen Bereichen Verwendung finden. Je nach Bereich richten sich unterschiedliche Anforderungen an das Modell. Die folgende Liste basiert größtenteils auf Spix 2000 (S. 1), der die Interessenten in Gruppen einteilt und deren Anforderungen an die Modelle analysiert:

**Akustiker** und **Physiker**, die Theorien überprüfen wollen, oder genaue Einzelheiten über die verschiedenen Vorgänge der Klangerzeugung herausfinden wollen, benötigen Modelle, die vor allem in den zu untersuchenden Bereichen höchst mögliche Genauigkeit bieten. Bei den berechneten Vorgängen kann es sich um verschiedenste Größen wie

Beschleunigungen, Kräfte oder Auslenkungen handeln, der Klang spielt nicht unbedingt die Hauptrolle. Da die Rechenzeit in der Regel eine untergeordnete Rolle spielt, steht einer genauen Implementation, die alle Einzelheiten des vorhandenen Wissens über die betrachteten Vorgänge berücksichtigt, nichts im Wege. Physiker arbeiten jedoch oft mit idealisierten Modellen, in denen Effekte der in Wirklichkeit unvermeidlichen Unregelmäßigkeit von allen Teilen des Systems ausgeblendet werden, was zwar die Realitätsnähe einschränkt, aber allgemeingültigere Ergebnisse liefert.

**Instrumentenbauer** interessieren sich in erster Linie nicht unbedingt für die physikalischen Vorgänge, sondern eher für ihre Wirkung auf den Klang. Physikalische Modelle können eine umfassende Experimentierumgebung bieten, wo der Einfluss von Veränderungen am Instrument auf den Klang berechnet werden kann. Hier ist die Berücksichtigung von Unregelmäßigkeiten im System wichtig, da der Klang von *zu* perfekten Instrumenten realitätsfremd wäre. Eine Idealisierung der Systeme würde die Umsetzung zwar vereinfachen, aber das Instrument von der Realität entfremden. Die Berechnung des Klanges ist ein wesentlicher Bestandteil eines solchen Instruments, jedoch können auch andere physikalische Größen durchaus von Interesse sein, beispielsweise die Auslenkungen der Flächen eines Resonanzkörpers der mit einer bestimmten Frequenz schwingt, um die resonierenden Bereiche ausfindig zu machen. Die Ausgabe des Klanges muss nicht unbedingt akustischer Natur sein, grafische Ausgaben wie Spektren oder Hüllkurven können wichtige Informationen oft besser zeigen und sind leichter zu dokumentieren und zu vergleichen als Klang an sich. Die Rechenzeit spielt auch hier eine untergeordnete Rolle, sollte aber nicht zu lange sein, da oft Veränderungen am Instrument unvorhersehbare Wirkungen haben und daher eine Vielzahl an Experimenten zur Optimierung des Klanges nötig sind. Vor allem **Komponisten** zeitgenössischer Musik sind an Modellen interessiert, die interessante, unkonventionelle Klänge liefern. Die physikalischen Vorgänge und die Berechnung des Modells sind hier ein Mittel zum Zweck der Tonerzeugung. Der Bezug zur Realität kann auch verworfen werden um neue Klangwelten zu erschließen, indem man beispielsweise Instrumente erschafft, die in Echt auf Grund ihrer Größe unspielbar wären, oder Blasinstrumente, die über einen Resonanzkörper verfügen. Der Experimentierfreude sind keine physikalischen Grenzen gesetzt. Da die Modelle auch nicht mehr ganz genau und naturgetreu nachgebildet werden müssen, kann der Berechnungsvorgang oft vereinfacht werden. Modelle, die Klang in Echtzeit liefern sind für Komponisten in der Regel wichtiger als für Physiker. Für besonders guten Klang würde man aber auch hier eine längere Rechenzeit akzeptieren, sofern es sich lediglich um Klänge handelt, die als Aufnahmen später wiedergegeben werden sollen.

**Musiker**, die ein physikalisches Modell wie ein Instrument spielen wollen, brauchen Modelle, die in Echtzeit auf bestimmte Eingaben mit Änderungen reagieren, beziehungsweise mit einer möglichst kurzen Verzögerungszeit (weniger als 20ms). Dazu müssen die Modelle meist vereinfacht werden, was aber durchaus möglich ist, da viele physikalische Vorgänge zusammengefasst, vereinfacht oder vernachlässigt werden können, weil sie für

den Klang unerheblich sind.

### 2.2.2 Physikalische Modelle als Klangerzeuger

Die Abgrenzung physikalischer Modelle gegenüber anderer Syntheseverfahren ist nicht immer eindeutig, da es bei physikalischen Modellen oft zu Abstraktionen kommt, bei denen der Bezug zu den zugrunde liegenden physikalischen Vorgängen nicht immer deutlich bleibt. Umgekehrt könnte man bei einigen Synthesetechniken die angewandten Verfahren auch wieder auf die physikalischen Vorgänge bei der Klangerzeugung zurückführen. Den Ausgangspunkt der Überlegungen hinter einem Mechanismus als Kriterium für die Zugehörigkeit zur Gruppe der physikalischen Modelle zu wählen ist auch heikel, da oft nicht klar ist, ob die Implementierung im Programm oder dessen physikalische Erklärung zuerst da war. Außerdem basieren die Techniken, welche beispielsweise beim Sampling angewendet werden, durchaus auf physikalischen Gesetzmäßigkeiten.

Välimäki und Takala stellen als Unterschied fest, dass physikalische Modellierung die mechanischen Vorgänge der Klangerzeugung simuliert, wohingegen andere Methoden der Klangsynthese die hörbaren akustischen Eigenschaften eines Klanges nachahmen (Välimäki und Takala, 1996). Eine andere Möglichkeit der Abgrenzung wäre die Betrachtung der Eingangsparameter. Physikalische Modelle basieren auf Berechnungen, die als Eingangswerte Größen erfordern, die mit konkreten physikalischen Werten in direktem Zusammenhang stehen und somit direkt mit der Bedienung des modellierten Instrumentes zusammenhängen, wie beispielsweise die Geschwindigkeit und den Druck des Bogens, Länge und Masse der Saite, die anfängliche Auslenkung der Saite, der Impuls auf einer Taste usw. Andere Syntheseverfahren arbeiten jedoch mit Größen, die die Effekte dieser physikalischen Werte sinngemäß umsetzen: Geschwindigkeit und Druck des Bogens wirken sich auf die Lautstärke aus, Länge, Masse und Spannung der Saite geben eine Tonhöhe vor, die anfängliche Auslenkung kann durch die Lautstärke und die Frequenzfilter repräsentiert werden, der Impuls auf einer Taste wird auch in der Größe der Lautstärke ausgedrückt, usw.

### 2.2.3 Vermarktung in Synthesizern

Anfangs wurden physikalische Modelle nur auf DSP Prozessoren realisiert. Seit einem Jahrzehnt reicht jedoch auch die Rechenleistung herkömmlicher Heimrechner für das Ausführen physikalischer Modelle in Echtzeit aus (Russ 2009, S. 30). Physikalische Modelle sind somit eine Alternative zu anderen mehr oder weniger realistisch klingenden Syntheseverfahren, wie beispielsweise der Wellentabellensynthese, geworden. Modartt, die Hersteller von Pianoteq, einem auf physikalischen Modellen beruhenden Synthesizer für Klaviere und andere Tasteninstrumente, nennen auf ihrer Internetseite mehrere Vorteile des physikalischen Modells als Synthesetechnik:

## 2 Physikalische Modellierung

„1. The sampled piano contains static recordings of each note, how it sounded during a particular moment in time. It does not take into account the influence of other strings vibrating, cabinet resonance, pedal interaction and hammer position.

2. The sampled piano can not alter the existing piano samples when it comes to parameters such as hammer hardness, unison tuning, cabinet size, overtones spectrum etc.

3. The sampled piano has several technical limitations such as audible quantization noise and uneven variation of the timbre (from ppp to fff).

Despite many recent attempts to enhance the sampled piano sound by adding convolution reverb and other post processing effects, the technology as such has too many limitations when it comes to achieving a truly vivid and convincing piano sound.“ (Modartt)

Vor allem in jüngerer Zeit entstehen immer mehr Synthesizer, die auf physikalischer Modellierung beruhen. Eine systematische und umfassende Auflistung ist nicht Zweck dieser Arbeit, zur Orientierung seien dem Leser jedoch einige Hinweise gegeben. Tabelle 2.1 am Ende des Kapitels gibt einen Überblick über einige wenige, willkürlich gewählte Programmbeispiele.

Die Qualität einiger Modelle ist verblüffend. Vor allem die Modelle gut erforschter Instrumente, wie Gitarre, Klavier oder Blechbläser, klingen in der Regel sehr realistisch. Es sind auch einige physikalische Modelle der Sitar verfügbar, von denen es Demoversionen anzuhören gibt<sup>1</sup>. Bestimmte wichtige Merkmale der Sitar, wie das reiche Obertonspektrum und die Resonanz der Bordunsaiten (*tarab*), sind in den Modellen bereits berücksichtigt worden. Dennoch sind die Klänge dieser Modelle wenig zufriedenstellend, wenn man Vergleiche mit dem Original anstellt. Die wichtigsten Gründe dafür sind wahrscheinlich

1. unzureichendes Wissen der Entwickler oder der Forschung über die akustischen Eigenschaften des Instruments,
2. Schwierigkeiten bei der Implementierung der Nichtlinearität der Saitenschwingung,
3. eingeschränkte Möglichkeiten des akustischen Vergleichs zwischen Modell und Vorlage (z.B. weil kein Instrument vorhanden ist),
4. die Unbekanntheit des Klanges des Instruments (im Vergleich zu westlichen Instrumenten), wodurch eine Beurteilung durch Dritte keine dienlichen Hinweise auf Verbesserungsmöglichkeiten bietet.

Auch einige Keyboards verwenden physikalische Modellierung zur Klangerzeugung und Nachahmung „echter“ Instrumente. Russ (2009) nennt Technics WSA1 und Yamaha VL1 als Beispiele (S. 284). Im weitesten Sinne umfasst der Begriff der physikalischen Modellierung jedoch auch die digitalen Analogsynthesizer. Die digitalen Modelle ahmen hier

---

<sup>1</sup>Nur bei SixString gab es keine Demoversion der Sitar anzuhören. Die Qualität dieses Modells konnte daher auch nicht bewertet werden.

die physikalischen Vorgänge in den Schaltkreisen nach. Zählt man diese Gattung von Modellen zu den physikalischen Modellen, sind sie unter ihnen die häufigste Art. Ein Grund dafür könnte darin liegen, dass die digitalen Ebenbilder auf gleiche Art und Weise bedient werden, wie die analogen Vorbilder (Russ 2009, S.30). Die wichtigen Bausteine von Analogsynthesizern wie Oszillatoren und Filter haben außerdem in der Signalverarbeitung allgemein bekannte digitale Entsprechungen, weshalb der Weg von analog-elektrischen Instrumenten zu digital-elektrischen Instrumenten vermutlich nicht so weit ist, wie von akustischen Instrumenten zu digitalen Instrumenten. Viele frühere Hersteller von Analogsynthesizern, produzieren heute solche „digitalen Analogsynthesizer“ (zb. Korg, Clavia, Yamaha, ...).

## 2.3 Arten physikalischer Modelle

### 2.3.1 Einteilung nach der Art der Berechnung

In Hinblick auf die Art der Berechnung der Schwingungen lassen sich physikalische Modelle in mehrere Kategorien einteilen. Die folgende Übersicht ist eine Zusammenstellung und Erweiterung der Einteilung von Spix (2000, S. 2), wo jedoch die Finite-Elemente-Methode sowie die letzten drei nicht genannt werden und Neukom (2005, Kap. 8), wo nur die ersten drei behandelt werden.

**Masse-Feder-Modelle:** Schwingende Körper werden als eine endliche Anzahl diskreter Massepunkte aufgefasst, deren dynamische Beziehungen untereinander mit den einfachen Gesetzen der Dynamik beschrieben und berechnet werden. Man kann sich die Körper als durch Federn verbundene Massen vorstellen, daher werden diese Systeme „Masse-Feder-“ oder „Feder-Masse-Modelle“ genannt (Neukom 2005, Kapitel 8; Spix 2000, S. 3ff).

**Finite-Elemente-Methode:** Schwingende Körper werden in winzige Einheiten zerlegt, deren Schwingungsverhalten durch Gleichungen beschrieben werden. Die Schwingungen des Gesamtsystems werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Diese Differentialgleichung beschreibt daher auch die Bewegungsbeziehungen der Einheiten zueinander. Durch Einsetzen der Gleichungen kleiner Einheiten kann die Differentialgleichung in späterer Folge numerisch gelöst werden (Müller; Neukom 2005, Kapitel 8).

**Wellenleiter:** Die Wanderung der Wellen in einem Medium dient als Grundlage für die Berechnung der Schwingungen der einzelnen Teilchen. Anstatt im einzelnen die wirkenden Kräfte zu berechnen, geht man davon aus, dass die Auslenkungswerte der Welle in einer bestimmten Richtung über die Teilchen wandern und die Teilchen daher nacheinander die vorgegebenen Werte der Auslenkungen annehmen.

**Modale Synthese:** Die Resonanzfrequenzen der einzelnen Teile schwingender Körper werden berechnet. Bei komplexen Körpern müssen diese experimentell ermittelt werden (gelbgrün, Spix 2000, S. 6). Nach entsprechender Anregung erklingt das Modell entsprechend der Resonanz der gekoppelten Einzelteile (Adrien 1991, S. 275)

**statistische Modelle:** Bei eher chaotischem Verhalten können statistische Verfahren zur Berechnung des Klangs verwendet werden. Diese Methode eignet sich besonders gut für perkussive Instrumente (Kojs, Serafin und Chafe 2007, S. 63f; Spix 2000, S. 12).

**Finite-Differenzen-Methode (FDM-Modelle):** Die Differenzialgleichung zur Beschreibung der Schwingungen wird mit finiten Differenzen näherungsweise gelöst (z.B. bei Karjalainen 2002; Krishnaswamy, Smith 2003).

**Funktionaltransformationmethode:** Die partielle Differentialgleichung, welche die Schwingung des zu beschreibenden Körpers beschreibt, wird mittels Laplace-Transformation in den zeitlichen und räumlichen Frequenzbereich übertragen und dort analytisch gelöst. Diese Lösung wird mittels inverser Laplace-Transformation in die ursprünglichen Bereiche zurückübertragen und dann digitalisiert, um sie auf Rechnern einsetzen zu können. (Trautmann und Rabenstein 1999, S. 83)

**Analytische Verfahren:** Die Schwingung von Körpern wird mit mehr oder weniger komplexen Funktionen analytisch erfasst und beschrieben. Eine numerische Lösung steht nicht im Vordergrund. (z.B. bei Burrige, Kappraff und Morshedi 1982 oder Krishnaswamy und Smith 2003)

Aufgrund der Vielfalt der Möglichkeiten physikalische Modelle zu erstellen, ist eine Einteilung aber nicht sehr einfach. Die meisten kompletten Modelle sind Kombinationen aus einzelnen Teilen, die oft auf unterschiedlichen Ansätzen beruhen. Spix (2000, S.2) gibt das Beispiel einer Klarinette, deren Rohrblatt als Masse-Feder-Modell und deren Röhre als Wellenleiter simuliert wird.

### 2.3.2 Andere Einteilungsmöglichkeiten

#### Quellen-Filter Modelle

Russ grenzt Quelle-Filter Modelle als Sonderfall der physikalischen Modellierung von anderen Modellen ab. Bei Quelle-Filter Modellen wird die Entstehung des Anregungssignals eines Instruments nicht physikalisch modelliert, vielmehr arbeitet das Modell mit im vorhinein erzeugten Wellen, die dem Anregungssignal nachgeahmt sind. Die Resonanz der Anregungssignale wird durch Filter verwirklicht. Der Begriff stammt aus der

künstlichen Spracherzeugung, daher wird auch als anschauliches Beispiel die Stimme gegeben: In einem Quelle-Filter Modell würden die Vibrationen der Stimmbänder bereits als Welle vorliegen, auf welche Filter angewendet werden würden, die die Resonanzen in der Mundhöhle repräsentieren, wodurch abhängig der gewählten Filter unterschiedliche Vokale erzeugt werden könnten (Russ 2009, S. 282).

Die Modellierung wird in Anregungssignal, Resonatoren und Kopplung zerlegt (Russ 2009, S. 282). Das Anregungssignal ist das Zupfen der Saite oder der Schlag auf eine Trommel. Resonatoren sind Resonanzkörper und auch Saiten bzw. eine Membran, welche als Filter moduliert werden. Die Kopplung gibt vor, welche Signale wo resonieren, bzw. ob es Rückkopplung gibt.

Välimäki, Laurson und Erkut (2003) haben ein interessantes Quellen-Filter Modell eines Clavichords erstellt, bei dem die Anregungssignale für den Wellenleiter Geräusche sind, die aus Aufnahmen des Clavichords extrahiert wurden, indem diese mit den Resonanzeigenschaften der Saite invers gefiltert wurden.

Nach dieser Einteilung gehören zu dieser Gruppe jedoch nicht nur Modelle, bei denen ein solches Geräusch oder wie für die Stimmbänder ein harmonischer Ton das Anregungssignal ist, sondern auch die meisten Wellenleiter-Modelle, wo das Anregungssignal die Verformung der Saite vor der Schwingung ist. Das ist zwar eine logische Konsequenz der Einteilung, da ein linearer Wellenleiter als Kammfilter interpretiert werden kann (siehe 9.1.9) und daher auch im oben beschriebenen Sinne ein Resonator ist, wirkt auf den ersten Blick aber vielleicht etwas irreführend.

### Kontinuierliche und impulsartige Modelle

Russ teilt physikalische Modelle auch in kontinuierliche und impulsartige Modelle ein. Impulsartige Modelle werden einmal angeregt und erzeugen daraufhin einen Ton. Als Beispiel können Modelle von gezupften Saiten oder Trommeln gelten. Bei kontinuierlichen Modellen muss dem klangerzeugenden Mechanismus ständig ein Eingangssignal zugeführt werden, da nur dann ein Ton erklingt. Beispiele für kontinuierliche Modelle sind Modelle der gestrichene Saite oder von Blasinstrumenten (2009, S. 282).

Interessante Kombinationen können sich dann ergeben, wenn das Anregungssignal eines kontinuierlichen Modelles wie beispielsweise jenes eines Holzblasinstrumentes, als Eingangssignal für eine gestrichene Saite herangezogen wird (Russ 2009, S. 282).

### Einteilung nach dem Wirklichkeitsgrad

Kojs, Serafin und Chafe (2007, S. 1) teilen physikalische Modelle in drei Kategorien ein:

1. **Erweitert** sind jene Modelle, die Simulationen existierender Modelle sind, die durch unnatürliche Parameter aber ein breiteres Spektrum haben können als ihr natürliches Ebenbild, was theoretisch bei allen physikalischen Modellen möglich ist.

## 2 Physikalische Modellierung

2. **Hybrid** sind Kombinationen von Teilen verschiedener Instrumente, z.B. als Variante des oben genannten die Anregung eines Resonanzkörpers einer Geige mit dem Klang eines Rohrblattes einer Klarinette.
3. **Abstrakt** sind jene Modelle, die zwar von physikalischen Gesetzen inspiriert sind, aber die kein physikalisches Ebenbild haben.

---

<b>Modartt: Pianoteq</b> Klaviere und andere Tasteninstrumente <a href="http://www.pianoteq.com">http://www.pianoteq.com</a>
<b>Applied Acoustics Systems: String Studio</b> Gitarren, Bässe, Harfen, Streichinstrumente, Perkussion, Sitar <a href="http://www.applied-acoustics.com/stringstudio.php">http://www.applied-acoustics.com/stringstudio.php</a>
<b>Arturia: BRASS</b> Trompete, Posaune, Saxophon <a href="http://www.arturia.com/evolution/en/products/brass/">http://www.arturia.com/evolution/en/products/brass/</a>
<b>Apple: Sculpture (Plugin für Logic Studio)</b> verschiedene Instrumente <a href="http://www.apple.com/logicstudio/plugin-ins/#instruments-sculpture">http://www.apple.com/logicstudio/plugin-ins/#instruments-sculpture</a>
<b>Sonic Core: Six-String</b> Gitarren, Bässe, Harfe, Sitar <a href="http://www.sonic-core.net/de/products/soniccore.html">http://www.sonic-core.net/de/products/soniccore.html</a>
<b>NUSofting: VST PlugIns</b> verschiedene Instrumente, die teilweise auf physikalischer Modellierung basieren <a href="http://www.nusofting.liqihsynth.com/">http://www.nusofting.liqihsynth.com/</a>
<b>Joe Orgren: FizzPluck</b> Sitar, verschiedene andere Instrumente <a href="http://www.shareit.com/product.html?productid=172363">http://www.shareit.com/product.html?productid=172363</a>
<b>James Clark: Sehktar v1.2</b> Sitar <a href="http://www.native-instruments.com/index.php?id=userlibrary&amp;type=0&amp;ulbr=1&amp;%20plview=detail&amp;patchid=3399">http://www.native-instruments.com/index.php?id=userlibrary &amp;type=0&amp;ulbr=1&amp;%20plview=detail&amp;patchid=3399</a>
<b>Harm Visser: Tassman Package</b> Sitar, verschiedene andere Instrumente <a href="http://www.hvsynthdesign.com/tassman.php">http://www.hvsynthdesign.com/tassman.php</a>

---

**Tabelle 2.1:** Einige Beispiele von physikalischen Modellen als Synthesizer

## 3 Die Sitar

### 3.1 Allgemeines

Die Sitar (*sitār*) ist ein Saiteninstrument aus Südasien. Sie wird in der klassischen Musik Südasiens, vor allem in der nördlichen Hälfte des Subkontinents, als Soloinstrument eingesetzt. Heute findet sie auch Einsatz in der Film- und Popmusik Südasiens und seit den sechziger Jahren auch oft in westlicher Popmusik. Die Sitar ist das in Europa wohl bekannteste Instrument aus Südasien, zu dieser Entwicklung hat vor allem *paṇḍit* Ravi Shankar beigetragen.

### 3.2 Aufbau

Abbildung 3.1 zeigt den Aufbau der Sitar. Die Sitar besteht größtenteils aus Holz. Der Resonanzkörper (*tumbā*) besteht jedoch aus einem getrockneten, zurechtgeschnittenen und ausgehöhlten Kürbis. Über dem Resonanzkörper liegt die Decke, die leicht nach außen gewölbt ist. Die Stege, welche sich auf die Decke stützen, bestehen aus Hirschhorn, Elfenbein oder Rosenholz (Sharma 1999, S. 69).

Auch Kopf und Hals der Sitar (*ḍaṇḍā*) sind aus Holz. Die gebogenen Bünde (*pardā*) sind aus Metall und mit Nylonfäden an dem Hals befestigt. Vor dem Spielen eines Ragas werden die Positionen der Bünde immer auf die Materialtonleiter abgestimmt. Die Saiten werden heutzutage aus verschiedenen Metallen gefertigt. Einige Sitarmodelle haben einen abnehmbaren zweiten Resonanzkörper auf der Unterseite des Halses, auf der Höhe des Sattels. Dies erinnert an andere indische Saiteninstrumente, die verschiedenen *vīṇā*-s.

### 3.3 Saiten

Die Anzahl der Saiten lässt sich nicht auf einen bestimmten Wert festlegen, da sie von Spielweise und Schule (*gharānā*) der Musiker abhängig ist, sowie von der Komplexität des Instruments. Ein Teil der Saiten verläuft über den Bündeln, der andere Teil liegt unter den Bündeln und endet auf einem zweiten, niedrigen Steg. Der schwingende Bereich der Saiten endet an den Stegen. Am *langot* auf der Unterseite des *tumbā*-s sind die Saiten befestigt. Die über den Bündeln verlaufenden Saiten werden angeschlagen, während die ungefähr elf bis zwölf unter ihnen liegenden Saiten lediglich zur Verstärkung der Resonanz dienen und nur bei besonderen Effekten angeschlagen werden. Nicht alle Instrumente haben

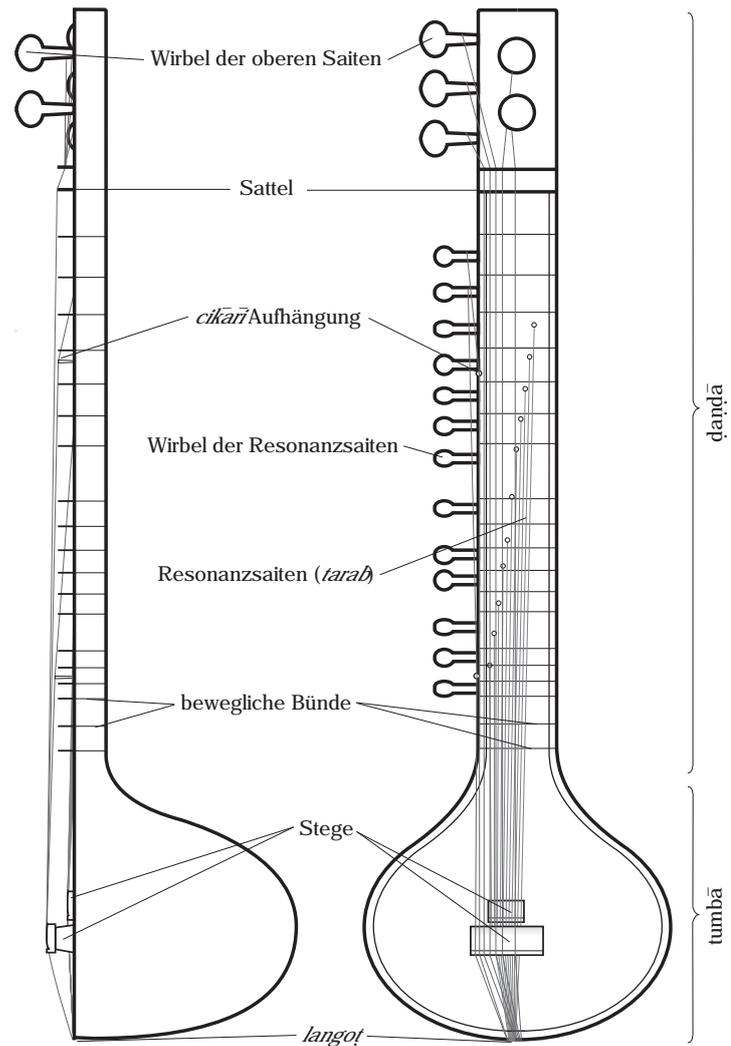


Abbildung 3.1: die Sitar

diese Resonanzsaiten, ein weiterer Grund warum sich die Anzahl der Saiten nicht auf einen Wert festlegen lässt.

Die Saiten sind an Wirbeln befestigt. Die oberen Saiten werden durch den Sattel gestützt, während die Resonanzsaiten an verschiedenen Stellen entlang des Halses durch Löcher aus dem Inneren hinaus gefädelt werden. An den Bündeln können die oberen Saiten gegriffen werden. Die besondere Gestalt der Bündel als runde Metallbögen vereinfacht das seitliche (entlang des Bundes) Ziehen der Saiten. Die Tonhöhe kann so variiert werden, indem die Saitenspannung verändert wird. Dieser Effekt (*māṇḍ*) spielt eine wesentliche Rolle bei der Interpretation klassischer Musik.

Die von den Wirbeln am entferntesten liegende obere Saite ist die Melodiesaite, welche auf *mā* (4. Stufe) gestimmt ist. Daneben liegen zwei Saiten, die auf *sā* (1. Stufe) gestimmt sind, ein oder zwei Saiten auf *pā* (5. Stufe) und ein oder zwei Saiten auf dem tieferen *ṣā*. Ganz außen auf der Saite der Wirbel befinden sich die zwei *cikārī*. Sie sind im Abstand einer Oktave untereinander auf *sā* und *ṣā* gestimmt. Die Melodiesaite, die *cikārī* und die



Abbildung 3.2: die zwei Stege der Sitar (aus: Junius 1974, Tafel 7)

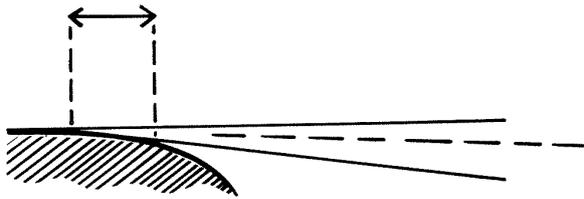


Abbildung 3.3: der Steg der Sitar (aus: Junius 1974, S. 84)

*pa*-Saite sind, wie auch die Resonanzsaiten, aus Stahl, während die tieferen Saiten aus Bronze, Messing (Sharma 1999, S. 67) oder Kupfer (Junius 1974, S. 16) sind.

### 3.4 Spieltechnik

Nur die Melodiesaite (und bei tiefen Abschnitten im *ālāp*<sup>1</sup> die erste *ṣā*-Saite) werden mittels der Bündel verkürzt. Die Harmoniesaiten werden je nach Stärke und Betonung des gespielten Tones beim Spielen mehr oder weniger stark mit angeschlagen. Dadurch klingen der Grundton und seine Quinte immer mit. Die *cikārī* dienen der rhythmischen Ausschmückung. Die Saiten der Sitar werden mit einem aus Draht gebogenem Fingeraufsatz, dem *mizrāb* angeschlagen.

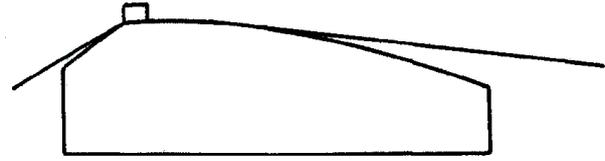
### 3.5 Stege

Für die besonderen Klangfarben der Sitar, *vīṇā* und *tampūrā* sind hauptsächlich die Stege verantwortlich, wie Raman für die letzteren beiden in seinem Artikel (1921) darlegt. Die gleichen Darlegungen lassen sich auch auf die Sitar anwenden, deren Stege ähnlich wie der Steg einer *vīṇā* geformt ist.

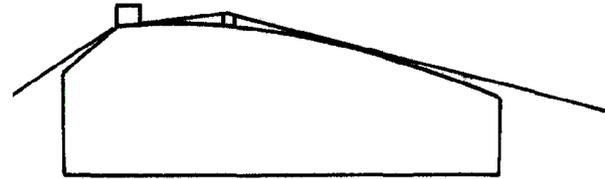
Der Steg der Sitar ist keine punktuelle Begrenzung des schwingenden Bereichs der Saite, sondern eine gebogene Fläche, die eine kurze Strecke entlang der Saite verläuft. Die ruhende Saite liegt zum Teil auf dieser Fläche auf, während die schwingende Saite periodisch gegen diese Fläche schlägt (siehe Abbildungen 3.2 und 3.3). Der Steg ist so gebogen, dass

<sup>1</sup>*ālāp* ist der freirhythmische Teil einer Raga-Aufführung, der zur Einstimmung auf den Raga dienen soll.

**Abbildung 3.4:** Steg der *vīṇā* (aus: Raman 1921, S. 470)



**Abbildung 3.5:** Steg der *tampūrā* (aus: Raman 1921, S. 470)



die Saite immer mit dem kleinstmöglichen Winkel auftrifft (Junius 1974, S. 92) Bei der Melodiesaite, deren Winkel zum Steg sich ändert, wenn sie an den Bünden verkürzt wird, ist die Gestaltung des Steges besonders schwierig, da immer eine optimale parabolische Kurve gewährleistet sein muss (Junius 1974, S. 91). In dieser Arbeit werden Stege dieser Form als „flache Stege“ bezeichnet, um auf die gekrümmte Kontaktfläche zwischen Saite und Steg hinzuweisen.

Ähnliche Stege findet man auch bei anderen südasiatischen Saiteninstrumenten, wie der naheverwandten *surbāhār*, der *vīṇā* oder *tampūrā* (siehe Abbildungen 3.4 und 3.5). Auch außerhalb Südasiens finden sich Instrumente mit ähnlichen Eigenschaften, beispielsweise bei der *Chikuzen-Biwa* (vgl. Andō 1981) und sogar westlichen Instrumenten (siehe Vyasarayani, Birkett und McPhee 2009, S. 3673).

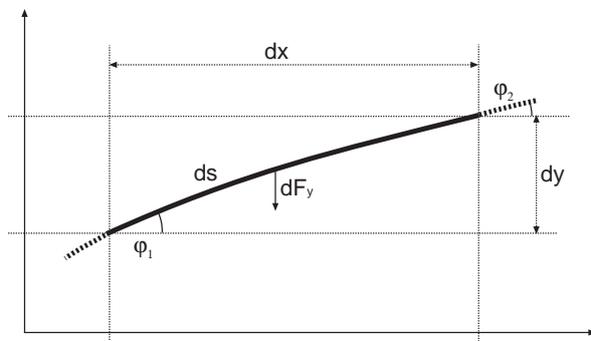
Bei der *tampūrā* ist zwischen dem Steg und den Saiten ein beweglicher Faden (genannt *javārī*) eingeklemmt, mit dem die Klangfarbe des Instruments abgestimmt werden kann. Die Saiten werden durch den Faden von dem darunter liegenden Steg leicht abgehoben, womit die Art der Wechselwirkung zwischen Saite und Steg reguliert werden kann.

# 4 Die Saitenschwingung

## 4.1 Die ideale Saite

### 4.1.1 Die Wellengleichung

Die Schwingungsbewegungen der idealen Saite sind sehr gut dokumentiert und erforscht. Die Wellengleichung beschreibt Scherwellen auf der idealen Saite.



**Abbildung 4.1:** Die Grundlagen der Wellengleichung (nach Fletcher und Rossing 1991, S. 36)

Um die Bewegung einer Saite zu beschreiben, wird sie in möglichst kleine Segmente  $ds$  geteilt (siehe Abbildung 4.1). Auf jedes Segment wirkt eine Kraft, die es in Ruhelage bewegt. Die Gesamtheit dieser Kräfte aller Segmente bewirkt die Saitenschwingung. Die Kraft, die auf ein Segment wirkt, zieht es auf eine Linie mit den benachbarten Segmenten. Ist diese Lage erreicht, ist die auf das Segment senkrecht wirkende Kraft gleich 0. Die wirkende Kraft hängt von der Biegung des Segments ab und ist direkt proportional zur Spannkraft der Saite. Die Biegung wird durch die beiden Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , die zwischen der waagrechten Achse und den in den Enden des Segments angelegten Tangenten liegen, beschrieben (Fletcher und Rossing 1991, S. 36).

Da die Spannkraft als Zug entlang der Saite wirkt, kann man sie sich als Vektoren, die parallel zu Tangenten in den Endpunkten des Segmentes liegen, vorstellen. Die Richtung der Vektoren wird also durch die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  beschrieben, während ihr Betrag der Größe der Spannkraft entspricht. Da das Segment in beide Richtungen gezogen wird, muss man sich die Vektoren als entgegengesetzte Größen vorstellen, die sich gegenseitig aufheben, wenn sich das Segment in Ruhelage befindet, also keine Biegung aufweist und daher gilt  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Die senkrechte Komponente der auf das Segment wirkenden Kraft entspricht also der Summe der senkrechten Anteile der beiden entgegengesetzten Kraftvektoren, beziehungs-

#### 4 Die Saitenschwingung

weise der Differenz, falls man sich die Vektoren immer auf das rechte Ende der Saite gerichtet vorstellt, was die folgenden Berechnungen vereinfacht. Waagrechte Bewegungen lassen sich auf gleiche Weise berechnen, werden aber in der Folge vernachlässigt, da sie im Vergleich zu den senkrechten Bewegungen der Segmente vernachlässigbar sind. Außerdem wird die Bewegung der Saite nur in einer Ebene betrachtet.

Sei  $T$  die Spannkraft der Saite in Newton, dann gilt für die senkrecht auf das Segment wirkende Kraft (nach Ebd.)

$$dF_y = T \sin(\varphi_2) - T \sin(\varphi_1).$$

Der Winkel  $\varphi_1$  lässt sich näherungsweise aus  $dx$  und  $dy$  berechnen,  $\varphi_2$  wird mit den entsprechenden Werten des nächsten Segments berechnet. Wenn die Funktion

$$F(x) = T \sin(\varphi_x)$$

die senkrechte Kraft am Anfang des Segments an der Stelle  $x$  darstellt, so lässt sich die obenstehende Formel umformulieren:

$$dF_y = F(x + dx) - F(x)$$

Die Anwendung der Taylorreihen-Entwicklung (ebd.)

