universität wien

DIPLOMARBEIT

Wie mache ich die Erde flach? – Kugelgeometrie und Kartennetzentwürfe

Melanie Schaumüller

Angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, Juli 2010

Matrikelnummer:	0306314
Studienkennzahl laut Studienblatt:	A 190 406 456
Studienrichtung laut Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geographie und Wirtschaftskunde
Betreuer:	Ao. Prof. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

2 Kugelgeometrie **9**

2.1 Allgemeine Begriffsdefinitionen 9
2.2 Definitionen zur sphärischen Trigonometrie 10
2.3 Warum ist die Titanic gesunken? 13
2.4 Verortung auf der Sphäre 15
2.4.1 Kartesische Koordinaten 15
2.4.2 Sphärische Koordinaten 16
2.4.3 Geographische Koordinaten 16
2.4.4 Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten 19
2.4.5 Umrechnung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten 19
2.4.6 Umrechnung von sphärischen Koordinaten in geographische Koordinaten 20
2.4.7 Umrechnung von geographischen Koordinaten in sphärische Koordinaten 20
2.5 Kugelzweiseit 20
2.6 Kugelzweieck 21
2.7 Kugeldreiseit 21
2.8 Kugeldreieck 23
2.9 Sätze für Kugeldreiecke 25
2.9.1 Hat sich Pythagoras geirrt? 31
2.9.2 Kongruenzsätze für sphärische Dreiecke 32
2.10 Sätze der sphärischen Trigonometrie 33
2.10.1 Sphärischer Sinussatz 33
2.10.2 Sphärischer Seitenkosinussatz 35
2.10.3 Sphärischer Winkelkosinussatz 37
2.10.4 Sphärischer Kotangenssatz 37
2.11 Pentagramma mirificium und Nepersche Regel 38

3 Verzerrungsverhältnisse **41**
3.1 Überblick über elementare Differentialgeometrie 42
3.1.1 Kurven 42
3.1.2 Oberflächen 43
3.1.3 Abbildung von Oberflächen 45
3.2 Verzerrungen 45
3.2.1 Anwendung der Theorie auf Karten 48
3.2.2 Längenverzerrung versus Längentreue 50
3.2.3 Winkelverzerrung versus Winkeltreue 51
3.2.4 Flächenverzerrung versus Flächentreue 51

4 Verbindung zur Geographie **53**
4.1 Von der Scheibe zum Geoid 53
4.2 Das Gradnetz der Erde 54
4.3 Karten 54
4.4 Kursbestimmung 55
4.4.1 Orthodrome 56
4.4.2 Loxodrome 58
4.4.3 Mischform 60
4.5 Peilung 62
4.5.1 Fremdpeilung 62
4.5.2 Eigenpeilung 64

5 Kartennetzentwürfe **65**
5.1 Polyederabbildung 65
5.2 Trimetrische Abbildung 67
5.3 Abbildungen mittels Figuren 68
5.4 Azimutalabbildungen 72
5.4.1 Orthographische Projektion 74
5.4.2 Stereographische Projektion 75
5.4.3 Gnomonische Projektion 77
5.4.4 Mittabstandstreuer Azimutalentwurf 78
5.4.5 Flächentreuer Azimutalentwurf 79
5.5 Kegelabbildungen 82
5.5.1 Abstandstreuer Kegelentwurf mit einem längentreuen Breitenkreis 82
5.5.2 Abstandstreuer Kegelentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen 84
5.5.3 Winkeltreuer Kegelentwurf 86
5.5.4 Flächentreuer Kegelentwurf 86
5.6 Zylinderabbildungen 87

5.6.1 Abstandstreuer Zylinderentwurf 87
5.6.2 Flächentreuer Zylinderentwurf 89
5.6.3 Winkeltreuer Zylinderentwurf 90
5.7 Weitere Kartenentwürfe 93
5.7.1 Flächentreuer Enwurf von Mollweide 93
5.7.2 Armadillo Projektion von Raisz 95

Danksagung

Ich möchte mich vor allem bei meinen Eltern, meiner Schwester und meinem Freund bedanken, die mir viel Verständnis und Geduld entgegengebracht und mich in schwierigen Phasen immer wieder motiviert haben. Meinen Eltern sage ich herzlich Dank für die Finanzierung des Studiums. Meinem Freund Matthias danke ich für den Rückhalt und die Unterstützung, die er mir gegeben hat.

Ein großer Dank gebührt meinem Diplomarbeitsbetreuer Dr. Peter Raith. Er hat mich während meines gesamten Studiums begleitet, motiviert und Ratschläge gegeben.

Ich danke allen, die mich auf diesem Weg unterstützt haben.

Kapitel 1

Einleitung

Bei der Suche nach einem geeigneten Thema war es mir sehr wichtig eine Anwendung der Theorie zu finden, die große Relevanz für den Alltag besitzt. Außerdem fand ich die Idee sehr spannend, eine Brücke zwischen meinen beiden Studienfächern schlagen zu können. Daher beschloss ich in Absprache mit meinem Betreuer, mich mit dem Thema Kugelgeometrie zu beschäftigen. Die Umsetzung der Theorie in der Geographie ergibt die Erstellung der Kartennetzentwürfe.

Im Kapitel Kugelgeometrie werden zu Beginn wichtige Begriffe zur Erarbeitung der Kugelsätze definiert. Es werden verschiedene Koordinatensysteme erarbeitet und Formeln vorgestellt, um sie ineinander überzuführen. Große Bedeutung hat das Kugeldreieck, da sich hier viele Sätze ableiten lassen. Des weiteren werden Sätze der sphärischen Trigonometrie hergeleitet. Danach wird anhand des Pentagramma mirificium die Nepersche Regel erarbeitet.
Das Kapitel Verzerrungsverhältnisse gibt einen kurzen Überblick über die Differentialgeometrie, die wir zur Feststellung von Verzerrungen benötigen. Der Abschnitt Verzerrungen behandelt dann die Anwendung der Theorie auf die Kugel sowie die Berechnung der Längen-, Flächen- und Winkelverzerrung. Es wird auch definiert, was Längen-, Flächen- und Winkeltreue bedeutet und welche Forderungen dafür erfüllt sein müssen.
Danach kommt das Kapitel Verbindung zur Geographie, wo nun die direkte Anwendung auf die Erde erfolgt. Es werden das Gradnetz besprochen und Formeln für die Kursbestimmung und Peilung gefunden.
Im letzten Kapitel, Kartennetzentwürfe, werden verschieden Abbildungsmöglichkeiten unterschieden. Es erfolgen auch Beispiele zu Azimutal-, Kegel- und Zylinderentwürfen, die mit Karten ergänzt sind, um die Unterschiede zwischen den Abbildungen leichter sehen zu können.

In den Kapiteln und Abschnitten wird die verwendete Literatur entweder zu Beginn angeführt oder am Ende eines Absatzes in einer Klammer erwähnt. Vergleiche werden so: (vgl. [.] Seite x) angeführt und Zitate so: ([.] Seite x).

Kapitel 2

Kugelgeometrie

Dieses Kapitel bietet einen Überblick über die wichtigsten Definitionen und Sätze zur Kugel und der Kugeloberfläche. Es werden verschiedene Koordinatensysteme zur Angabe von Kugelpunkten vorgestellt und auch die Umrechnungsverfahren angeführt. Somit ist gewährleistet, dass Formeln in das gewünschte Koordinatensystem umgerechnet werden können. Es werden sowohl Ausschnitte der Kugel, wie z.B. das Kugelzweiseit und -dreiseit vorgestellt als auch Figuren auf der Sphäre, wie das Kugelzweieck und -dreieck, behandelt. Danach werden die bedeutendsten Sätze für sphärische Dreiecke mit Herleitung oder Beweis dargeboten.

2.1 Allgemeine Begriffsdefinitionen

Definition 1 und 2 sind aus [9] von Seite 3 entnommen.

Definition 1. Mit Abstand zweier Punkte A und B bezeichnen wir den Funktionswert $d(A, B)$ oder $|AB|$ einer Funktion d, die jedem Punktepaar eine nicht-negative reelle Zahl zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt:

1. Für zwei Punkte A und B gilt $|AB| = 0$ genau dann, wenn die Punkte A und B identisch sind.

2. Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB| = |BA|$.

3. Für drei beliebige Punkte A, B und C gilt stets die Dreiecksungleichung $|AB| + |BC| \geq |AC|$.
   Genau dann, wenn eine der drei Gleichungen
   $|AB| + |BC| = |AC|$,
   $|AC| + |CB| = |AB|$,
   $|BA| + |AC| = |BC|$,

   erfüllt ist, liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden.

Eine Funktion mit oben genannten Eigenschaften heißt Abstandsfunktion.

Ein Punkt A der Kugel im $\mathbb{R}^3$ kann mit kartesischen Koordinaten angegeben werden. $A(x, y, z)$

Definition 2. Daher kann man dann den Abstand zweier Punkte $A(x, y, z)$ und $B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ im $\mathbb{R}^3$, wie folgt, definieren:

$$d(A, B) = |AB| = \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 + (\bar{z} - z)^2}.$$

Umrechnung von Winkelmaßen zwischen Bogen- und Gradmaß

Ein Winkel α kann im Bogenmaß oder Gradmaß angegeben werden. Im Bogenmaß hat ein voller Kreis 2π Radiant (kurz rd). Ein voller Kreis im Gradmaß misst 360 Grad (kurz °). Zur Umrechnung von Bogen- auf Gradmaß wird folgende Formel verwendet:

$$\alpha(^\circ) = \frac{180\alpha(\text{rd})}{\pi}.$$

Zur Umrechnung von Grad- auf Bogenmaß verwendet man:

$$\alpha(\text{rd}) = \frac{\pi\alpha(^\circ)}{180}.$$

(vgl. [1], Seite 27)

An und für sich wird in der Mathematik die Darstellung in Radiant verwendet. Da hier der Zusammenhang zur Geographie beschrieben wird und in der Geographie das Gradmaß größere Anwendung findet, werden in dieser Arbeit alle in den Formeln verwendeten Winkel im Gradmaß angegeben oder eingesetzt, es sei denn, es wird explizit anders angeführt.

2.2 Definitionen zur sphärischen Trigonometrie

Definition 3, 6 und 8 sind nach [9] Seite 2 bzw. 6 formuliert.

Definition 3. Die Menge aller Punkte P des Raumes, die vom Punkt M den Abstand R haben, nennt man eine Sphäre S mit dem Mittelpunkt M, also

$$S = \{P : |MP| = R\}.$$

Anstatt des Begriffs Sphäre wird auch der Ausdruck Kugeloberfläche verwendet.

Definition 4. Die Oberfläche der gesamten Kugel ist $4R^2\pi$.

Definition 5. Ein Punkt P der Sphäre wird Kugelpunkt genannt.

Definition 6. Die Menge aller Punkte P des Raumes, die vom Punkt M einen Abstand kleiner oder gleich R haben, nennt man eine Kugel mit dem Mittelpunkt M, also

$$K = \{P : |MP| \leq R\}.$$

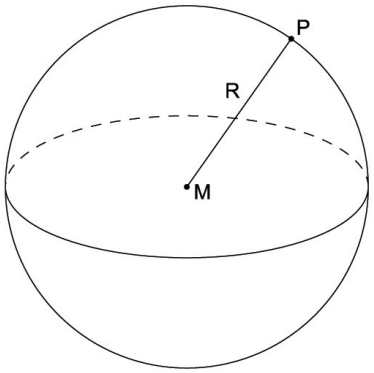

Abbildung 2.1: Kugelpunkt.

Definition 7. Das Volumen der Kugel berechnet man mit $\frac{4}{3}R^3\pi$.

Definition 8. Alle Kreise der Sphäre, die den gleichen Mittelpunkt M wie die Kugel besitzen, heißen Großkreise g. Alle anderen Kreise der Sphäre werden Kleinkreise k genannt.

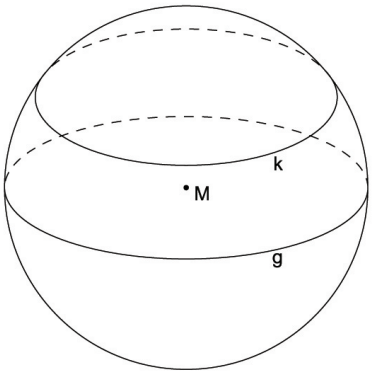

Abbildung 2.2: Großkreis und Kleinkreis.

Großkreise werden in manchen Büchern als Hauptkreise bezeichnet. Die Kleinkreise werden auch Nebenkreise genannt.
In der Ebene verbinden Geraden zwei Punkte und laufen über die Punkte hinaus, sind also unendlich. Diese Verbindung ist auch die kürzeste, die es gibt.
In der Sphärik erfüllen Großkreise – auch genannt Kugelgeraden – diese Funktion. Sie verbinden zwei Kugelpunkte miteinander. Diese stellt ebenfalls die kürzeste Verbindungsmöglichkeit auf der Kugeloberfläche dar. Ein Unterschied zur Ebene besteht darin, dass Kugelgeraden endlich sind.

Definition 9. Jeder Großkreis hat den Umfang $U_g = 2R\pi$ oder im Gradmaß angegeben: $U_g = 360°R$.

(vgl. [11] Seite 45)

Definition 10. Jeder Kleinkreis hat den Umfang $U_k = 2R\pi\cos\varphi$. Der Umfang im Gradmaß kann mit der Formel $U_k = 360°\, R\cos\varphi$ angegeben werden.

(vgl. [11] Seite 45)

Definition 11. Zwei Punkte P und P' der Sphäre, die auf einem Großkreis liegen und maximalen Abstand haben, heißen diametrale Punkte.

(vgl. [1] Seite 47)

Dieser Abstand in Definition 11 wird verstanden wie jener, der in Definition 1 und Definition 2 auf Seite 9 erklärt wird. Daraus folgt, dass dieser maximale Abstand $d(P, P') = 2R$, also der Durchmesser der Kugel, ist.

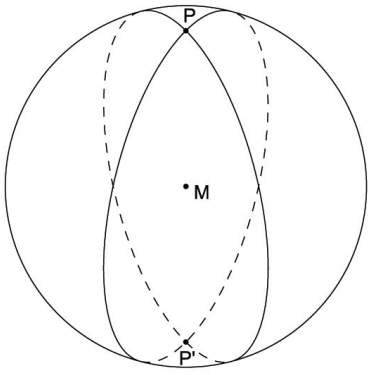

Abbildung 2.3: Gegenpunkt.

Manchmal wird der diametrale Punkt P' von Punkt P auch Gegenpunkt genannt.

Ist P' Gegenpunkt von P, so ist auch P Gegenpunkt von P'.
Der Schnitt zweier Großkreise liefert immer diametrale Punkte wie in Abbildung 2.3 ersichtlich.

Definition 12. Unter einem Grosskreisbüschel versteht man den Schnitt von zwei oder mehr Großkreisen, die alle den Punkt P und seinen Gegenpunkt P' enthalten.

(vgl. [1] Seite 47)

Folgende Definition und nähere Erklärung sind aus [20] Seite 292 – 293.

Definition 13. Jedem Punkt P lässt sich eine eindeutig bestimmte Kugelgerade p zuordnen. Diese Kugelgerade erhält man indem man die Ebene, die durch M geht und auf die Strecke $\overline{PM}$ normal steht, mit der Sphäre schneidet (siehe Abbildung 2.4). Der Punkt P wird Pol und die Kugelgerade p wird Polare von P genannt.

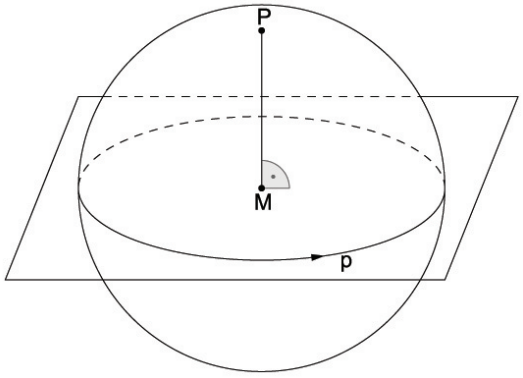

Abbildung 2.4: Pol und Polare.

Mit einer weiteren Bedingung lässt sich auch für jede Polare p ein eindeutig bestimmter Pol P angeben. Um dies zu erreichen, versieht man die Polare mit einer Durchlaufrichtung. Bewegt man sich in Durchlaufrichtung auf der Polaren, so ist der Pol linksseitig anzutreffen. Für diametrale Punkte ist zwar der Großkreis, der die Polaren für beide Punkte darstellt, gleich, aber die Umlaufrichtung ist entgegengesetzt.

2.3 Warum ist die Titanic gesunken?

Die Titanic, das damals größte Passagierschiff der Welt, erlangte durch sein Unglück traurige Berühmtheit. Dieses Schiff wurde zwischen 1909 und 1912

in Belfast gebaut und galt aufgrund seiner Konstruktion als unsinkbar. Auf der Jungfernfahrt von Southampton über Cherbourg und Queenstown nach New York rammte es Eisberge und sank. Dies warf natürlich die Frage auf, warum dieses Schiff überhaupt in Gewässern mit Eisbergen unterwegs war. Für diese Jahreszeit üblich, war die Reiseroute von Schiffen so gelegt, dass die Entfernung zwar größer, aber die Gefährdung durch Eisberge nicht so hoch war. Der Kapitän der Titanic wählte dennoch den kürzeren, aber auch gefährlicheren Kurs, weil er einen Geschwindigkeitsrekord aufstellen und einige Tage vor dem erwarteten Termin in New York ankommen wollte. (vgl. [7]) Die gewählte Route lässt sich ganz gut mittels der kürzesten Entfernung von zwei Punkten auf der Sphäre erklären.

Um die kürzeste Verbindung von zwei Punkten A und B auf der Kugeloberfläche zu bestimmen, benötigt man den Großkreis g auf dem beide Punkte liegen.

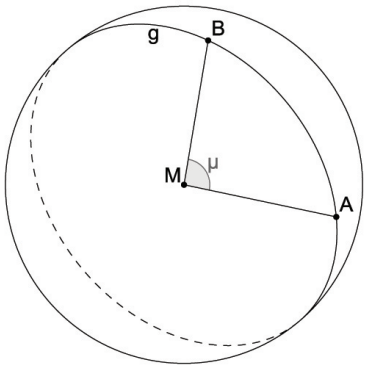

Abbildung 2.5: Sphärische Entfernung.

Bei [3] auf Seite 7 wird die Kugelstrecke und die Polare sinngemäß wie folgt, definiert.

Definition 14. Unter einer Kugelstrecke $\widehat{AB}$ versteht man die kürzeste Verbindungslinie zwischen A und B auf der Kugeloberfläche. Die Punkte A und B teilen den Großkreis g in zwei Abschnitte. Der kürzere der beiden Großkreisbögen ist nun die Kugelstrecke $\widehat{AB}$.

Definition 15. A und B sind keine diametralen Punkte und es gilt $A \neq B$. Der sphärische Abstand $|\widehat{AB}|$ der Punkte A und B auf der Kugeloberfläche wird definiert durch die Länge der Kugelstrecke $\widehat{AB}$. Man nennt dies auch sphärische Entfernung. Der sphärische Abstand ist somit definiert wie die

Bogenlänge, wobei

$$\mu = \angle\, AMB \text{ und daher } |\widehat{AB}| = \frac{R\pi\mu}{180^\circ}.$$

Laut Definition folgt dann, dass $|\widehat{AB}| < 180^\circ$ ist, denn der sphärische Abstand von Gegenpunkten ist $180^\circ R$.
Somit kann die Polare auch so definiert werden:

Definition 16. Unter der Polaren p versteht man die Menge aller Punkte A, die vom Punkt P aus den sphärischen Abstand $|\widehat{PA}| = 90^\circ$ haben.

(vgl. [17] Seite 77)

2.4 Verortung auf der Sphäre

Zur eindeutig bestimmten Angabe von Kugelpunkten gibt es zwei verschiedene Systeme: Die erste Möglichkeit ist die Bestimmung mittels des kartesischen Koordinatensystems, wo jeweils ein geordnetes Tripel einen Punkt eindeutig bestimmt. Die zweite Variante, die auch größere Anwendung findet, ordnet jedem Punkt zwei Winkel und einen Radius zu. Ein Nachteil gegenüber des ersten Systems ergibt sich aus der Tatsache, dass beide Pole auf der Sphäre durch die Angabe von zwei Winkeln und dem Radius verschiedene Darstellungen haben und somit nicht eindeutig bestimmt sind. Die geographischen Koordinaten sind eine Variation der zweiten Möglichkeit und werden in der Kartographie verwendet.

2.4.1 Kartesische Koordinaten

Im kartesischen Koordinatensystem kann jeder Punkt eindeutig bestimmt werden. Der Ursprung $O = (0, 0, 0)$ ist der Ausgangspunkt der Koordinatenachsen. Das System erhält man, indem man vom Punkt O aus eine positive x-Achse erstellt. positiven x-Achse ausgeht. Die positive y-Achse entsteht durch die Drehung der x-Achse um 90° gegen den Uhrzeigersinn. Die z-Achse wird in analoger Weise erzeugt, wobei hier die y-Achse um 90° gedreht wird, wie in Abbildung 2.6 ersichtlich. Die yz-Ebene steht dann normal auf die x-Achse. In unserem Fall gilt $O = M$. Wird jede Achse in entgegengesetzter Richtung über den Punkt O hinaus verlängert, so erhält man die negativen Achsen. Mit Hilfe der drei Achsen kann jeder Punkt P der Sphäre so angegeben werden:

$$P = (x, y, z).$$

Diese drei Angaben beschreiben, wie weit man vom Ursprung aus in Richtung x, y und z gehen muss.

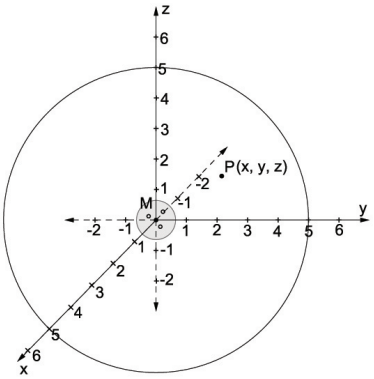

Abbildung 2.6: Kartesische Koordinaten.

2.4.2 Sphärische Koordinaten

Für eine beliebige Figur oder Punkte im $\mathbb{R}^3$ werden die Koordinaten wie folgt angegeben: φ ist der Winkel auf der xy-Ebene und liegt zwischen

$$-\pi < \varphi \leq \pi \text{ oder im Gradmaß angegeben zwischen } -180° < \varphi \leq 180°.$$

In manchen Konventionen läuft der Winkel auch von $0° \leq \varphi < 360°$. Der zweite Winkel ϑ beschreibt die Neigung zwischen der z-Achse und der xy-Ebene. Dieser bewegt sich zwischen

$$0 \leq \vartheta \leq \pi \text{ oder } 0° \leq \vartheta \leq 180°.$$

Der Radius R wird durch die Länge des Abstands $|\overline{MP}|$ ermittelt. Zur Angabe des Punktes P benötigt man also den Radius und zwei Winkel, sodass gilt

$$P = (R, \varphi, \vartheta).$$

2.4.3 Geographische Koordinaten

Da die Anwendung in der Kartographie hier dargestellt wird, sind in diesem Abschnitt jeweils Nord- und Südpol eingezeichnet und durch N und S abgekürzt.

Auf der Erdoberfläche gibt es den Nord- und Südpol. Die beiden Pole sind diametrale Punkte. Die Polare wird Äquator und die dazu parallelen Kleinkreise werden Breitenkreise genannt. Der Äquator teilt die Erde in eine nördliche und eine südliche Halbkugel. Als Meridiane oder Längenkreise werden

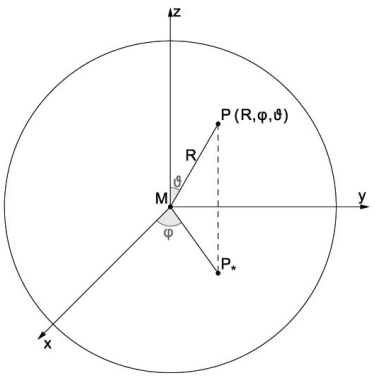

Abbildung 2.7: Sphärische Koordinaten.

all jene Großkreise bezeichnet, die durch die beiden Pole gehen. Für den Erdradius wird meist ein Wert von 6370 km oder 6371 km genommen. (vgl. [17] Seite 75 – 76)
Ein Punkt P wird durch das Koordinatenpaar (φ, λ) verortet, wobei der Winkel φ nicht derselbe ist wie bei den sphärischen Koordinaten. Zur Bestimmung des Winkels φ, sucht man eine Tangentialebene im Pol N, die man durch die Kugel parallel in Richtung des diametralen Punktes S schiebt (siehe Abbildung 2.8). Die Ebene schneidet die Kugel in Kleinkreisen. Die Ausnahme bildet der Fall, dass der Mittelpunkt M Element der Ebene ist. Dann ist die Schnittfläche natürlich ein Großkreis, nämlich der Äquator. Der Radius des Kleinkreises wird mit r bezeichnet. Im Pol N beträgt der Winkel $\varphi = 90°$, im Pol S ist $\varphi = -90°$ und im Äquator ist $\varphi = 0°$.
(vgl. [20] Seite 291)

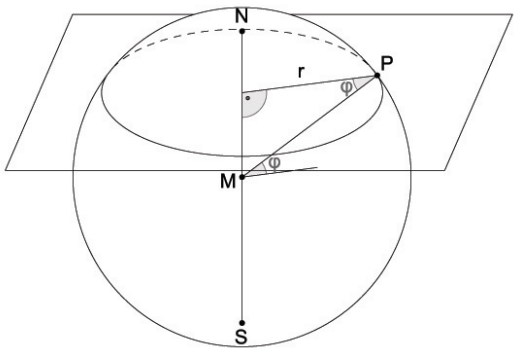

Abbildung 2.8: Die geographische Breite.

