



universität
wien

DIPLOMARBEIT

FORSCHENDES LERNEN

EINE BEGRIFFSKLÄRUNG UND ANALYSE DER ANWENDBARKEIT FÜR DEN MATHEMATIKUNTERRICHT

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin:	Carmen Villotti
Matrikel-Nummer:	0504157
Studienrichtung:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geographie und Wirtschaftskunde
Betreuerin:	Mag. Dr. Petra Hauer-Typelt

Wien, im Dezember 2010

Danksagung

Der größte Dank gilt meiner Diplombetreuerin Mag. Dr. Petra Hauer-Typpelt, die mir bei der Themenfindung und der Ausarbeitung eine große Hilfe war.

Weiters möchte ich mich bei Mag. Adele Drexler, Mag. Katharina Luksch, Mag. Ingrid Fertl, Mag. Raimund Hermann und Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Christian Vielhaber für die Ideen und Anregungen bedanken, deren Interviews, Hospitationen und Unterrichtsmaterialien zu einem unerlässlichen Teil meiner Diplomarbeit wurden.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken, die mich immer unterstützt haben und denen ich eine wunderschöne Studienzeit verdanke!

INHALTSVERZEICHNIS

1	<u>EINLEITUNG</u>	1
---	-------------------	---

I. FORSCHENDES LERNEN: BEGRIFFSKLÄRUNG, GRUNDIDEE UND CHARAKTERISTIKUM

2	<u>FORSCHUNG UND SCHULE: UNVEREINBAR?</u>	4
---	---	---

2.1	DER FORSCHUNGSBEGRIFF	4
2.2	DIE WAHRNEHMUNG VON FORSCHUNG	7
2.3	SCHÜLERINNEN FORSCHEN?	7

3	<u>FORSCHENDES LERNEN ZWISCHEN LEHR- UND LERNMETHODE</u>	9
---	--	---

3.1	DIE TRIVIALE MASCHINE UND DER BEHAVIORISMUS	10
3.2	DIE NICHT-TRIVIALE MASCHINE UND DER KONSTRUKTIVISMUS	11

4	<u>DIE WURZELN FORSCHENDEN LERNENS</u>	13
---	--	----

4.1	JOHN DEWEY UND DAS „FÜNF-STUFEN-MODELL“ DES DENKENS	14
4.2	JOSEPH SCHWABS INQUIRY LEARNING	15
4.3	FORSCHENDES LERNEN ALS BILDUNGSPRINZIP	16

5	<u>FORSCHENDES LERNEN IN DER SEKUNDARSTUFE I UND II - ALTES KONZEPT NEU VERPACKT?</u>	20
---	---	----

5.1	FORSCHENDES LERNEN IN DER LITERATUR ZUR FACHDIDAKTIK DER MATHEMATIK	21
5.2	DIE BESONDERHEITEN FORSCHENDEN LERNENS	22

6	<u>FORSCHENDES LERNEN ALS LEHRMETHODE</u>	24
---	---	----

6.1	DAS FORSCHEND-ENTWICKELNDE UNTERRICHTSVERFAHREN	25
6.2	DIE PHASEN FORSCHENDEN LERNENS	30

7	<u>FORSCHENDES LERNEN ALS LERNMETHODE</u>	33
---	---	----

7.1	EIN SELBSTGESTEUERTER PROZESS	34
7.2	EIN INDIVIDUELLER PROZESS	36
7.3	EIN SOZIALER PROZESS	38
7.4	EIN AKTIVER PROZESS	39

II. DIE UMSETZUNG FORSCHENDEN LERNENS IM MATHEMATIKUNTERRICHT

8	MATHEMATIKAUFGABEN ALS GRUNDLAGE FORSCHENDEN LERNENS	42
8.1	BEISPIELE ZUM „FORSCHEN“	43
8.2	ANREGENDE IMPULSE OHNE VORGEGBENE FRAGESTELLUNG	47
8.2.1	MUSTER AUS QUADRATEN	47
8.2.2	EXPEDITION ZUM ABGELEGENSTEN PUNKT	48
8.2.3	GLATTEIS IN DORNBIRN	50
8.2.4	PASCALSCHES DREIECK	55
9	TEILASPEKTE FORSCHENDEN LERNENS IM MATHEMATIKUNTERRICHT	57
9.1	MIT DER THEMATIK AUSEINANDERSETZEN	58
9.2	FRAGEN ERARBEITEN UND FORMULIEREN	60
9.3	VERMUTUNGEN AUFSTELLEN	62
9.4	PLAN ERSTELLEN UND VORGEHENSWEISEN FESTLEGEN	64
9.5	UNTERSUCHUNGEN DURCHFÜHREN	67
9.6	ERGEBNISSE EINORDNEN, BEURTEILEN UND REFLEKTIEREN	73
9.7	ERGEBNISSE PRÄSENTIEREN UND DISKUTIEREN	75
9.8	RESÜMEE	81
10	FORSCHENDES UND ENTDECKENDES LERNEN AM GYMNASIUM GERINGERGASSE	84
11	FORSCHENDES, ENTDECKENDES UND PROBLEMORIENTIERTES LERNEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT	88
11.1	PROBLEMORIENTIERTES UND FORSCHENDES LERNEN	89
11.2	ENTDECKENDES UND FORSCHENDES LERNEN	93
12	LERTAGEBÜCHER UND PORTFOLIOS ALS INSTRUMENTE FORSCHENDEN LERNENS	95
12.1	BEGRIFFSKLÄRUNG	95
12.2	VORTEILE BEI DER UMSETZUNG FORSCHENDEN LERNENS MITTELS PORTFOLIOS	96
12.3	MATHEMATIKPORTFOLIOS AM BUNDESREALGYMNASIUM MARCHETTIGASSE	98

<u>13</u>	<u>ZUSAMMENFASSUNG</u>	<u>101</u>
<u>14</u>	<u>ABBILDUNGSVERZEICHNIS</u>	<u>103</u>
<u>15</u>	<u>TABELLENVERZEICHNIS</u>	<u>104</u>
<u>16</u>	<u>LITERATURVERZEICHNIS</u>	<u>105</u>
<u>17</u>	<u>INTERNETQUELLEN</u>	<u>110</u>
<u>18</u>	<u>EXPERTINNENINTERVIEWS</u>	<u>112</u>

1 Einleitung

Forschendes Lernen findet in den letzten Jahren immer häufiger seinen Platz in unterschiedlichen Vorträgen, wird Ziel verschiedener Initiativen und Aushängeschild vieler Schulprofile. So setzt sich das im Jahr 2009 eröffnete Fachdidaktikzentrum für Naturwissenschaften und Mathematik für die Grundschule an der Pädagogischen Hochschule Wien das Ziel, schon beim Schuleintritt einen Grundstein für das forschende Lernen zu legen. Diese Bemühungen werden von der Vortragsreihe "Forschendes Lernen" im Studienjahr 2009/2010 begleitet, bei der das forschende Lernen in unterschiedlichen Schulstufen und -formen thematisiert wird.¹ Als weiteres Beispiel kann „Wif-zack“ genannt werden, eine Initiative der Wirtschaftskammer Vorarlberg, die das forschende Lernen der SchülerInnen in Bezug auf naturwissenschaftlich-technische Themen zu unterstützen versucht, um so den Wirtschaftsstandort und den Wohlstand des Bundeslandes in Zukunft zu sichern.² Und auch das Förderprogramm „Sparkling Science“, das vom BMWF getragen wird, setzt sich zum Ziel, die Schüler und Schülerinnen aktiv in den Forschungsprozess einzubeziehen. Dabei sollen die LehrerInnen, SchülerInnen und WissenschaftlerInnen zusammenarbeiten und im Rahmen von Forschungsprojekten Untersuchungen durchführen. Die besten Projekte werden mit Auszeichnungen und Forschungsprämien belohnt.³ Auch die Homepage des vom BMUKK getragenen IMST-Projekts (Initiativen machen Schule Top!), das unter anderem die Verbesserung des Unterrichts in Mathematik anstrebt, deutet darauf hin, dass das forschende Lernen als neues, innovatives Konzept an Bedeutung und Interesse gewinnt. Das forschende Lernen verzeichnet auf dieser Homepage in der Kategorie Lernformen (69 Lernformen werden genannt), nach dem selbstständigen Lernen, offenen Lernen und e-learning die meisten Einträge und Publikationen.⁴

Zwar wird anhand dieser exemplarisch ausgewählten Initiativen und Projekten die Präsenz und Popularität dieses Begriffes deutlich, zu einer klaren Begriffsbestimmung,

¹ http://www.phwien.ac.at/fileadmin/phvie/users/27/ifis-news/IFIS-Newsletter_Nov-2009_FDZ.pdf

² <http://www.wif-zack.at/>

³ <http://sparklingscience.at/de/schulforschung>

⁴ <http://imst.uni-klu.ac.at/imst-wiki/index.php/Kategorie:Lernformen>

-abgrenzung und Charakterisierung forschenden Lernens kommt es in den Vorträgen, den Publikationen und auf den Homepages jedoch kaum. Auf Grund dessen widme ich den ersten Teil (I. FORSCHENDES LERNEN: BEGRIFFSKLÄRUNG, GRUNDIDEE UND CHARAKTERISTIKUM) dieser Diplomarbeit vor allem der Begriffsklärung, der Grundidee und den Wurzeln forschenden Lernens. Da den verschiedenen Definitionen, die ich in der folgenden Arbeit aufgreifen werde, unterschiedliche Auffassungen des Forschungsbegriffes zu Grunde liegen, sollen im ersten Kapitel die grundsätzlichen, differierenden Wahrnehmungen und Interpretationen dieses Begriffes thematisiert werden. Anschließend soll die Entwicklung forschenden Lernens, ausgehend von John Dewey und seinem „Fünf-Stufen-Modell“ und Joseph Schwabs „inquiry learning“ bis hin zum Jahre 1970, in dem das forschende Lernen zum Bildungsprinzip an Hochschulen ernannt wurde, erläutert werden. Dieser Abhandlung folgt im fünften Kapitel die theoretische Betrachtung forschenden Lernens aus dem Blickwinkel des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I und II, wobei vor allem die Besonderheiten dieses Konzeptes herausgearbeitet werden. Im Zuge meiner Recherchen drängte sich sehr bald die Vermutung auf, dass das Angebot an Literatur zum Thema forschendes Lernen in Bezug auf den Mathematikunterricht sehr begrenzt ist. Mit Hilfe von fünf, für Österreich relevante Fachzeitschriften der Mathematikdidaktik, werde ich versuchen, diese Annahme zu begründen bzw. zu belegen. Des Weiteren wird der kritischen Betrachtung der unterschiedlichen Phasen forschenden Lernens, anhand der Einteilung von Fries und Rosenberger (1976) bzw. Schmidkunz und Lindemann (1992), ein eigener Versuch der Benennung und Darstellung einzelner SchülerInnen-Aktivitäten forschenden Lernens folgen.

Dieser erste, theoretische Teil wird von einem zweiten, praxisorientierten Abschnitt ergänzt (II. DIE UMSETZUNG FORSCHENDEN LERNENS IM MATHEMATIKUNTERRICHT). Da der Mathematikunterricht meist von Aufgaben bestimmt wird, werde ich im achten Kapitel unterschiedliche Beispiele, die zum Thema forschendes Lernen im Mathematikunterricht publiziert wurden, analysieren und bewerten. Da diese oft nicht den Anforderungen passender und sinnvoller Aufgabenformate genügen, werde ich versuchen eine eigene passende Aufgabe („Glatteis in Dornbirn“) zu erstellen. Zudem sollen in diesem Teil der Diplomarbeit die einzelnen Phasen forschenden Lernens im

Mathematikunterricht näher erläutert, mittels Aufgabenformaten ersichtlich gemacht und mit Umsetzungsvorschlägen ergänzt werden. Auch die Problematik der begrifflichen Nähe forschenden Lernens zu einer Vielzahl anderer Lernkonzepte soll im Zuge dieser Diplomarbeit aufgegriffen werden. Infolge der großen Zahl an Überschneidungsflächen zwischen entdeckendem und forschendem bzw. problemorientiertem und forschendem Lernen habe ich mich für die Fokussierung auf die Gemeinsamkeiten und Abgrenzungsmöglichkeiten der genannten Konzepte entschieden. Die Besuche im Bundesrealgymnasium Marchettigasse und dem Gymnasium Geringergasse ermöglichten mir einen umfassenden und eingehenden Blick in verschiedene Teilaspekte forschenden Lernens im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Da den Unterrichtserfahrungen, besonders im Zusammenhang mit einem solch praxisorientierten Thema, eine große Relevanz zugeordnet werden kann, habe ich mich für das Heranziehen von „ExpertInnen-Interviews“ entschieden. Die Ideen, Anregungen und Umsetzungsvorschläge von Mag. Adele Drexler, Mag. Katharina Luksch, Mag. Ingrid Fertl, Mag. Raimund Hermann oder Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Christian Vielhaber werden im Laufe der Diplomarbeit von mir immer wieder aufgegriffen.

I. FORSCHENDES LERNEN: BEGRIFFSKLÄRUNG, GRUNDIDEE UND CHARAKTERISTIKUM

2 Forschung und Schule: Unvereinbar?

Im folgenden Kapitel möchte ich näher auf den Forschungsbegriff eingehen und unterschiedliche Interpretationen dieses Begriffes anführen. Die Begriffe „forschendes Lernen“ und „Forschung“ repräsentieren zwar etwas gänzlich unterschiedliches, dennoch treten sie äußerst selten alleine auf. SchülerInnen werden mit ForscherInnen, unterschiedliche Abläufe forschenden Lernens mit der Forschung gleichgesetzt. Oft verkünden AutorInnen ihre eigene Auffassung von Forschung, bevor das forschende Lernen aufgegriffen wird. Dies führt zu einer Fülle an Interpretationen, welche die Bedeutung des Begriffes zum Teil stark modifizieren. Sowohl die Konsequenzen solch einer Begriffsverzerrung als auch die Frage nach der Vereinbarkeit von Schule und Forschung sollen in diesem Kapitel thematisiert werden.

2.1 Der Forschungsbegriff

Unter Forschung versteht man die „planmäßige und zielgerichtete Suche nach neuen Erkenntnissen in einem bestimmten Wissensgebiet (Brockhaus in 30 Bänden, 2006, S. 483)“. Allgemein handelt es sich dabei um jegliche methodisch-systematischen und schöpferisch-geistigen Bemühungen, die zum Gewinn neuer, allgemein nachprüfbarer Erkenntnisse in der Wissenschaft führen. Die Akzentuierung liegt bei dieser Definition, welche alle Wissenschaftsdisziplinen gleichermaßen miteinschließt, besonders auf der Neuheit der Erkenntnisse, die im Rahmen forschender Tätigkeiten gewonnen werden. In den Schriften der Bundesassistentenkonferenz (BAK) zum forschenden Lernen und wissenschaftlichen Prüfen (1970, S. 12 f.) wird der Forschungsbegriff aus der Sicht verschiedener Wissenschaften beleuchtet. In der Mathematik wird das Forschen als „tastendes Suchen“ in eine geahnte Richtung in einem unbekannten, kaum eingegrenzten und nicht strukturierten Raum beschrieben. Das Forschen beruht dabei auf dem, meist glückhaften, Finden eines Satzes, Gesetzes oder Prinzips.

Demzufolge ist die Methode nicht vorgebar. Allerdings ist das Verständnis von Forschung in den verschiedenen Wissenschaften inhomogen, weshalb eine Harmonisierung des Begriffes in den Schriften der Bundesassistentenkonferenz nicht erreicht wird. Tendenziell kann jedoch gesagt werden, dass (abgesehen von der Logik, Mathematik, Wissenschaftstheorie und naturwissenschaftlichen Grundlagenforschung) die subjektive Neuheit des Problems für die beteiligten Individuen als Kriterium für Forschung in den Schriften der Bundesassistentenkonferenz von größerer Bedeutung ist als die Nichtvorgebarkeit der Methode und die objektive Neuheit des Ergebnisses.

„Entscheidend ist vielmehr die strukturelle Gleichheit der Situation des Forschenden (...), die Aufgabe, ein noch nicht strukturiertes Feld zu erkunden, und für diese Exploration bezeichnenden Tätigkeiten: Entdeckung und Wiederaufnahme eines (verlorenen) Problems und seine immer weiter präzierte Bestimmung; Hypothesenbildung; Entwurf von Strategien; Versuche in Variationen; Probe auf Alternativen; Umwege, Rückschläge, Zufallsfunde, „fruchtbare Momente“ und kritische Prüfungen der Ergebnisse; Selbstständigkeit in allen diesen Schritten und ein je nach Umfang verschiedenes Risiko des Fehlschlags (BAK, 1970, S. 13)“.

Auch der Forschungsbegriff aus pädagogischer Sicht gründet auf bestimmten Tätigkeiten und Haltungen der agierenden Individuen und ist weniger ergebnis- als vielmehr prozessorientiert. Messner (2009, S. 22 ff.) zählt zu den Tätigkeiten des Forschens die Bereitschaft sich selbst Fragen zu stellen und der Versuch diese selbstständig zu beantworten. Weitere Merkmale sind das planmäßige Vorgehen, das Prüfen von Behauptungen und die Präsentation von Ergebnissen. Auch Schmidkunz und Lindemann definieren den Begriff Forschen im didaktischen Sinn und verstehen darunter den Prozess, „(...) bei dem der Schüler mit dem bereits vorhandenen Wissen weitgehend selbstständig mit den ihm angemessenen und zur Verfügung stehenden Methoden (Arbeitsweisen, Geräten, Materialien) neue Erkenntnisse gewinnt (Schmidkunz und Lindemann, 1992, S. 19)“. Ausgehend von dieser Definition ist Forschen in jeder Altersstufe, unabhängig vom Vorwissen, möglich. Messner (2009, S. 22) geht sogar davon aus, dass es sich beim Forschen um eine „notwendige universelle menschliche Grundfähigkeit“ handelt. Diese ist auch außerhalb der Wissenschaft vorfindbar. Er kritisiert, dass sich die Forschungstätigkeiten in unserer Kultur in die

hehren Zirkel der Wissenschaftsinstitute zurückgezogen haben und appelliert für forschende Impulse schon im frühen Kindesalter. „Wenn Forschen als Grundhaltung und -fähigkeit verstanden wird, die das ganze menschliche Leben durchzieht, dürfte kein Zweifel sein, dass Zehnjährige ihrer mächtig sind (Messner, 2009, S. 24).“ Auch in der pädagogischen Fachzeitschrift „Geographie heute“ wird der Forschungsbegriff hinsichtlich seiner Bedeutung relativiert. Dabei wird betont, dass der Hauptgedanke nicht in der Entdeckung von generell Neuem liegt, sondern dass eine wissenschaftliche Auseinandersetzung mit einer bestimmten Frage stattfinden muss. Infolgedessen kann, unter Berücksichtigung des individuellen Niveaus, jede/r SchülerIn forschen (Wenzel, 1999, S. 1).

Die von mir ausgewählten Auffassungen des Forschungsbegriffs sollen verdeutlichen, wie stark die Auslegungen voneinander abweichen. Diese divergenten und oft unscharfen Begriffsdefinitionen ermöglichen „der Forschung“ den Eintritt in unterschiedlichste Lebensbereiche und Institutionen. Alter, Begabung, Vorwissen und materielle Ausstattung scheinen dabei unbedeutend zu sein. So laden unzählige Bildungsinstitute junge „ForscherInnen und ErfinderInnen“ zu Experimentierworkshops, wobei schon Kleinkinder dieser Einladung nachgehen können. Immer mehr Kindergärten werben damit, den Forschergeist ihrer Schützlinge zu unterstützen und bieten vielversprechende Experimentierräume an. Auch im Rahmenplan für elementare Bildungseinrichtungen in Österreich (BMUKK, 2009, S. 9) ist festgeschrieben, dass das Experimentieren und Forschen die Erweiterung der kindlichen Kompetenz unterstützt.

2.2 Die Wahrnehmung von Forschung

Dass bestimmte Begriffe, die konventionell behaftet waren, plötzlich ein Eigenleben und eine Eigendynamik entwickeln, ist für Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Vielhaber (2010)⁵, Leiter des Fachdidaktikzentrums für Geographie und Wirtschaftskunde der Universität Wien, ein immer häufiger anzutreffendes Phänomen. Durch fremdbestimmte Interpretationen finden Begriffe auch im Alltagsgebrauch ihre Verwendung. Oftmals werden diese dabei zur Unkenntlichkeit verzerrt, sodass der ehemalige Begriffsinhalt überhaupt nicht mehr präsentiert wird. In der Wahrnehmung der Menschen entsteht eine völlig neue Bedeutung des Begriffes. Für Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Vielhaber ist Forschung eine äußerst komplexe Dimension, die dem/der Forschenden viel abverlangt. Er kritisiert, dass der Begriff der Forschung zu etwas mit alltäglichem Gebrauchswert degradiert wurde/wird. Forschungstätigkeiten werden mittlerweile Personen zugeschrieben, die aus Sicht von Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Vielhaber nicht jene Grundlagen und Qualitäten besitzen, die man in die Forschung einbringen muss, damit sie auch als solche bezeichnet werden kann. Und so wird Forschen durch fremdbestimmte, eigene, volkstümliche Interpretationen zu etwas, was plötzlich jeder kann (Vielhaber, 2010).

2.3 SchülerInnen forschen?

Führt man sich die unterschiedlichen Interpretationen von Forschung vor Augen, mag es wenig verwundern, dass sich dieser Begriff auch in der Sekundarstufe I und II etabliert hat. Bei der Frage, ob sich Schule und Forschung vereinbaren lassen, müssen sowohl die Rahmenbedingungen als auch die Akteure, nämlich die Schüler und Schülerinnen, betrachtet werden. Winter (1991) vergleicht die Situation in der Forschung, die er als den wahren Fortschritt durch Entdeckung und Erfindung versteht, mit der Situation in der Schule.

⁵ Persönliches Interview - geführt von der Verfasserin, 21.01.2010, Wien

Forschung	Schule
Erwachsene	Kinder/Schüler
Profis	Laien
freiwillige Gemeinschaft	Zwangsgemeinschaft
offenes Arbeiten	Arbeiten nach Lehrplan

Tab. 1: Gegenüberstellung - Forschung und Schule (Winter, 1991, S. 3)

Von Vollständigkeit kann bei diesen, exemplarisch dargestellten, Differenzen aber keinesfalls gesprochen werden. Man denke beispielsweise an die begrenzten Arbeitsmaterialien, die Klassengrößen oder die finanziellen Mittel, die ein Forschen in der Institution Schule beeinträchtigen. Von dieser Auflistung ausgeschlossen sind zudem Schülerwettbewerbe, bei denen sich die Kinder und Jugendlichen auch außerhalb des Regelunterrichts mit einer Thematik intensiv auseinandersetzen und die sich gewissen institutionellen Rahmenbedingungen entziehen. Doch widmen wir uns nun den Laien, den Kindern und Jugendlichen, welche im Regelunterricht die Rolle eines/einer Forschers/Forscherin übernehmen müssen, damit Forschung in der Schule wirklich stattfinden kann. Für Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Vielhaber (2010) gehört zur komplexen Dimension des Forschens auch das Bekenntnis zur Widerspruchsfreiheit, zur Objektivität, zur Nachvollziehbarkeit, zur Seriosität, zu ethischem Handeln und das Bekenntnis, sich an der Verbesserung der Lebenssituation aller zu orientieren. Spricht man nun von Forschung in der Sekundarstufe I und II, so bezeichnet er dies als Überhöhung, die dem Begriff der Forschung schadet. Bastian (1991) appelliert hingegen für das Bild des „Schülers als Forscher“. Das gegensätzliche Bild von SchülerInnen und ForscherInnen, welches sich über Jahrzehnte lang in den Köpfen der Menschen verankert hat, soll überwunden werden. Er kritisiert, dass die Aneignung vorgegebenen Wissens noch immer den Schüler und Schülerinnen zugeschrieben wird, während man von ForscherInnen Intelligenz, Kreativität, Eigenständigkeit und neue Erkenntnisse erwartet. Es geht vor allem darum, die SchülerInnen nicht auf das Lernen zu reduzieren, sondern sie als ganze Menschen in einen Lernprozess mit einzubeziehen (Bastian, 1991, S. 6 f.). Anforderungen, wie sie beispielsweise Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Vielhaber an die Forschenden hat, müssen nicht erfüllt werden. Die Antwort auf die Frage, ob Schüler und Schülerinnen der Sekundarstufe I und II imstande sind Forschung zu betreiben, hängt davon ab, welchen Forschungsbegriff man der Überlegung

zugrunde legt. Klarheit muss meines Erachtens allerdings darüber herrschen, dass die Antwort auf diese Frage nichts über die Sinnhaftigkeit forschenden Lernens aussagt. Die Bedeutung und der Wert forschenden Lernens hängen nicht davon ab, ob die Akteure als ForscherInnen oder der Lernprozess als Forschung bezeichnet wird. Im Rahmen meiner Diplomarbeit werde ich die SchülerInnen nicht mit dem Begriff Forscher bzw. Forscherin betiteln, die Gründe dafür wurden in diesem Kapitel ausführlich dargelegt. Dies soll jedoch keinesfalls bedeuten, dass ich Bastians Traumbild von Schüler und Schülerinnen nicht vollkommen zustimme.

3 Forschendes Lernen zwischen Lehr- und Lernmethode

Forschendes Lernen gehört zu einem umfangreichen Repertoire an Methoden, die den Lehrer und Lehrerinnen zur Verfügung stehen. Die Bedeutung und der Einsatz einer Methode hängen allerdings davon ab, welche Auffassung die Lehrenden von Unterricht und Lernprozessen haben. Terhard (1989) führt unterschiedliche Dimensionen an, welche den Schwerpunkt des Methodeneinsatzes darstellen sollen. Hier reicht die Bandbreite an Bezeichnungen von der Methode als „vermittelnde Instanz“ zwischen aneignendem Subjekt und anzueignendem Objekt bis zur Methode, die rational kalkuliert und zur Erreichung vorgegebener Ziele eingesetzt wird (Terhard, 1989, S. 26 ff.). Auch die Bedeutung und die Umsetzung forschenden Lernens in der Sekundarstufe I und II hängen sehr stark vom Blickwinkel ab, aus dem das Konzept betrachtet wird. Im Rahmen meiner Diplomarbeit möchte ich mich auf die Einteilung von Forkel (2009, S. 66 f.) beziehen, die drei Grundverständnisse, allerdings in Bezug auf das entdeckende Lernen, hervorhebt. Diese Einteilung lässt sich meines Erachtens jedoch problemlos übertragen. So kann forschendes Lernen allgemein als Orientierung aufgefasst werden, die eine *Idee, ein Konzept oder ein Prinzip* darstellt. Forschendes Lernen kann als *Lehr- bzw. Unterrichtsmethode* bezeichnet werden, wenn die Lehrpersonen und deren Handlungen in den Mittelpunkt der Betrachtungen treten. Nur wenn die Handlungen der SchülerInnen und deren Lernprozess die Hauptanliegen pädagogisch-didaktischer Überlegungen sind, kann von einer *Lernmethode* gesprochen werden. In den folgenden Kapiteln werde ich mich auf die Spuren der Grundidee

begeben und das forschende Lernen sowohl aus der Sicht der Lehr- als auch aus der Sicht der Lernmethode betrachten. Zuvor sollen jedoch noch die grundlegenden behavioristischen und konstruktivistischen Standpunkte und die daraus erwachsenen Annahmen über Wissen und Lernen aufgezeigt werden.

3.1 Die triviale Maschine und der Behaviorismus

John B. Watson begründete zu Beginn des 20. Jahrhunderts den Behaviorismus, dessen Grundposition dem Objektivismus zugeordnet werden kann. Aus behavioristischer Sicht existiert eine vom Bewusstsein des Menschen unabhängige Welt. Deshalb können Aussagen über die Realität getroffen werden, die objektiv wahr oder falsch sind. Abweichende Sichtweisen können somit auf eine fehlerhafte Wahrnehmung der Welt zurückgeführt werden. Beim Lernen soll nun externes Wissen auf die Schüler und Schülerinnen abgebildet werden. Das menschliche Bewusstsein und die innere Struktur des Subjektes werden dabei nicht berücksichtigt. Es dominiert die Annahme, alle Menschen würden nach demselben Prinzip funktionieren und wären extern manipulierbar. Behavioristische Lernstrategien gehen deshalb davon aus, dass Reaktionen und Verhaltensweisen durch Reize beeinflusst werden können (Sindler, 2004, S. 14 ff.). Der Mensch wird als „triviale Maschine“ aufgefasst, welche gemäß dem Reiz-Reaktions-Schema funktioniert. Das Subjekt reagiert auf einen Eingabereiz (Input) mit einer Reaktion (Output), welche als Funktion des Inputs verstanden werden kann (Leuders, 2001, S. 71 f.). Die Vorgänge, welche sich im Subjekt zwischen Input und Output abspielen, werden als unwichtig erachtet und als „black box“ dargestellt. Die Vorstellung, Verhalten vorhersagen und kontrollieren zu können, führt dazu, dass sich pädagogische Bemühungen auf „oberflächliche und vor allem sichtbare Optimierungsaspekte (Sindler, 2004, S. 17)“ beziehen. Dabei geht es hauptsächlich um die Adaption und Reproduktion vorgefertigten Wissens. Ein solch rezeptives Lernen, das auf die reine Wiedergabe ausgerichtet ist, führt zu einem unzusammenhängenden, kurzfristigen Aufbau von Wissen. Die starke Ergebnisorientierung, die vorgegebenen Inhalte und die Steuerung des Lernprozesses durch die Lehrperson sollten jedoch kritisch hinterfragt werden. Nichts desto trotz existiert ein solches Ursache-Wirkungsdenken noch all zu oft und die Lehrenden gehen davon aus, dass die mit

Input gefütterten „trivialen Maschinen“, die sogenannten Schüler und Schülerinnen, den erwünschten Output liefern müssen. Was aber, wenn ein Kind auf die Frage „Was ist zwei mal zwei?“ mit „Grün!“ antwortet? Foerster wirft diese Frage auf und folgert: „Die Konsequenz ist, dass wir es in eine Trivialisationsanstalt schicken, die man offiziell als Schule bezeichnet. Und auf diese Weise verwandeln wir dieses Kind Schritt für Schritt in eine triviale Maschine, das unsere Frage „Was ist zwei mal zwei?“ auf immer dieselbe Weise beantwortet (Foerster, In: Leuders, 2001, S. 72)“. Ein solcher „Sortier-, Auslese-, Trainings- und Reparaturbetrieb (Lindemann, 2006, S. 143)“ setzt sich das Verhindern von falschen Verhaltensweisen und die Beeinflussung von SchülerInnenreaktionen durch äußere Faktoren zum Ziel. Die Antwort „Grün!“ kann zwar auf einen falschen Input zurückgeführt werden oder als Störung der „trivialen Maschine“ Mensch aufgefasst werden, mögliche andere Ursachen werden vom behavioristischen Erklärungsmodell jedoch in die Tiefen der „black box“ verdammt.

3.2 Die nicht-triviale Maschine und der Konstruktivismus

Die grundlegende Annahme des Konstruktivismus ist, dass Wirklichkeit nicht objektiv ist und von den Subjekten immer wieder neu konstruiert und interpretiert wird. Wissen kann folglich nicht einfach übertragen, auf Schüler und Schülerinnen abgebildet, werden. Für ein unerwünschtes Verhalten kann es deshalb eine Vielzahl von Gründen geben. Das Reiz-Reaktions-Schema des Behaviorismus wird von den VertreterInnen des Konstruktivismus strikt abgelehnt, die Vorhersehbarkeit, Wiederholbarkeit und Steuerung von Wissen beanstandet. Der Mensch wird als „nicht-triviale Maschine“ aufgefasst, deren Output nicht durch bestimmte Reize hervorgerufen werden kann. Lindemann (2006, S. 144) vergleicht die Situation mit einem Taschenrechner, der bei mehrmaligem Drücken einer bestimmten Taste immer die gleiche Zahl hervorbringt. Zählt man diesen Taschenrechner nun zu den „nicht-trivialen Maschinen“, so kann bei einem erneuten Drücken der Taste etwas ganz anderes bzw. gar keine Anzeige erscheinen. Die „black box“ muss der Ansicht weichen, dass sich zwischen Input und Output ein Subjekt mit inneren Zuständen und kognitiven Strukturen befindet. Die Auswirkungen eines Inputs, einer sogenannten Perturbation (Ver-Störung, Anregung), können auf Grund der inneren Dynamik der Subjekte nicht

vorhergesagt werden. Das Reiz-Reaktions-Schema ist auf die „nicht-triviale Maschine“ Mensch nicht mehr anwendbar. Aus konstruktivistischer Sicht ist Wissen immer ein Konstrukt, ein geistiger Entwurf, der bei der Auseinandersetzung mit der erfahrbaren Welt entsteht. Lernen ist somit ein aktiver Prozess, der von Wahrnehmungen, Erfahrungen und Handlungen geprägt ist. Es werden individuelle Konstrukte aufgebaut, die ihre Verbindlichkeit erst im Prozess der gemeinsamen Kommunikation erhalten. Im Mathematikunterricht werden die Lernenden meist Schritt für Schritt mit Hilfe der fragend-entwickelnden Methode zu einem fertigen Wissen geführt. Dabei verfügt die Lehrperson über ein fundiertes Wissen, während die Lernenden erstmals mit den Lerninhalten konfrontiert sind (Hefendehl-Hebeker, 2000, S. 17). Eine aktive Auseinandersetzung mit dem „vorgegebenen Stoff“ bleibt dabei meistens aus. Man darf aber nicht übersehen, dass auch mathematische Ideen und Verfahren Konstruktionen sind, die sich von ihren bildhaften, sprachlichen und symbolischen Darstellungen unterscheiden. Die Vermittlung hängt jedoch von solchen Darstellungen ab. Um Veranschaulichungen bzw. Beschreibungen verstehen zu können, müssen Symbole, Bilder und Begriffe richtig gedeutet werden. Ein Zahlen- oder Größenverhältnis wird in der Mathematik beispielsweise mit dem gedanklichen Entwurf eines Bruches dargestellt. „Die verbleibende prinzipielle Kluft zwischen Idee und Darstellung kann letztlich nur das lernende Individuum durch eine konstruktive gedankliche Leistung überwinden (Hefendehl-Hebeker, 2000, S. 6).“ Der Lernprozess basiert somit gerade im Mathematikunterricht auf der individuellen Bedeutungskonstruktion.