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx + \dots$$

auf  $F$  ergibt (Ebd., S. 37)

$$dF_y = F(x) + \frac{\partial F(x)}{\partial x} dx - F(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} dx.$$

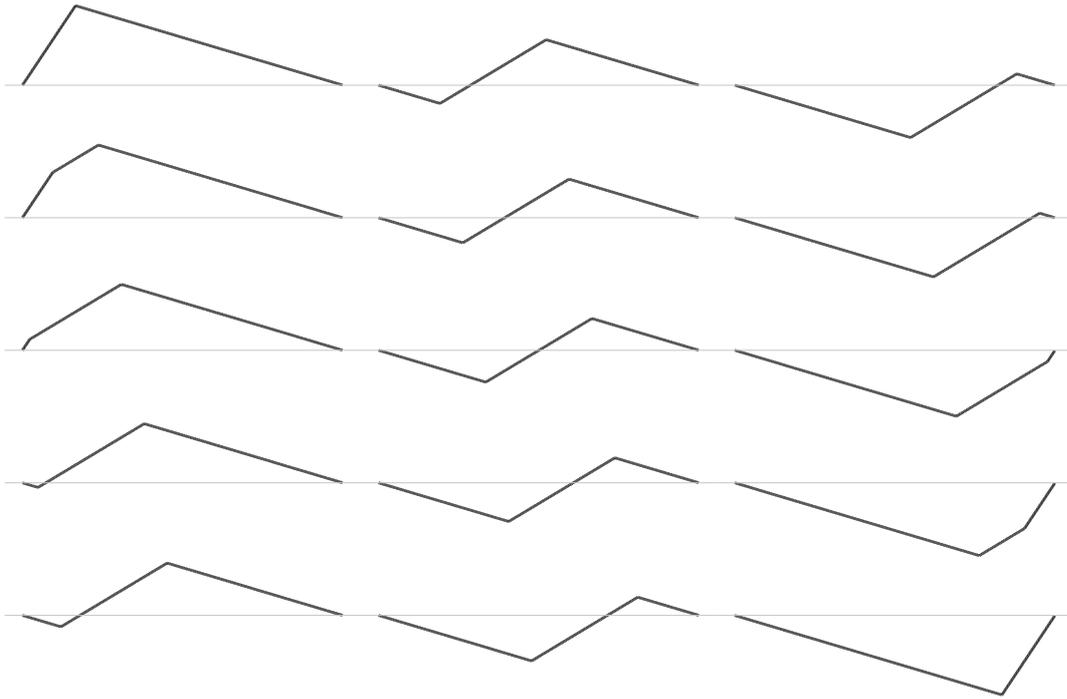
Bei kleinem  $dy$  kann  $\sin(\varphi_x)$  in der Formel  $F(x)$  durch die Tangensfunktion ausreichend genau angenähert werden und daher durch  $dy/dx$  bzw.  $\partial y/\partial x$  ersetzt werden (Ebd.). Es ergibt sich also für die Kraft

$$dF_y = \frac{\partial F(x)}{\partial x} dx = \frac{\partial(T \partial y/\partial x)}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Unter Einbeziehung des zweiten Newtonschen Gesetzes Kraft = Masse · Beschleunigung erhält man die Gleichung (Ebd.)

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = m \cdot a = \mu ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

wobei  $\mu$  die lineare Dichte der Saite (in kg/m) ist, so dass gilt  $m = \mu \cdot ds$  und die 2. Ableitung der Auslenkung  $y$  nach der Zeit  $t$  der Beschleunigung entspricht. Da  $dy$



**Abbildung 4.2:** Augenblicksaufnahmen der Schwingung der idealen Saite. Die erste Aufnahme ist oben links, die folgende darunter usw.

als klein angenommen wird gilt  $ds \approx dx$ ,  $ds$  wird also durch  $dx$  ersetzt. Außerdem sei  $c^2 = T/\mu$ . Es folgt (nach Ebd.)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

die Wellengleichung für Scherwellen der idealen Saite (vgl. auch Smith 1993, S. 3).

#### 4.1.2 Die Schwingung der idealen Saite

Abbildung 4.2 zeigt mehrere Augenblicksaufnahmen der Schwingung einer gezupften Saite. An der Stelle des Knicks beginnt die Bewegung, die die Saite in Richtung Ruhelage ziehen will. Der Knick verbreitet sich und nun scheint es, als wäre die Saite in drei Teile geteilt. Das mittlere Teilstück wird größer, bis ein Knick ein fest eingespanntes Ende erreicht und es bewegt sich senkrecht zu seiner eigenen Orientierung in Richtung Ruhelage und weiter, wobei es irgendwann wieder kleiner wird und ganz verschwindet. Die Saite hat nun eine im Vergleich zur Ausgangslage punktsymmetrische Form. Der gleiche Vorgang wiederholt sich umgekehrt, bis die Saite wieder die gleiche Form wie am Anfang hat. Nun ist ein Durchlauf vollständig. Die Saite bewegt sich in gleicher Art weiter.

Die Bewegung lässt sich auch als zwei entgegengesetzt wandernde Wellen betrachten. Von der Stelle des Zupfens ausgehend bewegen sich zwei Knicke in entgegengesetzter Richtung, die an den fest eingespannten Enden der Saite negativ reflektiert werden. Sie

## 4 Die Saitenschwingung

treffen auf der anderen Seite wieder aufeinander und geben der Saite die, im Vergleich zur Ausgangslage, punktsymmetrische Form, laufen weiter bis sie wiederum reflektiert werden und der Saite am Ende eines Durchlaufs exakt die gleiche Form geben wie am Anfang.

In der Tat ist die Lösung der Wellengleichung der idealen Saite

$$y(x, t) = y_r(x - ct) + y_l(x + ct), \quad (4.2)$$

wobei  $y_l$  und  $y_r$  zwei beliebige zweimal ableitbare Funktionen sind, die mit der Geschwindigkeit  $c$  in entgegengesetzter Richtung wandern und deren Überlagerung die Auslenkung der Saite wiedergibt.

## 4.2 Die realistische Saite

### 4.2.1 Die Schwingung der realistischen Saite

Die Bewegung der idealen Saite ist im Vergleich zur Bewegung echter Saiten eine Abstraktion, die höchstens eine grundlegende Beschreibung der Saitenbewegung sein kann. Die Dicke der Saite, Eigenschaften des Materials und Wechselwirkungen mit der Luft oder dem Resonanzkörper finden bei der Beschreibung der idealen Saite keinen Platz, spielen aber eine wichtige Rolle bei der Schwingung echter Saiten, wo sie beispielsweise Dämpfung und Dispersion, aber auch Längswellen, Torsionsschwingungen oder Nichtlinearitäten verschiedener Art verursachen. Lieber (1992) kritisiert die „*begangene[n] Vernachlässigungen in der klassischen Theorie*“ (S. 253). Je nach Instrument können gerade die Vorgänge, die nicht durch die ideale Saite beschrieben werden, den unverwechselbaren Klang des Instruments ausmachen.

Moderne Technologien ermöglichen genauere Untersuchungen der Saitenschwingung. Aufnahmen mit Hochgeschwindigkeitskameras zeigen, dass die Saitenschwingung echter Saiten zwar durchaus der Schwingung der idealen Saite ähnlich ist, sich aber vor allem mit fortschreitender Zeit immer mehr von ihr unterscheidet.<sup>1</sup> Die Saite schaut nach einiger Zeit aus wie ein „*schlappes Seil*“ und das Maximum der Auslenkung wandert in die Mitte (Lieber 1992, S. 254; siehe auch Abbildung 4.5).

### 4.2.2 Dämpfung

Echte Saiten schwingen nicht ewig wie die ideale Saite, sondern werden aus verschiedenen Gründen leiser, beispielsweise da Energie als Schall abgestrahlt wird. Nicht alle Teiltöne klingen gleich schnell ab. Hohe Teiltöne klingen in der Regel schneller ab als tiefe. Die Art und Weise wie der Ton eines Instruments abklingt gehört zu den Eigenschaften,

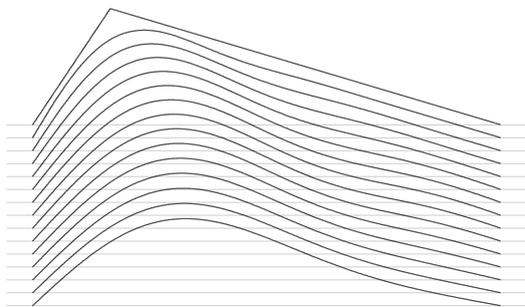
---

<sup>1</sup>Hochgeschwindigkeitsaufnahmen im Internet: <http://physics.doane.edu/physicsvideolibrary/string/StringDirectory.html> [15.2.2010]

die seinen einzigartigen Charakter ausmachen. Schon die Wahl des Saitenmaterials hat einen großen Einfluss auf das Abklingen der Töne: Nylonsaiten klingen viel dumpfer als Metallsaiten, weil die höheren Teiltöne vergleichsweise schneller verklingen (Fletcher und Rossing 1991, S. 53). Es gibt jedoch noch andere Vorgänge, die einen Einfluss auf die Art des Abklingens haben. Die Gesamtheit der Vorgänge, die das Abklingen des Tones bewirken, wird unter dem Begriff der Dämpfung zusammengefasst.

Die wichtigsten Faktoren, die Dämpfung bewirken sind Luftkontakt, interne Dämpfung und Energieübertragung (Fletcher und Rossing 1991, S. 50; Hirschberg, Kergomard und Weinreich 1995, S. 141). Auch wenn die Saite kaum Schall an die Luft abstrahlt, ist die Wechselwirkung mit ihr dennoch ein wichtiger Faktor, der zur Dämpfung beiträgt. Tatsächlich bewirkt die Saite Verdichtungen und Verdünnungen in der Luft, die sich aber gegenseitig auslöschen, ohne nennenswerte Entfernungen zurückgelegt zu haben, da der Durchmesser der Saite so klein ist (Fletcher und Rossing 1991, S. 50).

Die Effekte, welche unter „interne Dämpfung“ zusammengefasst sind, spielen sich innerhalb der Saite selber ab und sind vom Saitenmaterial abhängig. Hierzu gehören Reibung, Steifheit oder Viskosität der Saite (Hirschberg, Kergomard und Weinreich 1995, S. 141). Die Energie, die als Schall an die Luft abgegeben wird, stammt (in akustischen Instrumenten) von der vibrierenden Saite. Das Ausmaß, in dem Energie von der Saite vor allem über den Steg (aber auch über den Sattel oder die Bünde) auf den Resonanzkörper übertragen wird, wird von der Admittanz (s. 5.2.1) beschrieben (Fletcher und Rossing 1991, S. 51). Von dieser Größe ist abhängig, wie schnell die Energieübertragung sich vollzieht und wie schnell die Saite auf Grund dieses Energieabzugs abklingt.



**Abbildung 4.3:** Die Schwingung der gedämpften Saite. In regelmäßigen Abständen aufgezeichnete Augenblicksaufnahmen der weitesten Auslenkung. Ganz oben ist die ungedämpfte Anregung.

Beobachtet man die Schwingungsform der Saite, macht sich die Dämpfung als Verringerung der Amplitude bemerkbar. Handelt es sich um frequenzabhängige Dämpfung mit Tiefpasscharakter, nähert sich die Form immer mehr einer Sinuskurve an, was der grundtönigen Schwingung entspricht. Abbildung 4.3 zeigt Augenblicksaufnahmen einer so gedämpften schwingenden Saite.

### 4.2.3 Dispersion

Vor allem durch Biegesteifigkeit, aber auch durch amplitudenabhängige Nichtlinearität und Rotationsträgheit kommt es in Saiten zu Dispersion. „Durch die Biegesteifigkeit stei-

#### 4 Die Saitenschwingung

gen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit mit steigender Frequenz an“ (Lieber 1992, S. 253). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen auf der Saite ist also nicht konstant, sondern von der Frequenz abhängig. Die schnellere Ausbreitung höherer Teiltöne bewirkt eine Verschiebung der Frequenzen. Mit zunehmender Höhe der Teiltöne streckt sich das Frequenzspektrum. Im Vergleich zu einem exakt harmonischen Spektrum, befinden sich die oberen Teiltöne in einem Spektrum einer dispersiven Saite ein wenig höher als erwartet (Lieber 1992; Järveläinen, Välimäki und Karjalainen 1999, S. 82; Fletcher, Blackham und Stratton 1962, S. 757).

Als Formel für die Frequenz der Teiltöne dispersiver Saiten geben Fletcher, Blackham und Stratton (1962, S. 757)

$$f_n = n \cdot f_0 \cdot \sqrt{1 + B \cdot n^2} \quad (4.3)$$

an, wobei  $n$  die Teiltonnummer,  $f_0$  die Grundfrequenz der Saite und  $B$  der von der Saite abhängige Inharmonizitätskoeffizient ist. Laut denselben lässt sich  $B$  mit der Formel

$$B = \frac{\pi^3 \cdot Q \cdot d^4}{64 \cdot l^2 \cdot T} \quad (4.4)$$

aus den Eckdaten der Saite berechnen.  $Q$  ist dabei das Elastizitätsmodul,  $d$  der Durchmesser,  $l$  die Länge und  $T$  die Spannkraft (ebd., S. 757).

Typische Werte für  $B$  bei Klaviersaiten liegen je nach Tonhöhe etwa zwischen 0,00005 und 0,017 (Conklin 1999, S. 543).

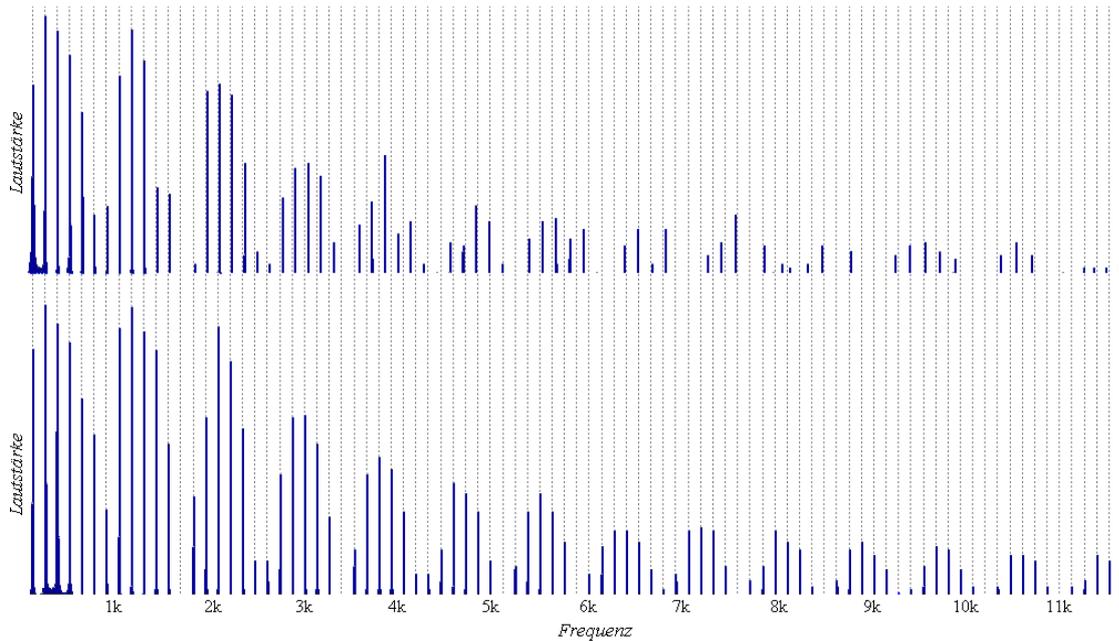
Abbildung 4.4 zeigt die Frequenzspektren zweier simulierter Saiten. Das untere Spektrum stammt von einer Saite ohne Dispersion, das obere von einer dispersiven Saite, die auf den gleichen Grundton gestimmt ist. Die hellgrauen Linien markieren Vielfache des Grundtones, auf denen sich bei einer idealen Saite die Teiltöne befinden, während die Teiltöne dispersiver Saiten in der beschriebenen Weise von den markierten Frequenzen abweichen.

Fletcher, Blackham und Stratton (1962) zeigten mit Experimenten, dass die auftretende Inharmonizität zwischen den Obertönen dispersiver Saiten dem Klang „Wärme“ („warmth“) verleiht, wobei mit „Wärme“ die schnelle Änderung der Teiltonstruktur gemeint ist (S. 758).<sup>2</sup>

Die Form der schwingenden Saite verändert sich beträchtlich, und bleibt nicht gleich wie bei der idealen Saite (vgl. Abbildung 4.5). Wie unter 4.2 bereits bemerkt schaut die Saite nach einiger Zeit aus wie ein „schlappes Seil“, wenn man sie in Zeitlupe betrachtet. Das Maximum der Auslenkung wandert zur Mitte der schwingenden Saite und bleibt nicht an der Stelle, wo gezupft wurde. Bei einer dispersiven Saite ohne Dämpfung bleibt der Teiltongehalt jedoch trotz der sichtlichen Veränderung der Schwingungsform gleich (Lieber 1992, S. 253).

---

<sup>2</sup>Die Verfasser schreiben: „The warmth is probably due to rapid variation of the partial structure. We will use this term „warmth“ for indicating this factor of the quality of a musical tone.“ (Fletcher, Blackham und Stratton 1962, S. 756)



**Abbildung 4.4:** Die Frequenzspektren zweier simulierter Saiten. Im ersten Spektrum sind die oberen Teiltöne keine Vielfachen des Grundtones, sondern zunehmend höher als im unteren, harmonischen Spektrum.

ber 1992, S. 254). Die Änderung der Schwingungsform beruht auf der unterschiedlichen Geschwindigkeit, mit der die Wellen der einzelnen Teiltöne die Saite entlang wandern. Die Wellengleichung (4.1) kann laut Fletcher und Rossing (1991, S. 61), Lieber(1992) und Smith (1993, S. 12f.) durch einen Ausdruck, der proportional zur vierten räumlichen Ableitung  $y_{xxxx}$  der Auslenkung ist, erweitert werden, um die Dispersion auszudrücken:

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} - q \cdot y_{xxxx} \quad (4.5)$$

Dabei ist  $y_{tt}$  die zweite Ableitung der Zeit und  $y_{xx}$  die zweite Ableitung des Raumes. Die Konstante  $q$  drückt den Grad der Dispersion aus und lässt sich auf verschiedenen Wegen berechnen.

Smith (1993, S. 12-13) berechnet  $q$  mit der Formel

$$q = \frac{E\pi a^4}{4} \quad (4.6)$$

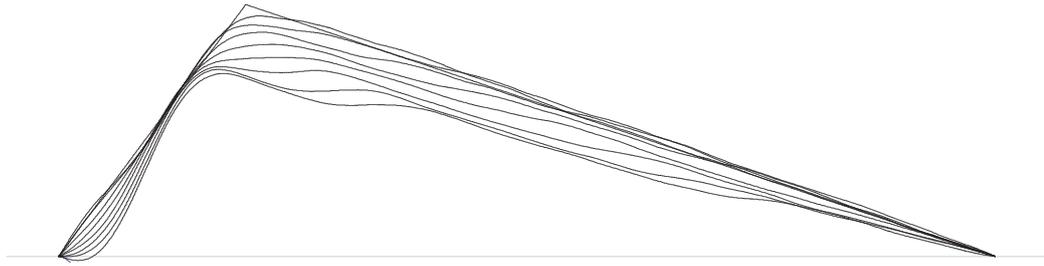
wobei  $a$  der Radius der Saite ist und  $E$  das Elastizitätsmodul des Materials.

Laut Fletcher und Rossing (1991, S. 61) berechnet sich  $q$  als

$$q = E \cdot S \cdot K^2 \quad (4.7)$$

wo  $K$  der Trägheitsradius ist und  $S$  der Saitenquerschnitt  $a^2\pi$ .

Da  $K^2 = J/S$  (Hagedorn 1990, S. 95), wobei  $J$  das Flächenträgheitsmoment ist für das gilt  $J = a^4\pi/4$  (ebd.), sind die beiden Formeln gleich und lassen sich zu



**Abbildung 4.5:** Stroboskopische Aufnahmen einer schwingenden, dispersiven (simulierten) Saite mit geringer Dämpfung. Die Form mit dem Knick ist die Form der Saite bei ihrer Anregung. Je tiefer die Form ist, desto später wurde die Aufnahme gemacht. Die Abrundung des Knicks liegt in erster Linie am „Außenanderlaufen“ der Wellen.

$$q = E \cdot J \quad (4.8)$$

reduzieren.

Lieber (1992, S. 255) errechnet  $q$  hingegen mit der abweichenden Formel

$$q = \frac{E \cdot J}{S}. \quad (4.9)$$

Lieber bestätigt seine Berechnungen der dispersiven Saite mit Beobachtungen unter dem Stroboskop, auch Hochgeschwindigkeitsaufnahmen der schwingenden Saite bestätigen die Wirkung der Dispersion.<sup>3</sup> Um die Dispersion einer Saite zu messen, betrachtet man die auftretende Abweichung ihres Frequenzspektrums von einem theoretischen, harmonischen Spektrum (so beispielsweise bei Fletcher, Blackham und Stratton (1962), Järveläinen, Välimäki und Karjalainen (1999) oder in anderen Arbeiten von Välimäki), dazu sind hochauflösende und genaue Analysen notwendig, da die Abweichungen von einem harmonischen Spektrum in der Regel sehr klein sind.

### 4.3 Die Saite der Sitar

#### 4.3.1 Die Stegform als Klangfärber

Die offensichtlichste Abweichung der Schwingung idealer Saiten und der Sitar saite ist die Störung der Schwingung der letzteren durch ein Hindernis, gegen das die Saite periodisch schlägt. Bereits Raman (1921) beschrieb die Wechselwirkung zwischen Steg und Saite und untermauerte mit wissenschaftlichen Aussagen die Annahme, dass vor allem die Stegform den Klang einiger Instrumente, wie der *vīṇā* oder *tampūrā* prägt.

<sup>3</sup>Hochgeschwindigkeitsaufnahmen im Internet:<http://physics.doane.edu/physicsvideolibrary/string/StringDirectory.html> [15.2.2010]

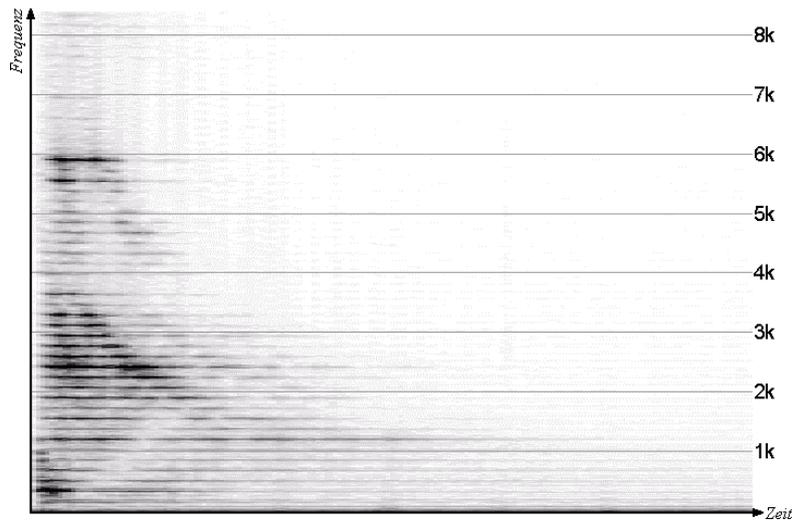


Abbildung 4.6: Spektrogramm eines Sitartones

### 4.3.2 Messaufnahmen der Saite

Um die Wirkung des flachen Steges auf die Saite zu untersuchen, wurden Töne der Sitar im schalltoten Raum des Instituts für Wiener Klangstil<sup>4</sup> aufgenommen. Die aufgenommenen Töne waren die leere *ṃa* und *ṣā* Saite. Alle Saite bis auf die aufgezeichnete wurden gedämpft. Das Instrument war auf den Grundton *c* in *bilāval thāt* gestimmt, die aufgezeichneten Töne waren also *f* und *c*. Die Saiten wurden mit dem *mizrāb* gezupft. Das resultierende Luftschallfeld wurde mit 1/4" Messmikrofonen von Roga Instruments (Typ: RG-50) in 15cm Entfernung über der Mitte des Griffbretts gemessen. Das aufgezeichnete Saitensignal ist also durch den Resonanzkörper gefärbt. Zur Analyse wurden die Aufnahmen der *ṣā*-Saite (*c*) herangezogen.

### 4.3.3 Beobachtungen und Analyse der Saite mit flachem Steg

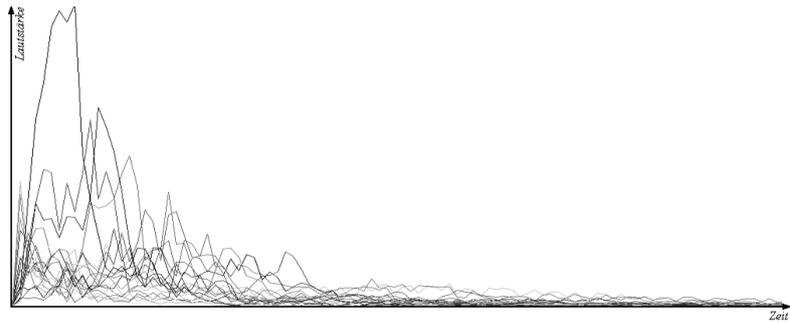
Die Saitenschwingung der Instrumente mit den unter Punkt 3.5 beschriebenen flachen Stegen unterscheiden sich grundlegend von den Saitenschwingungen, welche bei Zupfinstrumenten zu beobachten sind, deren Saiten frei schwingen können.

1. Bei gezupften Saiten ist das Teiltonspektrum laut dem Young-Helmholtz-Gesetz von der Stelle des Zupfens abhängig. Jene Moden, die an der Zupfstelle Schwingungsknoten hätten, werden nicht angeregt und fehlen im Spektrum (Fletcher und Rossing, S. 243). Diese Einschränkung gilt nicht für Saiteninstrumente mit flachem Steg, wie Raman festgestellt hat. Nach einer Einschwingphase findet man alle Obertöne im Klangspektrum (Raman, 1921).
2. Auffallend sind die im Frequenzspektrum abwärts gleitenden Formanten, eine Erscheinung, die für den Ton einer Sitar oder *tampūrā* kennzeichnend ist (Valette und Cuesta 1993, S. 207; Bertrand 1992, S. 47), siehe Abbildung 4.6.

<sup>4</sup><http://iwk.mdw.ac.at/>

#### 4 Die Saitenschwingung

**Abbildung 4.7:** Die Hüllkurven der 20 ersten Teiltöne eines Sitartones.



**Abbildung 4.8:** Augenblicksaufnahmen der schwingenden Saite kurz nach ihrer Anregung. Bei einem runden Steg ist ein Segment der schwingenden Saite eine Kurve.

**Abbildung 4.9:** Helmholtz-Bewegung auf einer Saite. Der Knick bewegt sich nach rechts, wo er negativ reflektiert wird.

3. Bei der *tampūrā* und auch bei bestimmten Spieltechniken und Tönen der Sitar hat man den Eindruck, dass der Ton anfangs einige Zeit lang lauter wird. Bei gezupften Saiteninstrumenten ohne flachen Steg tritt dieser Effekt nicht auf, der Ton beginnt mit der maximalen Lautstärke und wird stetig leiser.
4. Abbildung 4.7 zeigt die Hüllkurven der ersten 20 Teiltöne eines Sitartones. Die sich ständig kreuzenden Linien bieten selbst dem aufmerksamen Betrachter zwar keinen befriedigenden Überblick über den Verlauf einzelner Teiltöne, aber machen deutlich, dass die Moden zu unterschiedlichen Zeiten Maxima haben. Ein Teilton, der am Anfang relativ leise ist, kann später der lauteste werden.

Da dem System nur ganz am Anfang Energie zugeführt wird, ist die einzige Erklärung, dass es zum Energiefluss zwischen den Moden kommt. Die einzelnen Teiltöne interagieren also miteinander. Dies führt zu der folgeschweren Erkenntnis, dass es sich um ein nichtlineares System handelt, denn „[b]ei linearen Systemen durchlaufen Signale das System ohne zu interagieren!“ (Grünbacher 2005, Kap. 3, S. 3)

5. Laut Burridge, Kappraff und Morshedi (1982) etabliert sich auf einer mit flachem Steg versehenen Saite nach einiger Zeit eine Helmholtz-Bewegung. Das Entstehen der Bewegung hängt von der Form des Steges ab. Bei dem in dem Aufsatz beschriebenen, nach oben gewölbten Steg parabolischer Form kommt nach einiger Zeit diese Bewegung zustande, die der Bewegung gestrichener Saiten gleicht. Abbildung 4.9 zeigt Augenblicksaufnahmen der Simulation einer (ungedämpften, nicht dispersiven) Saite mit einem Steg dieser Form. Die Aufnahmen wurden genommen, als sich die Helmholtz-Bewegung bereits etabliert hatte.

Bei einem gebogenen Steg, wie er von Vyasarayani, Birkett und McPhee (2009) beschrieben wird, oder bei einem flachen Steg wie bei Valette und Cuesta (1993) kommt es nicht zu einer Helmholtz-Bewegung, sondern höchstens zu einer Annäherung an diese.

6. In Abbildung 4.9 ist zu sehen, dass der rechte Teil der Saite eine Kurve ist, während der linke Teil der Saite gerade ist. Dies wird laut Burr ridge, Kappraff und Morshedi (1982) durch den gebogenen Steg bewirkt und ist auch in den ersten Zyklen der Saitenschwingung zu beobachten, wie Abbildung 4.8 zeigt.

Die letzten beiden Beobachtung gelten in erster Linie für die ideale Saite und sind schlecht auf dispersive Saiten anzuwenden. Da sich der Knick über die Saite verteilt und sich daher die Form der Saitenschwingung sehr stark verändert 4.5, können die geschilderten Vorgänge bei dispersiven Saiten nicht beobachtet werden.

#### 4.3.4 Die Wechselwirkung zwischen Saite und Steg

Die beobachteten Besonderheiten lassen sich alle samt auf die besondere Art des Steges zurückführen. Die Art der Wechselwirkung ist aber nicht für alle Instrumente gleich. Bei der *tampūrā* schlägt die schwingende Saite, wegen des eingeklemmten Fadens, immer wieder gegen den Steg, während die Saite der Sitar sich eher immer wieder an den Steg schmiegt um sich dann von ihm abzuwickeln (Burr ridge, Kappraff und Morshedi 1982). Es kommt zu einer periodischen Verkürzung und Verlängerung des schwingenden Bereichs der Saite (Bertrand 1992, S. 52; Raman 1922).

Diese periodische Verkürzung und Verlängerung des schwingenden Bereichs der Saite setzt das Young-Helmholtz-Gesetz außer Kraft, da bei einer veränderlichen Länge der schwingenden Saite von einem Zupfen bei beispielsweise einem Fünftel dieser Länge nicht mehr die Rede sein kann. Je breiter der Steg ist, desto stärker ist dieses Phänomen (Bertrand 1992, S. 52). Außerdem werden durch das Anschmiegen oder die Zusammenstöße am Steg eine vergleichsweise hohe Anzahl an Obertönen angeregt, auch Obertöne die laut dem Young-Helmholtz-Gesetz stumm bleiben müssten (Raman 1922).

Die Beobachtung, dass einige Töne erst nach einer kurzen Zeit ihre höchste Lautheit erreichen, ist noch widerspruchsvoller, wenn man bedenkt, dass dem System durch die ständigen Zusammenstöße von Saite und Steg stetig Energie entzogen wird. Sowohl Bertrand als auch Valette und Cuesta begründen dies mit den Resonanzeigenschaften der Instrumente und der Nichtlinearität des menschlichen Ohres. Da wie unter 4.3.3 bemerkt abwechselnd verschiedene Teiltöne die lautesten sind, wird der Abschnitt am lautesten empfunden, wo die Teiltöne am stärksten sind, deren Frequenzen vom Resonanzkörper am meisten verstärkt werden und in deren Frequenzbereich das Ohr am empfindlichsten ist (Bertrand 1992, S. 48; Valette und Cuesta 1993, S. 216).

### 4.3.5 Der Beitrag der Dispersion zur Wechselwirkung

Die Dispersion ist bei der Untersuchung der Schwingung von Saiten mit flachem Steg alleine deshalb nicht zu vernachlässigen, weil die Form der schwingenden Saite sehr stark von ihr abhängig ist, wie unter 4.2.3 dargelegt wurde, und die den Klang kennzeichnende Wechselwirkung zwischen Steg und Saite natürlich von ihrer Form abhängig ist.

Bertrand (1992) sowie Valette und Cuesta (1993) betonen die Wichtigkeit der Dispersion für den typischen Klang der Instrumente mit flachem Steg. Die Grundlage der Wichtigkeit wird von Valette und Cuesta in einem Satz zusammengefasst: „*La dispersion a pour effet principal de faire apparaître un précurseur en avant de chaque point anguleux.*“<sup>5</sup> (S. 197) An den Knicken in der Saite ist die Dispersion am besten zu beobachten. Die Knicke kommen nur zustande, wenn sich die Wellen in bestimmter Weise genau überlagern. Durch das Zupfen der Saite wird diese Überlagerung als Ausgangsposition erzwungen. Da die Wellen hoher Frequenzen aber eine höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit haben als die Wellen tiefer Frequenzen, überlagern sie sich nach dem Loslassen der Saite bald nicht mehr in der ursprünglichen Weise. Der Knick läuft auseinander, seine hohen Frequenzanteile laufen ihm als Vorhut (bei Valette und Cuesta sowie Bertrand: „*précurseur*“) voraus, die tiefen nach.

Wenn die Saite nun auf den Steg aufschlägt oder sich an ihn schmiegt, kann die ganze Vorhut oder ein gewisser Teil dem Kontakt entfliehen und wird nicht ausgelöscht. In der nächsten Runde der Schwingung bildet sich wiederum eine Vorhut vor dem Knick und reiht sich an die vorige Vorhut an (Valette und Cuesta 1993, S. 216). Diese Vorhut, die über mehrere Schwingungszyklen wächst, erklingt laut Bertrand (1992) und Valette und Cuesta (1993) als im Frequenzspektrum nach unten gleitender Formant. Vor allem bei der *tampūrā* ist dieser Effekt sehr stark, da der unter der Saite befindliche Faden ein kurzes Hindernis für die Saite ist (Valette und Cuesta 1993, S. 210), aber auch bei der Sitar, wo der Steg breiter ist und ein größerer Teil der Saite vor dem Knick auf dem Steg zum liegen kommt führt er zu einem kennzeichnenden, herabgleitenden Formanten (Bertrand 1992, S. 47).

Valette und Cuesta (1993) bestätigen ihre Überlegungen mit Experimenten und Simulationen: In einer Simulation ohne Dispersion kommt es nicht zu einer Bildung einer Vorhut hoher Frequenzen vor dem Knick in der Saite und die simulierten Klänge entbehren eines gleitenden Formanten.

Von den wenigen wissenschaftlichen Arbeiten, die es zur Schwingung der Sitarasaiten gibt, vernachlässigen die meisten ungeachtet der wichtigen Aussagen von Valette und Cuesta (1993) und Bertrand (1992) die Dispersion und blenden dadurch einen entscheidenden Teil der Klangentstehung des Instruments aus.

Burridge, Kappraff und Morshedi (1982), als auch Vyasarayani, Birkett und McPhee

---

<sup>5</sup>Übersetzung des Verfassers: „Der Haupteffekt der Dispersion ist das Zustandekommen einer Vorhut („*précurseur*“) vor allen Knicken.“

(2009) stellen mathematische Gleichungssysteme zur Beschreibung der Bewegung einer Saite mit einem runden Hindernis an einem Ende auf und leisten einen wertvollen Beitrag für das Verständnis der Wirkung des Steges auf die Saitenschwingung, vernachlässigen jedoch die Dispersion.