Die geographische Länge wird durch den Winkel λ wiedergegeben. Diese Größe beschreibt den Winkel zwischen einem fixen Bezugsmeridian und einem anderen Längenkreis. Falls $\lambda = 0°$ ist, befindet man sich auf dem Bezugsmeridian. Bei einem Winkel von $\lambda = 180°$ bewegt man sich auf der anderen Hälfte des Bezugsmeridians. Ist $\lambda = -45°$, so findet man den angegebenen Meridian links des Bezugsmeridians.
Daraus folgt für die Kugelkoordinaten:

$$0 \leq r \leq R \text{ und } r = R\cos\varphi.$$

Daher gilt:

$$-180° < \lambda \leq 180° \text{ und } -90° \leq \varphi \leq 90°.$$

In der Anwendung wird bei der Angabe von Punkten auf der Erdoberfläche auf negative Winkel verzichtet. Allerdings kann man mit dieser Methode nur ein Viertel aller Punkte der Erdoberfläche beschreiben. Damit diese Angabe trotzdem eindeutig ist, wird zu der Winkelangabe λ auch noch der Zusatz östlich oder westlich von Greenwich ergänzt, wobei nun mit der Angabe östlich alle negativen Werte abgedeckt werden. Um ein einheitliches Gradnetz und die dazugehörigen geographischen Koordinaten weltweit zu vereinheitlichen, traf man die Übereinkunft, dass durch den Ort Greenwich – liegt in Großbritannien – der Nullmeridian verläuft. Der Winkel φ wird mit der Angabe nördliche oder südliche Breite versehen, wodurch die negativen Winkel auf der Südhalbkugel mit der Angabe südlich exakt angegeben werden.

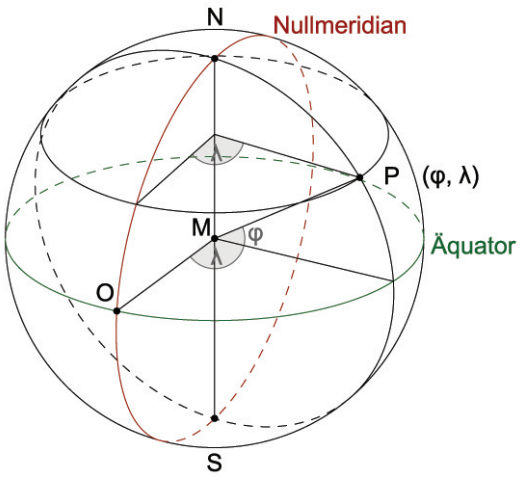

Abbildung 2.9: Kugelkoordinaten.

Damit kann die Angabe auch ohne negative Winkel erfolgen und lautet:

$$0° \leq \lambda \leq 180° \text{ östlich oder westlich von Greenwich.}$$

Der Winkel φ gibt die geographische Breite wieder, hier gilt:

$$0° \leq \varphi \leq 90° \text{ nördliche oder südliche Breite.}$$

Da bei der Angabe von Kugelpunkten auf der Erdoberfläche sich der Radius nicht ändert, wird er meist nicht explizit angegeben. Daher kommt man auf diese Schreibweise der geographischen Koordinaten:

$$P = (\varphi, \lambda).$$

Aus oben definierten Kugelkoordinaten kann man folgern, dass

$$r = R \Longleftrightarrow \varphi = 0°.$$

Dies bedeutet: Falls der Radius des Breitenkreises gleich dem Kugelradius ist, dann beträgt die geographische Breite $\varphi = 0°$ und man befindet sich auf dem Äquator.
Ist der Radius des Breitenkreises gleich 0, dann kann der Winkel φ entweder $90°$ oder $-90°$ betragen, das heißt man beschreibt den Nord- oder den Südpol. Kurz ausgedrückt:

$$r = 0 \Longleftrightarrow \varphi = \pm 90°.$$

2.4.4 Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten

Mittels unten stehenden Formeln kann man die kartesischen Koordinaten in sphärische Koordinaten überführen.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y < 0 \end{cases},$$

$$\vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

2.4.5 Umrechnung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten

Zur Berechnung der kartesischen Koordinaten setzt man in die folgenden Formeln ein.

$$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi,$$
$$y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi,$$
$$z = r \cdot \cos\vartheta.$$

2.4.6 Umrechnung von sphärischen Koordinaten in geographische Koordinaten

Große Unterschiede zwischen diesen allgemeinen Kugelkoordinaten und den geographischen Koordinaten ergeben sich beim Winkel ϑ_K. Während bei der allgemeinen Methode der Nordpol auf 0° liegen würde, so ist in der anderen Systematik hier der Äquator anzutreffen. Der Radius R ist bei beiden Darstellungen derselbe, deshalb braucht man hier keine Transformation vornehmen. Um bei den geographischen Koordinaten den Winkel λ_G zu erhalten, braucht man ihn nur mit dem Winkel φ_K der sphärischen Koordinaten gleichsetzen:

$$\lambda_G = \varphi_K.$$

Den Winkel φ_G der geographischen Koordinaten berechnet man mit

$$\varphi_G = 90° - \vartheta_K.$$

2.4.7 Umrechnung von geographischen Koordinaten in sphärische Koordinaten

Auch die Umkehrung ist hier relativ einfach zu erreichen. Der Radius R ist wiederum so zu belassen. Die anderen Umrechnungen führt man mit diesen Formeln durch:

$$\varphi_K = \lambda_G,$$
$$\vartheta_K = 90° - \varphi_G.$$

2.5 Kugelzweiseit

Bei Definition 11 steht, dass der Schnitt zweier Großkreise einen Punkt P und dessen Gegenpunkt P' liefert. In Abbildung 2.10 findet man eine Graphik zur folgenden Defintion.

Definition 17. Ein Kugelzweiseit ist eine Spalte der Kugel. Die Begrenzungslinien dieser Spalte sind einerseits die Großkreisbögen h und i und andererseits die Strecke $\overline{PP'}$. Die Punkte P und P' bilden die Eckpunkte des Kugelzweiseits.

Proposition 1. *Das Volumen eines Kugelzweiseits wird berechnet mit*

$$V = \frac{R^3 \pi \lambda}{270°}.$$

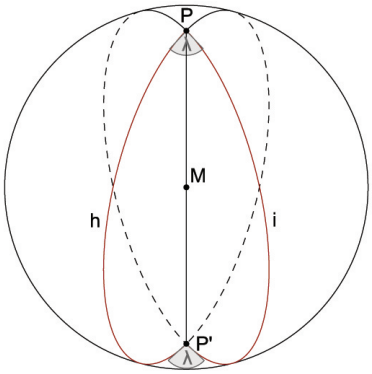

Abbildung 2.10: Kugelzweieck.

2.6 Kugelzweieck

Definition 18. Ein Kugelzweieck ist ein Ausschnitt der Sphäre, der durch den Schnitt zweier Großkreise entsteht.

Oft wird statt Kugelzweieck auch der Begriff sphärisches Zweieck verwendet. Jedes Zweieck hat stets zwei gleich große Winkel λ und zwei gleich lange Seiten, die immer die Länge $R\pi$ haben, da P und P' diametrale Punkte sind und ein Großkreis $U_g = 2R\pi$ hat.

Das Kugelzweieck und Kugelzweiseit sind typische Figuren der sphärischen Trigonometrie, denn sie treten in der ebenen Geometrie nicht auf.

Proposition 2. *Der Flächeninhalt F eines Kugelzweiecks wird wie folgt definiert:*

$$F = \frac{R^2\pi\lambda}{90^\circ}.$$

(vgl. [1] Seite 66)
In Abbildung 2.10 ist das bewusst erzeugte Kugelzweieck rot umrahmt. Mit den beiden sich schneidenden Großkreisen entsteht aber nicht nur ein Kugelzweieck, sondern noch drei andere Zweiecke. Eines davon ist ident. Die beiden anderen sind ebenfalls identisch und im Allgemeinen mit dem rot umrahmten Zweieck nicht deckungsgleich. Der Winkel dieser beiden Zweiecke beträgt $180^\circ - \lambda$.

2.7 Kugeldreiseit

Definition 19. Unter einem Dreiseit versteht man einen Ausschnitt der Kugel. Dieser wird gebildet indem man vom Kugelmittelpunkt Strahlen durch

die Eckpunkte des Kugeldreiecks legt. Je zwei Strahlen bilden eine Ebene. Der Schnitt dieser drei Ebenen mit der Kugel liefert ein Kugeldreiseit.

(vgl. [17] Seite 73)

Manchmal werden auch die Begriffe Dreikant oder dreiseitige Ecke verwendet.

Definition 20. Kugeldreiecke, deren Seiten und Winkel kleiner als 180° sind, heißen konvexe Dreikante.

([17] Seite 76)

Dieser Abschnitt ist nach [20] Seite 299 aufgebaut.

Als anschauliche Erklärung für Definition 20 nimmt man ein Kugeldreiseit und klappt es auseinander, sodass man einen Kreissektor erhält. Dass dieser Kreissektor kein voller Kreis sein kann, geht aus der Überlegung hervor, dass dieses Dreiseit nicht zu einer Ecke faltbar wäre und somit eine Halbkugel darstellen würde. Daher definiert man für ein richtiges Kugeldreiseit, dass die Summe der Seiten im Kugeldreieck kleiner als 360° ist.

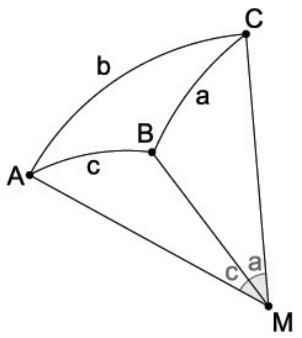

Abbildung 2.11: Kugeldreikant.

Ein besonderes Dreiseit ist das Kugeloktant. Dies ist ein Achtel einer Kugel. Folglich ist auch das Volumen des Kugeloktants ein Achtel des Kugelvolumens, also

$$V = \frac{R^3\pi}{6}.$$

(vgl. [17] Seite 71)

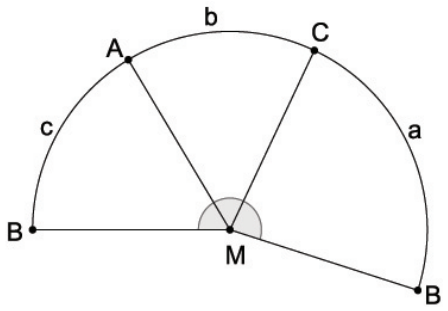

Abbildung 2.12: Kugeldreikant auseinandergeklappt.

2.8 Kugeldreieck

Definition 21. Drei Kugelpunkte A, B und C bilden ein Kugeldreieck, falls sich die Punkte paarweise durch Großkreise verbinden lassen. Die Seiten des Dreiecks heißen $a = \widehat{BC}, b = \widehat{AC}, c = \widehat{AB}$.

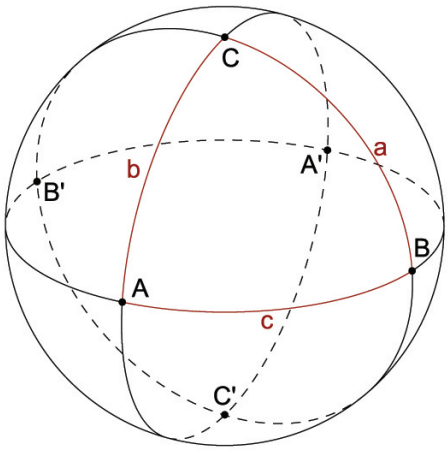

Abbildung 2.13: Kugeldreieck.

Zeichnet man nicht nur die Kugelpunkte und -strecken, sondern auch die Großkreise, auf denen die Strecken liegen, ein, so erhält man mit dem gewünschten Kugeldreieck auch noch andere Dreiecke.
Das Dreieck $A'B'C'$ bildet das Gegendreieck.
Es gibt drei Scheiteldreiecke: $AB'C', BC'A', CA'B'$.
Außerdem entstehen auch drei Nebendreiecke: $A'BC, B'CA, C'AB$.
Das Dreieck $A'B'C'$ ist zentralsymmetrisch bezüglich des Kugelmittelpunkts M, das heißt man erhält dasselbe Dreieck wie das ursprüngliche nur mit

negativem Umlaufsinn. Wird ein Teil der Sphäre durch drei sphärische Strecken begrenzt, so nennt man die entstandene Fläche sphärisches Dreieck (ein anderer Name für Kugeldreieck). (vgl. [20] Seite 298)

Definition 22. Jenen Teil der Winkelsumme in einem sphärischen Dreieck, der größer als 180° ist, nennt man Exzess ε:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°.$$

(vgl. [17] Seite 71)

Oft wird ε auch als sphärischer Exzess bezeichnet.

Proposition 3. *Die Summe der Seiten in einem Kugeldreieck liegt zwischen* 0° *und* 360°*, also*

$$0° < a + b + c < 360°.$$

(vgl. [3] Seite 17)

Proposition 4. *Der Flächeninhalt F eines Kugeldreiecks beträgt*

$$F = \frac{R^2 \pi \varepsilon}{180°}.$$

([20] Seite 302)

Definition 23. Sphärische Dreiecke, deren sämtliche Seiten und Winkel kleiner als 180° sind, heißen Euler-Dreiecke oder Eulersche Dreiecke.

([9] Seite 15)

Der Einfachheit halber beschränken wir uns ab jetzt auf diese Dreiecke.

Definition 24. Die Punkte A, B und C bilden ein Euler-Dreieck. Erzeugt man zu A, B und C die Polaren, so erhält man als Schnitt dieser Polaren das Polardreieck $A_1B_1C_1$ des gegebenen Kugeldreiecks.

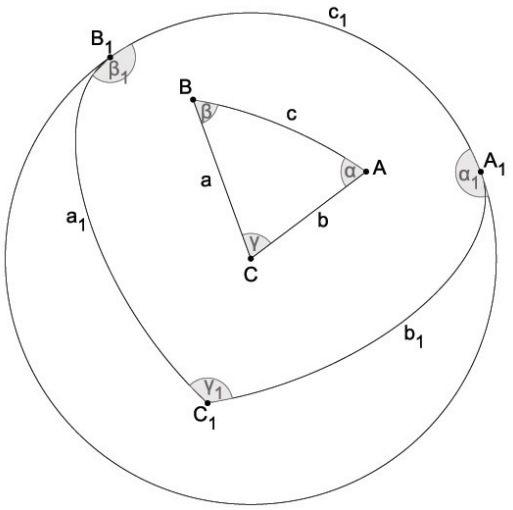

Abbildung 2.14: Kugeldreieck mit zugehörigem Polardreieck.

2.9 Sätze für Kugeldreiecke

Die Sätze 1, 2 und 3 sind nach [3] auf den Seiten 12 – 13 und 16 – 17 zitiert.

Satz 1. *Ist R nicht Gegenpunkt von S, so sind folgende drei Aussagen zueinander äquivalent:*

1. *P ist Pol zum Großkreis RS.*
2. *$|\widehat{PR}| = |\widehat{PS}| = 90°$.*
3. *Irgend zwei verschiedene Großkreise PU und PV stehen senkrecht auf dem Großkreis RS.*

Beweis. Aus 1 folgt 2: Nach Definition 13 steht die Gerade PM senkrecht auf der Ebene des Großkreises RS. PM und RM stehen also senkrecht aufeinander, was bedeutet, dass $|\widehat{PR}| = 90°$ ist. Entsprechend gilt $|\widehat{PS}| = 90°$. Aus 2 folgt 3: Wegen 2 liegen die Geraden RM und SM in einer Ebene senkrecht zur Geraden PM. Da S nicht der Gegenpunkt von R ist, liegt auch der ganze Großkreis RS in dieser Ebene, und jeder Punkt dieses Großkreises hat von P den sphärischen Abstand 90°. Jede Tangente an diesen Großkreis verläuft (windschief) senkrecht zur Geraden PM. In einem Schnittpunkt U' der beiden Großkreise PU und RS verläuft also die Tangente an RS senkrecht zur Geraden PM. Da $|\widehat{PU'}| = 90°$ ist, verläuft die Tangente an den Großkreis PU in U' parallel zur Geraden PM. Also stehen die beiden genannten Tangenten in U' senkrecht aufeinander, und der Großkreis PU steht damit

senkrecht auf dem Großkreis RS. Entsprechend steht auch der Großkreis PV senkrecht auf dem Großkreis RS.
Aus 3 folgt 1: Da die beiden Großkreise PU und PV senkrecht auf dem Großkreis RS stehen und V nicht der Gegenpunkt von U ist, schneiden sich die Ebenen, in denen die Großkreise PU bzw. PV liegen, in einer Geraden, die senkrecht auf der Ebene des Großkreises RS steht und durch M geht. Da außerdem beide Großkreise den Punkt P enthalten, liegt P auf dieser Geraden. P ist Pol zum Großkreis RS.

□

Aus Satz 1 kann man sofort folgern, dass:

Satz 2. *Zwei Großkreise, von denen einer durch einen Pol des anderen geht, stehen senkrecht aufeinander. Umgekehrt: Stehen zwei Großkreise senkrecht aufeinander, so geht jeder durch die Pole des anderen.*

Satz 3. *Ist $A_1B_1C_1$ Polardreieck zu ABC, so ist auch ABC Polardreieck zu $A_1B_1C_1$.*

Beweisidee. Da das Dreieck $A_1B_1C_1$ Polardreieck zu ABC ist, liegt $\widehat{A_1B_1}$ auf der Polaren von Pol C. Nach Satz 1 folgt $|\widehat{CA_1}| = 90°$. Eine Polare wird auch definiert als die Menge aller Punkte S, die von einem Pol P immer Abstand $|\widehat{PS}| = 90°$ haben. Somit liegt der Punkt C auf der Polaren von A_1. Ebenso kann man schließen, dass B auf der Polaren von A_1 liegt. Analog zeigt man, dass A und B auf der Polaren von C_1 und A und C auf der Polaren von B_1 liegen. Mit Hilfe von Satz 1 kann man folgern, dass A, B und C jeweils der Linkspol sind. Somit ist ABC das Polardreieck von $A_1B_1C_1$. □

Unter dem Supplement eines Winkels φ versteht man den Winkel $180° - \varphi$.

Der Satz von Snellius ist wie bei [8] Seite 308 – 309 formuliert, manche Variablen und Formulierungen wurden variiert.

Satz 4 (Satz von Snellius)**.** *Die Seiten des Polardreiecks sind die Supplemente der Winkel des Ausgangsdreiecks. Die Winkel des Polardreiecks sind die Supplemente der Seiten des Ausgangsdreiecks.*

Beweis. Es sei ABC das Ausgangsdreieck, $A_1B_1C_1$ sein Polardreieck. Weiters seien a, b, c die Seiten, α, β, γ die Winkel des Ausgangsdreiecks, a_1, b_1, c_1 die Seiten, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkel des Polardreiecks. Das Supplement eines Winkels η werde mit $\overline{\eta}$ bezeichnet.
Wir kommen bekanntlich zur Ecke A_1 bzw. B_1 des Dreiecks $A_1B_1C_1$, indem wir auf der Fläche $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ des a bzw. b enthaltenden Hauptkreises g_a bzw.

g_b die Mittelsenkrechte zeichnen; wo diese die positive Seite von a bzw. b trifft, liegt A_1 bzw. B_1.

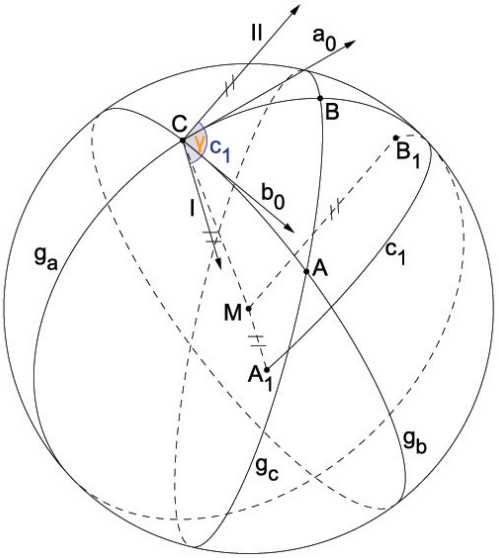

Abbildung 2.15: Zum Satz von Snellius.

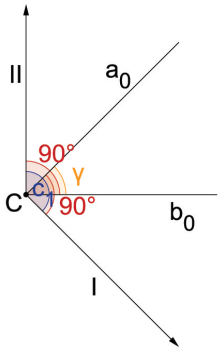

Abbildung 2.16: Zum Satz von Snellius.

Die Seite $A_1B_1 = c_1$ ist nichts anderes als der Winkel A_1MB_1, wo M das Kugelzentrum bedeutet. Den gleichen Winkel erhalten wir, indem wir in C auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gleichgerichtet mit MA_1 und MB_1 die Senkrechten I und II errichten. Die erste dieser Senkrechten steht auf MC und der durch C laufenden Tangente a_0 des Hauptkreises g_a, die zweite auf MC und der durch C laufenden Tangente b_0 des Hauptkreises g_b senkrecht.
Denken wir uns die Zeichenebene in C auf MC senkrecht gestellt, so gibt

Abbildung 2.16 den Punkt C, die Tangenten a_0 und b_0 und ihren Zwischenwinkel γ sowie die Senkrechten I und II mit ihrem Zwischenwinkel c_1 wieder. Aus der Figur folgt ohne weiteres die Gleichung

$$(c_1 - 90°) + (c_1 - 90°) + (\gamma) = c_1$$

oder

$$c_1 = 180° - \gamma = \overline{\gamma}.$$

Genau so zeigt man

$$a_1 = \overline{\alpha} \text{ und } b_1 = \overline{\beta}.$$

Das heißt:
Die Seiten des Polardreiecks sind die Winkelsupplemente des Ausgangsdreiecks.
Wenden wir diesen Satz auf das Dreieck $A_1B_1C_1$ und das zugehörige Polardreieck ABC an, so entstehen die Formeln

$$\begin{aligned} a = \overline{\alpha_1}, \quad b = \overline{\beta_1}, \quad c = \overline{\gamma_1}, \\ \alpha_1 = \overline{a}, \quad \beta_1 = \overline{b}, \quad \gamma_1 = \overline{c}. \end{aligned}$$

In Worten:
Die Winkel des Polardreiecks sind die Seitensupplemente des Ausgangsdreiecks. □

Somit kann der Satz von Snellius auch so zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} a + \alpha_1 = b + \beta_1 = c + \gamma_1 = 180°, \\ a_1 + \alpha = b_1 + \beta = c_1 + \gamma = 180°. \end{aligned}$$

Die durch den Satz 4 erläuterte Eigenschaft wird in der Literatur auch speziell benannt, siehe [2] Seite 49: „Das wechselweise Entsprechen der Stücke eines Dreiecks mit denen seines Polardreiecks nennt man ‚Dualität'." Andere Autoren wie [3] fassen die Sätze 3 und 4 zusammen und nennen diesen Zusammenhang Polarität auf der Kugel.

Nach [20] Seite 299 – 300: Aus dem Satz von Snellius folgt, dass

$$\begin{aligned} a + \alpha_1 = 180°, \\ b + \beta_1 = 180°, \\ c + \gamma_1 = 180°, \\ \Rightarrow a + b + c + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 540° \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 540° - (a + b + c). \end{aligned}$$

Laut Definition 3 gilt $a+b+c<360°$. Für $a+b+c=0°$ erhält man für die Winkelsumme 540°. Betrachtet man auch den Extremfall $a+b+c=360°$, so wäre die Winkelsumme 180°. Da diese beiden Fälle nicht angenommen werden können, gilt:

Definition 25. Die Winkelsumme in einem sphärischen Dreieck ist größer als 180° und stets kleiner als 540°, also

$$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°.$$

Aus dieser Formel kann man leicht folgern, dass:

Definition 26. Der sphärische Exzess in einem Kugeldreieck liegt zwischen 0° und 360°, sodass gilt

$$0° < \alpha + \beta + \gamma - 180° < 360° \text{ oder kurz}$$
$$0° < \varepsilon < 360°.$$

Wie auch in der Ebene gibt es auf der Sphäre ein rechtwinkliges, gleichschenkliges und gleichseitiges Kugeldreieck.