Die Idee forschenden Lernens gründet auf einer konstruktivistischen Auffassung und stellt die Konstrukteure des Wissens, die Schüler und Schülerinnen in den Mittelpunkt. Mit dem forschenden Lernen soll ihnen eine Möglichkeit geboten werden, die Welt zu erfahren, zu erleben, zu entdecken. Dabei hat nicht die oberflächliche Vermittlung, sondern die aktive Auseinandersetzung der Lernenden, deren Handeln, Wahrnehmen und Kommunizieren höchste Priorität.

4 Die Wurzeln forschenden Lernens

Die Geschichte der Grundidee forschenden Lernens ist gekennzeichnet von der begrifflichen und inhaltlichen Nähe zu anderen Unterrichtskonzepten und Lernprinzipien. Dazu gehören Begriffe wie entdeckendes Lernen, projektorientiertes Lernen, genetisches Lernen, problemorientiertes Lernen, produktives Denken, selbstgesteuertes Lernen, offener Unterricht usw. (Bönsch, 2008, S. 235). Während diese Begriffe leicht mit bekannten Persönlichkeiten assoziiert werden, entdeckendes Lernen mit dem Namen Jerome Bruner, genetisches Lernen mit Martin Wagenschein, projektorientiertes Lernen mit John Dewey usw., erscheint diese Zuordnung beim forschenden Lernen kaum möglich zu sein. Die genannten didaktisch-pädagogischen Ansätze bekräftigten und beeinflussten die Entwicklung, sodass deren VertreterInnen auch als MitbegründerInnen forschenden Lernens angesehen werden können. Insbesondere John Dewey (Fünf-Stufen-Modell des Denkens) und Joseph Schwab (*inquiry learning*) leisteten mit ihren Überlegungen einen wichtigen Beitrag zur Entstehung des Konzepts forschenden Lernens. Ihre Ansätze und Strukturierungen können in vielen Publikationen zum Thema forschendes Lernen, meist etwas abgeändert und weiterentwickelt, wiedergefunden werden. Auf Grund dessen wird im folgenden Kapitel ihren Überlegungen eine besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

Zur eigenständigen Lernkonzeption entwickelte sich forschendes Lernen erst im Jahr 1970, als es zum Bildungsprinzip an deutschen Hochschulen ernannt wurde. Der Implementierungsversuch an den Hochschulen zeigte kaum Erfolge und erst Jahrzehnte später ist das Konzept in den Schulen auffindbar. Für Aepkers und Liebig (2002, S. 75) ist dies ein etwas ungewöhnlicher Werdegang, da sich Lernkonzeptionen in den meisten Fällen relativ eigenwillig aus der schulischen Praxis ergeben und erst anschließend „(...) theoretisch wahrgenommen, reflektiert und konzeptionell zuende gedacht werden (Aepkers und Liebig, 2002, S. 75)“. Mit dem forschend-entwickelnden Unterricht liefern Fries und Rosenberger (1976) sowie Schmidkunz und Lindemann (1976) in den 1970er Jahren eine erste theoretische Grundlage für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an allgemeinbildenden Schulen.

4.1 John Dewey und das „Fünf-Stufen-Modell“ des Denkens

John Dewey (1859 – 1952), Philosoph und Pädagoge, gilt als Begründer der Theorie des Problemlösens und der Projektmethode. Dewey vertritt die Ansicht, dass Lernen auf Erfahrung gründet und Kinder erst dann ein reflektiertes Denken erreichen können, wenn sie mit der Welt in Wechselwirkung treten können. Für Dewey besteht reflektiertes Denken „(...) in einem regen, andauernden, sorgfältigen Prüfen von etwas, was für wahr gehalten wird, und zwar im Lichte der Gründe, auf die sich die Annahme stützt, und der weiteren Schlüsse, denen sie zustrebt (Horlacher und Oelkers, 2002, S. 12, nach Dewey, 1910)“. Die Methode, mit der das Denken der Kinder und Jugendlichen geschult werden kann, darf dabei nicht als Operation verstanden werden, die eine Denkmaschine in Bewegung setzt und bestimmte Inhalte abbildet. Vielmehr muss die Methode Bedingungen schaffen, sodass „(...) die Beobachtung ständig verbessert und eine denkende und forschende Haltung entwickelt wird (Horlacher und Oelkers, 2002, S. 38, nach Dewey, 1910)“. Dewey gliedert den Denkprozess in fünf Phasen. In der ersten Phase trifft man auf ein Problem, welches in der zweiten Phase lokalisiert und präzisiert wird. In der dritten Phase tritt der Lösungsansatz in den Vordergrund, dessen Konsequenzen in der vierten Phase logisch entwickelt werden. In der fünften Phase wird der Lösungsansatz auf Grund von Beobachtungen und Experimenten angenommen oder verworfen (Corell, 1963, S. 15f., nach Dewey, 1938). Die für Dewey elementaren Phasen reflektierenden Denkens überschneiden sich zum Teil sehr stark mit der Gliederung des Unterrichts im Rahmen forschenden Lernens. Auch die Einteilung von Fries und Rosenberger (1976) oder Lindemann und Schmidkunz (1992) beruht auf ähnlichen Denkphasen. Dewey geht davon aus, dass SchülerInnen nur durch Probleme, die sich aus ihren gegenwärtigen Erfahrungen ergeben und in einem angebrachten Kompetenzbereich liegen, zum Denken, zum aktiven Forschen und zu neuen Ideen angeregt werden (Corell, 1963, S. 87f., nach Dewey, 1938). Diese Annahme wird bezüglich forschenden Lernens oftmals aufgegriffen und als Voraussetzung für die erfolgreiche Umsetzung betont. Deweys Kritik, dass wissenschaftliche Denkweisen und Methoden aus der Schule und dem Erfahrungsbereich der Schüler und Schülerinnen ausgegrenzt werden, spricht schon sehr früh für eine Umorientierung in Richtung forschendes Lernen. Die Ergebnisse der

Naturwissenschaften und die damit einhergehenden Veränderungen (Elektrizität, künstlich erzeugtes Licht, Auto usw.) bestimmten zu dieser Zeit sehr stark das Leben der Menschen. Immer mehr Dinge des alltäglichen Lebens konnten mit Operationen und Prozessen der Wissenschaft in Verbindung gebracht werden.

„Es ist also unsinnig zu behaupten, diese Prozesse gehörten, ähnlich denen, die in Laboratorien oder Forschungsinstituten studiert werden, nicht in den Bereich einer auf Erfahrung gegründeten Erziehung, weil sie nicht an den täglichen Lebenserfahrungen der Jugend beteiligt seien. Daß Kinder keine wissenschaftlichen Fakten und Prinzipien in der Weise studieren können, wie es Fachleute tun, ist selbstverständlich. Aber dieser Umstand bringt eines der größten Probleme für die Erziehung mit sich. Er befreit sie auf keinen Fall von der Verantwortung, gegenwärtige Erfahrungen so zu verwenden, daß die Schüler allmählich über die Analyse von Fakten und Gesetzen zu wissenschaftlich geordneter Erfahrung gelangen (Corell, 1963, S. 88 f., nach Dewey, 1938).“

Auch heute beeinflussen die neuesten Errungenschaften der Forschung, besonders aber die Globalisierung das Leben der Jugendlichen und Kinder. Gleichzeitig steht die Menschheit mit dem Klimawandel, der Überbevölkerung, der Rohstoffknappheit usw. vor großen Herausforderungen. Die Legitimität forschenden Lernens wird heute oft auf diese Tatsachen zurückgeführt.

4.2 Joseph Schwabs inquiry learning

Joseph Schwab (1909 – 1988) setzt sich in den 1960er Jahren für *inquiry learning* ein und kritisiert, dass SchülerInnen ausschließlich mit Endergebnissen von Forschungsarbeiten konfrontiert werden. *Inquiry* bezeichnet dabei den wissenschaftlichen Denkprozess (Settlage und Southerland, 2007, S. 88). Schwab kritisiert nicht nur die Vernachlässigung des Erkenntnisweges, sondern versucht auch ein passendes Unterrichtskonzept zu entwerfen. Dem/Der LehrerIn kommt dabei die Aufgabe zu, den Weg wissenschaftlichen Arbeitens aufzuzeigen. Dieser Weg besteht nach Ansicht Schwabs aus den drei Hauptkomponenten Fragestellung, Datenerhebung und Ergebnisinterpretation. Im Rahmen des *inquiry learning* sollen sich Schüler und Schülerinnen am Forschungsprozess beteiligen und allmählich das selbstständige wissenschaftliche Arbeiten erlernen. Im Laufe von den vier Stufen (Levels) *structured*

inquiry (Level 0), *guided inquiry* (Level 1 oder 2) und *open inquiry* (Level 3) nehmen die Anweisungen und Hilfestellungen der Lehrperson ab, die Verantwortung und die Eigenständigkeit der Lernenden hingegen zu.

	Source of the Question	Ways to Gather Data	Interpreting Results
Level 0	Given	Given	Given
Level 1	Given	Given	Open
Level 2	Given	Open	Open
Level 3	Open	Open	Open

Tab. 2: Levels of Openness Within the Inquiry Teaching Approach
(Settlage, Southerland, 2007, S. 89)

Während zu Beginn sowohl die Fragen als auch die Methode und die Interpretation der Ergebnisse vorgegeben werden, übernehmen die Lernenden in der letzten Stufe die Entscheidung und Verantwortung für jeden einzelnen Schritt. Die sukzessive Heranführung an das selbstbestimmte und selbstorganisierte forschende Lernen wird auch heute noch als eine der größten Herausforderungen für die Lehrer und Lehrerinnen aufgefasst.

4.3 Forschendes Lernen als Bildungsprinzip

Wie schon erwähnt, entwickelte sich das Konzept des forschenden Lernens nicht aus der schulischen Praxis, sondern entstammt einem hochschuldidaktischen Diskurs. In den Studienreformbewegungen der 1960er Jahre wird das Humboldtsche Postulat der Einheit von Forschung und Lehre zum Leitgedanke vieler ReformerInnen, welche den gegenwärtigen Zustand an den Hochschulen stark kritisieren. Vor allem die bloße Adaption vorliegender Forschungsergebnisse und der Gegensatz von vorherrschenden Lehrverfahren und geforderten Fähigkeiten in Forschungssituationen werden in Frage gestellt (BAK, 1970, S. 9 ff.). Im Jahr 1970 veröffentlicht die Bundesassistentenkonferenz eine Denkschrift zum Thema „Forschendes Lernen – Wissenschaftliches Prüfen“, in der einige Impulse dieser Kritik aufgenommen werden. In dieser Veröffentlichung wird das Konzept des forschenden Lernens erstmals als hochschuldidaktisches Bildungsprinzip festgehalten (Aepkers und Liebig, 2002, S. 73 f.). Forschendes Lernen soll den StudentInnen die Teilnahme an der aktuellen Forschung

ermöglichen – „mit allen Enttäuschungen, Risiken und Langwierigkeiten, die zum Forschen gehören (BAK, 1970, S. 11).“ Dem Begriff des forschenden Lernens wird zwar eine gewisse Spannweite zugeschrieben, er zeichnet sich nach Auffassung der Bundesassistentenkonferenz (1970, S. 14 f.) allerdings durch folgende charakteristische Merkmale aus:

- Der/Die Lernende muss das Thema selbstständig wählen. Es kann ihm/ihr im Laufe eigener Arbeit und Beobachtung zum Anliegen oder sogar durch Beratung oder Diskussion bewusst werden, darf aber nicht von außen vorgegeben werden.
- Die Entscheidung über mögliche Methoden, Versuchsanordnungen, Recherchen usw. muss eigenständig getroffen werden. Der/Die Lernende kann zwar beraten, nicht aber vor Fehlentscheidungen und Umwegen geschützt werden.
- Es gibt sowohl ein unbegrenztes Risiko an Irrtümern und Umwegen als auch die Chance auf Zufallsfunde, sogenannte „fruchtbare Momente“ und unerwartete Nebenergebnisse.
- Die lernende Person muss dem Anspruch der Wissenschaft gerecht werden. Dies impliziert die Notwendigkeit, „(...) den Forschungsansatz mit Ausdauer und logischer Konsequenz bis zu einem (positiven oder negativen) Ergebnis durchzuhalten, die vorhandenen Kenntnisse und Instrumente zur Lösung des Problems in zureichendem Maße zu prüfen (...) usw. (BAK, 1970, S. 14)“.
- Das Ergebnis muss in Bezug auf seine Abhängigkeit von Hypothesen und Methoden geprüft werden.
- Das erreichte Resultat muss so dargestellt werden, dass die Bedeutung klar und der Erkenntnisweg zu ihm nachprüfbar wird.

Das Ziel der Bundesassistentenkonferenz, das Konzept des forschenden Lernens in möglichst vielen Hochschuldisziplinen zu etablieren, bleibt die folgenden Jahre unerreicht. Eine erste Vorstellung darüber, weshalb das Konzept kaum realisiert wird, liefert der Beitrag von Meyer (1970, In: BAK, 1970, S. 35) über die Möglichkeiten forschenden Lernens im Mathematikunterricht. Während die Bundesassistentenkonferenz für ein ständiges Nebeneinander von Forschen und Lernen appelliert, sieht Meyer ein mögliches Vordringen in den Bereich der mathematischen Forschung

ausschließlich in späteren Studienabschnitten. Während die Bundesassistentenkonferenz das Bildungsprinzip für alle Formen des Studiums, auch für überwiegend berufsbezogene wissenschaftliche Ausbildungen formuliert, ist für Meyer „(...) die Anleitung zur Forschung im allgemeinen für die Berufsausbildung derjenigen, die Mathematik studieren, nicht unbedingt nötig (...) (Meyer, In: BAK, 1970, S. 35).“ Möglichkeiten der Konzeptrealisierung werden, im Gegensatz zu anderen Disziplinen, kaum genannt und auch die Sinnhaftigkeit der Umsetzung wird bezweifelt. Die Problematik wird dabei vor allem in der Art und Weise gesehen, wie mathematische Forschung betrieben wird.

„Wesentlich ist, daß sich die mathematische Forschung nicht durch mathematische Methoden vollbringt, die hervorzubringen vielmehr eines ihrer Ziele ist. Ob in der mathematischen Forschung methodisch vorgegangen wird, ist weitgehend unreflektiert. Selbst durch Teilnahme an der Forschung kann wegen der geringen Anzahl von Ergebnissen des einzelnen Forschers nur wenig Einsicht in das Wie der mathematischen Forschung gewonnen werden (Meyer, In: BAK, 1970, S. 35).“

Zwar erfährt das forschende Lernen an Hochschulen heute wieder eine Renaissance, die Stimmen der Gegner werden jedoch gleichzeitig immer lauter (Meyer und Obolenski, 2003, S. 7 f.). Die Teilnahme der Studierenden an Forschungsprojekten wird auf Grund universitärer Massenveranstaltungen als unmöglich angesehen und die Forschungsbeteiligung als unnötige Verlängerung des Studiums erachtet. Zudem wird den Studierenden vorgeworfen, dass sie sich nur auf Pflichtveranstaltungen konzentrieren und ihre Freizeit stärker in die Erwerbs- als in die Forschungstätigkeit investieren. Für Neuweiler (In: Meyer und Obolenski, 2003, S. 19), ehemaliges Mitglied des Wissenschaftsrats und mehrerer hochschulpolitischer Beratungsgremien, ist eine Verbindung von Forschung und Lehre nur im Rahmen einer Zusammenarbeit mit DoktorantInnen möglich. Im gnadenlosen Wettbewerb der heutigen Forschung könne man nur mithalten, wenn man Flexibilität und genügend Drittmittel aufweisen kann und sich nicht durch Lehre ablenken lässt. So wird den Lernenden die Teilnahme an Forschungstätigkeiten verwehrt, der Nachvollzug des Erkenntnisprozesses bleibt aus und es kommt zu einer isolierten und praxisfernen Aneignung fachspezifischer Fertigkeiten und Kenntnisse.

Die angeführten Auffassungen setzen sich der geforderten Einheit von Lehre und Forschung bzw. Lernen und Forschen entgegen und widersprechen Humboldts Ansichten der Besonderheit höherer wissenschaftlicher Anstalten. Demnach sollte die Eigentümlichkeit darin liegen, „(...) dass sie die Wissenschaft immer als ein noch nicht ganz aufgelöstes Problem behandeln und daher immer im Forschen bleiben, da die Schule es nur mit fertigen und abgemachten Kenntnissen zu tun hat und lernt (Herrmann, 2004, S. 9).“ Trotz Implementierungsversuch als Bildungsprinzip und Humboldtschen Grundgedanken konnte sich das Konzept des forschenden Lernens an Hochschulen kaum durchsetzen, allenfalls in kleinen Projekten. Die Chancen einer Realisierung forschenden Lernens, wie es in der Bundesassistentenkonferenz 1970 definiert wurde, scheinen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II gering zu sein. Schließlich konnten die Anforderungen nicht einmal an den Hochschulen erfüllt werden.

5 Forschendes Lernen in der Sekundarstufe I und II – Altes Konzept neu verpackt?

Gerade in Zeiten von PISA und Standards werden die Forderungen nach einer neuen Lehr- und Lernkultur immer lauter. Im Unterricht soll das eigenständige, selbstverantwortliche oder auch das nachhaltige Lernen gefördert werden, wobei den Lehrpersonen die Aufgabe eines Lerncoach zugewiesen wird. Auch im Unterrichtsfach Mathematik tritt die selbstständige, aktive Auseinandersetzung mit den Lerninhalten immer mehr in den Mittelpunkt und Fertigkeiten wie beispielsweise Modellieren, Argumentieren, Interpretieren und Problemlösen werden stärker forciert. Die Tatsache, dass das mathematische Merkwissen bei den SchülerInnen immer noch besser ausgeprägt ist als das Verständnis, und ihre Stärke das korrekte Rechnen, nicht aber das anspruchsvolle Problemlösen oder Argumentieren und Begründen ist (Stern, 2004, S. 16), verdeutlicht die Notwendigkeit einer pädagogisch-didaktischen Umorientierung. Hinter den Forderungen nach neuen, alternativen Lehrmethoden verbirgt sich jedoch die Gefahr, dass konventionelle Unterrichtsangebote einfach neu verpackt und unter einem ruhmreichen Begriff vermarktet werden. Und so drängt sich oftmals der Verdacht auf, dass das „(...) forschende Lernen im schulinstitutionellen Rahmen nur eine pädagogische Begriffshülle darstellt, die sich je nach Bedarf füllen und entleeren lässt (Aepkers und Liebig, 2002, S.75).“ Diese „Begriffshülle“ soll Inhalt des folgenden Kapitels sein. Erst wenn die Bedeutung forschenden Lernens im schulischen Kontext geklärt ist, kann darüber entschieden werden, ob der Begriff für ein neues und eigenständiges, ein altbekanntes und neuverpacktes Konzept oder gar für eine leere Begriffshülle steht.

5.1 Forschendes Lernen in der Literatur zur Fachdidaktik der Mathematik

Im Rahmen meiner Recherchen musste ich feststellen, dass das Angebot an Literatur zum Thema forschendes Lernen in Bezug auf den Mathematikunterricht sehr spärlich ist. Nur wenige AutorInnen widmen sich explizit diesem Konzept und in Lehrbüchern zu Unterrichtsmethoden und fachdidaktischen Zeitschriften wird dem forschenden Lernen kaum Aufmerksamkeit geschenkt. Um die Situation besser darstellen zu können, möchte ich mich auf fünf für den Mathematikunterricht in Österreich relevante Fachzeitschriften der Mathematikdidaktik beziehen.

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft veröffentlicht einmal jährlich eine „Schriftenreihe zur Didaktik der höheren Schulen“, in der die Ausarbeitungen der Vorträge der LehrerInnenfortbildungstagung zu finden sind. Seit dem Jahr 2000 widmete sich keiner der Vorträge explizit dem forschenden Lernen. Das Journal für Mathematik-Didaktik (JMD) ist das offizielle Organ der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik und erscheint zweimal im Jahr. Zwar werden in den Ausgaben grundlegende Aspekte thematisiert, als Beispiel kann die „Förderung selbstständigen Lernens im Mathematikunterricht – Problemfelder bei ko-konstruktiven Lösungsprozessen“ (Blum, Leiß, Messner, 2007, S. 224 – 248) oder die „Lernbegleitung im Mathematik-Unterricht“ (Hess, 2005, S. 224 – 248) herangezogen werden, das forschende Lernen als eigenständiges Konzept wird in den Jahren 2000 bis 2009 jedoch nicht aufgegriffen. Auch bei der Fachzeitschrift „Der Mathematikunterricht“ (MU), welche sechsmal pro Jahr erscheint, werden ausschließlich Teilaspekte thematisiert. Keine der in den letzten zehn Jahren erschienenen Abhandlungen setzt sich mit dem forschenden Lernen auseinander. Weitere Fachzeitschriften, die ich in meine Recherchen miteinbezogen habe, sind „Mathematik lehren“ und „Praxis der Mathematik“ (PM). Auch diese erscheinen in zweimonatigen Abständen und versprechen den Leser und Leserinnen die neuesten Konzepte, Methoden, Aufgaben und Materialien. Von der Idee des forschenden Lernens in der Sekundarstufe I und II ist seit dem Jahr 2000 allerdings ebenfalls wenig zu finden. Einzig die Artikel „Forschen im Mathematikunterricht“ (Albers, Harder, 2001, S. 10 – 14) und „Viel-Eckiges – forschend entdecken“ (Leuders, Ulm, 2007, S. 1 – 9) setzen sich mit dem forschenden Lernen auseinander. In den mehr als 200 Ausgaben der genannten Zeitschriften konnte

ich nur zwei relativ kurze Artikel zum Thema forschenden Lernens ausfindig machen. Bönsch (2008, S. 234 f.), dessen Lehrbuch einen Überblick über die verschiedenen „alternativen Unterrichtsmethoden“ bieten soll, wirft diese Problematik ebenfalls auf. Er stellt fest, dass die „(...) aktuellen schulpädagogischen Handbücher und Lexika kaum etwas zu diesem Thema sagen. Wenn man etwas großzügiger ist, muss man wohl auch das Stichwort „entdeckendes Lernen“ hinzunehmen, um etwas zu finden (Bönsch, 2008, S. 235).“ Betrachtet man nun das weitreichende Begriffs- und Inhaltsfeld forschenden Lernens, zu denen besonders das entdeckende, aber auch das problemorientierte und projektorientierte Lernen gehören, wird eine Gemeinsamkeit klar ersichtlich. All diese Begriffe bilden einen Gegenpol zum rezeptiven Lernen. Grundlegend ist, dass nicht das abgeschlossene sondern das „Offene, Unverstandene, Widersprüchliche, Unklare, (...) zum Ausgang für eigenes Suchen, Forschen, Recherchieren, Experimentieren, Manipulieren, Explorieren (Bönsch, 2008, S. 235)“ wird. Doch was zeichnet das forschende Lernen nun wirklich aus? Welche Besonderheiten bzw. Einzigartigkeiten lassen eine Abgrenzung zu anderen Konzepten zu?

5.2 Die Besonderheiten forschenden Lernens

Im zweiten Kapitel wurde die Problematik der unscharfen Trennung der Begriffe Forschung und forschendes Lernen thematisiert. Da es oftmals zu einer Abwertung und zu einer Modifikation des Sinngehaltes von Forschung kommt, wurde auf eine klare Trennung der beiden Termini Wert gelegt. Nichts desto trotz muss festgehalten werden, dass die beiden Begriffe „(...) aus einer gemeinsamen Quelle schöpfen. Beide werden von der Triebkraft in Gang gesetzt und gehalten, neues Wissen zu generieren, dessen Hervorbringung durch theoretisch und methodisch geleitete Erkenntnisvorgänge gesteuert wird (Wildt, 2009, S. 4)“. Die Analogie forschenden Lernens zum wissenschaftlichen Forschen zeichnet das Konzept aus und ist das bedeutendste Indiz zur Abgrenzung anderer Lehr- und Lernkonzepte. So versteht Messner (2009, S. 23) unter forschendem Lernen beispielsweise alle schulischen Arbeitsformen, die „(...) dem Suchen und Finden von Erkenntnissen dienen, die für die Lernenden neu sind, und in Haltung und Methode analog den Einstellungen und dem

systematischen Vorgehen erfolgen, wie es für wissenschaftliches Arbeiten charakteristisch ist (Messner, 2009, S. 23).“ Man könnte glauben, dass der Leitgedanke forschenden Lernens im schulischen Kontext leicht zu fassen wäre, da nur sehr wenige Publikationen zu dieser Thematik vorliegen. Ganz so einfach gestaltet sich diese Aufgabe jedoch nicht, da die wenigen AutorInnen zum Teil sehr unterschiedliche Schwerpunkte setzen. Nichts desto trotz möchte ich vier Hauptmerkmale anführen, die in Bezug auf das forschende Lernen in der Sekundarstufe I und II allgemein von großer Bedeutung sind.

- Anlass forschenden Lernens bieten Widerstände, Phänomene und Probleme, die herausfordern und die es zu überwinden gilt. Im Idealfall stellen die Schüler und Schülerinnen die Fragen und legen somit die Thematik fest, mit der sie sich auseinandersetzen möchten. Somit kann das eigene Interesse berücksichtigt, die Motivation und gleichzeitig der Lernerfolg gesteigert werden. Die Lernenden analysieren die Problematik, formulieren Fragen und Hypothesen.
- Während Elemente wie Zufall, Glück und Eingebung bei anderen Lernmethoden, wie beispielsweise dem entdeckenden Lernen, eine zentrale Rolle spielen (Winter, 1988, S. 6), steht beim forschenden Lernen ein planmäßiges Vorgehen im Vordergrund. Forschendes Lernen ist kein „blindes trial und error (Bönsch, 2008, S. 236)“, sondern eine auf einen Plan beruhende, reflektierte Vorgehensweise. Mit Hilfe dieses Plans, der von den Schüler und Schülerinnen selbst entworfen wird, soll geklärt werden, über welches Vorwissen sie verfügen, wie etwas untersucht werden kann, wo Informationen gewonnen werden können oder wo mögliche ExpertInnen zu finden sind.
- Die nachfolgenden Aufgaben und Untersuchungen, die in Gruppen- Partner- oder Einzelarbeit durchgeführt werden können, gründen auf diesem, gemeinsam entworfenen Plan. Im Gegensatz zum entdeckenden Lernen, wo sich Ziele ständig ändern können, zum Teil sogar überhaupt nicht vorgegeben sind (Winter, 1988, S. 6), wird beim forschenden Lernen ein klares Ziel verfolgt: Die eigenständige Beantwortung der anfangs gestellten Frage.
- Dabei müssen alle Behauptungen geprüft und für andere durchschaubar gemacht werden (Messner, 2009, S. 22) und die Ergebnisse und

Lösungsvorschläge vertreten, aber auch kritisch interpretiert werden (Bastian, 1991, S. 11).

Der Einfluss der Wissenschaft und deren Ansprüche machen sich in vielen dieser Anforderungen bemerkbar. Diese stellen zum Teil eine große Herausforderung für Schüler und Schülerinnen der Sekundarstufe I und II dar. Auch Bönsch (2008, S. 236) erkennt hier einen hohen Anspruch, da grundlegende Schritte, wie beispielsweise die Erstellung eines Planes, das reflektierte Vorgehen oder die Konstatierung und Prüfung der Ergebnisse nicht fehlen dürfen, wenn es sich um forschendes Lernen handeln soll. Die beschriebenen Grundideen eröffnen zwar einen Blick in die wichtigsten Annahmen und Voraussetzungen forschenden Lernens, für die Realisierung in der Sekundarstufe I und II stellen sie jedoch meist nur eine Orientierungshilfe dar.

6 Forschendes Lernen als Lehrmethode

Im Laufe der Zeit wird die Grundidee forschenden Lernens, dieses pädagogisch-didaktische Gerüst, ausgearbeitet und es entstehen zum Teil profunde Lern- bzw. Lehrmethoden. Die einzelnen Elemente der Grundidee werden herausgearbeitet, detaillierte Unterrichtsabläufe und SchülerInnenaktivitäten beschrieben und Konzepte und Beispiele für die unterschiedlichsten Fächer entworfen. Dabei rücken zum Teil die SchülerInnen und deren Lernprozesse in den Fokus, sodass von einer Lernmethode gesprochen werden kann. Wird forschendes Lernen jedoch aus der Perspektive der Lehrpersonen und deren Handlungen oder dem Unterrichtsablauf betrachtet, tritt an die Stelle des Lernens das Lehren.

Insbesondere in den frühen Werken steht das forschende Lernen als Lehrmethode im Vordergrund. Das Augenmerk richtet sich dabei auf die Planung, Vorbereitung und Strukturierung des Unterrichts.

„Diese Struktur erlaubt dem Anfänger als auch dem erfahrenen Lehrer jederzeit den Stand des Unterrichtsfortgangs zu erkennen und handelnd zu beeinflussen. Der Lehrende kann sicher steuernd und regelnd in den Unterricht eingreifen, falls dies erforderlich oder erwünscht wird (Lindemann und Schmidkunz, 1992, S. 11).“

6.1 Das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren

In den ersten Publikationen stehen vor allem Arbeitsphasen im Vordergrund, welche den forschenden Unterricht charakterisieren und gliedern sollen. Fries und Rosenberger (1976) versuchen das Verfahren für die mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer darzustellen. Ihr Ziel ist es, die Struktur der Fächer aufzuzeigen und das mathematisch-naturwissenschaftliche Denken nachvollziehbar zu machen. Die schematische Darstellung von Fries und Rosenberger gründet auf der Abfolge einzelner Stufen und Phasen, welche die einzelnen Schritte in der Erkenntnisgewinnung darstellen sollen. Nach Fries und Rosenberger steht in der Mathematik das deduktive, vor allem aber das induktive Vorgehen bei der Gewinnung neuer Erkenntnisse im Vordergrund. In Zusammenhang mit Schule und Unterricht verweisen die beiden jedoch auf die generalisierende Induktion. Dabei tritt an die Stelle des Beweises die Wiederholung und Betrachtung weiterer Fälle, wodurch der Wahrscheinlichkeitsgrad der Aussage erhöht wird. „Wir bedienen uns also im mathematischen Unterricht (...) vorwiegend der Methode der empirischen Wissenschaften. Auf Grund von „Experimenten“ wird den ungeprüften Fällen eine Eigenschaft zugeschrieben, die sich bei den geprüften ausnahmslos bewährt hat (Fries und Rosenberger, 1976, S. 16).“ Man darf an dieser Stelle jedoch nicht vergessen, dass Schüler und Schülerinnen im Mathematikunterricht oft zum Übergeneralisieren neigen (Hanisch G., 2010, S. 45). Hanisch verweist in diesem Zusammenhang beispielhaft auf die falsche Übertragung der Eigenschaften natürlicher Zahlen auf ganze, rationale, reelle oder komplexe Zahlen. Zudem sollten auch im Rahmen forschenden Lernens die Arbeitsweisen der Mathematik widerspiegelt werden, der Umgang mit Behauptungen oder Feststellungen ist dabei ein besonderes Charakteristikum. „Gründen sich nämlich in anderen Gebieten Theorien auf Erfahrungen oder Lehrmeinungen, Beobachtungen oder Wahrscheinlichkeiten, so gilt in der Mathematik eine Behauptung nur dann als richtig, wenn man sie „beweisen“ kann, wenn ihre Richtigkeit also mit Hilfe eines mathematischen Beweises nachweisbar ist (Meinel und Mundhenk, 2009, S. 58)“. Werden Feststellungen nun, wie von Fries und Rosenberger angeführt, durch einen hohen Wahrscheinlichkeitsgrad begründet, widerspricht dies der Mathematik als „beweisende Disziplin“ (Heinze u.a.,

2009, In: Journal für Mathematik-Didaktik). Den Schüler und Schülerinnen kann ein falsches Bild von der mathematischen Wissenschaft vermittelt werden.