Park und Li (2008) skizzieren erste Entwürfe eines physikalischen Modells der Sitar und erzielen recht interessante Ergebnisse, die unter anderem durch Beachtung der Dispersion sicherlich verbessert werden könnten.

Valette und Cuesta (1993) schließen ihre Beobachtungen zur Wechselwirkung zwischen Saite und Steg daher mit der wichtigen Bemerkung: „*le mécanisme repose sur la dispersion, sans laquelle la non-linéarité perd son caractère spectaculaire (précurseur).*“<sup>6</sup> (S. 217)

---

<sup>6</sup>Übersetzung des Verfassers: „Der Mechanismus beruht auf der Dispersion, ohne welche die Nichtlinearität ihren spektakulären Charakter (Vorhut) verliert.“

# 5 Der Resonanzkörper der Sitar

## 5.1 Die Wirkung des Resonanzkörpers

Obwohl am Beginn dieser Arbeit festgelegt wurde, dass das physikalische Modell den Resonanzkörper nicht beinhalten soll, kann er nicht vollständig ignoriert werden, da er den Klang des Instruments sehr stark prägt. Die schwingende Saite regt den Resonanzkörper zur Schwingung an, der den Schall an die Luft abstrahlt. Ohne Resonanzkörper wäre eine schwingende Saite so gut wie unhörbar (Fletcher und Rossing 1991, S.50).

Die vom Resonanzkörper bewirkte Verstärkung des Schalls der schwingenden Saite ist jedoch nicht in allen Frequenzbereichen gleich stark. Bei einigen Frequenzen resoniert der Körper stärker, bei anderen schwächer, dadurch wird das Frequenzspektrum der schwingenden Saite auch verändert.

Die Verstärkung und der Phasenverschub bei einer bestimmten Frequenz sind immer gleich und werden durch eine frequenzabhängige, konstante, komplexe Größe ausgedrückt. Eine Veränderung der Ausgabelautstärke kann also nur durch eine Veränderung der Eingangslautstärke erreicht werden, da mit einer konstanten Größe multipliziert wird. Da es im Normalfall zwischen den Schwingungen einzelner Frequenzen jedoch nicht zur Energieübertragung kommt, gilt für das System der Überlagerungssatz (Grünbacher 2005, Kap. 1, S. 3):

$$k_1 \cdot \text{Ursache}_1 + k_2 \cdot \text{Ursache}_2 = k_1 \cdot \text{Wirkung}_1 + k_2 \cdot \text{Wirkung}_2 \quad (5.1)$$

Systeme, für die der Überlagerungssatz gilt, sind linear (Grünbacher 2005, Kap. 1, S. 3). Da sich die Eigenschaften des Resonanzkörpers während des Spielens des Instrumentes nicht verändern, handelt es sich auch um ein zeitinvariantes System. Zur vollständigen Beschreibung dieses linearen, zeitinvarianten Systems reichen die besprochenen frequenzabhängigen, konstanten, komplexen Größen für alle benötigten Frequenzen. Die Funktion dieser Größen in Abhängigkeit zur Frequenz wird Übertragungsfunktion des Systems genannt. Ziel ist es also die Übertragungsfunktion des Resonanzkörpers zu erschließen, so dass man seine Wirkung als Filter auf das Saitensignal anwenden kann.

## 5.2 Der Resonanzkörper als Übertragungsfunktion

### 5.2.1 Die akustische Admittanz

Die Schwingung der Saite wird hauptsächlich am Steg auf den Resonanzkörper übertragen. Dabei wirkt die schwingende Saite mit einer sich ändernden Kraft auf den Steg und bewirkt Schwingungen des Resonanzkörpers. Die Schwingungen des Resonanzkörpers lassen sich als Geschwindigkeitsvektoren an seiner Oberfläche auffassen und messen. Um die Wirkung einer an einem bestimmten Punkt des Körpers  $P$  angelegten Anregungskraft  $F_P$  auf einen anderen Punkt des Körpers  $Q$  zu beschreiben, braucht man eine Größe, die die Anregungskraft in Beziehung zu der am Punkt  $Q$  gemessenen Geschwindigkeit  $v_Q$  setzt (Kollmann, Schösser, Angert 2006, S. 13):

$$v(Q) = Y(P, Q) \cdot F(P) \quad (5.2)$$

Die eingeführte komplexe Größe  $Y(P, Q)$  ist die Admittanz. Sie ist „ein Maß für die Schwingbereitschaft eines Körpers“ und kann als Funktion der Frequenz „als Übertragungsfunktion gedeutet werden.“ (ebd.) Sind Ort der Anregung und der Geschwindigkeitsmessung gleich, spricht man von der Eingangsimpedanz eines Punktes (ebd.). Für maschinenakustische Untersuchungen ist die Admittanz, als auch ihr Kehrwert, die Impedanz, von großer Bedeutung (Ebd., S. 12). Auch im Instrumentenbau sind beide Größen sehr wichtig und werden zur Untersuchung und Beschreibung von resonierenden Teilen eingesetzt.

Die Admittanz kann im Rahmen dieser Arbeit als indirekte Methode eingesetzt werden, um die durch den Resonanzkörper bewirkte Übertragung der Saitenschwingung in die Luft zu erfassen, da sich die Geschwindigkeit bestimmter Punkte des Resonanzkörpers berechnen lassen, wenn die von der Saite am Steg ausgeübte Kraft bekannt ist. Die Schwingung der Oberfläche des Resonanzkörpers ist für die Abstrahlung des Klages in die Luft verantwortlich, weswegen die Geschwindigkeit eines Punktes, oder ihre integrierte Größe, die Auslenkung des Punktes, als indirektes Maß für die in der Luft bewirkte Schwingung gelten können.

### 5.2.2 Die Messung der Admittanz

Bei der Messung der Schwingungseigenschaften eines Systems wird es mit einer Kraft  $f(t)$  angeregt und die bewirkte Reaktion  $x(t)$  aufgezeichnet. Das Anregungssignal  $f(t)$  und das Antwortsignal  $x(t)$  werden bei linearen, zeitinvarianten Systemen im Frequenzbereich durch die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  miteinander in Beziehung gesetzt.  $H(\omega)$  lässt sich einfach durch die Fouriertransformierten  $F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$  und  $X(\omega) = \mathcal{F}(x(t))$  berechnen

(Kollmann, Schösser, Angert 2006, S. 230-231):

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (5.3)$$

Das Antwortsignal  $x(t)$  bzw  $X(\omega)$  kann eine Größe verschiedener Dimensionen sein. Es kann sich beispielsweise um Beschleunigung, Geschwindigkeit, Auslenkung oder Schalldruck handeln. Soll die Eingangsadmittanz gemessen werden, muss  $x(t)$  der Geschwindigkeit am Anregungspunkt entsprechen. Da im Rahmen dieser Arbeit die akustischen Eigenschaften des Resonanzkörpers eine untergeordnete Rolle spielen und ihre Erschließung nur dem Zwecke dient, die Übertragung der Saitenschwingung an die Luft nachverfolgen zu können, ist die Admittanz nicht die am besten geeignete Größe um den Übertragungsweg zu beschreiben, da das Körperschallfeld (das Schwingen des Resonanzkörpers) nur ein indirektes Indiz für das Luftschallfeld ist. Besser ist es, das Luftschallfeld direkt zu messen, da die Übertragungsfunktion direkt den gesamten Weg vom Steg bis an die abgestrahlten Schwingungen in der Luft beschreiben kann.

### 5.3 Die durchgeführten Messungen

#### 5.3.1 Die Messumgebung

Die Messung wurde im schalltoten Raum des Instituts für Wiener Klangstil<sup>1</sup> der Universität für Musik und darstellende Kunst durchgeführt. Das Instrument wurde in einer speziellen Vorrichtung aufgehängt. Dazu wurde einer der oberen Wirbel entnommen und an seiner Stelle Holzfassungen in das Instrument gesteckt, durch die eine Metallstange gezogen wurde. Unten wurde das Instrument zusätzlich an zwei Stellen mit Schaumstoff gestützt, einerseits an der Stelle, auf der es beim Spiel aufliegen würde, und andererseits an der Stelle, wo der Spieler seinen Arm auf das Instrument legen würde.

Das Instrument war nicht voll besaitet. Alle Saiten zu entfernen wäre jedoch nicht möglich gewesen, da die Stege nur durch die Spannung der Saiten in Position gehalten werden. Die Saiten wurden gedämpft, aber trotzdem auf den Grundton *c*, passend zur *bilāval thāt* (Dur), gestimmt. Die einzelnen Töne waren also: *ṃa* (*f*), *sā* (*c*), *pā* (*g*), für die *cikārī-sā* (*c'*) und *śā* (*c''*) und bei den Resonanzsaiten: *sā* (*c'*), *re* (*d'*), *ga* (*e'*), *pā* (*g'*), *dha* (*a'*) und zweimal *śā* (*c''*).

#### 5.3.2 Die Wahl des Anregungssignals

Für die Messungen wurden zwei Formen der Anregung gewählt, die den gesamten Frequenzbereich von Interesse abdecken konnten. Einerseits die Anregung mittels eines Impulses, andererseits die Anregung mittels eines langsamen Sinusdurchlaufs.

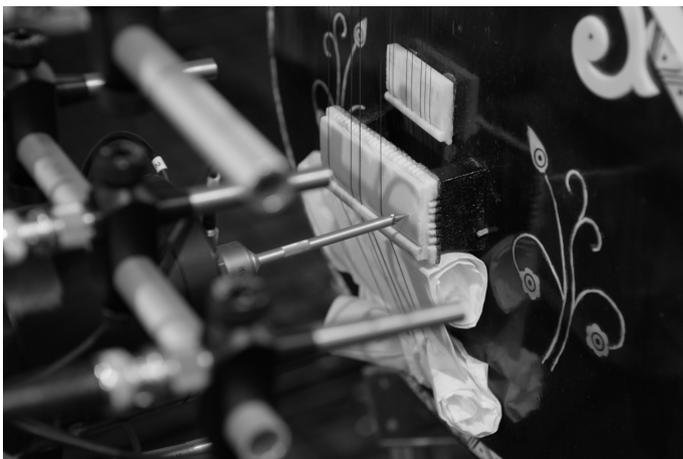
---

<sup>1</sup><http://iwk.mdw.ac.at/>

### 5.3 Die durchgeführten Messungen



**Abbildung 5.1:** Der Aufbau der Messung (ohne die Mikrofone hinter dem Resonanzkörper).



**Abbildung 5.2:** Die Anregung am Steg mittels Rüttler.

Die Anregung durch einen Impuls liefert die Impulsantwort, welche theoretischerweise alle nötigen Informationen über das System enthält. Die Messung mit Impulsanregung ist schnell und einfach (wenn alle Geräte zur Hand sind), lieferte in der Praxis aber nicht so gute Ergebnisse wie der Sinusdurchlauf. Dies lag einerseits an dem geringeren Signal-Rauschabstand und andererseits daran, dass der Impuls keine befriedigende Annäherung an den Dirac-Stoß war.

Die Anregung mittels Sinusdurchlauf ist zeitaufwändiger. Verglichen mit der nur wenige Sekundenbruchteile langen Impulsantwort eines Resonanzkörpers, muss die Anregung mittels Sinusdurchlauf über einen Zeitraum von vielen Minuten erfolgen, um eine große Frequenzauflösung zu erzielen und sicherzustellen, dass das System genug Zeit hat sich auf die einzelnen Frequenzen einzuschwingen (Kollmann, Schösser, Angert 2006, S. 247).

### 5.3.3 Die verwendeten Geräte

Zur Anregung mittels Impuls diene ein Impulshammer und zur Anregung mittels Sinusdurchlauf diene ein Rüttler. In beiden Geräten waren auch Kraftsensoren eingebaut, um die gemessene Systemantwort zu einer Anregungskraft bekannter Größe in Beziehung setzen zu können. Auch wenn der Rüttler ein bekanntes Signal übertrug, war das Messen der Anregungskraft dennoch wichtig, denn

*„[b]edingt durch den Ankopplungseinfluß und die dynamischen Eigenschaften des Anregungsgeräts kann die in das Meßobjekt eingeleitete Anregungskraft erheblich von dem eingespeisten Anregungssignal abweichen. Deshalb ist für die meisten Meß- und Auswertungsverfahren die Messung der wirksamen Anregungskraft unverzichtbar.“*

(Kollmann, Schösser, Angert 2006, S. 243)

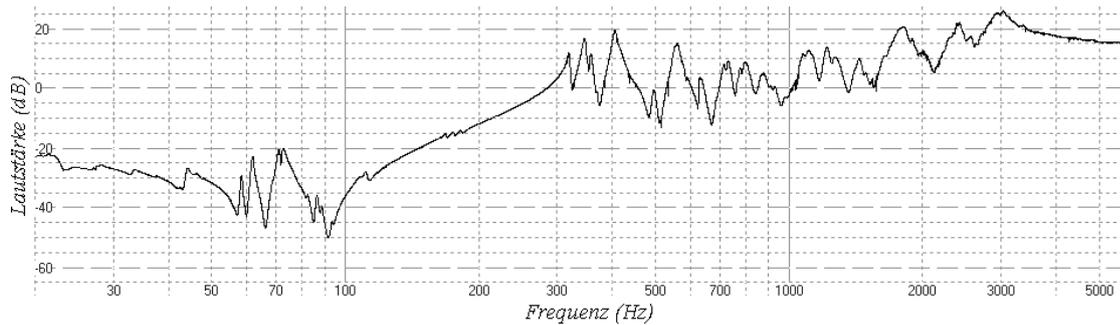
Die Kraft wirkte jeweils von oben auf den Steg (also normal zu der Fläche des Steges), die Beschleunigung für die Berechnung der Eingangsadmittanz wurde in die gleiche Richtung an der Stelle direkt daneben vorgenommen.

22 Mikrofone wurden in einem Gitter vor das Instrument und um den unteren Teil des Resonanzkörpers herum aufgehängt um das Luftschallfeld zu erfassen. Die Mikrofonierung erfolgte wie bei den Aufnahmen der Saite mit 1/4" Messmikrofonen von Roga Instruments (Typ: RG-50), die einen sehr flachen Frequenzgang aufweisen (20Hz-4kHz  $\pm$ 1dB; 4-20kHz  $\pm$ 1,5dB).

### 5.3.4 Die Aufbereitung der Messergebnisse

Die Berechnung der Eingangsadmittanz  $Y_E$  erfolgte im Programm VIAS, welches am Institut für Wiener Klangstil entwickelt wurde. Entsprechend der Gleichung 5.2 lässt sich die Admittanz aus Kraft und Geschwindigkeit berechnen:

$$Y_E = \frac{v(P)}{F(P)} \quad (5.4)$$



**Abbildung 5.3:** Die gemessene Admittanz

Die Kraft ist die gemessene, eingespeiste Kraft. Die Geschwindigkeit errechnet sich durch Integration aus der gemessenen Beschleunigung. Da die Berechnung im Frequenzbereich zu erfolgen hat, müssen beide Signale mittels Fouriertransformation in diesen übertragen werden.

Die Berechnung der Übertragungsfunktion  $H$  vom Steg zum Luftschallfeld verläuft nach ähnlichem Muster. Das Signal des Mikrofons  $p$  wird in den Frequenzbereich übertragen und durch die auf den Steg angewendete Kraft (im Frequenzbereich) geteilt:

$$H = \frac{\mathcal{F}(p)}{F} \quad (5.5)$$

Die so erschlossene Übertragungsfunktion wird sich auf die berechnete Welle der Saite anwenden lassen, um die Verstärkung und Abstrahlung des Resonanzkörpers zu simulieren.

# 6 Die Planung des physikalischen Modells

## 6.1 Anforderungen an das physikalische Modell

Ziel dieser Arbeit ist der Entwurf und die Erstellung eines physikalischen Modells einer Sitar. Vor der Entwicklung des Programms muss geklärt werden, welche physikalischen Erscheinungen im Modell berücksichtigt werden sollen.

Das Modell soll zwar möglichst alle wesentlichen Merkmale des Instruments umfassen, aber das Hauptaugenmerk liegt auf den Vorgängen der Saitenschwingung, die den für das Instrument unverkennlichen obertonreichen Klang erzeugen. Aus diesem Grunde werden einige, für den Gesamtklang und eine musikalisch sinnvolle Simulation des Instruments an sich nicht unwesentliche Aspekte vernachlässigt:

- die Bordunsaiten und Resonanz sonstiger Saiten
- verschiedene Saitenanschlagetechniken
- ein eventueller zweiter Resonanzkörper
- die Änderung der Eigenschaften des Resonanzkörpers
- die Verkürzung der Saite an den Bündlen
- der Zusammenklang mehrerer Saiten
- das Ziehen der Saiten an den Bündlen (*mīṇḍ*)

Auch einige physikalische Gesichtspunkte werden vernachlässigt:

- die Abstrahlcharakteristik
- die Erklärung der Schwingungen des Resonanzkörpers
- verschiedene Saitenmaterialien
- unterschiedliche Saitendurchmesser
- die Wirkung des Resonanzkörpers auf die Saite

Mit dem genannten Ziel ein Modell zu entwerfen, das die physikalischen Vorgänge der Saitenschwingung gut dokumentiert, lassen sich folgende Anforderungen formulieren:

1. Die Saitenschwingung soll möglichst nah an den physikalischen Vorgängen simuliert werden.

2. Die Wechselwirkung mit dem Steg und die Dispersion müssen berücksichtigt werden.
3. Die Eingangswerte sollen physikalische Größen sein. Zu den Eingangswerten gehören je nach Modell die anfängliche Auslenkung und Geschwindigkeit der Saite, ihre Länge, Spannkraft und Elastizität.
4. Die Stegform soll veränderlich sein.
5. Der ausgegebene Klang soll wesentliche Phänomene des echten Instruments enthalten und diesem auch akustisch ähneln.
6. Das Modell soll den Ton einer einzigen, nicht umstimbaren Saite simulieren.
7. Das Programm soll erweiterbar sein, damit in späteren Versionen auch die hier vernachlässigten Gesichtspunkte berücksichtigt werden können.

## 6.2 Anforderungen an das Programm

### 6.2.1 Überlegungen im Vorfeld der Entwicklung

Das geplante physikalische Modell soll nun als Programm in der Programmiersprache Delphi entwickelt werden. Die Programmierung eines physikalischen Modells erfordert die Abwägung der Anforderungen an das Programm mit den Schwierigkeiten und dem voraussichtlichen Entwicklungsaufwand, um ein für die gewählten Ziele optimales Verfahren zu wählen. Vor der Formulierung der im Programm zu implementierenden Funktionen ist eine Besprechung der häufigen Probleme angezeigt, deren Lösungen bei der Programmierung physikalischer Modelle große Herausforderungen an die Entwickler sind, um abwägen zu können, wie wichtig die Implementierung gewisser Funktionen angesichts dieser Hindernisse sind.

### 6.2.2 Hürden bei der Programmierung physikalischer Modelle

#### Aufwändige Berechnung

Die Berechnungen eines physikalischen Modells können sehr aufwändig sein. Bestimmte Anwendungen legen jedoch eine obere Grenze für die Rechenzeit fest. Schon bestimmte Werte grafisch in Zeitlupe auszugeben schränkt die Länge der für die Berechnung zur Verfügung stehenden Zeit ein. Soll Klanguausgabe in Echtzeit erfolgen, liegt die Grenze für die höchstzulässige Rechenzeit je nach Qualität noch tiefer. Soll die Klanguausgabe beispielsweise in CD-Qualität erfolgen, also mit einer Abtastrate von 44100Hz in Stereo, müssen pro Sekunde wenigstens  $44100 \cdot 2$  Abtastwerte berechnet werden. Bei mehrstimmigen Modellen ist dies besonders kritisch, da je nach Modellierungsverfahren die Mehrstimmigkeit auf Grund dieser Einschränkung irgendwo begrenzt werden muss.

### **Verzögerungszeit**

Da die Klangausgabe am Rechner in Blöcken geschieht, hat ein physikalisches Modell strenggenommen überhaupt nicht die Möglichkeit in Echtzeit berechnet und ausgegeben zu werden. Echtzeit kann jedoch angenähert werden. Eine Verzögerungszeit von kleiner als 20ms lässt den Eindruck von Echtzeit entstehen (Spix 2000, S.1).

Eine Ausgabe von bereits vorhandenen Steuerdaten, wie beispielsweise die Spur einer Mididatei, ist ein wenig einfacher, da die Berechnung gegenüber der Ausgabe einen Vorsprung haben und nutzen kann. Die Rechenzeit von komplizierteren Passagen (z.B. 8 Töne auf einmal) und einfachen Passagen (z.B. Stille) kann sich ab einem gewissen Vorsprung gegenüber der Ausgabe ausgleichen. Soll das Modell jedoch in Echtzeit als Instrument gespielt werden, muss das Programm jederzeit bereit sein, Befehle entgegenzunehmen, die die Ausgabe ändern. Eine vorauseilende Berechnung ist nicht sehr sinnvoll, da sich der aktuelle Zustand des Systems jederzeit ändern kann. Das Programm muss also in der Lage sein, innerhalb kürzester Zeit auf Änderungen zu reagieren und muss ohne die Absicherung einer vorauseilenden Berechnung auskommen.

### **Passende Schnittstellen**

Auf die Schwierigkeiten bei der Wahl einer geeigneten Schnittstelle für die Bedienung eines physikalischen Modells als Instrument weist Russ (2009, S. 30) hin. Die bei Synthesizern weit verbreitete Eingabe über die Klaviatur eines Keyboards ermöglicht beispielsweise keine feine Veränderung der Tonhöhe oder das Gleiten zwischen Tönen, wie es auf einer Sitar oder Geige möglich ist, es sei denn über den Umweg des Tonhöhenrades. Ein wesentliches Problem bei der Erschaffung von physikalischen Modellen zur Klangerzeugung ist also der Entwurf einer geeigneten Schnittstelle zur unkomplizierten, intuitiven und genauen Steuerung.

Wird die Schnittstelle den modellierten Instrumenten nachgeahmt, scheint die Tatsache, ein Instrument gebaut zu haben, das genauso bedient wird und im Idealfall genauso klingt wie das Original, zunächst absurd. Das muss jedoch nicht die Sinnhaftigkeit eines physikalischen Modells einschränken, da geübte Instrumentalisten auf diese Weise ein Modell auf gewohnte Weise bedienen können, dessen Klang beliebig geändert werden kann. Ein Streicher könnte versuchen ein Stück auf Instrumenten der verschiedensten Epochen, Materialien, Gütestufen und Hersteller zu spielen, sofern die entsprechenden Daten verfügbar sind. Andererseits müsste die ideale Schnittstelle auch das Gefühl des echten Instruments vermitteln können (die Schwingungen der Saiten, die Dicke der Saiten, die andere Größe des Instruments, die Haftreibung unterschiedlicher Bögen auf der Saite, uvm.), da der Klang als einzige Rückmeldung des Instruments unzureichend wäre.

Eine Schnittstelle, die nach oben genannten Kriterien dem echten Instrument nachgeahmt wird, schließt oft den Klangerzeugungsmechanismus mit ein, wie beispielsweise das Streichen des Bogens auf den Saiten oder die Lippen des Blechbläusers im Mundstück.

Bei einem solchen Modell wird Klangerzeugung an sich also nicht berechnet, lediglich die von Resonanzkörper, Dämpfern, Röhren oder Schalltrichtern bewirkten Effekte auf den erzeugten Klang werden modelliert, was gleichzeitig ein Vorteil und ein Nachteil sein kann, da man einerseits komplizierten Rechenaufgaben entgeht, aber andererseits der Mechanismus der Klangerzeugung schon zu einem ganz wesentlichen Teil den Klang beeinflusst. Solche „Hybridmodelle“ können jedoch bei elektrischen Instrumenten zum Einsatz kommen, wenn diese wie akustische Instrumente klingen sollen. Wong, Leung und Lau (1999) beschreiben in ihrem Aufsatz den Entwurf eines „digitalen Resonators“ für ein elektrisches Cello, der als abstraktes physikalisches Modell gelten kann.

### Abstraktion

Die Abstraktion von physikalischen Modellen bringt die Schwierigkeit mit sich, dass die Konstanten und Variablen mit denen das Modell arbeitet oft in komplizierter Beziehung zu physikalischen Größen stehen<sup>1</sup>, oder auch in Beziehungen, die nicht formuliert sind, sondern nur experimentell abgeschätzt sind. Die Länge einer Saite in Metern lässt sich in einem Wellenleitermodell noch relativ leicht mit der Länge der Verzögerungsleitungen in Beziehung setzen. Wenn aber beispielsweise die Steifheit der Saite in einem Modell erfasst werden soll, geschieht dies oft mit Filtern, die die Wirkungen der Steifheit imitieren und nicht die Steifheit selbst repräsentieren. Die Gestaltung der Filter erfolgt im Experiment, wenn keine Beziehung zwischen den Koeffizienten des Filters und der physikalischen Größe der Saitensteifheit formuliert wurde<sup>2</sup>. Das Modell erfasst den Wert Steifheit also nur über Umwege.

Schon die Programmierer stehen vor der Schwierigkeit, für die Konstanten, Variablen und anderen Anfangswerte ihres Modells passende Werte festzulegen, vor allem wenn kein Bezug zu physikalischen Größen bekannt ist. Soll das physikalische Modell von einem größeren Publikum bedient werden, müssen jedoch Bezüge zu erfassbaren und dem Zielpublikum nachvollziehbaren Größen gefunden werden, denn Endbenutzern muss klar sein, welche Bedeutung eine bestimmte Eingabe hat.

---

<sup>1</sup>Dies gilt nicht für alle Modelle. Der Berechnungsvorgang bei Masse-Feder-Modellen ist in Hinblick auf die physikalischen Erklärungen wenig abstrahiert, daher haben die Variablen und Konstanten dieser Modelle oft einfache, direkte Bezüge zu physikalischen Werten. Auch die Variablen der Funktionaltransformationmethode stehen normalerweise in leicht erfassbarer Beziehung zu physikalischen Größen, da die Dimensionen der Variablen auf gleiche Weise von den physikalischen Formeln abgeleitet werden können, wie das Modell selbst. Dies wird von den Entwicklern des Modells auch als ein Vorteil dieser Methode genannt (Rabenstein, Trautmann und Petrausch 2003, S.1).

<sup>2</sup>Genau diesem Problem haben sich Rauhala und Välimäki (2006a und b) angenommen. In ihren Aufsätzen beschreiben sie die Beziehungen zwischen den Koeffizienten eines Dispersionfilters und der Dispersion, die bei Klaviertönen als Abweichung der tatsächlichen Teiltonfrequenzen von einem theoretischen, harmonischen Spektrum gemessen und ausgedrückt wird.

### **Instabilität**

Je nach Art des Modells führen nicht alle Kombinationen an sich gültiger Eingangswerte zu funktionierenden Modellen. Das Verhalten der Modelle kann auch nicht immer vorhergesagt werden, weswegen solche Kombinationen meist erst zu erkennen sind wenn das Modell schon versagt. Dem Benutzer kann daher auch bei theoretischerweise flexiblen Modellen nur ein eingeschränkter Spielraum zur Verfügung gestellt werden, in dem die Stabilität sichergestellt ist.

### **Hohe Anforderungen an das Hintergrundwissen**

Die Grundlage für physikalische Modelle ist das Wissen über die physikalischen Vorgänge bei der Klangentstehung. Nicht alle Instrumente wurden gut genug erforscht, um genügend Wissen für realistische Instrumentenmodelle zu bieten. Das Wissen, das über die einzelnen Instrumente vorliegt, reicht zwar oft aus um den Klang zu erklären, aber nicht um ihn zu synthetisieren. Schon 1921 erklärte Raman die Besonderheiten der Schwingung einer Saite mit flachem Steg. Die Erklärungen sind zwar physikalisch vollkommen zufriedenstellend, reichen aber lange nicht aus um ein physikalisches Modell zu erstellen, da die Idealisierung von physikalischen Vorgängen zwar ein nützliches Mittel für deren Beschreibung ist, aber sich die Wirklichkeit nicht auf idealisierten Bahnen bewegt.

Neue physikalische Modelle auf der Grundlage schon vorhandener Modelle zu erstellen ist eine weit verbreitete Taktik und logische Handlungsweise, erfordert aber trotzdem genauestes Wissen über die unterschiedlichen Mechanismen bei der Klangentstehung. Beispielsweise bietet ein Modell einer Gitarre zwar eine gute Grundlage für ein Modell einer Sitar, aber dennoch führt kein Weg an einer umfangreichen Untersuchung des Instruments vorbei, wenn das Ziel ein realistisches Modell sein soll, denn alle Daten über Unterschiede im Aufbau und den Materialien, sowie über andere Vorgänge bei der Saitenschwingung, müssen erschlossen werden.

### **6.2.3 Zielsetzung der Entwicklung**

Angesichts der genannten Schwierigkeiten bei der Programmierung physikalischer Modelle muss abgewogen werden, welche Funktionalitäten das Programm unterstützen soll. Da das in dieser Arbeit beschriebene Modell in erster Linie der näheren Betrachtung der physikalischen Vorgänge dient, wird es einige wesentliche Anforderungen, die beispielsweise für Synthesizer gelten, nicht oder nur ansatzweise unterstützen:

- Klangausgabe in Echtzeit
- benutzerfreundliche Bedienung
- Schnittstellen zu anderen Musiksystemen (z.B. MIDI)
- ansprechende grafische Ausgabe
- Klangausgabe in verschiedenen Formaten

Es soll folgende Funktionen zur Verfügung stellen:

1. Klangausgabe als Datei
2. grafische Ausgabe der Saitenschwingung
3. Eingabe bestimmter (physikalischer) Werte als Konstanten
4. möglichst schnelle Berechnung
5. stabile Algorithmen

Außerdem wird eine möglichst schnelle Simulation angestrebt. Das Modell sollte idealerweise also soweit optimiert werden, dass zumindest im Rahmen der aufgeführten Einschränkungen eine Simulation in Echtzeit möglich ist. Dazu gehören sowohl geringe Verzögerungszeiten bei der Bedienung, als auch effiziente Algorithmen für eine schnelle Berechnung.

### 6.3 Die Wahl eines geeigneten Modellierungsverfahrens

Die Wahl eines geeigneten Modellierungsverfahrens wird durch die besondere Schwingung der Saite der Sitar eingeschränkt. Nicht mit allen Verfahren können Dispersion und die unter 4.3.3 beschriebene Nichtlinearität nachgebildet werden. Auch die oben gestellten Anforderungen begrenzen die Auswahlmöglichkeiten. Von denen unter 2.3.1 genannten Modellierungsverfahren fallen daher die folgenden Verfahren weg:

**Finite-Elemente-Methode:** Die Nichtlinearität und Dispersion der Saitenschwingung in Gleichungen zu erfassen ist kein einfaches Unterfangen. Ohne genaues Wissen um die Art der Nichtlinearität können außerdem keine Gleichungen aufgestellt werden. Die Beschreibung der Sitar saite mittels Finite-Elemente-Methode ist zwar unter Umständen möglich, aber im Vergleich zu den anderen Möglichkeiten der komplizierteste Weg.

**Modale Synthese:** Dispersion und Nichtlinearität können nicht mit modalen Beschreibungen erfasst werden.

**Statistische Modelle:** Statistische Modelle eignen sich nicht zur Beschreibung der Schwingung einer Saite, da es sich nicht um chaotische Bewegungen handelt.

**Analytische Verfahren:** Die Nichtlinearität der Saitenschwingung kann analytisch nicht durch nur eine Gleichung erfasst werden, sondern nur durch einen Satz ähnlicher Gleichungen, wie von Burrige, Kappraff und Morshedi (1982) als auch Vyasarayani, Birkett und McPhee (2009) beschrieben. Beide genannten Beschreibungen vernachlässigen jedoch die Dispersion und können daher nicht für ein physikalisches

Modell eingesetzt werden. Die Beschreibung der Sitar-  
saite mittels Gleichungssätzen, die die Dispersion auch berücksichtigen, würde den Sachverhalt so weit verkomplizieren, dass ein solcher Ansatz nicht sinnvoll erscheint.

**Funktionaltransformationmethode:** Die Nichtlinearität bei der Schwingung der Sitar-  
saite kann durch eine partielle Differentialgleichung, auf welcher diese Methode  
basiert, nicht erfasst werden.

Zur Wahl stehen also die folgenden Modelle:

1. **Masse-Feder-Modell**
2. **FDM-Modell**
3. **Wellenleitermodell**

Jedes dieser Modelle hat seine eigenen Vor- und Nachteile und ist für bestimmte Ziele  
der Modellierung besser geeignet.

**Masse-Feder-Modelle** sind hoch flexibel und sehr einfach zu entwerfen (Spix 2000, S. 3),  
wenn grundlegendes Wissen über die physikalischen Vorgänge vorhanden ist. Die  
physikalischen Entsprechungen liegen in der Regel auf der Hand, da es sich um  
keine große Abstraktion handelt. Der Nachteil dieser Systeme ist ihr Rechenauf-  
wand und eine Simulation in Echtzeit ist in den meisten Fällen unmöglich, da auch  
einfache Modelle dieser Art oft so aufwändig sind, dass auch die beste Optimie-  
rung auf Prozessoren normaler Heimrechner von Heute kein Echtzeitmodell liefert,  
welches Mehrstimmigkeit berechnen kann. Erst sehr komplexe Modelle erlauben es  
jedoch alle Effekte der schwingenden Saite zu berücksichtigen. So können Dreh-  
schwingungen oder Elastizität nur dann eine Entsprechung im Modell finden, wenn  
die physikalische Struktur der Saite modelliert wird, die diese Phänomene bewirkt.  
Eine einfache Modellierung der Saite als eine Kette von Massen ist dafür nicht  
ausreichend.

**FDM-Modelle** basieren zwar nicht direkt auf den für Schwingungen und Wellen grundle-  
genden Gleichungen der Dynamik, aber dafür auf den Wellengleichungen, weshalb  
sich der Grad der Abstraktion auch hier in Grenzen hält. FDM-Modelle sind in  
der Regel schneller als Masse-Feder-Modelle. Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens  
ist, dass Parameter der Wellengleichung direkt in das Modell übernommen werden  
können. Die Dispersion beispielsweise kann mit bekannten physikalischen Größen  
in Beziehung gesetzt werden und auch geregelt werden. Andererseits sind FDM-  
Modelle nicht beliebig erweiterbar und nicht so flexibel wie Masse-Feder-Modelle  
und obwohl sie schneller sind, sind sie im Vergleich zu Wellenleitern immer noch

sehr langsam, wodurch der Entwurf eines Echtzeitmodells erschwert wird. Ein weiterer Nachteil kann die Ungenauigkeit sein, die bei der Berechnung von finiten Differenzen entsteht, da diese das System leicht zur Instabilität aufschaukeln kann.

**Wellenleiter** sind schnell und effizient, dafür aber vergleichsweise abstrakt. Der Zusammenhang zu den physikalischen Vorgängen ist nicht so direkt wie bei den beiden oben stehenden Modellen. Dies ist vor allem bei der Modellierung der Nichtlinearität und Dispersion ein Nachteil, die daher nicht direkt als physikalische Vorgänge implementiert werden können. Für beides müssen passende Entsprechungen gefunden werden, die das Verhalten der physikalischen Systeme imitieren.