Definition 27. Unter einem rechtwinkligen Kugeldreieck versteht man ein sphärisches Dreieck, das mindestens einen rechten Winkel besitzt.

In [10] wird es auf Seite 103 auch so ausgedrückt: „Jedes Kugeldreieck, bei dem eine Seite auf einem Meridian und eine andere auf dem Äquator liegt, ist rechtwinklig. Jedes Kugeldreieck, bei dem ein Eckpunkt im Pol und ein anderer auf Äquator liegt, ist rechtseitig."

Definition 28. Ein gleichschenkliges sphärisches Dreieck hat zwei gleich lange Seiten und Winkel.

Definition 29. Ein sphärisches Dreieck mit drei gleich langen Seiten nennt man gleichseitiges Kugeldreieck.

Im gleichseitigen Kugeldreieck sind auch die drei Winkel gleich groß. Allerdings können diese zwischen 60° und 90° variieren, also

$$60° < \alpha \leq 90°.$$

Im Gegensatz zur Ebene ist es auf der Kugeloberfläche auch möglich, dass Kugelseiten 90° sind. Daher definieren wir:

Definition 30. Ist in einem sphärischen Dreieck eine Kugelseite 90°, so heißt es rechtseitiges Kugeldreieck.

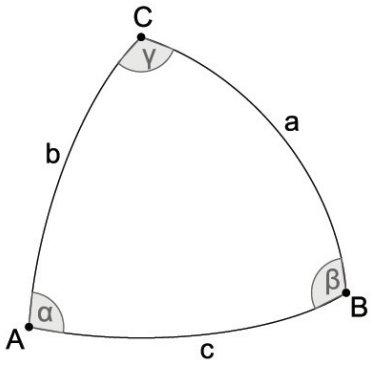

Abbildung 2.17: Kugeldreieck mit Beschriftung.

Der folgende Abschnitt ist im Wesentlichen wie in [20] Seite 300 aufgebaut.

Satz 5. *Die Summe zweier Seiten ist stets größer als die dritte Seite.*

$$o.B.d.A.: a + b > c.$$

Beweisidee. c ist die kürzeste Verbindung zwischen A und B, deshalb ist jede andere Verbindung von A und B, z.B. $a + b = \overline{AC} + \overline{CB}$ mit Sicherheit länger. □

Satz 6. *Die Summe zweier Winkel vermindert um den dritten Winkel ist immer kleiner als* 180°.

$$o.B.d.A.: \alpha + \beta - \gamma < 180°.$$

Beweis. Unter Verwendung des vorigen Satzes und des Satzes von Snellius erhält man

$$\begin{gathered} a + b > c, \\ a = 180° - \alpha_1, \\ b = 180° - \beta_1, \\ c = 180° - \gamma_1, \\ 180° - \alpha_1 + 180° - \beta_1 > 180° - \gamma_1, \text{ also} \\ \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 < 180°. \end{gathered}$$

□

Satz 7. *Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt.*

Beweisidee. Dieser Satz folgt aus den Symmetrieeigenschaften gleichschenkliger Kugeldreiecke. □

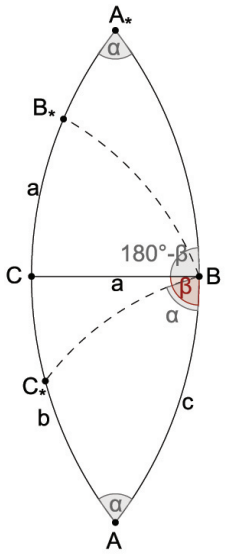

Abbildung 2.18: Abbildung für Beweis von Satz 8 und 9.

Satz 8. *Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber und auch die Umkehrung gilt.*

Beweis. Im Kugeldreieck ABC sei $\beta > \alpha$. Wir legen durch B eine Kugelgerade, die mit $\widehat{AB}$ den Winkel α bildet. Sie schneidet $\widehat{AC}$ in C_* zwischen A und C. Nach Satz 7 ist dann $\widehat{AC_*} = \widehat{BC_*}$. Nach Satz 5 gilt aber $\widehat{BC_*} + \widehat{C_*C} > \widehat{CB}$, d.h. $\widehat{AC_*} + \widehat{C_*C} = \widehat{AC}$ oder $b > a$. □

Satz 9. *Für $a + b < 180°$ gilt auch $\alpha + \beta < 180°$.*
Für $a + b = 180°$ gilt auch $\alpha + \beta = 180°$.
Für $a + b > 180°$ gilt auch $\alpha + \beta > 180°$.

Beweis. Wir ergänzen das Dreieck ABC zum Zweiseit AA_* und tragen $\widehat{CB}$ auf der Verlängerung von $\widehat{AC}$ ab. Liegt B_* zwischen C und A_*, ist $a + b < 180°$, da $\widehat{AA_*} = 180°$ gilt. Folglich ist $\widehat{CA_*} > \widehat{CB}$, nach Satz 8 also $180° - \beta > \alpha$ oder $\alpha + \beta < 180°$. - Fällt B_* auf A_*, dann ist $a + b = 180°$. Da $\widehat{CB} = \widehat{CB_*} = \widehat{CA_*}$ ist, folgt nach Satz 7, dass $180° - \beta = \alpha$ oder $\alpha + \beta = 180°$. Entsprechend ergibt sich auch $\alpha + \beta > 180°$, wenn $a + b > 180°$. □

2.9.1 Hat sich Pythagoras geirrt?

Die Fakten für dieses Kapitel stammen aus [3] Seite 18.

In diesem Abschnitt wollen wir herausfinden, ob der Satz von Pythagoras auch auf der Sphäre gültig ist. In der Ebene ist einer der wichtigsten Sätze für rechtwinklige Dreiecke $a^2 + b^2 = c^2$. Auch auf der Kugeloberfläche kann man rechtwinklige Kugeldreiecke erzeugen. Es gibt sogar ein ganz Spezielles, das drei rechte Winkel aufweist. So ein Dreieck gibt es nur auf der Sphäre.

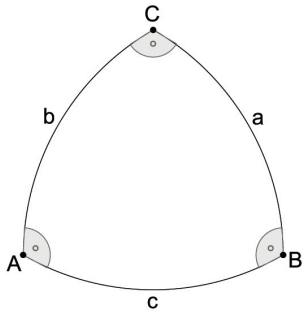

Abbildung 2.19: Sphärisches Dreieck mit drei rechten Winkeln.

Auf der Kugel gilt der Satz von Pythagoras nicht, was wir anhand eines Gegenbeispiels wiederlegen wollen. In Abbildung 2.19 ist ein Kugeldreieck mit drei rechten Winkeln zu sehen. Es sind dann auch alle drei Seiten 90°. Eingesetzt in den Satz von Pythagoras erhält man die falsche Aussage: $(90°)^2 + (90°)^2 = (90°)^2$. Und daraus folgt, dass in der Kugelgeometrie der Satz von Pythagoras nicht gilt und somit

$$a^2 + b^2 \neq c^2.$$

Allerdings gibt es den sphärischen Satz des Pythagoras, der wie folgt, lautet:

Satz 10. *Für ein Kugeldreieck mit einem rechten Winkel beim Kugelpunkt C gilt*

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

2.9.2 Kongruenzsätze für sphärische Dreiecke

Dieser Abschnitt ist aus [20] Seite 300 zitiert.
Zwei Kugeldreiecke sind kongruent, wenn sie in

1. drei Seiten (SSS)
2. zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (SWS)
3. einer Seite, einem Anwinkel und dem (kleineren) Gegenwinkel (SWW)

4. drei Winkeln (WWW)
5. zwei Winkeln und der gemeinsamen Seite (WSW)
6. einem Winkel, einer anliegenden Seite und der (größeren) Gegenseite (WSS)

übereinstimmen.

Auf der Kugeloberfläche gibt es keine ähnlichen Dreiecke, d.h. ein sphärisches Dreieck ist durch die Angabe der drei Winkel eindeutig bestimmt.

2.10 Sätze der sphärischen Trigonometrie

Folgende Sätze außer Satz 2.10.4 und deren Herleitung sind aus [20] Seite 304 – 306 entnommen. Der Kotangenssatz 2.10.4 ist aus [3] Seite 29.

2.10.1 Sphärischer Sinussatz

In Abbildung 2.20 seien b, c, β, γ spitz. Vom Punkt A aus fällen wir das Lot $\overline{AD}$ auf $\overline{MB}$ und das Lot $h_A = \overline{AF}$ auf die Sektorfläche MBC. Der Kugelradius sei $R = \overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$.

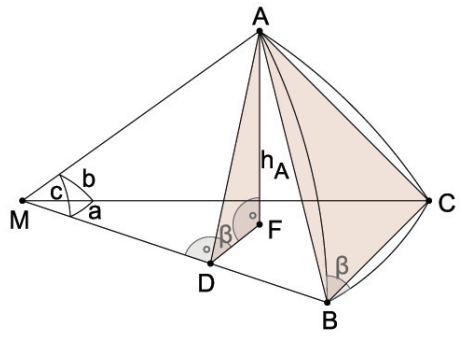

Abbildung 2.20: Zum Sinussatz.

Dann gilt

$$\overline{AD} = R \cdot \sin c,$$
$$h_A = \overline{AF} = \overline{AD} \cdot \sin \beta = R \cdot \sin c \cdot \sin \beta.$$

Wenn wir entsprechend von $\overline{MC}$ ausgehen, erhalten wir

$$h_A = R \cdot \sin b \cdot \sin \gamma.$$

Durch Gleichsetzen dieser Ausdrücke ergibt sich

$$\sin c \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin \gamma \quad \text{oder} \quad \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

Fällen wir in analoger Weise das Lot h_B von B auf die Sektorfläche MAC, so entsteht

$$\sin c \cdot \sin \alpha = \sin a \cdot \sin \gamma \quad \text{oder} \quad \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

Durch Zusammenfassung der Formeln folgt schließlich

Satz 11 (Sinussatz der sphärischen Trigonometrie)**.** *Im Kugeldreieck verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der Gegenwinkel, also*

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$
$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Für die Herleitung des Sinussatzes haben wir vorausgesetzt, dass einige Größen spitz sein müssen. Um die Allgemeingültigkeit des Satzes zu beweisen, nehmen wir an, dass $b > 90°$ und $\beta > 90°$ ist. Da im Dreieck ABC alle Winkel spitz sind betrachten wir das Dreieck A_1BC mit den Seiten $a_1 = a, b_1 = 180° - b$ und den Winkeln $\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = 180° - \beta$. Somit entsteht wieder eine Figur wie in Abbildung 2.20 mit spitzen Seiten a_1, b_1 und spitzen Winkeln α_1, β_1. Folglich gilt

$$\sin a_1 \cdot \sin \beta_1 = \sin \alpha_1 \cdot \sin b_1 \quad \text{oder} \quad \sin a \cdot \sin(180° - \beta) = \sin \alpha \cdot \sin(180° - b)$$
$$\text{bzw.} \quad \sin a \cdot \sin \beta = \sin \alpha \cdot \sin b.$$

In diesem Sonderfall des Sinussatzes ändert sich nichts. Entsprechendes gilt auch, wenn andere Stücke als stumpf vorausgesetzt werden. Es lässt sich immer, gegebenenfalls mit Hilfe der Sätze 5 bis 9, ein Scheitel- oder Nebendreieck finden, das auf Abbildung 2.20 zurückgeführt werden kann. Daher ist der sphärische Sinussatz allgemeingültig.

Bei der Berechnung einer fehlenden Größe erhält man zwei mögliche Ergebnisse. Ob nun eine oder beide Lösungen richtig sind, prüft man anhand von Satz 9.
Hier ein Beispiel: Von einem sphärischen Dreieck kennt man $a = 62,3°, \alpha = 57,2°$ und $\beta = 45,5°$. Gesucht ist die Seite b.

Unter Verwendung des Sinussatzes und durch Umformung findet man die Formel

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha},$$
$$\sin b = 0,7513,$$
$$b_1 = 48,7°.$$

Die zweite Lösung erhält man durch $b_2 = (180° - b_1) = 131,3°$.
Satz 9 besagt, dass wenn die Summe zweier Seiten kleiner als 180° ist, dann muss auch die Summe der dazugehörigen Winkel kleiner als 180° sein.
In unserem Beispiel ist die Summe der Winkel $\alpha + \beta < 180°$. Die Summe der Seiten ist $a + b_1 < 180°$. Somit wissen wir, dass $b_1 = 48,7°$ eine Lösung ist. Bilden wir die Seitensumme mit der zweiten Lösung, so erhalten wir $a + b_2 > 180°$. Also ist b_2 keine Lösung.

2.10.2 Sphärischer Seitenkosinussatz

Im Kugeldreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ und den Seiten a, b, c seien a und b kleiner als 90°. In einem beliebigen Punkt C' auf $\overline{MC}$ (Abbildung 2.21) im Abstand d von M errichten wir die Senkrechten, welche $\overline{MA}$ bzw. $\overline{MB}$ in A' bzw. B' treffen.

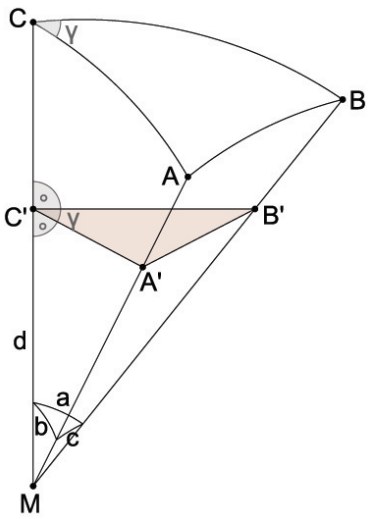

Abbildung 2.21: Zum Seitenkosinussatz.

Dann ist $\angle B'C'A' = \gamma$, da $\overline{C'A'}$ und $\overline{C'B'}$ den Tangenten an $\widehat{CA}$ und $\widehat{CB}$ in C parallel sind. Ferner liest man ab

$$\begin{aligned}\overline{C'A'} &= d \cdot \tan b,\\ \overline{C'B'} &= d \cdot \tan a,\\ \overline{MA'} &= \frac{d}{\cos b},\\ \overline{MB'} &= \frac{d}{\cos a}.\end{aligned}$$

Nach dem Kosinussatz gilt dann für das Dreieck $A'B'C'$:

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{C'B'}^2 + \overline{C'A'}^2 - 2\,\overline{C'B'}\cdot\overline{C'A'}\cdot\cos\gamma = d^2\,(\tan^2 a + \tan b^2 - 2\tan a\cdot\tan b\cdot\cos\gamma)$$

und im Dreieck $MA'B'$

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{MB'}^2 + \overline{MA'}^2 - 2\,\overline{MB'}\cdot\overline{MB'}\cdot\cos c = d^2\,(\frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2\frac{\cos c}{\cos a\cdot\cos b}).$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke und Berücksichtigung von $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$ folgt

$$2\tan a\cdot\tan b\cdot\cos\gamma = -2 + 2\,\frac{\cos c}{\cos a\cdot\cos b}$$

oder nach Multiplikation mit $\frac{1}{2}\cos a\cdot\cos b$:

$$\cos c = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma.$$

Durch zyklische Vertauschung der Variablen, folgt das System

Satz 12 (Seitenkosinussatz der sphärischen Trigonometrie)**.**

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b\cdot\cos c + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha,\\ \cos b &= \cos c\cdot\cos a + \sin c\cdot\sin a\cdot\cos\beta,\\ \cos c &= \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma.\end{aligned}$$

Bei der Begründung der Allgemeingültigkeit des Seitenkosinussatzes kann analog vorgegangen werden wie beim Sinussatz indem man ein Nebendreieck betrachtet.

2.10.3 Sphärischer Winkelkosinussatz

Dem Seitenkosinussatz entspricht im Polardreieck der Winkelkosinussatz. Wegen der Dualität auf der Sphäre folgt bei Anwendung des Seitenkosinussatzes auf das Polardreieck $A_1B_1C_1$

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cdot \cos c_1 + \sin b_1 \cdot \sin c_1 \cdot \cos \alpha_1 \quad \text{oder}$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) =$$
$$\cos(180^\circ - \beta) \cdot \cos(180^\circ - \gamma) + \sin(180^\circ - \beta) \cdot \sin(180^\circ - \gamma) \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$
$$-\cos \alpha = (-\cos \beta) \cdot (-\cos \gamma) + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot (-\cos a)$$

und entsprechend durch zyklische Vertauschung der Bezeichnungen der Winkelkosinussatz.

Satz 13 (Winkelkosinussatz der sphärischen Trigonometrie)**.**

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a,$$
$$\cos \beta = -\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos b,$$
$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c.$$

2.10.4 Sphärischer Kotangenssatz

Da wir für Kapitel 4 diesen Satz benötigen, wird er formuliert, aber nicht bewiesen.

Satz 14 (Kotangenssatz der sphärischen Trigonometrie)**.**

$$\cos c \cdot \cos \alpha = \sin c \cdot \cot b - \sin \alpha \cdot \cot \beta,$$
$$\cos a \cdot \cos \beta = \sin a \cdot \cot c - \sin \beta \cdot \cot \gamma,$$
$$\cos b \cdot \cos \gamma = \sin b \cdot \cot a - \sin \gamma \cdot \cot \alpha,$$
$$\cos b \cdot \cos \alpha = \sin b \cdot \cot c - \sin \alpha \cdot \cot \gamma,$$
$$\cos c \cdot \cos \beta = \sin c \cdot \cot a - \sin \beta \cdot \cot \alpha,$$
$$\cos a \cdot \cos \gamma = \sin a \cdot \cot b - \sin \gamma \cdot \cot \beta.$$

([3] Seite 29)

2.11 Pentagramma mirificium und Nepersche Regel

Dieser Unterkapitel ist im Wesentlichen wie bei [3] Seite 19 – 23.

Das Pentagramma mirificium ist – wie der Name schon andeutet – ein wunderbares Fünfeck. So ein Pentagramm erzeugt man, indem man zu einem rechtwinkligen, aber nicht rechtsseitigen Dreieck die Großkreise, auf denen die Dreiecksseiten liegen, erzeugt. Weiters benötigt man auch die Polare zu P_1 und P_2. Wie in Abbildung 2.22 sichtbar, entstehen zwei sphärische Fünfecke: $P_1P_2P_3P_4P_5$ und $P_1'P_2'P_3'P_4'P_5'$.

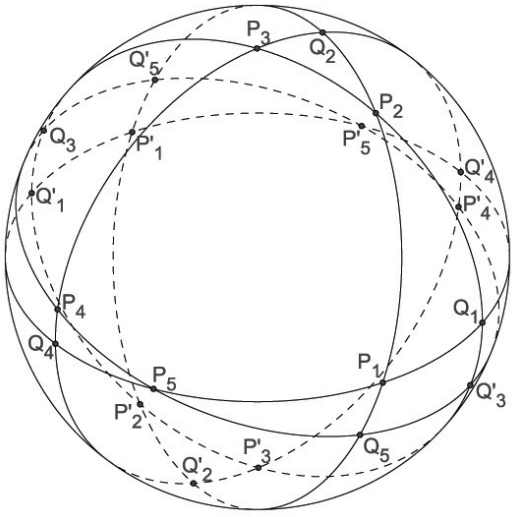

Abbildung 2.22: Pentagramma mirificium.

Die besondere Eigenschaft dieses Pentagramma mirificium ist, dass jede Seite dieses Fünfecks auf der Polaren des gegenüberliegenden Eckpunktes liegt. Ein sphärisches Fünfeck mit eben erklärter Besonderheit wird Pentagramma mirificium genannt.
Als Nebenerscheinung dieses speziellen Fünfecks kann man erwähnen, dass jede Seite des Pentagramms die Hypothenuse eines rechtwinkligen Kugeldreiecks darstellt.
Jeder Großkreis wird durch die Schnittpunkte in acht Teile geteilt. Je zwei aneinander grenzende Teile sind zusammen 90° lang. Je vier nicht aneinander grenzende Teile sind gleich lang. Daraus kann man die Längen aller sich ergebenden Seiten sofort bestimmen. Sie lassen sich alle durch a, b, c, α, β angeben.

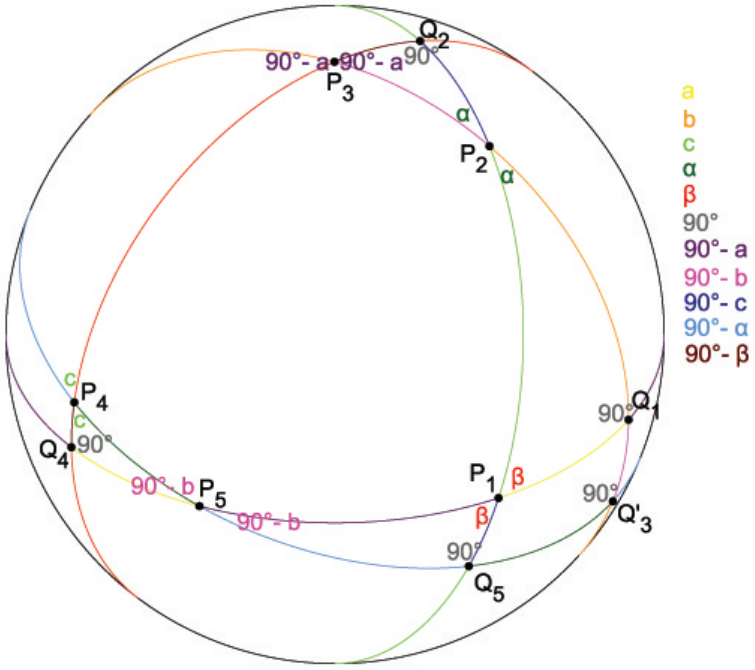

Abbildung 2.23: Pentagramma mirificium.

Wenn man nun auf jedes dieser rechtwinkligen sphärischen Dreiecke den sphärischen Satz von Pythagoras anwendet, so ergibt sich für

1. $P_1Q_1P_2$: $\cos c = \cos a \cdot \cos b$,
2. $P_5Q_5P_1$: $\cos(90° - a) = \cos(90° - \alpha) \cdot \cos(90° - c)$, also $\cos(90° - a) = \sin\alpha \cdot \sin c$,
3. $P_4Q_4P_5$: $\cos\alpha = \cos(90° - \beta) \cdot \cos a$, also $\cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos a$,
4. $P_3Q_3P_4$: $\cos\beta = \cos b \cdot \cos(90° - \alpha)$, also $\cos\beta = \cos b \cdot \sin\alpha$,
5. $P_2Q_2P_3$: $\cos(90° - b) = \cos(90° - \beta) \cdot \cos(90° - c)$, also $\cos(90° - b) = \sin\beta \cdot \sin c$.

Löst man die dritte Gleichung nach $\cos a$ und die vierte nach $\cos b$ auf, so erhält man:

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \text{ und } \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Eingesetzt in den sphärischen Satz von Pythagoras erhält man:

Satz 15.

$$\cos c = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \\ = \cot\alpha\cdot\cot\beta.$$

Wendet man Satz 15 auch auf die fünf Kugeldreiecke an, so ergeben sich fünf weitere Gleichungen:

1. $P_1Q_1P_2 : \cos c = \cot\alpha\cdot\cot\beta$,
2. $P_5Q_5P_1 : \cos(90^\circ - a) = \cot\beta\cdot\cot(90^\circ - b)$, also $\cos(90^\circ - a) = \cot\beta\cdot\tan b$,
3. $P_4Q_4P_5 : \cos\alpha = \cot(90^\circ - b)\cdot\cot c$, also $\cos\alpha = \tan b\cdot\cot c$,
4. $P_3Q_3P_4 : \cos\beta = \cot c\cdot\cot(90^\circ - a)$, also $\cos\beta = \cot c\cdot\tan a$,
5. $P_2Q_2P_3 : \cos(90^\circ - b) = \cot(90^\circ - a)\cdot\cot\alpha$, also $\cos(90^\circ - b) = \tan a\cdot\cot\alpha$.

Wir haben zehn verschiedene Gleichungen für rechtwinklige sphärische Dreiecke erhalten. Diese werden unter der Neperschen Regel zusammengefasst.