Fries und Rosenberger gehen von Denkstufen und Denkphasen aus, welche die unterschiedlichen Arbeitsschritte der SchülerInnen kennzeichnen. Grundsätzlich ist der gesamte „Forschungsverlauf“ in drei Arbeitsabschnitte (A, B, C) geteilt, wobei die Schüler und Schülerinnen gewisse Denkphasen durchlaufen und allmählich verschiedene Denkstufen erreichen. Der erste Abschnitt (A) beinhaltet die Denkstufe der *Problemgewinnung (1.)*, welche sich in die drei Denkphasen *Problemgrund (1a.)*, *Problemfindung (1b.)* und *Problemerkennntnis (1c.)* gliedert. Der Problemgrund ist ein problemhaltiger Sachverhalt, der sowohl von den SchülerInnen als auch von der Lehrperson vorgegeben werden kann und Ausgangspunkt weiterer Überlegungen ist. In der Phase der Problemfindung sollen darauf aufbauend Fragen formuliert werden. Zu unterscheiden ist hier die Problemstellung, bei der die Lehrperson die Fragen formuliert, von der Problemfindung, bei der die Schüler und Schülerinnen diese Aufgabe übernehmen. In der Phase der Problemerkennntnis soll das Problem bzw. die Fragestellung möglichst präzise formuliert werden. Ziel ist, die mathematische Aufgabe in „durchsichtiger, kristallklarer Weise (Fries und Rosenberger, 1976, S. 26)“ darzustellen. Dabei muss die Aufgabe oftmals aus ihrem lebensweltlichen Kontext herausgeschält werden. Die nachfolgende Denkstufe kann erst dann erreicht werden, wenn alle Schüler und Schülerinnen die Fragestellung verstanden haben. Ein solcher Anspruch widerspricht dem Konzept forschenden Lernens, das sich an den individuellen Stärken und Schwächen der SchülerInnen orientiert und ein „Arbeiten im Gleichschritt“ strikt ablehnt. Zudem können die Schüler und Schülerinnen zwar mit Hilfe von Impulsen zum forschenden Lernen angeregt werden, die Fragen sollten jedoch nicht von außen vorgegeben werden. Die *Problemlösung (2.)* bildet die zweite Denkstufe und ist ebenfalls Teil des ersten Arbeitsabschnittes (A). Die Phasen *Überlegungen (2a.)*, *Planung (2b.)*, *Durchführung (2c.)* und *Diskussion (2d.)* gliedern diese Denkstufe. Während in der ersten Phase Lösungsvorschläge gesammelt werden, geht es in der zweiten darum, die erforderlichen Materialien bzw. Arbeitsweisen ausfindig zu machen und sich für eine passende Sozialform zu entscheiden. Auch die Entscheidung, ob alle oder nur ganz bestimmte Vorschläge aufgegriffen werden, muss im Rahmen dieser Phase getroffen werden. Ziel ist es, jene Schritte zu planen, die für

die Realisierung der Lösungsvorschläge von Bedeutung sind. Können bei der Durchführung vorangehende Annahmen verifiziert werden, kann die Problemlösung zum Abschluss gebracht werden. Andernfalls muss eine Fehlersuche einsetzen und, bei gegebenem Fall, eine oder mehrere Phasen wiederholt werden. Den Abschluss des ersten Arbeitsabschnittes bildet eine Diskussion, in deren Mittelpunkt beispielsweise die Tragweite der Ergebnisse, die überwundenen Schwierigkeiten und die möglichen Fehlerquellen stehen. Der Weg der Erkenntnisgewinnung soll rekonstruiert und vertieft werden, sodass die Schüler und Schülerinnen „in zunehmendem Maße mit der Methode mathematischer und naturwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung vertraut gemacht werden (Fries und Rosenberger, 1976, S. 36)“. In den Arbeitsabschnitten B und C sollen die gewonnenen Erkenntnisse eingeübt und gefestigt werden. Eine Weiterentwicklung erfährt das von Fries und Rosenberger entwickelte Struktur-Modell durch Lindemann und Schmidkunz (1992). Diese ergänzen die Strukturierung, wodurch der Unterrichtsablauf in fünf Denkstufen, fünfzehn Denkphasen und mehrere Unterphasen gegliedert wird.

Denkstufe		Denkphase		Denkphase	
1.	Problemgewinnung	1a.	Problemgrund		
		1b.	Problemerkennung		
		1c.	Problemerkennung		
2.	Überlegungen zur Problemlösung	2a.	Analyse des Problems	2a ₁	Bereitstellung des Vorwissens
		2b.	Lösungsvorschläge	2a ₂	Hypothesenbildung zur Problemlösung
		2c.	Entscheidung für einen Lösungsvorschlag		
3.	Durchführung eines Lösevorschlags	3a.	Planung des experimentellen Lösevorhabens	3a ₁	Festlegung der Sozialform
		3b.	Praktische Durchführung des Lösevorhabens	3a ₂	Planung und Vorbereitung des experimentellen Ablaufs
		3c.	Diskussion der Ergebnisse		
4.	Abstraktion der gewonnenen Erkenntnisse	4a.	Ikonische Abstraktion		
		4b.	Verbale Abstraktion		
		4c.	Symbolhafte Abstraktion		
5.	Wissenssicherung	5a.	Anwendungsbeispiele		
		5b.	Wiederholung		
		5c.	Lernzielkontrolle		

Tab. 3: Die Struktur des forschend-entwickelnden Unterrichtsverfahrens
(Lindemann, Schmidkunz, 1992, S. 37)

Die Strukturierung soll den Lehrpersonen die Überschaubarkeit und Orientierung im Unterrichtsverlauf erleichtern. Ein weiterer Vorteil liegt in der Möglichkeit den Unterricht auf Grund der noch detaillierteren Phasen- und Stufeneinteilung genau planen und vorbereiten zu können (Lindemann und Schmidkunz, 1992).

Sowohl Fries und Rosenberg als auch Lindemann und Schmidkunz machen deutlich, dass die beschriebenen Modelle nur als Orientierungshilfen anzusehen sind. Trotzdem wird das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren fast ausschließlich durch die aufeinanderfolgenden Abschnitte charakterisiert. So widmen Fries und Rosenberg beispielsweise beinahe den gesamten theoretischen Teil ihres Buches der Strukturanalyse des forschend-entwickelnden Unterrichts, Lindemann und Schmidkunz bezeichnen die Strukturierung des Lehr- und Lernprozesses als Charakteristik dieses Unterrichtsverfahrens. Eine „(...) didaktisch konzipierte Strategie, Unterrichtsziele zu problematisieren, im Unterrichtsprozeß Probleme zu erkennen und deren Lösung (...) anzustreben (Lindemann und Schmidkunz, 1992, S. 21)“. Eine Strategie, die den LehrerInnen helfen soll, forschendes Lernen im Schulalltag praktizierbar zu machen. Die Gefahr liegt dabei darin, dass sich LehrerInnen dieses idealisierten Verlaufsplans bedienen, in der Hoffnung *ihre* Unterrichtsziele erreichen zu können. Durch den Versuch einen möglichst identischen Unterrichtsablauf zu gestalten, können SchülerInnenaktivitäten eingegrenzt und individuelle Denkprozesse verhindert werden.

„Eine Methode (...), die sich anschickt Vorgänge des Lehrens und Lernens bis ins letzte Detail durchzustrukturieren, unterliegt dem verhängnisvollen Irrtum, als sei die Vermittlung von Wissen allein eine Frage der präzisen und optimalen didaktischen Planung; sie übersieht, daß sie die Empfänglichkeit und innere Bereitschaft zur Aufnahme des Wissens nicht herbeizwingen kann (Bastian, 1991, S. 9).“

Zwar werden die Überlegungen von Fries und Rosenberger bzw. Lindemann und Schmidkunz oft als Grundlage forschenden Lernens in den naturwissenschaftlichen Fächern herangezogen, das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren widerspricht mit seiner strikten Verlaufsplanung, seiner LehrerInnenorientierung und den angeführten Aufgabenformaten (vgl. Praktischer Teil in Fries und Rosenberger, 1976, S.

69 – 104) jedoch grundlegend dem Konzept forschenden Lernens im Mathematikunterricht.

6.2 Die Phasen forschenden Lernens

Im Laufe der Zeit tritt die Strukturierung immer mehr in den Hintergrund und an die Stelle von Stufen treten Situationen, die im Erkenntnisprozess durchlaufen werden. Nicht der Methodenplan, an dem sich der/die LehrerIn orientieren kann, steht im Mittelpunkt, sondern die Aktivitäten der Schüler und Schülerinnen. So geben Aepkers und Liebig (2002) mit den fünf bedeutenden Phasen forschenden Lernens (a) Der Entwurf eines Forschungsplans, (b) die Prüfung und Auswahl der Methoden, (c) die Durchführung der Untersuchung/des Experiments, (d) der Auswertungsversuch und (e) die Prozessdokumentation, nur einen vagen Anhaltspunkt und halten fest, dass sie wohl jene Lehrer und Lehrerinnen enttäuschen, die sich einen „ausgeklügelten Verlaufs- und Methodenplan (Aepkers und Liebig, 2002 , S. 87)“ erhofften. Bönsch (2008) verzichtet in seinem Methodenbuch sogar vollständig auf die Strukturierung des Unterrichtsverlaufes. Der Ablauf forschenden Lernens kann niemals vorhergesagt oder geplant werden. Sind Ergebnisse fehlerhaft oder unzureichend, kann es sein, dass ein Arbeitsschritt oder mehrere vorangegangene Phasen wiederholt werden. Es besteht auch durchaus die Möglichkeit, dass sich gewisse Probleme, Fragen oder Aufgaben als zu anspruchsvoll oder die Inhalte als unpassend erweisen, sodass in einer bestimmten Arbeitsphase abgebrochen werden muss. Auf Grund dessen ist die Gliederung forschenden Lernens in starre Strukturen und linear ablaufende Phasen vergebens. Deshalb wird eine Gliederung wie beim forschend-entwickelnden Unterricht nach Fries und Rosenberger bzw. Lindemann und Schmidkunz nicht mehr in Betracht gezogen, ein möglicher Ablauf wird nur mehr angedeutet.

Ulm (2009, In: Messner, 2009, S. 91 f.) beschäftigt sich mit dem forschenden Lernen im Mathematikunterricht und gliedert den Prozess forschenden Lernens grob in sechs Phasen:

1. In der ersten Phase werden die Lernenden mit einem, ihnen unbekannten, mathematischen Phänomen konfrontiert.
2. Die zweite Phase dient der Erkundung des Themenfeldes, in welches das Ausgangsphänomen eingeordnet werden kann.
3. Die neu gewonnenen Wissens Elemente werden in der dritten Phase in das bereits vorhandene, individuelle Wissensnetz eingeordnet.
4. In der vierten Phase wird Neues und Bekanntes miteinander verbunden. Mathematische Muster und Zusammenhänge kommen dabei zum Vorschein.
5. Die Ergebnisse werden in der fünften Phase niedergeschrieben, wobei eine weitere Strukturierung stattfindet.
6. Die letzte Phase dient der Präsentation, Publikation und Diskussion der erarbeiteten Ergebnisse. Das gemeinsame Wissen wird erweitert und eine Qualitätskontrolle findet statt.

Zudem wird der Verlauf forschenden Lernens zum Teil mit Hilfe einer kreisförmigen Abfolge veranschaulicht, die als Orientierungshilfe dienen soll. Hier wird vor allem die Tatsache, dass gewisse Phasen wiederholt werden und der Lernprozess teilweise von vorne beginnen kann bzw. muss, veranschaulicht.

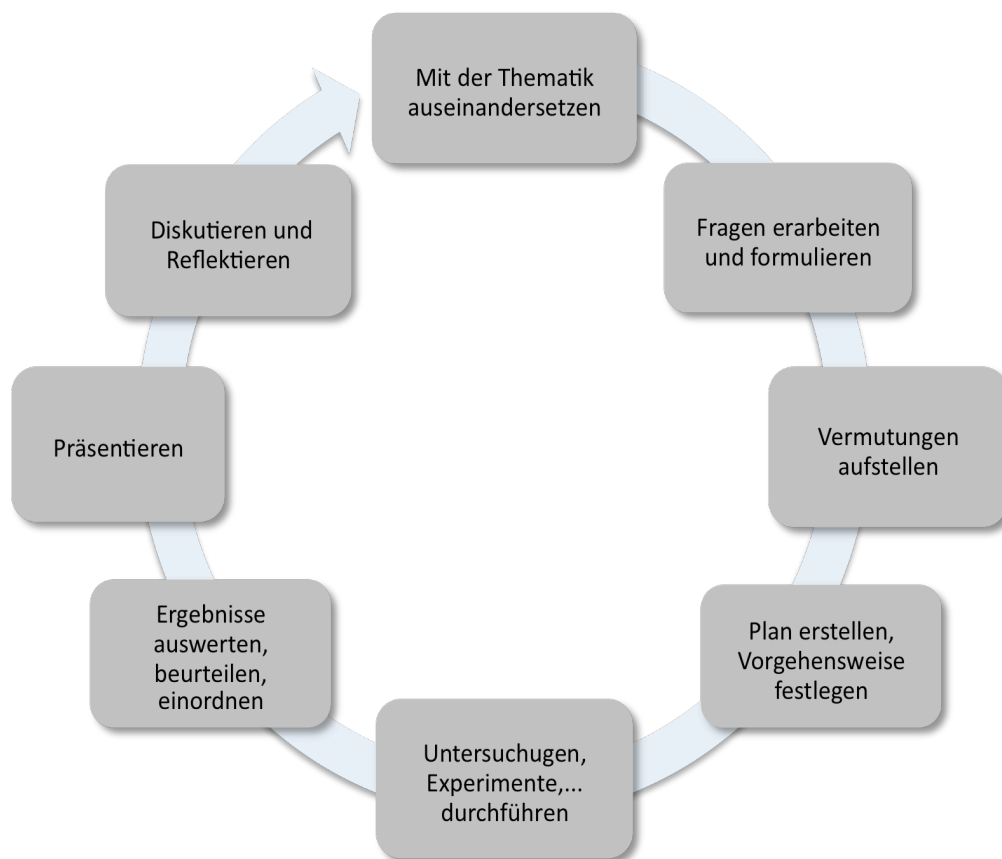


Abb. 1: Der Prozess forschenden Lernens - Aufgegliedert in acht Arbeitsschritte (Villotti, 2010)

Das in Abbildung 1 dargestellte Modell orientiert sich an den Vorschlägen von Parchmann (In: Messner, 2009, S. 81), Steiner (In: Bastian, 1991, S. 39), Bönsch (Methodenbuch, 2008, S. 235 f.) und Bell (Methodenbuch, 2006, S. 3). Die Anregungen von Parchmann (Chemie) und Bell (Physik) beziehen sich auf den naturwissenschaftlichen Unterrichtsgang, während Steiner den Fokus auf den Philosophieunterricht richtet. Aus den genannten Vorschlägen zum Unterrichtsablauf forschenden Lernens wurden die wesentlichen Aktivitäten herausgelöst und in Abbildung 1 dargestellt. Die Tatsache, dass dieses Modell auf Anregungen unterschiedlichster Fächer beruht, deutet einerseits auf den Mangel an Publikation im Bereich Mathematik-Didaktik hin, führt andererseits aber auch zu der Frage, inwieweit diese Aktivitäten auf den Mathematikunterricht übertragen werden können. Im Zuge

dieser Diplomarbeit soll immer wieder auf diesen Zyklus bzw. auf die Phasen Bezug genommen werden. Dabei steht die Bedeutung und Umsetzbarkeit der einzelnen Schritte im Mathematikunterricht im Mittelpunkt. Zudem wird dieses Modell im Laufe der Diplomarbeit noch einmal aufgegriffen und erfährt auf der Basis gewonnener Erkenntnisse eine Überarbeitung und Erweiterung.

7 Forschendes Lernen als Lernmethode

Forschendes Lernen als Lernmethode stellt die Schüler und SchülerInnen in den Mittelpunkt der Betrachtungen und nimmt sie als neugierige junge Menschen wahr. Die AutorInnen, welche dieser Lernmethode den Vorrang einräumen, befürworten eine konstruktivistische Auffassung von Lehren und Lernen und begreifen forschendes Lernen als selbstgesteuerten, individuellen, situativen, sozialen und aktiven Prozess. Vor allem in den jüngeren Publikationen, wie beispielsweise von Aepkers und Liebig (2002), Bönsch (2008) oder Messner (2009) wird das Konzept forschenden Lernens nicht aus der Perspektive der Lehrenden, sondern aus der Sicht der Lernenden betrachtet. Dass ein solcher Standpunkt nur zu befürworten ist, sei hier unbestritten. Dies soll jedoch nicht über die Problematik hinwegtäuschen, dass eine solche Auffassung ein Sortiment an sehr weitreichenden, diffusen Begriffen mit sich bringt. In diesem Kapitel sollen die für das forschende Lernen richtungsweisenden Termini Selbststeuerung und Individualisierung erörtert werden. Dabei steht der Versuch, forschendes Lernen in dem weitreichenden Bedeutungsfeld der Begriffe zu verorten, im Vordergrund. Zudem soll die Relevanz der Aktivität und der sozialen Einbettung beim Lernprozess diskutiert werden. Forschendes Lernen als Initiator eines individuellen, selbstgesteuerten, sozialen und aktiven Prozesses, ist zwar in allen Unterrichtsgegenständen anzustreben und zu diskutieren, die folgenden Erläuterungen, Abbildungen und Beispiele beziehen sich jedoch hauptsächlich auf den Mathematikunterricht.

7.1 Ein selbstgesteuerter Prozess

Forschendes Lernen beruht auf der Annahme, dass ein verständnisorientiertes Lernen nur durch Selbststeuerung der Lernenden erreicht werden kann und keinesfalls angeleitet und fremdgesteuert sein darf. Selbststeuerung zeichnet sich dadurch aus, dass die Schüler und Schülerinnen wesentlich am Entscheidungsprozess beteiligt sind und selbst festlegen, ob, was, wie, wann und warum sie lernen (Weinert, In: Hußmann, 2003, S. 15). Es handelt sich um ein selbsttätiges, selbstorganisiertes, selbstbestimmtes Vorgehen, das im Mathematikunterricht in den unterschiedlichsten Ausprägungen anzutreffen ist. Hußmann (2003, S. 15 ff.) gliedert deshalb das selbstgesteuerte Lernen in drei Progressionsstufen. Die aktive Auseinandersetzung mit einer Aufgabe, die von außen vorgegeben wird, bildet die erste Stufe und wird durch die Selbsttätigkeit gekennzeichnet. Bei der zweiten Stufe steht die Organisation des Lernprozesses im Mittelpunkt. Die äußere Struktur und ein grobes Ziel sind zwar vorgegeben, die Gliederung in Teilschritte, deren Anordnung und die inhaltliche Füllung ist jedoch die Aufgabe der Lernenden. Das Erstellen eines Arbeitsplanes, die Auswahl der Methode usw. überträgt den SchülerInnen mehr Verantwortung. Die letzte Progressionsstufe ist durch die Selbstbestimmtheit gekennzeichnet und wird von Hußmann als Idealform des Lernens bezeichnet. Dabei rückt nicht nur die Organisation des Lernprozesses, sondern auch das eigene Lernprodukt in die Verantwortung der Schüler und Schülerinnen.

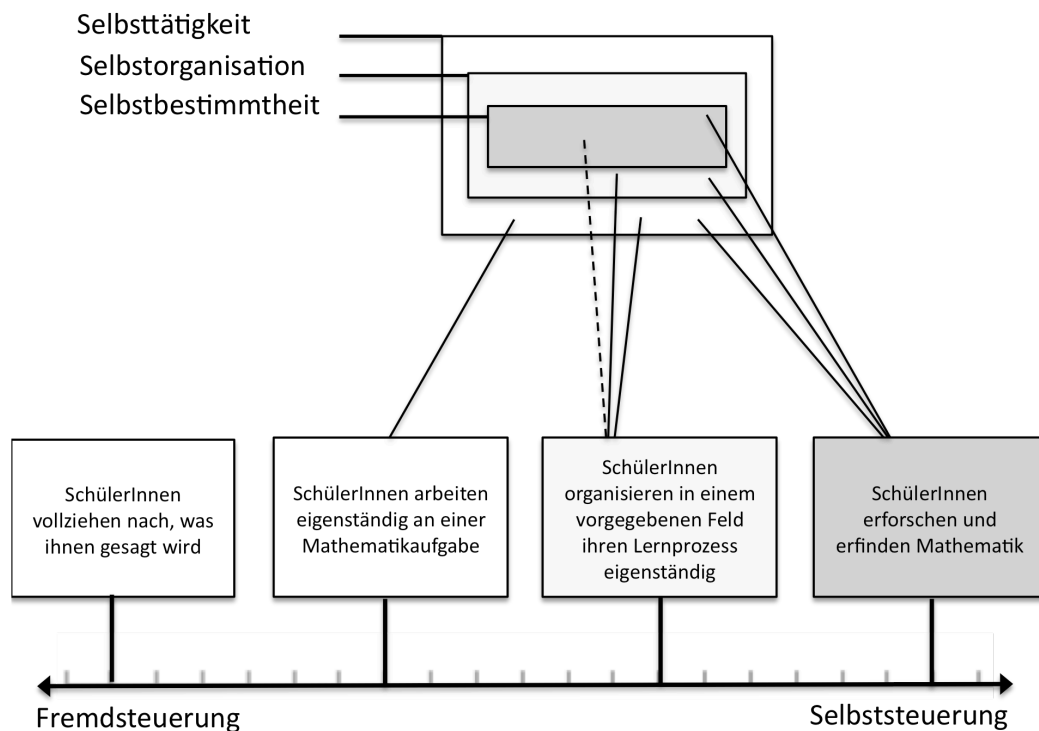


Abb. 2: Die Stufen von Selbststeuerung (In Anlehnung an Hußmann, 2003, S. 16)

Forschendes Lernen kann auf der Skala bei der Selbststeuerung eingeordnet werden, wo das „Erforschen und Erfinden der Mathematik“ durch die SchülerInnen im Vordergrund steht. Selbsttätigkeit, Selbstorganisation und Selbstbestimmtheit sind grundlegende Aspekte forschenden Lernens, sodass es auf der höchsten aller Progressionsstufen anzusiedeln ist. Hier wird von der idealisierten Form forschenden Lernens gesprochen, die von der Idee einer selbstbestimmten Zielformulierung durch die SchülerInnen getragen wird. Hußmann betont jedoch zu Recht, dass die Stufe des idealen Lernens im Mathematikunterricht nur selten erreicht werden kann. Die zeitliche, räumliche und thematische Bindung und die Diskrepanz zwischen extrinsischer und intrinsischer Ziele hemmen ein Lernen auf höchstem Niveau. So findet forschendes Lernen in der Mathematik oft im Spannungsfeld zwischen fremdgesteuertem und selbstgesteuertem Lernen statt und kann eher der zweiten Stufe zugeordnet werden. Äußere Strukturen werden im Sinne von Impulsen bzw. Aufgaben vorgegeben, sodass eine inhaltliche Bindung entsteht. Die Schüler und Schülerinnen können sich zwar in einem thematischen Feld frei bewegen (individuelle

Fragen formulieren und bearbeiten) und ihren Lernprozess eigenständig organisieren, die Selbstbestimmtheit wird jedoch dezimiert.

7.2 Ein individueller Prozess

Nicht nur im Rahmen forschenden Lernens wird die Bedeutung individueller Lernprozesse betont, auch die neuesten Erkenntnisse der Hirnforschung, mit denen sich Hanisch und Sattlberger (1998, S. 45) auseinandergesetzt und daraus mathematisch-didaktische Konsequenzen abgeleitet haben, weisen auf die Bedeutung von Lernsituationen hin, die individuelle Lernverfahren unterstützen. Der Mathematikunterricht soll den Lernenden unterschiedliche, individuell bedeutsame Zugänge und ein Arbeiten auf unterschiedlichem Niveau ermöglichen. Die *geschlossene Differenzierung*, bei der die Lehrperson für jedes Klassenmitglied ein geeignetes Arbeitsmaterial zur Verfügung stellt, tritt auf Grund des Aufwandes und der Bedenken gegenüber der Diagnosesicherheit der Lehrpersonen immer mehr in den Hintergrund. Die Aufmerksamkeit gilt der *offenen Differenzierung*, auch natürliche Differenzierung oder Selbstdifferenzierung genannt, bei der die Verantwortung für ein angemessenes Niveau auf die SchülerInnen übertragen wird (Hußmann, Prediger, 2007, S. 1 ff.). Mit Hilfe offener Mathematikaufgaben, die mehrere Lösungswege zulassen und Arbeitsaufgaben mit unterschiedlichem Kompliziertheitsgrad, wird versucht ein Arbeiten auf unterschiedlichem Niveau zu ermöglichen und den SchülerInnen ein differenziertes Angebot zur Verfügung zu stellen. Hußmann und Prediger (2007, S. 3) führen als Beispiel die folgende Aufgabe an:

<u>Finde lineare Gleichungssysteme mit den Lösungen (2/3).</u>	
Gestufte Impulse:	
- Suche eine Möglichkeit.	- Suche mehrere Möglichkeiten.
- Suche alle Möglichkeiten.	- Wie kannst du dir sicher sein, dass du alle Möglichkeiten gefunden hast?

Abb. 3: Differenzierende Impulse für offene Aufgaben
(Hußmann, Prediger, 2007, S.3)

Aufgaben wie diese, bei denen eine Stufung nach Schwierigkeitsgrad vorgenommen wird, oder auch Zusatzaufgaben für leistungsstarke und schnelle SchülerInnen gehören meist zum Repertoire jener LehrerInnen, die sich mit dem Thema Individualisierung und Differenzierung im Mathematikunterricht beschäftigen. Der große Unterschied beim forschenden Lernen liegt darin, dass der Ausgangspunkt der Differenzierung nicht nur beim Schwierigkeitsgrad liegt, sondern sehr stark in der Auflösung der gleichen Lerninhalte und -ziele gründet. Da sich die Lernenden den individuellen Fragen widmen, kommt es zu einer stärkeren Differenzierung als bei Aufgaben, die gewisse Fragestellungen vorgeben. Eine Gefahr besteht bestimmt darin, dass sich die SchülerInnen jenen Sachverhalten zuwenden, denen sie ein Interesse entgegenbringen, unabhängig davon, ob sie sich dabei auf einem angemessenen Niveau bewegen oder nicht. Oft ist es gerade auch bei lebensweltlichen Kontexten oder bildhaften Impulsen, wie sie beim forschenden Lernen oft verwendet werden, für Kinder und Jugendliche schwer abzuschätzen, hinter welchen Fragen sich welche mathematischen Leistungsanforderungen verbergen. Betrachtet man die Einteilung von Hußmann und Prediger (2007, S. 7), so werden im Rahmen forschenden Lernens, ausgehend von der Auflösung der gleichen Lerninhalte, beinahe alle Ansatzpunkte zur Differenzierung genutzt.

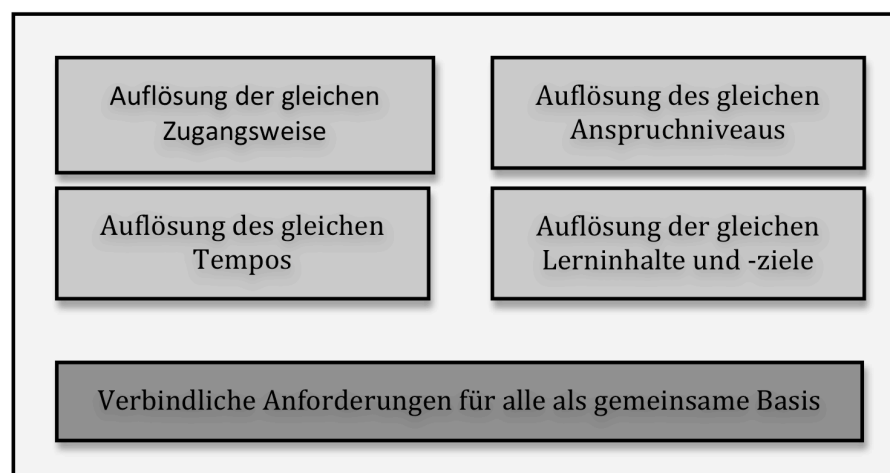


Abb. 4: Ansatzpunkte zur Auflösung des Gleichschritts in unterschiedlichen Lernsituationen (Hußmann, Prediger, 2007, S. 7)

Die Zugangsweise ist jedoch auch beim forschenden Lernen meist vorgegeben. Ein Impuls, ein Anstoß, der die SchülerInnen animieren und ein epistemisches Verhalten in einem vorgegebenen Raum veranlassen soll.

7.3 Ein sozialer Prozess

Lernen ist zwar ein individueller Vorgang, er wird jedoch von den sozialen Rahmenbedingung, von den MitschülerInnen bzw. den LehrerInnen und dem schulischen Bedingungen stark beeinflusst. Diese Tatsache wird im Rahmen forschenden Lernens berücksichtigt und versucht produktiv zu nutzen (Ulm, In: Messner 2009, S. 94). Gruppen- bzw. Partnerarbeiten sind zwar nicht unabdingbar, der Kommunikation und Interaktion mit anderen Lernenden wird beim forschenden Lernen im Mathematikunterricht jedoch eine große Bedeutung zugeschrieben. Beim Austausch von Ideen und Ansätzen zwischen den SchülerInnen kommt es zur wechselseitigen Unterstützung bei der Konstruktion von Lösungen („Ko-Konstruktion“), wodurch die Qualität der Aufgabenbearbeitung im Mathematikunterricht gesteigert wird (Blum, Leiß, Messner, In: Journal für Mathematik-Didaktik, 2007, S. 226). Bei der Offenlegung der eigenen Gedanken gegenüber anderen Lernenden werden Verständnisprobleme schneller deutlich und können in der Kommunikation leichter korrigiert werden. Beim forschenden Lernen „(...) können die Aktivitäten des Erkundens, Probierens, Experimentierens, Recherchierens, Manipulierens, des Explorierens, des Erhebens allein, in Gruppen, gemeinsam oder arbeitsteilig durchgeführt werden (Bönsch, 2008, S. 236)“. Im Sinne der Selbsttätigkeit, Selbststeuerung und Selbstbestimmtheit obliegt die Sozialform somit den Lernenden. Dass eine Beschränkung auf die eigenen Erfahrungen und Ansichten zum Teil schnell zum Stillstand des Lernprozesses führen kann, sollte den SchülerInnen und LehrerInnen jedoch bewusst sein. Soziales, kooperatives Lernen ist ein Erziehungs- und Allgemeinbildungsauftrag der Schule und richtet sich an alle Unterrichtsfächer. Die Kooperationsfähigkeit und soziale Verantwortung der SchülerInnen muss deshalb auch ein Anliegen des Mathematikunterrichts sein. Zudem kann ein angemessenes Bild von Mathematik im Unterricht nur dann vermittelt werden, wenn das Entstehen mathematischer Zusammenhänge nicht einzelnen

MathematikerInnen zugeschrieben wird, die an ihrem Schreibtisch mathematische Phänomene ableiten und beweisen. Mathematik ist vielmehr ein sozialer Prozess, der vom quasi-empirischen Vorgehen geprägt ist. Begriffe, Ideen und Konstruktionen kommen durch Vermutungen und Überprüfungen zu Stande und entwickeln sich in diesem Wechselspiel weiter (Leuders, 2006, S. 3 f.).

„Eine wichtige Rolle spielt dabei die Kommunikation und Kooperation zwischen Menschen. Ob sich ein Begriff durchsetzt, hängt auch davon ab, ob er in der Kommunität der Mathematiker überzeugen kann. Dieser Prozess ist charakterisiert durch eine zunehmende Präzisierung der mathematischen Begriffe, wodurch die Gefahr von Missverständnissen vermindert und die Grundlage für eine soziale Konsensfindung gebildet wird (Leuders, 2006, S. 4).“

Zwar wird mit dem Konzept des forschenden Lernens eine Verbesserung der Rahmenbedingungen für soziales, ko-konstruktives Lernen angestrebt, die Problematik der Selbstorganisation muss an dieser Stelle jedoch angesprochen werden. Die freie Wahl der Sozialform und der ArbeitspartnerInnen kann zu unvorteilhaften Gruppenbildungen, zur Trennung von leistungsstarken und leistungsschwachen bzw. zum Ausschluss gewisser SchülerInnen führen. Weitere Problemfelder ko-konstruktiver Lernprozesse werden von Blum, Leiß und Messner (In: Journal für Mathematik-Didaktik, 2007, S. 224 – 248) angesprochen. In all diesen Fällen kommt der Lehrperson die schwierige Aufgabe zu, eine Balance zwischen Selbst- und Fremdbestimmung herzustellen.

7.4 Ein aktiver Prozess

Begriffe wie Handlungsorientierung, Anwendungsorientierung, aktives Lernen oder auch Slogans wie „Learning by Doing“ werden im Zusammenhang mit forschendem Lernen oftmals aufgegriffen und erleben sowohl beim forschenden Lernen, als auch allgemein im Mathematikunterricht eine Blütezeit. Es sollte jedoch nicht die Position vertreten werden, dass Handeln per se gut ist, da unreflektierte, unstrukturierte, unverständene oder aufgezwungene Aktivitäten nicht den Anforderungen forschenden Lernens genügen. Auch Aepkers und Liebig (2002, S. 77) deuten darauf hin, dass besonders mit jüngeren SchülerInnen oftmals „um des Forschens willen geforscht“

wird, was zu unreflektiertem Aktionismus führt. Doch was für eine Handlung ist im Sinne forschenden Lernens anzustreben? Meyer und Jank unterscheiden zwischen einem deskriptiv-analytischen und einem präskriptiven Begriffsverständnis von Handeln. Während ersteres jedes zweckgerichtete Tun bezeichnet, wozu auch die vorsätzliche Unterlassung einer Aktion gehört, liegt einem präskriptiven Begriffsverständnis eine politisch und pädagogisch verantwortbare Praxis unterrichtlichen Handelns zu Grunde. „Es ist nicht damit getan, daß die Schüler durch die Klasse wuseln und am Stundenende glücklich und erschöpft sind. Es muß auch etwas Vernünftiges dabei herauskommen (Jank und Meyer, 1991, S. 353)“. Ein aktives und zielgerichtetes Lernen, das die ernsthafte Beantwortung von SchülerInnen-Fragen, die Umsetzung geplanter Vorgehensweisen oder die Prüfung von aufgestellten Hypothesen forciert, kann als präskriptives Handeln verstanden werden und sollte im Sinne forschenden Lernens im Mathematikunterricht angestrebt werden.

II. DIE UMSETZUNG FORSCHENDEN LERNENS IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Forschendes Lernen als Idee, als Lehr- und Lernmethode wurde in den vorangegangenen Kapiteln dargestellt und diskutiert. Die Thematisierung, Aufarbeitung und Konkretisierung verschiedener Aspekte forschenden Lernens, wie beispielsweise die Problematik der oberflächlichen, mehrdeutigen Definition, die Entstehungsgeschichte des Konzepts und die Strukturierung des Lernprozesses führen zwar zu einem besseren Verständnis, zu erhöhter Transparenz und Klarheit, sie werfen aber gleichzeitig weitere Fragen auf. Was wird in der Praxis des Mathematikunterrichts unter einem selbstgesteuerten, individuellen, sozialen und aktiven Prozess verstanden? Wie viel Raum wird der Individualisierung wirklich eingeräumt? Stehen SchülerInnen-Fragen und -interessen tatsächlich im Vordergrund oder werden sie von vorgegebenen Lehrplaninhalten und LehrerInnenvorstellungen zunichte gemacht? Werden die Anforderungen forschenden Lernens berücksichtigt, wozu sowohl die eigenständige Wahl des Themas und der Methode, als auch der wissenschaftliche Anspruch gehören? Zudem muss besonders im Mathematikunterricht der Frage nachgegangen werden, ob Beispiele auffindbar sind, die forschendes Lernen ermöglichen. Den Ergebnissen dieser Suche, der Darstellung und dem kritischen Hinterfragen der Mathematikaufgaben ist das nachfolgende Kapitel gewidmet.