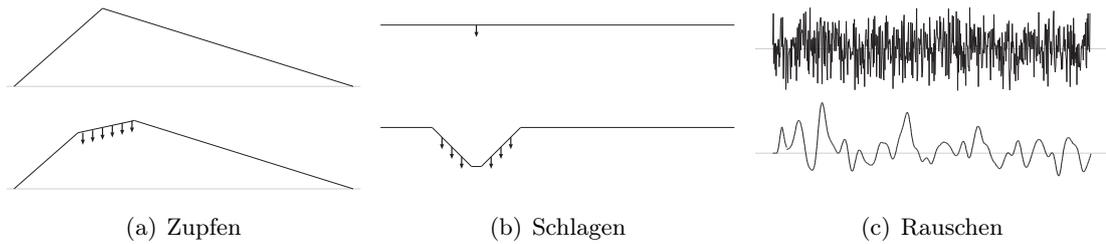
Da keines dieser Modelle alle wünschenswerten Eigenschaften in sich vereint, erscheint es sinnvoll, zunächst mehrere Modelle mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten zu entwerfen:

- Mittels eines **Masse-Feder-Modells** ist man in der Lage, die physikalischen Vorgänge der Saitenschwingung genau unter die Lupe zu nehmen. Vor allem die Interaktion der Saite mit dem Steg wird sehr gut beschrieben. Auch Dispersion ist zu beobachten, jedoch nicht steuerbar.
- **FDM-Modelle** erlauben eine direktere und genauere Steuerung der Saitenparameter, wodurch auch die Dispersion so erfasst werden kann, wie sie in der Wellengleichung beschrieben ist. Die Modellierung der Interaktion zwischen Saite und Steg ist ein wenig abstrakter als bei Masse-Feder-Modellen. Die Beobachtungen aus Masse-Feder-Modellen können daher als wertvolle Grundlage und aussagekräftige Bewertungskriterien herangezogen werden.
- Ein **Wellenleiter-Modell** könnte die Grundlage für eine Klangsynthese in Echtzeit sein, da die Algorithmen sehr effizient sind. Um die physikalischen Vorgänge der Dispersion und Interaktion zwischen Saite und Steg zu implementieren, muss das Modell jedoch erweitert werden. Dazu dienen die Beobachtungen aus den beiden anderen Modellen als Grundlage.

## 6.4 Die Ausgangssituation der Modellierung

### 6.4.1 Das Festlegen der Vorgaben

Um die Berechnung der Modelle zu steuern, brauchen diese einige Vorgaben und Eingabeparameter. Um Signale zu erhalten, die mit den Messungen und auch untereinander vergleichbar sind, müssen diese Anfangswerte für alle Modelle festgelegt werden. Sie sollen auch als Orientierung bei der Erstellung der Modelle dienen, damit geklärt wird, auf Grund welcher Daten die Schwingung der Saite zu berechnen ist.



**Abbildung 6.1:** Anregemethoden für physikalische Modelle der Saite (oben) und ihre Wirkung (unten). Bei (a) und (b) sind die Geschwindigkeiten mit Pfeilen dargestellt.

Nicht alle wichtigen Anfangswerte und Parameter können im Vorfeld geklärt werden, da sie keinen direkten Bezug zur physikalischen Wirklichkeit haben, wie beispielsweise die Koeffizienten der in den nächsten Abschnitten vorgestellten Filter. Solche Werte müssen auf experimentellem Wege festgelegt werden. Dies wird ein Teil der Entwicklung der Modelle sein.

#### 6.4.2 Vorgaben zur Berechnung

Da die Art der benötigten Parameter für die Berechnung vom Modell abhängt, können wenig allgemeine Vorgaben gemacht werden. Ein Ziel ist es, mit den Messungen vergleichbare Signale zu erhalten. Diese liegen mit einer Abtastrate von 44100Hz und einer Bittiefe von 16bit als einkanalige Aufzeichnungen vor, was auch als Vorgabe für die Modelle gelten soll. Die Tonhöhe soll ungefähr den bei der Messung aufgezeichneten  $\bar{s}\bar{a}$ -Saiten (c) entsprechen. Daher wird  $440 \cdot 2^{-(12+9)/12} = 130,8\text{Hz}$  als Richtwert vorgegeben.

#### 6.4.3 Die Anregung der Saite

Die Art der Anregung des programmierten physikalischen Modells muss vor der Entwicklung bedacht werden, um die Funktionen entsprechend implementieren zu können. Für Saiteninstrumente, die durch Zupfen oder Anschlagen der Saiten gespielt werden, ist es sinnvoll den anfänglichen Zustand der Saite als Eingangssignal für das physikalische Modell zu wählen.

Die Initialisierung der physikalischen Modelle mit geeigneten Werten ist wesentlich für den Klang. Unter anderem dient die Art der Anregung der Saite des echten Instruments als Vorlage für die Erstellung geeigneter Werte, auf die die Auslenkung der Saite am Anfang gesetzt wird. Die wichtigsten Möglichkeiten der Anregung sind in Abbildung 6.1 dargestellt und werden im folgenden kurz beschrieben.

- Die **gezupfte Saite**, die vom Finger, Plektron oder *mizrab* gezogen wird und dann losgelassen wird, verfügt am Anfang ihrer Bewegung über keine Geschwindigkeit oder Energie der Bewegung, sondern nur über Energie der Lage, die die Saite in Richtung

Ruhelage beschleunigt. Es reicht aus, die anfängliche Auslenkung der Saite zu modellieren, die an der gezupften Stelle nach oben gedehnt wird (Smith 1993, S. 14-15).

- Die **angeschlagene Saite** verfügt am Anfang ihrer Bewegung über keine Energie der Lage, da ihre Auslenkung an allen Stellen 0 ist. Durch den Impuls des anschlagenden Mechanismus wird die getroffene Stelle in Bewegung versetzt. Die Energie überträgt sich rasch auf alle beweglichen Teile der Saite. In Modellen, wo die Geschwindigkeit als Größe zugänglich ist, kann der Impuls modelliert werden, indem die Geschwindigkeit an der Stelle oder den Stellen des Einschlages auf entsprechende Werte gesetzt wird (Smith 1993, S. 16). Bei Modellen, wo die Geschwindigkeit nicht als editierbare Größe verfügbar ist, können die Effekte des Einschlages auf die Auslenkung der Saite nachgeahmt werden, indem die resultierende Form der Auslenkung als Anfangswert für die Auslenkung herangezogen wird (siehe Abbildung 6.1b unten).
- **Rauschen** wurde ursprünglich von Karplus und Strong (1983) in dem nach ihnen benannten Algorithmus zur Synthese der gezupften Saite als Anregungssignal verwendet und es ist bei den meisten Modellen eine interessante Art der Anregung. Durch die Resonanzeigenschaften der Modelle entsteht aus dem Rauschen in kürzester Zeit ein harmonischer Klang. Durch das Geräusch zu Beginn hat der Klang einen perkussiven Einschwingvorgang.
- **Andere Arten** der Anregung werden von Jaffe und Smith in Anlehnung an die Idee von Karplus und Strong vorgeschlagen: ein harmonisch üppiger Klang, ein solcher Klang gemischt mit Rauschen oder tiefpassgefiltertes Rauschen. Außerdem sei eine weitere Möglichkeit, bei einem durch Rauschen erzeugten Klang, das Signal der ersten paar Durchläufe zu verwerfen, um einen sanfteren Einschwingvorgang zu erzielen (1983, S. 60).

Als Anregung für die Sitar wurde die beschriebene Nachbildung des Zupfvorganges gewählt, da die zum Vergleich aufgenommenen Töne auf die gleiche Weise entstanden sind.

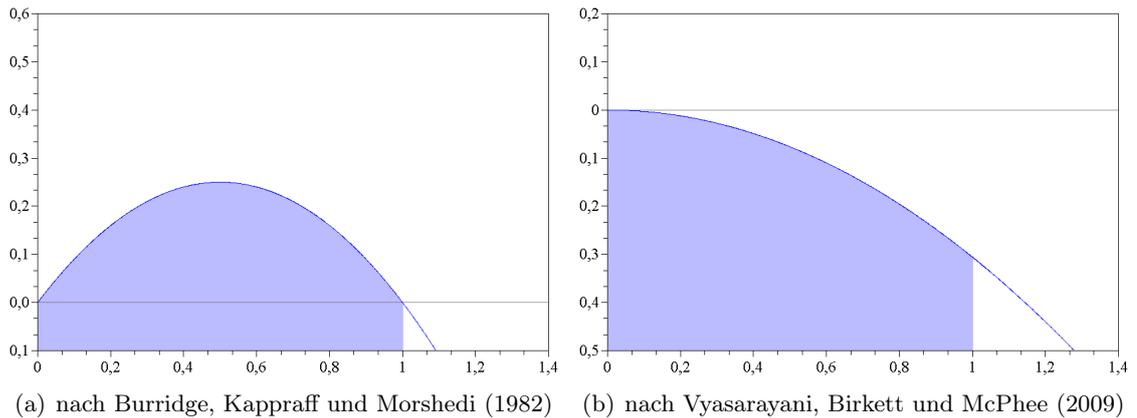
### 6.4.4 Die Form des Steges

Die Modelle sollen einen Steg jeder beliebigen Form berücksichtigen können. Da die Wechselwirkung mit dem Steg der Sitar die kennzeichnende Klangfarbe verleiht, ist die naturgetreue Modellierung des Steges von hoher Bedeutung. In den Arbeiten zur Schwingung der Sitar saite werden zwei verschiedene Stegformen beschrieben. Beide Formen sind Parabeln mit unterschiedlichen Parametern (siehe Abbildung 6.2).

Burridge, Kappraff und Morshedi (1982) verwenden in ihren Rechnungen eine Gleichung der Form (S. 1232)

$$y = \frac{(x - a)(b - x)}{b - a},$$

## 6 Die Planung des physikalischen Modells



**Abbildung 6.2:** Die unterschiedlichen Stegformen. Die waagrechte Linie ist die Ruhelage der Saite. Die Höhe wird in mm angegeben und die Breite des Steges ist auf 1 normiert.

wobei  $a$  und  $b$  die beiden Nullstellen der Kurve sind, zwischen denen sie positiv ist.

In den Modellen soll der Steg immer links sein, daher wird  $a = 0$  vorausgesetzt. Die Länge des Steges sei in den Kurven auf 1 normiert, daher gilt  $b = 1$ . Die Gleichung der resultierenden Kurve lautet

$$y = -x^2 + x.$$

Die Verfasser machen in ihrer Arbeit keine Angaben zur Höhe des Steges, diese wird daher unter Orientierung an der Höhe des anderen Steges festgelegt.

Vyasarayani, Birkett und McPhee (2009) wählen einen weniger abstrakten Zugang und geben Abmessungen für den Steg an, der laut ihnen parabolisch gekrümmt ist. Aus den Abmessungen lässt sich eine Formel für die Kurve des Steges ableiten. Diese lautet, wieder mit der genormten Länge 1,

$$y = cx^2,$$

wobei

$$c = -\frac{13 \cdot 23^2}{150^2}.$$

Die Formel ergibt die Steghöhe in Millimeter, da sich die Konstante  $c$  auf Abmessungen in Millimeter bezieht. Die Kurve beginnt auf der Höhe 0, was der Ruhelage der Saite entspricht, und wird dann negativ. Sie weist nicht die Wölbung auf, wie die Stegform von Burr ridge, Kappraff und Morshedi (1982).

Der Bereich des Steges, der unter dem schwingenden Bereich der Saite verläuft, hat ungefähr  $\frac{1}{30}$  der Saitenlänge. In den Modellen wird der gewählte Steg auf diese Länge gestreckt.

### 6.4.5 Die Verstärkung des Resonanzkörpers

Die Eigenschaften des Resonanzkörpers sollen am Schluss auf das berechnete Signal der Saite  $s(t)$  angewendet werden können. Dazu wird die Übertragungsfunktion mittels inverser Fouriertransformation in den Zeitbereich übertragen:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(\omega))$$

Um  $h(t)$  nun auf das Signal der Saite anzuwenden, bedient man sich der Faltung (Karjalainen und Smith 1996, S. 3), so dass für das Ausgangssignal  $a(t)$  gilt

$$a(t) = s(t) * h(t).$$

Bei längeren Impulsantworten lohnt es sich jedoch, die Berechnung im Frequenzbereich durchzuführen, da dies ab einer gewissen Länge der Signale trotz dem Aufwand der Fouriertransformation schneller ist (S. Smith 1997, Kap. 18). Die Faltung im Zeitbereich entspricht der Multiplikation im Frequenzbereich (Grünbacher 2005, Kapitel 6, S. 16). Die oben stehende Formel wird also zu

$$A(\omega) = S(\omega) \cdot H(\omega),$$

wobei  $A(\omega) = \mathcal{F}(a(t))$  und  $S(\omega) = \mathcal{F}(s(t))$ .

Die Praxis, den Resonanzkörper durch seine Impulsantwort in das Modell einzugliedern, ist sehr weit verbreitet. Einige wenige Beispiele sind: Lambourg und Chaigne (1993), Karjalainen, Laine und Välimäki (1991) oder Karjalainen, Backman und Pölkki (1993).

# 7 Das Masse-Feder-Modell der Sitar

## 7.1 Funktionsweise eines Masse-Feder-Modells

### 7.1.1 Grundlagen

Instrumente lassen sich als Systeme gekoppelter Oszillatoren beschreiben. Bei den Saiteninstrumenten handelt es sich auf der größten Ebene um die Oszillatoren Saite(n) und Resonanzkörper (Fletcher und Rossing 1991, S. 208). Diese Oszillatoren können jedoch auch wieder als Systeme gekoppelter Oszillatoren aufgefasst werden und somit weiter zerlegt werden. Auf diesem Ansatz beruhen Masse-Feder-Modelle.

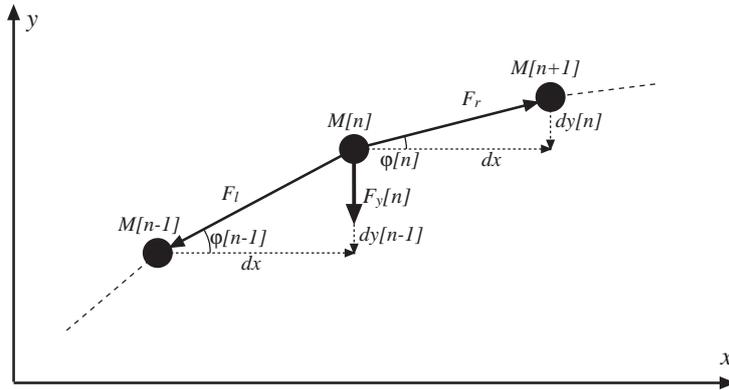
In diesen Modellen werden Körper in eine endliche Anzahl von Massen aufgeteilt, je mehr Massen gewählt werden um ein System zu beschreiben, desto genauer ist die Repräsentation im Modell. Dabei stellt man sich vor, alle Massen seien durch Federn miteinander verbunden, um die Biegsamkeit des Körpers zu berücksichtigen. Die Beziehungen und Bewegungen der durch Federn verbundenen Massen werden mit den Gesetzen der Dynamik beschrieben. Die Kräfte zwischen den Massen dienen als Grundlage für die Berechnung der Beschleunigung der Massen, woraus sich leicht die Geschwindigkeit sowie die Ortskoordinaten der Massen berechnen lassen.

Je nach Art des Modells und gewünschter Genauigkeit kann die Zahl der berücksichtigten Bewegungsrichtungen variieren. Für Saiten können schon Modelle ausreichen, bei denen sich die Massepunkte lediglich entlang einer Richtung bewegen können, für Membranen oder Resonanzkörper ist eine Berechnung der Bewegung in zwei oder drei Dimensionen nötig.

Prinzipiell können alle Körper als Masse-Feder-Modell betrachtet und modelliert werden. Bader (2003) modelliert beispielsweise den kompletten Resonanzkörper einer Gitarre als Masse-Feder-Modell. Die Grenzen bei einer solchen Modellierung sind selten das vorhandene Wissen, sondern eher die Rechenleistung des zur Verfügung stehenden Systems.

### 7.1.2 Berechnung

Um die Bewegung einer Saite zu beschreiben, wird sie in eine möglichst große Anzahl  $N$  Massepunkte geteilt. Auf jeden Massepunkt wirkt eine Kraft, die ihn in Ruhelage bewegt. Die Gesamtheit dieser Kräfte aller Massepunkte bewirkt die Saitenschwingung. Die Kraft, die auf einen Massepunkt wirkt, zieht ihn auf eine Linie mit den benachbarten Massepunkten. Ist diese Lage erreicht, ist die auf den Massepunkt senkrecht wirkende



**Abbildung 7.1:** Die Grundlagen der Berechnung eines Masse-Feder-Modells

Kraft gleich 0, was jedoch auf Grund seiner Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit der benachbarten Punkte nicht zum Stillstand führen muss. Dieses Verhalten der Saite kann sehr gut mit gekoppelten Pendeln nachgeahmt werden (vgl. Fletcher und Rossing 1991, S. 33-34).

Die auf die einzelnen Massepunkte wirkende Kraft steht in direktem Verhältnis zur Saitenspannung. Die Punkte einer Saite würden sich bei Biegung der Saite nicht in ihre Ausgangslage zurückbewegen, wenn die Saite nicht gespannt wäre, es sei denn bestimmte Materialeigenschaften ließen nicht jede Form der Biegungen zu.

Die Spannkraft  $T$  wirkt entlang der Saite, daher kann man sich die Kräfte, die auf einen Massepunkt wirken, als Zug in Richtung der beiden benachbarten Massepunkte vorstellen. Dieser Zug wird durch die Kräfte  $F_l$  und  $F_r$  verkörpert. Die waagrechten Komponenten der beiden Kräfte sind immer entgegengesetzt und gleichen sich nahezu vollständig aus, da die Auslenkung der Saite gering ist und dadurch auch die Differenz der Winkel  $\varphi$  ziemlich klein ist. Die senkrechten Komponenten müssen nicht entgegengesetzt wirken und sind für die Schwingung wesentlich wichtiger. Die waagrechte Bewegung der Massepunkte kann daher gegenüber der senkrechten Bewegungsrichtung vernachlässigt werden (eine ausführlichere Begründung folgt in 7.2.2)

Aus der Kraft wird leicht die Beschleunigung, dann die Geschwindigkeit und schließlich die Auslenkung berechnet. Der Ausgangspunkt des Algorithmus für die Berechnung der Auslenkung der Massepunkte einer Saite sind also die senkrechten Kraftkomponenten, die auf die einzelnen Massepunkte wirken. Die senkrechte Kraftkomponente  $F_y[n]$ , die auf den Massepunkt  $M[n]$  wirkt ist

$$F_y[n] = T \cdot (\sin \varphi[n] - \sin \varphi[n - 1]). \tag{7.1}$$

Die Sinusfunktion kann durch die Tangensfunktion ersetzt werden, da  $dy$  sehr klein ist und Sinus und Tangens kleiner Winkel annähernd gleich sind. Der Tangens des Winkels  $\varphi[n]$

$$\tan \varphi[n] = dy[n]/dx \quad (7.2)$$

wird also zur Berechnung der oben stehenden Formel verwendet. Daher gilt für die senkrechte Kraftkomponente, die auf den Punkt  $M[n]$  wirkt

$$F_y[n] = T \cdot \left( \frac{dy[n]}{dx} - \frac{dy[n-1]}{dx} \right). \quad (7.3)$$

Den einfachen Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung beschreibt das zweite Newtonsche Gesetz Kraft = Masse · Beschleunigung. Daher folgt für die Berechnung der Beschleunigung  $a[n]$  des Massepunktes  $M[n]$  mit der Masse  $m$

$$a[n] = \frac{F_y}{m}. \quad (7.4)$$

Die Änderung von Geschwindigkeit  $v[n]$  und Auslenkung  $y[n]$  werden nach den Formeln der Dynamik berechnet und zu den vorherigen Werten  $v_0[n]$  und  $y_0[n]$  addiert:

$$v[n] = v_0[n] + a[n] \cdot dt \quad (7.5)$$

$$y[n] = y_0[n] + v[n] \cdot dt \quad (7.6)$$

Die Berechnung der wirkenden Kraft, Beschleunigung, Geschwindigkeit und Auslenkung muss für jeden Punkt in jedem Zeitintervall durchgeführt werden.

### 7.1.3 Physikalischer Bezug von Masse-Feder-Modellen

Durch die Verwendung der physikalischen Formeln können die berechneten Größen eindeutigen Dimensionen zugeordnet werden, wodurch der Bezug zur physikalischen Welt klar ist. Die vorgegebenen Größen für das Modell sind auch physikalische Werte. Zur Berechnung der Saite werden direkt die Masse der Saite  $m_S$ , die Saitenspannkraft  $T$  und die Länge der Saite  $l$  herangezogen. Die Masse wird gleichmäßig auf die Massepunkte verteilt ( $m = m_S/N$ ), die gleichmäßig entlang der Saite verteilt werden, also im Abstand  $dx = l/(N - 1)$  liegen.

Die Tonhöhe steht in direktem Zusammenhang zu den vorgegebenen physikalischen Werten, falls Berechnungsintervall  $dt$  und Abtastfrequenz  $f_A$  gleich groß sind. Die Tonhöhe lässt sich mit Hilfe der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen auf der Saite (laut Smith 1993, S. 2-3)

$$c = \sqrt{\frac{T \cdot l}{m_S}} \quad (7.7)$$

aus der Formel (Jaros, Nussbaumer und Nussbaumer 1992, S. 108)

$$f_0 = \frac{c}{2l} \quad (7.8)$$

berechnen.

So führt eine Verdoppelung der Saitenlänge zur Verdoppelung der Grundfrequenz. Der Wert von  $c$  ändert sich in diesem Fall nicht, da die gesamte Saitenmasse  $m_S$  auch erhöht werden muss, wenn die Saite als länger angenommen wird und sich die Materialeigenschaften nicht ändern sollen. Die Erhöhung der Spannkraft bewirkt eine Steigerung der Grundfrequenz, wobei hier die Änderung auf  $c$  zurückzuführen ist.

#### 7.1.4 Schwierigkeiten beim Entwurf von Masse-Feder-Modellen

##### Rechenaufwand

Eine geeignete Anzahl an Massepunkten ist wesentlich für die Qualität des Modells. Schon bei Systemen mit wenigen, durch Federn gekoppelten Massen kann man Ähnlichkeiten zur Saitenschwingung feststellen. Die Anzahl der möglichen Schwingungsmoden nimmt mit der Anzahl der Massen zu. Jede zusätzliche Masse ermöglicht einen neuen Modus, wenn die Massen nur in einer Richtung beweglich sind. Können sich die Massen in zwei oder drei Richtungen bewegen, kommen je Masse zwei oder drei Moden dazu. Je mehr Massen das Modell hat, desto ähnlicher wird die Bewegung einer schwingenden Saite (Fletcher und Rossing 1991, S. 33-34).

Um eine möglichst genaue Beschreibung zu erzielen, muss daher ein Modell mit möglichst vielen Massepunkten erstellt werden. Dies bringt auch die Notwendigkeit eines kleinen Zeitintervalls der Berechnung mit sich, um die im nächsten Punkt beschriebenen Instabilitäten zu vermeiden. Wird die Anzahl der Massepunkte erhöht, wird der Rechenaufwand also nicht nur größer, weil es mehr Punkte zu berechnen gibt, sondern weil eine größere Anzahl an Punkten auch mehr Berechnungen je Zeiteinheit erfordern. Für die Berechnung der Auslenkung eines Punktes sind mehrere Rechnungen nötig, wobei Multiplikationen, die im Vergleich zu Additionen zeitintensiver sind, nicht vermieden werden können. Saitenmodelle gehören hier noch zu den schnellsten Berechnungen, lassen sie sich doch meistens auf die Bewegung in einer einzigen Dimension reduzieren, da oft die Beschreibung der Scherwellen ausreicht. Modelle von Resonanzkörpern, schwingenden Membranen oder Saiten, bei denen beispielsweise Längswellen eine Rolle spielen, lassen sich in dieser Hinsicht nicht vereinfachen. Der Rechenaufwand bei Masse-Feder-Modellen ist daher in der Regel beträchtlich.

##### Instabilität durch Diskretisierung

Die Diskretisierung findet nicht nur auf der Ebene des Raumes statt, sondern auch auf der Ebene der Zeit: Die Bewegungen aller Massen werden immer nach einem gewissen, möglichst kleinen, Zeitintervall berechnet. Die Wahl eines geeigneten Zeitintervalls ist

besonders kritisch und hängt nicht nur von der gewünschten Abtastrate ab, da zu große Intervalle neben Ungenauigkeit auch Instabilität bewirken können. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten der Massepunkte immer auf Grundlage einer Augenblicksaufnahme berechnet werden. Diese Werte sind daher eigentlich nur für genau diesen Augenblick gültig, sie werden aber wegen der diskreten Berechnung auf ein ganzes Zeitintervall angewendet. Ist das Zeitintervall im Verhältnis zu den berechneten Größen zu lang, kann es sein, dass die Massepunkte über ihr Ziel hinauschießen, da eine hohe Geschwindigkeit und Beschleunigung über einen zu langen Zeitraum hinweg angewendet werden. Das System schaukelt sich zur Instabilität auf.

## 7.2 Das Masse-Feder-Modell der Sitar saite

### 7.2.1 Der Nutzen eines Masse-Feder-Modells

Das erste Modell, das zum Beschreiben der Sitar saite im Rahmen dieser Arbeit erstellt wurde, war ein Masse-Feder-Modell. Obwohl dieses Modell entscheidende Nachteile hat, eignet es sich sehr gut als Grundlage und Anstoß für weitere Untersuchungen oder andere Modelle, da die Implementierung sehr einfach ist, das Modell jedoch trotzdem sehr flexibel eingesetzt und sehr schnell abgeändert werden kann.

### 7.2.2 Einfache Masse-Feder-Modelle

Die Saite wurde als Kette von Massepunkten implementiert, die sich nur in einer Richtung, nämlich senkrecht zur Verbindungsrichtung, bewegen können. Gegenüber mehrdimensionalen Modellen wird ein solches Modell in dieser Arbeit als „einfaches Masse-Feder-Modell“ bezeichnet. Ein Modell dieser Art ist wesentlich schneller, dafür besteht keine Möglichkeit Längswellen im Modell darzustellen.

Es handelt sich aus folgenden Gründen um eine zulässige Vereinfachung:

1. Scherwellen bewirken eine stärkere Veränderung der Kraft am Steg als Längswellen. Die durch Längswellen bewirkte maximale Veränderung ist ungefähr 19mal kleiner als die durch Scherwellen bewirkte maximale Veränderung.

Die folgende Berechnung mit ihren Angaben basiert auf Fletcher und Rossing 1991, S.209-210, mit korrigierter Angabe für das Elastizitätsmodul  $E$  aus der 2. Auflage (1998), ist jedoch ohne Vereinfachung durchgeführt.

Für eine Saite mit der Länge  $L_0 = 0,65\text{m}$ , dem Querschnitt  $A = 0,36\text{mm}^2$  und dem Elastizitätsmodul  $E = 5 \cdot 10^9\text{N/m}^2$ , die bei einem Fünftel ihrer Länge ( $b = 1/5$ ) nahe des Steges gezupft wird und dabei eine anfängliche Auslenkung von  $d = 3\text{mm}$  erfährt, lässt sich aus dem Satz von Pythagoras die Veränderung der Saitenlänge  $dL$  berechnen.

$$dL = \sqrt{(b \cdot L_0)^2 + d^2} + \sqrt{[(1-b) \cdot L_0]^2 + d^2} - L_0; \quad (7.9)$$

Durch die veränderte Länge der Saite ändert sich auch die Spannkraft, welche mit folgender Formel berechnet werden kann:

$$T_1 = T_0 + dT = T_0 + \frac{E \cdot A}{L_0} \cdot dL \quad (7.10)$$

Der Winkel, in dem die Saite zum Steg steht ist

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{d}{b \cdot L_0}\right)$$

Bei der besprochenen Anfangsauslenkung der Saite können die auf den Steg senkrecht wirkende Kraft  $F_{y1}$  und die parallel zur Ruhelage der Saite wirkende Kraft  $F_{x1}$  berechnet werden. Dazu stellt man sich vor, dass die veränderte Spannkraft  $T_1$  die Saite im Winkel  $\theta_1$  vom Steg weg zieht. Die Kraftkomponenten sind daher entsprechend den Gesetzen der Trigonometrie

$$F_{y1} = \sin(\theta_1) \cdot T_1 \quad (7.11)$$

und

$$F_{x1} = \cos(\theta_1) \cdot T_1, \quad (7.12)$$

wobei hier keine Vereinfachung wie im Buch vorgenommen wird.

Geht man davon aus, dass die entlang der Saite wirkende Kraftkomponente bei Ruhelage der Saite  $F_{x0}$  der ursprünglichen Spannung entspricht und die senkrecht wirkende Komponente bei Ruhelage  $F_{y0} = 0$  ist, da auch die Auslenkung 0 ist, kann man die Spitzenwerte der Veränderung der Kräfte mit

$$dF_y = F_{y1} - F_{y0} = F_{y1} \quad (7.13)$$

und

$$dF_x = F_{x1} - F_{x0} = F_{x1} - T_0 \quad (7.14)$$

berechnen. Ihr Verhältnis  $dF_y/dF_x$  ist mit den angegebenen Daten 19, 34. Scherwellen bewirken also fast zwanzigfach stärkere Schwankungen der Kraft am Steg als Längswellen.

- Die Amplituden der Scherwellen und Längswellen der Kraft unterscheiden sich entsprechend stark. Die Scherwellen besitzen laut Fletcher und Rossing (1991, S. 210) eine ungefähr 40mal größere Amplitude. Dieser Wert passt zu der überschlagsmäßigen Überlegung, dass die oben genannte maximale senkrechte Kraft sowohl nach

oben, als auch nach unten auf den Steg wirken kann, während die entlang der Saite wirkende maximale Kraft nicht kleiner als  $T_0$  werden kann<sup>1</sup>.

3. Die senkrecht auf den Steg wirkende Kraft wird viel effizienter auf den Resonanzkörper übertragen (Fletcher und Rossing 1991, S. 210). Der Grund dafür liegt wahrscheinlich daran, dass der Steg senkrecht mit der Decke des Resonanzkörpers besser mitschwingen kann, während er in der Richtung, die parallel zur Saite verläuft, als vergleichsweise starr gelten kann.

### 7.2.3 Implementierung

Eine Saite, die mit der Spannkraft  $T$  gespannt ist, wird in  $N$  Massepunkte geteilt, deren Werte im Datenfeld `massepunkt[0..N-1]` gespeichert werden. Jeder Massepunkt wird durch die Werte Auslenkung  $y$ , Geschwindigkeit  $v$  und Beschleunigung  $a$  beschrieben. Die Werte für die Masse des Punktes  $m$  und den Abstand zwischen jeweils zwei Punkten  $dx$  werden für alle Massepunkte als gleich angenommen und sind daher nicht Teil dieser Datenfeldstruktur. Eine unregelmäßige Massenverteilung oder räumliche Teilung der Saite ist zwar ohne großen Programmieraufwand möglich, aber wenn die Werte für  $m$  und  $dx$  als für alle Massepunkte gleich angenommen werden, lässt sich das Modell beschleunigen. Nach jeweils einem Zeitintervall der Länge  $dt$  werden die für die Bewegung der Punkte relevanten Werte berechnet. In einer ersten Schleife werden für alle Massepunkte, außer für die äußersten `massepunkt[0]` und `massepunkt[N-1]`, die als starr angenommen werden, die Beschleunigungen  $a[i]$  anhand der senkrecht wirkenden Kräfte berechnet, so wie es in Abschnitt 7.1.2 gezeigt wurde.

```
for i:=1 to N-2 do begin
  y1:=massepunkt[i-1].auslenkung - massepunkt[i].auslenkung;
  y2:=massepunkt[i+1].auslenkung - massepunkt[i].auslenkung;
  wirkkraft := k * (y2/dx + y1/dx);
  massepunkt[i].a:=wirkkraft / m;
end;
```

Danach werden erst die Geschwindigkeiten  $v[i]$  berechnet:

```
for i:=1 to N-2 do
  massepunkt[i].v:=massepunkt[i].v + massepunkt[i].a * dt;
```

und schließlich die Auslenkungen für jeden Punkt:

```
for i:=1 to N-2 do
```

---

<sup>1</sup>Diese Überlegung ist für die ideale Saite eigentlich nur dann richtig, wenn die Saite genau in der Mitte gezupft wird, da die Saite ansonsten, sobald sie nach unten schwingt, nicht in dem gleichen Winkel  $\theta_1$  zum Steg steht. Für dispersive Saiten ist diese Überlegung jedoch aussagekräftiger als die Berechnungen im Buch, da sich die Form der schwingenden Saite stark verändert und der Schwingungsbauch, egal wo die Saite gezupft wurde, mit der Zeit zur Mitte wandert (Lieber 1992, S. 254).

```

massepunkt[i].auslenkung:=massepunkt[i].auslenkung
+ massepunkt[i].v * dt;

```

Dieses Verfahren lässt sich ein wenig beschleunigen, da viele Multiplikationen zu einer einzigen Rechnung außerhalb der Schleife zusammengefasst werden können, da ja  $m$  und  $dx$  konstant sind. Auch muss  $y1$  nicht jedesmal neu berechnet werden, da der gleiche Wert ja im vorhergehenden Durchgang nur mit umgekehrtem Vorzeichen für  $y2$  berechnet wurde. Die Beschleunigung wird als Änderung der Geschwindigkeit aufgefasst und nicht mehr als eigene Größe berechnet.

```

c:= (dt * k) / (dx * m);
y2:=massepunkt[0+1].auslenkung - massepunkt[0].auslenkung;

for i:=1 to N-2 do begin
  y1:=-y2;
  y2:=massepunkt[i+1].auslenkung - massepunkt[i].auslenkung;
  massepunkt[i].v:= self.massepunkt[i].v + c * (y2 + y1);
end;

for i:=1 to N-2 do
  massepunkt[i].auslenkung:=massepunkt[i].auslenkung
  + massepunkt[i].v * dt;

```

#### 7.2.4 Die Modellierung des flachen Steges

Die Modellierung der Wechselwirkung zwischen Saite und Steg erfolgt auf ziemlich direktem Wege. Nach der Berechnung der Auslenkungen wird sichergestellt, dass die Werte im Bereich des Steges die Grenze, welche durch den selbigen vorgegeben wird, nicht überschreiten. Hat ein Punkt die Grenze überschritten, wird seine Auslenkung auf den Grenzwert der betreffenden Stelle und seine Geschwindigkeit auf null gesetzt, da diese als Impuls an den Steg verloren ging.

#### 7.2.5 Anfangswerte

Das Zupfen der Saite wird dadurch nachgeahmt, dass die Auslenkungen der Massepunkte auf Werte gesetzt werden, die der Form der nach oben gezogenen Saite entsprechen (siehe 6.4.3). Geschwindigkeit und Beschleunigung sind im Augenblick des Loslassens null. Erst durch die Elastizität der Saite werden die einzelnen Punkte in Bewegung gesetzt.

Da im Masse-Feder-Modell auch die Geschwindigkeit und Beschleunigung als Größen zur Verfügung stehen, sind viele weitere Arten der Anregung einfach zu modellieren. Zum Modellieren einer angeschlagenen Saite, reicht es, die Impulsübertragung nachzuahmen, indem die Geschwindigkeiten der Massepunkte an der geschlagenen Stelle auf einen bestimmten Wert gesetzt werden (siehe auch Abbildung 6.1b).

### 7.2.6 Klangausgabe

Die Schwingung der Saite wird erst durch den Resonanzkörper zu einer hörbaren Schwingung verstärkt. Bei akustischen Saiteninstrumenten wird diese Schwingung in der Regel vom Steg auf den Resonanzkörper übertragen, da die schwingende Saite mit einer veränderlichen Kraft auf den Steg wirkt. Das Ausgangssignal ist also proportional zur wirkenden Kraft (Cuzzucoli und Lombardo 1999, S. 54; Lambourg und Chaigne 1993, S. 448). Wie unter 7.2.2 begründet wurde, wird nur die senkrechte Kraft berücksichtigt, auch weil diese am effizientesten auf den Resonanzkörper übertragen wird (Fletcher und Rossing 1991, S. 210; siehe auch oben). Die senkrecht auf den Steg wirkende Kraft ist proportional zur Beschleunigung, die die Saite an dieser Stelle erfährt (Kraft = Masse · Beschleunigung) und kann daher von einem oder einigen Massepunkten nahe des Steges übernommen werden. Für diese Punkte muss die Beschleunigung daher explizit berechnet und gespeichert werden, was durch wenige Veränderungen auch im schnelleren Algorithmus leicht umzusetzen ist. Wird die wirkende Kraft als Mittelwert mehrerer Beschleunigungen berechnet, handelt es sich um ein Tiefpass-gefiltertes Signal, da sich Schwingungen höherer Frequenzen bei der Bildung des Durchschnitts über einen Bereich der Saite gegenseitig auslöschen (näheres zum wandernden Durchschnitt in Abschnitt 9.1.9, bei der Dämpfung).