Satz 16 (Nepersche Regel)**.** *In rechtwinkligen Kugeldreiecken gilt, wenn man den rechten Winkel nicht mitzählt und für die Katheten deren Komplemente (d.h. deren Ergänzungen zu* 90°*) setzt: Der Kosinus eines jeden Stückes ist gleich dem Produkt der Kotangens der benachbarten Stücke und gleich dem Produkt der Sinus der nicht benachbarten Stücke („benachbart“ heißt: in der zyklisch angeordneten Reihenfolge* b, α, c, β, a *nebeneinander stehend).*

Die Formeln von oben zusammengefasst:

$$\cos c = \cot\alpha\cdot\cot\beta,$$
$$\cos\beta = \cot c\cdot\tan\alpha,$$
$$\sin a = \cot\beta\cdot\tan b,$$
$$\sin b = \tan a\cdot\cot\alpha,$$
$$\cos\alpha = \cot c\cdot\tan b,$$
$$\cos c = \cos a\cdot\cos b,$$
$$\cos\beta = \cos b\cdot\sin\alpha,$$
$$\sin a = \sin c\cdot\sin\alpha,$$
$$\sin b = \sin c\cdot\sin\beta,$$
$$\cos\alpha = \sin\beta\cdot\cos a.$$

Kapitel 3

Verzerrungsverhältnisse

Um besser verstehen zu können, dass man die Erdoberfläche nicht wahrheitsgetreu in der Ebene darstellen kann, nimmt man sich eine Orange, schält sie und versucht die Schale flach auf den Tisch zu legen. Es wird nicht funktionieren große Teile der Schale eben zu machen ohne dass die Schale reißt.
Ein anderer Versuch, der die Problematik verdeutlicht, wäre einen Globus oder eine Kugel mit großen Papierstücken faltenfrei zu tapezieren. Es wird nicht realisierbar sein, denn das Papier wird Falten machen.
Somit ist schon klar gestellt, dass jede Karte, die die Erdoberfläche darstellt, eine Verzerrung aufweist.

In diesem Kapitel wird die Thematik der Verzerrungen von Karten erarbeitet. Dies ist dann für das Kapitel Kartennetzentwürfe relevant.
Da es nicht möglich ist großflächig von einer Kugel in die Ebene abzubilden ohne Verzerrungen, ist man daran interessiert zu wissen, welche Verzerrungen auftreten können und welches Ausmaß sie annehmen. Der Abschnitt 3.1 dient der Einführung wichtiger Begriffe und Formeln um im nächsten Abschnitt 3.2 diese auf die Erde zu übertragen. Weiters werden die Formeln zur Berechnung der verschiedenen Arten von Verzerrungen definiert und gleichzeitig festgelegt, wann Längen-, Winkel- und Flächentreue eintritt.

3.1 Überblick über elementare Differentialgeometrie

3.1.1 Kurven

Die Informationen für diesen Unterabschnitt wurden weitgehend aufgebaut wie bei [13] Seite 22 – 25.

Ein Punkt P im Raum kann mit festen Komponenten x, y, z durch den Ortsvektor $p = xe_x + ye_y + ze_z$ dargestellt werden. Dabei sind e_x, e_y, e_z die Einheitsvektoren der jeweiligen Koordinatenachsen. Wird der Punkt P ständig verändert, dann entsteht eine Kurve, die mit Hilfe von Funktionen $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ beschrieben werden kann. Für ein $t \in (a, b)$ wird mit dem Ortsvektor $p(t) = x(t)e_x + y(t)e_y + z(t)e_z$ eine Kurve dargestellt. Damit für alle t die erste Ableitung des Vektors p nicht verschwindet, setzen wird voraus, dass die Funktionen $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung besitzen. Der Vektor

$$\frac{dp}{dt} = \dot{p}(t) = \dot{x}e_x + \dot{y}e_y + \dot{z}e_z$$

stellt den Tangentenvektor der Kurve im Punkt $p(t)$ dar.

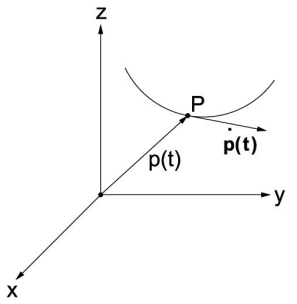

Abbildung 3.1: Kurve und Tangentenvektor im Raum.

Durch eine geeignete Parametertransformation $s = s(t)$, die den Kurvenparameter t in einen neuen Parameter s transformiert, kann erreicht werden, dass gilt

$$\left|\frac{dp}{ds}\right| = |p'| = 1.$$

([13] Seite 25)

Die Bogenlänge s einer Kurve wird berechnet durch

$$\left|\frac{dp}{ds}\right| = \left|\frac{dp}{dt}\right| \frac{dt}{ds} = |\dot{p}|\frac{dt}{ds} = 1 \quad \text{oder} \quad ds = |\dot{p}|\, dt.$$

Also ist – vereinfacht gesagt – die Länge des Tangentenvektors das Bogenelement ds der Kurve. ([5] Seite 2)

Die Bogenlänge erhält man durch Integration

$$s = \int_{t_0}^{t} |\dot{p}|\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

3.1.2 Oberflächen

Dieser Abschnitt wurde weitgehend aufgebaut wie bei [13] Seite 28 – 31.

Ein von zwei Variablen u und v abhängiger Ortsvektor $p(u, v)$ stellt eine Fläche oder Flächenkurve im Raum dar. Die Parameterdarstellung dieser Fläche sieht folgendermaßen aus:

$$p(u, v) = x(u, v)e_x + y(u, v)e_y + z(u, v)e_z.$$

Zusätzlich setzen wir fest, dass von $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ partielle Ableitungen bis zur dritten Ordnung existieren und dass das Vektorprodukt der partiellen Ableitung von p nach u und von p nach v nicht verschwindet. In formaler Schreibweise wird es so festgehalten

$$\left|\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}\right| = |p_u \times p_v| \neq 0.$$

Ab jetzt wird eingeführt, dass man für die partielle Ableitung von p nach u nicht nur $\frac{\partial p(u,v)}{\partial u}$, sondern auch abgekürzt p_u schreiben kann.

Es können auch die Parameter u und v als differenzierbare Funktionen aufgefasst werden, die von einem Parameter t abhängig sind, also $p = p[u(t), v(t)]$. Bei Veränderung von t beschreibt p eine Flächenkurve. (vgl. [5] Seite 2)

Möchte man nun eine Tangente an die Flächenkurve im Punkt P legen, so ermittelt man den Richtungsvektor der Tangente über das vollständige Differential dp mit

$$\frac{dp}{dt} = \dot{p} = p_u\dot{u} + p_v\dot{v}.$$

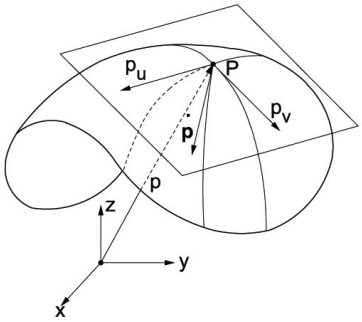

Abbildung 3.2: Tangente einer Flächenkurve.

Um nun die Bogenlänge s einer Flächenkurve $u = u(t), v = v(t)$ auf einer Fläche $p = p(u, v)$ zu bestimmen, berechnet man folgendes Integral

$$s = \int_{t_0}^{t} |\dot{p}|\, dt.$$

Zur Ermittlung von $|\dot{p}|$ nehmen wir folgende Darstellung $\dot{p} = p_u\dot{u} + p_v\dot{v}$ und erhalten

$$\dot{p}^2 = (p_u\dot{u} + p_v\dot{v})^2 = (p_u \cdot p_u)\dot{u}^2 + 2\, p_u \cdot p_v\dot{u}\dot{v} + (p_v \cdot p_v)\dot{v}^2.$$

Üblicherweise werden für folgende Ausdrücke Abkürzungen verwendet, die wir nun definieren:

$$\begin{aligned} E &= p_u \cdot p_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= p_u \cdot p_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= p_v \cdot p_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Formel zur Berechnung der Bogenlänge erhält man

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt.$$

Oben haben wir bereits festgesetzt, dass $ds = |\dot{p}|dt$ gilt. Durch Einsetzen bereits gefundener Formeln und Umformung kommt man zu dem Ausdruck

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

3.1.3 Abbildung von Oberflächen

Grundlage dieses Unterkapitels ist das Buch von [13] Seite 46.

An dieser Stelle bilden wir nun Oberflächen auf Ebenen ab. Für die Oberflächen gelten dieselben Variablen wie bisher verwendet. Um davon die Größen der Abbildungen abzuheben, werden sie mit einem Querbalken gekennzeichnet. So bezeichnet Φ eine Oberfläche und $\bar{\Phi}$ jene Fläche, auf die abgebildet wird.

Definition 31. Unter einer Abbildung versteht man die Vorschrift jedem Punkt P einer Fläche Φ einen Punkt $\bar{P}$ auf der Fläche $\bar{\Phi}$ zuzuordnen, wobei diese Abbildung eindeutig sein soll. Eindeutig ist die Abbildung, falls jedem Punkt P von Φ genau ein Punkt $\bar{P}$ von $\bar{\Phi}$ und auch jedem Punkt $\bar{P}$ von $\bar{\Phi}$ genau ein Punkt P von Φ entspricht.

Ist die Abbildung eindeutig, so ist die Funktionaldeterminante ungleich Null, also

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \neq 0.$$

3.2 Verzerrungen

Satz 17 ist aus [3] Seite 139 entnommen.

Satz 17. *Es gibt keine längentreue Abbildung der Kugel in die Ebene und damit auch keine Abbildung der Kugel in die Ebene, die zugleich winkeltreu und flächentreu ist.*

Beweis. Gäbe es eine längentreue Abbildung der Kugel in die Ebene, dann müsste durch die Abbildung ein Großkreisbogen $\widehat{Q_1Q_2}$ auf eine Strecke $\overline{\bar{Q}_1\bar{Q}_2}$ abgebildet werden. Da nämlich $\widehat{Q_1Q_2}$ die kürzeste Verbindung zwischen Q_1 und Q_2 ist (was wir in Abschnitt 2.3 festgelegt haben), muss das Bild von $\widehat{Q_1Q_2}$ wegen der längentreuen Abbildung auch die kürzeste Verbindung zwischen $\bar{Q}_1$ und $\bar{Q}_2$ in der Ebene, also die Strecke $\overline{\bar{Q}_1\bar{Q}_2}$, sein. Bildet man nun weiter durch diese Abbildung ein Kugeldreieck $Q_1Q_2Q_3$ in die Ebene ab, so müsste das Bild ein ebenes Dreieck $\bar{Q}_1\bar{Q}_2\bar{Q}_3$ sein, dessen Winkelsumme 180° beträgt. Da aber die Winkelsumme im Kugeldreieck größer als 180° ist, kann die Abbildung nicht winkeltreu und damit auch nicht längentreu sein. □

Die Definitionen zur Längenverzerrung und die Formel von Tissot sind wie in [13] Seite 47 – 50 formuliert worden.
Laut diesem Satz gibt es keine Karten, bei denen völlige Verzerrungsfreiheit

bezüglich der Längen vorzufinden sind. Es wird nur für bestimmte Kartenbereiche Längentreue erreicht, z.B. entlang von Meridianen oder entlang eines Breitenkreises. Die Längenverzerrung kürzen wir mit τ ab. Mit den Bogenelementen

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$
$$d\bar{s}^2 = \bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2$$

erzeugt man das Quadrat der Längenverzerrung mit

$$\tau^2 = \frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = \frac{\bar{E}du^2 + 2\bar{F}dudv + \bar{G}dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Längenverzerrung tritt nicht nur in eine Richtung auf, sondern in vielen verschiedenen Richtungen α, dabei sind die Hauptverzerrungsrichtungen τ_1 und τ_2, also bei $\alpha = 0°$ und $\alpha = 90°$. Näheres dazu folgt in Abschnitt 3.2.1.

Definition 32. Als k bezeichnen wir das Verzerrungsmaß und mit h wird die mittlere Verzerrung ausgedrückt. Berechnet werden sie wie folgt

$$k^2 = \frac{1}{\tau_1^2}\frac{1}{\tau_2^2} = \frac{EG - F^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2},$$
$$2h^2 = \frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2} = \frac{E\bar{G} - 2F\bar{F} + G\bar{E}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}.$$

Definition 33 (Formel von Tissot)**.** Die Formel von Tissot gibt die Verzerrung einer beliebigen Richtung durch P an, also

$$\frac{ds^2}{d\bar{s}^2} = \frac{1}{\tau^2} =$$
$$= \frac{1}{\tau_1^2}\left(\frac{\bar{E}du^2}{\bar{E}du^2 + \bar{G}dv^2}\right) + \frac{1}{\tau_2^2}\left(\frac{\bar{G}dv^2}{\bar{E}du^2 + \bar{G}dv^2}\right) =$$
$$= \frac{\cos^2\bar{\alpha}}{\tau_1^2} + \frac{\sin^2\bar{\alpha}}{\tau_2^2}.$$

Folglich versteht man unter der Tissot'schen Indikatrix eine Ellipse auf $\bar{\Phi}$, die das Bild eines Kreises von Φ mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt P, darstellt. Diese Ellipse wird durch die Tissot'sche Formel beschrieben. Abbildung 3.3 zeigt den Kreis auf der Oberfläche Φ mit Radius ds, während Graphik 3.4 die Abbildung des Kreises auf $\bar{\Phi}$ wiedergibt. Die Ellipse wird durch die Achsengrößen $ds \cdot \tau_1$ und $ds \cdot \tau_2$ definiert.
Abbildungen 3.3 und 3.4 sind jenen von [3] Seite 143 nachempfunden.

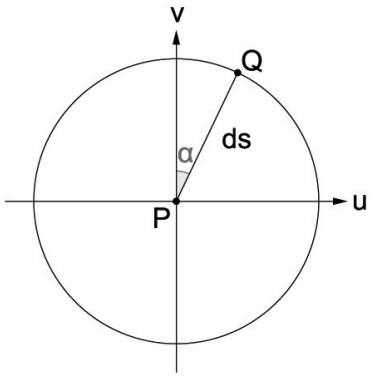

Abbildung 3.3: Abzubildender Kreis.

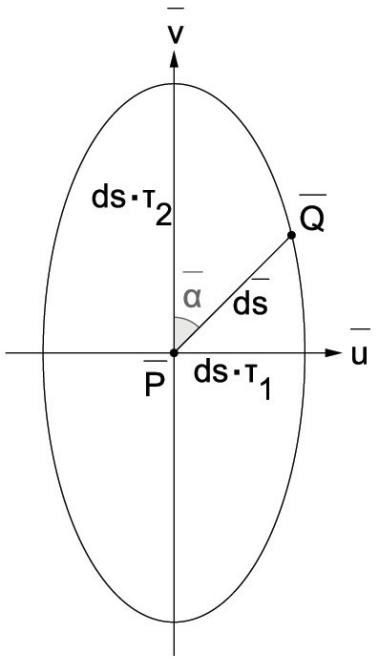

Abbildung 3.4: Tissot'sche Indikatrix.

3.2.1 Anwendung der Theorie auf Karten

Die Informationen in diesem Abschnitt sind aus [3] Seite 140 – 143 zitiert oder inhaltlich übernommen.
Möchte man beispielsweise die Erdoberfläche darstellen, so wäre u die geographische Länge λ und v die geographische Breite φ der Erdkugel mit dem Radius R. Daraus ergeben sich für $-180° < u < 180°$ und $-90° < v < 90°$ die Funktionen

$$\begin{aligned} x &= R\cos v \cdot \cos u, \\ y &= R\cos v \cdot \sin u, \\ z &= R\sin v. \end{aligned}$$

Wie bereits aus Abschnitt 2.4 bekannt, kann den Polen keine eindeutige geographische Länge zugeordnet werden, wodurch auch die Forderung, nämlich dass das Vektorprodukt der ersten partiellen Ableitungen nicht verschwindet, nicht erfüllt wird. So genannte u-Linien erhält man, indem man den Parameter v konstant hält und nur u variiert. Auf diese Weise erhält man die Breitenkreise auf der Kugel. Man kann auch v-Linien erzeugen, wenn nur v verändert wird und u konstant bleibt. Dadurch kann man Längenkreise beschreiben. (vgl. [13] Seite 28 – 29)

Berechnet man für die Kugel die Fundamentalgrößen mit den geographischen Koordinaten, so ist

$$\begin{aligned} E &= R^2\cos^2\varphi, \\ F &= 0, \\ G &= R^2. \end{aligned}$$

Die Längenverzerrung τ im Punkt $\bar{P}(\lambda, \varphi)$ ist sowohl von der Lage des Punktes P als auch von der Richtung α des Bogenelements ds in P gegenüber dem Meridian durch P abhängig. Also kann man mit geographischen Koordinaten schreiben:

$$\tau^2 = \frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = \frac{\bar{E}d\lambda^2 + 2\bar{F}d\lambda d\varphi + \bar{G}d\varphi^2}{R^2\cos^2\varphi \cdot d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2}.$$

Zur Berechnung der Längenverzerrung in Richtung der Breitenkreise erhält man für ein konstantes φ und $\alpha = 90°$

$$\tau_1^2 = \frac{\bar{E}}{R^2\cos^2\varphi}.$$

Für die Längenverzerrung in Richtung der Meridiane erhält man für ein konstantes λ und $\alpha = 0°$

$$\tau_2^2 = \frac{\bar{G}}{R^2}.$$

Wir wollen nun die Extremwerte für die Längenverzerrung ermitteln. Da α der Winkel zwischen einer Flächenkurve und dem Meridian in einem Punkt P ist, gilt auf der Kugel $\tan\alpha = \frac{\cos\varphi \cdot d\lambda}{d\varphi}$ und es kann

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\tan\alpha}{\cos\varphi}$$

gesetzt werden. Kürzt man die Formel von τ^2 durch $d\varphi^2$ und ersetzt mögliche Ausdrücke durch τ_1 und τ_2, ergibt dies

$$\tau^2 = \tau_1^2 \sin^2\alpha + \frac{2\bar{F}}{R^2\cos\varphi}\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \tau_2^2\cos^2\alpha.$$

Um die Richtungen α_e zu bestimmen, in denen die Längenverzerrung ihre Extremwerte annimmt, setzt man $\frac{d\tau}{d\alpha} = 0$.

$$\frac{d\tau^2}{d\alpha} = \frac{2\tau d\tau}{d\alpha} =$$

$$2\tau_1^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \frac{2\bar{F}}{R^2\cos\varphi}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2\tau_2^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha =$$

$$\sin 2\alpha\cdot(\tau_1^2 - \tau_2^2) + \frac{2\bar{F}}{R^2\cos\varphi}\cos 2\alpha.$$

Da τ in allen regulären Punkten von 0 verschieden ist, darf man

$$\sin 2\alpha_e\cdot(\tau_2^2 - \tau_1^2) + \frac{2\bar{F}}{R^2\cos\varphi}\cos 2\alpha_e = 0$$

setzen und folgert, dass

$$\tan 2\alpha_e = \frac{2\bar{F}}{R^2\cos\varphi\cdot(\tau_2^2 - \tau_1^2)}.$$

Die Extremwerte treten für $2\alpha_e$ und für $2\alpha_e + 180°$, also für die Richtungen α_e und $\alpha_e + 90°$ (gegen die Meridian-Richtung), auf. Diese Richtungen bezeichnet man als Hauptverzerrungsrichtungen der Abbildung und werden in der Folge mit τ_1 und τ_2 bezeichnet. Die Hauptverzerrungsrichtungen stehen aufeinander normal. Wählt man nun das Parametersystem der Kugel so, dass die Parameterlinien in Richtung der Hauptverzerrungen laufen, dann folgt, dass $F = 0$, weil $\alpha_e = 0°$ und daher auch $\bar{F} = 0$. Für die Längenverzerrung in beliebiger Richtung α vereinfacht sich die Formel auf

$$\tau^2 = \tau_1^2\sin^2\alpha + \tau_2^2\cos^2\alpha,$$

die sogenannte Grundgleichung der Längenverzerrung.

3.2.2 Längenverzerrung versus Längentreue

Wie schon weiter oben erwähnt, wird die Längenverzerrung mit der Variablen

$$\tau = \frac{d\bar{s}}{ds} =$$
$$= \sqrt{\frac{\bar{E}d\lambda^2 + 2\bar{F}d\lambda d\varphi + \bar{G}d\varphi^2}{R^2\cos^2\varphi \cdot d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2}} =$$
$$= \sqrt{\tau_1^2 \sin^2\alpha + \tau_2^2 \cos^2\alpha}$$

angegeben.
Für die Verzerrungen auf den u-Linien oder Breitenkreisen, wo v konstant ist, also $dv = 0$, vereinfacht sich die Formel auf

$$\tau_1^2 = \frac{\bar{E}}{E}.$$

Folglich kann man die Verzerrungen auf den v-Linien oder Längenkreisen auch angeben mit

$$\tau_2^2 = \frac{\bar{G}}{G}.$$

Durch Wurzelziehen kann man leicht τ_1 und τ_2 bestimmen.
Längentreue wird in der Literatur oft auch als Äquidistanz bezeichnet. Unter längentreu versteht man, dass die Längen in der Karte nicht verzerrt dargestellt werden. Bei [18] Seite 5 wird es folgendermaßen definiert: „Alle Längen sind in genau gleichem Verhältnis zu den wahren Längen auf der Erdoberfläche verkleinert und stehen daher untereinander im richtigen Verhältnis."

In der Symbolsprache wird es so ausgedrückt:

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = m.$$

Also muss der Maßstab m konstant sein, um eine längentreue Abbildung zu erreichen. Verwenden wir die Formel aus Abschnitt 3.2 liegt Längentreue vor, wenn gilt

$$\bar{E} = m^2 E, \qquad \bar{F} = m^2 F, \qquad \bar{G} = m^2 G.$$

(vgl. [3] Seite 138)

Unter Verwendung der Definition 32 können wir Längentreue feststellen, wenn $\tau_1 = \tau_2 = 1$ und daher $h = k = 1$ gilt.

3.2.3 Winkelverzerrung versus Winkeltreue

Die Winkelverzerrung kann man festsetzen durch

$$W = 2\,\omega = 2\arcsin\left|\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\right|.$$

Die Variable ω ist der Maximalwert der Winkeldifferenz $\alpha - \bar{\alpha}$.

Winkeltreue nennt man auch Konformität. Als winkeltreu werden Karten bezeichnet, die Winkel unverzerrt wiedergeben. Winkeltreue in einer Abbildung ist dann gegeben, wenn zwei Geraden denselben Winkel miteinander einschließen wie zwei beliebige Kurven auf der Sphäre. Bei winkeltreuen Abbildungen ist $\tau_1 = \tau_2$ und daher ist $W = 0$. (vgl. [13] Seite 51)
Eine andere Variante um Winkeltreue nachzuweisen, ist wenn diese Bedingungen erfüllt sind

$$\bar{E} = \mu(u,v) \cdot E, \quad \bar{F} = \mu(u,v) \cdot F, \quad \bar{G} = \mu(u,v) \cdot G$$

und das Verhältnis $\mu(u,v)$ nur von der Lage von P und $\bar{P}$ abhängt. Es folgt sofort, dass eine längentreue Abbildung auch winkeltreu ist. Es ist dann $\mu = m^2$ für jeden Punkt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. (vgl. [3] Seite 139)
Konforme Abbildungen, festgestellt anhand von Definition 32, liegen vor, falls $\tau_1 = \tau_2$ und somit auch $k = h^2$ ist. (vgl. [13] Seite 49)

3.2.4 Flächenverzerrung versus Flächentreue

Die Flächenverzerrung S einer Abbildung kann man definieren durch

$$S = \frac{1}{k} = \tau_1 \tau_2.$$

(vgl. [13] Seite 49)

Flächentreue wird auch mit Äquivalenz bezeichnet. Flächentreue Abbildungen liefern Verzerrungsfreiheit bezüglich der dargestellten Fläche. „Flächentreue bedeutet demnach, dass zwei verschiedene Länder auf dem Globus das gleiche Flächenverhältnis haben wie auf der Erde.“ ([18] Seite 5)

Flächentreue Abbildungen sind dadurch charakterisiert, dass das Verhältnis des Flächeninhalts $\bar{A}$ auf der abgebildeten Fläche zum Flächeninhalt der ursprünglichen Fläche oder Flächenkurve konstant ist. Dieses Verhältnis kürzen wir mit n ab und erhalten die Formel

$$\frac{d\bar{A}}{dA} = n.$$

Verwendet man die Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines Flächenstückes der Fläche Φ, also $A = \int\int \sqrt{EG - F^2}\, dudv$, erhält man als Charakterisierung der Flächentreue

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = n^2 \cdot (EG - F^2).$$

Hieraus folgt sofort, dass eine längentreue Abbildung auch flächentreu ist, die Umkehrung aber nicht gilt. Weiter folgt, dass eine winkel- und flächentreue Abbildung auch längentreu ist. Setzt man nämlich in der letztgenannten Gleichung $\bar{E} = \mu \cdot E, \bar{F} = \mu \cdot F, \bar{G} = \mu \cdot G$, so ist $\mu = n$, was Längentreue bedeutet. (vgl. [3] Seite 139)

Unter Verwendung von Definition 32 muss $h = k = 1$ gelten, dass die Abbildung flächentreu ist.