8 Mathematikaufgaben als Grundlage forschenden Lernens

„Alle Kinder treten als Fragezeichen in die Schule ein und verlassen sie als Punkt (Postman, In: Peschek, Prediger, Schneider, 2008, S. 2).“ Das Konzept des forschenden Lernens versucht diesem schulischen Werdegang entgegenzuwirken und eröffnet den SchülerInnen die Möglichkeit ihre eigenen Fragen zu stellen und sich im Mathematikunterricht mit diesen zu beschäftigen. Mag. Raimund Hermann⁶, Mathematiklehrer am Bundesrealgymnasium Dornbirn Schoren, berichtet allerdings davon, dass es nur sehr selten zu SchülerInnen-Fragen kommt. Diese würden sich dann meist auf das aktuell im Unterricht behandelte Thema beziehen und seien von der Art: „Wie geht ...?“ Berichte wie diese gibt es mehr als genug und so kann das „Kind als Fragezeichen“ wohl nicht immer vorausgesetzt werden. Soll der Versuch, Lernen durch eine aktive Fragehaltung zu initiieren, jedoch nicht hoffnungslos bleiben, so muss es sich um einen Mathematikunterricht handeln, der die Fragen, Interessen und die Neugierde der Kinder und Jugendlichen nicht bloß duldet, sondern fordert und fördert. Werden im Mathematikunterricht nun wirklich Fragen aufgeworfen – im Unterricht von Mag. Raimund Hermann wird von einem Schüler beispielsweise das Nadelproblem von Buffon⁷ thematisiert – so entsteht für das forschende Lernen eine weitere Schwierigkeit. Eine derartige Frage kann zwar im Interesse einer einzelnen Person liegen, muss sich aber für die anderen MitschülerInnen nicht von einem konventionellen, von der Lehrperson vorgegebenen und aufgezwungenen Themenbereich unterscheiden. Zudem steht der Anstoß forschenden Lernens durch eigene Fragen und die freie Wahl der Thematik durch die SchülerInnen einem strikten Lehrplan gegenüber.

So wird im Rahmen forschenden Lernens versucht Aufgaben zu konstruieren, die verschiedenste Fragestellungen zulassen und sich so besser am individuellen Interesse aller SchülerInnen orientieren. Um den Vorgaben des Lehrplanes gerecht zu werden, wird der inhaltliche Rahmen dabei von den Lehrpersonen bestimmt und die Aktivitäten

⁶ Hermann R. (2010): SchülerInnen-Fragen. Raimund.Hermann@aon.at, 27.03.2010

⁷ Zufallsexperiment, bei dem eine Nadel der Länge l auf eine Ebene geworfen wird, in der parallele Geraden mit dem Abstand d gezogen sind ($l \leq d$). Dabei stellt sich die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Nadel eine der eingezeichneten Geraden schneidet.

der SchülerInnen (Formulierung der Fragen, Hypothesenbildung, Modellieren usw.) mit Hilfe vorgegebener Impulse in Gang zu setzen versucht. Da der Mathematikunterricht hauptsächlich von Aufgaben geleitet wird, bieten diese einen passenden und zielführenden Ansatzpunkt, forschendes Lernen in der Mathematik stärker zu verankern (Ulm, In: Messner, 2009, S. 97). Es können jedoch nur Aufgaben ernsthaft in Betracht gezogen werden, die auf einem konstruktivistischen Lernverständnis beruhen und genügend Freiraum für eigenständiges Lernen bieten. Forschendes Lernen kann somit nur mit Hilfe offener Aufgaben initiiert werden. Diese erlauben mehrere Vorgangsweisen, machen einen nicht schematisierten Lösungsweg erforderlich und bieten Raum für eigene Fragestellungen und Zielsetzungen (Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung, 1999, S. 5). Ulm betont, dass die Aufgaben für forschendes Lernen gehaltvoll und ergiebig sein sollten, sodass „(...) sich eine längerfristige und umfassende Beschäftigung mit dem Themenfeld als sinnvoll, notwendig und ertragreich zugleich erweist (Ulm, In: Messner, 2009, S. 99)“. Der Großteil aller Mathematikaufgaben dient immer noch dem Einüben und Festigen von Rechenverfahren, sie genügen nicht einmal annähernd den aufgelisteten Anforderungen. Der hohe Anspruch einerseits und die geringe Zahl an Publikationen zum Thema andererseits führen dazu, dass kaum passende Beispiele für das forschende Lernen im Mathematikunterricht existieren. Nichts desto trotz soll im folgenden Kapitel auf einige der publizierten Aufgaben näher eingegangen werden. Sie alle wurden von den Autoren und Autorinnen als passende Grundlage für forschendes Lernen angeführt. Das Repertoire reicht hierbei von konventionellen Textaufgaben mit einheitlicher Fragestellung bis hin zu bildlichen Darstellungen, die als anregende Impulse aufgefasst werden können.

8.1 Beispiele zum „Forschen“

Auf der langwierigen Suche nach geeigneten Beispielen für das forschende Lernen im Mathematikunterricht stößt man auf eine Fülle von Berichten über die verschiedensten „Forschungstätigkeiten“ der SchülerInnen. Schlagzeilen wie „Forschungen mit Würfelkalender“ (Hußmann, In: Praxis der Mathematik, 2008, S. 44 – 45), „SchülerInnen erforschen Knoten“ (Leuders, Pallack, In: Mathematik lehren, 2005, S. 68 – 69) und „WebQuest – Mathematik im Internet erforschen“ (Bescherer, In:

Mathematik lehren, 2005, S. 20 – 23) vermitteln zu Beginn den Eindruck, die Suche hätte Erfolg, die angeführten Aufgaben, Projekte oder Schilderungen haben in Wahrheit aber wenig mit dem Konzept forschenden Lernens zu tun. In diesen Fällen darf man sich nicht von der begrifflichen Nähe und der Begriffsverzerrung und -interpretation täuschen lassen. Die folgenden Beispiele sollen dies verdeutlichen.

Knoten erforschen

Im Rahmen des Knotentangos (Leuders, Pallack, In: Mathematik lehren, 2005, S. 68 – 69) werden die Schüler und Schülerinnen aufgefordert ihr Hände zu verknoten und sich anschließend, mit möglichst wenig aufgebrochenen Bindungen, wieder zu entknoten. Daraus ergeben sich motivierende Gruppenspiele, weitere Aufgaben, wie beispielsweise der Auftrag, eine möglichst schwierig aufzulösende Armverknötung zu erzeugen und die Möglichkeit, das Ganze mit Papier oder Schnur nachzubasteln. Dies ist zwar eine handlungsorientierte und spielerische Annäherung an die Knotentheorie, aber kein forschendes Lernen – auch wenn die SchülerInnen „Knoten erforschen“. Ob der Forschungsbegriff in diesem Kontext eine gerechtfertigte Verwendung findet, sei mit einem Verweis auf das Kapitel 2 dahingestellt.

Zahlenforschung

Begeman und Brunner (2003, In: 4 bis 8, S. 12 – 15) versuchen mit Aufgabenformaten der folgenden Art „(...) das aktive forschende Lernen des Kindes zu unterstützen (Begemann und Brunner, 2003, In: 4 bis 8, S. 14)“.

Auftragsreihe „Zahlenforschen“

1. Erforsche eine Zahl. Male, klebe sie.
2. Überlege dir Dinge, die zu deiner Zahl passen. Male oder zeichne sie und berichte darüber.
3. Bestimmt hat deine Zahl Freunde oder Freundinnen. Das sind Zahlen, die deine Zahl besonders gern mag. Male, zeichne, schreibe.
4. Vielleicht gibt es Zahlen, die überhaupt nicht zu deiner Zahl passen. Male, zeichne, schreibe.
5. Schreibe Zahlen auf, die kleiner sind als deine Zahl.
6. Schreibe Zahlen auf, die grösser sind als deine Zahl.
7. Kennst du Rechnungen, die zu deiner Zahl gehören? Schreibe sie auf.
8. Erzähle mir eine Geschichte, die zu deiner Zahl passt. Male, zeichne, schreibe.
9. Überlege dir, welches deine Lieblingszahl ist. Schreibe sie auf und male ein Bild dazu. Warum gefällt dir diese Zahl?

Diese, von mir eins zu eins übernommene, Aufgabe wurde für den Mathematikunterricht an Volksschulen konzipiert und besitzt mit Sicherheit das Potenzial das Interesse der Kinder zu wecken und eine spielerische Auseinandersetzung anzuregen. So zeichnet Fabienne beispielsweise eine violette Million, die sie sehr spannend findet und mit rosa Sternen verschönert. Manuel beschäftigt sich hingegen mit der Acht und entdeckt, welche Zahlen diese gerne mag. Begemann und Brunner erkennen in den folgenden Aufzeichnungen von Manuel eine systematische Beschäftigung mit der Zahl Acht und ein „hohes Gespür für Gesetzmäßigkeiten (Begemann und Brunner, 2003, In: 4 bis 8, S. 14)“.

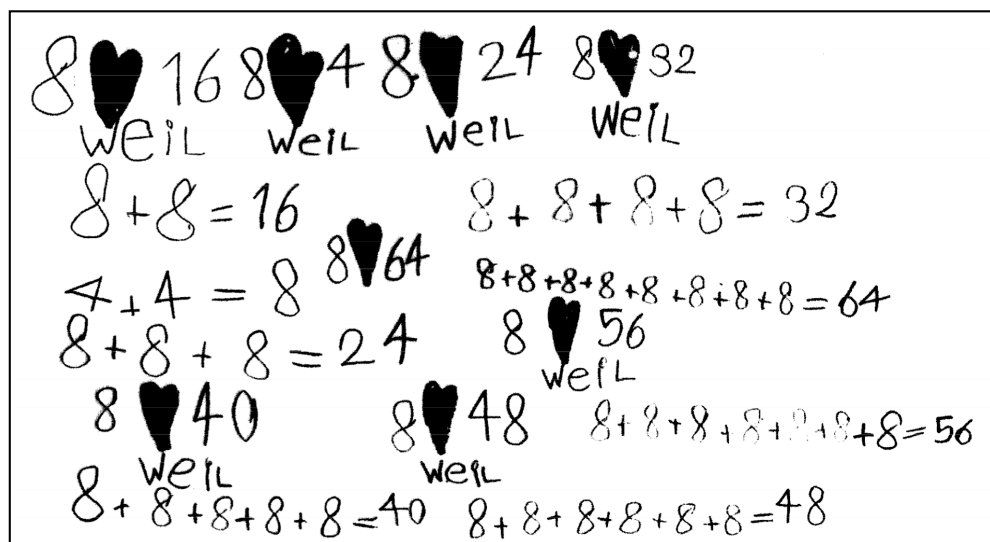


Abb. 5: "Zahlenforschung" anhand der Zahl Acht
(Begemann und Brunner, 2003, In: 4 bis 8, S. 14)

Man darf hier jedoch nicht übersehen, dass grundlegende Aspekte und Phasen forschenden Lernens völlig außer Acht gelassen werden. Die Bedeutung der Lernprozessdokumentation mit Hilfe eines Lerntagebuchs wird zwar betont, die angeführte Aufgabe setzt eine Planung der Arbeitsschritte, die Entscheidung für eine passende Methode oder die Auswertung und Einordnung von Ergebnissen usw. allerdings nicht voraus. So stellt sich, ohne den Lernprozess abzuwerten, die Frage, ob nicht eher von einem kreativen oder spielerischen Lernen gesprochen werden sollte. Aepkers und Liebig (2002) deuten in diesem Zusammenhang darauf hin, dass Forschen

vor allem mit jüngeren Schülern oft „um des Forschens willen“ betrieben wird und in der Regel zu unreflektiertem Aktionismus führt (Aepkers und Liebig, 2002, S. 77).

Textaufgaben mit einheitlicher Fragestellung

Für Fries und Rosenberger (1976, S. 19) ist ein problemhaltiger Sachverhalt in den mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächern vor allem über reale und fiktive Sachaufgaben erschließbar. Im praktischen Teil ihres Buches „Forschender Unterricht“ führen sie das folgende Beispiel als passenden Einstieg an.

Eine Gärtnerei soll 3 Rundbeete bepflanzen: ein großes im Park ($d_1 = 16\text{ m}$) und zwei kleinere auf einem Kinderspielplatz ($d_2 = 13\text{ m}$; $d_3 = 8\text{ m}$). Man rechnet auf 1 dm^2 1 Pflanze. Wohin würdest du die meisten Pflanzen bringen? (In: Fries und Rosenberger, 1976, S. 81)

Diese Aufgabe schränkt den kognitiven Spielraum der SchülerInnen stark ein und animiert nicht zum eigenständigen forschenden Lernen. Es besteht zwar ein Lebensweltbezug, die Bedeutung von Begründungen für Kinder und Jugendliche hält sich wahrscheinlich jedoch in Grenzen. Das individuelle Interesse der SchülerInnen wird hier vollkommen ignoriert, die Fragestellung allen gleichermaßen vorgegeben. Eine Aufgabe, die den Lernenden jegliche Chance auf eigene Fragen entzieht, kann nicht als Grundlage forschenden Lernens herangezogen werden.

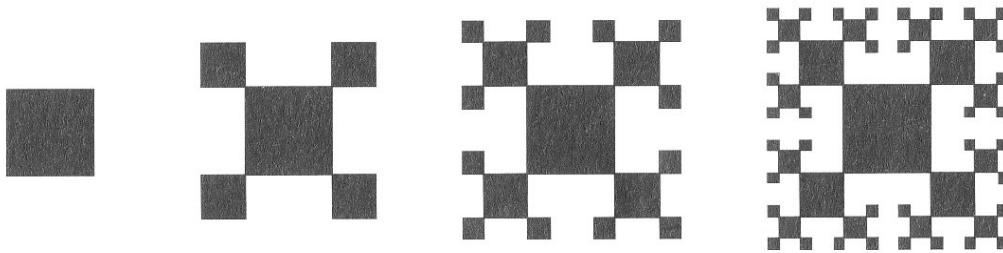
8.2 Anregende Impulse ohne vorgegebene Fragestellung

8.2.1 Muster aus Quadraten

Die folgende Aufgabe stammt von Ulm (2007), der den Schüler und Schülerinnen mit geometrischen Mustern eine „Spielwiese für mathematisches Forschen und Entdecken (Ulm, In: Praxis Mathematik, 2007, S. 16 ff.)“ bieten will. Die Vorteile dieser Aufgabe sieht Ulm (In: Messner, 2009, S. 98) in den zahlreichen Aspekten, die es bei diesem Beispiel zu erkunden gibt. Die Aufmerksamkeit kann der Zahl der Quadrate, dem Verhalten der Folge der Umfänge, der Anzahl der Eckpunkte oder auch den Symmetrieeigenschaften gelten. Zudem soll mit Hilfe dieser Aufgabe, deren Anspruchsniveau von der „gesamten Sekundarstufe bis hin zur Hochschulmathematik (...) (Ulm, In: Praxis Mathematik, 2007, S. 16)“ reicht, die Motivation zum eigenständigen mathematischen Arbeiten entfacht werden. Eine solche offene Aufgabe ermöglicht den Lernenden das Finden eines Einstieges und lässt sie somit Erfolgserlebnisse verspüren. Während leistungsschwächere SchülerInnen sich beispielsweise mit der Zahl der Teilquadrate beschäftigen und einen induktiven Zusammenhang der Zahlenfolgen entdecken können, bietet die Aufgabe den leistungsstärkeren SchülerInnen die Möglichkeit, sich beispielsweise mit der Frage nach der Beschränktheit der Folge der Umfänge zu beschäftigen. Je nach Altersstufe und Vorwissen der Schüler und Schülerinnen können zudem der Taschenrechner, Tabellenkalkulationen, Internet- oder Literaturrecherchen herangezogen werden (Ulm, In: Praxis Mathematik, 2007, S. 18 ff.).

Muster aus Quadraten

Mit Quadraten wird eine Folge von Mustern erzeugt: Ausgehend von einem großen Quadrat werden jeweils an freie Ecken kleinere Quadrate angesetzt. Von Schritt zu Schritt werden die Seitenlängen der hinzukommenden Quadrate um einen konstanten Faktor kleiner.



- a) *Überlege dir zu dieser Folge von Figuren möglichst vielfältige mathematische Fragestellungen und schreibe diese auf.*
- b) *Bearbeite mit deinem Nachbarn gemeinsam einige eurer Fragestellungen.*
- c) *Stellt gemeinsam eure Ideen und Ergebnisse in der Klasse vor.*

Abb. 6: Muster aus Quadraten (Ulm, In: Messner, 2009, S. 98)

Während die Frage in der Aufgabenstellung von Fries und Rosenberger für alle Lernenden vorgegeben ist, können sich die Schüler und Schülerinnen in diesem Fall einen Schwerpunkt frei wählen. So kann sich die Fragestellung nach dem individuellen Interesse, nach der Begabung und nach dem Lernverhalten der Kinder und Jugendlichen richten. Die Abbildung kann als anregender Impuls verstanden werden, der ein individuelles, forschendes Lernen anregt.

8.2.2 Expedition zum abgelegensten Punkt

Auch die anschließende Aufgabe verlangt eigene Fragestellungen und es gibt eine Vielzahl an Lösungswegen. Die Anforderungen von Ulm (In: Messner, 2009, S. 99) an passende Mathematikaufgaben wurden bei diesen beiden Beispielen berücksichtigt, weshalb sie eine gute Grundlage für das forschende Lernen bilden. Besonders im sagenumwogenen Point Nemo steckt das Potential, das Interesse der SchülerInnen zu wecken. Die Besonderheit dieser Aufgabe liegt zudem darin, dass es bei der

Bearbeitung dieser Aufgabe zur Einbeziehung aller Phasen forschenden Lernens kommen kann.

Expeditionen zum abgelegensten Punkt

AUCH DAS NOCH

Hello, Lenin!

Rory Sweet, britischer Abenteurer, hat gemeinsam mit seinen Teamkollegen Rupert Longsdon, Henry Cookson und



Paul Landry Sydney am wohl entlegensten Punkt der Erde eine Überraschung erlebt: Die drei Briten und der Kanadier entdeckten am Pol der Unzugänglichkeit (POI) in der Antarktis eine Lenin-Büste. Nach einem

1600 Kilometer langen Marsch hatten sie als erste Menschen den POI, den von den umgebenden Wassermassen am weitesten entfernten Punkt in der Antarktis, zu Fuß erreicht. 1958 war ein Team der damaligen Sowjetunion mit speziellen Schneegefährten dort angelangt und hatte die Büste des russischen Revolutionärs errichtet. AFP

Bei der Suche nach dem größten Abenteuer kommen manche Menschen auf den Punkt der größten Unzugänglichkeit („POI“ = „Point Of Inaccessibility“).

Solche abgelegensten Punkte gibt es auch noch anderswo:

- Der Pazifische Pol der Unzugänglichkeit (auch Point Nemo genannt) ist die Stelle im Pazifik, die am weitesten von Festländern und Inseln entfernt ist.
- Der deutsche Fahrradklub informiert: „Irland ist eine vergleichsweise kleine Insel mit einer fast unglaublichen Vielfalt an Landschaftsformen. Kein Ort liegt mehr als 110 km von der Küste entfernt.“

Stellt euch Fragen zum POI und versucht, sie mathematisch zu bearbeiten – soweit dies möglich ist.

Wenn Ihr nicht weiter wisst, könnt ihr euch weitere Anregungen auf Hilfefkarten abholen.

Weitere interessante Informationen zum Thema findet Ihr beispielsweise unter:

- http://de.wikipedia.org/wiki/Pol_der_Unzugänglichkeit
- http://www.adfc.de/764_1



Abb. 7: Expedition zum abgelegensten Punkt
(Leuders, Ulm, In: Praxis Mathematik, 2007, S. 6)

8.2.3 Glatteis in Dornbirn

Das von mir erstellte Beispiel „Glatteis in Dornbirn“ orientiert sich an dem Artikel „Glatteis und Mathematik“, der von Leuders und Lippert (2007, In: Praxis Mathematik, S. 30 – 37) veröffentlicht wurde. Allerdings wurde die „offene Modellierungsaufgabe“ von Leuders und Lippert (2007) in dem Sinn umgestaltet, dass die räumlichen Gegebenheiten (in diesem Fall die Gemeinde Dornbirn) berücksichtigt und auf die einheitlichen Fragestellungen verzichtet wurde. Diesen Überlegungen liegt die Intention zu Grunde, den Idealfall forschenden Lernens zu ermöglichen – die SchülerInnen stellen eigenständige Fragen und legen somit die Thematik fest. Die Einbettung der Aufgabe in bekannte räumliche Umgebungen und einen alltäglichen Kontext sollen der Bearbeitung einen Sinn bzw. eine Notwendigkeit verleihen und zu einer Motivationssteigerung der SchülerInnen beitragen. Die im Einführungstext gegebenen Zusatzinformationen, wie Geschwindigkeit der Streuwägen, Füllstation, Menge der Streumaterialien usw. sollen die SchülerInnen zu unterschiedlichen Überlegungen und Fragestellungen animieren. Des Weiteren soll der Hinweis auf den „Vorarlberg-Atlas 3.0“ und der damit verbundene computergestützte Mathematikunterricht die SchülerInnen zu verschiedenartigen Untersuchungen und Experimenten anregen. Die Aufgabe beinhaltet unterschiedliche Zugangsmöglichkeiten und Anforderungen, was als Ausgangspunkt zur Auflösung des Lernens im Gleichschritt und zur Individualisierung (vgl. Kapitel 7.2) genutzt werden kann.

Glatteis in Dornbirn

Der Wintereinbruch mit Schneefällen und Vereisungsgefahr fordert vor allem die Räumkommandos der Stadt Dornbirn. Dann sind die Mitarbeiter der Straßenmeisterei sowie 18 private Unternehmen im Dauereinsatz. Die Mitarbeiter sind bemüht, möglichst schnell und möglichst überall zu sein. Vor allem wenn Glatteis droht, muss so schnell wie möglich gehandelt werden. Dornbirn beispielsweise verwendet 600 Tonnen Salz, 1.500 Tonnen Split und 50 Tonnen Sand pro Winter. Priorität haben dabei jedoch die Hauptverkehrswege, Stadtbuslinien, Übergänge und Unterführungen sowie exponierte Gefahrenstellen. Es wird daher um Verständnis ersucht, dass nicht jeder Weg sofort geräumt werden kann.



Bild: <http://dornbirn.vol.at/>

Text: <http://vorarlberg.orf.at/stories/408162/> und <http://www.dornbirn.at>

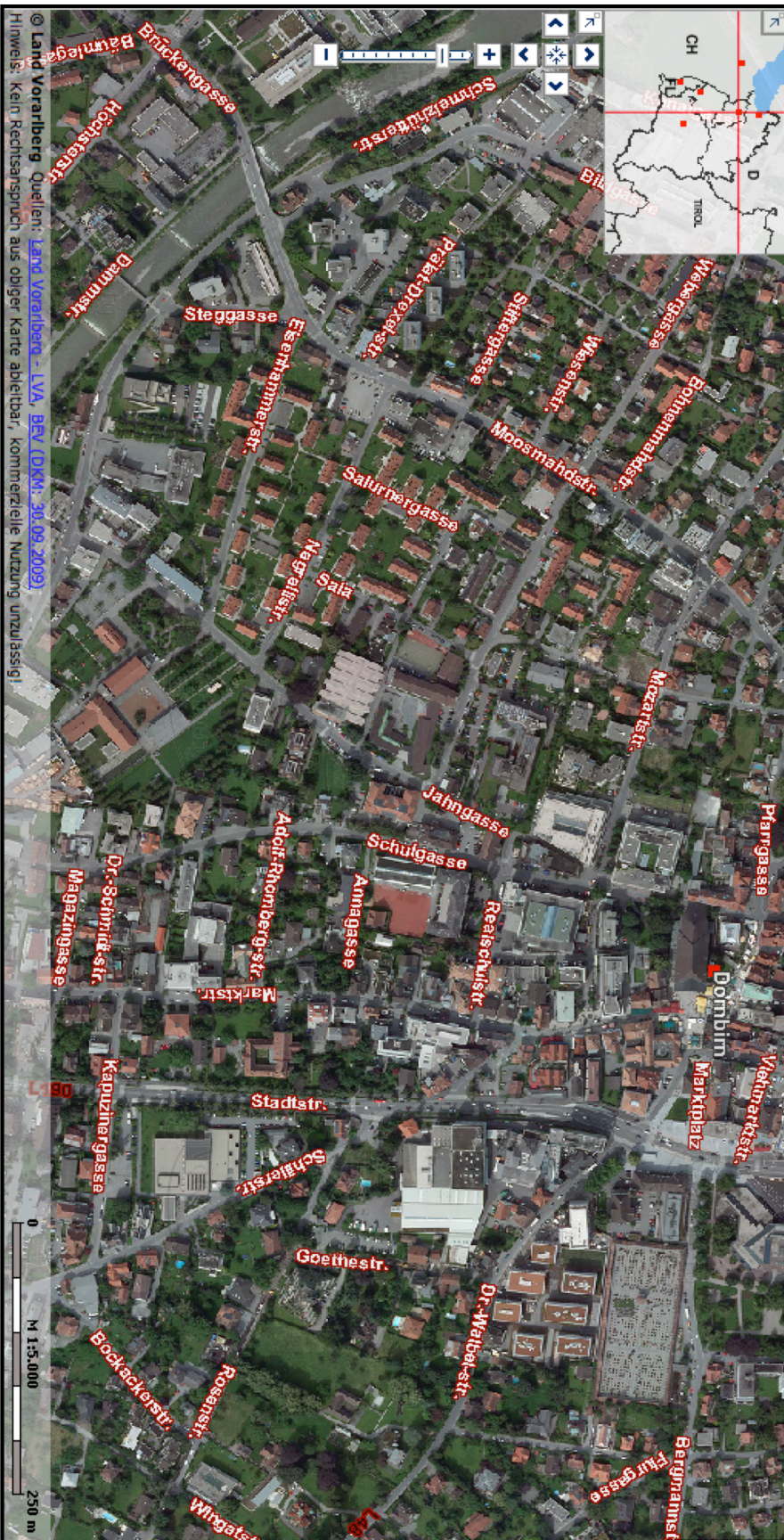
Über 100 Streuwagen sind im Extremfall in Dornbirn im Einsatz. Die Raumgeschwindigkeit hängt natürlich stark von den örtlichen Streckenbedingungen ab und liegt zwischen 10 km/h und 70 km/h. Man kann also davon ausgehen, dass ein Streuwagen auf einer Autobahn durchschnittlich etwa mit 60 km/h, auf einer Hauptstraße durchschnittlich mit 30 km/h und auf Straßen in Wohngebieten durchschnittlich mit 15 km/h fahren kann. Ein nicht streuender Wagen fährt entsprechend 80 km/h, 40 km/h und 20 km/h. Ein voll gefüllter Streuwagen kann ungefähr 10 Kilometer Straße bestreuen und muss, wenn er leer ist, beim Bauhof in der Gütlestraße neu befüllt werden. Dies dauert etwa 10 Minuten.

Versucht mit Hilfe eurer Unterlagen (Text: Glatteis in Dornbirn und Karte: Umgebung BG Dornbirn) möglichst vielfältige mathematische Fragestellungen zu formulieren und aufzuschreiben.

- Bearbeitet, soweit dies möglich ist, die Fragen die euer Interesse geweckt haben!
- Dokumentiert euer Vorgehen in eurem Heft!
- Stellt gemeinsam eure Ideen und Ergebnisse in der Klasse vor!

Das folgende Satellitenbild wurde mit Hilfe des „Vorarlberg-Atlas 3.0“ erstellt. Du kannst auf der Homepage (<http://www.vorarlberg.at>) unter „Bauen und Wohnen“ und VoGIS den Vorarlberg-Atlas abrufen und eigene Karten gestalten, falls du diese für deine Überlegungen benötigst.

BG Dornbirn und Umgebung



Quelle: [http://voGIS.cnv.at/atlas3/\(S\(020m245ne05bvfcsj3kgmk\)\)/init.aspx?karte=adressen_u_ortspan&ks=digitaler_atlas_vorarlberg&cms=lv&layou=atlas_voGIS&template=atlas_var1](http://voGIS.cnv.at/atlas3/(S(020m245ne05bvfcsj3kgmk))/init.aspx?karte=adressen_u_ortspan&ks=digitaler_atlas_vorarlberg&cms=lv&layou=atlas_voGIS&template=atlas_var1)

Die folgende Auflistung möglicher Fragen soll aufzeigen, wie ertragreich die offene Vorgabe der Aufgabe „Glatteis in Dornbirn“ sein kann und aus welchen unterschiedlichen Blickwinkeln man diese Thematik betrachten kann.

Glatteis in Dornbirn: Mögliche SchülerInnen-Fragen
1. Wie müsste ein Streufahrzeug fahren, um die abgebildete Fläche (Satellitenbild) möglichst schnell zu räumen?
2. Wie viel kg Salz werden durchschnittlich im Laufe eines Jahres auf die Realschulstraße gestreut?
3. Wie oft muss ein Streufahrzeug im Bauhof aufgefüllt werden, wenn es die abgebildete Fläche bestreuen soll?
4. Wie muss das Gebiet aufgeteilt werden, damit mit zwei Fahrzeugen eine schnellstmögliche Räumung stattfinden kann?
5. Wie lange dauert die Räumung der Landstraßen und Autobahnen in Dornbirn?
6. Wie oft wird im Laufe eines Winters ein bestimmtes Straßenstück bestreut?

Tab. 4: Mögliche SchülerInnen-Fragen zur Aufgabe "Glatteis in Dornbirn"
(Villotti, 2010)

Die Aufgabe „Glatteis in Dornbirn“ bildet in Kapitel 9 die Grundlage zur Erläuterung unterschiedlicher Phasen forschenden Lernens. Im Zuge dessen werden vor allem die Bearbeitungsmöglichkeiten der ersten beiden Fragen, in Abschnitt 9.4 wird die Festlegung einer denkbaren Vorgehensweise mittels Orientierungsfragen, in Abschnitt 9.7 die Anfertigung eines „Streuplanes“ für Streufahrzeuge dargestellt. Darüber hinaus wird die Aufgabe (Abschnitt 9.7) herangezogen, um eine mögliche, auf wissenschaftstheoretischer Ebene ablaufende Reflexion und eine weiterführende Fragestellungen zu erörtern. Das in den folgenden Abschnitten stattfindende Aufzeigen unterschiedlicher Umsetzungsmöglichkeiten der Aufgabe „Glatteis in Dornbirn“ soll auf die Möglichkeit des Einbeziehens aller Phasen forschenden Lernens hinweisen.

Auf Grund der reichhaltigen Aufgabenstellung und dem damit verbundenen Arbeits- und Zeitaufwand wurde der ursprüngliche Gedanke, diese Mathematikaufgabe für den Regelunterricht zu konzipieren, verworfen. Insbesondere hinter dem zeitlichen Aspekt verbirgt sich die Gefahr, dass die Vielfalt und Ergiebigkeit der Aufgabe nicht zum Tragen kommt. Mag. Ingrid Ferti⁸ machte mich auf die Möglichkeit aufmerksam, die Portfolioarbeit mit einer Mathematikaufgabe zu veranlassen. Erfolgreiche

⁸ Persönliches Interview - geführt von der Verfasserin, 18.05.2010, Wien

Umsetzungen dieser Form finden im Mathematikunterricht an ihrer Schule bereits statt. Die Empfehlung einer Verbindung der Aufgabe „Glatteis in Dornbirn“ mit einer Portfolioarbeit gründet auf den Vorteilen auf die in Kapitel 12 noch näher eingegangen wird.

Der Forderung nach gehaltvollen und ergiebigen Aufgaben für das forschende Lernen, die sich für die SchülerInnen als sinnvoll, notwendig und ertragreich erweisen (Ulm, In: Messner, 2009), sollte mit der Erstellung dieses Beispiels nachgegangen werden. Auf Mustergültigkeit wird bei diesem Versuch natürlich nicht bestanden. Vielmehr soll diese Aufgabe als Anregung dienen, als Bemühung dem forschenden Lernen, unter Verwendung von mathematischen Aufgaben, Raum zu geben.

8.2.4 Pascalsches Dreieck

Das folgende Beispiel zum Pascalschen Dreieck wurde ebenfalls von Ulm (In: Messner, 2009, S. 99) publiziert. Die Erkenntnis, dass die Zahl in der inneren Zelle die Summe der beiden darüber stehenden Zahlen ist, oder dass in der dritten Diagonale Dreieckszahlen stehen, zählt er zu den vielfältigen Richtungen, in welche die „Forschungen von Grundschulern“ (Ulm, In: Messner, 2009, S. 100) gehen können. Bei dieser Aufgabe wird Blaise Pascals glückhaftem Finden große Aufmerksamkeit geschenkt und die SchülerInnen werden dazu aufgefordert möglichst viele Entdeckungen zu machen. Das Konzept des forschenden Lernens versucht sich allerdings von Zufall, Glück und Eingebung eher abzugrenzen (vgl. 5.2) und stellt ein planvolles Vorgehen, das auf zuvor gestellten Fragen und Vermutungen basiert, in den Mittelpunkt. Das glückhafte Finden und Entdecken mathematischer Zusammenhänge wird mehr dem entdeckenden Lernen zugeschrieben, das nach Leuders (2003, S. 121 f.) vor allem die Problemfindungsphase betont. Das von Ulm veröffentlichte Beispiel kann deshalb eher einem entdeckenden Unterricht zugeordnet werden.