## 7.3 Akustische Analyse

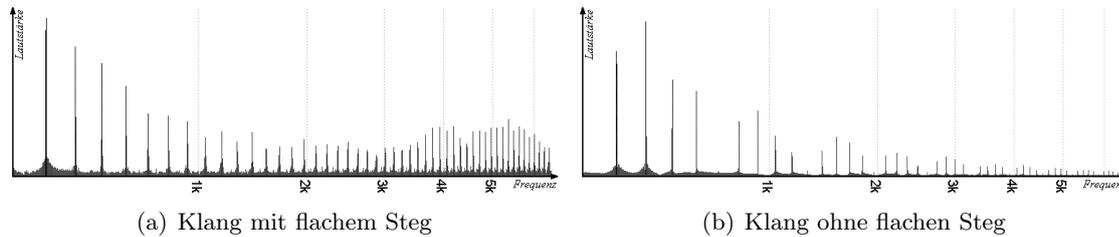
### 7.3.1 Das analysierte Signal

Mit den richtigen Einstellungen klingt der mit dem Masse-Feder-Modell erzeugte Klang ähnlich wie die gezupfte Saite einer Sitar. Wichtig ist es, ein Modell mit entsprechend hoher Zeit- und Raumaufösung zu erstellen. Das für die Erzeugung der im folgenden analysierten Klänge verwendete Modell hatte 320 Massepunkte. Das Berechnungsintervall war 176400Hz, was der vierfachen Abtastrate von 44100Hz entsprach, weshalb nach jeweils vier Berechnungsintervallen immer ein Wert für das Ausgangssignal entnommen wurde. Die Saite wurde bei einem Fünftel ihrer Länge 10mm nach oben ausgelenkt, um Zupfen zu simulieren. Als Form des Steges wurde die von Vyasarayani, Birkett und McPhee (2009) vorgeschlagene Kurve gewählt (siehe 6.4.4).

Die Werte für Länge, Masse und Spannkraft basieren auf Woodhouse 2004, S. 947. Die Saitenlänge wurde jedoch mit  $2^{2/12}$  multipliziert um die Saite einen Ganzton tiefer auf c zu stimmen. Die so veränderte Länge war 0,73m, die Masse 1,42g und die Spannkraft 71,2N. Aus den Formeln 7.7 und 7.8 lässt sich die zu erwartende Tonhöhe mit rund 131Hz berechnen.

Die Beurteilung des Höreindrucks lässt sich mit Analysen des Klanges untermauern. Der errechnete Klang wurde für die Analysen nicht mit der Impulsantwort des Resonanzkörpers gefaltet, damit höhere Frequenzen besser zu erkennen sind. Dazu wird das Signal auf die unter 4.3.3 vorgestellten Merkmale eines Sitarklages überprüft.

### 7.3.2 Ungültigkeit des Young-Helmholtz Gesetzes



**Abbildung 7.2:** Frequenzspektrum zweier mittels Masse-Feder-Modell simulierter Klänge. Die Modelle wurden mittels Zupfen bei einem Fünftel angeregt.

Abbildung 7.2 zeigt zwei Klänge, die mit dem Masse-Feder-Modell erzeugt wurden. Die Grundfrequenz beider Töne liegt bei 131Hz. Die Anregung erfolgte durch die Simulation einer Zupfbewegung bei einem Fünftel der Saite. In dem Klang, der ohne die Simulation der Wechselwirkung zwischen Saite und Steg berechnet wurde, fehlt daher jeder 5. Teilton. Der mit flachem Steg berechnete Klang enthält alle Teiltöne. Die Simulation der Wechselwirkung hat in dieser Hinsicht also die bei der echten Saite beobachtete Wirkung.

### 7.3.3 Abwärts gleitende Formanten

Auf Abbildung 7.3 sind die abwärts gleitenden Formanten sehr gut zu erkennen, sogar besser als auf dem Spektrogramm des Sitartones aus Abschnitt 4.3.3. Der Grund dafür liegt darin, dass der hier analysierte Ton nicht mit der Übertragungsfunktion des Resonanzkörpers gefaltet wurde und daher auch in den höheren Lagen laute Teiltöne besitzt.

Die Abbildungen beweisen auch, dass es sich um einen sehr obertonreichen Klang handelt. Der ohne flachen Steg erzeugte Klang (siehe Abbildung 7.2b) weist ein viel dumpferes Spektrum auf.

### 7.3.4 Nichtlinearität

Schon die gleitenden Formanten beweisen im Prinzip die Nichtlinearität des Klanges, da es sich bei diesen um Energieübertragung handelt, die von höheren Teiltönen in niedrigere fließt. Die beiden Bilder in Abbildung 7.4 zeigen den Teiltonverlauf von Tönen, die mit dem Modell erzeugt wurden. Der Ton mit flachem Steg weist die unter 4.3.3 besprochene Nichtlinearität auf, während die Teiltöne auf dem anderen Bild nach der anfänglichen Anregung nicht lauter werden. Die Wechselwirkung zwischen Steg und Saite hat im Masse-Feder-Modell den gleichen nichtlinearen Effekt, wie er bei der echten Saite beobachtet wurde.

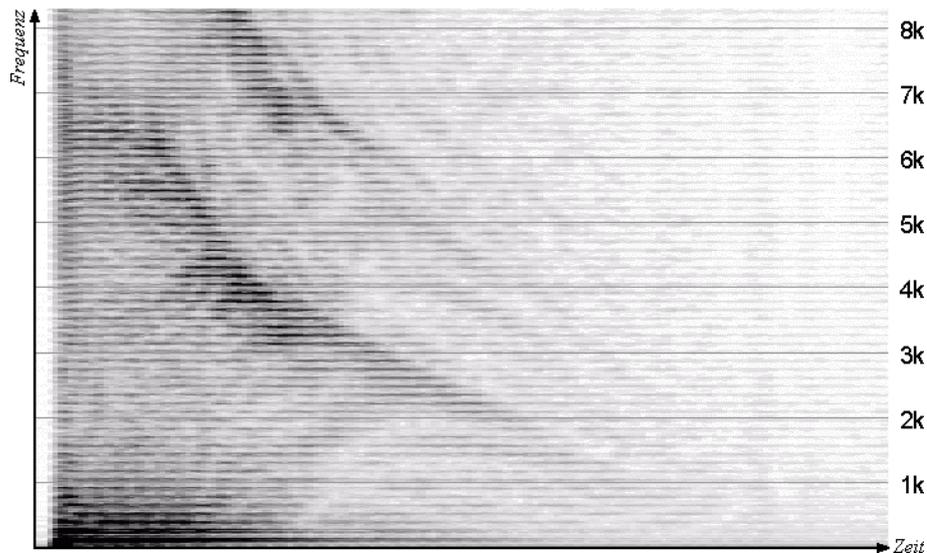


Abbildung 7.3: Spektrogramm eines Tones mit flachem Steg

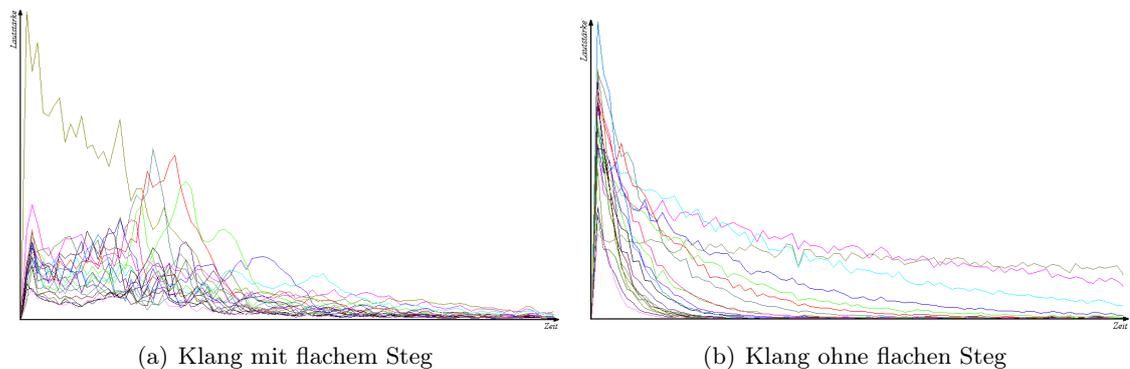
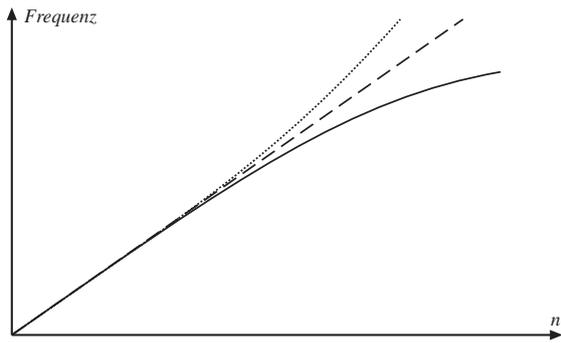


Abbildung 7.4: Teiltonverlauf zweier mittels Masse-Feder-Modell simulierter Klänge

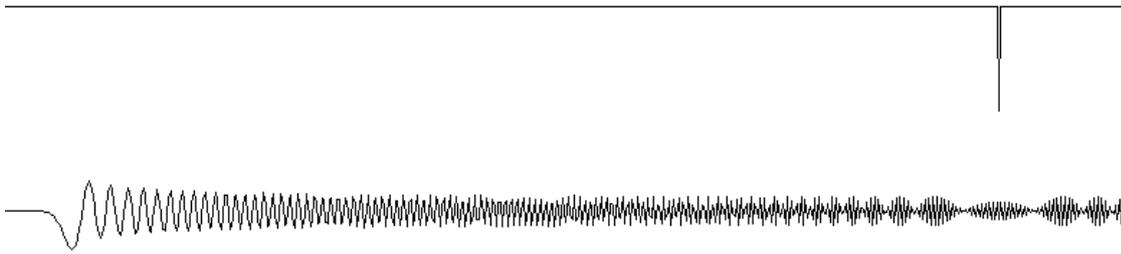
### 7.3.5 Dispersion

Das einfache Masse-Feder-Modell weist ganz deutliche Dispersion auf. Die Dispersion in einem Masse-Feder-Modell hat jedoch einige Eigenheiten, die schnell zum Problem werden können. Grundsätzlich gilt: sie ist nicht steuerbar und unvermeidlich. Das Modellieren einer idealen Saite ist also mittels Masse-Feder-Modell nicht möglich. Die von Burrige, Kappraff und Morshedi (1982) getroffenen Aussagen zur Bewegung der Saite einer Sitar lassen sich daher nicht auf das Masse-Feder-Modell anwenden, da die Dispersion ein ureigenes Merkmal eines einfachen Masse-Feder-Modells ist. Auch das Anpassen der Dispersion an die Eigenschaften eines Materials ist in einem einfachen Masse-Feder-Modell nicht möglich.

In Hinblick auf die Dispersion gibt es eine Abweichung zwischen Wirklichkeit und Modell. Wie in Abschnitt 4.2.3 erläutert, bewirkt die Dispersion in einer echten Saite eine Spreizung des Teiltonspektrums. Die Frequenz der höheren Obertöne ist kein Vielfaches



**Abbildung 7.5:** nach Fletcher und Rossing 1991, S. 62. Die Teiltonfrequenz als Funktion der Nummer eines Teiltones  $n$ : strichliert: ideale Saite; punktiert: Saite mit Biegesteifheit; durchgehende Linie: gleichmäßig mit Massen belastete Saite.



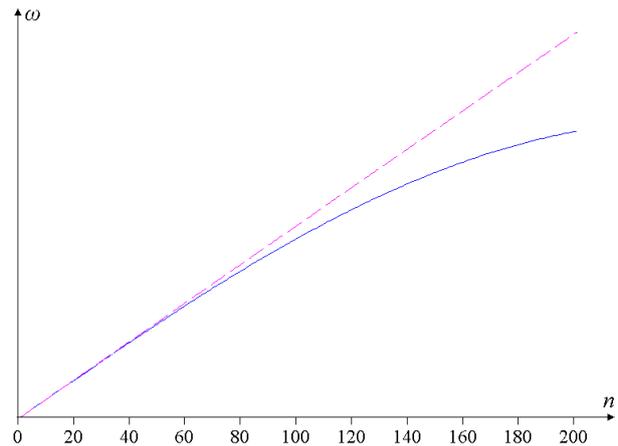
**Abbildung 7.6:** Ausschnitt einer Saite eines Masse-Feder-Modells. Die Saite wird mit einem Impuls angeregt (oben), der sich aufgrund der Dispersion während seiner Fortbewegung rasch auffächert (unten). (Die Amplitude des Impulses wurde für die Darstellung verkleinert)

der Grundfrequenz des Tones, sondern mit steigender Nummer des Teiltones immer ein wenig höher als in einem harmonischen Spektrum zu erwarten wäre, denn die Wellen höherer Teiltöne sind schneller als die der niedrigeren (Lieber 1992, S. 253). Das Verhältnis zwischen der Nummer eines Teiltones  $n$  und seiner Frequenz ist nicht linear (siehe die obere, punktierte Linie in Abbildung 7.5).

Bei einer mit punktförmigen Massen gleichmäßig belasteten Saite tritt eine andere Dispersion auf: Die Wellen der tiefen Teiltöne wandern schneller, das Teiltonspektrum wird also nicht gespreizt, sondern mit zunehmender Frequenz zusammengefasst (siehe die untere, durchgehende Linie in Abbildung 7.5). Die Nichtlinearität im Verhältnis zwischen der Nummer des Teiltones und seiner Frequenz ist sozusagen das Umgekehrte als im Falle der biegesteifen Saite.

Dies zeigt auch Abbildung 7.6. Ein Masse-Feder-Modell einer einfachen Saite wird mit einem Impuls in der Mitte der Saite angeregt (oben). Der Impuls breitet sich in beide Richtungen entlang der Saite aus (unten). Aufgrund der Dispersion belasteter Saiten wandern die Wellen der tiefen Frequenzen schneller die Saite entlang.

Um dieses Problem zu lösen und die Schwingung der Saite des einfachen Masse-Feder-Modells der Schwingung einer idealen Saite anzugleichen, müsste die Anzahl der Massepunkte drastisch erhöht werden. Fletcher und Rossing (1991, S. 62) geben als Formel für die Kreisfrequenz  $\omega$  des  $n$ ten Teiltons der mit gleichmäßig verteilten Massen belasteten



**Abbildung 7.7:** Kreisfrequenz  $\omega$  als Funktion der Zahl des Teiltones  $n$  zur Darstellung der Dispersion zweier Masse-Feder-Modelle: gestrichelte Linie: 1000 Massepunkte; durchgehende Linie: 100 Massepunkte.

Saite

$$\omega(n) = 2 \cdot \sqrt{\frac{T}{m \cdot a}} \cdot \sin(n \cdot a) \quad (7.15)$$

an, wobei  $T$  die Spannkraft der Saite,  $m$  die Masse eines Massepunktes und  $a$  der Abstand zwischen den Massepunkten ist. Der Ausdruck  $\sin(n \cdot a)$  bewirkt die Nichtlinearität im Verhältnis zwischen  $n$  und  $\omega$ . Der Sinus eines sehr kleinen Wertes ist ungefähr gleich diesem Wert. Verringert man den Abstand zwischen den einzelnen Massepunkten also so stark, dass gilt

$$\sin(n \cdot a) \approx n \cdot a, \quad (7.16)$$

kann man die Dispersion verringern. Die Massepunkte sind gleichmäßig über die Saitenlänge verteilt. Der einzige Weg den Abstand zwischen ihnen zu verringern, ist also die Anzahl der Massepunkte zu erhöhen. Abbildung 7.7 zeigt die Kreisfrequenz  $\omega$  wieder als Funktion der Zahl des Teiltones  $n$ . Die Daten für die berechnete Saite stammen aus Woodhouse 2004, S. 947, und entsprechen der hohen E-Saite einer Gitarre. Die Daten in Woodhouse basieren auf „*D’Addario Pro Arté ‘Composites, hard tension’*“ Nylonsaiten.

Die entsprechenden Werte waren Länge der Saite  $l = 0,65\text{m}$ , Masse der Saite  $M_S = 0,247\text{g}$  und Spannkraft  $T = 70,3\text{N}$ . Die Werte  $a$  und  $m$  für die Formel waren  $a = l/N$  bzw.  $m = M_S/N$ , wobei  $N$  die Anzahl der Massepunkte ist. Für die Berechnung wurde einmal ein Modell mit  $N = 100$  Massepunkten angenommen (durchgehende Linie) und einmal mit  $N = 1000$  (strichlierte Linie).

Obwohl die Dispersion eingeschränkt werden kann, kann sie nicht vermieden werden. Vor allem bei hohen Teiltönen ist sie unvermeidbar. Die Modellierung einer Saite, die die umgekehrte Dispersion aufgrund von Biegesteifigkeit aufweist, wäre höchst kompliziert, da die molekulare Struktur, welche für die Biegesteifigkeit verantwortlich ist, auch modelliert werden müsste.

## 7.4 Zusammenfassung und Bewertung

Das erstellte Masse-Feder-Modell ist in Hinblick auf die Möglichkeiten der Anregung sehr flexibel und die Behinderung der Saitenschwingung durch den Steg ließ sich sehr leicht implementieren. Da die Berechnung auf einfachen physikalischen Gesetzmäßigkeiten beruht, lässt sich das Modell auch ohne viel Aufwand erweitern (z.B. durch die Berücksichtigung der sich ändernden Länge der Saite oder für die Simulation von Saiten mit ungleicher Massenverteilung) bzw. abwandeln (z.B. für die Modellierung gestrichener Saiten). Auf Grund der langsamen Berechnung des Masse-Feder-Modells eignet sich das Modell jedoch nicht für die Verwendung als Synthesizer und die im Vergleich zu echten Saiten umgekehrte Dispersion schränkt die Einsatzmöglichkeiten als virtuelle physikalische Versuchsumgebung auch ein.

Die Untersuchung des Klanges des Masse-Feder-Modells hat gezeigt, dass alle wesentlichen Merkmale trotz der verkehrten Dispersion erfüllt wurden. Für einige den Klang kennzeichnenden, durch Dispersion hervorgerufenen Phänomene ist es daher scheinbar nicht entscheidend, in welche „Richtung“ die Dispersion wirkt. Das wesentliche Merkmal der Inharmonizität (Fletcher, Blackham und Stratton 1962, S. 758; siehe auch 4.2.3) kann beispielsweise bei gespreiztem und zusammengerafftem Spektrum auftreten, da es nichts ausmacht in welcher „Richtung“ die Töne von der erwarteten Frequenz abweichen. Auch die abwärts gleitenden Formanten traten bei verkehrter Dispersion auf.

Da die Dispersion jedoch als ein wichtiger Faktor bei der Entstehung des kennzeichnenden Klanges der Sitar hervorgehoben wurde, sollte sie trotzdem möglichst detailgetreu modelliert werden. Obwohl das Masse-Feder-Modell interessanterweise einen ziemlich guten Klang berechnet, kann es nicht als Lösung der Aufgabenstellung dieser Arbeit betrachtet werden, weshalb andere Modelle entwickelt werden müssen.

# 8 Das FDM-Modell der Sitar

## 8.1 Die Funktionsweise von FDM-Modellen

### 8.1.1 Allgemeines

Ein Verfahren zur annähernden Lösung von Differenzialgleichungen ist die Finite-Differenzen-Methode. Alle Differenziale in einer Differenzialgleichung werden dabei durch finite Differenzen ersetzt (Heath 1997, S. 305).

### 8.1.2 Finite Differenzen

Die erste Ableitung einer Funktion  $f(x)$  ist (vgl. Reichelt u.a. 1999, S. 46)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (8.1)$$

Diese Ableitung kann mit möglichst kleinem  $\Delta x$  angenähert werden. Der Limes fällt weg, da  $\Delta x$  nicht mehr gegen null strebt (Heath 1997, S. 256):

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (8.2)$$

Anstatt die erste Ableitung an der Stelle  $x$  als Differenz der Werte der Funktion an den Stellen  $x + \Delta x$  und  $x$  zu berechnen, kann man auch die Differenz der Stellen  $x$  und  $x - \Delta x$  heranziehen (ders., S. 257):

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (8.3)$$

Heath leitet diese beiden Ergebnisse von der Taylor-Entwicklung ab. Ersteres wird als Vorwärtsdifferenzenquotient bezeichnet, letzteres als Rückwärtsdifferenzenquotient (ders., S. 256f).

### 8.1.3 Die Wellengleichung mit finiten Differenzen

Die Wellengleichung wie unter 4.1.1 hergeleitet ist

$$y_{tt} = c^2 y_{xx}, \quad (8.4)$$

wobei  $y_{xx}$  die zweite Ableitung nach  $x$  und  $y_{tt}$  die zweite Ableitung nach  $t$  der Funktion der Auslenkung  $y(x, t)$  sein soll. Um die Ableitungen der Funktion  $y(x, t)$  näherungsweise

zu berechnen bedient man sich der Finite-Differenzen-Methode. Die erste Ableitung der Funktion  $y(x, t)$  nach  $x$  ist demnach

$$y_x(x, t) \approx \frac{y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x} \quad (8.5)$$

oder

$$y_x(x, t) \approx \frac{y(x, t) - y(x - \Delta x, t)}{\Delta x}. \quad (8.6)$$

Die zweite Ableitung dieser Funktion ist die Ableitung der ersten Ableitung:

$$y_{xx}(x, t) \approx \frac{y_x(x + \Delta x, t) - y_x(x, t)}{\Delta x} \quad (8.7)$$

Da diese Ableitung dem Vorwärtsdifferenzenquotienten entspricht, soll nun der Rückwärtsdifferenzenquotient für  $y'(x, t)$  eingesetzt werden.

$$y_{xx}(x, t) \approx \frac{y(x + \Delta x, t) - 2y(x, t) + y(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (8.8)$$

Durch Einsetzen des Rückwärtsdifferenzenquotienten dienen im Endergebnis die Werte benachbarter Stellen beider Seiten ( $x - \Delta x$  und  $x + \Delta x$ ) zur Berechnung der Ableitung an der Stelle dazwischen ( $x$ ). Dies wird später von Vorteil sein.

Die zeitliche Ableitung funktioniert nach dem gleichen Muster für die Unbekannte  $t$  also gilt

$$y_{tt}(x, t) \approx \frac{y(x, t + \Delta t) - 2y(x, t) + y(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2}. \quad (8.9)$$

Durch Einsetzen dieser Annäherungen in die Wellengleichung erhält man unter Vernachlässigung der Ungenauigkeiten

$$\frac{y(x, t + \Delta t) - 2y(x, t) + y(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} = c^2 \frac{y(x + \Delta x, t) - 2y(x, t) + y(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}. \quad (8.10)$$

Die Wahl der Intervalle  $dx$  und  $dt$  ist willkürlich. Sei  $\Delta x = c \cdot \Delta t$ , so erhält man

$$y(x, t + \Delta t) - 2y(x, t) + y(x, t - \Delta t) = y(x + \Delta x, t) - 2y(x, t) + y(x - \Delta x, t) \quad (8.11)$$

oder nach Umformung zur Berechnung des Ausdrucks  $y(x, t + \Delta t)$

$$y(x, t + \Delta t) = y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) - y(x, t - \Delta t). \quad (8.12)$$

Dies entspricht den Angaben von Karjalainen (2002, S. 1869).

### 8.1.4 Die Berechnung der Dispersion

Um die Dispersion zu berücksichtigen wird die bereits besprochene Wellengleichung dispersiver Saiten (siehe 4.2.3) verwendet:

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} - q \cdot y_{xxxx} \quad (8.13)$$

Zur Berechnung der Dispersion braucht man demnach die vierte räumliche Ableitung, die man nach dem gleichen Verfahren wie die Ableitungen oben erhält. Die vierte Ableitung ist die Ableitung der dritten Ableitung und ihr Vorwärtsdifferenzenquotient ist

$$y_{xxxx}(x, t) \approx \frac{y_{xxx}(x + \Delta x, t) - y_{xxx}(x, t)}{\Delta x}. \quad (8.14)$$

Einsetzen des Rückwärtsdifferenzenquotienten der dritten Ableitung

$$y_{xxx}(x, t) \approx \frac{y_{xx}(x, t) - y_{xx}(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \quad (8.15)$$

ergibt

$$y_{xxxx}(x, t) \approx \frac{y_{xx}(x + \Delta x, t) - 2y_{xx}(x, t) + y_{xx}(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}. \quad (8.16)$$

Die schon berechnete zweite Ableitung (8.8) kann eingesetzt werden.

$$y_{xxxx}(x, t) \approx \frac{y(x + 2\Delta x, t) - 4y(x + \Delta x, t) + 6y(x, t) - 4y(x - \Delta x, t) + y(x - 2\Delta x, t)}{\Delta x^4} \quad (8.17)$$

Dadurch ist die mit finiten Differenzen näherungsweise gelöste, erweiterte Wellengleichung unter Vernachlässigung der Ungenauigkeiten

$$\begin{aligned} \frac{y(x, t + \Delta t) - 2y(x, t) + y(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} &= c^2 \cdot \frac{y(x + \Delta x, t) - 2y(x, t) + y(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \\ &\quad - q \cdot \frac{y(x + 2\Delta x, t) - 4y(x + \Delta x, t) + 6y(x, t) - 4y(x - \Delta x, t) + y(x - 2\Delta x, t)}{\Delta x^4}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Bestimmt man wieder  $\Delta x = c \cdot \Delta t$  erhält man

$$\begin{aligned} y(x, t + \Delta t) - 2y(x, t) + y(x, t - \Delta t) &= y(x + \Delta x, t) - 2y(x, t) + y(x - \Delta x, t) \\ &\quad - \frac{q}{c^4 \cdot \Delta t^2} \cdot [y(x + 2\Delta x, t) - 4y(x + \Delta x, t) + 6y(x, t) - 4y(x - \Delta x, t) + y(x - 2\Delta x, t)]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Fasst man die Konstanten rund um den Dispersionsausdruck zusammen zu

$$A = \frac{q}{c^4 \cdot \Delta t^2}, \quad (8.20)$$

erhält man die Vereinfachung

$$\begin{aligned} y(x, t + \Delta t) - 2y(x, t) + y(x, t - \Delta t) &= y(x + \Delta x, t) - 2y(x, t) + y(x - \Delta x, t) \\ -A[y(x + 2\Delta x, t) + 4Ay(x + \Delta x, t) - 6Ay(x, t) + 4Ay(x - \Delta x, t) - Ay(x - 2\Delta x, t)], \end{aligned} \quad (8.21)$$

aus der  $y(x, t + dt)$  herausformuliert werden kann:

$$\begin{aligned} y(x, t + \Delta t) &= y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) - y(x, t - \Delta t) \\ -A[y(x + 2\Delta x, t) - 4y(x + \Delta x, t) + 6y(x, t) - 4y(x - \Delta x, t) + y(x - 2\Delta x, t)] \end{aligned} \quad (8.22)$$

### 8.1.5 Implementierung und Digitalisierung

Zur Implementierung am Rechner wird die kontinuierliche Funktion  $y(x, t)$  (definiert in Gleichung 8.12 bzw. Gleichung 8.22 für eine Berechnung mit Dispersion) in den diskreten Bereich übertragen. Die Übertragung findet für beide Unbekannten  $x$  und  $t$  statt, so dass gilt  $x \in \mathbb{N}$  und  $t \in \mathbb{N}$ . Die Berechnung der Auslenkung erfolgt also in bestimmten Zeitintervallen und nur an bestimmten Punkten der Saite. Ein Zeitintervall entspreche  $\Delta t$  und der Abstand zwischen zwei Punkten der Berechnung entspreche  $\Delta x$  im kontinuierlichen Bereich, so gilt für die Auslenkung der nicht dispersiven Saite (vgl. Gleichung 8.12)

$$y[x, t + 1] = y[x + 1, t] + y[x - 1, t] - y[x, t - 1]. \quad (8.23)$$

Durch die Verwendung von Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotient liegt der berechnete Wert  $y[x, t + 1]$  räumlich immer zwischen den Werten, die für die Berechnung gebraucht werden. Wird die Saite von den Werten  $x \in [0, L]$  dargestellt, ist eine Berechnung der Werte von  $x \in [1, L - 1]$  möglich. Nimmt man die Werte bei  $x = 0$  und  $x = L$  als Fixpunkte an, an denen die Saite fixe Enden hat, sind das alle beweglichen Werte.

Zur Berechnung der Schwingung dispersiver Saiten muss Gleichung 8.22 in den diskreten Bereich übertragen werden:

$$\begin{aligned} y[x, t + 1] &= y[x + 1, t] + y[x - 1, t] - y[x, t - 1] - \\ -A(y[x + 2, t] - 4y[x + 1, t] + 6y[x, t] - 4y[x - 1, t] + y[x - 2, t]) \end{aligned} \quad (8.24)$$

Versuche zeigten, dass Modelle mit dieser Gleichung als Kern der Berechnung instabil sind, da die Näherung nicht genau genug ist. Ohne Berechnung der Dispersion (also mit Gleichung 8.23) funktionierte die Berechnung ohne Stabilitätsprobleme. Auch mit

negativem  $A$  traten keine Stabilitätsprobleme auf, die Dispersion war jedoch wie beim Masse-Feder-Modell (siehe 7.3.5) umgekehrt.

Da sich mit dem Dispersionsausdruck die hohen Frequenzen bis zur Instabilität anschaulichten, war eine zulässige Lösung  $\Delta x$  bei der Herleitung des Ausdrucks der Dispersion als doppelt so groß anzunehmen. Dadurch ist die kleinste Wellenlänge, welche vom Dispersionsausdruck erfasst wird, nicht mehr  $2 \cdot \Delta x$  sondern  $4 \cdot \Delta x$ . Die so veränderte Gleichung lautet

$$y[x, t + 1] = y[x + 1, t] + y[x - 1, t] - y[x, t - 1] - A(y[x + 4, t] - 4y[x + 2, t] + 6y[x, t] - 4y[x - 2, t] + y[x - 4, t]). \quad (8.25)$$

Dadurch müssen bei der Berechnung der Auslenkungen allerdings Werte im Intervall  $x \in [-3, L + 3]$  zur Verfügung stehen. Die Annahme von 0 für die Werte außerhalb der Grenzen der Saite hat sich in Experimenten als befriedigend erwiesen.

### 8.1.6 Tonhöhe

Die Berechnung der Tonhöhe des FDM-Modells beruht auf der von Jaros, Nussbaumer und Nussbaumer (1992, S. 108) angegebenen Formel für die Grundfrequenz von Saiten

$$f_0 = \frac{c}{2l},$$

wobei  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen auf der Saite und  $l = L\Delta x$  die Länge der Saite ist, die sich aus der Länge des FDM-Modells  $L$  und dem Abstand der Punkte  $\Delta x$  ergibt. Gilt für die Abtastrate  $f_A = 1/\Delta t$  so lässt sich die Grundfrequenz mit Hilfe der oben genannten Definition  $\Delta x = c \cdot \Delta t$  berechnen:

$$f_0 = \frac{c}{2l} = \frac{c}{2L\Delta x} = \frac{1}{2L\Delta t} = \frac{f_A}{2L}$$

Dämpfungsmechanismen und Dispersion können die Höhe der Grundfrequenz jedoch leicht verzerren.

Da für  $L$  nur ganzzahlige Werte zulässig sind, ist die Gestaltung von FDM-Modellen, die Töne jeder gewünschten Tonhöhe erzeugen können, aufwändiger. Der Lösungsansatz ist, einen Endpunkt durch Interpolation um einen reellen Wert zu verschieben (Karjalainen 2002).

### 8.1.7 Dämpfung

Karjalainen (2002) schlägt für die Dämpfung den Einsatz von Koeffizienten in der Gleichung 8.12 vor:

$$y(x, t + \Delta t) = g \cdot [y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t)] + a \cdot y(x, t - \Delta t) \quad (8.26)$$

Die Koeffizienten werden mit

$$g = 1 - d$$

$$a = 2bd - 1$$

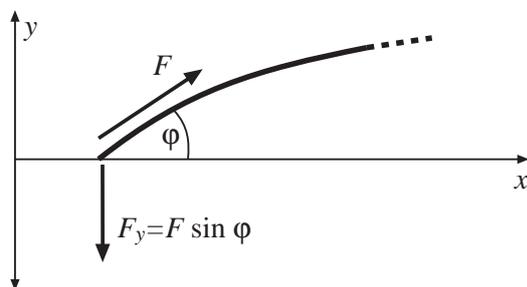
berechnet. Um Stabilität sicherzustellen gilt  $0 \leq d \leq 1$  und  $0 \leq b \leq 1$ . Es werden die Werte  $b = 0,97$  und  $d = 0,05$  vorgeschlagen (ebd.). Diese Art der Dämpfung lässt sich auch für das dispersive FDM-Modell anwenden.

Eine andere Möglichkeit zur Dämpfung von FDM-Modellen ist der Einsatz eines Tiefpassfilters über die gesamte Länge der Saite. Ein solcher Filter könnte auf der Berechnung des wandernden Durchschnitts beruhen (siehe 9.1.9), muss aber schwach genug sein, um das Signal nicht zu schnell auszulöschen.

### 8.1.8 Anfangswertbelegung

Als Anfangswert für das FDM-Modell kann wie für das Masse-Feder-Modell die Auslenkung beim Zupfen der Saite herangezogen werden (siehe 6.4.3). Die gegenwärtige und die vergangene Auslenkung wird auf diese Werte gesetzt, um den Stillstand der Saite kurz vor dem Loslassen zu erfassen. Impulse oder Schläge auf die Saite können auch modelliert werden, indem für die gegenwärtige und die vergangene Auslenkung unterschiedliche Werte eingesetzt werden (Karjalainen 2002).

### 8.1.9 Klangausgabe



**Abbildung 8.1:** Die Berechnung der Kraft am Steg

Wie beim Masse-Feder-Modell ist auch beim FDM-Modell die senkrechte Kraft am Steg das Ausgabesignal (siehe 7.2.6). Cuzzucoli und Lombardo (1999) schlagen eine Berechnung anhand trigonometrischer Formeln vor (siehe Abbildung 8.1). Sei  $F$  die Spannkraft

der Saite und  $\varphi$  der veränderliche Winkel, mit dem sie zum Steg steht, so ist die senkrecht auf den Steg übertragene Kraft (vgl. Cuzzucoli und Lombardo 1999, S. 54)

$$F_y = F \sin \varphi. \quad (8.27)$$

Wie im Zusammenhang mit Masse-Feder-Modellen erörtert, ist die senkrechte Kraft die wichtigste Kraftkomponente, da sie am besten auf den Resonanzkörper übertragen wird (siehe 7.2.2 bzw. Fletcher und Rossing 1991, S. 210). Für den Sinus des Winkels  $\varphi$  gilt im Falle des FDM-Modells  $y[x, t]$ , welches an der Stelle  $x = 0$  den Steg hat

$$\sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y[1; 0]}{\sqrt{y[1; 0]^2 + 1^2}}. \quad (8.28)$$

Nach der Multiplikation dieses Wertes mit  $F$  erhält man die senkrecht auf den Steg wirkende Kraft.

## 8.2 Das FDM-Modell der Sitar saite

### 8.2.1 Die Repräsentation der Saite

Ein zweidimensionales Datenfeld  $y[-3..sl+3, -1..1]$  repräsentiert die Auslenkung der Welle auf einer Saite der Länge  $sl$ . Die erste Dimension des Feldes ist der Raum. An den Punkten 0 und  $sl$  ist die Saite fixiert und unbeweglich. Die Punkte außerhalb sind immer null und nur zur einfacheren Berechnung der Dispersion Teil des Feldes.