Kapitel 4

Verbindung zur Geographie

4.1 Von der Scheibe zum Geoid

Die erste Vorstellung von der Gestalt der Erde war die der Scheibe. Diese Überlegung wurde durch jene der kugelförmigen Erde abgelöst. Dieses Weltbild variierte durch die verschiedenen Theorien über die Position der Erde zur Sonne. Zu Beginn war das geozentrische Weltbild, die allseits vertretene Weltanschauung, die durch das heliozentrische Weltbild ersetzt wurde. Letzt genanntes löste den Gedanken ab, dass die Erde sich im Mittelpunkt des Sonnensystems befindet. Danach erkannte man, dass die Sonne der Mittelpunkt dieses Systems ist und sich die Erde um die Sonne bewegt. Durch weitere Untersuchungen und die Entdeckung des Gravitationsgesetzes wurde die Form der Erde nochmals überdacht und man kam zu dem Schluss, dass die Gestalt unseres Planeten besser durch ein Rotationsellipsoid angenähert werden kann. Es wurden viele verschiedene Ellipsoide als Bezugssysteme entwickelt. Jedoch konnten noch immer große Abweichungen zum jeweiligen Bezugsellipsoid gemessen werden, die nicht auf Messungenauigkeit zurück zu führen sind. Die Feststellung, dass die Erdoberfläche schwache Wellen aufweist, führte zur Festlegung eines neuen Modells der Erde. Die Figur, die auch diesen Umstand berücksichtigt, nennt man Geoid.

Für die Generierung großmaßstäbiger Karten, also Karten mit einem Maßstab bis $1 : 200\,000$, wird das Rotationsellipsoid herangezogen. Zur Erstellung von kleinmaßstäbigen Karten, also Karten deren Maßstab im Bereich von $1 : 200\,000$ bis $1 : 100\,000\,000$ liegt oder eben zur Darstellung der gesamten Erdoberfläche, eignet sich weder das Geoid noch das Ellipsoid als Bezugssystem, da diese beiden Formen zu kompliziert für Berechnungen sind. Daher greift man auf die Vorstellung der Erde als Kugel zurück. Man erhält dadurch

eine ausreichend genaue Darstellung, wenn man die Erde durch eine Kugel mit dem Radius R = 6371 km beschreibt.
In dieser Arbeit wird der Fokus auf die kleinmaßstäbigen Karten gelegt.

4.2 Das Gradnetz der Erde

Die bereits in Kapitel 2 erklärten geographischen Kugelkoordinaten wollen wir uns an dieser Stelle wieder ins Gedächtnis rufen.
Ein beliebiger Ort auf der Erde kann mit der Angabe der geographischen Länge λ und Breite φ eindeutig bestimmt werden. Lediglich für den Nord- und den Südpol können wir keine eindeutige geographische Länge angeben. Damit die Systematik weltweit eindeutig ist, ist als Nullmeridian, jener Meridian gewählt worden, der durch die Stadt Greenwich in England verläuft. Ist die Nord-Südausrichtung der Erde so gewählt wie in Abbildung 4.1 werden Orte, die links von Greenwich liegen mit „westlich von Greenwich“ bezeichnet. Alle Orte, die sich östlich von Greenwich befinden, erhalten zur Längenwinkelangabe den Zusatz „östlich von Greenwich“. Die Erdkugel wird mit einem fiktiven Grossgeradenbüschel von Meridianen überzogen, um die geographische Länge anzugeben. Die Pole sind dabei die Schnittpunkte dieser Längenkreise. Die Polare zum Nord- und Südpol bildet der Äquator. Dieser besitzt denselben Umfang wie die Meridiane, da der Kugelmittelpunkt auf der Schnittfläche liegt, welche durch den Schnitt der Kugel mit dem Äquator entsteht. Die parallelen Kleinkreise zum Äquator werden Breitenkreise genannt. Sie markieren verschiedene geographische Breiten. Die Breitenkreise zwischen dem Nordpol und dem Äquator werden mit dem Zusatz „nördliche Breite“ versehen. Der Äquator kennzeichnet den Bereich 0°. Der Nordpol hat 90° nördliche Breite. Breitenkreise südlich des Äquators haben hinter der Gradangabe noch „südliche Breite“ stehen.

4.3 Karten

Auf die Frage „Haben Sie schon einmal eine Karte benutzt?“ würde wohl niemand mit „Nein.“ antworten, da man wesentlich häufiger mit Karten konfrontiert ist, als manch einem lieb ist. Die Anwendung erstreckt sich von Straßenkarten, U-Bahn-Plänen über Wanderkarten, thematischen Karten bis hin zu Seefahrerkarten, um hier nur einige zu nennen. Damit sei die Relevanz von Karten ins rechte Licht gerückt. Mit kleinmaßstäbigen Karten arbeitet man wahrscheinlich weniger oft als mit großmaßstäbigen Karten, aber gerade in der Geographie haben diese Karten eine wichtige Rolle, da sie gerne für

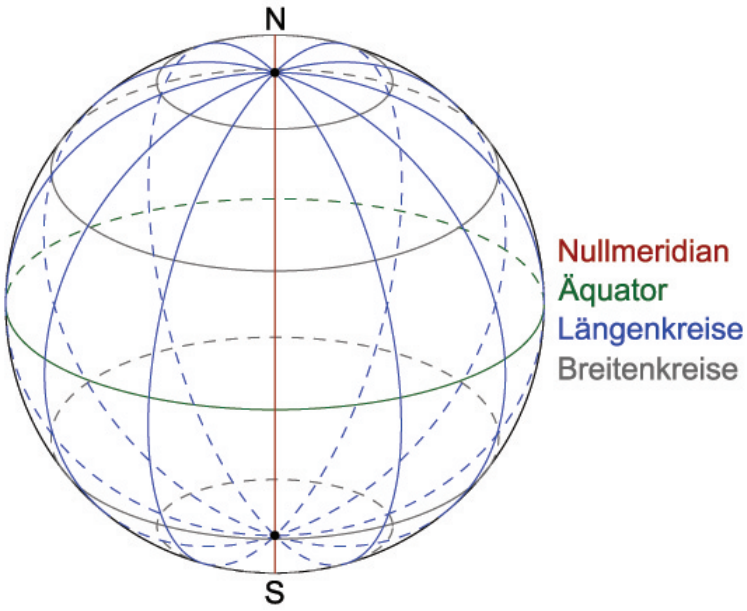

Abbildung 4.1: Gradnetz.

thematische Karten herangezogen werden, um zum Beispiel die Zeitzonen der Erde oder die Verteilung der Arbeiter und Angestellten in den Arbeitssektoren einzelner Länder zu erklären.
Eine Karte ist ein verkleinertes, ebenes, aber auch verzerrtes Bild der Erdoberfläche oder eines Ausschnittes davon. Um Verzerrungen klein zu halten, hat man verschiedene Abbildungsverfahren entwickelt.

4.4 Kursbestimmung

Dieses Unterkapitel wurde gleich aufgebaut wie bei [3]. Jeweils am Ende eines Abschnittes werden die Seitenzahlen, wo die Informationen zu finden sind, angeführt.

„Unter dem Kurs eines Flugzeuges oder eines Schiffes versteht man den Winkel, unter dem die Bewegungsbahn die Meridiane schneidet. In der Navigation wird er in der Regel als wahrer Kurs angegeben und gegen Nord über Ost von 0° bis 360° gezählt oder durch eine Angabe wie z.B. N 87° W mitgeteilt.“ ([3] Seite 84)
Diese Kursangabe bedeutet, dass der Kurs von der Nordrichtung um 87° nach Westen abweicht. Zur Abkürzung der Richtungen werden große Anfangsbuchstaben der Himmelsrichtungen verwenden, wobei von den deutschen Begriffen ausgegangen wird. (vgl. [20] Seite 316)

4.4.1 Orthodrome

Natürlich versucht man bei der Kursbestimmung, wenn möglich den kürzesten Weg zu wählen, der auch einfach zu navigieren ist. Wie man den kürzesten Abstand zwischen zwei Kugelpunkten berechnet, haben wir in Abschnitt 2.3 bereits kennengelernt. Um zum Beispiel die Entfernung für den Flug von New York und Frankfurt zu bestimmen, sucht man jenen Großkreis auf dem beide Städte liegen und die Länge des kürzeren Großkreisbogens ist dann die Entfernung zwischen New York und Frankfurt.

Definition 34. Die sphärische Strecke zwischen zwei Punkten A und B der Erdoberfläche wird als Orthodrome, ihre Länge als orthodrome Entfernung zwischen den Punkten A und B bezeichnet.

([9] Seite 33)

Wir wollen nun das oben genannte Beispiel durchrechnen: Die geographischen Koordinaten für New York und Frankfurt kennen wir:
Frankfurt: $\varphi_F = 50,1°$ nördl. Breite und $\lambda_F = 8,7°$ östl. von Greenwich
New York: $\varphi_Y = 40,6°$ nördl. Breite und $\lambda_Y = 73,8°$ westl. von Greenwich
Bei Gradangaben mit südl. Breite und westl. von Greenwich werden die Vorzeichen von $+$ auf - geändert.
Zur besseren Vorstellung dient Abbildung 4.2.

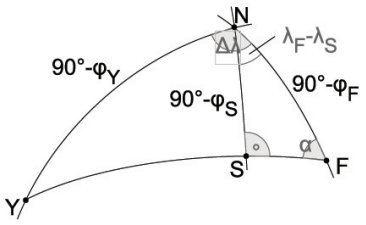

Abbildung 4.2: Kurswinkeldreieck.

Wir berechnen $\Delta\lambda = |\lambda_F - \lambda_Y| = 82,5°$, da wir dies in der nächsten Formel benötigen. Zuerst berechnen wir die Länge der Flugstrecke $|\widehat{FY}| = s$. Dafür benötigen wir einen der Seiten-Kosinussätze von Seite 36, $cosc = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma$. Setzen wir die gegebenen Größen ein, so erhalten wir

$$\cos s = \cos(90° - \varphi_F) \cdot \cos(90° - \varphi_Y) + \sin(90° - \varphi_F) \cdot \sin(90° - \varphi_Y) \cdot \cos\Delta\lambda,$$

die wir vereinfachen, indem wir $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ und $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ verwenden

$$\cos s = \sin\varphi_F \cdot \sin\varphi_Y + \cos\varphi_F \cdot \cos\varphi_y \cdot \cos\Delta\lambda =$$
$$= \sin 50,1° \cdot \sin 40,6° + \cos 50,1° \cdot \cos 40,6° \cdot \cos 82,5° = 55,75°.$$

Möchte man diese Gradangabe in Kilometer umrechnen, so reicht es zu wissen, dass der Radius der Kugel, die die Erde am besten beschreibt, $R = 6371\,km$ ist. Daraus kann man sich den Umfang eines Großkreises berechnen mit $U_g = 2R\pi \approx 40030\,km$. Dividiert man den Umfang durch 360, dann weiß man wie vielen Kilometern ein 1° entspricht. Angewendet auf unsere Situation sind $55,75° \simeq 6199\,km$.
Den Kurs α bestimmen wir mit dem Kotangessatz (siehe Seite 37)

$$\sin\varphi_F \cdot \cos\Delta\lambda = \cos\varphi_F \cdot \tan\varphi_Y - \sin\Delta\lambda \cdot \cot\alpha.$$

Umgeformt sieht die Formel wie folgt aus

$$\cot\alpha = \frac{\cos 50,1° \cdot \tan 40,6° - \sin 50,1° \cdot \cos 82,5°}{\sin 82,5°}$$

und das Ergebnis ist

$$\alpha = 65,6°.$$

Dieser Kurs wird entweder mit N 65,6° W oder in Form des wahren Kurses mit N 294,4° O angegeben.
In Abbildung 4.2 ist noch der Punkt S eingezeichnet. Dies kennzeichnet den nördlichsten Punkt der Strecke $\widehat{YF}$. Es entstehen dadurch zwei rechtwinklige Dreiecke, denn der Meridian durch den Punkt S steht senkrecht auf den Großkreis YF. Mit Hilfe der Neperschen Regel (siehe Seite 40) gilt $\sin a = \sin c \cdot \sin\alpha$. Für unsere Bezeichnungen ergibt sich

$$\cos\varphi_S = \cos\varphi_F \cdot \sin\alpha = \cos 50,1° \cdot \sin 65,5°,$$
$$\varphi_S = 54,3°.$$

Unter Verwendung von $\cos c = \cot\alpha \cdot \cot\beta$ erhalten wir

$$\sin\varphi_F = \cot(\lambda_F - \lambda_S) \cdot \cot\alpha,$$
$$\cot(\lambda_F - \lambda_S) = \frac{\sin 50,1°}{\cot 65,5°},$$
$$\lambda_F - \lambda_S = 30,6°,$$
$$\lambda_S = -21,9°.$$

Wir erhalten für den Punkt S die geographischen Koordinaten $21,9°$ westl. von Greenwich und $54,3°$ nördl. Breite. Es kann auch sein, dass dieser Punkt S, der auch Scheitel genannt wird, mit dem Anfangs- oder Endpunkt zusammenfällt oder außerhalb der Strecke liegt.
Problematisch an dieser Art der Kursbestimmung ist die Tatsache, dass der Kurs ständig geändert werden muss. Vom Ausgangspunkt Frankfurt ist der Kurs N $65,6°$ W. Im Punkt S wäre der Kurs N $90°$ W. Und schließlich wird auch New York unter einem anderen Kurswinkel erreicht. Würde man nun nach der Orthodrome navigieren, so müsste der Kurs immer geändert werden, was in der Praxis nicht durchführbar ist. Fällt die Orthodrome mit einem Meridian oder dem Äquator zusammen, so ist diese Art der Kursbestimmung leicht durchzuführen. (vgl. [3] Seite 85 – 86)

4.4.2 Loxodrome

Die zweite Möglichkeit der Kursbestimmung erfolgt über die Loxodrome.

Definition 35. Als Loxodrome werden Linien auf der Erdoberfläche bezeichnet, die alle Meridiane unter dem gleichen Winkel schneiden.

([9] Seite 34)

Um die Gleichung der Loxodrome zu ermitteln, nehmen wir an, dass Q_1Q_2 ein infinitesimales Stück der Loxodrome ist. Durch die Breiten- und Längenkreise erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck QQ_2Q_1. Es kann infinitesimal wie ein

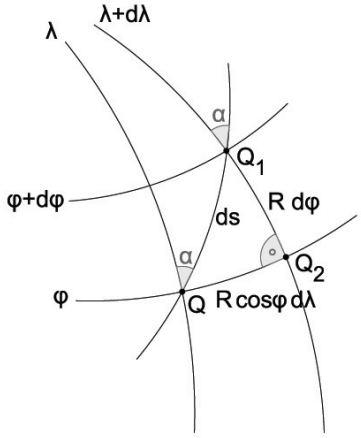

Abbildung 4.3: Loxodrome.

Dreieck in der Ebene aufgefasst werden, wodurch man folgendes anwenden darf:

$$\tan\alpha = \frac{R\cos\varphi \cdot d\lambda}{Rd\varphi}$$

und durch Umformen erhält man

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\tan\alpha}{\cos\varphi}.$$

Löst man diese Differentialgleichung auf, ergibt es

$$\frac{d\lambda}{\tan\alpha} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$
$$\frac{\lambda}{\tan\alpha} = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) + C_1$$
$$\lambda = \tan\alpha\left[\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right] + C.$$

Das Ergebnis nennt man die Funktionsgleichung der Loxodromen-Schar für den Kurs α, wenn man die Winkel λ und φ im Bogenmaß einsetzt.
Soll bei der Kursbestimmung die Loxodrome durch einen bestimmten Punkt $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ gehen, dann setzt man für

$$C = \lambda_1 - \tan\alpha \cdot \left[\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]$$

in die Funktionsgleichung der Loxodromen-Schar ein und erhält

$$\lambda - \lambda_1 = \tan\alpha \cdot \left[\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) - \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)\right] \quad \text{oder}$$
$$\lambda - \lambda_1 = \tan\alpha \cdot \ln\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)}.$$

Es besteht auch die Möglichkeit, dass die Loxodrome durch zwei Punkte $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ und $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ geht, dann ermittelt man den Kurs α mit der Formel

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \tan\alpha \cdot \ln\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)},$$

die umgeformt nach α ergibt

$$\cot\alpha = \frac{\ln\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)}}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

wobei $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sein muss. Um die Bogenlänge der Loxodrome zwischen den beiden Punkten zu berechnen, formt man

$$\cos\alpha = \frac{Rd\varphi}{ds} \quad \text{auf} \quad ds = \frac{Rd\varphi}{\cos\alpha}$$

um und integriert

$$s = \frac{R}{\cos\alpha} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \frac{R}{\cos\alpha}(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Wenden wir nun die gewonnenen Formeln auf unser Beispiel aus dem Abschnitt 4.4.1 an, dann erhalten wir für den Flug von Frankfurt nach New York einen Kurs

$$\cot\alpha = \frac{\ln \frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_Y}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_F}{2}\right)}}{\lambda_Y - \lambda_F} \quad \text{mit}$$

$$\lambda_Y - \lambda_F = -73,8° - 8,7° = -82,5° \quad \text{im Bogenmaß} \quad \lambda_Y - \lambda_F = -1,4399$$

$$\cot\alpha = \frac{\ln \frac{\tan(45°+20,3°}{\tan(45°+25,05°)}}{-1,4399},$$

also

$$\alpha = 80,7° \quad \text{oder} \quad \alpha = 260,7°.$$

Der wahre Kurs ist N $260,7°$ O. Man kann den Kurs auch wieder mit Abweichung Westen angeben, sodass N $99,3°$ W steht. Die Länge der Flugstrecke berechnet man mit

$$s = \frac{R}{\cos\alpha}(\varphi_Y - \varphi_F) \quad \text{mit}$$

$$\varphi_Y - \varphi_F = 40,6° - 50,1° = -9,5 \quad \text{im Bogenmaß} \quad \varphi_Y - \varphi_F = -0,1658$$

$$s = \frac{6371\,\text{km}}{\cos 260,7°} \cdot (-0,1658) = 6537\,\text{km}.$$

(vgl. [3] Seite 86 – 88)

4.4.3 Mischform

Vergleicht man den zurückgelegten Weg mittels der Loxodrome-Route, so ist die geflogene Strecke um 338 km länger als mittels der Kursführung der Orthodrome. Daher wird in der Praxis sehr oft eine Mischform der beiden Kursbestimmungen gewählt, indem auf der Route Zwischenpunkte eingeführt

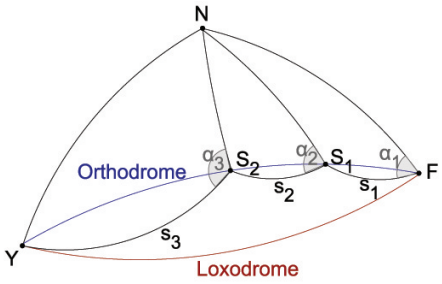

Abbildung 4.4: Kursbestimmung mittels Mischform.

werden und somit setzt sich die Reiseroute aus mehreren Loxodromen zusammen. Die Zwischenpunkte liegen auf der Orthodrome und nur an diesen Punkten wird der Kurs geändert.

Wir ziehen wieder das Beispiel Frankfurt – New York heran.
Frankfurt: $\varphi_F = 50,1°$ nördl. Breite und $\lambda_F = 8,7°$ östl. von Greenwich
nördlichster Punkt S_1: $\varphi_{S_1} = 54,3°$ nördl. Breite und $\lambda_{S_1} = 21,9°$ westl. von Greenwich
Punkt S_2, gleiche nördl. Breite wie F: $\varphi_{S_2} = 50,1°$ nördl. Breite und $\lambda_{S_2} = 52,5°$ westl. von Greenwich
New York: $\varphi_Y = 40,6°$ nördl. Breite und $\lambda_Y = 73,8°$ westl. von Greenwich
Wir berechnen die einzelnen Loxodromstücke s_1, s_2, s_3 und die Kurswinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ wie bei 4.4.2 und erhalten

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \text{N}\,77,4°\,\text{W} \quad \text{mit} \quad s_1 = 2141\,\text{km},\\
\alpha_2 &= \text{N}\,102,6°\,\text{W} \quad \text{mit} \quad s_2 = 2141\,\text{km},\\
\alpha_3 &= \text{N}\,122,5°\,\text{W} \quad \text{mit} \quad s_3 = 1966\,\text{km}.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir eine Flugstrecke von $s = 6248\,\text{km}$. Man sieht hier sehr deutlich, dass durch 2 Kursänderungen die Strecke um 289 km verkürzt werden kann und somit der Unterschied zur orthodromen Länge nur mehr 49 km beträgt.

Dieses Beispiel ist natürlich ein wenig idealisiert, aber es soll dazu dienen eine Vorstellung davon zu bekommen wie man die Routen wählen kann und welche Vor- und Nachteile sich daraus ergeben. Die Kursbestimmung für die Seefahrt ist noch viel komplexer, da hier etwa Jahreszeiten und damit die Bedrohung durch Eisberge, Strömungen, Inseln und noch vieles mehr zu beachten sind. (vgl. [3] Seite 89 – 90)

4.5 Peilung

Dieses Unterkapitel wurde ebenfalls wie bei [3] aufgebaut.

Die Peilung in Form von Fremd- oder Eigenpeilung dient zum Beispiel zur Feststellung des Aufenthaltsortes eines Schiffes.

4.5.1 Fremdpeilung

Möchte man eine Fremdpeilung durchführen, um die Koordinaten des Ortes S fest zu stellen, so vereinbart man mit mindestens zwei Funkpeilstellen einen Zeitpunkt, an welchem vom Ort S aus Peilzeichen in einer festgelegten Frequenz ausgeschickt werden. Die Funkpeilstellen stellen die Richtung, aus der die Peilzeichen empfangen werden, fest. Koordiniert wird dieser Prozess von der Funkpeilleitstelle. Die Funksignale breiten sich auf Großkreisen aus. In der Praxis ist es üblich solch ein Problem mit Hilfe von Konstruktionen auf einer Seekarte zu lösen.

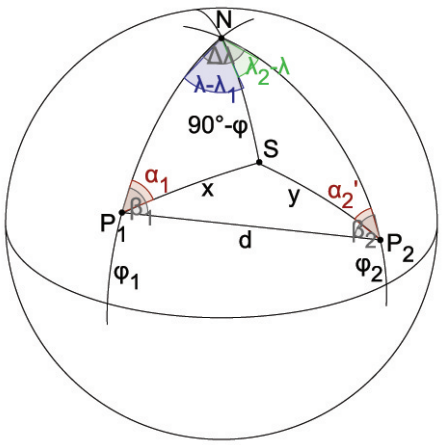

Abbildung 4.5: Fremdpeilung.