Pascalsches Dreieck

Das abgebildete Muster heißt Pascalsches Dreieck. Es geht auf den Mathematiker und Philosophen Blaise Pascal (1623 – 1662) zurück. Dieser hat zu dem Muster geschrieben: „Es ist erstaunlich, was einem alles auffallen kann. Jedermann soll sein Glück versuchen.“

Mache möglichst viele Entdeckungen zu diesem Zahlenmuster und versuche, sie auch zu begründen!

Informiere dich über Blaise Pascal!

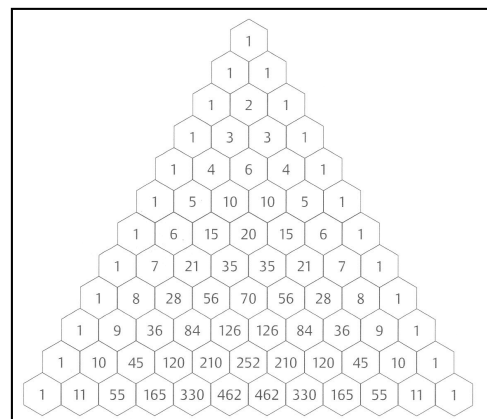


Abb. 8: Pascalsches Dreieck (Ulm, In: Messner, 2009, S. 99)

Meine Einschätzung, die sich auf die in Kapitel 5.2 erläuterten Besonderheiten forschenden Lernens stützen, widersprechen Ulms Einordnung dieser Aufgabe. Da das forschende Lernen reichlich Überschneidungsflächen mit anderen Lern- und Lehrkonzepten aufweist, kommt es oft zu solch konträren Ansichten und Einordnungen von Aufgaben. In Kapitel 11 werden die Gemeinsamkeiten, aber auch Möglichkeiten zur Abgrenzung des entdeckenden bzw. des problemorientierten Lernens vom forschenden Lernen noch näher erläutert.

Die Analyse der angeführten Mathematikaufgaben macht deutlich, dass die Zuordnung vieler Beispiele zum forschenden Lernen kritisch betrachtet werden muss. Nichts desto trotz führen viele der exemplarisch dargestellten Aufgaben zur Initiierung einzelner SchülerInnenaktivitäten, die im Rahmen dieses Konzeptes unerlässlich sind. Da es im Rahmen forschenden Lernens im Mathematikunterricht nur in Ausnahmefällen zur Einbeziehung des gesamten Zyklus forschenden Lernens kommt, sollen im folgenden Kapitel die einzelnen Phasen näher betrachtet werden. Diese können, wie das IMST-Projekt „forschendes und entdeckendes Lernen“ in der Geringergasse noch verdeutlichen wird, sehr wohl im Mathematikunterricht wiedererkannt werden.

9 Teilaspekte forschenden Lernens im Mathematikunterricht

Während das forschende Lernen im Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle zu tragen scheint, kann der problemorientierte oder entdeckende Ansatz im Unterricht häufiger beobachtet werden. Zurückzuführen ist dies einerseits darauf, dass der Begriff des Problemlösens in einer engen Beziehung zu unserer Auffassung von Mathematik steht, als auch auf die Tatsache, dass der problemorientierte Ansatz bereits seit Beginn des letzten Jahrhunderts propagiert wird (Leuders, 2003, S. 119 ff.). Eine Distanzierung vom frontal geführten Unterricht führt zudem zur Fokussierung und Betonung von SchülerInnen-Aktivitäten, wobei das entdeckende Lernen meist im Vordergrund steht. Beim entdeckenden bzw. problemorientierten Mathematikunterricht können SchülerInnen-Aktivitäten veranlasst werden, die sich zwar mit einzelnen Phasen forschenden Lernens decken, zu einer Konzeptrealisierung (forschendes Lernen in seiner Reinkultur) und dem Durchlauf des gesamten Zyklus kommt es jedoch nicht. Mag. Katharina Luksch (2010)⁹ deutet in diesem Zusammenhang auf die schwierige Umsetzung forschenden Lernens hin und glaubt, dass ein wissenschaftspropädeutisches Vorgehen aus zeitlichen Gründen und auf Grund der hohen Anforderungen seltener in Betracht gezogen wird. Da im Unterrichtsalltag hauptsächlich einzelne Aspekte forschenden Lernens aufgegriffen werden, sollen in diesem Kapitel die einzelnen SchülerInnen-Aktivitäten diskutiert werden. Zudem sollen Überlegungen, inwieweit sich die einzelnen Phasen auf das Unterrichtsfach Mathematik übertragen lassen und wie eine mögliche Umsetzung aussehen könnte, aufgegriffen werden. Dabei orientiert sich die Gliederung grob an der Abbildung 1 (vgl. Seite 32), welche die einzelnen Phasen forschenden Lernens schematisch darstellt.

⁹ Persönliches Interview - geführt von der Verfasserin, 12.05.2010, Wien

9.1 Mit der Thematik auseinandersetzen

Forschendes Lernen beginnt nach Bönsch (2009, S. 236) immer mit Neugierde und der Betrachtung der Welt mit offenen Augen. Bell (2006, S. 3) hingegen stellt die Orientierung im gegebenen Themenfeld in den Vordergrund und Steiner (In: Bastian, 1991, S. 34) erklärt die Benennung des Problembereiches und die Formulierung erster Fragen zum Ausgangspunkt forschenden Lernens. Ulm (2009, In: Messer, S. 91) wiederum schließt an die Konfrontation mit einem mathematischen Phänomen sofort die Exploration des Themenfeldes mittels Beispielen, Spezialisierungen oder Modifikationen an. Zwar liegt hier eine gewisse Uneinigkeit vor, allen gemeinsam ist jedoch die Tatsache, dass sich die SchülerInnen erstmals mit der Thematik „auseinandersetzen“ sollten. Man muss an dieser Stelle allerdings erwähnen, dass die Benennung dieser Phase (mit der Thematik „auseinandersetzen“) eine gewisse Deutungsschwierigkeit mit sich bringt. Dies wird beispielsweise begreiflich, wenn man das Verb „auseinandersetzen“ genauer betrachtet und sich dessen Synonyme vor Augen führt (Duden – Das Synonymwörterbuch, S. 138):

- a) aufarbeiten, arbeiten an, sich befassen, sich beschäftigen, durchdenken, sich einlassen, sich Gedanken machen, herantreten, nachdenken, studieren, überdenken, umgehen, sich vertiefen, sich widmen, sich zuwenden; (*ugs.*): sich herumschlagen, sich hineinknien, zugange sein; (...)
- b) besprechen, debattieren, diskutieren, durchdiskutieren, durchsprechen, erörtern, klären, reden, sprechen.

Das weite Begriffs- und Deutungsspektrum macht die Benennung einzelner SchülerInnenaktivitäten in dieser ersten Phase forschenden Lernens unmöglich. Der Vorteil dieser Bezeichnung liegt jedoch darin, dass auf unterschiedlichste Zugänge hingewiesen wird und sowohl ein stilles Nachdenken, als auch ein lautes Debattieren als erster Zugang zur Thematik toleriert wird. Grundsätzlich nimmt die Mathematik in dieser ersten Phase eine gewisse Sonderstellung ein, da sich der Zugang zu mathematischen Sachverhalten, Phänomenen, Fragen usw. zum Teil als schwierig erweist. Folgender Vergleich soll dies greifbar machen: Während die Schlagworte „Arbeitslosigkeit“, „Berufswahl“ oder „Umweltverschmutzung“ in den meisten Menschen gewisse Vorstellungen und Annahmen hervorrufen, führen die Begriffe

„Logarithmus“, „Parameterdarstellung“ oder „Drehzylinder“ zu weitaus weniger Assoziationen. Während die genannten Inhalte des Geographie- und Wirtschaftskundeunterrichts eine Vielzahl an Fragestellungen und Vermutungen ermöglichen bzw. hervorrufen, müssen mathematische Begriffe, Sachverhalte und Zusammenhänge oftmals erst erarbeitet werden, damit die weiteren Aktivitäten forschenden Lernens denkbar sind. Eine zusätzliche Problematik ergibt sich aus der Tatsache, dass die Bereitschaft der SchülerInnen, sich mit schwierigen Aufgaben überhaupt auseinanderzusetzen, sehr gering ist (Bruder, 2002, S. 4). Diese Leistungsverweigerung, die bei unterschiedlichen Untersuchungen (PISA, TIMSS usw.) beobachtet werden konnte, kann und soll allerdings nicht mit Hilfe herausforderungsärmeren Aufgaben überwunden werden (Bruder, 2002, S. 4 f.). Roth (In: Messner, 2009, S. 66 f.) bezieht sich in diesem Zusammenhang auf die Verhaltens- und Lernpsychologie und verweist auf die Nachteile eines entspannten Lernens, das ohne Anstrengung auf einem niedrigen Niveau stattfindet. Lernen muss vielmehr „(...) als positive Anstrengung und Herausforderung empfunden werden (Roth, In: Messner, 2009, S. 67 f.)“. Anspruchsvolle Aufgaben und Ziele sollen den Kindern und Jugendlichen somit nicht einfach aus dem Weg geräumt, sondern mit Hilfe didaktischer Maßnahmen leichter zugänglich gemacht werden. Bruder (2002, S. 4) versucht mit den folgenden didaktischen Stützen die Leistungsverweigerung im Mathematikunterricht zu überwinden und eine Auseinandersetzung anzuregen:

- Sinn und Bedeutung der Lerninhalte thematisieren und erfahrbar machen.
- Unterschiedliche Lern- und Lösungswege zulassen und ermöglichen.
- Erlernen von fachspezifischen und übergreifenden Hilfsmitteln und Strategien zum Problemlösen (Heuristiken).

Die Auflistung deutet darauf hin, dass ein realitätsbezogener, anwendungsorientierter, lebensnaher Mathematikunterricht, der sich an den Interessen der Kinder und Jugendlichen orientiert, dem „Ausweichen vor Lernschwierigkeiten und geistigen Herausforderungen (Bruder, 2002, S. 4)“ entgegen wirken kann. Für die Lehrer und Lehrerinnen beinhaltet diese erste Phase forschenden Lernens eine grundlegende Aufforderung. Die Inhalte sollen für die Lernenden attraktiv gemacht werden, sodass die intrinsische Motivation der SchülerInnen gesteigert und das Interesse geweckt werden kann. Wichtig sind dabei vor allem „(...) der Realitäts- und Sinnbezug sowie das

Aufzeigen der gesellschaftlichen Relevanz der Inhalte. Das Herausarbeiten von offenen, authentischen Problemen und fächerübergreifenden Verbindungen gehört ebenfalls dazu (Messner, 2009, S. 26)“.

9.2 Fragen erarbeiten und formulieren

Das Erkennen und Formulieren von Fragen bereitet vielen SchülerInnen große Schwierigkeiten, da die Kinder und Jugendlichen mit der Aufgabe konfrontiert werden, Muster, Bilder und Phänomene in der Natur, Gesellschaft oder Kultur durch die „mathematische Brille“ zu betrachten oder Fragen in Alltagssituationen zu erkennen und zu formulieren. Eigene Fragen zu finden, anstatt (wie gewohnt) die vorgegebenen der Lehrperson zu beantworten, erfordert eine flexible Sicht auf die Lebens- und Gedankenwelt, die Fähigkeit die Blickrichtung wechseln zu können und ein gewisses Maß an Kreativität (Bruder R., 2002, S. 5). Zwar spricht schon Georg Cantor davon, dass die Kunst des Fragestellens in der Mathematik öfter gebräuchlich ist als die des Lösens (Baptist, In: Flade und Herget, 2000, S. 8), die SchülerInnen werden mit dieser Komponente mathematischen Arbeitens allerdings nur äußerst selten konfrontiert. Auf Grund dessen kann das Fragenstellen im Mathematikunterricht nicht einfach vorausgesetzt werden, sondern muss angeregt und geübt werden.

Mathematische Sachverhalte können nur dann wahrgenommen und hinterfragt werden, wenn den SchülerInnen bewusst ist, dass ihr Umfeld, auch wenn dies nicht immer auf den ersten Augenblick offensichtlich ist, spannende mathematische Fragen aufwirft. In Publikationen wie beispielweise Beutelspachers „Einmal sechs Richtige“ (Beutelspacher, 2008), „Mathematik ist immer und überall“ (Benesch, 2008) oder „Mathematik sehen und verstehen“ (Haftendorn, 2010) soll aufgezeigt werden „(...) wie die Mathematik viele Wissenschaften und unser tägliches Leben mit – meist unsichtbaren – Fäden durchzieht (Haftendorn, 2010, Vorwort)“. Die genannten Veröffentlichungen bieten eine Vielzahl an Anregungen und Aufgaben für den eigenen Mathematikunterricht. Als Beispiel können die Spiralen des Romanesco, eine Zuchtsorte des Karfiols, herangezogen werden. Betrachtet man die Anzahl der rechtsdrehenden und linksdrehenden Spiralen, so kann man die zwei aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen 8 und 13 erkennen. Diese Gesetzmäßigkeit ist

auch bei der Ananas, dem Gänseblümchen oder den Tannen- und Pinienzapfen auffindbar. Weitere Aspekte, die sich in diesem Konnex ergeben können, sind der Blattansatz und der goldene Winkel oder der Zusammenhang zwischen Fibonacci-Zahlen und dem goldenen Schnitt.

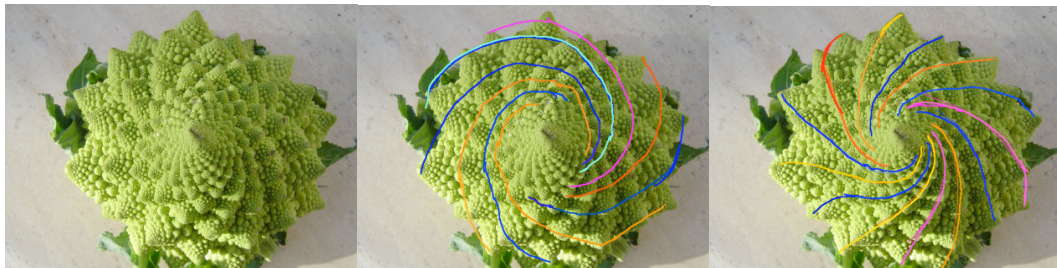


Abb. 9: Romanesco und die Fibonacci Zahlen (Haftendorn, 2010, S. 115)

Das Bewusstsein, dass sich im Zusammenhang mit den unterschiedlichsten Sachverhalten mathematische Fragen ergeben können, bildet eine Grundlage der ersten Phase forschenden Lernens und kann mit Aufgaben dieser Art angeregt werden. Bruder (2002, S. 5) geht zudem davon aus, dass ein Fragenstellen im Mathematikunterricht mit passenden Beispielen geübt werden kann. Damit sind allerdings keine „offenen Aufgaben“ gemeint, bei denen das Fragenfinden verlangt und indirekt erlernt wird, sondern Übungen, bei denen beispielsweise mit der „Strategie des Vorwärtsarbeitens“ das Finden von Fragen erarbeitet wird. Anhand eines einfachen Mauersteines wurde von Bruder (2002, S. 5 f.) versucht, das Vorwärtsarbeiten folgendermaßen zu trainieren:

- Zu Beginn werden die SchülerInnen aufgefordert, alle möglichen Verwendungen eines Mauersteines zu notieren.
- Im zweiten Schritt werden die Eigenschaften eines Mauersteines wie Form, Material und Gewicht zusammengetragen.
- Anhand der Eigenschaften werden nun systematisch weitere Verwendungsmöglichkeiten abgeleitet.

Ausgehend vom Gegebenen wird bei der Strategie des Vorwärtsarbeitens versucht Schlussfolgerungen zu ziehen oder Beziehungen herzustellen, um eventuell auf Umwegen zum Gesuchten zu kommen. So kann beispielsweise das Gewicht des Mauersteins auf die Idee hinführen, dass dieser als Briefbeschwerer oder Trainingsgerät dienen kann. Das systematische Vorgehen, bei dem die Verwendungszwecke von Objekteigenschaften erarbeitet wurden, führte laut Bruder

(2002, S. 6) zum Finden von weit mehr Verwendungsmöglichkeiten. Sie spricht in diesem Zusammenhang von „geschulter“ Kreativität, die sich auf mathemathikhaltige Situationen unterschiedlichster Art übertragen lässt. Darauf aufbauend können „Aufgaben zum Fragenfinden“ von den SchülerInnen bewusst bearbeitet werden. Eine mögliche Aufgabenstellung von Bruder (2003, S. 12) sieht wie folgt aus:

Formuliere mathematische Fragestellungen, die sich auf die folgenden Situationen beziehen und für dich von Interesse sein könnten. Versuche dabei die *Strategie des Vorwärtsarbeitens* anzuwenden.

- a) Du bist bei einer Firma tätig, die O-Saft in Tetra-Packs herstellt.
- b) Du bist bei Ferrero angestellt und arbeitest in der Hanuta-Abteilung.
- c) Du hilfst zu Hause das Badezimmer zu renovieren.
- d) Du willst eine Kerze gießen.
- e) Du entwirfst einen Swimming-Pool für euren Garten.

Meine mathematischen Fragestellungen lauten...

Das Finden und Formulieren einer interessanten Frage stellt im Zuge forschenden Lernens einen wichtigen Teil dar, weshalb dieser Aspekt im Mathematikunterricht nicht vernachlässigt werden sollte. Die folgenden Schritte forschenden Lernens orientieren sich an den anfangs formulierten Fragen, die abschließenden Diskussionen und Reflexionen werden durch eine hinterfragende Haltung stimuliert und auch die Untersuchungen (mittels heuristischer Vorgehensweisen) werden mit Hilfe von richtungsweisenden Fragen angewiesen und aufrechterhalten.

9.3 Vermutungen aufstellen

„Eine Vermutung ist nichts anderes als eine Aussage, die zwar sehr vernünftig aussieht, deren Richtigkeit aber noch nicht bewiesen werden konnte. (...) Vermutungen wie diese bilden das Rückgrat der mathematischen Arbeit. Man nimmt an, irgendetwas sei der Fall. Oft steht am Anfang einer Vermutung nur ein vages Gefühl für einen bestimmten Sachverhalt; es ist quasi ein erstes Vortasten in der Dunkelheit (Mason, Burton, Stacey, 2008, S. 66 f.)“.

Die Bedeutung von Hypothesen und Vermutungen in der mathematischen Wissenschaft wird anhand dieses Zitates klar ersichtlich und sollte den SchülerInnen auch im Unterricht vermittelt werden. Vermutungen sind richtungsweisend und können den SchülerInnen helfen die folgenden Arbeitsschritte, Untersuchungen und Vorgehensweisen einzugrenzen. Oftmals kann man eine Vermutung oder eine

Hypothese (oder auch eine Frage) erst dann formulieren, wenn man sich mit dem mathematischen Sachverhalt intensiver auseinandergesetzt hat. Diese Auseinandersetzung kann von heuristischen Hilfsmitteln, beispielsweise von Zeichnungen, von Diagrammen, Tabellen, Skizzen oder dem Aufstellen von Gleichungen begleitet und erleichtert werden. Das folgende von mir erstellte Beispiel, das sich an das Aufgabenformat von Ulm (In: Messern, 2009, S. 98) anlehnt, soll dies verdeutlichen.



- a) Überlegt euch zum Bild von Escher möglichst vielfältige mathematische Fragestellungen!
- b) Bearbeitet jene Fragestellung, die euer Interesse geweckt hat!
- c) Stellt eure Ideen und Ergebnisse in der Klasse vor!

Vergesst nicht eure Arbeitsschritte zu dokumentieren!

„Indem ich auf sinnliche Weise den Rätseln, die uns umgeben, aufgeschlossen gegenüberstehe und meine Beobachtungen überdenke und analysiere, komme ich mit dem Gebiet der Mathematik in Berührung. Obwohl ich über keinerlei exakt-wissenschaftliche Ausbildung und Kenntnisse verfüge, fühle ich mich oft mehr mit Mathematikern als mit meinen eigenen Berufskollegen verwandt (M. C. Escher, „Grafiek en Tekeningen“, 1960)“.

Abb. 10: Regelmäßige Flächenaufteilung – Reptilien (Zitat und Bild: Escher M.C.)

Die folgende Herangehensweise wird zu demonstrativen Zwecken angenommen und soll eine mögliche Bearbeitung durch SchülerInnen darstellen. Angenommen, die Frage, die im Interesse der lernenden Person steht, lautet: „Mit welchen Parkettsteinen ist es möglich eine Ebene lückenlos zu überdecken, ohne dass es zu einer Überlappung der einzelnen Steine kommt?“ Natürlich darf an dieser Stelle nicht ausgeschlossen werden, dass der/die eine oder andere im Stande ist spontan eine Vermutung zu äußern. Einige werden hingegen eine skizzenhafte Darstellung

unterschiedlicher Parkette zur Erreichung einer plausiblen Annahme heranziehen. Die Konstruktion eines Parketts mit einheitlichen, regelmäßigen n -Ecken, bei denen die Kacheln Kante an Kante angeordnet sind, kann beispielsweise auf die Vermutung hinführen, dass eine solche Überdeckung nur mit gleichseitigen Dreiecken, Quadraten oder regulären Sechsecken möglich ist. Andere SchülerInnen könnten in ihren Überlegungen und Parkettierungen mehrere regelmäßige Vielecke berücksichtigen und zu Recht vermuten, dass es dabei zwar begrenzt viele, jedoch mehrere Möglichkeiten gibt als mit nur einem Typ regulärer n -Ecke. Wiederum andere könnten sich direkt mit Eschers Bild auseinandersetzen und auf Grund des Musters, bei dem eine Parallelverschiebung von Tieren gleicher Farbe und die Tatsache, dass bei einer 120° -Drehung an bestimmten Punkten (an denen jeweils drei Pfoten, Knie oder Köpfe verschiedenfarbiger Tiere zusammenfallen) das gesamte Muster (bis auf die Färbung) unverändert bleibt, ihre Vermutungen aufstellen (Hartfeldt und Henning, 2002).

Diese Annahmen und Ideen beruhen somit auf einer vorangegangenen Beschäftigung mit dem mathematischen Sachverhalt und können nur schwer einer strikten Abfolge von Arbeitsphasen zugeordnet werden. Besonders die isolierte Darstellung des Vermutens und Hypothesenbildens am Beginn eines Lernprozesse ist zu hinterfragen, da dieser Arbeitsschritt sehr stark in anderen Aktivitäten des forschenden Lernens eingebettet ist. Schließlich lassen sich Annahmen (wie eben dargestellt) oft erst nach Untersuchungen und „Experimenten“ erkennen und formulieren.

9.4 Plan erstellen und Vorgehensweisen festlegen

In Kapitel 5 wurde erläutert, dass ein planmäßiges, methodisches Vorgehen für das forschende Lernen unerlässlich ist. Wie eine solche Planung aussehen kann und mit welchen Fragen eine derartige Erstellung angeleitet werden kann, soll mit der Aufgabe „Glatteis in Dornbirn“ erläutert werden. Angenommen, die SchülerInnen interessieren sich dafür, wie viele Tonnen Salz jährlich im Durchschnitt auf die Realschulstraße (jene Straße, an der das Gymnasium liegt) gestreut werden. Die Menge, die jährlich zur Bestreuung aller Straßen benötigt wird, kann aus dem Angabetext herausgefiltert werden. Die Fläche, auf die sich die 600 Tonnen Salz verteilen, ist jedoch noch unklar und muss zuerst ermittelt werden. Der Plan, der das Vorgehen klären soll, kann mittels

Orientierungsfragen erstellt werden. Bönsch (2008, S. 236) führt in diesem Zusammenhang die Fragen „Wie können wir das überprüfen?“, „Wo können wir nachschlagen?“, „Wo finden wir einen Experten?“, „Wie können wir das untersuchen?“ usw. an. Die nachfolgende Abbildung soll darstellen, in welche Richtungen die Fragen leiten und auf welche Vorgehensweisen sie hinweisen können.

Wo können wir das nachschlagen?	Wie können wir das untersuchen?	Wo finden wir einen/eine Experten/Expertin?
• www.dornbirn.at • Flächenwidmungsplan • Vorarlberg-Atlas • Flächenwidmungsplan • Straßenkarte	• Google Maps • Route berechnen • Google Earth • Messung	• Amt der Stadt Dornbirn • e-mail • persönlicher Besuch

Abb. 11: Erstellung des Untersuchungsplans mittels Orientierungsfragen (Villotti, 2010)

Eine erste Überlegung über die Gesamtfläche der Verkehrswege könnte auf den Flächenwidmungsplan, die Flächenwidmungskarte oder die Straßenkarte im Vorarlberg-Atlas führen. Diese eignen sich zwar, um etwas Klarheit zu schaffen, die notwendigen Werte können sie jedoch nicht liefern. Auch mit Hilfe der Untersuchungen mittels Google Maps oder Google Earth können nur ungenaue Ergebnisse erzielt werden. Die Fläche der Realschulstrasse kann mittels Google Earth allerdings relativ gut berechnet werden, in dem man sie, auf großmaßstäbiger Grundlage, ausmisst. In diesem Fall ist es sinnvoll, sich bei einem/einer Experten/Expertin zu erkundigen. Auch in meinem „Probedurchlauf“ lieferte das Amt der Stadt Dornbirn (Abteilung Tiefbau) die gewünschten Daten.

Anhand dieser Ausgangsfrage und der darauf aufbauenden Untersuchungen und Recherchen wurde ein weiterer Aspekt forschenden Lernens ersichtlich. Die offene, anwendungsorientierte Aufgabe und die freie Themenwahl kann dazu führen, dass sich die Ermittlungen zum Teil auch außerhalb eines mathematischen Rahmens abspielen können. Mit einer fächerübergreifenden Bearbeitung einer solchen Aufgabe, in diesem Fall mit dem Unterrichtsfach Geographie und Wirtschaftskunde, könnte diese Tatsache jedoch berücksichtigt bzw. genutzt werden. Die von Bönsch angeführten

Orientierungsfragen, die für alle Unterrichtsfächer gleichermaßen konzipiert wurden, eignen sich in diesem Zusammenhang gut zur Erstellung eines Planes. Orientierungs- bzw. Hilfsfragen, die sich explizit auf das mathematische Arbeiten und Problemlösen beziehen, wurden beispielsweise von Leuders (2003, S. 134 f.) erstellt und sind in der folgenden Abbildung angeführt.



Analogien bilden, übertragen: Kann ich ein Objekt/eine Situation/einen Zusammenhang übertragen auf eine andere Situation?	Kombination: Was passiert, wenn ich Idee 1 und Idee 2 zusammenführe? Lassen sie sich irgendwie kombinieren? Muss ich dazu etwas weglassen oder verändern?
Aufteilen: Besteht eine Situation aus mehreren Teilen? Kann man sie einzeln betrachten und unabhängig verändern? Wie wirkt sich das auf den anderen Teil/auf das Gesamtproblem aus?	Spezialfälle/Extremfälle finden: Sind unter allen Beispielen bestimmte besondere Fälle? Welche Beispiele scheinen besonders untypisch? Was kann man daraus lernen?
Darstellungswechsel: Kann ich dasselbe als Bild/durch Zahlen oder Formeln darstellen?	Überschreiten: Was ist alles noch möglich? Was wäre, wenn es ganz anders wäre?
Variation der Voraussetzungen: Welche Voraussetzungen kann ich verändern? Welche Bedingungen kann man erst einmal weglassen? Kann ich versuchsweise irgendetwas an den Voraussetzungen/dem Gegebenen ändern?	Variieren des Weges: Was passiert, wenn ich einmal an einer Stelle anders vorgehe, verschiedene andere Objekte einsetze, verschiedene andere Zahlen/Objekte/Annahmen wähle?
Alternativen: Was, wenn es anders wäre? Gibt es einen ganz anderen Weg, hierüber nachzudenken?	Unterscheiden: Welche Zahlen/geometrischen Verhältnisse/logischen Beziehungen spielen hier eine wesentliche Rolle, welche sind nebensächlich?
Systematisches Vergleichen: Welche Gemeinsamkeiten oder Unterschiede stecken in zwei Situationen? Was kann man daraus lernen?	Ausschöpfen: Welches sind alle Möglichkeiten/Beispiele? Wenn man nicht alle einzeln darstellen kann, wie müsste man wenigstens prinzipiell vorgehen?
Ungerichtetes Probieren: Kann ich einmal alle Zahlen/Wege/Darstellungen durchprobieren? Wann komme ich weiter/wann nicht? Geht es immer? Was ergibt sich daraus, wenn es nicht geht?	Muster suchen: Gibt es Wiederholungen, Regelmäßigkeiten, Auffälligkeiten? Ist es nahe liegend/notwendig, dass die Muster so aussehen oder könnte es auch anders sein? Unter welchen Bedingungen?
Anwenden: Welche Beispiele/Anwendungssituationen gibt es für eine Regel/eine Situation/ein Objekt? Unter welchen Bedingungen funktionieren sie? Wann funktionieren sie nicht? Kann man in diesen Fällen sagen, warum?	Beispiele finden/Spezialisieren: Welche (weiteren) Beispiele gibt es für einen Zusammenhang/eine Situation? Gibt es einige unterschiedliche Beispiele für einen Zusammenhang? Gibt es besonders einprägsame Beispiele? Wie sieht das typische Beispiel aus?
Vereinfachen: Was kann man erst einmal außer Acht lassen, welche Bedingungen einfacher machen? Was ergibt sich dann? Was passiert, wenn man nun wieder die schwierigere Bedingung wählt? Wenn man nicht weiterkommt, warum?	Fehler nutzen: Wo habe ich in Gedanken oder auf dem Papier einen Fehler gemacht/etwas zunächst nicht richtig verstanden? Woran lag es – etwa am Problem? Ließe sich hieraus vielleicht etwas Sinnvolles machen? Welche Voraussetzungen müssten dafür anders sein?

Abb. 12: Strategiekärtchen (Leuders, 2003, S. 134)

Leuders schlägt diese „Strategiekärtchen“ vor allem als Hilfestellung für das Problemlösen vor, bei denen eine heuristische Strategie „(...) explizit benannt, durch schülernah formulierte Fragen umschrieben und durch eine Musteraufgabe (z.B. auf der Rückseite) belegt werden (Leuders, 2003, S. 135)“. Die Strategien und die daraus abgeleiteten Fragen können die SchülerInnen bei der Suche nach geeigneten Techniken und Methoden unterstützen und ein planvolles Vorgehen bzw. das Erstellen eines Planes erleichtern. Diese Fragen können nicht nur als Orientierungshilfe und Grundlage eines Arbeitsplanes herangezogen werden, sondern sollten vor allem die nachfolgende Phase bewusst begleiten.

9.5 Untersuchungen durchführen

Im Rahmen forschenden Lernens werden die Schüler und Schülerinnen immer wieder mit Schwierigkeiten, Fragestellungen und Aufgaben konfrontiert, die keinen mathematischen Algorithmus, sondern den Einsatz von Lösungsstrategien und kreativen Entscheidungen fordern. Heuristische Verfahren werden dort eingesetzt, wo kein zuverlässiger Algorithmus bekannt ist oder dieser nicht existieren kann. Aber auch dann, wenn der Rechenaufwand zu umfangreich ist, wird auf heuristische Strategien, Prinzipien oder Hilfsmittel zurückgegriffen (Brock Haus, 2006, S. 427 f.). Man muss an dieser Stelle allerdings erwähnen, dass Problemstellungen, die aufwendige Rechenarbeiten oder komplizierte geometrische Konstruktionen verlangen, mit dem Computer als Werkzeug immer besser erschließbar werden (Ulm, In: Messner, 2009, S. 102 f.). Das Softwareangebot für den Mathematikunterricht hat sich nach Lehmann (2003, S. 26 f.) in den letzten Jahren stark verbessert und reicht von Computeralgebrasystemen (DERIVE, MAPLE, MATHCAD) über dynamische Geometriesysteme (EUKLID, CABRI, SKETCHPAD, GEONEXT, CINDEREL-LA) und Funktionenplotter (ANIMATO) bis hin zu Tabellenkalkulationsprogrammen (EXCEL, ANALYGEO, POVRAY). Ulm (In: Messner, 2009, S. 102 f.) erkennt in den unterschiedlichen Softwaresystemen eine Möglichkeit das forschende Lernen im Mathematikunterricht entscheidend zu unterstützen.

Heintz (2005) verweist beispielsweise auf die dynamische Geometriesoftware „Euklid DynaGeo“, mit der das „(...) Erforschen von Zusammenhängen an rechtwinkligen

Dreiecken auf individuellem Niveau ermöglicht“ (Heintz, 2005, In: Mathematik lehren, S. 48) wird. Dabei soll allerdings nicht nur der Sinn und die Handhabung der dynamischen Geometriesoftware von den SchülerInnen erfahren, sondern auch die Grenzen der DynaGeo-Konstruktionen aufgezeigt werden (Heintz, 2005). Auf Grund der Entwicklung moderner Mathematiksoftware, der zunehmenden Verfügbarkeit und der meist erschwinglichen Preise gewinnt der computerunterstützte Mathematikunterricht an immer größerer Bedeutung. Zwar soll an dieser Stelle auf die Vorteile des Einsatzes mathematischer Software im Rahmen forschenden Lernens hingewiesen werden, nähere Erläuterungen und Einsatzmöglichkeiten werden im Zuge dieser Diplomarbeit allerdings nicht berücksichtigt. Zudem kann durch den Einsatz mathematischer Software zwar das heuristische Vorgehen unterstützt, jedoch nicht ersetzt werden.

Heuristische Vorgehensweisen dienen im allgemeinen dem Auffinden von befriedigenden (jedoch nicht notwendigerweise optimalen) Lösungen komplexer Probleme (Brock Haus, 2006, S. 427 f.) und können auch wie folgt definiert werden:

„Heuristische Vorgehensweisen (Prinzipien, Strategien, Hilfsmittel) sind vor allem dadurch charakteristisch, daß sie vom konkreten Inhalt der zu lösenden Aufgabe weitgehend unabhängig sind und daß sie den Aufgabenlöser zum Aufbau von Suchräumen für effektive Lösungsvarianten bei beliebigen Aufgaben befähigen (König, In: Der Mathematik-Unterricht, 1992, Heft 3, S. 24)“.