Die zweite Dimension des Feldes ist die Zeit. Die aktuelle Auslenkung der Saite ist stets beim Index 0 gespeichert, während die Auslenkung vor oder nach dem Intervall  $\Delta t$  beim Index +1 bzw. -1 gespeichert ist. Bei der Berechnung eines neuen Auslenkungswertes  $y[x, +1]$  kann so auf den aktuellen und vorigen Wert der Auslenkung zugegriffen werden, was für die Lösung der Gleichungen 8.23 oder 8.25 nötig ist. Nach der Berechnung der neuen Werte werden alle Werte um einen Zeitindex nach unten verschoben. Die Werte von -1 werden mit den Werten von 0 überschrieben, die anschließend mit den Werten von +1 überschrieben werden. Beim nächsten Durchgang werden wieder die Werte für +1 berechnet.

### 8.2.2 Initialisierung

Am Anfang wird das Datenfeld  $y$  mit den Werten der dreieckigen Auslenkung für das Zupfen (siehe 6.4.3) für den gegenwärtigen und vergangenen Zeitindex gefüllt, da angenommen wird, dass die Saite zum Zeitpunkt des Loslassens stillsteht. Die Spitze des Dreiecks kann an irgendeiner Stelle auf der Saite liegen.

### 8.2.3 Feinabstimmung der Tonhöhe

Da es nicht Ziel dieser Arbeit ist, ein physikalisches Modell zu erstellen, in dem die Tonhöhe reguliert werden kann, wurde keine spezielle Technik zur Feinabstimmung der Tonhöhe implementiert. Das Modell ist in dieser Hinsicht jedoch erweiterbar.

### 8.2.4 Die Wechselwirkung mit dem Steg

Die Simulation der Wechselwirkung mit dem Steg ist ziemlich direkt. Nach der Berechnung neuer Werte für  $y$  wird im Bereich des Steges überprüft, ob die Werte außerhalb der Begrenzung liegen, die vom Steg vorgegeben wird. Liegen die Werte außerhalb dieser Begrenzung, werden sie auf den gleichen Wert wie der Steg gelegt.

### 8.2.5 Dämpfung

Zur Dämpfung wurde die von Karjalainen (2002) vorgeschlagene Methode gewählt, wobei die Koeffizienten experimentell bestimmt wurden, da auch die Wechselwirkung der Saite mit dem Steg zur Dämpfung beitrug und die von Karjalainen vorgeschlagenen Werte aus diesem Grund ein zu rasches Abklingen der Saite bewirkt hätten.

### 8.2.6 Dispersion

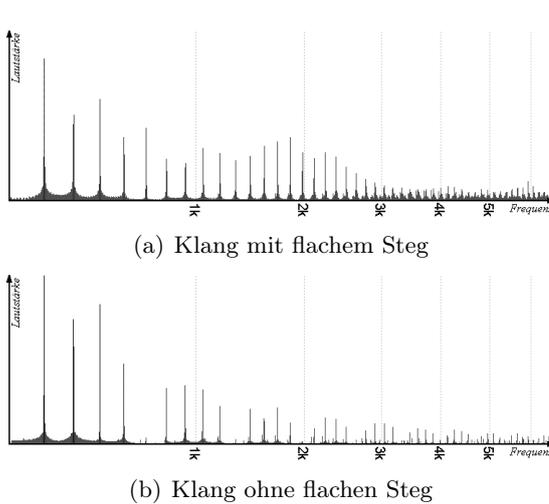
Um die Konstante vor dem Dispersionsausdruck der Gleichung des diskreten dispersiven FDM-Modells (Gleichung 8.25) auszurechnen stehen Formeln zur Verfügung (siehe 4.2.3). Für eine genaue Berechnung der Konstante sind jedoch präzise Messungen und detaillierte Daten über die Saite notwendig, die teilweise schwer erfasst werden konnten. Außerdem ist die Stabilität des Modells nicht bei jedem Wert der Konstante sichergestellt. Aus diesen Gründen wurde der Wert beim Sitarmodell experimentell festgelegt.

## 8.3 Akustische Analyse

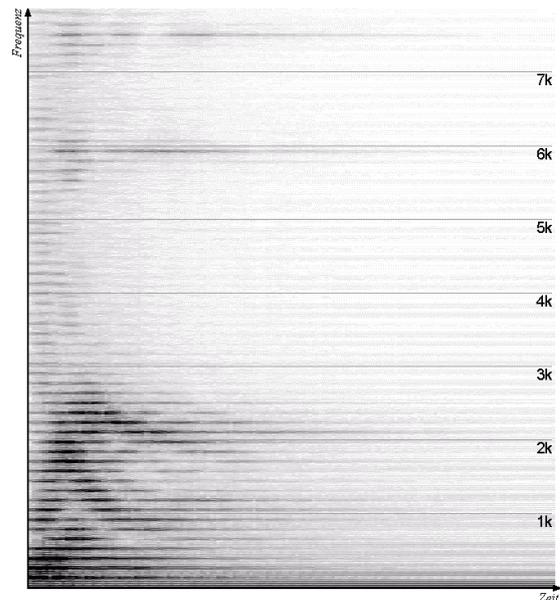
### 8.3.1 Das analysierte Signal

Das analysierte Signal wurde mit einer Abtastrate von  $4 \cdot 44100\text{Hz}$  berechnet, um eine möglichst hohe Auflösung zu erzielen. Für die Analyse wurde das Signal auf eine Abtastrate von  $44100\text{Hz}$  umgewandelt.

Das verwendete FDM-Modell war 673 Punkte lang, so dass bei der genannten Abtastrate ein Ton mit ungefähr der gleichen Tonhöhe wie die aufgenommene  $s\bar{a}$ -Saite (c) der Sitar erzeugt wird. Die Saite wurde mit der Simulation einer Zupfbewegung bei einem Fünftel der Länge angeregt. Die anfängliche Auslenkung betrug 13mm. Als Form des Steges wurde wie beim Masse-Feder-Modell die von Vyasarayani, Birkett und McPhee (2009) vorgeschlagene Kurve gewählt (siehe 6.4.4). Die die Dispersion bestimmende Konstante  $A$  wurde empirisch ermittelt und für den analysierten Klang auf 0,08 gesetzt. Auch die



**Abbildung 8.2:** Frequenzspektrum zweier mittels FDM-Modell simulierter Klänge. Die Modelle wurden mittels Zupfen bei einem Fünftel angeregt.



**Abbildung 8.3:** Spektrogramm eines Tones mit flachem Steg

Koeffizienten für die Dämpfung wurden experimentell bestimmt und auf  $d = 5 \cdot 10^{-6}$  und  $b = 0,97$  festgelegt.

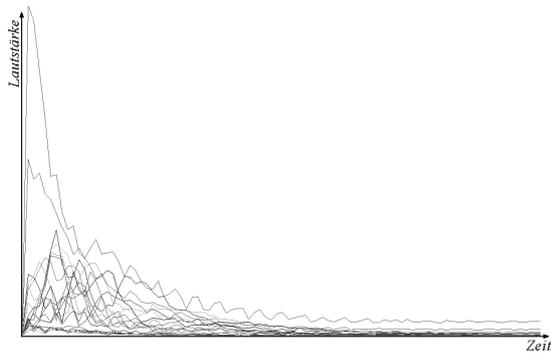
Das Signal wurde, wie bei der Analyse des Masse-Feder-Modells, nicht gefaltet, um auch hier die hohen Teiltöne besser untersuchen zu können.

### 8.3.2 Ungültigkeit des Young-Helmholtz Gesetzes

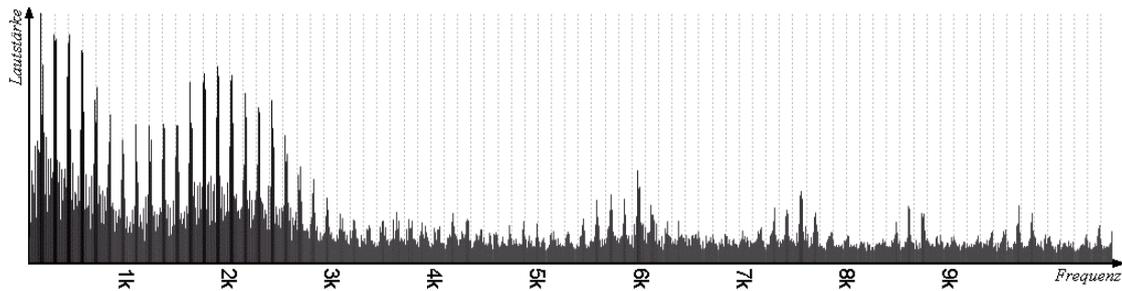
Auch im FDM-Modell hat der Algorithmus für die Wechselwirkung zwischen Saite und Steg die Wirkung, dass alle Teiltöne unabhängig von der Stelle, an der gezupft wird, erklingen. Auch hier erfolgte die Anregung mittels Zupfen bei einem Fünftel der Saite, weshalb im Spektrum des Klanges ohne flachen Steg jeder fünfte Teilton fehlt (siehe Abbildung 8.2).

### 8.3.3 Abwärts gleitende Formanten

Die Gleitbewegung der Formanten ist zwar nicht so deutlich ausgeprägt wie im Masse-Feder-Modell, aber auch in Abbildung 8.3 dennoch deutlich sichtbar. Die Abbildung bestätigt auch den Obertonreichtum des Signals. Im Bereich von 5500 bis 6000 Hz lassen sich als andere Übereinstimmung spät einsetzende Resonanzen erkennen, die auch auf dem Spektrogramm der Sitar zu finden sind, wo sie allerdings mit der Anregung einsetzen. Da das simulierte Signal nicht mit der Impulsantwort des Resonanzkörpers gefaltet wurde, können diese Anteile nicht vom Resonanzkörper stammen. Die tieferen Teiltöne sind im Vergleich zum Spektrum der Sitar deutlich lauter, da der Resonanzkörper bei tiefen Frequenzen weniger resoniert, wie die Admittanzkurve der Sitar zeigt (siehe Abbildung



**Abbildung 8.4:** Teiltonverlauf des mittels FDM-Modell simulierten Klanges



**Abbildung 8.5:** Spektrogramm eines Tones mit flachem Steg

5.3).

### 8.3.4 Nichtlinearität

Die sich häufig kreuzenden Hüllkurven der Teiltöne des Signals bestätigen die Nichtlinearität (siehe Abbildung 8.4).

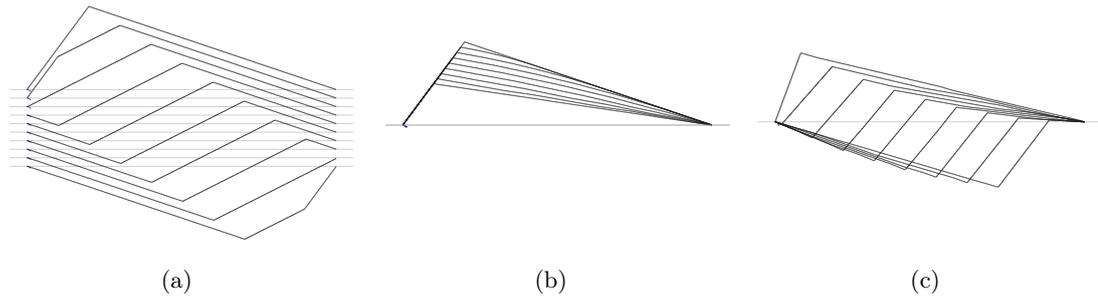
### 8.3.5 Dispersion

Abbildung 8.5 zeigt das Frequenzspektrum eines Tones des FDM-Modells, bei dem Vielfache des Grundtones durch senkrechte Linien kenntlich gemacht sind. Die Dispersion beim FDM-Modell führt zu einem gestreckten Spektrum, wenn die Konstante in der Gleichung des dispersiven FDM-Modells größer als null ist.

Im FDM Modell kann anhand der Gleichung 8.23 auch die Bewegung der idealen Saite berechnet werden (siehe Abbildung 8.6). Das Modell erinnert in diesem Fall klanglich zwar nur noch entfernt an die Sitar, aber es kann so auch in Hinblick auf die von Burridge, Kappraff und Morshedi (1982) getroffenen Aussagen zur Schwingungsform der Sitarasaiten bewertet werden (siehe 4.3.3).

Verwendet man die gleiche nach oben gewölbte Stegform, wie sie bei Burridge, Kappraff und Morshedi (1982) beschrieben ist, kommt auf der Saite nach einiger Zeit auch eine Helmholtz-Bewegung zustande.

Handelt es sich um einen Steg, wie er von Vyasarayani, Birkett und McPhee (2009) beschrieben wird, kommt keine Helmholtz-Bewegung zustande, sondern eine Schwingungs-



**Abbildung 8.6:** Die Schwingungsformen der idealen Saite des FDM-Modells mit flachem Steg. Die Bewegung direkt nach der Anregung gleicht der Bewegung idealer, gezupfter Saiten ohne flachen Steg (a). Die Störung durch den gebogenen Steg bewirkt die Biegung eines Segments (b) bis sich die Saite schließlich wie in (c) bewegt.

form, die der Schwingung idealer gezupfter Saiten gleicht (siehe Abbildung 8.6c).

Auch die zweite Beobachtung von Burrige, Kappraff und Morshedi (1982) kann im FDM-Modell bestätigt werden. Bei der idealen schwingenden Saite, die durch Zupfen angeregt wird, sind alle Segmente der Saite gerade. Bei der Saite, die mit dem Steg wechselwirkt, ist ein Segment gebogen (siehe Abbildung 8.6b).

## 8.4 Zusammenfassung und Bewertung

Im vorgeschlagenen FDM-Modell wird die Dispersion im Gegensatz zum Masse-Feder-Modell naturgetreu abgebildet. Durch die Wahl geeigneter Werte für die Konstante vor dem Dispersionsausdruck lässt sich die Dispersion in einem gewissen Maß regeln. Bei gewissen Werten für die Dispersionskonstante neigt das System jedoch zur Instabilität, weshalb die Möglichkeiten der Regelung der Dispersion beschränkt sind. Durch Ausklammerung des Dispersionsausdrucks aus der Berechnung kann die Bewegung der idealen Saite modelliert werden, was den Vergleich mit anderen wichtigen Arbeiten zur Schwingung der Sitar saite ermöglicht.

Das Modell bezieht sich direkt auf die zugrunde liegenden Formeln. Erweiterungen der Wellengleichung können so in das Modell integriert werden, wie es im Rahmen dieser Arbeit für die Dispersion getan wurde. Andere Erweiterungen, die nicht in der Wellengleichung erfasst werden können, wie beispielsweise die durch Energieübertragung von der Saite über den abstrahlenden Resonanzkörper in die Luft bewirkte Dämpfung der Schwingung, lassen sich nicht so einfach ins Modell eingliedern.

Eine andere Schwierigkeit ist die Feinstimmung der Tonhöhe des Modells. Den in dieser Arbeit geforderten Ansprüchen genügt das vorgeschlagene Modell zwar, aber für den Einsatz als Synthesizer muss eine feine Abstimmung der Tonhöhe möglich sein, vor allem da beim Spielen der Sitar *mīṇḍ*, also das Gleiten zwischen Tönen, eine unentbehrliche Technik ist.

Das erstellte FDM-Modell bietet zwar einen guten Klang mit allen bei der Sitar saite-

te beobachteten Merkmalen, aber ein Modell mit schnellerer Berechnung, einfacherer zu steuernden Dispersion und flexibleren Erweiterungsmöglichkeiten wäre als praktische Versuchsumgebung hilfreich und für den Einsatz als Synthesizer interessant.

# 9 Das Wellenleitermodell der Sitar

## 9.1 Die Funktionsweise von Wellenleitern

### 9.1.1 Grundlagen

Die Synthese mittels Wellenleiter basiert auf der Ausbreitung von Wellen auf der Saite und ahmt die Entstehung von stehenden Wellen nach, welche auch für den Klang der schwingenden Saite verantwortlich sind. Die schon besprochene allgemeine Wellengleichung der Saite (zur Herleitung siehe 4.1.1)

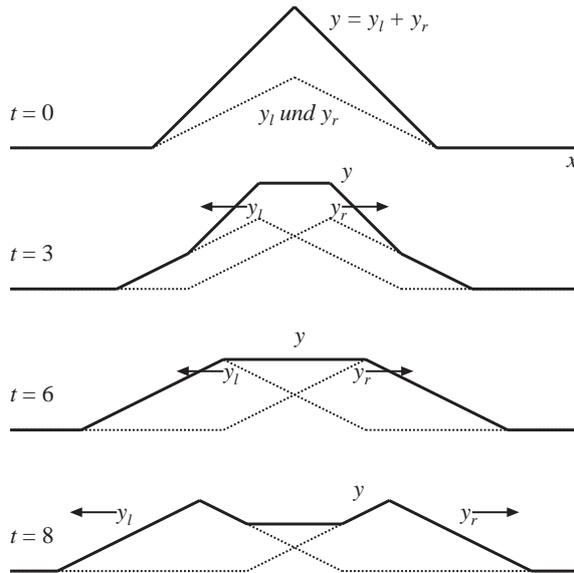
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (9.1)$$

beschreibt das Verhalten der schwingenden Saite und kann durch folgende Gleichung (Smith 1993, S. 3) gelöst werden:

$$y(x, t) = y_r(x - ct) + y_l(x + ct) \quad (9.2)$$

Diese Lösung lässt sich als Überlagerung von wandernden Wellen verstehen.  $c$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen.  $y_r$  repräsentiert nach rechts wandernde Wellen,  $y_l$  nach links wandernde.  $y_r$  und  $y_l$  können beliebige zweimal differenzierbare Funktionen sein und daher beispielsweise die Auslenkung der Saite repräsentieren. Die Überlagerung der rechtswandernden und linkswandernden Welle an der Stelle  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  ist in diesem Falle die momentane Auslenkung der Saite an dieser Stelle (Smith 1993, S. 3). Abbildung 9.1 zeigt eine unendlich lange Saite, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  an drei Punkten gezupft wird. Die anfänglichen Werte für  $y_r$  und  $y_l$  werden so gewählt, dass ihre Summe diese Auslenkung ergibt. Da die Saite als ideal angenommen wird, sind die nach rechts wandernden Energieanteile gleich groß wie die nach links wandernden, weshalb gilt  $y_l = y_r = y/2$ . Zum Zeitpunkt  $t = 3$  haben sich die Wellen bereits verschoben und zum Zeitpunkt  $t = 8$  überlagern sie sich fast nicht mehr.

Basierend auf diesen mathematischen Formeln können Modelle von schwingenden System erstellt werden. Im analogen Bereich kann dies mit elektrischen Leitern geschehen. Kock (1937) modellierte auf diese Art Klaviersaiten. Die Umsetzung im digitalen Bereich ist heutzutage jedoch die praktischere, schnellere und flexiblere Art der Erstellung von Wellenleitermodellen. Dazu müssen die vorgestellten Formeln in den digitalen Bereich übertragen werden.



**Abbildung 9.1:** Augenblicksaufnahmen von Wanderwellen auf einer idealen Saite zu vier Zeitpunkten. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wurde die Saite an drei Punkten gepulst. (vgl Smith 1993, S. 3)

### 9.1.2 Digitalisierung

Um das Gleichungssystem zu digitalisieren müssen die reellen Variablen  $x$  und  $t$  durch natürliche Variablen ersetzt werden. Die Saite ist dadurch nur noch an diskreten Punkten definiert. Bei der Wahl der zeitlichen Abtastrate (für  $t$ ) und der räumlichen Abtastrate (für  $x$ ) muss man bedenken, dass bei der Berechnung der Auslenkung anhand Gleichung 9.2,  $t$  immer mit der Wellengeschwindigkeit  $c$  malgerechnet wird. Wenn die zeitliche Abtastrate  $T$  Sekunden ist und die räumliche Abtastrate  $X = T \cdot c$  Meter ist, fällt die genannte Multiplikation weg, was die Implementierung vereinfacht.

Die eigentliche Digitalisierung vollzieht sich nun durch das Ersetzen der reellen Variablen  $x$  und  $t$  durch die natürlichen Variablen  $m$  und  $n$  sowie das Ersetzen der kontinuierlichen Funktionen  $y(x, t)$ ,  $y_r(x - ct)$  und  $y_l(x + ct)$  durch die diskreten Funktionen  $s[m, n]$  für die Saite,  $wr[m - cn]$  und  $wl[m + cn]$  für die rechts- bzw. linkswandernden Anteile. Die Beziehung der diskreten zu den kontinuierlichen Variablen wird durch die Abtastraten geklärt:

$$x = m \cdot X \tag{9.3}$$

$$t = n \cdot T = n \cdot X/c \tag{9.4}$$

Für die Lösung der Wellengleichung im diskreten Raum- und Zeitbereich gilt also

$$\begin{aligned} y(mX, nT) &= yr(mX - cnT) + yl(mX + cnT) \\ y(mX, nT) &= yr(mX - cnX/c) + yl(mX + cnX/c) \\ y(mX, nT) &= yr(mX - nX) + yl(mX + nX) \\ y(mX, nT) &= yr((m - n)X) + yl((m + n)X) \end{aligned} \tag{9.5}$$

Definiert man nun die diskreten Funktionen in einer Weise, so dass gilt

$$wr[m] = y_r(m \cdot X) \quad (9.6)$$

$$wl[m] = y_l(m \cdot X) \quad (9.7)$$

kann man für die Lösung der Wellengleichung im digitalen Bereich

$$s[m, n] = wr[m - n] + wl[m + n] \quad (9.8)$$

schreiben (vgl. Smith 1993).

### 9.1.3 Anfangswertbelegung

Da die Wechselwirkung zwischen Saite und Steg abhängig von der Auslenkung der Saite ist, wird sie beim Sitarmodell als Größe der wandernden Wellen gewählt. Als Anfangswerte können daher die Auslenkung nach dem Zupfen oder die Nachahmung der Saitenform nach dem Anschlagen, wie in Abschnitt 6.4.3 erläutert, herangezogen werden.

Anhand der vorgegebenen Saitenform werden die Formen für die rechts- und linkswandernde Welle bestimmt. Da sich die Energie im gleichen Maße nach rechts wie nach links ausbreitet, müssen die beiden Wellen am Anfang gleich groß sein. Die Anfangswerte für diese Wellen sind daher jeweils die Hälfte der Anfangsauslenkung, denn die Auslenkung ist die Summe von rechts- und linkswandernder Welle. Zum Zeitpunkt 0 gilt also

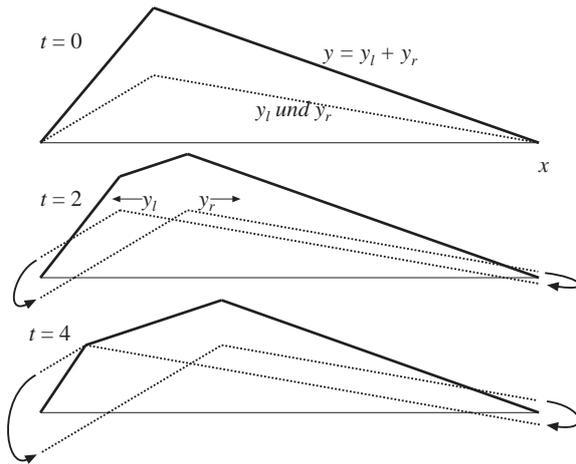
$$wr[m] = wl[m] = \frac{s[m, 0]}{2}. \quad (9.9)$$

### 9.1.4 Reflexion

Auf einer Saite mit festen Enden werden die beiden Komponenten  $wl$  und  $wr$  an den Enden reflektiert. Die Überlagerung dieser immer wieder auftretenden Reflexionen bewirkt die Entstehung von stehenden Wellen bestimmter Frequenzen. Die Art der Reflexion hängt von der Welle ab. Handelt es sich um Wellen der Auslenkung (wie bisher immer besprochen), der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung, werden die Wellen umgekehrt reflektiert, also mit Vorzeichenwechsel. Wellen der Kraft oder Wellen der Steigung erfahren keine Umkehr und damit keinen Vorzeichenwechsel (Smith 1993, S. 14).

An den Enden der Saite  $m = 0$  und  $m = L$  vollzieht sich die Reflexion. Nach rechts wandernde Bestandteile wandern bis  $m = L$ , wo sie mit oder ohne Vorzeichenwechsel in die andere Richtung reflektiert werden und als links wandernde Bestandteile zurückwandern. Die Werte von  $wr$  „fließen“ an der Stelle  $m = L$  sozusagen in  $wl$  und somit zurück zum Punkt  $m = 0$ , wo sie wiederum in  $wr$  „fließen“ (siehe Abbildung 9.2).

Die einfachsten Randbedingungen für eine eingespannte Saite sind  $y(0, t) = 0$  und  $y(L, t) = 0$ . Daher gilt, dass sich  $y_r$  und  $y_l$  an diesen Punkten immer auslöschen müssen. Für Wellen der Auslenkung kann dieser Forderung einfach nachgekommen werden.



**Abbildung 9.2:** Reflexion der wandernden Wellen (punktirierte Linien), deren Summe die Auslenkung ergibt (durchgehende Linie)

Im digitalen Bereich werden die Wellenformen je Zeiteinheit um einen Platz nach rechts oder links verschoben. Da die Saite an den Stellen 0 bzw.  $L$  endet, werden die Werte von  $w_r$  und  $w_l$ , welche über diese Begrenzungen hinausgeschoben werden, mit umgekehrtem Vorzeichen an die entgegengesetzte Welle angehängt um die Reflexion zu simulieren. Dadurch liegen an den Enden bei 0 und  $L$  immer ähnlich große Werte beieinander, sofern die Auslenkung der Saite von Wert zu Wert nicht zu sehr schwankt. Diese Werte löschen sich gegenseitig fast vollständig aus.<sup>1</sup>

### 9.1.5 Tonhöhe

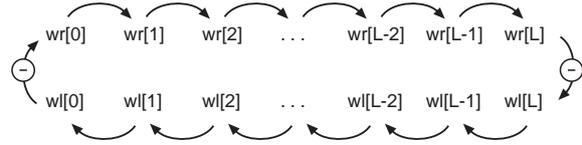
Die Grundfrequenz  $f_0$  eines Wellenleiters hängt von der Abtastfrequenz  $f_A = 1/T$  ab. Da eine Welle über  $2 \cdot L$  Stellen wandern muss um wieder zur Ausgangsposition zurückzukehren gilt (nach Smith 1993, S. 17)

$$f_0 = \frac{f_A}{2 \cdot L} \quad (9.10)$$

Dies konfrontiert uns mit einem Problem, über das später noch zu sprechen sein wird: Nicht für jede beliebige Frequenz können Wellenleiter auf diese einfache Art erstellt werden. Ein Wellenleiter mit der Grundfrequenz 440Hz und der Abtastfrequenz  $f_A = 44100\text{Hz}$  müsste beispielsweise  $f_A/(2f_0) = 50,113$  Werte lang sein. Die Länge eines Wellenleiters muss jedoch ganzzahlig sein, um im diskreten Zeit- und Raumbereich implementiert werden zu können und ein Wellenleiter mit der gerundeten, ganzzahligen Länge 50 hätte die Frequenz 441Hz. Eine Lösung für dieses Problem wird unter 9.1.9 besprochen.

<sup>1</sup>Vollständige Auslöschung könnte man mit der Übertragung der Werte erzielen, die an den Stellen 0 und  $L$  liegen, da sich dann in  $w_r$  und  $w_l$  an diesen Stellen die exakt gleichen Werte gegenüber ständen (so ist es bei Smith 1993). Im oben geschilderten Verfahren kann man davon ausgehen, dass die Saite eigentlich nicht auf den Punkten 0 und  $L$  eingespannt sind, sondern dass diese Punkte die äußersten Stellen sind, an denen sich die Saite bewegen kann.

**Abbildung 9.3:** Die Implementierung eines Wellenleiters mit zwei Verzögerungsleitungen für die zwei entgegengesetzt wandernden Wellen, die am Ende negativ reflektiert werden.



### 9.1.6 Wellenleiter anderer Größen

Wie bereits erwähnt können nicht nur Wellen der Auslenkung in Wellenleitern als wandernde Wellen die Grundlage der Berechnung sein. Auch räumliche oder zeitliche Ableitungen und Integrale der Auslenkung können als Variablen fungieren, da Integration und Differentiation lineare Operatoren sind (Smith 1993, S.6). Dies beweist die Summenregel: Für die differenzierbaren Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  gilt (nach Reichel u.a. 1999a, S. 60)

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' \quad (9.11)$$

Die Summenregel lässt sich umgekehrt auch auf die Integration anwenden (Reichel u.a. 1999b, S. 31). Für die Lösung der Wellengleichung gilt daher

$$y(x, t) = y_r(x - ct) + y_l(x + ct) \quad (9.12)$$

$$y'(x, t) = y_r'(x - ct) + y_l'(x + ct) \quad (9.13)$$

$$y''(x, t) = y_r''(x - ct) + y_l''(x + ct) \quad (9.14)$$

oder

$$\int y(x, t) dx = \int y_r(x - ct) dx + \int y_l(x + ct) dx \quad (9.15)$$

$$\iint y(x, t) dx dx = \iint y_r(x - ct) dx dx + \iint y_l(x + ct) dx dx \quad (9.16)$$

Zur Verfügung stehen daher beispielsweise auch die Geschwindigkeit (als erste zeitliche Ableitung), die Beschleunigung (als zweite zeitliche Ableitung) oder Steigung (erste räumliche Ableitung) und Krümmung (zweite räumliche Ableitung). Die Umrechnung zwischen diesen Größen kann im digitalen Bereich mit Filtern geschehen. Smith (1993, S. 6) schlägt einige einfache Filter vor, die diese Aufgaben näherungsweise lösen.

### 9.1.7 Implementierung

Wellenleiter sind sehr effiziente Syntheseverfahren, da prinzipiell keine komplizierten Berechnungen notwendig sind. Die Saite wird durch zwei Verzögerungsleitungen repräsentiert, in denen die Werte der rechts- und linkswandernden Wellen gespeichert sind. Eine Verzögerungsleitung kann auf einfache Art als eindimensionales Datenfeld implementiert werden. Je Zeiteinheit werden die Werte in den Datenfeldern verschoben, mit den unter

9.1.4 besprochenen Maßnahmen für die Reflexion (s. Abbildung 9.3).

Will man die Auslenkung der Saite an der Stelle  $m$  berechnen, reicht es, die Werte der beiden Datenfelder an der Stelle  $m$  zu addieren, da ja die Auslenkung die Kombination der beiden Wellenkomponenten ist.

Dieses einfache Modell eines Wellenleiters lässt sich erweitern und für die Implementierung optimieren.

### 9.1.8 Ausgangssignal

Wird ein Wellenleiter zur Simulation des Klanges eines Instruments eingesetzt, muss das Ausgangssignal an der richtigen Stelle auf geeignete Weise entnommen werden.

Elektromagnetische Tonabnehmer wandeln die Geschwindigkeit der schwingenden Saite in elektrische Signale um. Zur Simulation der Tonabnehmer wird an einer Stelle des Wellenleiters die Geschwindigkeit der Saite berechnet. Wenn die wandernden Wellen in den Verzögerungsleitungen die Geschwindigkeit darstellen, reicht es die Summe zu berechnen. Ist die Größe der wandernden Wellen jedoch die Auslenkung, so muss diese differenziert werden (Rank 1996, S. 32). Da ein Tonabnehmer die Bewegung der Saite nicht nur an einer einzigen Stelle erfasst, ist es sinnvoll einen über mehrere benachbarte Stellen gemittelten Wert zu verwenden (Rank und Kubin 1997, S. 444).

Für die Modellierung akustischer Instrumente empfiehlt sich auch beim Wellenleiter die Verwendung der Kraft am Steg als Ausgangssignal. Diese kann direkt aus der Beschleunigung berechnet werden. Wenn nicht die Beschleunigung als Größe der Wellenleiter angenommen wird, oder die Beschleunigung am Steg ungeeignet für die Ausgabe ist (da in Wellenleitern der Steg oft als unbeweglich angenommen wird), kann die Kraft auch auf die gleiche Weise berechnet werden, wie es beim FDM-Modell beschrieben wurde (siehe 8.1.9).

### 9.1.9 Filter in Wellenleitern

#### Der Einsatzbereich von Filtern

Eine ideale, ungedämpfte Saite lässt sich mittels Wellenleiter ohne spezielle Erweiterungen modellieren. Für Dämpfung und Dispersion muss das Modell jedoch auf abstrakte Art und Weise erweitert werden. Diese Erweiterungen lassen sich mit digitalen Filtern implementieren, ahmen aber nur die Effekte natürlicher Phänomene nach, ohne auf die gleiche Weise zu funktionieren. Der Entwurf passender Filter ist keineswegs trivial. Dementsprechend beschäftigt sich ein großer Teil der wissenschaftlichen Arbeiten über Wellenleitermodelle mit Filtern.

Ein Wellenleiter stellt im Prinzip das Medium dar, in dem sich die Wellen fortbewegen. Dämpfung und Dispersion entstehen durch Behinderungen oder Veränderungen bei der Energieübertragung von einer Stelle des Mediums zur anderen und können dementspre-

chend in die Übertragung der Werte der rechts- und linkswandernden Welle integriert werden.

### Dämpfung

Dämpfung bedeutet, dass die Wellen bei ihrer Wanderung an Energie verlieren. Die Dämpfung kann dadurch nachgeahmt werden, dass die Werte bei der Übertragung von einer Stelle zur nächsten verkleinert werden, in dem sie mit einer Dämpfungskonstante  $a < 1$  multipliziert werden. Frequenzabhängige Dämpfung lässt sich gut und effizient mit Tiefpassfiltern in das Modell integrieren. Ein einfacher Tiefpassfilter ist der wandernde Durchschnitt. Aus jedem Wert wird jeweils mit dem benachbarten Wert der Durchschnitt berechnet, der den ursprünglichen Wert ersetzt. Dies führt zu einer Glättung der Kurve und somit zu einem tiefpassgefilterten Signal. Ein solcher Filter lässt sich auch zwischen die einzelnen Stellen des Wellenleiters einbauen, um den frequenzabhängigen Energieverlust bei den einzelnen Schritten der Wellenausbreitung zu repräsentieren.

### Dispersion

Dispersion kann in Wellenleitern mit der Hilfe von Allpassfiltern modelliert werden (Smith 1993, S.13). Dispersion beruht, wie unter 4.2.3 erläutert, auf frequenzabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Wellen. Da Wellen hoher Frequenzen auf der dispersiven Saite schneller wandern als Wellen niedriger Frequenzen, müssen die Filter die tieffrequenten Wellen verzögern, dürfen den Frequenzgang des Signals jedoch nicht stören. Es sind also Filter mit konstantem Frequenzgang nötig, deren Phasengang mit steigender Frequenz abnimmt. Rauhala und Välimäki schlagen den Einsatz von mehreren Allpassfiltern erster oder zweiter Ordnung vor. In mehr oder weniger aufwändigen Verfahren können die Koeffizienten berechnet werden (Rauhala und Välimäki 2006a und b).

### Die Stimmung von Wellenleitern

Die Problematik der Tonhöhe wurde schon in 9.1.5 erläutert. Wellenleiter mit nichtganzzahliger Länge, die für bestimmte Grundfrequenzen erforderlich wären, lassen sich zwar nicht realisieren, aber das Signal im Wellenleiter lässt sich durch Filter auch um eine Zeit verzögern, die nur einem Bruchteil der Verzögerungszeit einer Stelle entspricht (Jaffe und Smith 1983). Soll, wie oben besprochen, bei einer Abtastfrequenz von 44100 Hz ein Wellenleiter erzeugt werden, dessen Grundfrequenz  $f_0 = 440\text{Hz}$  ist, müssten die beiden Verzögerungsleitungen des Wellenleiters 50,113 Werte lang sein. Wenn man einen Filter in eine der beiden Verzögerungsleitungen einbindet, der das Signal für den ganzen Wellenleiter um die  $2 \cdot 0,113$  Stellen entsprechende Zeit verzögert, kann mit einem Wellenleiter mit 50 Stellen ein Ton mit 440Hz erzeugt werden. Abgesehen von der geforderten Verzögerung darf der Filter das Signal nicht verändern, er muss also für alle Frequenzanteile

in gleicher Weise durchlässig sein. Einer solchen Forderung kommen Allpassfilter nach. Jaffe und Smith schlagen in ihrem Aufsatz einen Allpassfilter erster Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{C + z^{-1}}{1 + Cz^{-1}} \quad (9.17)$$

vor (1983, S. 60). Der Koeffizient  $C$  errechnet sich aus der geforderten Verzögerung  $v$  mit der Formel (ebd., S. 61)

$$C \approx \frac{1 - v}{1 + v} \quad (9.18)$$

In ihrem Aufsatz geben die beiden Verfasser auch eine genauere Formel an (ebd., umformuliert nach Steiglitz 1996, S.119):

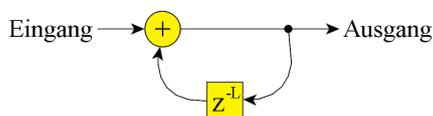
$$C = \frac{\sin((1 - v)\omega_0/2)}{\sin((1 + v)\omega_0/2)} \quad (9.19)$$

wobei  $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0/f_A$  sich aus der gewünschten Grundfrequenz  $f_0$  und Abtastfrequenz  $f_A$  berechnet (Steiglitz 1996, S. 120).