Wir lösen die Aufgabe rechnerisch, dabei kennen wir die geographischen Koordinaten der beiden Funkpeilstellen $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ und $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ und die gemessenen Peilwinkel α_1 und $\alpha_2 = 360° - \alpha_2'$. Es sollen nun die Koordinaten von $S(\varphi, \lambda)$ rechnerisch ermittelt werden. Die Winkel β_1, β_2 und die Entfernung d sind normalerweise bekannt. Sie können aber auch einfach berechnet

werden:

$$\cos d = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\Delta\lambda,$$
$$\sin\beta_1 = \cos\varphi_2 \frac{\sin\Delta\lambda}{\sin d},$$
$$\sin\beta_2 = \cos\varphi_1 \frac{\sin\Delta\lambda}{\sin d}.$$

Die Entfernung x kann nach dem Kotangenssatz des Dreiecks P_1P_2S errechnet werden:

$$\cos(\beta_1 - \alpha_1) \cdot \cos d = \sin d \cdot \cot x - \sin(\beta_1 - \alpha_1) \cdot \cot(\beta_2 - \alpha_2'),$$

durch Umformung ergibt sich

$$\cot x = \frac{\cos(\beta_1 - \alpha_1) \cdot \cos d + \sin(\beta_1 - \alpha_1) \cdot \cot(\beta_2 - \alpha_2')}{\sin d}.$$

Somit können wir für das Dreieck NP_1S den Winkel φ wie folgt ermitteln

$$\sin\varphi = \cos x \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\alpha_1.$$

Die geographische Länge von S erhält man aus demselben Dreieck mit

$$\sin(\lambda - \lambda_1) = \sin x \frac{\sin\alpha_1}{\cos\varphi}.$$

Anhand eines kurzen Beispiels wird erläutert, welcher Winkel zu wählen ist, falls mehrere Lösungen zur Verfügung stehen.
Ein in Seenot geratenes Schiff S sendet SOS-Rufe aus, die von einer Funkpeilstelle auf den Bermudas $P_1(32,5^\circ\,\mathrm{N};\, 64,6^\circ\,\mathrm{W})$ unter dem Peilwinkel $\alpha_1 = 126^\circ$ und von einer Funkpeilstelle auf den Kapverdischen Inseln $P_2(17^\circ\,\mathrm{N};\, 25,2^\circ\,\mathrm{W})$ unter dem Winkel $\alpha_2 = 261^\circ$ empfangen werden.
Wir berechnen Schritt für Schritt die einzelnen Variablen wie oben beschrieben:
Die Entfernung $d = 38,71^\circ$, ist eindeutig bestimmt.
Für β_1 erhalten wir zwei Lösungen: $\beta_1 = 76,07^\circ$ oder $\beta_1 = 103,93^\circ$. Mit Hilfe von Abbildung 4.5 stellen wir die Überlegung an: Liegt P_1 weiter südlich als P_2, dann ist der erste Wert richtig. Ist es, wie in unserem Beispiel umgekehrt, so wählen wir den zweiten Wert, also $\beta_1 = 103,93^\circ$.
Für β_2 nimmt man sich wiederum die Abbildung zu Hilfe und folgert analog wie bei β_1. Darum kommt man zu $\beta_2 = 58,87^\circ$.
Die Entfernung von den Bermudas zum Schiff ist $x = 28,15^\circ$.
Die geographische Breite ist durch $\varphi = 13,88^\circ$ festgelegt.
Die geographische Länge liefert $\lambda = -41,45^\circ$ oder $\lambda = 92,25^\circ$. Um die richtige Lösung zu ermitteln, betrachtet man die Koordinaten der Funkpeilstellen

und die Peilungswinkel. Wie auch in Abbildung 4.5 zu sehen ist, liegt λ zwischen λ_1 und λ_2. Beide liegen westlich von Greenwich und daher ist der erste Wert, also $\lambda = -41,45°$ richtig.
Das Schiff befindet sich in etwa auf $13,88°$ nördl. Breite und $41,45°$ westl. von Greenwich. (vgl. [3] Seite 68 – 70)

4.5.2 Eigenpeilung

Da die Eigenpeilung viel schwieriger zu berechnen ist als die Fremdpeilung, wollen wir hier nur die Idee der Eigenpeilung näher bringen.
„Bei der Eigenpeilung werden mit Hilfe eines Funkpeilers von einem Ort S aus die Richtungen bestimmt, aus denen die Funktstrahlen von mindestens zwei bekannten Kreisfunkfeuern empfangen werden. Die Peilwinkel werden in der Praxis, wie bei der Fremdpeilung auch, als Winkel gegen Nord (gezählt 0° bis 360° über Ost) angegeben. Orte, von denen aus ein Kreisfunkfeuer unter demselben Winkel angepeilt werden, liegen auf einer Kurve, die Azimutgleiche genannt wird. Unter Azimut versteht man also in diesem Zusammenhang den Winkel, unter dem die Kugelstrecke Nordpol-Kreisfunkfeuer (gemessen über Ost) von einem Ort S aus erscheint.“ ([3] Seite 70)

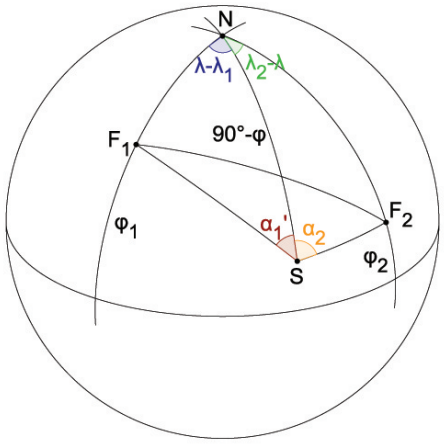

Abbildung 4.6: Eigenpeilung.

(vgl. [3] Seite 70 – 71)

Kapitel 5

Kartennetzentwürfe

Zu Beginn des Kapitels werden zwei Möglichkeiten der Abbildung gegeben, nämlich die Polyederabbildung und die Trimetrische Abbildung, die sich von den dann folgenden Möglichkeiten der Abbildung hinsichtlich ihrer Vorgehensweise unterscheiden. In Abschnitt 5.3 wird darauf eingegangen, mit welchen Figuren projiziert bzw. abgebildet wird, nach welchen Gesichtspunkten man Kartenentwürfe unterteilen kann und wie die Umrechnung erfolgt, falls weder der Nord- noch der Südpol als Entwurfspol herangezogen werden. Danach werden Azimutal-, Kegel- und Zylinderabbildungen mit ihren Abbildungsgleichungen und ihren Karten vorgestellt. Durch den Vergleich der Karten kann man sehr gut feststellen wie unterschiedlich Karten mit verschiedenen Abbildungseigenschaften aussehen. Zu einzelnen Entwürfen sind auch die Kartennetze mit den Tissot'schen Indikatrizen angeführt, welche die Verzerrungen besser deutlich machen. Im letzten Abschnitt werden noch weitere Kartennetzentwürfe vorgestellt, die sich nicht passend einordnen lassen.

In den Unterkapiteln 5.4, 5.5 und 5.6 handelt es sich immer um normalachsige rotationssymmetrische Abbildungen, außer es werden explizit andere Angaben gemacht.

5.1 Polyederabbildung

Dieser Abschnitt wurde nach [18] Seite 2 – 3 ausgearbeitet.

Möchte man eher kleine Gebiete der Erdoberfläche darstellen bei der die Erdkrümmung noch vernachlässigt werden kann, so verwendet man Gradabteilungskarten. Das Gebiet erhält man durch den Schnitt zweier Meridiane mit zwei Breitenkreisen. Dadurch erhält man die vier Eckpunkte A, B, C, D.

Um diesen Ausschnitt nun auf der Ebene aufzutragen, verbindet man die Eckpunkte durch gerade Linien im Sinne der ebenen Geometrie. Somit ergibt die Figur ein Trapez. Zur leichteren Vorstellung nimmt man eine Ebene, die durch die vier Schnittpunkte dieser ausgewählten Meridiane und Breitenkreise geht. Der, durch die Punkte A, B, C, D, festgelegte Teil der Ebene ist ein Trapez. Würde man mit einem einheitlichen Gradnetz die ganze Sphäre auf diese Weise abbilden und wieder zu einer Figur zusammenbauen, so erhielte man ein Polyeder, welches der Kugel eingeschrieben ist. Je feiner das gewählte Gradnetz ist, desto besser schmiegt sich der Polyeder an die Kugel an.

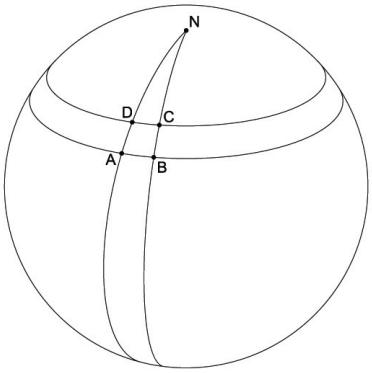

Abbildung 5.1: Ausschnitt auf der Kugeloberfläche.

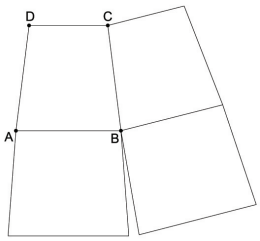

Abbildung 5.2: Abbildung von Ausschnitten.

Bei sogenannten Messtischblättern mit einem Maßstab von 1 : 25 000 ist die Verzerrung der Längen, Flächen und Winkel vernachlässigbar gering. 1 cm in der Karte stellt in der Natur eine Strecke von 250 m dar. Umgekehrt betrachtet wird 1 km in der Natur auf 4 cm in der Karte wiedergegeben. Wie man in Abbildung 5.2 sieht, passen die Trapeze in der Ebene nicht lückenlos zusammen, womit man durch diese Technik keine größeren Gebiete abbilden kann.

5.2 Trimetrische Abbildung

Diese Informationen und Abbildungen 5.3 und 5.4 stammen aus [5] Seite 84 – 85.
Die Trimetrische Projektion eignet sich zur Darstellung größerer Bereiche der Erdoberfläche. Da die gesamte Oberfläche auf 20 gleiche sphärische Dreiecke aufgeteilt wird, erhält man einen relativ großen Ausschnitt. Es lässt sich zum Beispiel ganz Europa auf einem Kugeldreieck unterbringen. Jedes dieser sphärischen Dreiecke hat drei gleich große Winkel zu je 72°. Dieses Dreieck wird in der Ebene auf ein gleichseitiges Dreieck mit den Innenwinkeln von 60° abgebildet. „Der Grundgedanke zur Bestimmung eines Bildpunktes ist die Anwendung des alten Vermessungsprinzips der Punktfestlegung durch Bogenschnitt, hier durch dreifachen Bogenschnitt.“ ([5] Seite 84)

Abbildung 5.3: Erdkugel mit 20 sphärischen Dreiecken.

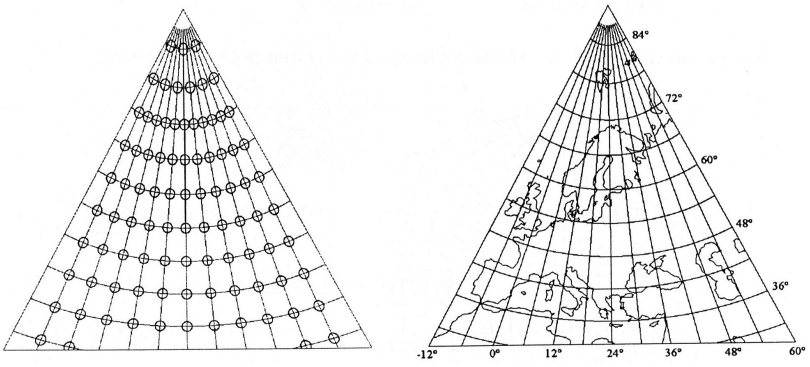

Abbildung 5.4: Trimetrische Abbildung.

Ein Vorteil dieser Projektionsweise ist die geringe Verzerrung.

5.3 Abbildungen mittels Figuren

Für die Erstellung kleinmaßstäbiger Karten sucht man sich eine abwickelbare Figur. Dies soll bedeuten, dass man diese Figur an einer Stelle aufschneidet und dann zu einer ebenen Figur aufbiegen kann. Ein Kegel, ein Zylinder oder eine Ebene besitzen diese Eigenschaft. Zur Abbildung verschiedener Bereiche eignen sich bestimmte Figuren besser und andere schlechter. Für die Abbildung des Äquatorgebietes ist der Zylinder als abwickelbare Figur zu verwenden. Möchte man hingegen die Pole und deren Umgebung darstellen, wählt man die Ebene. Für Gebiete zwischen dem Äquator und einem der Pole eignen sich als Abbildungsfiguren verschiedene Kegel. Je nach verwendeter Figur unterscheidet man zwischen einem Azimutal-, Zylinder- oder Kegelentwurf.

Die Übertragung der Kugelpunkte auf die abwickelbaren Figuren kann auf zwei verschiedene Arten geschehen. Zum ersten können die Kugelpunkte von einem Projektionszentrum aus auf die Figur projiziert werden. Die zweite Möglichkeit ist, dass die Abbildung durch eine besondere Vereinbarung gekennzeichnet ist, z.B. dass die Meridiane im Nordpol längentreu sein sollen. Bei dieser zweiten Methode handelt es sich um keine echte Projektion. Aus diesem Grund ist es besser von Kartenentwürfen anstatt von Kartenprojektionen zu sprechen. Um den Unterschied zwischen einer echten Projektion und anderen Abbildungen besser zu verstehen, geben wir mit Hilfe eines Zylinders anschauliche Beispiele.

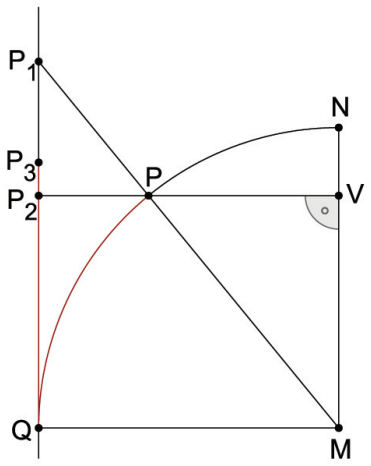

Abbildung 5.5: Verschiedene Zylinderentwürfe.

Eine echte Projektion ist die Abbildung des Kugelpunktes P auf die Mantelfläche des Zylinders durch den Kugelmittelpunkt M. Als Bildpunkt entsteht P_1. Die beiden nächsten Varianten sind keine Projektionen, da hier nicht von einem einzelnen Punkt aus projiziert wird. Den Bildpunkt P_2 erhält man durch die Projektion des Punktes P auf den Zylinder vom Punkt V aus. Obwohl die einzelnen Punkte auf dem Zylindermantel durch Projektion entstehen, handelt es sich um keine echte, da immer von einem anderen Punkt aus projiziert wird. Die dritte Möglichkeit ist die Festlegung, dass die Kugelstrecke $|\widehat{QP}|$ gleich lang sein soll wie der Abstand $|\overline{QP_3}|$, also $|\widehat{QP}| = |\overline{QP_3}|$.

Bildet man von der Kugel auf abwickelbare Figuren ab, so werden die errechneten Koordinaten, wie in Abbildung 5.6 ersichtlich, ins Koordinatensystem eingetragen.

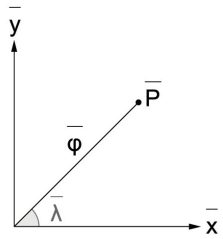

Abbildung 5.6: Abbildung eines Kugelpunktes in die Ebene.

Folgende Unterteilung ist nach [18] Seite 7 gestaltet.

Die Kartennetzentwürfe lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten einteilen.
Einteilung nach Abbildungsfiguren

- Azimutalentwürfe
- Kegelentwürfe
- Zylinderentwürfe

Einteilung nach Abbildungseigenschaften (siehe auch Kapitel 3)

- längentreu
- flächentreu
- winkeltreu
- vermittelnd

Einteilung nach Entwurfsachsen (nach [11] Seite 55 – 56)

- normalachsig
- querachsig
- schiefachsig

Einteilung nach Meridianen, die zur Entwurfsachse gehören (nach [18] Seite 95)

- Rotationssymmetrischer Entwurf
- Nichtrotationssymmetrischer Entwurf

Außerdem kann man noch zwischen echten Projektionen und unechten Entwürfen unterscheiden. Unechte Abbildungen entstehen durch bewusste Verzerrung oder Änderung der Kartennetze. Diese werden oft für geographische Weltkarten verwendet, die hauptsächlich einen thematischen Inhalt transportieren sollen.
Echte Netzentwürfe entstehen durch eine Kegel-, Zylinder- oder Azimutalabbildung. Charakteristisch an diesen Abbildungen ist, dass eine der Abbildungseigenschaften: längentreu, winkeltreu, flächentreu erfüllt wird.
Die vierte Abbildungseigenschaft heißt vermittelnd. Eine Abbildung wird vermittelnd genannt, wenn sie keine der anderen Eigenschaften erfüllt, aber insgesamt eine geringe Verzerrung aufweist. Es wird sozusagen auf eine bestimmte Eigenschaft verzichtet, um bei allen Eigenschaften eine niedrige Verzerrung zu erreichen. Diese Abbildungseigenschaft ist typisch für unechte Abbildungen.

Bei normalachsigen konischen Entwürfen fallen die Erdachse und die Höhe des Abbildungskegels zusammen.
Die Grund- und Deckfläche eines Zylinders sind Kreise mit einem Mittelpunkt. Würde man nun den Mittelpunkt der Grundfläche mit dem Mittelpunkt der Deckfläche verbinden, so würden wir eine begrenzte Gerade erhalten, die der Höhe des Zylinders entspricht. Fällt diese Strecke mit der Erdachse zusammen, so erhalten wir einen normalachsigen Zylinderentwurf.
Auch bei Azimutalabbildungen kann man von normalachsigen Entwürfen sprechen, nämlich wenn die Tangentialebene normal auf die Erdachse steht. Hier gibt es die Möglichkeit, dass die Tangentialebene an den Nordpol oder an den Südpol gelegt wird.
Abbildung 5.7 zeigt die eben beschriebenen Projektionen in normaler Lage.

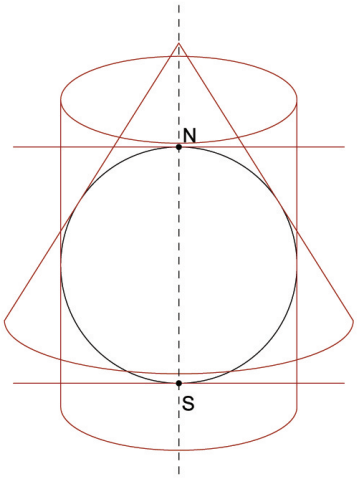

Abbildung 5.7: Abbildungen in normaler Lage.

Transversale oder querachsige Entwürfe entstehen, falls die Höhe des Zylinders und des Kegels normal auf die Erdachse stehen. Für Azimutalabbildungen kann man dies so definieren, dass der Entwurfspol auf dem Äquator liegen muss. Unter einem Entwurfspol versteht man jenen Punkt, an dem die Tangentialebene gelegt wird, oder den Durchstoßpunkt der Erdachse bei Kegel- oder Zylinderentwürfen.

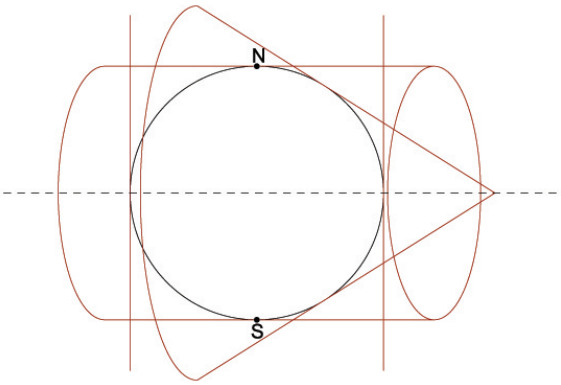

Abbildung 5.8: Abbildungen in transversaler Lage.

Von einer Zylinderabbildung in schiefer Lage spricht man, wenn die Höhe des Zylinders mit der Erdachse nicht zusammenfällt. Ebenso kann man dies für eine Kegelabbildung definieren. Bei einem schiefachsigen Azimutalentwurf steht die Erdachse nicht normal auf die Tangentialebene.
Die Unterteilung in rotationssymmetrische und nichtrotationssymmetrische

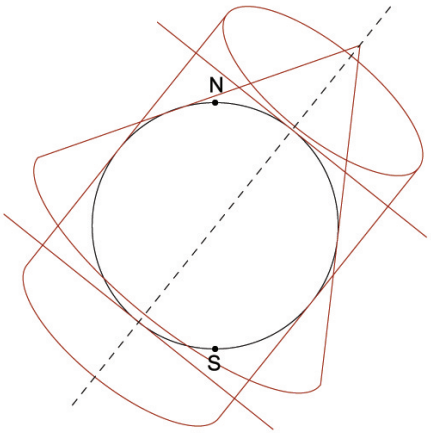

Abbildung 5.9: Abbildungen in schiefachsiger Lage.

Abbildungen bedeutet eine Unterscheidung der Entwürfe nach ihrer Darstellungsweise der Breitenkreise und Meridiane. Bei rotationssymmetrischen Entwürfen werden die Meridiane als Geradenbüschel und die Breitenkreise als gleichmittige Kreisschar, dessen Mittelpunkt der Scheitel des Geradenbüschels ist und auch ins Unendliche rücken kann, dargestellt. Somit entsteht ein rechtschnittiges Kurvennetz. (vgl. [19] Seite 157)

5.4 Azimutalabbildungen

Bei dieser Art der Abbildung wird in einem Punkt der Kugeloberfläche eine Tangentialebene gelegt, auf diese wird die Oberfläche abgebildet.
Jenen Punkt, in welchem man die Tangentialebene an die Kugel legt, nennt man Entwurfspol. In den Graphiken in diesem Abschnitt wird er mit O bezeichnet. Der Kartenmittelpunkt ist die Abbildung des Entwurfspols auf die Ebene und wird mit $\bar{O}$ beschriftet. In den Zeichnungen sieht man, dass während der Abbildung die Punkte O und $\bar{O}$ in einem Punkt zusammenfallen. Werden die Kugel und die Karte einzeln betrachtet, so sind es verschiedene Punkte.

Wir haben schon davon erfahren, dass es schiefachsige Entwürfe gibt. Hier liegt der Entwurfspol weder auf einem der Pole noch auf dem Äquator. Ein beliebiger Punkt $O(\varphi_0, \lambda_0)$ der Sphäre ist Entwurfspol. Normalerweise werden die geographischen Koordinaten in Bezug auf den Nordpol angegeben. Im neuen System werden die Kugelpunkte über den Punkt O definiert. Ein Kugelpunkt A hat in Bezug auf den Nordpol die Koordinaten $A = (\varphi, \lambda)$.

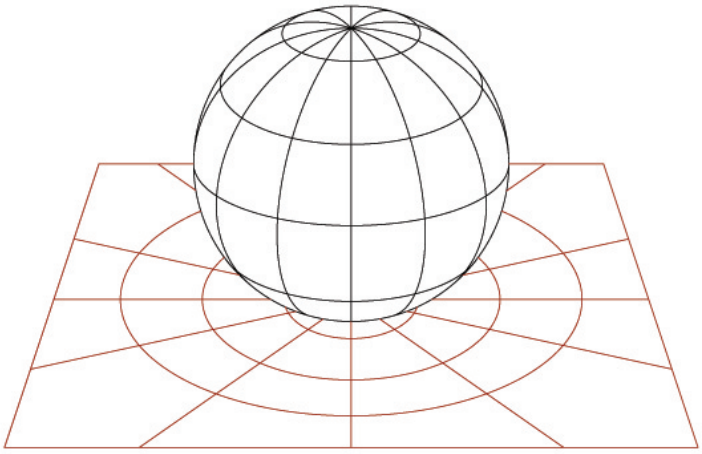

Abbildung 5.10: Azimutalabbildung.

Wir werden nun eine Darstellungsweise des Punktes $A(e, a)$ finden, die sich auf O bezieht. Die sphärische Strecke e beschreibt demnach die Entfernung

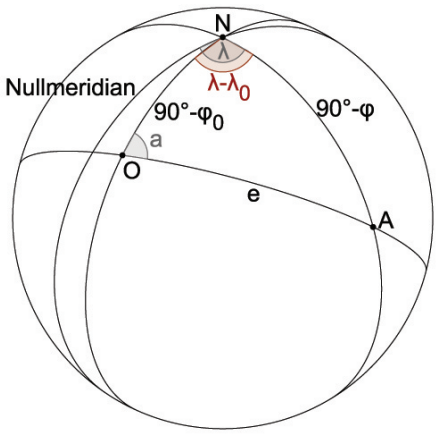

Abbildung 5.11: Festlegung der Koordinaten von A durch O.

von O zu A. Statt des Winkels λ haben wir nun das Azimut a, wobei dieser im Uhrzeigersinn aufgetragen wird. Als Bezugsgroßkreis des neuen Systems fungiert der Großkreis mit den Punkten N und O. Nun zur Berechnung von

e und a:

$$\cos e = \cos(90^\circ - \varphi_0) \cdot \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \varphi_0) \cdot \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(\lambda - \lambda_0) =$$
$$= \sin\varphi_0 \cdot \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_0),$$
$$\sin a = \sin(90^\circ - \varphi_0)\,\frac{\sin(\lambda - \lambda_0)}{\sin e} =$$
$$= \cos\varphi_0\,\frac{\sin(\lambda - \lambda_0)}{\sin e}.$$

Für transversale Entwürfe, also wenn $\varphi_0 = 0^\circ$ ist, dann vereinfachen sich die Formeln auf:

$$\cos e = \cos\varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_0),$$
$$\sin a = \frac{\sin(\lambda - \lambda_0)}{\sin e}.$$

(vgl. [18] Seite 41 – 44)

Es werden perspektive von den konventionellen Azimutalabbildungen unterschieden. Perspektive Abbildungen können durch ihre verschiedenen Projektionszentren differenziert werden. Liegt das Projektionszentrum im Mittelpunkt der Kugel, so spricht man von einer gnomonischen Projektion. Wird vom Gegenpunkt des Berührpunktes der Ebene aus projiziert, dann nennt man die Projektion stereographisch. Es besteht auch die Möglichkeit von einem unendlich entfernten Projektionszentrum aus abzubilden. Hierbei handelt es sich um eine orthographische Azimutalprojektion.
Konventionelle Azimutalabbildungen werden vor allem nach ihren Abbildungseigenschaften differenziert.

5.4.1 Orthographische Projektion

Dieses Unterkapitel ist mit Fakten aus [18] Seite 16 – 17 aufgebaut.