Heuristische Strategien, Prinzipien und Hilfsmittel werden im Mathematikunterricht vor allem im Bezug auf das Problemlösen betont. Mathematiker wie Pólya, dessen Werk „Schule des Denkens – vom Problemlösen mathematischer Probleme“ (1949) von Winter (1991, S. 178) als „Bibel der Heuristik“ bezeichnet wurde, setzten sich intensiv mit dieser Thematik auseinander. Bestimmt können begabte SchülerInnen beim forschenden Lernen heuristische Verfahren selbst entwickeln, der Lernprozess kann bei anderen, die mathematische Modelle und Strategien nicht situationsgerecht anwenden können, jedoch schnell zum Erliegen kommen. Die bewusste Vermittlung heuristischer Regeln und Hilfsmitteln kann die fehlende Intuition oder mangelnde geistige Beweglichkeit mancher SchülerInnen kompensieren, ohne dass es zu einer Beeinträchtigung der schöpferischen Entwicklung bei begabten SchülerInnen kommt

(König, In: Der Mathematik-Unterricht, 1992, Heft 3, S. 24). Eine weitere Problematik, mit der man sowohl im Rahmen forschenden Lernens als auch beim Problemlösen oftmals konfrontiert wird, wird von Kilka, Tietze und Wolpers (1997) angesprochen. „Häufig löst der Schüler relativ willkürlich einzelne Teile aus dem Kontext der Aufgabe, die ihm vertraut sind, und wendet auf diese Teile wieder relativ willkürlich Regeln und Algorithmen an (Kilka, Tietze und Wolpers, 1997, S. 98)“. Dem Fehlen einer geeigneten Strategie, die ein gezieltes und planmäßiges Herangehen ermöglicht, kann mit heuristischen Regeln und Prinzipien entgegengewirkt werden. Bei dem Vertrautmachen der SchülerInnen mit heuristischen Vorgehensweisen ist zu beachten, dass sich diese nicht durch einen LehrerInnenvortrag, sondern nur durch eigenes Erleben und Anwenden erlernen lassen. Dazu ist es erforderlich, günstige Aufgaben auszuwählen (Heyer und König, In: Der Mathematik-Unterricht, 1992, S. 51) und anhand dieser die einzelnen heuristischen Prinzipien, Strategien und Hilfsmittel aufzuzeigen. Als Ziel heuristischer Schulung führt König (1992) die Befähigung der SchülerInnen an, sich beim Lösen von Aufgaben oder bei der Suche nach neuen Erkenntnissen weitgehend inhaltsunabhängige Fragen stellen oder Impulse geben zu können, um auf diese Weise ihre geistige Tätigkeit möglichst selbst steuern zu können (König, 1992, S. 25). Die folgende Einteilung, welche einige heuristische Prinzipien, Strategien und Hilfsmittel aufzeigen soll, orientiert sich an der Auflistung von Bruder (In: Flade, 2000, S. 72.).

Allgemeine heuristische Prinzipien	Heuristische Strategien
Analogieprinzip	Das systematische Probieren
Invarianzprinzip	Das Vorwärtsarbeiten
Zerlegungsprinzip	Das Rückwärtsarbeiten
Rückführungsprinzip	Die Suche nach Beziehungen
Transformationsprinzip	Heuristische Hilfsmittel
Symmetrieprinzip	Informative Figur (Skizzen)
Extremalprinzip	Tabelle und Lösungsgraph
Rekursionsprinzip	Strukturierte Textdarstellung

Tab. 5: Heuristische Prinzipien und Strategien
(Bruder, In: Flade und Herget, 2000, S. 72)

Die Verinnerlichung heuristischer Verfahren umfasst nach Bruder (In: Flade und Herget, 2000, S. 74) drei Phasen. In der ersten Phase wenden die SchülerInnen bestimmte Vorgehensweisen unbewusst an, die Gewöhnung steht im Vordergrund. Erst in der darauffolgenden Phase wird das heuristische Element bewusst beschrieben und benannt. Dabei lernen die SchülerInnen die verallgemeinerten Fragestellungen für die Anwendung der/des heuristischen Strategie/Prinzips. Die zweite Phase wird von markanten Beispielen getragen, die den SchülerInnen die unterschiedlichen Vorgehensweisen deutlich machen und als Musteraufgaben dienen können. Das Üben der bewusst gewordenen heuristischen Elemente mit Hilfe spezieller Aufgaben bildet die letzte der drei Phasen. Das folgende Beispiel „Wasser holen“ kann als exemplarische Musteraufgabe angesehen werden, welche das Rückwärtsarbeiten veranschaulichen soll. Eine solche Aufgabe könnte sich auf der Rückseite der Strategiekärtchen (vgl. Abb. 12) befinden und den SchülerInnen als Erinnerungs- und Orientierungshilfe dienen.

Wasser holen

Wie kann man von einem Fluss genau 6-Liter Wasser herausholen, wenn man nur zwei Gefäße zur Verfügung hat, einen 4-Liter Eimer und einen 9-Liter Eimer, um damit zu messen?

Diese Aufgabe kann mit Hilfe des *Rückwärtsarbeitens* leichter gelöst werden und mit den Fragen „Hilft es, wenn ich beim gewünschten Resultat anfangen?“ und „Welche Operationen können mich zu diesem Ergebnis führen?“ gelenkt werden. Man konzentriert sich also auf das gewünschte Ziel und stellt sich die Frage, von welcher vorhergehenden Lage aus man dieses erreichen kann (Polya, 1949, S. 204). Betrachtet man nun den Endzustand, so kann man davon ausgehen, dass 6 Liter Wasser im größeren 9-Liter-Eimer sein sollen. Wie lässt sich nun dieser Endzustand erreichen? Wie sieht der Vorzustand aus? Die möglichen Vorzustände können folgendermaßen aussehen:

- (1.) Der 9-Liter-Eimer enthält 2 Liter. (2.) Der 4-Liter-Eimer enthält 1 Liter.

Das Auffüllen mit dem 4-Liter-Eimer führt im ersten Fall zum gewünschten Endzustand. Im zweiten Fall wird aus dem angefüllten 9-Liter-Eimer soviel in den 4-Liter-Eimer gegossen, dass dieser voll wird (A und B, Abb. 13). Mit den beiden Eimern ist es möglich einen Liter abzumessen. Dazu muss man nur mit dem großen, vollen Eimer ein zweites Mal den kleinen Eimer anfüllen (C und D, Abb. 13). Es bleibt ein Liter übrig, den man nun in den kleinen umfüllen kann (E und F, Abb. 13). So kann der Vorzustand (2.) erreicht werden.

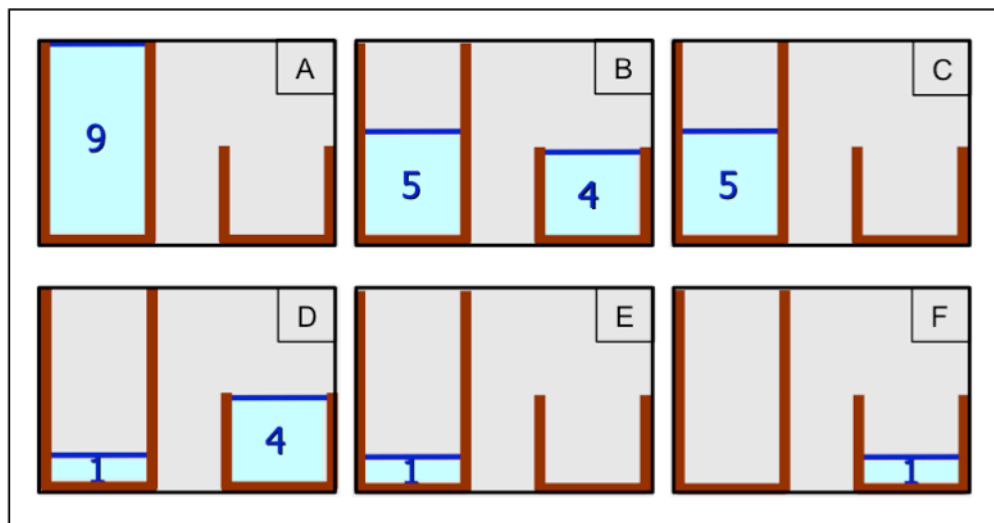


Abb. 13: Gewünschter Vorzustand (2.) (Grams, 2009)

Durch Füllen des großen 9-Liter-Eimers und anschließendes Umfüllen von 3 Litern in den kleineren 4-Liter-Eimer gelangt man zum gewünschten Endzustand.

Polya (1949) geht davon aus, dass die meisten Leute die beiden leeren Eimer zur Ausgangssituationen ihrer Überlegungen machen würden, um durch anschließendes Füllen und Leeren das „Rätsel“ zu lösen. Dabei kann der Endzustand nach vielen Versuchen zufällig erreicht werden. „Aber besonders tüchtige Leute oder solche, die das Glück hatten, in ihrem Mathematikunterricht etwas mehr als reine Schablone-Verfahren zu lernen, verbringen nicht zu viel Zeit mit solchen Versuchen, sondern wenden die Sache um und fangen an, rückwärts zu arbeiten (Polya, 1949, S. 200 f.).“

Die Bedeutung heuristischer Vorgehensweisen für das forschende Lernen

Forschendes Lernen wird vom Unklaren, von Fragen und Widersprüchen geleitet und verlangt von den SchülerInnen, sowohl beim Auffinden geeigneter Fragen als auch bei deren Lösung ein hohes Maß an geistiger Beweglichkeit. Bruder (2000) zählt dazu beispielsweise die Reduktion, Reversibilität, Aspektbeachtung und den Aspektwechsel. Das Ziel heuristischer Bildung, das „unterbewusste Nutzen heuristischer Elemente als Kompensation mangelnder intuitiver geistiger Beweglichkeit (Bruder, In: Flade und Herget, 2000, S. 74)“ kommt somit dem forschenden Lernen zugute und stellt einen nicht unbedeutenden Aspekt des Konzeptes dar. Ein eigenständiges, selbstverantwortliches und nachhaltiges Lernen kann zudem nur dann erzielt werden, wenn die SchülerInnen im Mathematikunterricht wirklich „mehr als reine Schablone-Verfahren“ lernen und ihr Lernen mit Hilfe geeigneter Fragen und Strategien aufrecht erhalten können. Das Beispiel „Wasser holen“ zeigt zudem sehr schön auf, dass sich ein auf heuristischen Kenntnissen beruhendes Vorgehen von Glück, Zufall und Eingebung distanziert und ein systematisches, methodisches und strukturiertes (vgl. Kapitel 5.2) Handeln in den Mittelpunkt stellt. Auch der Grundgedanke forschenden Lernens in der Mathematik, der Nachvollzug des Erkenntnisprozesses, ist mit Heuristik eng verbunden. Zwar handelt es sich bei der Mathematik um eine beweisende Wissenschaft, ein einseitiges Bild von dieser Wissenschaft sollte allerdings verhindert werden. Weder die Bedeutung logisch-demonstrativen Schließens, noch die Rolle heuristischen Arbeitens für die Mathematik darf dabei außer Acht gelassen werden.

„(...) Im Gegensatz zu dem logischen, demonstrativen Schließen, das zwar für den Aufbau der Wissenschaft unerlässlich ist, aber keine neuen Erkenntnisse von der Umwelt verschaffen kann, vermag das plausible Denken in der Wissenschaft wie im Alltagsleben zu solchen Erkenntnissen zu führen. (...) Das im allgemeinen nicht auf sicherem logischen Wege gefundene (d.h. nicht durch Deduktion erhaltene) Ergebnis, die Lösung eines Problems oder ein neuer Lehrsatz, wird erst hinterher durch Beweis, also durch logisch-demonstratives Schließen dem Gebäude der Mathematik angegliedert und erhält damit dieselbe Sicherheit wie dessen Grundlagen. Dabei aber verlangt das Finden des Beweises wiederum heuristisches, also plausibles Denken (Hartkopf, In: Der Mathematikunterricht, 1964, S. 63)“.

9.6 Ergebnisse einordnen, beurteilen und reflektieren

In dieser Phase forschenden Lernens sollen die Lernenden die erarbeiteten Ergebnisse beurteilen und einordnen, über mathematische Begriffe, Methoden, heuristische Strategien und Konzepte reflektieren. Mit dem Verweis auf intellektuelle Überforderung und fehlendes mathematisches Grundwissen der SchülerInnen wird ein Nachdenken und Reflektieren über Mathematik jedoch oftmals vernachlässigt (Prediger, 2002, S. 399). Dem Irrtum, Reflexion müsse immer auf wissenschaftstheoretischer oder metamathematischer Ebene stattfinden, wirkt Neubrand (1990) entgegen, in dem er auf die differierenden Reflexionsebenen aufmerksam macht. Die Ebenen reichen von Gedanken über mathematische Gegenstände und Inhalte bis hin zu wissenschaftstheoretischen Überlegungen. Zudem können diese mathematikbezogenen Reflexionen in unterschiedliche Formen gegliedert werden (nach Bauer, In: Prediger, 2002), zu denen die Gegenstands- und Inhaltsreflexion, Bedeutungs- und Sinnreflexion und die Selbstreflexion gehören. In der nachfolgenden Tabelle werden die Ebenen und Formen anhand des exponentiellen Wachstums verdeutlicht. Beurteilungen, Einschätzungen und Reflexionen können somit auch im Rahmen forschenden Lernens auf unterschiedlichen Ebenen mit der Zielsetzung einer möglichen Erreichung aller Stufen stattfinden und sich am Wissenshorizont der Lernenden orientieren.

	Gegenstands- und Inhaltsreflexion	Bedeutungs- und Sinnreflexion	Selbstreflexion
EBENE DER MATHEMATISCHEN GEGENSTÄNDE UND INHALTE	Was ist exponentielles Wachstum? Was sind die Unterschiede zu anderen Wachstumsformen? Wie lautet die Funktionsvorschrift?	Wo kommen exponentielle Wachstumsprozesse im Alltag vor? In welchem Sinne geht es bei exponentiellem Wachstum um gleichmäßiges Wachstum?	Wo habe ich Schwierigkeiten mit dem Begriff des exponentiellen Wachstums? Was fällt mir leicht? Wieso?
EBENE DES BEWUSSTEN HANDWERKENS	Wie kann man exponentielles Wachstum in den verschiedenen Repräsentationsformen (Wertetabelle, Graph, Formel, verbale Beschreibung) darstellen bzw. identifizieren?	Was bringt (mir) die Beschreibung von Wachstum in unterschiedlichen Repräsentationsformen? Wozu die Funktionsvorschrift? Was hilft es, einen Prozess als exponentiell zu identifizieren?	Berichtigung der Klassenarbeit: „Was ich hier eigentlich gedacht hatte, war... Das entspricht nicht der mathematischen Vorgehensweise, weil...“

	Gegenstands- und Inhaltsreflexion	Bedeutungs- und Sinnreflexion	Selbstreflexion
EBENE DES HINTERFRAGENS MATHEMATISCHEN ARBEITENS	Was sind Chancen und Grenzen der Erfassung realer Wachstumsprozesse durch Exponentialfunktionen? (Stichwort Prognosen)	Wieso will man (soll ich) überhaupt Wachstumsprozesse mit mathematischen Funktionen erfassen? Wo ist dies nicht bedeutsam?	Was hat mein Denken über und meine Erfahrung mit Wachstumsprozessen mit ihrer mathematischen Erfassung zu tun? Welche Vorstellungen von Gleichmäßigkeit habe ich, welche ist hier erfasst?
WISSENSCHAFTS- THEORETISCHE EBENE	Wo wird Mathematik hier als Mittel zur Beschreibung von Realität benutzt, wo wird Realität geschaffen?	Welche Rolle nimmt Mathematik in der Gesellschaft ein, wenn mit Exponentialfunktionen prognostiziert wird?	Welche Auswirkungen hat die gesellschaftliche Verwendung dieser mathematischen Mittel für mich?

Tab. 6: Wege zum Nachdenken auf vier Ebenen an Beispielen zum exponentiellen Wachstum (Prediger, 2002, S. 402)

Allgemeingebildete Menschen sollten nach Auffassung von Fischer (In: Peschek, Prediger und Schneider, 2008) besonders über ein Grundwissen und Reflexionswissen verfügen, da in einem arbeitsteilig organisierten, demokratisch aufgebauten System die Kommunikationsfähigkeit mit ExpertInnen kontinuierlich an Bedeutung gewinnt. Diese legen ihre ExpertInnenmeinungen, gründend auf allen drei Kompetenzbereichen (Grundwissen, operatives Wissen und Können, Reflexionswissen) zwar vor, die Beurteilung und Einschätzung ist jedoch Aufgabe jedes/jeder Einzelnen. Auch im Zuge forschenden Lernens können die SchülerInnen Resultate und Erkenntnisse gewinnen (statistische Kennzahlen, von einer Software berechnete Parameter, ExpertInnen-Antworten, Ergebnisse aus Umfragebögen usw.), die zuerst interpretiert, bewertet und beurteilt werden müssen. Für Peschek, Prediger und Schneider (2008) ergeben sich dadurch unterschiedlichste Anforderungen an den Mathematikunterricht. Beispielsweise das Ziel, Antworten der ExpertInnen verstehen, interpretieren und beurteilen zu können. Wobei nicht vorrangig auf innerfachliche Richtigkeit, sondern besonders auf die Bedeutung für das eigene Problemfeld geachtet werden sollte. Weiters die Forderung eine Synthese verschiedener, eventuell auch sich widersprechender Expertenurteile anstellen zu können. Peschek, Prediger und

Schneider (2008, S. 7) unterscheiden ebenfalls zwischen verschiedenen Reflexionsarten (nach Skovsmose) und erläutern diese mit Hilfe von Fragen.

Mathematisch orientierte Reflexion:

- Wurden die mathematischen Operationen korrekt durchgeführt?
- Was kann man sich unter diesem mathematischen Begriff vorstellen?
- Wieso gilt dieser Satz?
- Wo liegt hier mein Denkfehler?

Modellorientierte Reflexion:

- Kann ich mit dem gewählten mathematischen Modell das Problem angemessen beschreiben?
- Welche impliziten Annahmen sind hier in die Modellierung eingegangen?

Kontextorientierte Reflexion:

- Warum wird dieses Problem überhaupt mit mathematischen Mitteln beschrieben/gelöst?
- Welche Vorteile bringt dies mit sich, welche Nachteile?
- Was passiert mit dem Kontext durch die Mathematisierung?
- Welche Rolle spielen die mathematischen Modelle und Argumentationen für die Situation?

Lebensweltorientierte Reflexion:

- Wie wichtig ist der mathematische Inhalt bei der Bewältigung meiner lebensweltlichen Probleme?
- Welchen gesellschaftlichen Nutzen, welche Bedeutung hat dieser mathematische Inhalt?

Diese Fragen könnten für den Reflexionsprozess, im Rahmen forschenden Lernens, als Orientierungshilfe herangezogen und gegebenenfalls erweitert werden.

9.7 Ergebnisse präsentieren und diskutieren

In der letzten Phase forschenden Lernens sollen die Ergebnisse einer „Community“ präsentiert werden, damit eine Qualitätskontrolle stattfinden kann. Zudem führt die Akzeptanz der „Forschungsergebnisse“ zu einer Erweiterung des gemeinsamen Wissens (Ulm, In: Messner, 2009). Mahlke (2007, In: Mathematik lehren, S. 46) weist jedoch darauf hin, dass SchülerInnen-Präsentationen nicht zum gängigen Methodenpool des Mathematikunterrichts gezählt werden können. Dabei erkennt Drücke-Noe (2007, In: Mathematik lehren, S. 10) gerade beim Erstellen und Halten von Präsentationen ein Potential unterschiedliche Kompetenzen aufzubauen. Die Kommunikation in und über Mathematik wird gefördert, wobei sowohl das mathematische Argumentieren und Begründen, als auch eine geordnete Darstellung und Visualisierung mathematischer

Gedanken angestrebt wird. Zudem werden die SchülerInnen mit den Vor- und Nachteilen bestimmter Medien und Präsentationsformen konfrontiert, wodurch ein kritischer und reflektierter Medieneinsatz erzielt werden kann.

Die folgende Abbildung von Mahlke (2007, S. 47) stellt eine Sammlung unterschiedlicher Präsentationsformen bzw. Medien dar, die im Mathematikunterricht umgesetzt werden können. Sie können zudem als Anregung für die Ergebnispräsentation im Zuge forschenden Lernens aufgefasst werden.

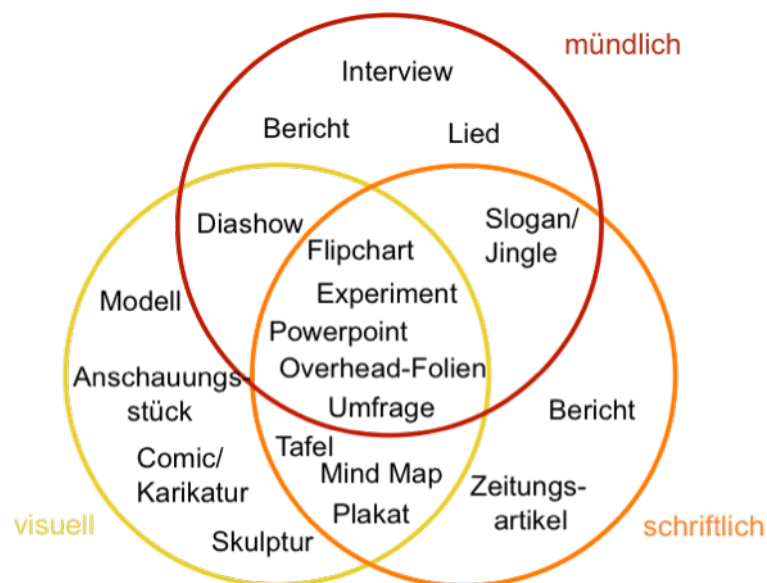


Abb. 14: Präsentationsformen und Medien (Mahlke, 2007, S. 47)

Aufgaben und Themen, die sich für Präsentationen eignen, sollten nach Drücke-Noe und Jahnke (2007) „(...) zunehmend unabhängig vom Lehrer bearbeitet werden können, zunehmend eine eigenständige Recherche der Schülerinnen und Schüler erfordern (forschender Charakter), zunehmend umfangreicher werden und ein multiples Lösungspotenzial aufweisen (Drücke-Noe und Jahnke, 2007, In: Mathematik lehren, S. 143)“. Diese Anforderungen lassen erkennen, dass sich Resultate forschenden Lernens hervorragend präsentieren lassen. Auch die vier Schritte, die nach Drücke-Noe und Jahnke (2007, In: Mathematik lehren, S. 7) zur Präsentation führen, weisen in ihrer Abfolge eine starke Ähnlichkeit mit den Aktivitäten forschenden Lernens auf.

1. *Planen*: Der/Die SchülerIn erschließt das Thema und stellt sich „erkenntnisleitende Fragen“. Informationen zum Thema werden gesammelt und nach ihrer Relevanz bewertet.
2. *Erarbeiten der Inhalte*: Mit Hilfe von Literaturrecherchen, eigener Untersuchungen oder Experteninterviews wird versucht Antworten auf die gestellten Fragen zu finden.
3. *Erstellen der Präsentation*: Die gefundenen Antworten werden bewertet und geordnet. In dieser Phase wird ein dem Inhalt adäquates Präsentationsmedium ausgewählt.
4. *Präsentieren*: In der letzten Phase sollen die Ergebnisse vorgestellt und einem Auditorium verständlich und nachvollziehbar gemacht werden. Dabei werden die Lernenden in die Lage versetzt mathematische Sachverhalte zu erläutern, zu erklären, zu bewerten und einzuschätzen (Drücke-Noe und Jahnke, 2007, In: Mathematik lehren, S. 7 f.).

Die Beurteilungs- und Reflexionsaktivitäten, welche sowohl am Ende des Lernprozesses als auch in den einzelnen Arbeitsschritten forschenden Lernens integriert sein sollten, wurden bereits angesprochen. Auf die Bedeutung der Kommunikation im Mathematikunterricht machen beispielsweise Hußmann und Hefendehl-Hebecker (Mathematik kommunizieren, In: Leuders, 2003, S. 59 – 106) oder Maier, Schweiger und Reichel (Mathematik und Sprache, 1999) aufmerksam. Bezieht man sich wiederum auf den Zyklus forschenden Lernens, so steht die Präsentation nicht isoliert am Ende, sondern soll von einer Diskussion begleitet bzw. abgeschlossen werden. Littleton et. al. (2005) unterscheiden verschiedene interaktive Kooperationstypen hinsichtlich der inhaltlichen Verknüpfungen von Äußerungen im Dialog. Werden konträre Meinungen ausgetauscht ohne dass inhaltlich-argumentativ auf die Stellungnahme des/der Partners/Partnerin eingegangen wird, sprechen Littleton et. al. von „disputational talk“. Um einen „cumulative talk“ handelt es sich, wenn Ideen und Ansichten des/der PartnerIn mehr oder weniger unreflektiert angesammelt und adaptiert werden. Erst im „exploratory talk“ wird eine hohe Gesprächsqualität erreicht, eine gemeinsame inhaltsgebundene Diskussion, geleitet von unterschiedlichen Ideen und Sichtweisen, tritt ein (Nührenbörger, 2009, In: Journal

für Mathematik-Didaktik, S. 149). Schneeberger (2009) beschreibt ein Gespräch auf der Ebene des „exploratory talk“ wie folgt:

„Die höchste Qualität hat ein Gespräch dann, wenn es sich um eine erkundende, erforschende, Hypothesen testende Kommunikation handelt, bei der es um eine kritische Auseinandersetzung mit Ideen und Lösungswegen, um begründetes Argumentieren und um effektive Ko-Operation und nicht bloss ums Interagieren und Austauschen von Ideen geht. Partner engagieren sich kritisch, aber konstruktiv mit den Ideen des anderen, Vorschläge werden in Frage gestellt, angefochten, Gründe werden genannt, Alternativen werden vorgeschlagen (...) (Schneeberger, 2009, S. 170)“.

Eine derartige Gesprächskultur, die sich an der Qualität eines „exploratory talk“ orientiert, sollte sowohl in den einzelnen Phasen forschenden Lernens als auch in den abschließenden Präsentationen und Diskussionen verfolgt werden. Dass Ergebnisse forschenden Lernens durchaus solche Diskussionen und Reflexionen (auf unterschiedlicher Ebene) anregen können, soll mit dem folgenden Lösungsplan zur Aufgabe „Glatteis in Dornbirn“ exemplarisch dargestellt werden. Die folgende Abbildung stellt einen Streuplan dar, mit dem ein Streufahrzeug die abgebildete Fläche im „Vorarlberg-Atlas“ möglichst schnell räumen bzw. bestreuen kann. In diesem Fall wurde angenommen, dass ein Fahrzeug immer nur eine Straßenseite bestreuen kann und deshalb alle Gassen zweimal befahren muss. Zudem wurde davon ausgegangen, dass ein Streufahrzeug in allen Gassen wenden und das Gebiet über unterschiedliche Zufahrtsstraßen erreicht werden kann (über A, U und T). Das Augenmerk lag bei der Erstellung vor allem darauf, keine Straße mehr als zweimal (einmal in jede Richtung) zu befahren. Dieses Ziel wurde, bis auf eine Ausnahme, erreicht. Dadurch konnte die Streuzeit T minimiert werden. Zur Berechnung von $T = l_A/v_A + \dots + l_Z/v_Z$ wurden die Streckenabschnitte von A bis Z durchnummeriert, die Länge des i -ten Abschnittes mit l_i und die jeweilige Geschwindigkeit, mit der ein Streuwagen fahren kann, mit v_i bezeichnet.

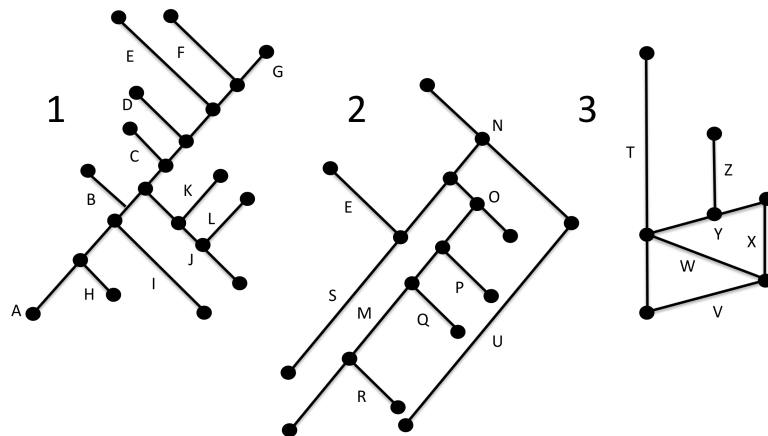
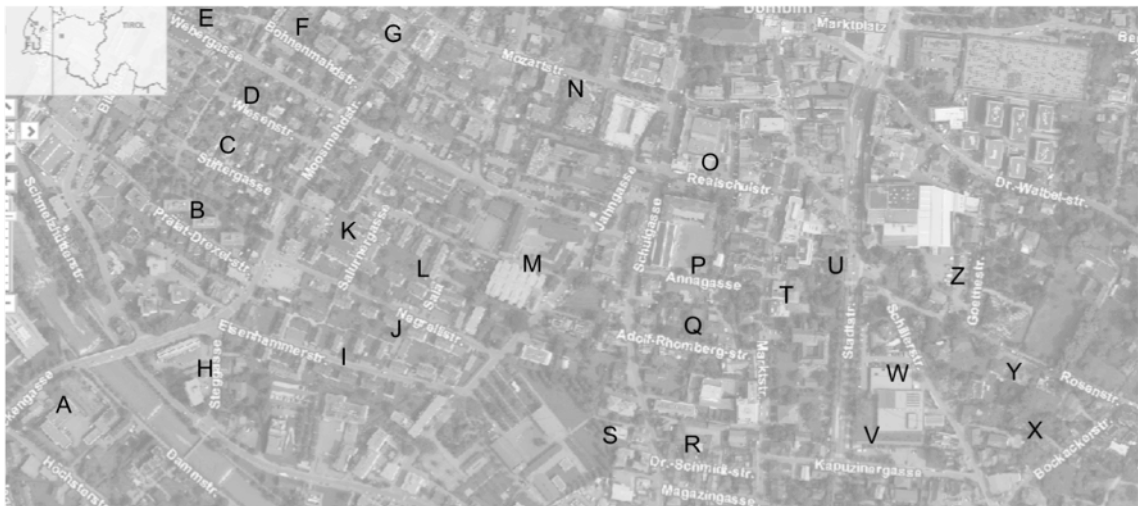


Abb. 15: Zerlegung in mögliche Teilnetze

Auf der Ebene eines „disputational-“ oder „cumulative talks“ würden derartige Resultate ohne weitere kritische Auseinandersetzung mit den Ideen, vorangehenden Annahmen und dem Lösungsweg unreflektiert gesammelt werden. Setzen sich SchülerInnen allerdings kritisch und konstruktiv mit den Ideen der anderen auseinander, so kann dieser Streuplan unterschiedliche Reflexionen bzw. Diskussionen veranlassen. Auf wissenschafts-theoretischer Ebene stellt sich beispielsweise die Frage, was unter einem *effizienten* Streuplan verstanden werden kann. Als wichtigstes Kriterium floss in diesen Streuplan die Dauer der Streuarbeiten ein. Dabei wurden keine Dringlichkeitskriterien, welche die unterschiedlichen Bedürfnisse der Straßen-nutzerInnen berücksichtigen, formuliert. Ein Routenvorschlag, der Straßen mit hohem

Verkehrsaufkommen und starker Nutzung durch FahrradfahrerInnen, FußgängerInnen und Kinder berücksichtigt, könnte als Alternative herangezogen werden. Dabei kann diskutiert werden, welche Rolle die Mathematik in der Gesellschaft einnimmt, wenn sie derartige Faktoren mit einbezieht bzw. außen vor lässt (Bedeutungs- und Sinnreflexion). Dabei stellt sich jedoch die Frage, welche Informationen vorhanden sind und welche Annahmen aufgestellt werden können bzw. müssen, um einen solchen Plan zu erstellen. In diesem Zusammenhang können besonders die Grenzen der Erfassung realer Prozesse thematisiert werden (Gegenstands- und Inhaltsreflexion).

Ein derartiges Diskussionsniveau muss, je nach Klassenstufe und Thematik, von der Lehrperson mehr oder weniger angeleitet werden und stellt sowohl für die Lernenden als auch für den/die LehrerIn eine Herausforderung dar. Soll den SchülerInnen mit dem forschenden Lernen allerdings der Prozess der Erkenntnisgewinnung in Mathematik näher gebracht werden, so muss das Bild des genialen Forschers, der still in seinem Kämmerlein sitzt, seine Ideen und Gedanken nicht mit anderen teilt und versucht, diese mit einem Beweis zu überraschen (Drücke-Noe und Jahnke, 2007, S. 4), überwunden werden. Denn nur wenn eine gemeinsame Kommunikation, Diskussion und Reflexion stattfindet, kann von einer Qualitätskontrolle durch die „Community“ gesprochen werden, erst dann kann das gemeinsame Wissen sinnvoll erweitert werden.

9.8 Resümee

Grundsätzlich kann gesagt werden, dass es zu den einzelnen Phasen forschenden Lernens eine Vielzahl an Anregungen und theoretischen Überlegungen für den Mathematikunterricht gibt. Vom vollständigen Zyklus abgetrennt können die SchülerInnen-Aktivitäten mit Hilfe unterschiedlicher Methoden und Aufgaben (siehe dazu auch das „forschende und entdeckende Lernen am Gymnasium Geringergasse“) angeregt werden. Mit Bruder (2002), Peschek, Prediger und Schneider (2008), Leuders (2003) und König (1992) sind in dieser Diplomarbeit nur eine Auswahl an Mathematik-DidaktikerInnen vertreten, die sich mit den Aktivitäten forschenden Lernens auseinandersetzen. Mit Hilfe dieser konnte unter anderem aufgezeigt werden, dass sich mit der Strategie des Vorwärtsarbeitens das Stellen mathematischer Fragen „trainieren“ lässt, dass Strategiekärtchen entwickelt werden und bei der Anwendung heuristischer Verfahren als Unterstützung dienen können und dass Beurteilungen, Einschätzungen und Reflexionen in verschiedensten Formen und auf unterschiedlichen Ebenen stattfinden können.