Bei der Berechnung der Koeffizienten muss man jedoch beachten, dass andere Filter im Wellenleiter, wie beispielsweise Dispersionsfilter oder Tiefpassfilter, auch eine Verzögerung des Signals bewirken können und daher in die Berechnung der Tonhöhe des Wellenleiters miteinbezogen werden müssen (Karplus und Strong 1983, S. 44; Jaffe und Smith 1983, S. 60).

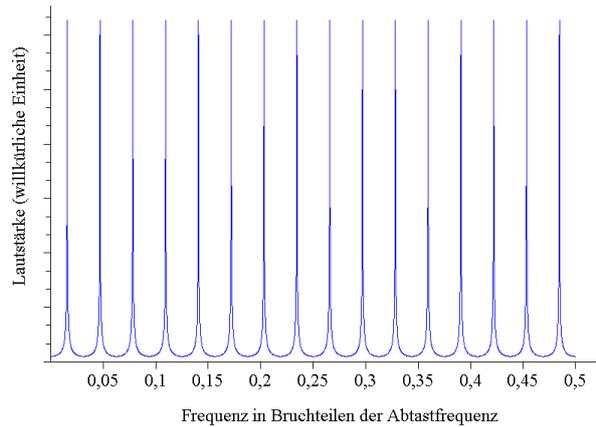
### Der Wellenleiter als Kammfilter

Wellenleiter lassen sich ungedeutet auf den Bereich der digitalen Signalverarbeitung als Filter deuten (Karjalainen, Välimäki und Tolonen 1998), da sie bei näherer Betrachtung nur die Implementierung von Kammfiltern sind. Bei Kammfiltern besteht das Ausgangssignal aus dem Eingangssignal, das mit dem verzögerten Ausgangssignal gemischt wird (siehe Abbildung 9.4). Es handelt sich also um einen Filter mit unendlicher Impulsantwort (IIR-Filter).



**Abbildung 9.4:** Signalflussgraph eines Kammfilters (nach Steiglitz 1996, S. 104).  $z^{-L}$  symbolisiert die Verzögerung des Signals um  $L$  Stellen.

Wie bei Wellenleitern bilden Verzögerungsleitungen die Grundlage von Kammfiltern. Ein Kammfilter mit der Verzögerung  $L$  entspricht im Grunde genommen einem Wellenleiter mit der Länge  $L/2$ , der mit zwei Verzögerungsleitungen der Länge  $L/2$  realisiert wird, so dass die wandernden Wellen nach  $L$  Stellen wieder zum Ausgangspunkt zurück kommen. Bei einfachen Wellenleitern wäre das Eingangssignal 0 und die Verzögerungsleitung bzw. der Ringpuffer schon mit den Werten der anfänglichen Auslenkung gefüllt.



**Abbildung 9.5:** Frequenzspektrum eines Kammfilters mit  $L = 32$  und  $R = 0,999$

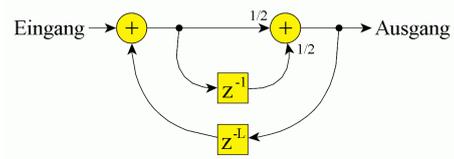
Die Übertragungsfunktion eines Kammfilters mit der Verzögerung  $L$  ist laut Steiglitz (1996, S. 101)

$$H(z) = \frac{1}{1 - R^L z^{-L}}. \quad (9.20)$$

Abbildung 9.5 zeigt den Frequenzgang des Kammfilters. Die Resonanzfrequenzen liegen bei ganzzahligen Vielfachen von  $1/L$ .

Da hohe Frequenzen bei einer gezupften Saite schneller verklingen als tiefe, wird auch hier wie bei Wellenleitern ein Tiefpassfilter in die Schleife der Verzögerungsleitung eingebaut. Der unter 9.1.9 vorgestellte Tiefpassfilter hat die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2}. \quad (9.21)$$

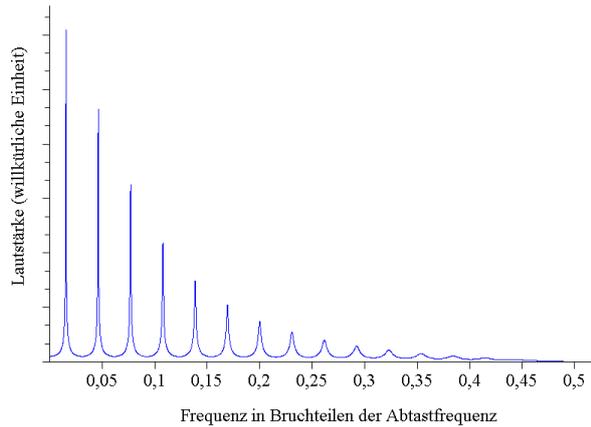


**Abbildung 9.6:** Signalflussgraph eines Saitenfilters (nach Steiglitz 1996, S. 110)

Abbildung 9.6 zeigt den Signalflussgraph des erweiterten Kammfilters. Zur Berechnung des Frequenzganges braucht man die Übertragungsfunktion. Da Kamm- und Tiefpassfilter nicht hintereinander geschaltet, sondern ineinander verschachtelt sind, ist es einfacher, die Übertragungsfunktion vom Diagramm abzuleiten, anstatt sie zu berechnen. Sei  $W$  das in den Tiefpassfilter fließende Signal, so ist die  $z$ -Transformierte dieses Signals laut Steiglitz (1996, S. 111)

$$W = X + R^{-L} z^{-L} Y, \quad (9.22)$$

wobei die Multiplikation mit  $z^{-L}$  als Verzögerung um  $L$  Stellen des rückgespeisten Signals  $Y$  gedeutet werden kann und  $X$  das Eingangssignal ist.



**Abbildung 9.7:** Frequenzspektrum eines Saitenfilters

Die Ausgabe und das in den Kammfilter rückgespeiste Signal  $Y$  sind daher

$$Y = \frac{1 + z^{-1}W}{2}. \quad (9.23)$$

Die Übertragungsfunktion eines Filters ist definitionsgemäß Ausgangssignal  $Y$  geteilt durch Eingangssignal  $X$  und folglich für den gesamten Filter (ebd.)

$$H(z) = \frac{Y}{X} = \frac{1 + z^{-1}}{2 - R^L z^{-L} - R^L z^{-L-1}}. \quad (9.24)$$

### 9.1.10 Optimierung

#### Ringpuffer

Die Effizienz von Wellenleitermodellen lässt sich steigern, wenn anstatt der zwei Datenfelder für die rechts- und linkswandernde Welle, in denen die Werte ständig verschoben werden müssen, ein Ringpuffer verwendet wird, der sowohl die rechts- und linkswandernde Welle enthält. Die Werte dieser Wellen werden relativ zu einem wandernden Zeiger, der auf den Beginn des zu lesenden Bereichs deutet, ausgelesen. Anstatt alle Werte zu verschieben, wird der Zeiger verschoben. Dazu muss die negative Reflexion der Wellen an den Enden der Saite jedoch schon berücksichtigt werden.

Ein Ringpuffer muss im Prinzip mit den selben Werten initialisiert werden wie die Verzögerungsleitungen des Wellenleiters. Da die wandernden Wellen an den Saitenenden jedoch negativ reflektiert werden und nach der Reflexion mit gespiegelter Form in die andere Richtung weiterlaufen, enthält der Ringpuffer eine Welle in unveränderter Form und eine punktsymmetrische Form, um den Reflexionen Rechnung zu tragen. Die Auslesung erfolgt immer rechts und links von einem wanderndem Zeiger, wobei eine der beiden Wellen negiert zu lesen ist (siehe Abbildung 9.8)

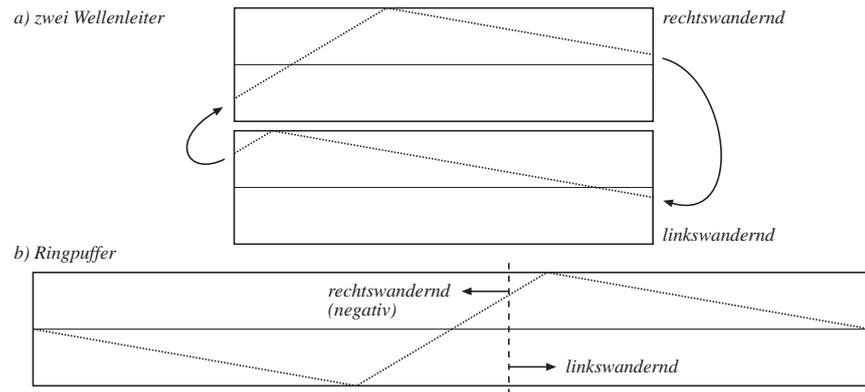


Abbildung 9.8: Ringpuffer

### Zusammenfassen von Rechnungen

Anstatt zwischen allen Punkten des Modells Berechnungen zur Dämpfung und Dispersion vorzunehmen, können alle Rechnungen auch an einer Stelle zusammengefasst werden, da es natürlich auf das gleiche herauskommt, ob ein Abtastwert bei der Wanderung über 100 Stellen bei jeder dieser 100 Übertragungen mal  $a$  gerechnet wird um beispielsweise frequenzunabhängige Dämpfung zu simulieren, oder ob er einmal mit  $a^{100}$  malgerechnet wird. Die einzige Auflage für dieses Zusammenfassen von Rechnungen ist, dass an Stellen, an welchen der Wellenleiter an andere Systeme gekoppelt ist, immer alle Berechnungen angewendet wurden. In einem Wellenleiter, dessen Ausgang bei  $sw[0]$  ist, reicht es, alle verschiebbaren Berechnungen auf der rechtswanderenden Welle zwischen den Punkten [1] und [0] anzuwenden.

### Umstellen der Signalverarbeitungskette

Da man den Wellenleiter an sich als Filter betrachten kann, entsteht der Klang eines Wellenleitermodells dadurch, dass ein Anregungssignal durch eine Kette von Filtern fließt:

$$\text{Anregung } E \rightarrow \text{Wellenleiter } W \rightarrow \text{Resonanzkörper } R \rightarrow \text{Ausgang } A$$

Lineare, kausale diskrete Systeme lassen sich durch ihre Impulsantwort repräsentieren (Unbehauen 1997, S. 41). Die Wirkung eines Filters auf ein Signal lässt sich berechnen, indem das Signal mit der Impulsantwort des Filters gefaltet wird (ebd.). Die oben stehende Kette lässt sich also auch als das Ergebnis von Faltungen ausdrücken (Karjalainen, Välimäki und Jánosy 1993, S.3):

$$A = E * W * R$$

Dabei ist  $A$  das Ausgangssignal,  $E$  das Eingangssignal, also die Wellenform der Anregung,  $W$  die Impulsantwort des Wellenleiters (von der Anregung durch Zupfen bis zum Steg) und  $R$  die Impulsantwort des Resonanzkörpers (vom Steg bis zu den Messmikrofonen).

Da der Faltungsoperator (\*) kommutativ ist (Unbehauen 1997, S. 41), lässt sich die Rechnung zu

$$A = E * R * W$$

umstellen und auf die gleiche Weise auch der Signalfluss zu

$$\text{Anregung } E \rightarrow \text{Resonanzkörper } R \rightarrow \text{Wellenleiter } W \rightarrow \text{Ausgang } A.$$

Wenn es sich bei dem Wellenleiter um ein lineares System handelt, können das Anregungssignal und die Impulsantwort des Resonanzkörpers also zu einem Signal zusammengefasst werden, das bereits die Informationen über die Verstärkungseigenschaften des Resonanzkörpers enthält, da diese im Wellenleiter nicht verzerrt werden (Karjalainen, Välimäki und Jánosy 1993, S.3).

Im Falle der Sitar handelt es sich bei der Saite jedoch um ein nichtlineares System (siehe 4.3.3), was eine solche Vereinfachung ausschließt.

## 9.2 Das Wellenleitermodell der Sitar

### 9.2.1 Die Modellierung des flachen Steges

Die Wechselwirkung der Saite mit einem flachen Steg in einem Wellenleitermodell zu modellieren ist nicht trivial. Ein flacher Steg, der ganz gerade ist, kann dadurch in das Modell integriert werden, dass die Werte der rechts- und linkswanderenden Wellen an den Stellen auf null gesetzt werden, wo die Auslenkung der Saite kleiner als null ist. Bei einem Steg, dessen Fläche durch eine Kurve repräsentiert wird, ist ein Nullsetzen der Wellenwerte jedoch nicht mehr möglich, da sich die Saite an den Stellen des Kontakts nicht auf der Lage null befindet.

Einige Aufsätze und Arbeiten beschäftigen sich mit Wellenleitermodellen von Saiten, die auf Hindernisse treffen, so zb. Rank (1996), Rank und Kubin (1997) oder Krishnaswamy und Smith (2003). Von den vorgeschlagenen Lösungen sind für das Modell der Sitar jedoch die meisten ungeeignet, da das Hindernis oft als einzelner Punkt angesehen wird, es sich bei der Sitar aber um mehrere direkt zusammenliegende Punkte handelt, die noch dazu am Ende der Saite zu finden sind.

Auf dem empirischen Wege wurde ein Verfahren entwickelt um herauszufinden, welche Form rechts- und linkswandernde Welle bei Kontakt mit dem Steg annehmen müssen, um die Schwingung der Saite so nachzuahmen, wie sie bei Burrige, Kappraff und Morshedi (1982), Bertrand (1992) und Valette und Cuesta (1993) beschrieben wurde.

Nicht so effizient aber viel verlässlicher ist die Verwendung eines FDM-Modells, wie es von Karjalainen (2002) und Kirshnaswamy und Smith (2003) vorgeschlagen wurde. Die für dieses Modell verwendeten Algorithmen entsprechen den unter 8.1.5 gezeigten Rechenwegen für ein nicht dispersives FDM-Modell. Nur der mit dem Steg wechselwirkende

Teil der Saite wird mittels FDM-Modelliert und an den Wellenleiter gekoppelt, wie bei Kirshnaswamy und Smith (2003). An einer Stelle überlagern sich FDM-Modell und Wellenleiter. Der Steg befindet sich auf der linken Seite der Saite, daher wandern die Werte vom FDM-Modell in der rechtswandernden Welle nach rechts. Da die Werte des FDM-Modells  $fdm[x]$  der Auslenkung entsprechen und für die Auslenkung  $s[x]$  der Saite gilt  $s[x] = rw[x] + lw[x]$ , lässt sich der Wert für die rechtswandernde Welle an der Stelle der Überlagerung  $rw[x]$  als

$$rw[x] = fdm[x] - lw[x]. \quad (9.25)$$

berechnen (Kirshnaswamy und Smith 2003, S. 236).

Die Wechselwirkung zwischen dem FDM-Modell und dem Steg geschieht auf gleiche Weise wie unter 8.2.4 beschrieben.

Die Länge des FDM-Modells muss mit Vorsicht gewählt werden. Ein Modell mit möglichst vielen Punkten pro Raumeinheit, also mit hoher räumlicher Auflösung, ist genauer bei der Berechnung der Wechselwirkung mit dem gebogenen Steg, da die Biegung des Steges viel besser dargestellt werden kann, dafür ist das Modell jedoch auch rechenintensiver.

## 9.2.2 Dämpfung mittels Tiefpassfiltern

Ein Teil der Dämpfung erfolgt durch die Wechselwirkung mit dem Steg, da die Auslenkung der Saite beschränkt wird. Um das Spektrum und die Hüllkurve des synthetischen Tones an das Original anzugleichen wird in die Verzögerungsleitung ein Filter, der die hohen Frequenzen stärker und die tiefen Frequenzen leicht dämpft, eingegliedert. Es handelt sich um einen einfachen Tiefpassfilter mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1},$$

wobei sich die Koeffizienten aus der gewünschten frequenzunabhängigen Dämpfung  $v$  und dem Faktor  $r$ , der die Tiefpasscharakteristik bestimmt, wie folgt berechnen:

$$b_0 = 1/(1 + r + v)$$

$$b_1 = r/(1 + r + v)$$

Dem Filter liegt die Idee des wandernden Durchschnitts zugrunde (siehe 9.1.9), wie man anhand der Differenzgleichung des Filters erklären kann:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] = \frac{x[n] + r \cdot x[n]}{1 + r + v}$$

Um die Durchlässigkeit für hohe Frequenzen zu erhöhen, wurde der Schwerpunkt bei der Berechnung des Durchschnitts auf einen Eingabewert verschoben, das geschieht indem  $r$  auf eine Zahl kleiner eins gesetzt wird, da so ein Anteil des ersten Wertes ( $1 \cdot x[n]$ ) aber nur ein Bruchteil des zweiten Wertes ( $r \cdot x[n-1]$ ) in die Rechnung einfließen. Die

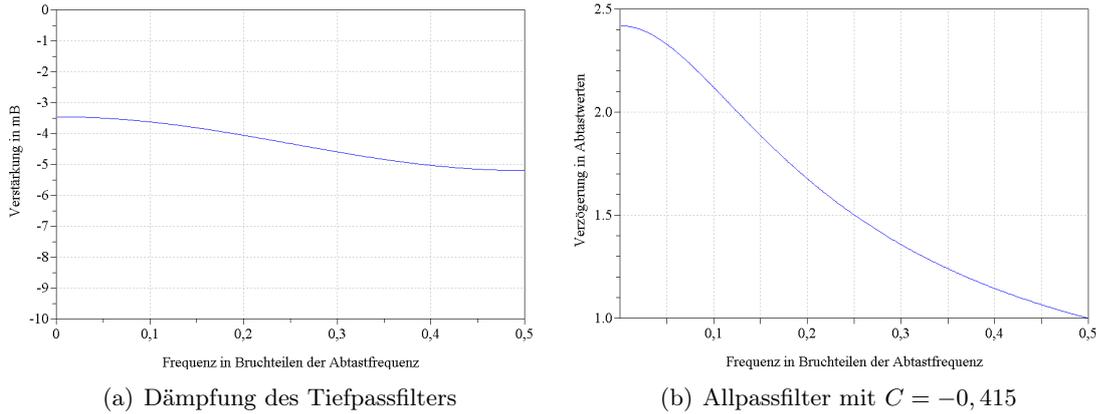


Abbildung 9.9: Die Kennlinien der verwendeten Filter

Summe wird nicht nur durch  $1 + r$  geteilt, sondern durch eine um  $v$  größere Zahl, um das Signal über alle Frequenzen abzuschwächen. Als gute Werte haben sich  $r = 0.001$  und  $v = 0.004$  erwiesen. Der Frequenzgang des Filters mit diesen Werten ist in Abbildung 9.9(a) zu sehen. Der Filter wird in jedem Durchgang angewendet, also müssen seine Dämpfungseigenschaften sehr schwach sein, weil das Signal sonst zu schnell verklingt. Die Dämpfung des vorgeschlagenen Filters liegt daher im Millibel-Bereich.

### 9.2.3 Dispersion mittels Allpassfilter

Zur Modellierung der Dispersion wurde im Modell eine Kaskade von Allpassfiltern erster Ordnung herangezogen, deren Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{C + z^{-1}}{1 + Cz^{-1}}$$

schon unter 9.1.9 im Zusammenhang mit der Feinstimmung von Wellenleitern genannt wurde. Der Koeffizient des Filters und die Anzahl der Filter wurden experimentell festgelegt. Im Unterschied zu dem zur Feinstimmung eingesetzten Filter handelt es sich hier um eine Kaskade mehrerer Filter mit negativem Koeffizient. Die besten Ergebnisse wurden mit 13 über den Wellenleiter verteilten Filtern und dem Koeffizienten  $C = -0,415$  erzielt.

Die durch einen Filter bewirkte frequenzabhängige Verzögerung in Abtastwerten entspricht der Phasenlaufzeit (Steiglitz 1996, S. 116)

$$\tau_{ph}(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega},$$

wobei

$$\varphi(\omega) = \arctan \left( \frac{\Im(H(\omega))}{\Re(H(\omega))} \right)$$

der Phasengang des Filters ist (Steiglitz 1996, S. 116). Abbildung 9.9(b) zeigt die mit dem genannten Koeffizienten erzielte Verzögerung.

Die Dispersion beim Wellenleitermodell kann durch Filter viel genauer gesteuert werden als die Dispersion beim FDM-Modell. Der Koeffizient unterliegt keinen Einschränkungen, wie es bei der Konstante des Dispersionsausdrucks der Fall war, weil sich der Frequenzgang des Filters unabhängig vom Wert des Koeffizienten berechnet (Steiglitz 1996, S. 116). Dadurch sind unendlich feine Abstimmungen möglich.

## 9.3 Akustische Analyse

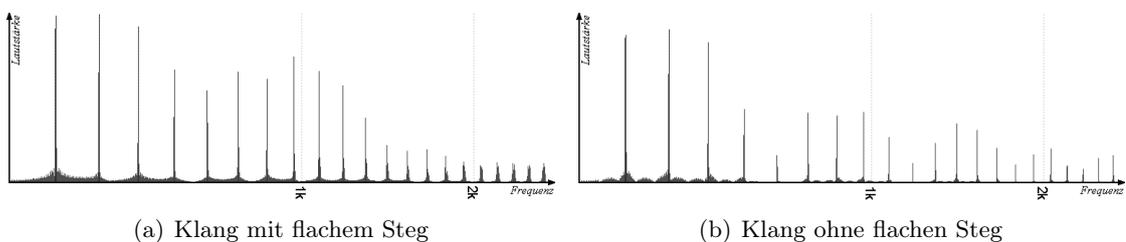
### 9.3.1 Das analysierte Signal

Der Wellenleiter mit der vorgegebenen Tonhöhe von  $f_0 = 130,8\text{Hz}$  hatte bei der Abtastrate  $f_A = 44100\text{Hz}$  die Länge  $L = f_A/(2f_0) \approx 168$ , wobei es sich bei 168 um einen abgerundeten Wert handelt, da die im Wellenleiter eingesetzten Filter die Länge sowieso erhöhen (siehe 9.1.9). Der Wellenleiter wurde bei ungefähr einem Fünftel seiner Länge auf 6,6mm ausgelenkt.

Im Gegensatz zum Masse-Feder-Modell und zum FDM-Modell wurde die Auflösung beim Wellenleitermodell nicht erhöht, da die Steigerung der Klangqualität sehr beschränkt war, während die Berechnung aufwändiger wurde. Bei einer Verlängerung des Wellenleiters müssen die eingesetzten Allpassfilter angepasst werden, was durch die Änderung der Koeffizienten und durch den Einsatz mehrerer Filter geschieht, wodurch sich die Rechenzeit erhöht. Genauso schwerwiegend ist in dieser Hinsicht auch die Verlängerung des Teils, der mittels FDM-Modell vergleichsweise aufwändig berechnet wird, um die Wechselwirkung mit dem Steg zu modellieren.

Dispersion und Dämpfung wurden mittels den oben genannten Filtern und den dort vorgeschlagenen Koeffizienten modelliert. Das Signal wurde für die Analyse nicht mit der Impulsantwort des Resonanzkörpers gefaltet.

### 9.3.2 Ungültigkeit des Young-Helmholtz Gesetzes



**Abbildung 9.10:** Frequenzspektrum zweier mittels Wellenleiter simulierter Klänge. Die Modelle wurden durch Zupfen bei ungefähr einem Fünftel der Saitenlänge angeregt.

In Abbildung 9.10 sind die Frequenzspektren zweier Töne zu sehen, die beide mit dem Wellenleitermodell erzeugt wurden. Die Saite wurde bei einem Fünftel ihrer Länge gezupft. Man sieht zwar, dass bei dem Ton ohne flachen Steg die Stelle des Zupfens einen Einfluss auf das Obertonspektrum hat, da jeder fünfte Teilton ziemlich leise ist, während bei dem Ton mit flachem Steg alle Teiltöne erklingen, aber bei den anderen beiden Modellen konnte dieser Effekt besser beobachtet werden. Der Grund hierfür liegt in der geringeren Auflösung des Modells. Um den Wellenleiter bei einem Fünftel seiner Länge zu zupfen, müsste die Stelle des Zupfens bei  $L/5 = 33,6$  liegen, der Index der Stelle muss jedoch ganzzahlig sein. Ein Runden auf 34 liefert ein ungenaues Ergebnis, wie in der Abbildung zu sehen ist.

### 9.3.3 Abwärts gleitende Formanten

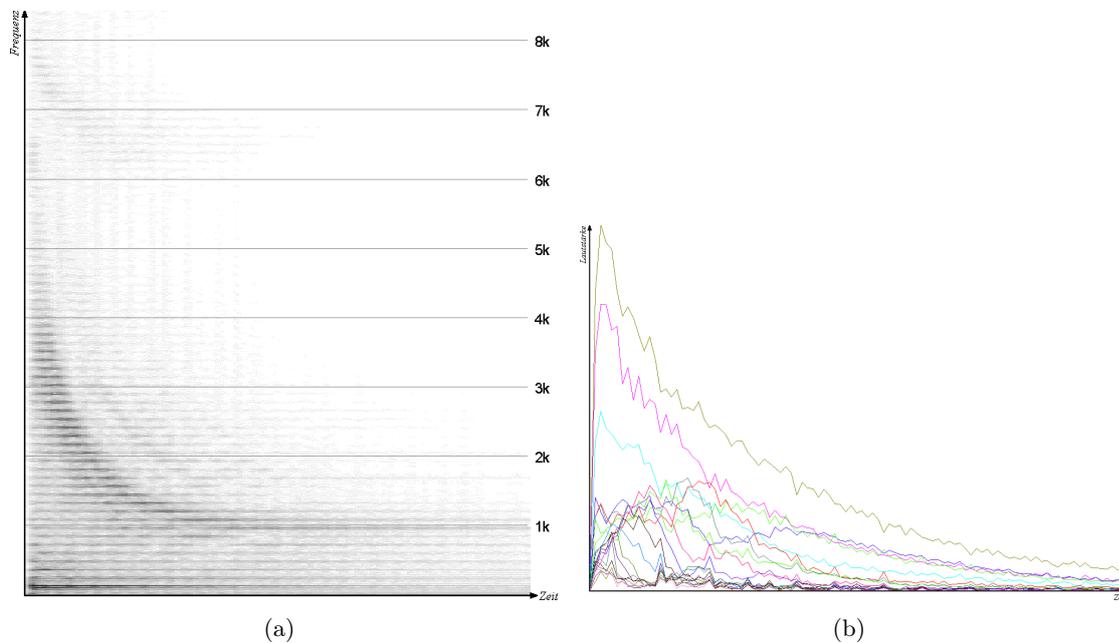
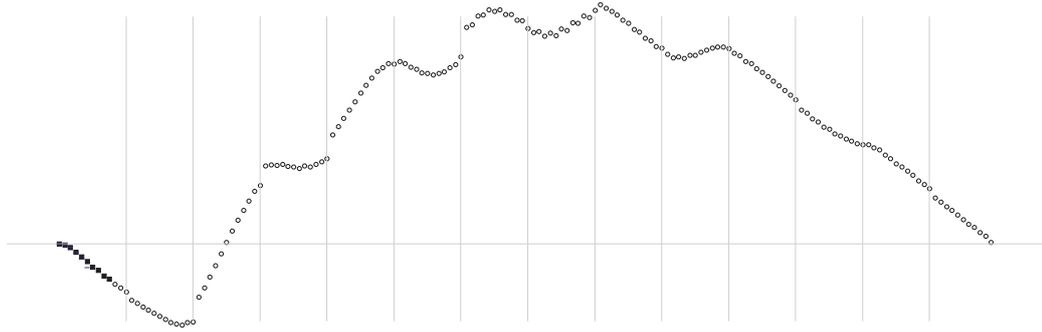


Abbildung 9.11: Spektrogramm (a) und Teiltonhüllkurven (b) des dispersiven Klanges

Das Spektrogramm in Abbildung 9.11a zeigt, dass auch das Wellenleitermodell abwärts-gleitende Formanten und obertonreiche Signale erzeugt.

### 9.3.4 Nichtlinearität

Wie auch bei den anderen beiden Modellen, zeigt der Teiltonverlauf (zu sehen in Abbildung 9.11b) die Nichtlinearität der Saitenschwingung.



**Abbildung 9.12:** Die mittels Wellenleitermodell berechnete Auslenkung der Saite zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die gefüllten Quadrate sind die mit dem FDM-Modell berechneten Stellen am Steg (kurze Striche, teilweise verdeckt). Die Lage der Allpassfilter ist mit senkrechten Linien gekennzeichnet.

### 9.3.5 Die Form der schwingenden Saite

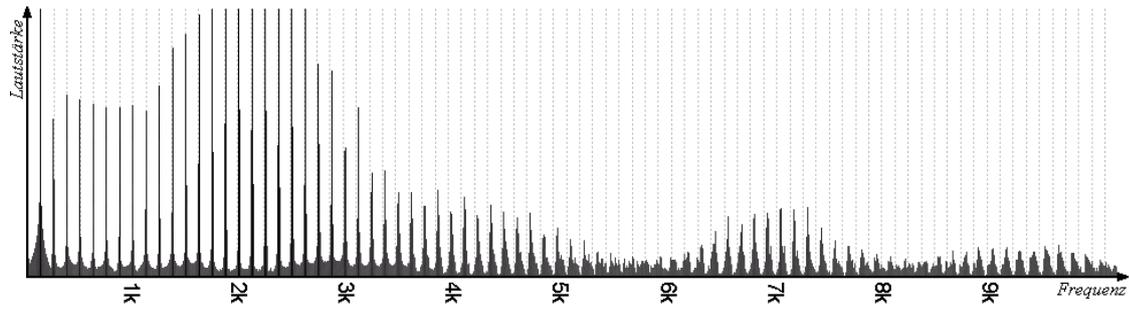
Natürlich lässt sich auch beim Wellenleitermodell eine grafische Ausgabe der Saitenschwingung erzeugen. Dies ist jedoch nur bedingt sinnvoll, da Dispersion und Dämpfung an wenigen Stellen im Modell zusammengefasst sind, und die Bereiche dazwischen die Auslenkung der Saite umso ungenauer wiedergeben, je weiter alle entsprechenden Berechnungen zurückliegen.

Abbildung 9.12 zeigt eine Augenblicksaufnahme der schwingenden Saite des Wellenleitermodells. Die gefüllten Quadrate sind die Stellen, an denen die Berechnung durch das FDM-Modell erfolgt. Die senkrechten Linien markieren die Stellen, an denen die Allpassfilter eingebaut sind. Die Allpassfilter befinden sich in dem Bereich im Ringpuffer, der die rechtswandernde Welle repräsentiert, weshalb auf der rechten Saiten dieser Stellen immer ein Einschnitt zu sehen ist, da an dieser Stelle die Berechnung für alle Stellen davor zusammengefasst ist.

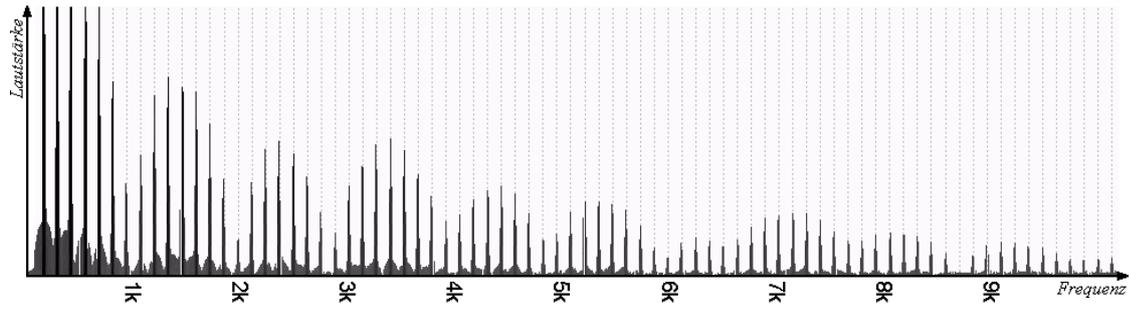
### 9.3.6 Dispersion

Die Allpassfilter im Wellenleitermodell haben den gewünschten Effekt der Dispersion, wie in Abbildung 9.13 oben anhand des gestreckten Teiltenspektrums zu sehen ist. Ein Klang ohne Allpassfilter weist kein gestrecktes Spektrum auf (siehe Abbildung 9.13 unten).

Genauere Untersuchungen des nichtdispersiven Tones bestätigen die Aussage von Valette und Cuesta (1993), dass die Dispersion für die abwärts gleitenden Formanten verantwortlich ist, diese fehlen in Abbildung 9.14(a), wo das Spektrogramm eines nichtdispersiven Tones gezeigt wird. Auch die Nichtlinearität ist ohne Dispersion viel schwächer, wie in Abbildung 9.14(b) anhand der Hüllkurven der Teiltöne zu sehen ist, die viel weniger miteinander interagieren.

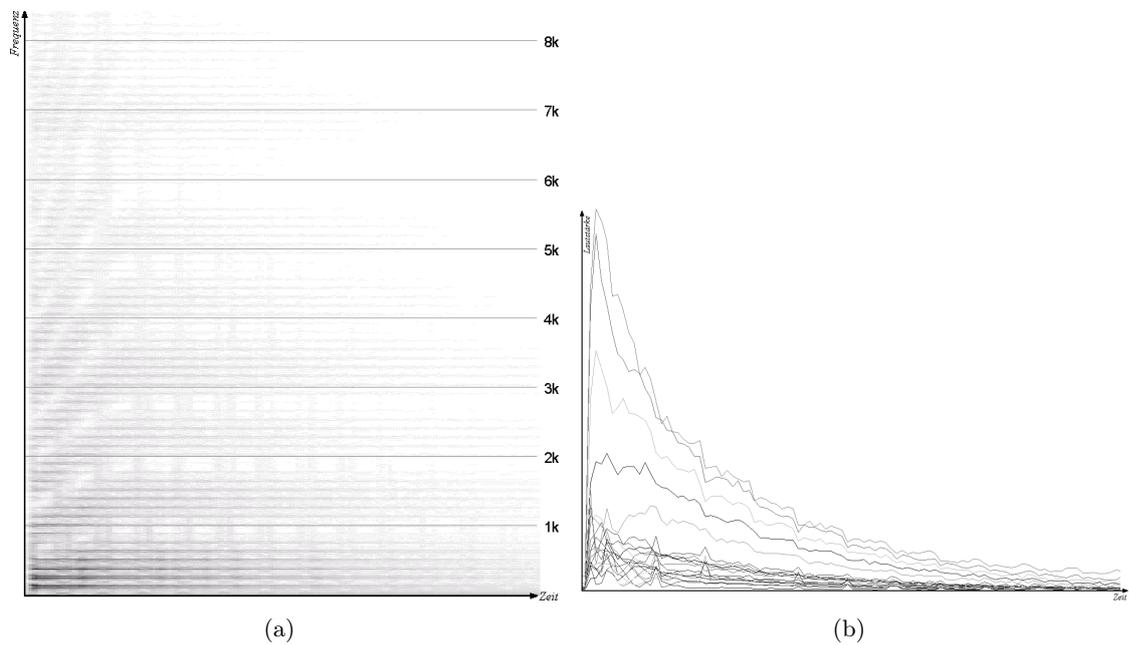


(a) Klang mit Dispersion



(b) Klang ohne Dispersion

Abbildung 9.13: Spektrogramme zweier mittels Wellenleitermodell simulierter Klänge. Die gepunkteten Linien markieren Vielfache des Grundtones.