Da das Projektionszentrum unendlich weit entfernt ist, wird aus der Zentralprojektion eine orthogonale Parallelprojektion.
Um die Abbildungsgleichungen bestimmen zu können, müssen wir vorher r berechnen

$$r = R\cos\varphi.$$

Wir erhalten die Koordinaten:

$$\bar{x} = R\cos\varphi \cdot \cos\lambda,$$
$$\bar{y} = R\cos\varphi \cdot \sin\lambda.$$

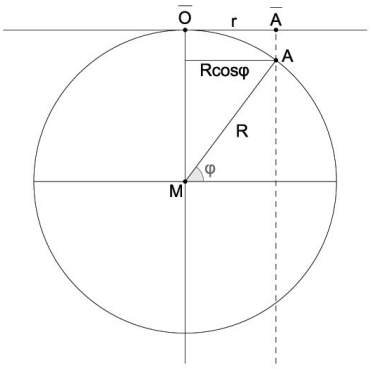

Abbildung 5.12: Orthographische Projektion.

Dieser Kartenentwurf ist für die Darstellung großer Gebiete eher schlecht geeignet, denn bildet man eine Halbkugel ab, so wird der äußere Kartenrand stark gestaucht. Ab und zu werden die Polargebiete mittels einer orthographischen Projektion in einer Karte dargestellt.

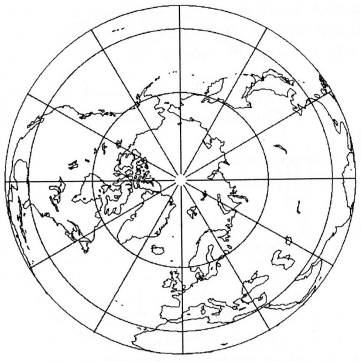

Abbildung 5.13: Orthographische Projektion.

5.4.2 Stereographische Projektion

Der Inhalt stammt aus [3] Seite 155 – 157 und [18] Seite 19 – 23. Abbildung 5.15 ist aus [5] Seite 32.

Bei einer normalachsigen stereographischen Projektion wird die Tangentialebene an den Nord- oder Südpol gelegt und von dem anderen Pol aus auf die Ebene projiziert.
Man kann sich leicht überlegen, dass der Winkel $\angle \bar{A}Z\bar{O} = 45° - \frac{\varphi}{2}$ ist. Daraus

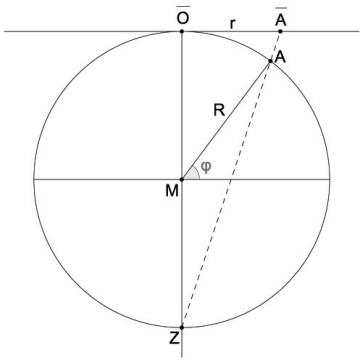

Abbildung 5.14: Stereographische Projektion.

folgt, dass der Winkel $\angle \bar{O}\bar{A}Z = 45° + \frac{\varphi}{2}$, somit kann man r berechnen mit

$$r = 2R\cot(45° + \frac{\varphi}{2}).$$

Die kartesischen Koordinaten für das Kartenbild lauten:

$$\bar{x} = 2R\cot(45° + \frac{\varphi}{2}) \cdot \cos\lambda,$$
$$\bar{y} = 2R\cot(45° + \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin\lambda.$$

Für stereographische Projektionen gilt Winkeltreue. Allerdings tritt dabei eine Längenverzerrung auf, die folglich eine Flächenverzerrung bedingt. Nur der Entwurfspol weist keine Verzerrung auf, d.h. in der Umgebung des Kartenmittelpunktes ist die Verzerrung gering und wird in Richtung des Kartenrandes größer.

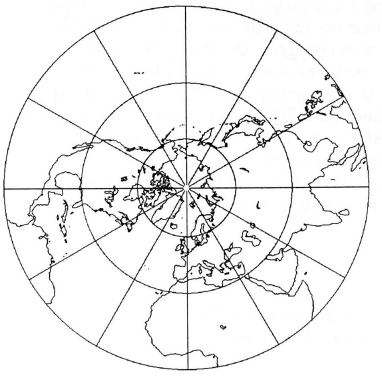

Abbildung 5.15: Stereographische Projektion.

5.4.3 Gnomonische Projektion

Dieser Abschnitt ist nach [3] Seite 160 gestaltet. Die Karte 5.17 ist aus [5] Seite 33.

Die gnomonische Abbildung entsteht durch Projektion vom Mittelpunkt aus. Dadurch können wir r leicht bestimmen mit

$$r = R \cot \varphi.$$

Die Parameterdarstellung der Abbildung wird beschrieben mit

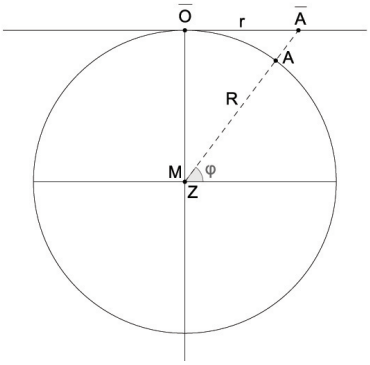

Abbildung 5.16: Gnomonische Projektion.

$$\bar{x} = R \cot \varphi \cos \lambda,$$
$$\bar{y} = R \cot \varphi \sin \lambda.$$

Sehen wir uns nun die Verzerrungen dieser Abbildung an. Dazu berechnen wir die Fundamentalgrößen der Abbildung:

$$\bar{E} = R^2 \cot^2 \varphi,$$
$$\bar{F} = 0,$$
$$\bar{G} = R^2 \frac{1}{\sin^4 \varphi}.$$

Die Längenverzerrung auf den Breitenkreisen beträgt

$$\tau_1 = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Für die Längenverzerrung auf den Längenkreisen erhält man

$$\tau_2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}.$$

Da $\tau_1 \neq \tau_2 \neq 1$ ist, liegt keine Längentreue vor. Die Flächenverzerrung dieser Abbildung beträgt

$$S = \tau_1 \tau_2 = \frac{1}{\sin^3 \varphi}.$$

Dass keine Flächentreue vorliegt, kann man mit Defintion 32 nachweisen. Denn $k = \sin^3 \varphi$, also $k \neq 1$, womit die Abbildung nicht flächentreu ist. Bei der Untersuchung der Längen haben wir bereits $\tau_1 \neq \tau_2$ festgestellt, was bedeutet, dass auch keine Winkeltreue vorliegen kann.
Diese Abbildungsform leistet zwar keine Längen-, Flächen- oder Winkeltreue, dennoch hat dieser Kartenentwurf große Relevanz für die Navigation. Es werden Kugelgeraden auf Geraden abgebildet, das heißt Orthodrome erscheinen in der Karte als gerade Linien.

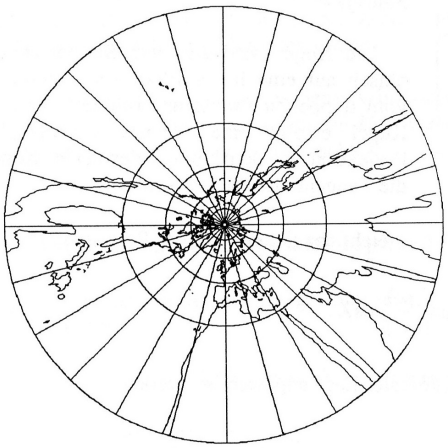

Abbildung 5.17: Gnomonische Projektion.

5.4.4 Mittabstandstreuer Azimutalentwurf

Folgende Informationen findet man bei [18] Seite 59 – 62. Abbildung 5.19 ist aus [5] Seite 35 entnommen.

Dieser Entwurf ist so konzipiert, dass die Länge der Strecke $\overline{\bar{O}\bar{A}}$ gleich der Länge der Kugelstrecke $\widehat{OA}$ ist, also erhalten wir die Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} b = \overline{\bar{O}\bar{A}} = \widehat{OA} &= R \cdot (90^\circ - \varphi), \\ \bar{x} &= R \cdot (90^\circ - \varphi) \cdot \cos \lambda, \\ \bar{y} &= R \cdot (90^\circ - \varphi) \cdot \sin \lambda. \end{aligned}$$

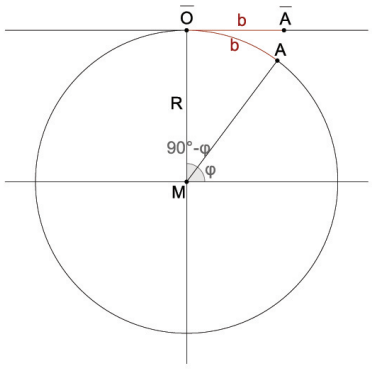

Abbildung 5.18: Mittabstandstreuer Azimutalentwurf.

Wenn der Entwurfspol nicht mit dem Nord- oder Südpol zusammenfällt, dann wird die sphärische Entfernung e zwischen dem Entwurfspol und dem abzubildenden Punkt bestimmt. Anstatt der geographischen Länge λ wird a bestimmt.

$$\bar{x} = Re \cdot \cos a,$$
$$\bar{y} = Re \cdot \sin a.$$

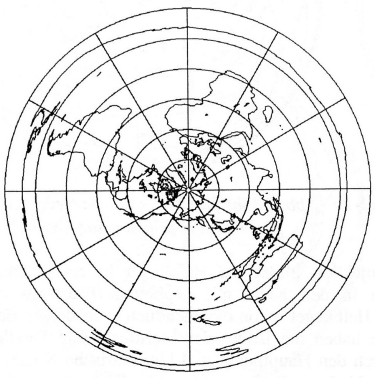

Abbildung 5.19: Mittabstandstreuer Azimutalentwurf.

5.4.5 Flächentreuer Azimutalentwurf

Dieser Abschnitt ist wie bei [18] Seite 62 – 65 aufgebaut, lediglich manche Variablen wurden verändert. Die beigefügte Karte 5.21 ist aus [3] Seite 159, die andere Karte ist aus [5] Seite 36.

Um einen Kartennetzentwurf zu schaffen, der Flächentreue leistet, trägt man den Abstand vom Entwurfspol O zum abzubildenden Punkt A auf der Kartenebene auf. Durch den Punkt A parallel zur Kartenebene verläuft ein Klein-

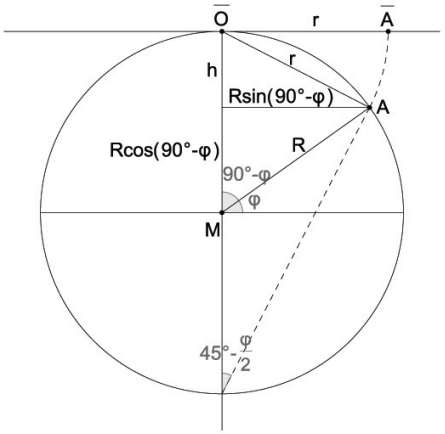

Abbildung 5.20: Flächentreuer Azimutalentwurf.

kreis mit dem Radius $R\cos\varphi = R\sin(90° - \varphi)$. Dieser begrenzt eine Kugelkalotte mit der Höhe h. Anhand der Abbildung 5.20 kann man leicht nachvollziehen, dass

$$h = R - R\cos(90° - \varphi) = R(1 - \cos(90° - \varphi)).$$

Die Fläche der Kugelkalotte kann mit folgender Formel bestimmt werden:

$$F = 2R\pi h = 2R^2\pi(1 - \cos(90° - \varphi)).$$

Nun soll in der Karte der Flächeninhalt gleich jenem, der Kugelkalotte sein. Da $\bar{F}$ mit $\bar{F} = r^2\pi$ angegeben werden kann, ermittelt man den Radius r mittels dem Gleichsetzungsverfahren:

$$\begin{aligned} r^2\pi &= 2R^2\pi(1 - \cos(90° - \varphi)) \\ \Longrightarrow r^2 &= 2R^2(1 - \cos(90° - \varphi)). \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Summensatzes $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ erhält man

$$r^2 = 4R^2\sin^2\frac{(90° - \varphi)}{2}.$$

Also folgt, dass

$$r = 2R\sin(45° - \frac{\varphi}{2}).$$

Berechnet man nun den Abstand $|\overline{OA}|$, so erhält man dasselbe wie für r. Daher kann man die Abbildungsgleichungen wie folgt angeben:

$$\bar{x} = 2R\sin(45^\circ - \frac{\varphi}{2}) \cdot \cos\lambda, \quad \bar{y} = 2R\sin(45^\circ - \frac{\varphi}{2})\sin\lambda.$$

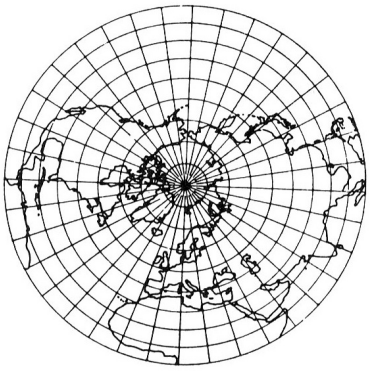

Abbildung 5.21: Flächentreuer Azimutalentwurf.

Wird als Entwurfspol ein anderer Punkt gewählt, so lauten die Abbildungsgleichungen:

$$\bar{x} = 2R\sin\frac{e}{2}\cos a, \quad \bar{y} = 2R\sin\frac{e}{2}\sin a,$$

wobei e und a sphärische Koordinaten in Bezug auf den Entwurfspol angeben. Abbildung 5.22 zeigt einen schiefachsigen flächentreuen Azimutalentwurf mit dem Entwurfspol $O = (50^\circ, 0^\circ)$.

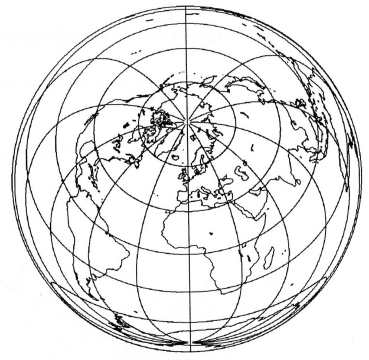

Abbildung 5.22: Schiefachsiger flächentreuer Azimutalentwurf von Lambert mit $\varphi = 50^\circ$.

5.5 Kegelabbildungen

Oft wird statt Kegelabbildung auch der Begriff konische Abbildung verwendet. Diese Art von Netzentwurf kann durch zwei unterschiedliche Anwendungen des Kegelmantels erzeugt werden. Der Kegel kann die Kugel an einem Kleinkreis berühren. Die zweite Möglichkeit besteht darin den Kegelmantel mit der Kugel zu schneiden. Dies bedeutet, dass man zwei Kleinkreise als Schnittgeraden erhält.

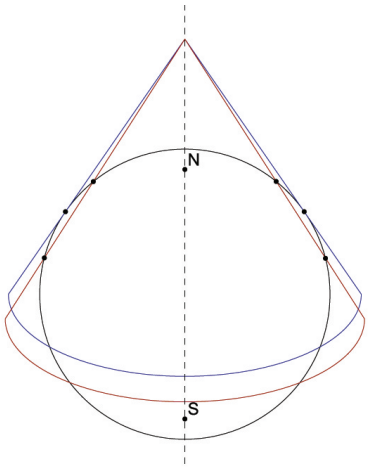

Abbildung 5.23: Möglichkeiten der Kegelabbildung.

Entlang einer Mantellinie wird der Kegel aufgeschnitten und abgewickelt. Dabei wird die Berührungsgerade längentreu dargestellt.
Generell eignet sich dieser Entwurf sehr gut zur Abbildung der gemäßigten Breiten. Erwähnenswert ist die Tatsache, dass der Winkel λ auf der Erdkugel nicht wahrheitsgetreu abgebildet werden kann, da durch die Kegelabbildung im Pol keine 360° wiedergegeben werden können. Denn der abgewickelte Kegelmantel weist bei der Kegelspitze immer einen Winkel kleiner als 360° auf. Die Winkel eines Kegelentwurfs sind also alle verkleinert. Im abgebildeten Netz bei normalachsigen Entwürfen schneiden sich die Längen- und Breitenkreise im rechten Winkel.

5.5.1 Abstandstreuer Kegelentwurf mit einem längentreuen Breitenkreis

Dieser Abschnitt ist aufgebaut wie bei [13] Seite 58 – 60 und [3] Seite 150 – 151. Abbildung 5.27 ist von [19] Seite 35.

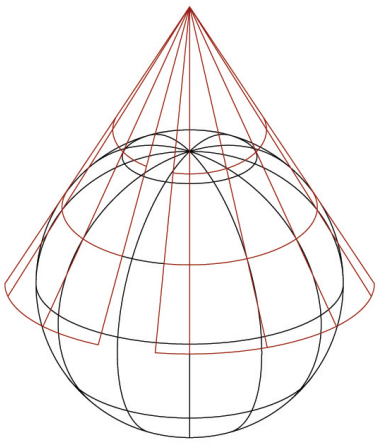

Abbildung 5.24: Kegelabbildung.

Der ausgerollte Kegelmantel wird entweder mit Polarkoordinaten oder kartesischen Koordinaten versehen. Für den Abstand $\bar{\varphi_0}$ von dem Berührkreis

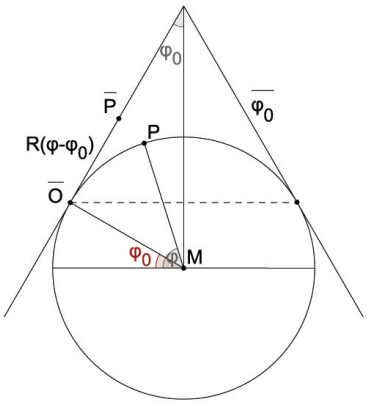

Abbildung 5.25: Abstandstreuer Kegelentwurf mit einem längentreuen Breitenkreis.

zur Kegelspitze erhalten wir $\bar{\varphi_0} = R \cot \varphi_0$. Falls das Bild der Spitze im Koordinatenursprung der Bildebene liegt, dann erhalten wir die kartesischen Koordinaten des Bildes mit

$$\bar{x} = R(\cot \varphi_0 - \varphi + \varphi_0) \cdot \cos(\lambda \cdot \sin \varphi_0),$$
$$\bar{y} = R(\cot \varphi_0 - \varphi + \varphi_0) \cdot \sin(\lambda \cdot \sin \varphi_0).$$

In Abbildung 5.26 sieht man den aufgebogenen Kegel in der Ebene. Der äußere Kreis ist der Berührkreis.

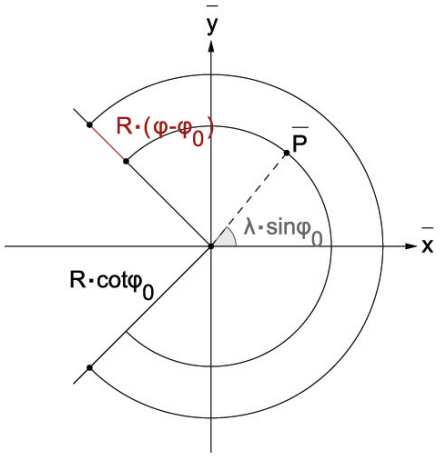

Abbildung 5.26: Bildebene des Kegels.

Wir wollen nun bestimmen, welche Verzerrungen in der Karte vorliegen. Dazu berechnen wir zuerst die Fundamentalgrößen der Abbildung, jene von der Kugel kennen wir schon (siehe 3.2.1).

$$\bar{E} = R^2 \sin^2 \varphi_0 \cdot (\cot \varphi_0 - \varphi + \varphi_0)^2,$$
$$\bar{F} = 0,$$
$$\bar{G} = R^2.$$

Für die Hauptverzerrungsrichtungen erhalten wir

$$\tau_1 = \frac{(\cot \varphi_0 - \varphi + \varphi_0) \cdot \sin \varphi_0}{\cos \varphi},$$
$$\tau_2 = 1.$$

Aus $\tau_2 = 1$ können wir schließen, dass die Meridiane längentreu abgebildet werden. Am Pol erhalten wir für τ_1 unendlich, was bedeutet, dass der Pol als Kurve oder unvollständiger Kreis dargestellt wird.

5.5.2 Abstandstreuer Kegelentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen

Die Grundlagen hierfür sind aus [13] Seite 62 und die Abbildung 5.28 aus [19] Seite 40.

Jetzt liegt der Fall vor, dass der Kegel die Kugel nicht an einem Breitenkreis berührt, sondern die Kugel in zwei Breitenkreisen schneidet. Der erste Breitenkreis mit φ_1 liegt näher am Äquator, folglich liegt er in der Abbildung

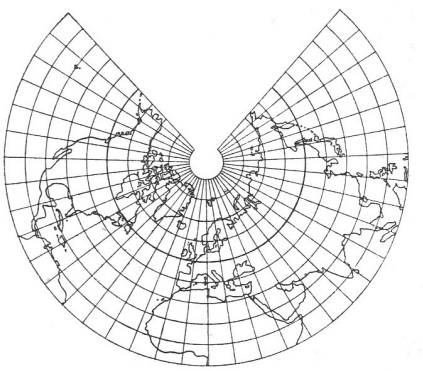

Abbildung 5.27: Abstandstreuer Kegelentwurf auf dem Berührkegel $\varphi_0 = 50°$.

weiter entfernt vom Koordinatenursprung. Wir erhalten die Abbildungsgleichungen

$$\bar{x} = R\left(\frac{\cos\varphi_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2} - \varphi + \varphi_2\right) \cdot \cos\left(\frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}\,\lambda\right),$$
$$\bar{y} = R\left(\frac{\cos\varphi_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2} - \varphi + \varphi_2\right) \cdot \sin\left(\frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}\,\lambda\right).$$

Ein Vorteil gegenüber dem abstandstreuen Kegelentwurf mit einem längentreuen Breitenkreis ist die Verringerung der Verzerrungen insgesamt. Ein Nachteil ist schon an der komplexeren Formel erkennbar.

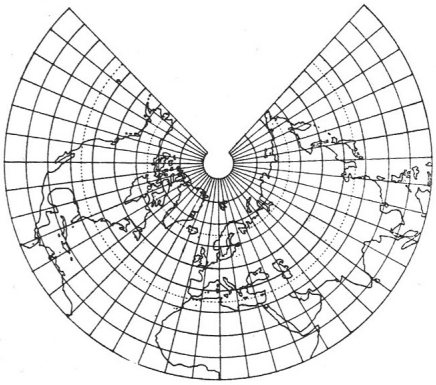

Abbildung 5.28: Abstandstreuer Kegelentwurf mit zwei längentreuen Breitenkreisen $\varphi_1 = 35°$ und $\varphi_2 = 65°$.

5.5.3 Winkeltreuer Kegelentwurf

Diese Formel und Abbildung ist aus [3] Seite 152 übernommen.

Für diesen Entwurf fordern wir, dass die Kegelspitze Bild des Nordpols sein soll. Die Abbildungsgleichungen für einen winkeltreuen Kegelentwurf lauten:

$$\bar{x} = R \cot \varphi_0 \frac{\tan^{\sin \varphi_0}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\tan^{\sin \varphi_0}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \cos(\lambda \cdot \sin \varphi_0),$$
$$\bar{y} = R \cot \varphi_0 \frac{\tan^{\sin \varphi_0}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\tan^{\sin \varphi_0}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \sin(\lambda \cdot \sin \varphi_0).$$

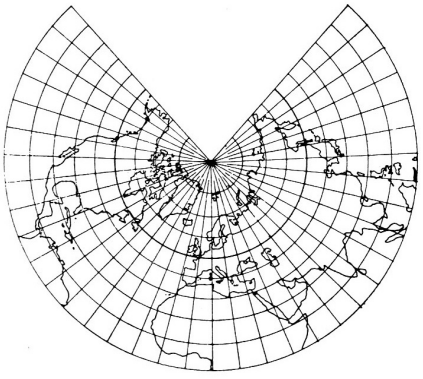

Abbildung 5.29: Winkeltreuer Kegelentwurf.

5.5.4 Flächentreuer Kegelentwurf

Folgende Abbildungsgleichungen sind von [13] Seite 67 und die Graphik ist von [19] Seite 48 übernommen.
Man kann auch Gleichungen finden, die eine flächentreue Azimutalabbildung beschreiben:

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi_0 - 2 \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0}}{\sin \varphi_0} \cos(\lambda \cdot \sin \varphi_0),$$
$$\bar{y} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi_0 - 2 \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0}}{\sin \varphi_0} \sin(\lambda \cdot \sin \varphi_0).$$

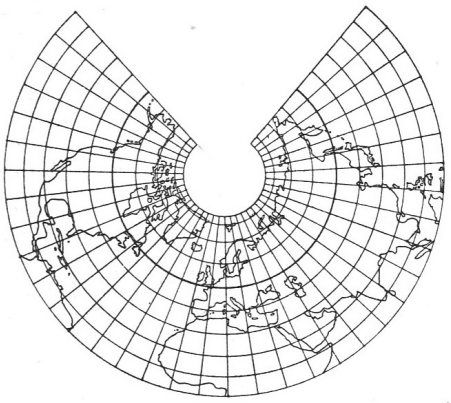

Abbildung 5.30: Flächentreuer Kegelentwurf.