Zwar wurden die Phasen stückweise dargestellt, eine isolierte Betrachtung war jedoch kaum möglich. Auf Grund dessen muss nach Analyse der einzelnen SchülerInnen-Aktivitäten folgende Erkenntnis in die Darstellung des Zyklus forschenden Lernens integriert werden: Die einzelnen Phasen forschenden Lernens verschmelzen bei der Bearbeitung eines mathematischen Sachverhalts zum Teil sehr stark, sie entrücken dem Zyklus und sind sowohl in früheren als auch in späteren Arbeitsschritten wieder auffindbar. Diese Tatsache wurde bei der Erstellung des Zyklus-Modells (Abb. 16) berücksichtigt. Das Reflektieren von Ergebnissen findet beispielsweise nicht nur am Ende des Lernprozesses statt, sondern begleitet den Lernprozess ständig. Besonders bei der Beurteilung, Auswertung und Interpretation von Resultaten ist das „Reflexionswissen“ unabdingbar. Weiters ermöglichen Untersuchungen mathematischer Sachverhalte, bei denen heuristische Hilfsmittel und Strategien relevant sind, oftmals erst die Formulierung einer Frage bzw. das Aufstellen einer Vermutung. Die Phase des Untersuchens und Experimentierens wird dadurch zur Ausgangssituation forschenden Lernens. „Forschungs-“, Reflexions- und Orientierungsfragen schaffen ständig neue Impulse und sind grundlegend für den Verlauf des Lernprozesses. Die

Erarbeitung und Formulierung relevanter Fragestellungen ist somit Teil unterschiedlichster SchülerInnen-Aktivitäten im Rahmen forschenden Lernens. Die angesprochenen Überlappungen, Verschmelzungen und die gegenseitige Beeinflussung einzelner Phasen forschenden Lernens, machten die Erstellung der folgenden Abbildung beinahe unmöglich. Trotzdem soll sie als Versuch, die gewonnenen Erkenntnisse darzustellen, in die Diplomarbeit integriert werden. Die eingezeichneten Verbindungspfeile, welche die Wechselwirkungen, Überschneidungen und möglichen Abfolgeänderungen einzelner SchülerInnen-Aktivitäten veranschaulichen, stellen eine persönliche Auswahl dar und können als Anregung aufgefasst werden. Tatsächlich finden eine Reihe weiterer Wechselwirkungen statt.

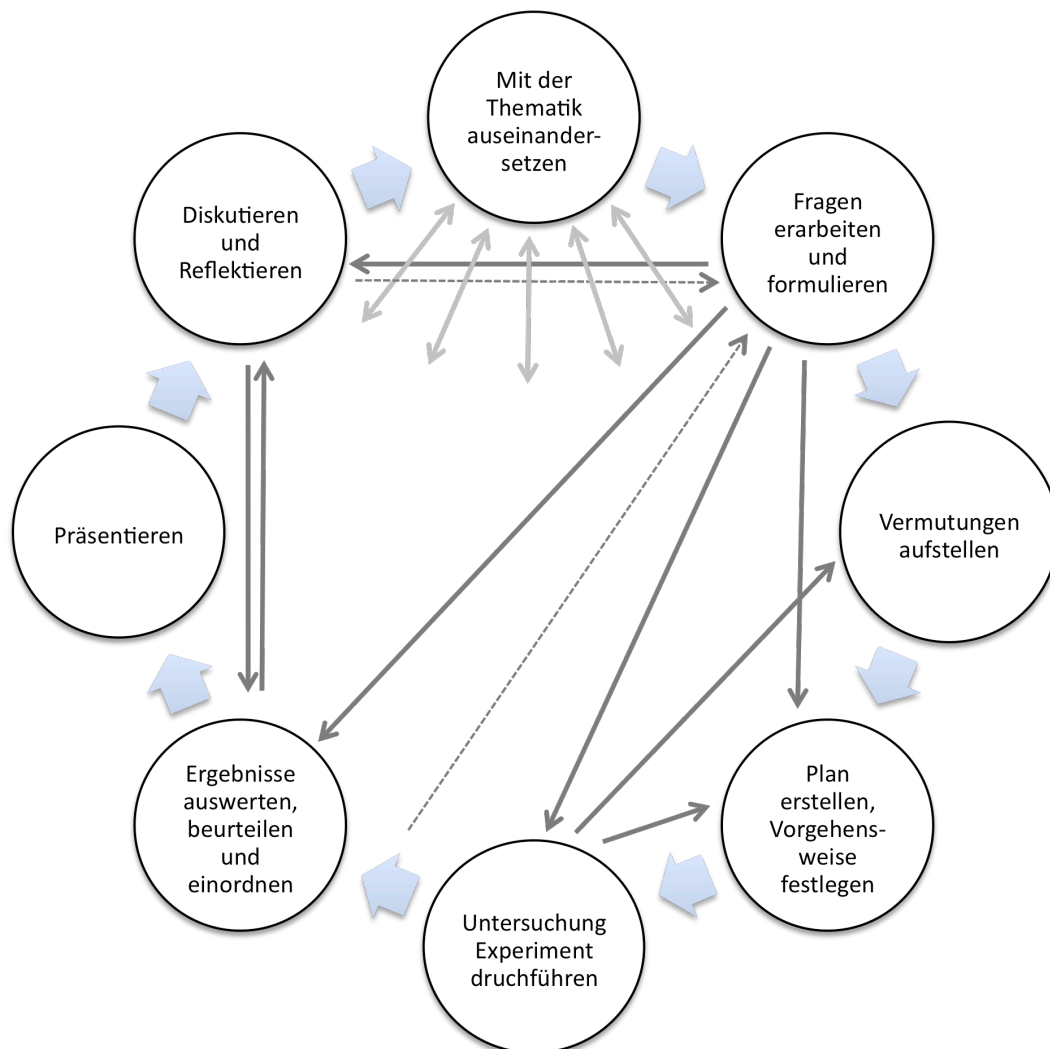


Abb. 16: Der Prozess forschenden Lernens - Aufgegliedert in acht Arbeitsschritte II
(Villotti, 2010)

Die in Abb. 16 aufscheinenden strichlierten Pfeile wurden auf Grund ihrer besonderen Bedeutung bewusst hervorgehoben. Diese sollen nicht nur auf die Tatsache aufmerksam machen, dass bei fehlgeschlagenen Experimenten und Untersuchungen der Zyklus forschenden Lernens von vorne beginnen muss, sondern auf die Möglichkeit einer Entwicklung neuer „Forschungsfragen“ (aus gewonnenen Erkenntnissen) hinweisen. Interessante, weiterführende und vertiefende Fragestellungen lassen sich allerdings oft erst bei der Durchführung von Experimenten oder bei der Beurteilung und Einordnung der Ergebnisse erkennen, weshalb jener Pfeil nicht bei einem der beiden, sondern zwischen diesen beiden Phasen positioniert wurde.

Weiterführende Überlegungen, Unklarheiten und Fragen erwachsen zudem oft aus auf dem Niveau von „exploratory talks“ (vgl. 9.7) stattfindenden Reflexionen und Diskussionen in der Gruppe, womit der zweite strichlierte Pfeil in Abb. 16 begründet werden kann. Das Ziel problemorientierten Lernens, die Entwicklung neuer mathematischer Begriffe (vgl. Leuders (2003), Kapitel 11.1), kann im Zusammenhang mit dem forschenden Lernen um den Aspekt der weiterführenden „Forschungsfragen“ ergänzt werden. Humboldts Appell an die wissenschaftlichen Anstalten, die Wissenschaft als ein noch nicht aufgelöstes Problem zu behandeln und ständig im Forschen zu bleiben (vgl. 4.3), kann somit auch als Aufforderung und Ziel forschenden Lernens betrachtet werden.

10 Forschendes und entdeckendes Lernen am Gymnasium Geringergasse

Sieben Lehrer und Lehrerinnen des Gymnasiums Geringergasse in Wien beteiligten sich im Jahr 2009 an dem Projekt „forschendes und entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht“. Unterstützt wurden sie dabei von der Initiative IMST (Innovationen Machen Schulen Top!), das ein vom BMUKK getragenes Projekt ist und sich die Verbesserung des Unterrichts in den Naturwissenschaften, Mathematik, Informatik und Deutsch zum Ziel gesetzt hat. Ein Teil der von den LehrerInnen des Gymnasiums Geringergasse eingesetzten Materialien zum forschenden und entdeckenden Lernen können unter dem Link http://imst.uni-klu.ac.at/imst-wiki/images/a/a3/1427_Langfassung_Drexler.pdf abgerufen werden. Mag. Adele Drexler und Mag. Katharina Luksch (2010)¹⁰ sind Mathematiklehrerinnen am Gymnasium Geringergasse und Teil des „IMST-Teams“. Sie versuchen mit dem forschend-entdeckenden Zugang die Motivation der SchülerInnen zu steigern und deren Bild von Mathematik zu verbessern. Sie stellen den SchülerInnen Materialien zur Verfügung, mit denen sie Dinge ausprobieren und entdecken können. Im Laufe unserer Gespräche wurde jedoch klar, dass bei den Unterrichtseinheiten zum entdeckenden und forschenden Lernen von den SchülerInnen keinesfalls der gesamte Zyklus durchlaufen wird. Mag. Katharina Luksch führt dies darauf zurück, dass die Zeit für solch eine Auseinandersetzung oftmals nicht ausreicht und dass sich der Zyklus forschenden Lernens, mit all seinen Aktivitäten, nicht mit jeder Thematik vereinbaren lässt. Es können in den Unterrichtssequenzen und Beispielen jedoch Schwerpunkte und Zielsetzungen erkannt werden, die sich mit den einzelnen Phasen forschenden Lernens decken. Neben dem Experimentieren und Untersuchen kommt es immer wieder zu Sequenzen, bei denen das Vermuten, Präsentieren und Fragenstellen im Mittelpunkt des Mathematikunterrichts steht. Mit der folgenden Beispielauswahl soll dies exemplarisch dargestellt werden.

¹⁰ Persönliches Interview - geführt von der Verfasserin, 12.05.2010, Wien

Proportionen und Schlussrechnungen - Versuche

Am 04.05.2010 fand eine Unterrichtsstunde, die unter dem Namen „Projektarbeit: Forschend und Entdeckend“ an die SchülerInnen herangetragen und zum Thema Proportionen (2. Klasse) vorbereitet wurde, statt. Vier Versuche bildeten die Grundlage der Unterrichtseinheit und wurden von den SchülerInnen in Gruppen durchgeführt. Mag. Adele Drexler berichtet davon, dass SchülerInnen solchen „Experimentierphasen“ sehr offen gegenüber stehen und sich diese Erfahrungen positiv auf das Bild von Mathematik auswirken können.

Versuche Proportionen

Versuch 1: Zeichne ein Diagramm und beschrifte die x-Achse mit der Anzahl der Tennisbälle (von 1 bis 10) und die y-Achse mit der Masse in Dekagramm (dag). Lege nun 1 Tennisball auf die Waage und notiere das Gewicht in deinem Diagramm. Dann wiege 2, 3, 4 und 5 Bälle. Wie sieht dein Diagramm aus, wenn du die einzelnen Punkte verbindest?

Versuch 2: Du benötigst für diesen Versuch ein Diagramm, bei dem du auf der x-Achse die Anzahl der Personen einträgst und auf der y-Achse die Anzahl der Zuckerlpackungen. Zähle die Zuckerlpackungen auf dem Tisch und notiere die Anzahl in deiner Tabelle. Wie viele Zuckerlpackungen bleiben für dich, wenn du sie mit 2, 3, 4 ... Freunden teilen müsstest? Wie sieht dein Diagramm aus? Wie viele Zuckerlpackerl hättest du, wenn du mit 12 Freunden teilen müsstest?



Abb. 17: Durchführung der Versuche zum Thema Proportionen (2B)

Die Aufgeschlossenheit gegenüber offenen Aufgaben, Untersuchungen und „Experimenten“ ist eine Voraussetzung forschenden Lernens und wird in vielen

Unterrichtssequenzen, die im Rahmen des Projekts „forschendes und entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht“ konzipiert wurden, verfolgt.

Berechnungen an einer Mozartkugel

Der Ausgangspunkt der folgenden Aufgabe, die von Mag. Katharina Luksch und Mag. Adele Drexler zum Thema „Kugel“ eingesetzt wurde, bildet eine Mozartkugel. Damit die einzelnen Schichten der Schokoladenkugel betrachtet werden konnten, wurde diese in zwei Teile geschnitten. Die Schüler und Schülerinnen wurden anschließend aufgefordert, den Anteil der dunklen Schokolade im Verhältnis zur ganzen Kugel zu schätzen. Während Mag. Katharina Luksch die Frage vorgab, mussten sich die SchülerInnen bei Mag. Adele Drexler eigenständig Fragen erarbeiten. Da den SchülerInnen erst die Volums- und Oberflächenberechnung der Kugel bekannt waren, grenzte sich der inhaltliche Rahmen stark ein. Auf Grund dessen stellten sich die SchülerInnen in dieser Unterrichtseinheit die erhofften Fragen und führten die von Mag. Ingrid Drexler gewünschten Berechnungen durch.

Welches ist die umweltfreundlichste Verpackung?

Auch bei der folgenden Aufgabe, bei der unterschiedliche Quader-Modelle und Fruchtsaftverpackungen in die Stunde mitgebracht wurden, sollten die SchülerInnen ihre Vermutungen äußern. Dabei handelte es sich um Quader mit einheitlichem Volumen aber unterschiedlicher Form. Mag. Adele Drexler konnte beobachten, dass die meisten SchülerInnen davon ausgingen, dass der schmäleste, längste Quader das größte Volumen aufweisen würde. Die Berechnungen führten einerseits zu einer Revidierung der Vermutungen, teilweise aber auch zu der Annahme, dass alle 1-Liter-Verpackungen dieselbe Oberfläche aufweisen würden. So kam es bei der Bearbeitung der Frage „Welches ist die umweltfreundlichste Verpackung?“ ebenfalls zu überraschenden Ergebnissen und neuen Erkenntnissen.

Zu den SchülerInnen-Aktivitäten forschenden Lernens gehört die Fähigkeit Vermutungen aufstellen zu können. Dieser Teilaspekt wurde im Zuge dieser beiden zuletzt angeführten Unterrichtssequenzen aufgegriffen, in denen SchülerInnen-Vermutungen thematisiert und reflektiert wurden. Man muss jedoch erwähnen, dass

es sich in diesem Zusammenhang um Schätzungen handelt, Vermutungen über mathematische Sachverhalte werden nicht getätigt.

Merkwürdige Punkte im Dreieck

Die merkwürdigen Punkte im Dreieck wurden mit Hilfe eines Gruppen-Puzzles erarbeitet. Zu Beginn wurden die SchülerInnen in Stammgruppen eingeteilt, die mit Hilfe unterschiedlicher Aufgabenstellungen (siehe DREIECK-Forschung) auf die verschiedenen merkwürdigen Punkte im Dreieck hingeführt werden sollten. Der Erarbeitung in der Stammgruppe folgte die Aufteilung in ExpertInnengruppen, in denen sich die SchülerInnen ihre Ergebnisse gegenseitig präsentierten. Die Aufgabenstellung der Gruppe I lautete beispielsweise wie folgt:

DREIECK-Forschung (Gruppe I)

In einer Wüste befinden sich drei Forschungsstationen Camp A, Camp B und Camp C. Für ihre Entfernung gilt: $AB = 16 \text{ km}$, $BC = 12,2 \text{ km}$, $AC = 19,8 \text{ km}$.

Es wird ein Depot angelegt, von dem aus die drei Stationen versorgt werden können. Das Depot soll von den Stationen gleich weit entfernt sein. Wo muss es liegen? Wie kannst du diesen Punkt konstruieren?

Die SchülerInnen werden im Unterricht von Mag. Katharina Luksch und Mag. Adele Drexler sehr oft aufgefordert, ihre Ergebnisse in Kleingruppen oder vor der ganzen Klasse zu präsentieren. Wichtig ist dabei, so Mag. Katharina Luksch, dass eine schülergerechte Sprache zugelassen wird. Auch im Zuge forschenden Lernens sollen Reflexionen, Diskussionen und Präsentationen den Abschluss des Lernprozesses darstellen.

Auf Grund der Recherchen und LehrerInnengespräche kann behauptet werden, dass ein forschendes Lernen im Regelunterricht der Sekundarstufe kaum stattfindet. Oft können nur einzelne Aktivitäten (Experimentieren, Vermuten, Fragen formulieren usw.) in Unterrichtssequenzen wiedererkannt werden, die für das forschende Lernen grundlegend sind. Auch im Falle des IMST-Projekts des Gymnasiums Geringergasse stellt sich die Frage, inwiefern bei den angeführten Unterrichtsausschnitten von forschendem Lernen gesprochen werden kann. Forschendes Lernen fordert eigenständiges und selbstorganisiertes Lernen, das sich am wissenschaftlichen Arbeiten orientiert. Die Aktivitäten der SchülerInnen werden im Rahmen dieser

„forschend-entdeckenden“ Unterrichtssequenzen relativ stark gelenkt (Fragen, Methoden, Vorgehensweisen sind vorgegeben). Zudem weist Mag. Katharina Luksch auf die Problematik der Umsetzbarkeit forschenden Lernens hin und erkennt selbst nur einzelnen Aspekte dieses Konzeptes in ihrer Projektarbeit wieder. Die erstellten Aufgabenformate sind nicht darauf ausgerichtet ein wissenschaftspropädeutisches Lernen zu ermöglichen und orientieren sich nicht an den Forderungen forschenden Lernens. Nichts desto trotz spiegelt dieses Projekt bedeutende Grundgedanken wieder und kann als Übung, Vorstufe oder schrittweise Heranführung an das forschende Lernen aufgefasst werden. Die konstruktivistische Auffassung von Lernen, die den/die SchülerIn als Akteur in den Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehen stellt, die Methodenvielfalt und der offene, individuelle Zugang zur Mathematik vermittelt den SchülerInnen auf jeden Fall ein positives Bild dieser Wissenschaft.

11 Forschendes, entdeckendes und problemorientiertes Lernen im Mathematikunterricht

Das Projekt „forschendes und entdeckendes Lernen“ der Geringergasse und die Analyse der Mathematikaufgaben verdeutlichten die Problematik einer unpräzisen Begriffsverwendung forschenden Lernens. Dabei können vor allem im Zusammenhang mit dem entdeckenden und problemorientierten Konzept, welche von Hof und Mayer (2008, S. 72) zu den fachspezifischen Ansätzen, mit denen die wissenschaftsmethodischen Kompetenzen im naturwissenschaftlichen Unterricht gefördert werden können, eine Reihe an Unklarheiten identifiziert werden.

Die Problematik der unklaren Abgrenzung dieser drei Ansätze wird zudem deutlich, wenn man sich vor Augen führt, dass schon in den Schriften Jerome Bruners über das entdeckende Lernen immer wieder ein Bezug zum Problemlösen hergestellt und das Entdecken mit dem „Forschen“ (inquiry) gleichgesetzt wurde (Brunnhuber, Czinczoll, 1974, S. 13). Die unüberlegte Verwendung dieser Begriffe im Mathematikunterricht führt zur Verschmelzung dieser unterschiedlichen Ansätze und zum Verlust der individuellen Konzeptbedeutung. Auf Grund dessen sollen sowohl die Gemeinsamkeiten als auch der Versuch, diese beiden Konzepte vom forschenden Lernen abzugrenzen, im folgenden Kapitel im Vordergrund stehen.

11.1 Problemorientiertes und forschendes Lernen

Die „durchaus produktive Meinungsvielfalt (Leuders, 2003, S. 119)“ über die Bedeutung problemorientierten Lernens einerseits und der Versuch mit dem Ansatz den Prozess mathematischer Erkenntnisgewinnung nachvollziehbar zu machen andererseits, können zu den grundlegenden Gemeinsamkeiten forschenden und problemorientierten Lernens gezählt werden. In der nachfolgenden Tabelle werden die wichtigsten Schritte des Problemlösens im Mathematikunterricht dargestellt, wobei der Schwerpunkt beim problemorientierten Lernen beim Übergang von (2) nach (3) liegt.

Problemlösen im Mathematikunterricht (Problemlösen im weiteren Sinne)	
Entdeckenlassendes Lernen	(1) Problem finden Schülerinnen und Schüler entdecken Probleme und Fragestellungen in inner- wie außermathematischen Kontexten. Hierbei erfassen sie die Problemsituation genauer und bewerten, ob eine Frage interessant und verfolgenswert erscheint.
	(2) Problem lösen (Problemlösen im engeren Sinne) Schülerinnen und Schüler setzen ihre erworbenen mathematischen Kompetenzen in neuer Weise oder neuer Kombination ein, um ein selbst gesetztes oder vorgegebenes Ziel zu erreichen. Hierbei werden vorhandene Kompetenzen oder bekannte Begriffe zugleich gefestigt und flexibilisiert.
Problemorientiertes Lernen	(3) Problem weiterentwickeln Die Suche nach einer Problemlösung führt auf neue oder allgemeinere mathematische Ideen oder auf weiterführende Probleme. Hierbei entstehen neue mathematische Begriffe und Verfahren.

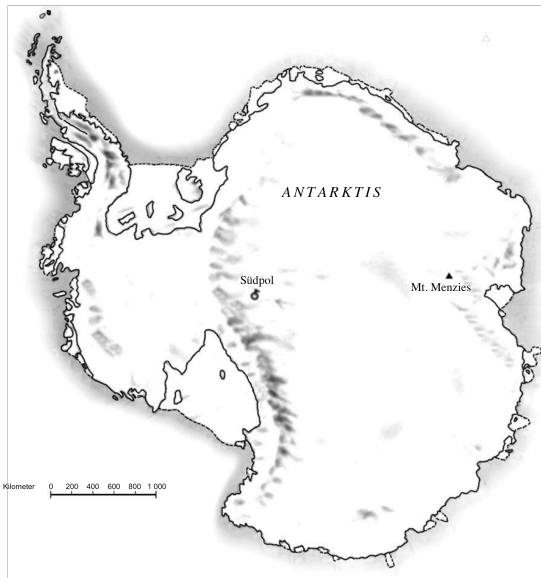
Tab. 7: Problemlösen im Mathematikunterricht (nach Leuders, 2003, S. 122)

Als Ziel problemorientierten Lernens führt Leuders die Fokussierung jener Probleme an, die zu „(...) tragfähigen, mathematischen Ideen hinführen und unterrichtlich produktiv werden. (...) Ziel der Aufgabe wäre dann die Entwicklung eines neuen Begriffes, z.B. „Graph“, „Algorithmus“ oder „Heuristik“ (Leuders, 2003, S. 120)“. Im Rahmen problemorientierten Lernens wird die Bedeutung von Problemen als Ausgangspunkt stark betont. Diese Problemstellungen können in den unterschiedlichsten Lehr- und Lernformen eingebettet sein, die Problemorientierung

muss dabei nicht zwingenderweise mit Formen hochgradig selbstgesteuerten, entdeckenden Lernens verbunden sein (Euler, In: Wunderlich und Spoun, 2005, S. 12). Beim forschenden Lernen muss die Anregung nicht notwendigerweise aus Problemsituationen entspringen, sie kann auch aus SchülerInnen-Fragen, bildlichen oder schriftlichen Impulsen geschöpft werden. Die Selbststeuerung und –organisation haben, im Gegensatz zum problemorientierten Lernen, eine vordergründige Rolle.

Mit der nachfolgenden Aufgabe wurden Schüler und Schülerinnen im Rahmen von PISA (2000) konfrontiert und mussten ihre Problemlösekompetenz unter Beweis stellen. Für Aufgaben dieser Form „(...) gibt es keine Formel, keinen Rechenweg, die man einmal im Unterricht gelernt oder geübt hat, man muss sich den Ansatz, mit dem man diese Aufgabe angehen will, selbst zurechtlegen (Leuders, 2003, In: forum schule, S. 19 – 23)“. Wenn man sich an die Aufgabe „Expedition zum abgelegensten Punkt“ zurück erinnert, fällt auf, dass hier, neben der außermathematischen Überschneidung, mehrere Ähnlichkeiten vorliegen. In beiden Fällen handelt es sich um eine offene Aufgabe mit unterschiedlichen Lösungsmöglichkeiten, wobei beide Aufgaben ein näherungsweise Verfahren verlangen. Sowohl die Fläche der Antarktis als auch der „POI“ kann mit Hilfe von Konstruktionen von Rechtecken, Quadraten, Kreisen oder anderen gleichmäßigen geometrischen Figuren geschätzt werden.

FLÄCHE EINES KONTINENTS



Hier siehst du eine Karte der Antarktis.

Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt!

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist!

(Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

(PISA, 2000)

Abb. 18: PISA-Aufgabe 2000: Fläche eines Kontinents
(OECD PISA, Beispielaufgaben aus dem Mathematiktest)

Ein grundlegender Unterschied zwischen diesen beiden Beispielen liegt jedoch in der Darstellung des Problems. Während die SchülerInnen bei der vorliegenden PISA-Aufgabe zum Thema Problemlösen mit einer klaren Arbeitsanweisung (Schätze die Fläche der Antarktis!) konfrontiert sind, müssen sie im Rahmen der „Expedition zum abgelegensten Punkt“ die Fragen eigenständig erarbeiten und formulieren. Erst im Anschluss an diese beiden ersten Phasen, die grundlegende Aspekte forschenden Lernens sind, kommt es zu weiteren Überlegungen, zur Modellbildung und Anwendung. In beiden Fällen muss die reale Situation durch Weglassen gewisser Eigenschaften (*Abstrahieren*) oder Hinzufügen und Annehmen von Eigenschaften (*Idealisieren*) vereinfacht werden. So wird, in diesem Fall durch die Vereinfachung der Antarktis auf eine geometrische Figur, das reale Modell in ein mathematisches Modell (*Mathematisieren*) übergeführt. Konstruiert man im Zusammenhang mit dem „POI“ beispielsweise ein Parallelogramm, so kann mit Hilfe von immer kleiner werdenden parallelen Kurven ein Punkt gefunden werden, bei dem diese zusammenfallen. Es wird also „(...) innerhalb dieses Modells eine mathematische Lösung ermittelt (*Deduzieren*),

die in die Realität übertragen (*Interpretieren*) und in der Realität überprüft (*Validieren*) wird (Westermann, In: Leuders, 2003, S. 157)“. Ein solches Vorgehen wird von Westermann als Modellbildungskreislauf bezeichnet und ist in der folgenden Abbildung schematisch dargestellt.

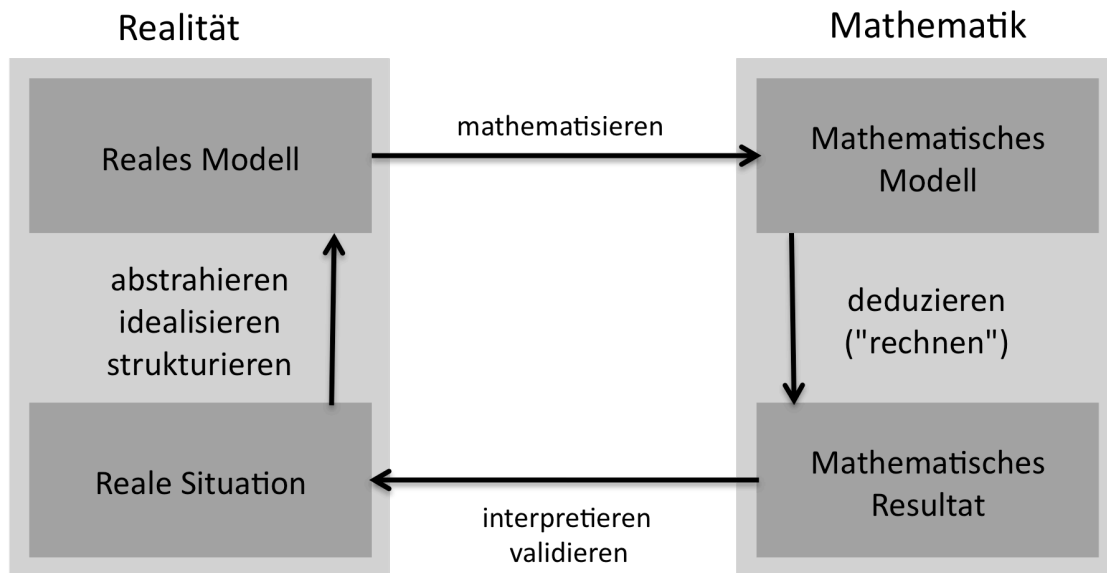


Abb. 19: Der Modellbildungskreislauf (Westermann, In: Leuders, 2003, S. 157)

Der letzte Schritt des Modellbildungskreislaufes, bei dem die Interpretation und Validierung im Vordergrund stehen, wird vor allem bei der Aufgabe „Expedition zum abgelegensten Punkt“ berücksichtigt, indem die SchülerInnen darauf hingewiesen werden, ihre Erkenntnisse auf mehrere Fälle auszuweiten und diese auch anhand der Deutschland-Karte zu erproben. Die Einsicht, dass bei einem Gebiet wie der Antarktis auf Grund der Kartenprojektionen immer Fehler gemacht werden, kann als weiterführendes Problem aufgegriffen werden. Für die Interpretation und Validierung des errechneten Flächeninhaltes muss der/die SchülerIn bei der PISA-Aufgabe einschätzen können, ob die errechnete Fläche sinnvoll ist, ansonsten kann das Resultat nicht validiert werden. Die Überschneidungen problemorientierten und forschenden Lernens können vor allem in den verschiedenen Aktivitäten der Schüler und Schülerinnen erkannt werden, die sich am besten mit dem Modellbildungskreislauf darstellen lassen. Die eigenständige Problemfindung und Formulierung, das planvolle Vorgehen und die Präsentation, Diskussion und Reflexion der Ergebnisse stehen beim problemorientierten Lernen weniger im Vordergrund, sind jedoch wesentliche

Bestandteile forschenden Lernens. So kann das problemorientierte Lernen im Mathematikunterricht als Teilaspekt, als Vorgehensweise im Rahmen forschenden Lernens aufgefasst werden.

11.2 Entdeckendes und forschendes Lernen

„Forschendes Lernen zeichnet sich dadurch aus, dass der Lernende ein ihm zunächst unbekanntes, objektiv als komplex wahrgenommenes Themenfeld durch eigenständige kognitive Aktivität zumindest partiell erschließt (Ulm, 2009, In: Messner, S. 90)“. Eine Definition dieser Art und Weise verdeutlicht weder die Besonderheiten forschenden Lernens, noch grenzt sie es von anderen Konzepten ab. Eine ähnliche Situation ist im Zusammenhang mit dem entdeckenden Lernen anzutreffen und so kommt es immer wieder zu Überschneidungen oder sogar zur synonymen Verwendung der Begriffe. Zu guter Letzt drängt sich bei der Betrachtung der folgenden Sammlung an Beispielen und Zuordnungen der Gedanken auf, besonders die MathematikerInnen hätten sich Bönschs Ratschlag, man müsse wohl auch das Stichwort entdeckendes Lernen zum forschenden Lernen hinzuziehen (vgl. Kapitel 5.1), sehr zu Herzen genommen.

Müller (2005, S. 32 – 38) verfasst für die Didaktikzeitschrift „Praxis Mathematik“ den Beitrag „Entdeckendes Lernen mit Zahlenmauern in der Sekundarstufe“ und sieht in den Zahlenmauern den Ausgangspunkt für „mathematische Entdeckungsreisen“. Auch Kopp (2001, In: Mathematik lehren, S. 16 – 19) führt im Themenheft „Mathematik entdecken – alte und neue Argumente für das entdeckende Lernen“ die Zahlenmauern zur Erarbeitung algebraischer Notation und Denkweise an. Begemann und Brunner (2003, In: Fachzeitschrift für Kindergarten und Unterstufe, S. 6 – 7) sehen in den Zahlenmauern hingegen ein passendes Aufgabenformat für forschendes Lernen schon in sehr jungen Jahren. Und wem die Entscheidung zwischen entdeckendem und forschendem Lernen schwer fällt, hat noch immer das forschend-entdeckende Lernen zur Auswahl, bei dem beispielsweise Köber und Verboom (2007, In: Praxis Förderschule, S. 4 – 7) die Zahlenmauern als geeignetes Aufgabenmaterial anführen. Aber auch Beispiele und Fragen rund um das Pascalsche Dreieck können sowohl beim forschenden (Ulm, In: Messner, 2009, S. 99), als auch beim entdeckenden (Winter,

1991, S. 106 - 114) und im Bereich „forschend-entdeckenden“ Lernens (In: Praxis Förderschule, 2007, S. 31 - 37) gefunden werden. Und sogar die in Kapitel 8 dargestellte Aufgabe „Muster aus Quadraten“ (Ulm, In: Messner, 2009, S. 98) wird von Ulm noch zwei Jahre zuvor als Beispiel für mathematisches „Forschen und Entdecken“ angeführt (Ulm, In: PM, 2007, S. 16 – 20) - eine klare Zuordnung zu einem der beiden Konzepte bleibt völlig aus.

Grundsätzlich lässt sich das forschende jedoch vom entdeckenden Lernen abgrenzen, ungeachtet davon, dass kaum ein anderes Lehr- bzw. Lernkonzept mehr Überschneidungsflächen aufweist. Ein erster Versuch wurde in Kapitel 5.2 vorgenommen und deckt sich generell mit den Erläuterungen von Führer (1997) und Aepkers und Liebig (2002). Führer stellt das forschende Lernen im Mathematikunterricht im Vergleich zum entdeckenden Lernen auf ein höheres Niveau, da es sich, meist mit Hilfe umfangreicheren Aufgaben, um ein methodisch reflektiertes Vorgehen handelt (Führer, 1997, S. 65). Aepkers und Liebig beschreiben entdeckendes Lernen hingegen als „(...) essayistisch: Umherschweifen. Addierender Fundstücke an die vorhandenen Konzepte. Ein Konzeptwechsel durch Anhäufung neuer Erfahrungen geschieht eher zufällig. Erst hier beginnt die Überschneidung mit Forschendem Lernen (Aepkers und Liebig, 2002, S. 76)“.