(a)

(b)

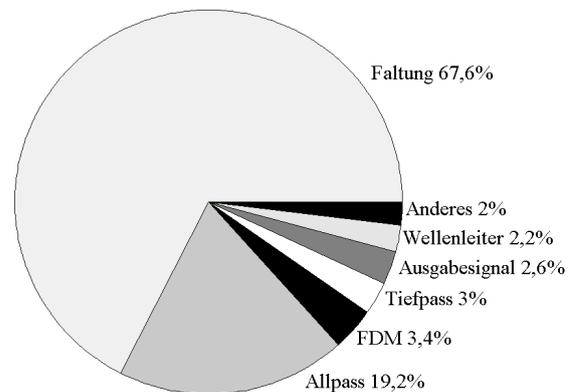
Abbildung 9.14: Spektrogramm (a) und Teiltonhüllkurven (b) eines simulierten, nichtdispersiven Klanges mit flachem Steg

## 9.4 Zusammenfassung und Bewertung

Der größte Vorteil des Wellenleitermodells ist seine Schnelligkeit, was die direkte Klangausgabe möglich macht. Für ein Modell mit einer Abtastrate von 44100Hz, einer Wellenleiterlänge von 168 Werten, wovon 7 Werte mittels der FDM berechnet wurden, 13 Allpassfiltern, einem Tiefpassfilter und Faltung des Saitensignals mit einer 4096 Werte langen Impulsantwort, war die benötigte Rechenzeit auf einem System mit einem 2GHz Pentium 4 Prozessor pro Sekunde rund 275ms.

Die verwendete geringe Auflösung brachte zwar einige Nachteile mit sich, wie die Unschärfe des Ortes bei der Anregung durch Zupfen (siehe 9.3.2), die an einer bestimmten Stelle geschehen soll, geschah aber um die Rechenzeit zu optimieren. Höhere Auflösungen brachten keine viel besseren Ergebnisse.

Abbildung 9.15 zeigt den Rechenaufwand der einzelnen Teile des Modells. Die Zahlen geben an, wie viel Prozent der Rechenzeit auf die einzelnen Schritte des Modells entfallen. Die Faltung ist bei weitem am aufwändigsten.



**Abbildung 9.15:** Der Rechenaufwand der einzelnen Teile eines Wellenleitermodells mit Faltung.

Die im Wellenleitermodell mögliche Berechnung in (annähernder) Echtzeit vereinfacht die Einstellung aller Parameter, da Änderungen sofort hörbar werden. Die Analyse des Klanges hat gezeigt, dass das Wellenleitermodell den anderen Modellen in nichts nachsteht. Dämpfung, Dispersion und Stimmung können durch die Änderung der Filterkoeffizienten sehr fein abgestimmt werden und das Modell kann durch das Hinzufügen von Filtern leicht erweitert werden. Dafür sind Filter, wie schon unter 6.3 erwähnt, eine Abstraktion natürlicher Vorgänge, bei denen die beobachteten Auswirkungen nachgeahmt werden und nicht die Vorgänge die hinter den Auswirkungen stehen, wie es beispielsweise bei der Dispersion im FDM-Modell gehandhabt wurde.

Auf Grund seiner Schnelligkeit und Flexibilität bietet das vorgeschlagene Modell dennoch eine effiziente und schnelle Versuchsumgebung, wenn man die Abstraktion beachtet und die durch die Zusammenfassung von Rechnungen entstandene Ungenauigkeit bei der grafischen Darstellung der Saitenbewegung kein Hindernis ist. Außerdem bietet das Modell einen sinnvollen Ansatz für die Entwicklung eines Synthesizers.

# 10 Abschließende Betrachtungen und Ausblick

## 10.1 Übersicht über die vorgeschlagenen Modelle

In dieser Arbeit wurden drei verschiedene physikalische Modelle der Sitar erstellt. Einen Überblick über die wichtigsten Unterschiede zwischen den Modellen gibt Tabelle 10.1.

In den simulierten Klängen aller Modelle konnten die wesentlichen Eigenschaften des Klanges der Sitar beobachtet werden. Dennoch weisen die Klänge große Unterschiede zum Original auf. Diese Unterschiede werden im nächsten Punkt besprochen, auch auf mögliche Lösungsansätze wird eingegangen. Danach geht es um Verbesserungs- und Erweiterungsmöglichkeiten der Modelle.

Der Großteil der besprochenen Lösungsansätze und Erweiterungsmöglichkeiten bezieht sich auf das Wellenleitermodell, welches in dieser Hinsicht am flexibelsten ist. Sein Klang steht den anderen in nichts nach. Folglich ist seine Weiterentwicklung eine einleuchtende Entscheidung, da es neben der Flexibilität auch den großen Vorteil der Schnelligkeit bietet. Für physikalische Untersuchungen könnten hingegen die anderen beiden Modelle besser geeignet sein, da die Modellierung weniger abstrakt erfolgt.

	<b>Masse-Feder-Modell</b>	<b>FDM-Modell</b>	<b>Wellenleitermodell</b>
<b>Modellierungsverfahren</b>	physikalisch	mathematisch	abstrakt
<b>Berechnung</b>	langsam	langsam	schnell
<b>Realitätsnähe</b>	nein (Dispersion)	ja	ja
<b>Stabilität</b>	unsicher	unsicher	sicherer
<b>Einsatzmöglichkeiten</b>	sehr flexibel	flexibel	sehr spezifisch
<b>Erweiterbarkeit</b>	einfach	umständlich	einfach
<b>Programmieraufwand</b>	hoch	gering	gering
<b>Feineinstellungen</b>	einfach (phys. Bezug)	schwierig	einfach (schnell)

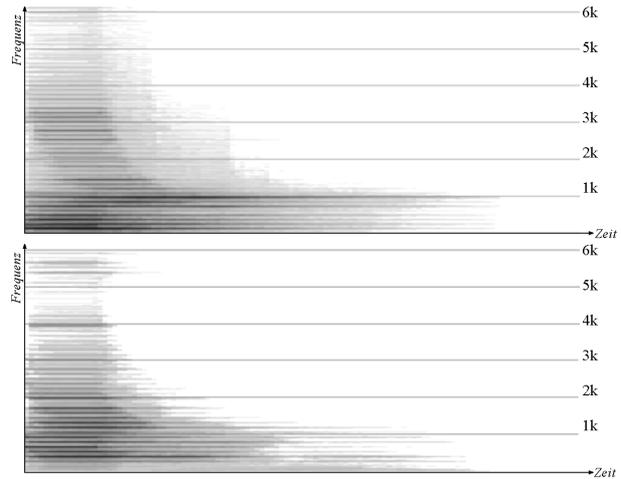
Tabelle 10.1: Überblick über die erstellten Modelle

## 10.2 Einschränkung der vorgeschlagenen Modelle

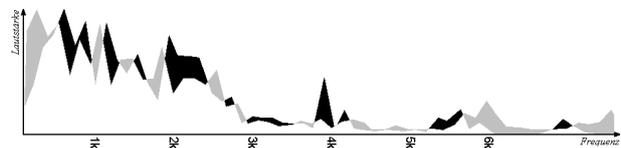
In vielerlei Hinsicht können die vorgeschlagenen Modelle verbessert werden. Obwohl die Analyse der Klänge gezeigt hat, dass die Modellierung der Sitar im wesentlichen erfolgreich durchgeführt werden konnte, gibt es einige frappierende Unterschiede zwischen den

**Abbildung 10.1:** Spektrogramm eines mittels FDM-Modell simulierten und mit der Impulsantwort des Resonanzkörpers gefalteten Tones (oben) und eines aufgezeichneten Sitartones (unten). Der Grundton ist beim Modell viel lauter, er weist lautere Obertöne, die viel langsamer verklingen (insbesondere im Bereich von 2 bis 3kHz). Die Teiltöne um 1kHz sind vergleichsweise stark ausgeprägt.

Anmerkung: Der abwärtsgleitende Formant ist nicht so gut ersichtlich, da das gewählte FFT-Fenster 32768 Abtastwerte bzw. 742ms lang war.



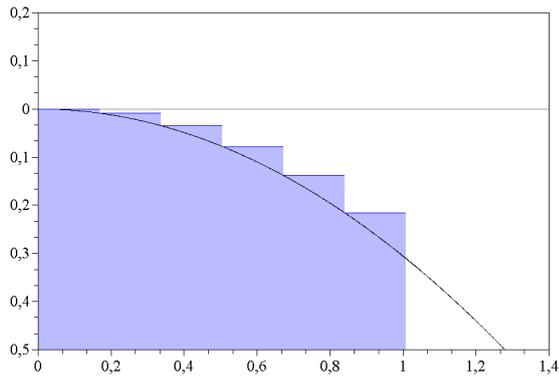
**Abbildung 10.2:** Vergleich der Frequenzspektren des Sitartones (schwarz) und des mittels FDM-Modell simulierten Tones (grau). Der gefärbte Bereich zeigt die Differenz zwischen den beiden Spektren. Die Farbe gibt an, welcher Ton lauter war.



synthetischen Signalen und den aufgezeichneten Klängen des echten Instruments.

1. Auch nach der Faltung der Signale aller Modelle mit verschiedenen Aufnahmen der Impulsantwort des Resonanzkörpers unterscheiden sich die Lautstärken der Teiltöne der simulierten Klänge relativ stark von denen der aufgenommenen Saite. Da die Aufnahme der Impulsantworten mit größter Sorgfalt geschah, liegt die Begründung für dieses Problem wahrscheinlich an einem der Punkte von unten (siehe Abbildung 10.2 und 10.1)
2. Das im FDM- und Wellenleitermodell mit Tiefpassfiltern modellierte Abklingen der Töne ist nur grobe Annäherung an die Realität. Die tatsächliche Art des Ausklingsens steht wahrscheinlich in engem Zusammenhang mit den Eigenschaften des Resonanzkörpers und sollte unter Einbeziehung dieser modelliert werden (siehe Abbildung 10.1).

Ein weiteres Problem der Modelle ist die grobe Auflösung. In allen vorgeschlagenen Modellen hatte der Steg immer ein Dreißigstel der Saitenlänge. Bei einem Modell mit der Länge 180 ist der Steg nur 6 Werte lang, was keine gute Repräsentation der Kurve des Steges ist (siehe Abbildung 10.3). Wenn die Saite mit geringer Amplitude schwingt, kann es sein, dass sie mit nur 2 Punkten in Kontakt kommt. Im Masse-Feder-Modell und im FDM-Modell wurde die Auflösung bei der Berechnung der analysierten Klänge auf ein Vierfaches erhöht, was eine deutliche Verbesserung des Klanges bewirkte. Im Wellenleitermodell konnte durch die Erhöhung der Auflösung zwar keine deutlich bessere Qualität



**Abbildung 10.3:** Die diskrete Nachbildung der von Vyasarayani, Birkett und McPhee (2009) vorgeschlagenen Stegform, siehe auch 6.4.4

für die analysierten Töne erzielt werden, eine feinere Darstellung des Steges wäre aber für leise Töne wichtig und für eine flexible Gestaltung der Stegform hilfreich.

### 10.3 Mögliche Verfeinerung der vorgeschlagenen Modelle

Die Eigenschaften der bestehenden Modelle können in vielerlei Hinsicht verbessert werden. Manche dieser Vorschläge könnten sich als Lösungen der obengenannten Probleme entpuppen.

1. Unter der Annahme, dass der Resonanzkörper ein lineares System ist, muss man davon ausgehen, dass er der Saite in Frequenzbereichen mit starker Resonanz Energie entzieht. Dieser Energieverlust wirkt sich als Dämpfung auf die Saite aus und sollte bei der Berechnung der Schwingung berücksichtigt werden. Dies könnte beispielsweise durch Bandsperren oder Kerbfilter geschehen, die die Frequenzen in den betreffenden Bereichen dämpfen.
2. Im Modell wird die Schwingung der Saite nur in der senkrechten Ebene berechnet. In Wirklichkeit wird die Saite jedoch nicht nur in dieser Ebene angeregt sondern schwingt auch parallel zum Steg. Diese Schwingung ist anderen Begrenzungen unterworfen, da die Saite nicht auf den Steg aufschlägt, sondern an ihm reibt oder aber in ihrer Schwingung gar nicht beeinträchtigt wird.
3. Im Modell wurden nur Scherwellen berücksichtigt, während andere Schwingungsformen wie Längswellen und Drehschwingungen vernachlässigt wurden. Insbesondere Längswellen könnten für die naturgetreue Modellierung des Klanges entscheidend sein. Ihre Grundfrequenz ist doppelt so hoch wie die der Längswellen, da sich die Spannkraft bei positiver als auch negativer maximaler Ausdehnung der Saite auf ihrem höchsten Wert befindet, während die durch Scherwellen verursachte Kraft am Steg zu den gleichen Zeitpunkten den Höchstwert und dann den Tiefstwert erreicht, was nur einen halben Zyklus einschließt (Fletcher und Rossing 1991, S. 210 und S. 221). Längswellen könnten daher der Schlüssel zur Erklärung der Lautheit des 2. Teiltons sein.

4. Im Wellenleitermodell ist die Faltung am rechenintensivsten. Durch eine Optimierung der Faltung könnte das Modell erheblich beschleunigt werden. Dies wäre durch die Kürzung der Impulsantwort des Resonanzkörpers und durch die Verwendung von schnelleren Algorithmen möglich. Wenn sich die Resonanzen des Körpers auf wenige Frequenzen reduzieren lassen, könnte die Faltung auch mittels IIR-Filter im Zeitbereich realisiert werden.
5. Bei der in den vorgeschlagenen Modellen verwendeten Saitenanregung durch Zupfen handelt es sich um eine Idealisierung des Vorgangs, da eine gleichmäßig ausgelenkte Saite, der völlige Stillstand vor dem Loslassen oder spitze Ecken an den Zupfstellen angenommen werden. Eine noch mehr auf Einzelvorgänge eingehende, wirklichkeitsnähere Simulation der Anregung hat wahrscheinlich einen sehr positiven Einfluss auf den Klang des Modells.
6. Im Wellenleitermodell werden für die Berechnung einer Saite pro Sekunde ungefähr 186ms ohne Faltung benötigt. Das ermöglicht jedoch nur die Modellierung von insgesamt 5 Saiten ohne Faltung. Um ein komplettes Modell einer Sitar mit 15 bis 20 Saiten zu erstellen, müssen die für diese Arbeit entwickelten Algorithmen also beschleunigt werden. Dies sollte vor allem bei den rechenintensiven Abläufen wie der Faltung, den Allpassfiltern und dem FDM-Modell geschehen.

### 10.4 Mögliche Erweiterungen der vorgeschlagenen Modelle

Vor allem das Wellenleitermodell lässt sich auf einfache und vielfältige Art und Weise erweitern. Je nach Einsatzgebiet sind andere Erweiterungsmöglichkeiten interessant.

1. Die Entwicklung einer geeigneten Eingabeschnittstelle ist eine wichtige Erweiterung. Für die Klangsynthese wäre eine Midischnittstelle denkbar oder die Implementierung des Modells als VST-Instrument. Man sollte aber eine breite Palette an Steuermöglichkeiten haben, damit die Spielweise so fein wie auf dem wirklichen Instrument geregelt werden kann, beispielsweise mittels Midisteuerbefehlen. Für den Einsatz als Versuchsumgebung wäre die Entwicklung eines Programmes nötig, das dem Benutzer die Änderung sämtlicher Eingangsdaten ermöglicht und neben der klanglichen und grafischen Ausgabe auch Einzelheiten über den dynamischen Zustand der Saite verrät.
2. Für sinnvollen musikalischen Einsatz muss das Modell selbstverständlich die feine Änderung der Tonhöhe zulassen. Dazu müssen im Wellenleitermodell die besprochenen Algorithmen für die Feinstimmung mittels Allpassfilter implementiert werden. Auch die vorhandenen Allpassfilter für die Dispersion müssen auf ein Modell, in dem die Tonhöhe durch Verkürzung oder Verlängerung des Wellenleiters oder die feinstimmenden Allpassfilter flexibel geändert werden kann, ausgerichtet werden,

denn Anzahl und Koeffizienten der Allpassfilter sind von der Tonhöhe des Modells abhängig. In dem beschriebenen Wellenleitermodell wurden Anzahl und Koeffizienten der Allpassfilter empirisch ermittelt, in einem Modell mit flexibler Tonhöhe sollte ein Weg gefunden werden, diese Werte als Funktion der Tonhöhe zu berechnen.

3. Ein komplettes Modell der Sitar sollte die Resonanz der anderen Saiten berücksichtigen, da diese für den Klang des echten Instruments wesentlich sind und teilweise nur diese Funktion erfüllen. Auch auf die Möglichkeit der Verwendung eines zweiten Resonanzkörpers könnte eingegangen werden.
4. Die vorgenommene Trennung in Schwingung der Saite und Verstärkung des Resonanzkörpers ist natürlich eine starke Vereinfachung der tatsächlichen Gegebenheiten. Die Wechselwirkungen zwischen Resonanzkörper und Saiten sind in Wirklichkeit viel komplexer, als durch die alleinige Verstärkung des Saitensignals mit den Eigenschaften des Resonanzkörpers (wie in dieser Arbeit) oder durch die Dämpfung der Saitenschwingung in Anlehnung an den Energieverlust durch die Abstrahlung des Körpers (wie etwas weiter oben unter 10.3 vorgeschlagen) erfasst werden kann (vgl. Bader 2005).
5. Ein komplettes Modell der Sitar sollte die Resonanz der anderen Saiten berücksichtigen, da diese für den Klang des echten Instruments wesentlich sind und teilweise nur diese Funktion erfüllen. Auch auf die Möglichkeit der Verwendung eines zweiten Resonanzkörpers könnte eingegangen werden.
6. In dem Modell dieser Arbeit wurde Zupfen als Anregungsmechanismus gewählt, weil es von den möglichen Arten der Anregung der Sitar saite am einfachsten zu modellieren war. In Wirklichkeit stehen dem Spieler jedoch auch andere Arten der Anregung zur Verfügung, beispielsweise das Mitreißen der ruhenden Saite, das Anschlagen der schwingenden Saite oder das Anschlagen der Saite mit dem Finger. Ein Modell, das eine breite Palette an Klangfarben bieten soll, muss möglichst viele Anregungsmechanismen berücksichtigen. Darüber hinaus ist die genaue Simulation für einen guten Klang entscheidend.
7. Beim Spielen der Sitar erzeugt der Musiker nicht nur die musikalischen Töne an sich, sondern auch Geräusche, die beim Spielen des Instruments entstehen. Beispielsweise binden Välimäki, Laurson und Erkut (2003) in ihrem Modell des Clavichords verschiedene Geräusche ein, um den Klang realistischer zu machen. Bei der Sitar entstehen solche Geräusche durch das Abgreifen der Saiten an den Bündeln oder durch die Berührung des *mizrāb*s mit der Saite. Ein realistisches Modell eines Instruments muss daher mehr bieten als nur die Töne des Instruments selbst.

## 10 Abschließende Betrachtungen und Ausblick

8. Durch wenige Abänderungen ließen sich aus einem Sitarmodell Modelle vieler anderer Instrumente mit flachem Steg erschaffen, wie der *tampūrā*, *vīṇā* oder *surbāhār*.

# Literaturverzeichnis

## **Adrien 1991**

Jean-Marie Adrien: The Missing Link. Modal Synthesis. In: Giovanni De Poli (Hrsg.): Representations of musical signals. Cambridge (v.s.A.) (u.a.): MIT Press, 1991. S. 269-298.

## **Andō 1981**

Yoshinori Andō: Structure and Acoustical Properties of a Chikuzen-Biwa. Proceedings of 4th ISCRCP, Preservation and Development of The Traditional Performing Arts. 1981. S.163-179.

## **Bader 2003**

Rolf Bader: Physical model of a complete classical guitar body. In: Proceedings of the Stockholm Musical Acoustics Conference 2003. Band 1. Stockholm, 6.-9.8.2003. S. 121-124.

## **Bader 2005**

Rolf Bader: Nonlinearities in the sound production of the classical guitar. In: Proceedings of the Forum Acusticum 2005. S. 685-689.

## **Bertrand 1992**

Daniel Bertrand: Les chevalets "plats" de la lutherie de l'Inde. Paris: Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1992.

## **Burridge, Kappraff und Morshedi 1982**

Robert Burridge, Jay Kappraff, Christine Morshedi: The Sitar String, a Vibrating String with a One-Sided Inelastic Constraint. In: SIAM Journal on Applied Mathematics. Band 42, Heft 6. 1982. S. 1231-1251.

## **Chakraborty 2008**

Shruti Chakraborty: Hindustani music and partition. 2008. <http://www.livemint.com/2008/09/01001730/Hindustani-music-and-partition.html?h=B> [30.4.2010]

## **Conklin 1999**

Harold A. Conklin: Generation of partials due to nonlinear mixing in a stringed instrument. In: Journal of the Acoustical Society of America. Band 105, Heft 1. 1999. S. 536-545.

## **Cuzzucoli und Lombardo 1999**

Giuseppe Cuzzucoli und Vincenzo Lombardo: A Physical Model of the Classical Guitar, Including the Player's Touch. In: Computer Music Journal. Band 23, Heft 2. 1999. S. 52-69.

## **Fletcher und Rossing 1991**

Neville Fletcher, Thomas D. Rossing: The physics of musical instruments. New York (u.a.): Springer-Verlag, 1991.

**Fletcher und Rossing 1998**

Neville Fletcher, Thomas D. Rossing: The physics of musical instruments. New York (u.a.): Springer-Verlag, 2. Auflage 1998.

**Fletcher, Blackham und Stratton 1962**

Harvey Fletcher, E. Donnell Blackham, and Richard Stratton: Quality of piano tones. In: Journal of the Acoustical Society of America. Band 34, Heft 6. 1962. S. 749-761.

**Grünbacher 2005**

Herbert Grünbacher: Digitale Signalverarbeitung. Vorlesungsskriptum. Technische Universität Wien. 2005(?).

**Hagedorn 1990**

Technische Mechanik 2. Festigkeitslehre. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch, 1990.

**Heath 1997**

Michael T. Heath: Scientific Computing. An Introductory Survey. New York (u.a.): McGraw-Hill, 1997.

**Hirschberg, Kergomard und Weinreich 1995**

A. Hirschberg, J. Kergomard, G. Weinreich (Hrsg.): Mechanics of musical instruments. Wien (u.a.): Springer, 1995.

**Jaffe und Smith 1983**

David A. Jaffe und Julius O. Smith: Extensions of the Karplus-Strong plucked string algorithm. In: Computer Music Journal. Band 7, Heft 2. 1983. S. 56-69.

**Jaros, Nussbaumer und Nussbaumer 1992**

Albert Jaros, Alfred Nussbauer und Peter Nussbaumer: Basiswissen 2. Wien, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky 2. Auflage 1992.

**Järveläinen, Välimäki und Karjalainen 1999**

Hanna Järveläinen, Vesa Välimäki, Matti Karjalainen: Audibility of Inharmonicity in String Instrument Sounds and Implications to Digital Sound Synthesis. In: Proceedings of the International Computer Music Conference. Peking, 22.-28.10.1999. S. 359-362.

**Junius 1974**

Manfred M. Junius: The sitar. The instrument and its technique. Wilhelmshaven: Heinrichshofen, 1974.

**Karjalainen 2002**

Matti Karjalainen: 1-D Digital Waveguide Modeling for Improved Sound Synthesis. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Orlando, 13.-17.5.2002. S. 1869-1872.

**Karjalainen und Smith 1996**

Matti Karjalainen und Julius O. Smith: Body Modeling Techniques for String Instrument Synthesis. In: Proceedings of the International Computer Music Conference. Hong Kong, 19.-24.8.1996. S. 232-239.

**Karjalainen, Backman und Pölkki 1993**

Matti Karjalainen, Juha Backman und Jyrki Pölkki: Analysis, modeling, and real-time sound synthesis of the kantele, a traditional finnish string instrument. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Minneapolis, 27.-30.4.1993. S. 229-232.

**Karjalainen, Laine und Välimäki 1991**

Matti Karjalainen, Unto K. Laine und Vesa Välimäki: Aspects in Modeling and Real-Time Synthesis of the Acoustic Guitar. In: Proceedings of the IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics. New Paltz, 20.-23.10.1991.

**Karjalainen, Välimäki und Jánosy 1993**

Matti Karjalainen, Vesa Välimäki und Zoltán Jánosy: Towards High-Quality Sound Synthesis of the Guitar and String Instruments. In: Proceedings of the International Computer Music Conference. Tokyo, 10.-15.9.1993. S. 56-63.

**Karjalainen, Välimäki und Tolonen 1998**

Matti Karjalainen, Vesa Välimäki und Tero Tolonen: Plucked-String Models: From the Karplus-Strong Algorithm to Digital Waveguides and Beyond. In: Computer Music Journal. Band 22, Heft 3. 1998. S. 17-32.

**Kock 1937**

Winston E. Cock: The Vibrating String Considered as an Electrical Transmission Line. In: Journal of the Acoustical Society of America. Band 8, Heft 4. 1937. S. 227-233.

**Kojs, Serafin und Chafe 2007**

Juraj Kojs, Stefania Serafin und Chris Chafe: Cyberinstruments via Physical Modeling Synthesis. Compositional Applications. In: Leonardo Music Journal. Band 17. 2007. S. 61-66.

**Kollmann, Schösser, Angert 2006**

Franz Gustav Kollmann, Thomas Franz Schösser, Roland Angert: Praktische Maschinenakustik. Berlin (u.a.): Springer, 2006.

**Krishnaswamy und Smith 2003**

Arvinth Krishnaswamy, Julius O. Smith: Methods for simulating string collisions with rigid spatial obstacles. In: IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics. New Paltz, 19.-22.10.2003. S. 233-236.

**Lambourg und Chaigne 1993**

Christophe Lambourg und Antoine Chaigne: Measurements and modeling of the admittance matrix at the bridge in guitars. In: Proceedings of the Stockholm Musical Acoustics Conference. Stockholm, 28.7.-1.8.1993. S.448-453.

**Lieber 1992**

E. Lieber: Dispersion und Dämpfung von Transversalschwingungen gespannter Saiten und ihre Bedeutung in der musikalischen Akustik. In: Fortschritte der Akustik, DAGA 1992, S. 253 - 256.

**Miranda 2002**

Eduardo Reck Miranda: Computer Sound Design. Synthesis techniques and programming. Oxford (u.a.): Focal Press, 2. Auflage 2002.

**Modartt**

Modartt: Pianoteq. The Pianoteq technology. [http://www.pianoteq.com/pianoteq3\\_tech](http://www.pianoteq.com/pianoteq3_tech) [30.4.2010]

**Müller**

Günter Müller: Finite Element Methode - FEM. <http://www.cadfem.de/unternehmen/portrait/finite-element-methode.html> [30.4.2010]

**Neukom 2005**

Martin Neukom: Signale, Systeme und Klangsynthese. Grundlagen der Computermusik. Bern (u.a.): Lang, 2. Auflage 2005.

**Park und Li 2008**

Tae Hong Park und Zhi Ye Li: All this buzz about the sitar. Physically modelingly speaking. 15th International Congress on Sound and Vibration. Daejeon (Korea), 6.-10.7.2008. (im Netz: <http://studentweb.tulane.edu/~zli3/sitarPaper.pdf> [30.4.2010])

**Rabenstein, Trautmann und Petrausch 2003**

Rudolf Rabenstein, Lutz Trautmann und Stefan Petrausch: Digitale Klangsynthese durch physikalische Modellierung. In: ASIM Mitteilungen. Heft 87. 2003.

**Raman 1921**

Chandrasekhara Venkata Raman: On some Indian stringed Instruments. In: Proceedings of the Indian Association for the Cultivation of Science. Band 7. 1921. S. 29-33. Eingelesene Version aus dem Internet: S. Ramaseshan (Hrsg.): Scientific Papers of C.V. Raman. Band 2. Bangalore: Indian Academy of Sciences, 1988. (im Netz: <http://hdl.handle.net/2289/2177> [30.4.2010])

**Rank 1996**

Erhard Rank: Simulation von Musikinstrumenten mit nichtlinearen dynamischen Systemen. Diplomarbeit an der Technischen Universität Wien. 1996.

**Rank und Kubin 1997**

Erhard Rank, Gernot Kubin: A waveguide model for slapbass synthesis. In: IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. München. 21.-24.4.1997. S.443-446.

**Rauhala und Välimäki 2006a**

Jukka Rauhala und Vesa Välimäki: Tunable dispersion filter design for piano synthesis. In: IEEE Signal Processing Letters. Band 13, Heft 5. 2006. S. 253-256.

**Rauhala und Välimäki 2006b**

Jukka Rauhala und Vesa Välimäki: Dispersion modeling in waveguide Piano Synthesis using Tunable Dispersion Filters. In: Proceedings of the 9th International Conference on Digital Audio Effects. Montreal, 18.-20.9.2006. S. 71-76.

**Reichel u.a. 1999a**

Hans-Christian Reichel, Robert Müller, Günter Hanisch, Josef Laub: Lehrbuch der Mathematik 7. Wien: Verlag öbv&hpt, 4. Auflage 1999.

**Reichel u.a. 1999b**

Hans-Christian Reichel, Robert Müller, Günter Hanisch, Josef Laub: Lehrbuch der Mathematik 8. Wien: Verlag öbv&hpt, 4. Auflage 1999.

**Russ 2004**

Martin Russ: Yamaha VL1. In: Sound on Sound. Juli 1994. (Im Netz verfügbar: Sound on Sound [http://www.soundonsound.com/sos/1994\\_articles/jul94/yamahav11.html](http://www.soundonsound.com/sos/1994_articles/jul94/yamahav11.html) [30.4.2010])

**Russ 2009**

Martin Russ: Sound Synthesis and Sampling. Oxford (u.a.): Focal Press, 3. Auflage 2009.

**S. Smith 1997**

Steven W. Smith: The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. San Diego: California Technical Publishing, 1997. (Im Netz verfügbar: [www.DSPguide.com](http://www.DSPguide.com) [30.4.2010])

**Sharma 1999**

Ravi Sharma: Sitar as I know. Delhi: Tauryatrikam Publication, 1999.

**Smith 1993**

Julius O. Smith: Physical Modeling using Digital Waveguides. In: Computer Music Journal. Band 16, Heft 4. 1992. S. 74-91.

**Spix 2000**

Jörg Spix: Verfahren der physikalischen Modellierung von Musikinstrumenten („Physical Modeling“). Diskrepanzen zwischen Modell und Vorlage. In: Bernd Enders, Joachim Stange-Elbe (Hrsg.): Musik und Neue Technologie 3. Musik im virtuellen Raum. Osnabrück: Universitätsverlag Rasch, 2000. (im Netz verfügbar: Wissenschaftliche Arbeiten von Jörg Spix [http://www.spix.homeip.net/~jgspix/deutsch/gr\\_scien.html](http://www.spix.homeip.net/~jgspix/deutsch/gr_scien.html) [30.4.2010])

**Steiglitz 1996**

Ken Steiglitz: A Digital Signal Processing Primer. With Applications to Digital Audio and Computer Music. Menlo Park: Addison-Wesley Publishing Company, 1996.

**Trautmann und Rabenstein 1999**

Lutz Trautmann, Rudolf Rabenstein: Digital sound synthesis based on transfer function models. In: IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics. New Paltz, 17.-20.10.1999. S. 83-86.

**Unbehauen 1997**

Rolf Unbehauen: Systemtheorie 1. Allgemeine Grundlagen, Signale und lineare Systeme im Zeit- und Frequenzbereich. München (u.a.): Oldenbourg 7. Auflage, 1997.

**Valette und Cuesta 1993**

Claude Valette, Christian Cuesta: *Mécanique de la corde vibrante*. Paris (u.a.): Hermes, 1993.

**Välimäki und Takala 1996**

Vesa Välimäki und Tapio Takala: Virtual Musical Instruments. Natural Sound Using Physical Models. In: *Organised Sound*. Band 1, Heft 2. 1996. S. 75-86.

**Välimäki, Laurson und Erkut 2003**

Vesa Välimäki, Mikael Laurson und Cumhur Erkut: Commuted Waveguide Synthesis of the Clavichord. In: *Computer Music Journal*. Band 27, Heft 1. 2003. S. 71-82.

**Vyasarayani, Birkett und McPhee 2009**

Chandrika P. Vyasarayani, Stephen Birkett und John McPhee: Modeling the dynamics of a vibrating string with a finite distributed unilateral constraint. Application to the sitar. In: *Journal of the Acoustical Society of America*. Band 125, Heft 6. 2009. S. 3673-3682.

**Wong, Leung und Lau 1999**

Andy K. K. Wong, S. H. Leung und W. H. Lau: Design and Implementation of a Real-Time Digital Resonator for the Electric Cello. In: *Computer Music Journal*. Band 23, Heft 4. 1999. S. 48-58.

**Woodhouse 2004**

Woodhouse: Plucked Guitar Transients: Comparison of Measurements and Synthesis. In: *Acta Acustica united with acustica*. Band 90. 2004. S. 945-965. (Im Netz verfügbar: [http://www2.eng.cam.ac.uk/~jw12/JW%20PDFs/Guitar\\_II.pdf](http://www2.eng.cam.ac.uk/~jw12/JW%20PDFs/Guitar_II.pdf) [30.4.2010])

# Anhang

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Entwicklung eines physikalischen Modells der Sitar, mit dessen Hilfe die Berechnung des Klanges des Instruments möglich sein soll. Die Arbeit gibt daher erst einen Überblick über Arten der physikalischen Modellierung von Musikinstrumenten, bevor die akustischen Besonderheiten der Klangentstehung bei der Sitar besprochen werden. Im zweiten Teil der Arbeit werden drei verschiedene Modelle der Sitar-Saite erstellt, die alle unterschiedliche Vorzüge haben: ein Masse-Feder-Modell, ein FDM-Modell und ein Wellenleitermodell. Auf spezielle Schwierigkeiten bei der Programmierung dieser Modelle wird genauer eingegangen. Vergleiche zwischen den auf verschiedene Art modellierten Klängen und aufgenommenen Sitar-Tönen dienen zur Bewertung der Modelle. Das vorgestellte Wellenleitermodell liefert bei drei- bis vierfacher Echtzeit Ergebnisse, die den Klängen des echten Instruments bereits sehr ähnlich sind.

## Lebenslauf

### Studium an der Universität Wien

*seit Oktober 02*

#### **Musikwissenschaft**

Schwerpunkt: systematische Musikwissenschaft

Wahlfächer

#### **Deutsch als Fremdsprache**

DaF-Zertifikat: Jänner 2007

#### **Japanische Sprache**

*Oktober 01–Februar 10*

#### **Sprachen und Kulturen Südasiens und Tibets**

Schwerpunkt: Hindi und Kulturgeschichte

#### **Wahlfach**

Biologie

Austauschstudient an der Universität Aix-Marseille III von September 06 bis Juli 07

Abschluss: Februar 2010, BA

## Arbeitserfahrung

*März 10–Juni 10*

Praktikant in der **SIPU Forschungsgruppe** der Universität Ostfinnlands, Joensuu

*März 10*

Mitarbeit bei dem **Buch** „In Freiheit leben, das war lange nur ein Traum“ (Kösel Verlag)

*März 09–Jänner 10*

**Hindilehrer** am Sprachenzentrum der Universität Wien

*Oktober 07–Mai 09*

**Deutschlehrer** im Mama lernt Deutsch-Projekt bei Station Wien

*September 07*

**Praktikant** im Annemarie-Schimmel-Haus und am Aitchison College in Lahore

*Juli 06*

**Deutschlehrer** in einem Sommerkurs des Humboldtinstituts in Kirchheim u.T.

*Februar–Juni 05*

**DaF-Praktikum** an der Arbaev Universität und der BGU in Bischkek

*Juli 04*

Leiter eines **Intensivkurses** mit Schwerpunkt EDV-Fachwortschatz am ÖI Bratislava

## Tätigkeiten

Gründungsmitglied des Vereins Talaash ([www.talaash.at](http://www.talaash.at))

Sänger bei verschiedenen Chören

**Kontakt:** [sadjad.siddiq@gmx.at](mailto:sadjad.siddiq@gmx.at)