5.6 Zylinderabbildungen

Eine Zylinderabbildung entsteht indem man der Kugel einen Zylindermantel überstülpt. Dieser berührt die Kugel an einem Großkreis. Der Mantel wird entlang einer Mantellinie aufgeschnitten und abgewickelt. Eine dieser Mantellinien wird dann als y-Achse gewählt. Jene Kugelgerade, die den Zylindermantel berührt, erscheint in der Ebene als Strecke. Die Gerade, auf der diese Strecke liegt, wird als x-Achse herangezogen. Wird der Zylindermantel so positioniert, dass die Erdachse mit der Zylinderachse zusammenfällt, dann ist der Entwurf normalachsig. Der berührende Großkreis ist der Äquator und daher ist die x-Achse, die Gerade, auf der der Äquator liegt. Als y-Achse wird meist das Bild des Nullmeridians genommen. Auch hier besteht die Möglichkeit einen Schnittzylinder zu wählen, sodass es wieder längentreue Abbildungen von 2 Breitenkreisen gibt.
Alle folgenden Zylinderentwürfe sind wie in [18] Seite 68 – 74 formuliert. Die Kartenabbildungen dazu sind aus [5] Seite 39 – 42.

5.6.1 Abstandstreuer Zylinderentwurf

Dieser Entwurf entsteht wie in Abbildung 5.5 ersichtlich durch die Abbildung des Punktes P auf den Punkt P_3. Die Abbildungsgleichungen können relativ einfach gefunden werden, nämlich

$$\bar{x} = R\lambda,$$
$$\bar{y} = R\varphi,$$

wobei λ und φ im Bogenmaß einzusetzen sind. Dadurch lässt sich eine Plattkarte erstellen. Dieser Kartentyp weist ein quadratisches Netz von Linien auf.

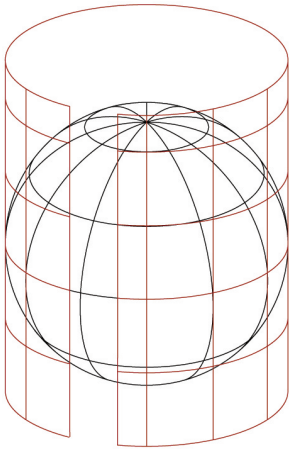

Abbildung 5.31: Zylinderabbildung.

Die dargestellten Breitenkreise und Meridiane schneiden einander im rechten Winkel. In der Karte gilt Äquidistanz. Winkel- und Flächentreue können mit diesem Zylinderentwurf nicht erzeugt werden.

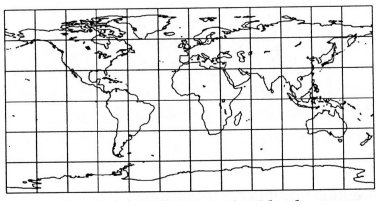

Abbildung 5.32: Abstandstreuer Zylinderentwurf.

Mittels des Kartennetzes und der eingezeichneten Indikatrizen kann man visuell schnell und gut einschätzen welche Verzerrungen in der Karte zu erwarten sind. Der Ursprung jeder Indikatrix liegt in einem Schnittpunkt von Meridianlinie und Breitenkreis. Folgende Abbildung zeigt die Indikatrizen der Plattkarte.

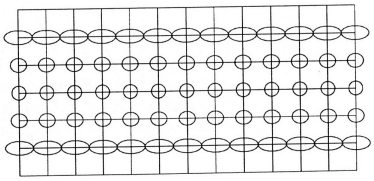

Abbildung 5.33: Abstandstreuer Zylinderentwurf mit Tissot'schen Indikatrizen.

5.6.2 Flächentreuer Zylinderentwurf

Um eine flächentreue Karte zu erhalten, gilt die Projektion laut Abbildung 5.5. Hier wird der Kugelpunkt P auf den Punkt P_2 projiziert. Man erhält die Koordinaten durch

$$\bar{x} = R\lambda,$$
$$\bar{y} = R\sin\varphi,$$

wobei der Winkel λ im Bogenmaß eingesetzt werden muss.

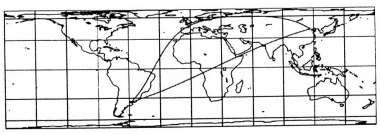

Abbildung 5.34: Flächentreuer Zylinderentwurf mit Tissot'schen Indikatrizen.

In dieser Abbildung ist auch eine Loxodrome und Orthodrome eingezeichnet. Die Loxodrome ist die leicht gekrümmte Linie, die fast als Gerade verkannt wird. Die Orthodrome erscheint als stärker gekrümmte Verbindungslinie zweier Orte.
Wir berechnen nun mit den Formeln aus Kapitel 3, welche Verzerrungen auftreten. Wir erhalten

$$\bar{E} = R^2,$$
$$\bar{F} = 0,$$
$$\bar{G} = R^2\cos^2\varphi.$$

Die Längenverzerrung können wir berechnen mit

$$\tau = \sqrt{\frac{d\lambda^2 + \cos^2\varphi \cdot d\varphi^2}{\cos^2\varphi \cdot d\lambda^2 + d\varphi^2}}.$$

Wir sehen nun, dass keine Längentreue vorliegt, da $\tau_1 \neq \tau_2 \neq 1$ ist:

$$\tau_1 = \frac{1}{\cos^2\varphi},$$
$$\tau_2 = \cos^2\varphi.$$

Winkeltreue liegt nicht vor, da $\tau_1 \neq \tau_2$ ist. Die Abbildung ist aber mit Sicherheit flächentreu, denn als Flächenverzerrung S erhalten wir

$$S = \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi}}\sqrt{\cos^2\varphi} = 1.$$

Außerdem ist $EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = R^4 \cos^2 \varphi$.
In der folgenden Karte ist optisch gut erkennbar wie sehr die Polargebiete verzerrt werden.

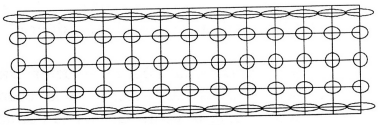

Abbildung 5.35: Flächentreuer Zylinderentwurf.

5.6.3 Winkeltreuer Zylinderentwurf

Natürlich kann auch mit einem Zylinderentwurf eine winkeltreue Karte erzeugt werden. Die Herleitung der Abbildungsgleichungen ist aber etwas schwieriger. Wir nehmen zunächst die allgemeinen Abbildungsgleichungen eines Zylindernetzentwurfs mit λ im Bogenmaß

$$\bar{x} = R\lambda,$$
$$\bar{y} = R \cdot f(\varphi).$$

Der Punkt P der Kugeloberfläche wird mit geographischen Koordinaten angegeben und auf den Punkt $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ in der Karte abgebildet. Um Winkeltreue zu erreichen, brauchen wir eine geeignete Funktion $f(\varphi)$. Dazu betrachten wir eine Netzmasche in den Abbildungen 5.36 und 5.37.

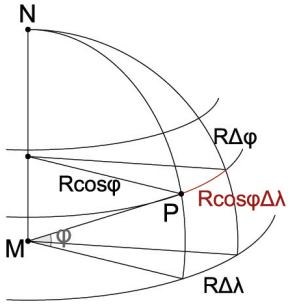

Abbildung 5.36: Netzmasche auf der Kugeloberfläche.

Auf der Sphäre hat dieser Ausschnitt die Seiten $R\cos\varphi \cdot \Delta\lambda$ und $R \cdot \Delta\lambda$. In der Karte hat die Netzmasche die Seitenlängen Δx und Δy. Um gleiche Winkel zu erzeugen, gibt man jeweils den Anstieg der Diagonalen an. Dafür

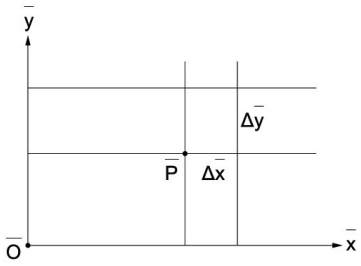

Abbildung 5.37: Winkeltreue Zylinderabbildung einer Netzmasche.

erhält man auf der Sphäre $\frac{R\cdot\Delta\varphi}{R\cos\varphi\cdot\Delta\lambda}$ und in der Karte ergibt sich $\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta\bar{x}}$. Weil diese Steigungen gleich sein sollen, setzen wir

$$\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta\bar{x}} = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi\cdot\Delta\lambda}.$$

Für zwei verschiedene Punkte $P = (\varphi_1, \lambda_1)$ und $Q = (\varphi_2, \lambda_2)$ setzt man in die Abbildungsgleichungen des Zylinderentwurfs ein:

$$\bar{x_1} = R\lambda_1,$$
$$\bar{x_2} = R\lambda_2.$$

Die Differenz der beiden ergibt

$$\bar{x_2} - \bar{x_1} = R\cdot(\lambda_2 - \lambda_1),$$
$$\Delta\bar{x} = R\cdot\Delta\lambda.$$

Auch für die y-Koordinaten setzen wir in die Abbildungsgleichung ein und bilden die Differenz

$$\bar{y_1} = R\cdot f(\varphi_1),$$
$$\bar{y_2} = R\cdot f(\varphi_2),$$
$$\bar{y_2} - \bar{y_1} = R\cdot[f(\varphi_2) - f(\varphi_1)],$$
$$\Delta\bar{y} = R\cdot\Delta f(\varphi).$$

Bildet man wieder den Anstieg der Geraden, die diese beiden Punkte verbindet, so erhält man

$$\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta\bar{x}} = \frac{\Delta f(\varphi)}{\Delta\lambda}.$$

Für den Ausdruck $\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta\bar{x}}$ setzen wir gleich

$$\frac{\Delta f(\varphi)}{\Delta\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi\cdot\Delta\lambda}.$$

Durch Multiplikation der Gleichung mit $\Delta\lambda$ und Division durch $\Delta\varphi$ ergibt sich

$$\frac{\Delta f(\varphi)}{\Delta\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Für $\Delta\varphi \longrightarrow 0$ geht der Differenzenquotient in den Differentialquotienten über

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi},$$
$$f(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Durch Integrieren dieses Ausdrucks erhält man für die Funktion

$$f(\varphi) = \ln\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) + C.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante C stellen wir folgende Überlegung an: Der Äquator soll in der Karte auf der x-Achse liegen, also $y = 0$. Auf der Sphäre weist der Äquator einen Winkel $\varphi = 0°$ auf. Damit man $y = 0$ erzielt, muss $f(\varphi) = 0$ werden. Daraus folgt, dass $C = 0$. Nun können wir die Koordinaten für den winkeltreuen Zylinderentwurf angeben:

$$\bar{x} = R\lambda,$$
$$\bar{y} = R \cdot \ln\tan(45° + \frac{\varphi}{2}).$$

Wie in Abbildung 5.39 erkennbar, eignet sich dieser Entwurf nicht zur Darstellung der Polargebiete.

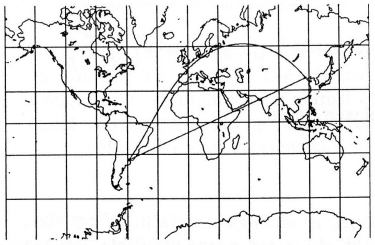

Abbildung 5.38: Winkeltreuer Zylinderentwurf.

In der Karte ist auch eine Loxodrome und eine Orthodrome eingezeichnet. Die Loxodrome wird in diesem Kartenentwurf als Gerade dargestellt. Aus dieser Darstellungseigenschaft folgt, dass diese Karten große Bedeutung für die Navigation haben. Die Orthodrome erscheint in diesem Kartentyp als gekrümmte Linie und wirkt optisch länger als die Loxodrome, obwohl es sich in Wirklichkeit doch umgekehrt verhält.

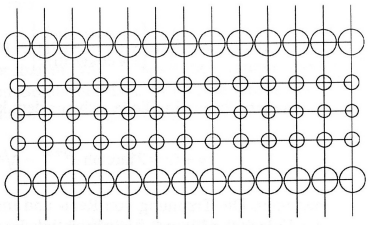

Abbildung 5.39: Winkeltreuer Zylinderentwurf mit Tissot'schen Indikatrizen.

5.7 Weitere Kartenentwürfe

In diesem Abschnitt wollen wir nun zwei weitere Entwürfe wie bei [5] und [18] behandeln.

5.7.1 Flächentreuer Enwurf von Mollweide

Der Entwurf von Mollweide ist ein nichtrotationssymmetrischer Entwurf. Er wird oft auch als unechter Zylinderentwurf bezeichnet.
Dieser Kartenentwurf ist so konzipiert, dass der Äquator auf die $\bar{x}$-Achse und der Nullmeridian auf die $\bar{y}$-Achse abgebildet wird. Das Bild des Äquators wird längentreu eingeteilt. Die Meridiane erscheinen im Kartennetzentwurf als halbe Ellipsen. Die Bilder der Breitenkreise werden als parallele Geraden zum Äquator dargestellt, wenn man annimmt, dass der Entwurfspol im Schnittpunkt vom Nullmeridian und Äquator liegt. Um Flächentreue zu erzeugen, gehen wir folgendermaßen vor:
Wir betrachten eine schmale Kugelzone auf der Sphäre zwischen der geographischen Breite φ und $\varphi + \Delta\varphi$.
Die Netzmaschen eines Streifens sind alle flächengleich, da der Äquator gleichmäßig unterteilt wurde. Daher braucht man nur noch geeignete Höhen der einzelnen Streifen finden. Die dargestellten 90°-Meridiane, also der Meridian 90° östlich und der Meridian 90° westlich von Greenwich bilden einen Kreis. Da die Oberfläche der Erdhalbkugel $2R^2\pi$ ist, muss der Flächeninhalt auch $2R^2\pi$ haben, damit Flächentreue herrscht. Daraus folgern wir, dass der Radius des Kreises $\sqrt{2}R$ haben muss. Der Flächeninhalt der Kugelzone auf der Erde kann berechnet werden mit

$$A_E = 2Rh\pi, \text{ wobei } h = R\sin\varphi \text{ ist .}$$

Mit Hilfe von Abbildung 5.40 können wir festsetzen, dass sich der Flächeninhalt aus zwei rechtwinkligen Dreiecken und zwei Kreissektoren zusammen-

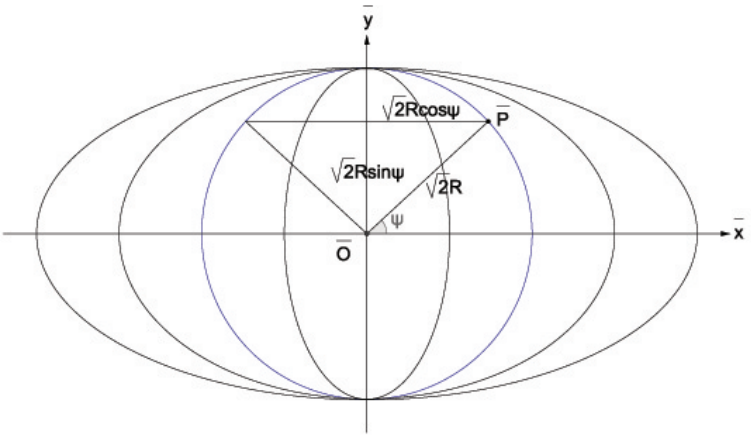

Abbildung 5.40: Kartennetz des Mollweide-Entwurfs.

setzt. Also folgt

$$A_K = \sqrt{2}R\cos\psi \cdot \sqrt{2}R\sin\psi + 2\,\frac{2R^2\pi\psi}{2\pi} = \\ = R^2\sin 2\psi + 2R^2\psi.$$

Dabei muss ψ im Bogenmaß eingesetzt werden. Wir setzen die beiden Flächeninhalte gleich und erhalten

$$R^2\sin 2\psi + 2R^2\psi = R^2\pi\sin\varphi$$

oder vereinfacht

$$\sin 2\psi + 2\psi = \pi\sin\varphi.$$

Somit hängt der Winkel ψ von der geographischen Breite φ wie in eben beschriebener Gleichung ab und wir bestimmen die Lösung mit dem Näherungsverfahren, was ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Die Abbildungsgleichungen erhalten wir durch

$$\bar{x} = \frac{2\lambda}{\pi}\sqrt{2}R\cos\psi,$$
$$\bar{y} = \sqrt{2}R\sin\psi$$
$$\text{mit}\quad \sin 2\psi + 2\psi = \pi\sin\varphi.$$

Mittels der Tissot'schen Indikatrizen erkennen wir, dass die Verzerrungen an den Kartenrändern größer sind als in der Nähe des Kartenmittelpunktes.

(vgl. [18] Seite 95 – 99)

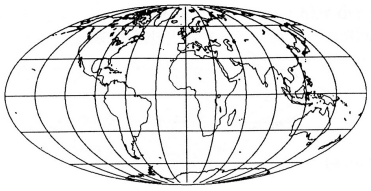

Abbildung 5.41: Flächentreuer Entwurf von Mollweide.

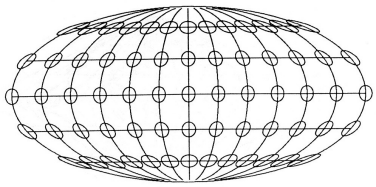

Abbildung 5.42: Flächentreuer Entwurf von Mollweide mit Tissot'schen Indikatrizen.

5.7.2 Armadillo Projektion von Raisz

Dieser Entwurf wird aufgrund des Aussehens auch Gürteltier Entwurf genannt. Auch hier liegt ein nichtrotationssymmetrischer, schiefachsiger Entwurf vor.
Bei dieser Art der Darstellung wird nur bis zu einer gewissen geographischen Breite φ_0 abgebildet. Die Abbildungsgleichungen lauten:

$$\bar{x} = (1 + \cos\varphi) \cdot \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

$$\bar{y} = \frac{1 + \sin\varphi_0 - \cos\varphi_0}{2} + \sin\varphi \cdot \cos\varphi_0 - (1 + \cos\varphi) \cdot \sin\varphi_0 \cdot \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Folgende Abbildung ist aus [5] Seite 59 entnommen.

Abbildung 5.43: Entwurf von Armadillo von Raisz mit $\varphi_0 = 20°$.

(vgl. [5] Seite 59)

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Problematik der Abbildung der Kugeloberfläche auf einer Ebene. Es ist zwar möglich, die Sphäre auf eine Ebene zu projizieren, aber es treten immer Verzerrungen auf. Als praktisches Beispiel dieser Thematik dient die Erde, die durch eine Kugel beschrieben wird. Die Anwendung wäre dann die Erstellung von Karten.

Zu Beginn werden wichtige Begriffe und Sätze der Kugelgeometrie erarbeitet, um diese an konkreten Beispielen anzuwenden. Da es von Bedeutung ist zu wissen, welche Verzerrungen in einer Abbildung auftreten können, werden die verschiedenen Arten von Verzerrungen behandelt und Formeln zur Berechnung angeführt. Ein erster Schritt zur Umsetzung der Theorie auf die Erde erfolgt im Abschnitt „Verbindung zur Geographie“. Hier wird kurz darauf eingegangen, welche Form die Erde wirklich aufweist und warum man dennoch an der Vorstellung der Erde als Kugel festhält. Es folgen praktische Aufgaben zur Kursbestimmung und zur Peilung. Am Ende werden unterschiedliche Möglichkeiten der Abbildung und verschiedene Kartennetzentwürfe vorgestellt, die mit Formeln und Karten versehen sind. So kann man auch optisch gut zwischen abstands-, flächen- und winkeltreuen Abbildungen differenzieren.

Abstract

This thesis deals with the difficulty of mapping the surface of a sphere on a plane. It is possible to project the sphere onto the plane, but there are always distortions. As a concrete example concerning this topic the earth can be chosen, which is described by a sphere. The application is the generation of maps.

At first, important terms and definitions, as well as theorems on the geometry of the sphere's surface are worked out in order to apply them to concrete examples. As it is important to know which distortions appear in a map, there are different types of distortions und formulas listed. The preliminary step of the theory's transfer to the earth is in section „Verbindung zur Geographie“ („A link to geography“). This chapter explains which shape the earth really has and why we nevertheless keep the idea that the earth is a sphere. Afterwards, concrete examples for orientation and bearing are given. At the end, different possibilities of mapping and creating map projections with formulas and maps are introduced. This allows a visual distinction between depictions leaving invariant lengths, angles and areas.

Literaturverzeichnis

[1] H. Athen und J. Bruhn. Trigonometrie und Kugelgeometrie in vektorieller euklidischer und nichteuklidischer Behandlung. In *Unterrichtshefte zur Mathematik von heute,* Heft Z. 1. Hermann Schroedel Verlag KG und Verlag Ferdinand Schöningh, Hannover, Paderborn, 1968.

[2] L. Balser. Sphärische Trigonometrie - Kugelgeometrie in konstruktiver Behandlung. In *Mathematisch-physikalische Bibliothek,* Band 69. B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1927.

[3] H.-G. Bigalke. *Kugelgeometrie.* Otto Salle Verlag, Frankfurt am Main, 1984.

[4] F. Bohnert. *Ebene und sphärische Trigonometrie.* G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig, 1906.

[5] K. Bretterbauer. Die runde Erde eben dargestellt - Abbildungslehre und sphärische Kartennetzentwürfe. In *Geowissenschaftliche Mitteilungen,* Band **59**. TU Wien, Wien, 2002.

[6] P. Crantz und M. Hauptmann. Sphärische Trigonometrie. In *Mathematisch-physikalische Bibliothek,* Band 7. B. G. Teubner, Leipzig, 1950.

[7] de.wikipedia.org/wiki/RMS_Titanic. Abgerufen am 29. 07. 2010.

[8] H. Dörrie. *Ebene und sphärische Trigonometrie.* Oldenbourg, München, 1950.

[9] A. Filler. Euklidische und nichteuklidische Geometrie. In *Mathematische Texte,* Band 7. BI Wissenschaftsverlag, Berlin, 1993.

[10] U. Graf. *Trigonometrie der Ebene - Sphärische Geometrie und Kartenentwürfe.* Verlag von Quelle und Meyer, Leipzig, 1938.

[11] G. Hake, D. Grünreich und L. Meng. *Kartographie. Visualisierung raumzeitlicher Informationen.* Walter de Gruyter, 2002.

[12] R. Hame. *Sphärische Trigonometrie.* Ehrenwirth Verlag GmbH, München, 1995.

[13] J. Hoschek. *Mathematische Grundlagen der Kartographie.* Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim, 1969.

[14] W. Lietzmann. *Elementare Kugelgeometrie mit numerischen und konstruktiven Methoden.* Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1949.

[15] H. Meschkowski. Sphärische Trigonometrie (Kugelgeometrie). In *Mentor Repetitorien,* Band 16. Mentor Verlag GmbH, Berlin, 1953.

[16] E. Müller und E. Kruppa. *Lehrbuch der darstellenden Geometrie.* Springer-Verlag, Wien, 1961.

[17] W. Schmid und W. Borsdorf. Ebene und sphärische Trigonometrie. In *Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen,* Band 1. Bergakademie Freiberg, Freiberg, 1959.

[18] W. Schmid und W. Borsdorf. Kartenentwürfe und sphärische Astronomie. In *Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen,* Band 2. Bergakademie Freiberg, Freiberg, 1959.

[19] K. Wagner. *Kartographische Netzentwürfe.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1962.

[20] G. Wolff und H. Athen. Analytische Geometrie und Vektorrechnung - Abbildende Geometrie - Kugelgeometrie und sphärische Trigonometrie. In *Elemente der Mathematik, Oberstufe Band 4.* Hermann Schroedel Verlag KG und Verlag Ferdinand Schöningh, Hannover, Paderborn, 1972.

Lebenslauf

Melanie Schaumüller

Persönliche Daten

Geburtsdatum	4. September 1984
Geburtsort	Amstetten
Staatsbürgerschaft	Österreich

Ausbildung

1991/92 – 1994/95	Volksschule Ybbs
1995/96 – 1998/99	Unterstufe Gymnasium Wieselburg
1999/2000 – 2002/03	Oberstufe Gymnasium Wieselburg
23. Juni 2003	Reifeprüfung
seit 1. Oktober 2003	Lehramtsstudium an der Universität Wien für Mathematik und Geographie und Wirtschaftskunde

Besondere Kenntnisse

Sprachen	Deutsch (Muttersprache) Englisch (in Wort und Schrift) Französisch (Grundkenntnisse) Österreichische Gebärdensprache (Grundkenntnisse)
Computerkenntnisse	Office – Anwendungen, Internetexplorer, Adobe PhotoShop 7.0, LaTeX, GeoGebra, Mathematica, SPSS, ArcView, Hot Potatoes, Diplom im Maschinschreiben
Zusatzausbildung	Ausbildungslehrgang „Berufs- und Studienwahl-vorbereitung in der Schule der 10 – 19-Jährigen“