12 Lerntagebücher und Portfolios als Instrumente forschenden Lernens

Die kritischen Anregungen und Ideen der interviewten Lehrpersonen, die sich vor allem auf zeitliche und lehrplanbezogene Eingrenzungen beziehen, sollen im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht nur dargestellt, sondern auch berücksichtigt werden. Der Vorschlag einer Koppelung forschenden Lernens mit Portfolioarbeiten, berücksichtigt die Anliegen der Lehrpersonen und kann als Anregung zur Verbesserung bzw. Vereinfachung der Umsetzung forschenden Lernens im Mathematikunterricht angesehen werden.

Ziel dieses Kapitels ist es, die Vorteile von Portfolios bzw. Lerntagbüchern im Bezug auf das forschende Lernen aufzuzeigen. Dabei soll mit Hilfe des Portfolioeinsatzes von Mag. Ingrid Fertl, Mathematiklehrerin am Bundesrealgymnasium Marchettigasse, auf die grundsätzliche Affinität zwischen dem Lernen mit Hilfe von Portfolios und dem forschenden Lernen aufmerksam gemacht werden. Zuvor sollen allerdings die Begriffe Lerntagebuch und Portfolio erläutert und deren Differenzen geklärt werden.

12.1 Begriffsklärung

Das Lerntagebuch

Die Idee des Lerntagebuches kann auf Gallin und Ruf zurückgeführt werden. In der Mathematikdidaktik wurde es von ihnen zunächst unter der Bezeichnung Reisetagebuch eingeführt und ist heute ein relativ bekanntes Instrument für Reflexionen und zur individuellen Aufgabenbearbeitung (Gallin und Ruf, In: Journal für Mathematik-Didaktik, 1993, Heft 1, S. 14 – 16). Mittlerweile gibt es unterschiedlichste Formen und Ziele von Lerntagebüchern, wobei allen gemeinsam ist, dass sich die schreibende Person mit ihrem Tun, ihrem Lernen und ihren Gedanken auf schriftliche Art und Weise auseinandersetzt. Es sollte allerdings verhindert werden, dass die SchülerInnen sich anhand ihres Lerntagebuches möglichst günstig präsentieren wollen, anstatt die Prozesse ihres Arbeitens und Lernens ehrlich wiederzugeben, aufzuklären und kritisch zu reflektieren. Darauf basiert der Grundgedanke, das Lerntagebuch nicht zu bewerten. Dieser wurde im Laufe der Zeit jedoch aufgehoben, weshalb es immer

wieder zum Verschwimmen der Grenzen zwischen Lern- und Leistungssituation kommt (Gubler-Beck, 2010, S. 9).

Das Portfolio

Der Begriff Portfolio stammt aus dem englischsprachigen Raum und wird mit „Sammelmappe“ übersetzt (Fertl I., 2004, S. 51). Für die Schule ist das Portfolio als alternatives Beurteilungsinstrument, als Diagnoseinstrument, als Lehr- und Lerninstrument, als Entwicklungsinstrument und als Dokumentationsinstrument relevant (Schmidinger, 2006, S. 68). Gubler-Beck (2010) führt die folgende Definition an:

„Ein Portfolio ist eine zielgerichtete Sammlung von Schülerarbeiten, welche die Anstrengung des Lernenden, den Lernfortschritt und die Leistungsergebnisse auf einem oder mehreren Gebieten zeigt. Die Sammlung schließt die Beteiligung des Schülers bei der Auswahl der Inhalte, Aufstellung der Kriterien für die Auswahl und zur Beurteilung sowie selbstreflexive Gedanken ein (Paulson et. al., In: Gubler-Beck, 2010, S. 10)“.

Das Portfolio lässt sich vom Lerntagebuch in sechs Aspekten abgrenzen (Leuders, 2003, S. 315). Während das Lerntagebuch sowohl Irrwege, Umwege und Fehler beinhaltet, werden im Portfolio ausschließlich fertige Zwischen- und Endprodukte dargestellt. Anders ausgedrückt steht beim Lerntagebuch das Entstehen im Vordergrund, beim Portfolio hingegen die abgeschlossene Mathematik. Portfolios dienen der nach außen gerichteten Dokumentation und stellen eine externe Bewertungsgrundlage dar. Das Lerntagebuch ist von einer Bewertung im Normalfall ausgenommen und erfüllt den Zweck einer privaten, persönlichen Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten. So gilt die Darstellungsform beispielsweise nur beim Portfolio, nicht aber beim Lerntagebuch als Qualitätsmerkmal. Im Portfolio befinden sich somit bewusst ausgewählte Materialien, während es sich beim Lerntagebuch um eine vollständige Darstellung des Lernprozesses handelt.

12.2 Vorteile bei der Umsetzung forschenden Lernens mittels Portfolios

Das forschende Lernen im Mathematikunterricht erweist sich in vielerlei Hinsicht als aufwendiges Unterfangen, dessen Umsetzungsmöglichkeiten oftmals kritisch hinterfragt werden. In den Gesprächen mit Lehrpersonen wurde ersichtlich, dass vor

allein die zeitliche Eingeschränktheit und die Bindung an den Lehrplan ein forschendes Lernen behindern bzw. verhindern. Dabei würden die vorgegebenen Inhalte des Lehrplanes eine freie Themenwahl kaum möglich machen, die zeitliche Einengung (Mag. Ingrid Fertl spricht in diesem Zusammenhang von der Gefangenschaft im „50-Minuten-Korsett“¹¹) die längerfristige Auseinandersetzung mit bestimmten Themen verhindern. Lerntagebücher und Portfolios, die von den SchülerInnen auch abseits des Regelunterrichts bearbeitet werden, können genau dieser Problematik entgegenwirken. Zudem gibt es eine Vielzahl weiterer Aspekte, die für eine Umsetzung forschenden Lernens mittels Portfolio bzw. Lerntagebuch sprechen. Einige sollen im Folgenden angeführt werden:

- Die Grundidee forschenden Lernens spiegelt sich in der Tatsache wieder, dass im Rahmen von Portfolioarbeiten bzw. Lerntagebüchern die Wahl des Themas und der Bearbeitungsmethode den SchülerInnen anvertraut wird und sich somit sowohl die Fragestellung als auch der Schwierigkeitsgrad an den individuellen Fähigkeiten und Interessen orientieren kann.
- Zudem wird den SchülerInnen Verantwortung für ihr Arbeiten übertragen, sodass ein selbsttätiges, selbstorganisiertes und selbstbestimmtes Lernen ermöglicht wird. Die unterschiedlichen inhaltlichen Zugänge, die sich auch in ihrer Komplexität voneinander abgrenzen, ermöglichen ein individuelles Lernen. Die Relevanz der Individualisierung, Selbststeuerung, Aktivität und der sozialen Einbettung für das forschende Lernen wurde in Kapitel 7 erläutert.
- Das Lernen mittels Portfolioarbeiten führt laut Mag. Ingrid Fertl zu einem völlig neuen Verhältnis zwischen LehrerIn und SchülerIn. Ein Aspekt, der auch im Rahmen forschenden Lernens angestrebt wird. Die Lehrperson wird zum/zur TrainerIn bzw. zum/zur PartnerIn, der/die nicht Fehler sucht, sondern sich bemüht, mit den SchülerInnen gemeinsam ein Ziel zu erreichen.
- Dabei wird die Mathematik immer wieder zum Thema, sei es nun in Pausen oder in der Freizeit, zwischen SchülerIn und LehrerIn oder KlassenkollegInnen. Für Leuders (2006, S. 4) spiegelt das kooperative Lernen, das auf der kooperativen Grundhaltung sowohl der SchülerInnen als auch der Lehrperson basiert, die Arbeitsweise in der wissenschaftlichen Disziplin Mathematik wider.

¹¹ Persönliches Interview - geführt von der Verfasserin, 18.05.2010, Wien

- Auf Grund der schriftlichen Dokumentation der Arbeitsschritte und Gedankengänge kann der gesamte „Forschungsprozess“, mit all seinen Irrwegen, Rückschlägen, Vermutungen, Ergebnissen usw. festgehalten und für SchülerInnen und LehrerInnen nachvollziehbar gemacht werden. Vermutungen, die andernfalls eventuell getätigt, verworfen und vergessen worden wären, können beispielsweise nachgelesen werden.
- Die mit der Erstellung des Portfolios einhergehenden inhaltlichen, aber auch formalen Kriterien (Deckblatt, Inhaltsverzeichnis, Quellenangabe, Einleitungstext usw.) stellen eine erste Übung zur Verfassung wissenschaftlicher Arbeiten dar und führen laut Mag. Ingrid Fertl zu einer Erleichterung des Studieneinstiegs für die Schüler und Schülerinnen.

12.3 Mathematikportfolios am Bundesrealgymnasium Marchettigasse

Mag. Ingrid Fertl, Mathematiklehrerin am Bundesrealgymnasium Marchettigasse, arbeitet schon seit mehreren Jahren mit Portfolios und sieht darin eine „(...) sehr interessante und innovative Bereicherung des Unterrichts“ (Fertl, In: Lernende Schule, 2004, S. 50). Mag. Ingrid Fertl berichtet davon, dass die Portfolioarbeiten meist in der 5. oder 6. Klasse erstmals eingeführt und von da an jedes Semester in die Leistungsbeurteilung aufgenommen werden. Die folgende Tabelle stellt eine Auswahl an Themen dar, denen sich die SchülerInnen im Rahmen ihrer Portfolioarbeit widmen können. Zum Teil werden die einzelnen Punkte mit Hinweisen (Schulbuchseiten, mathematische Zeitschriften, Informationsmaterial usw.) versehen, sodass den SchülerInnen ein erster Einblick in die Thematik ermöglicht wird. Das Portfolio muss ein Deckblatt, ein Inhaltsverzeichnis, einen Einleitungstext (Begründung der Themenwahl), die Ausarbeitung zu den einzelnen Themen, ein Protokoll (Arbeitsablauf) und ein Feedback (Wie ist es mir bei der Arbeit ergangen?) beinhalten. Die Verwendung des Portfolios überschneidet sich mit dem Lerntagebuch insofern, dass Frau Mag. Ingrid Fertl die vollständige Darstellung des Lernprozesses forciert. Es gibt immer wieder Gelegenheiten mit Frau Mag. Ingrid Fertl über den Arbeitsfortschritt und auftretende Probleme zu sprechen und die Endversion des Portfolios muss alle Entwürfe und Korrekturen beinhalten. Es werden also auch Zwischenprodukte, Fehler

und Irrwege offen dargestellt.

6. Klasse	5. Klasse
Geschichte der Mathematik	Geometrie
- Biographie eines Mathematikers mit einem Beispiel seiner Arbeit - Historisches zur Trigonometrie - Vermessung der Erde: Triangulation - Werdegang der Algebra: Historisches zu Aussagen und Mengen - Historisches zur Variablennotation - Historisches zu Logarithmen - Historisches zu Funktionen - Die Zahl π - Lösen von Gleichungen bei den Griechen - Mathematik der Antike - Historische Rechenmaschinen - Mathematik der Maya - Mathematik der Antike - Historische Zeichengeräte -	- Parkettierung - Trioker - Labyrinth - Origami - Regelmäßige Vielecke und ihre Konstruktionen - Optische Täuschungen (Escher) - Der Pythagoräische Lehrsatz mit einem „unüblichen“ geometrischen Beweis¹² - Spezielle Vielecke (Trapez, Parallelogramm,...) - „Sterne“¹³ - geometrische Mandalas - Tangram - Kegelschnitte: Ellipse, Hyperbel, Parabel -

Tab. 8: Mögliche Portfolio-Themen für die 5. und 6. Klasse

Zwei Wochen nach der ersten Auseinandersetzung mit den Themen muss bekannt gegeben werden, womit sich die SchülerInnen im laufenden Semester beschäftigen wollen. Dieser erste Schritt ist nach Mag. Ingrid Fertl ein Prozess, bei dem die Lehrperson immer wieder beratend zur Seite stehen muss. Ein Arbeitsplan wird dahingehend erstellt, indem die Lernenden von Mag. Ingrid Fertl aufgefordert werden, ein Inhaltsverzeichnis anzufertigen. Zwar kann im Zuge der Portfolioerstellung immer wieder ein Aspekt ausgelassen werden oder hinzukommen, ein grundsätzlicher Rahmenplan ist damit jedoch gegeben. Darauf aufbauend beginnt vor allem die Suche nach Materialien, mit denen die Thematik bearbeitet werden kann. Nicht selten

¹² Mit „unüblich“ ist dabei ein Beweis gemeint, der nicht von Frau Mag. Ingrid Fertl im Rahmen des Mathematikunterrichts vorgezeigt wurde.

¹³ Dieses Schlagwort soll die Schüler und Schülerinnen zu Konstruktion von Sternen auffordern, wobei es sich um 5- 6- oder 8- eckige Sterne handeln kann.

kommt es auch zu „Untersuchungen“ und „Experimenten“. So ließen sich SchülerInnen einer sechsten Klasse, die sich für das Thema „Sparen“ und „Kredit“ entschieden hatten, in verschiedenen Banken beraten. Während diese beispielsweise die unterschiedlichen Zinssätze verglichen, stellte eine SchülerIn der fünften Klasse verschiedene Messungen an. Zum Thema „Schranken von Messergebnissen“ ermittelte sie den Inhalt von Pringlespackungen und stellte fest, dass die Werte keinesfalls gleich sind, sich aber mit Schranken beschreiben lassen. Die Interpretation der Resultate ist für Mag. Ingrid Fertl ein wichtiger Aspekt, weshalb die SchülerInnen immer wieder aufgefordert werden, ihre Ergebnisse zu beurteilen, zu bewerten und einzuordnen. Grundsätzlich kristallisiert sich bei den Portfolioarbeiten, die von Mag. Ingrid Fertl eingesetzt werden, ein Lernprozess heraus, der eine Affinität zu den Aktivitäten forschenden Lernens aufweist. Im Rahmen dieser Portfolioarbeiten werden die SchülerInnen allerdings nicht mit der Aufgabe konfrontiert, eigene Fragen zu formulieren oder Vermutungen aufzustellen. Auch die Präsentation der Ergebnisse kommt laut Mag. Ingrid Fertl aus zeitlichen Gründen zu kurz. Schafft man es allerdings diese Lücken zu schließen, so kann ein Portfolio ein geeignetes Instrument forschenden Lernens darstellen.

13 Zusammenfassung

Mit dieser Diplomarbeit wurde eine erste theoretische und praxisorientierte Grundlage des forschenden Lernens im Mathematikunterricht gelegt. Bereits im Diskurs über die unterschiedlichen Auffassungen von „Forschung“ wurde ersichtlich, dass es eine Fülle an Interpretationsmöglichkeiten gibt. Die Feststellungen von Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Christian Vielhaber, ein kritischer Betrachter einer solchen Begriffsverzerrung, verdeutlichen die Problematik dieser Vielfältigkeit.

Die anschließende Begriffsklärung forschenden Lernens erwies sich zwar als schwierige Aufgabe, es war dennoch möglich, in dieser Diplomarbeit fünf Besonderheiten dieses Lehr- bzw. Lernkonzeptes zu erarbeiten. Eine umfangreiche Recherche, welche mehr als 200 Ausgaben von relevanten Fachzeitschriften der Mathematikdidaktik umfasst, konnte die anfangs gestellte Vermutung, dass das Angebot an Literatur zum Thema forschendes Lernen in Bezug auf den Mathematikunterricht sehr begrenzt ist, bestätigen. Trotz spärlichem und zum Teil sehr unpräzisen, oberflächlichem Literaturangebot, konnte im ersten Teil dieser Diplomarbeit eine theoretische Basis erarbeitet werden.

Auf der Grundlage dieses Fundamentes war es folglich möglich, einzelne Auffassungen von forschendem Lernen, Aufgabenformate und Umsetzungsvorschläge kritisch zu betrachten und zu analysieren. Dabei konnten Mathematikbeispiele ausfindig gemacht werden, die sich von konventionellen Aufgaben zwar nicht unterscheiden, dessen ungeachtet jedoch als Musterbeispiele für das forschende Lernen publiziert wurden. Auf die Problematik der unreflektierten Betitelung unterschiedlicher Aktivitäten mit den Begriffen „Forschung“ bzw. „forschendes Lernen“ konnte mit Hilfe dieser Fallbeispiele hingewiesen werden. Die dargestellte Aufgabensammlung umfasst nur wenige positive Beispiele, weshalb die Aufgabe „Glatteis in Dornbirn“ entwickelt wurde. Diese dient als Anregung und machte es zugleich möglich, einen denkbaren Ablauf forschenden Lernens mit Hilfe von mathematischen Aufgaben darzustellen.

Zudem gelang es im Zuge dieser Diplomarbeit, sowohl die Überschneidungsflächen als auch die Abgrenzungsmöglichkeiten zum entdeckenden und problemorientierten Lernen im Mathematikunterricht aufzuzeigen. Dabei konnte die oft unscharfe

Trennung bzw. synonyme Verwendung der Begriffe des IMST-Projektes der Geringergasse demonstriert werden. Die Einblicke in die Unterrichtspraxis machten auch deutlich, dass im Mathematikunterricht immer wieder Schwerpunkte und Zielsetzungen aufgegriffen werden, die sich mit den einzelnen Phasen forschenden Lernens decken. Ein forschendes Lernen, bei dem der gesamte Zyklus mit einbezogen wird, findet im Mathematikunterricht jedoch kaum statt. Auf Grund dessen wurden die unterschiedlichen Arbeitsphasen im Rahmen dieser Diplomarbeit ausführlich behandelt. Dabei konnten sowohl theoretische Überlegungen als auch praktische Umsetzungsmöglichkeiten der Phasen forschenden Lernens aufgezeigt werden. Zudem konnte deutlich gemacht werden, dass eine isolierte Betrachtung einzelner Arbeitsschritte kaum möglich bzw. sinnvoll ist, da es ständig zu Überlappungen, Verschmelzungen und gegenseitiger Beeinflussung der Phasen forschenden Lernens kommt.

Die durchgeführten LehrerInnen-Interviews zeigten, dass die Lehrer und Lehrerinnen der Realisierung des gesamten Zyklus forschenden Lernens kritisch gegenüberstehen, da ihnen das Angebot an passenden Aufgabenformaten fehlt und die institutionellen Rahmenbedingungen (Lehrplan, 50-Minuten Einheiten usw.) eine Umsetzung kaum möglich machen. Deshalb wurde im Zuge dieser Diplomarbeit die Möglichkeit einer Umsetzung forschenden Lernens mittels Portfolios bzw. Lerntagebüchern als möglicher Ausweg aus den einengenden Rahmendbedingungen angeführt. Mit Hilfe von Mag. Ingrid Fertl, die sich bereits intensiv mit dem Einsatz von Portfolios und Lerntagebüchern im Mathematikunterricht beschäftigt hat, konnten Vorteile, die eine solche Verbindung hervorbringen kann, aufgearbeitet werden.

Forschendes Lernen in seiner Reinkultur konnte im Zuge dieser Diplomarbeit nicht nachgewiesen werden. Es wurden Potentiale und Umsetzungsmöglichkeiten aufgezeigt und gewisse Problemstellen lokalisiert. Ob sich das forschende Lernen zukünftig in der Sekundarstufe I und II durchsetzen wird sei dahingestellt. Mit dieser Diplomarbeit wurde eine erste Grundlage geschaffen, die sich kritisch mit der Thematik auseinandersetzt und als weiterführender Impuls für das forschende Lernen im Mathematikunterricht angesehen werden kann.

Abbildungsverzeichnis

- Abb. 1: Der Prozess forschenden Lernens - Aufgegliedert in acht Arbeitsschritte
Erstellt von der Verfasserin (2010)
- Abb. 2: Die Stufen von Selbststeuerung
Hußmann (2003): Mathematik entdecken und erforschen. Seite 16
Abgeändert durch die Verfasserin (2010)
- Abb. 3: Differenzierende Impulse für offene Aufgaben
Hußmann und Prediger (2007): Mit Unterschieden rechnen –
Differenzieren und Individualisieren. Seite 3
- Abb. 4: Ansatzpunkte zur Auflösung des Gleichschritts in unterschiedlichen
Lernsituationen
Hußmann und Prediger (2007): Mit Unterschieden rechnen –
Differenzieren und Individualisieren. Seite 7
- Abb. 5: "Zahlenforschung" anhand der Zahl Acht
Begemann und Brunner (2003): Denkprozesse anregen und vertiefen.
Seite 14
- Abb. 6: Muster aus Quadraten
Messner (2009): Schule forscht – Ansätze und Methoden zum forschenden
Lernen. Seite 98
- Abb. 7: Expedition zum abgelegensten Punkt
Leuders und Ulm (2007): Viel Eckiges – forschend entdecken. Seite 6
- Abb. 8: Pascalsches Dreieck
Messner (2009): Schule forscht – Ansätze und Methoden zum forschenden
Lernen. Seite 99
- Abb. 9: Romanesco und die Fibonacci Zahlen
Haftendorn (2010): Mathematik sehen und verstehen – Schlüssel zu Welt.
Seite 115
- Abb. 10: Regelmäßige Flächenaufteilung – Reptilien
Bild (1969) und Zitat: Escher M.C.
<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/escher.html>
- Abb. 11: Erstellung des Untersuchungsplans mittels Orientierungsfragen
Erstellt von der Verfasserin (2010)
- Abb. 12: Strategiekärtchen
Leuders (2003): Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die
Sekundarstufe I und II. Seite 134
- Abb. 13: Gewünschter Vorzustand (2.)
Grams (2009): Schöpferisches Denken – Heuristik.
<http://www2.hs-fulda.de/~grams/Heuristik/Heuristik.htm>

- Abb. 14: Präsentationsformen und Medien
Mahlke (2007): Gut geplant ist halb gewonnen – Präsentationskompetenz bis zum Abitur aufbauen. Seite 47
- Abb. 15: Zerlegung in mögliche Teilnetze
Erstellt von der Verfasserin (2010)
- Abb. 16: Der Prozess forschenden Lernens - Aufgegliedert in acht Arbeitsschritte II
Erstellt von der Verfasserin (2010)
- Abb. 17: Durchführung der Versuche zum Thema Proportionen (2B)
Fotos: Verfasserin (04.05.2010)
- Abb. 18: PISA-Aufgabe 2000: Fläche eines Kontinents
OECD Programme for International Student Assessment (Hrsg.):
Beispielaufgaben aus dem Mathematiktest 2000.
http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/Beispielaufgaben_Mathematik.PDF
- Abb. 19: Der Modellbildungskreislauf
Leuders (2003): Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Seite 157

14 Tabellenverzeichnis

- Tab. 1: Gegenüberstellung - Forschung und Schule
Winter (1991): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Seite 3
- Tab. 2: Levels of Openness Within the Inquiry Teaching Approach
Settlage und Southerland (2007): Teaching science to every child. Seite 89
- Tab. 3: Die Struktur des forschend-entwickelnden Unterrichtsverfahrens
Lindemann und Schmidkunz (1992): Das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren. Seite 37
- Tab. 4: Mögliche SchülerInnen-Fragen zur Aufgabe "Glatteis in Dornbirn"
Erstellt von der Verfasserin, 2010
- Tab. 5: Heuristische Prinzipien und Strategien
Flade und Herget (2000): Lehren und Lernen nach TIMSS. Seite 72
- Tab. 6: Wege zum Nachdenken auf vier Ebenen an Beispielen zum exponentiellen Wachstum
Prediger (2002): Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht. Seite 402
- Tab. 7: Problemlösen im Mathematikunterricht
Leuders (2003): Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Seite 122
- Tab. 8: Mögliche Portfolio-Themen für die 5. und 6. Klasse
Nach der Vorlage von Frau Mag. Ingrid Fertl

16 Literaturverzeichnis

- Aepkers M. und Liebig S. (2002): Basiswissen Pädagogik, Band 4. Entdeckendes, forschendes, genetisches Lernen. Schneider Verlag Hohengehren, Baltmannsweiler
- Albers R. und Harder H.J. (2001): Forschen im Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren. Heft 104, Friedrich Verlag, Seelze, Seite 10 – 14
- Bastian J. (1991): Schüler als Forscher. In: Pädagogik. Heft 2, Beltz Verlag, Weinheim
- Benz Ch. und Steinweg A. S. (2007): Unterwegs in Musterlandschaften – Rechnen mit dem Pascalschen Dreieck. In: Praxis Förderschule, Heft 2, 2007, S. 14 – 18, Westermann Verlag, Braunschweig
- Bescherer Ch. (2005): WebQuests - Materialiengestütztes Reflektieren anhand von Internetquellen im Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren, Heft 132, Friedrich Verlag, Velber, Seite 20 – 23
- Blum W., Leiß D., Messner R. (2007): Die Förderung selbstständigen Lernens im Mathematikunterricht – Problemfelder bei ko-konstruktiven Lösungsprozessen. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 28, Heft 3/4, Vieweg und Teubner Verlag, Wiesbaden, S. 224 – 248
- Bönsch M. (2008): Variable Lernwege – Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden. 4. Auflage, Academia Verlag, Sankt Augustin
- Bundesassistentenkonferenz (Hrsg.) (1970): Forschendes Lernen – wissenschaftliches Prüfen – Schriften der Bundesassistentenkonferenz Nr. 5., 2. Auflage, Bonn
- Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur (BMUKK), Bundesländer und Magistrats der Stadt Wien (Hrsg.) (2009): Bundesländerübergreifender Bildungsrahmenplan für elementare Bildungseinrichtungen in Österreich, Wien
- Brock Haus (2006): Enzyklopädie in 30 Bänden. Band 9 und Band 12, 21. Auflage, Verlag F.A. Brockhaus, Mannheim
- Bruder R. (2002): Lernen, geeignete Fragen zu stellen – Heuristik im Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren, Heft Nr. 115, Friedrich Verlag, Seelze, Seite 4 - 8
- Brunnhuber P. und Czinczoll B. (1974): Lernen durch Entdecken. 2. Auflage, Auer Verlag, Donauwörth
- Corell W. (Hrsg.) (1963): Reform des Erziehungsdenkens – Eine Einführung in John Deweys Gedanken zur Schulreform. Julius Beltz Verlag, Weinheim

- Drücke-Noe Ch. (2007): Erfahrungen mit Präsentationen – Auf dem Weg zum selbstständigen Lernen. In: Mathematik lehren, Heft Nr. 143, Friedrich Verlag, Seelze, Seite 10 – 15
- Duden (2007): Das Synonymwörterbuch – Ein Wörterbuch sinnverwandter Wörter. 4. Auflage, Mannheim
- Fertl I. (2004): Das Mathematik-Portfolio. In: Lernende Schule. Mathe ist mehr! Nr. 28, Heft 4, Freidrich Verlag, Seelze, Seite 50 - 51
- Flade L. und Herget W. (2000): Lehren und Lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufe. 1. Auflage, Volk und Wissen Verlag, Berlin
- Fries E. und Rosenberger R. (1976): Forschender Unterricht. 4. Auflage, Moritz Diesterweg Verlag, Frankfurt am Main
- Hanisch G. (2009): Diskriminieren ist in der Mathematik nicht unmoralisch sondern notwendig. In: Österreichische Mathematische Gesellschaft (Hrsg.): Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen. Didaktikheft Nr. 42 , Wien, Seite 43 – 52
- Haftendorn D. (2010): Mathematik sehen und verstehen – Schlüssel zu Welt. Spektrum Verlag, Heidelberg
- Hanisch G. und Sattlberger E. (1998): Neuropsychologische Grundlagen der Mathematikdidaktik. In: Didaktikhefter der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Heft 29, Seite 37 – 48
- Hartkopf W. (1964): Die Erziehung zum heuristisch-methodischen Denken im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 10, Heft 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, Seite 58 – 79
- Hefendehl-Hebeker L. (2000): Struktur und Genese mathematischen Wissens als Leitlinie für den Unterricht. In: Österreichische Mathematische Gesellschaft (Hrsg.): Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen. Didaktikheft Nr. 31, Wien, Seite 5 – 27
- Heintz G. (2005): Entdeckungen an rechtwinkligen Dreiecken – Innere Differenzierung mit elektronischen Arbeitsblättern. In: Mathematik lehren, Heft 131, Friedrich Verlag, Seelze, Seite 48 - 52
- Hess K. (2005): Lernbegleitung im Mathematik-Unterricht: Ansprüche, Funktionen, Bedingungen und Realitäten. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 26, Heft 3/4, Vieweg und Teubner Verlag, Wiesbaden, Seite 224 – 248

Heyer U. und König H. (1992): Heuristische Vorgehensweisen bewusst herausbilden – Methodische Empfehlungen für den Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 38, Heft 3, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, Seite 51 – 65

Horlacher R. und Oelkers J. (Hrsg.) (2002): John Dewey: Wie wir denken. Pestalozzianum, Zürich

Hußmann S. (2003): Mathematik entdecken und erforschen - Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II. Cornelsen Verlag, Berlin

Hußmann S. und Prediger S. (2007): Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. In: Praxis Mathematik, Heft 17, Jahrgang 49, Aulis Verlag, Köln, Seite 1 - 8

Hußmann S. (2008): Forschungen mit Würfelkalender. In: Praxis Mathematik, Heft 20, Jahrgang 50, Aulis Verlag, Köln, Seite 44 -45

Jahnke T. und Drücke-Noe Ch. (2007): Präsentieren im Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren, Heft Nr. 143, Friedrich Verlag, Seelze, Seite 4 - 9

Jank W. und Meyer H. (1991): Didaktische Modelle. 1. Auflage, Cornelsen Verlag Scriptor, Frankfurt am Main

Kilka, Tietze und Wolpers (1997): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Vieweg Verlag, Braunschweig

Köber D. und Verboom L. (2007): Lernen mit Mustern und Strukturen. In: Praxis Förderschule, Heft 2, Westermann Verlag, Braunschweig, S. 4 – 7,

König H (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 38, Heft 3, Seite 24-38

Kopp (2001): Algebra mit Zahlenmauern. In: Mathematik lehren, Heft 105, Friedrich Verlag, Seelze, Seite 16 – 19

Lehmann E. (2003): Konzeptionelle Überlegungen zur Einbeziehung informatischer Inhalte und Methoden beim Computereinsatz im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 2. Franzbecker Verlag, Hildesheim

Leuders T. (2001): Qualität im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag, Berlin

Leuders T. (2003): Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag, Berlin

Leuders T. und Pallack A. (2005): Knoten im Kopf. In: Mathematik lehren, Heft 131, Friedrich Verlag, Seelze, Seite 68 – 69

- Leuders T. und Lippert M. (2007): Glatteis und Mathematik. Realitätsbezogene Probleme aus der niederländischen Oberstufe. In: Praxis Mathematik, Heft 15, Jahrgang 49, Aulis Verlag, Köln, Seite 30 - 37
- Leuders T. und Ulm V. (2007): Viel Eckiges – forschend entdecken. In: Praxis Mathematik. Heft 18, Jahrgang 49, Aulis Verlag, Köln, Seite 1 – 9
- Lindemann H. (2006): Konstruktivismus und Pädagogik – Grundlage, Modelle, Wege zur Praxis. Ernst Reinhardt Verlag, München
- Lindemann H. und Schmidkunz H. (1992): Das forschend-entwickelnde Unterrichtsverfahren – Problemlösen im naturwissenschaftlichen Unterricht. 3. Auflage, Westarp Wissenschaften, Essen
- Maier H. und Schweiger F. (1999): Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht. In: Reichel H.-C. (Hrsg): Mathematik für Schule und Praxis, Band 4, öbv&hpt, Wien
- Mahlke N. (2007): Gut geplant ist halb gewonnen – Präsentationskompetenz bis zum Abitur aufbauen. In: Mathematik lehren, Heft Nr. 143, Friedrich Verlag, Seelze, Seite 46 - 49
- Mason J., Burton L., Stacey K. (2008): Mathematisch denken. 5. Auflage, Oldenbourg, München
- Meinel Ch. und Mundhenk M. (2009): Mathematische Grundlagen der Informatik – Mathematisches Denken und Beweisen. 4. Auflage, Vieweg und Teubner Verlag, Wiesbaden
- Messner R. (Hrsg.) (2009): Schule forscht – Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen. Köber-Stiftung, Hamburg
- Meyer H. und Obolenski A. (2003): Forschendes Lernen – Theorie und Praxis einer professionellen LehrerInnenausbildung. Verlag Julius Klinkhardt, Bad Heilbrunn
- Müller H. (2005): Entdeckendes Lernen mit Zahlenmauern in der Sekundarstufe. In: Praxis Mathematik, Heft 2, Jahrgang 47, Aulis Verlag, Köln, Seite 32 – 38
- Nührenbörger M. (2009): Interaktive Konstruktionen mathematischen Wissens – Epistemologische Analysen zum Diskurs von Kindern im jahrgangsgemischten Anfangsunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 30, Heft 2, Vieweg und Teubner Verlag, Wiesbaden, Seite 147 - 172
- Peschek W., Prediger S., Schneider E. (2008): Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht. In: Praxis Mathematik, Heft 20, Jahrgang 50, Aulis Verlag, Köln, Seite 1 – 6

- Polya G. (1949): Schule des Denkens - vom Lösen mathematischer Probleme. Aus dem Englischen übersetzt von Behnkel E., Francke Verlag, Bern
- Prediger S. (2002): Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker, Hildesheim, Seite 399 – 402
- Schneeberger M. (2009): Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog – Der Erwerb von Mathematisierungskompetenz als Initiation in eine spezielle Diskurspraxis. Internationale Hochschulschrift, Band 529, Waxmann, Münster
- Settlage J. und S. A. Southerland (2007): Teaching science to every child – using culture as a starting point, Routledge, New York
- Sindler A. (2004): Arbeit – Bildung – Weiterbildung, Band 5. Etablierung einer neuen Lernkultur – Modelle medienbasierter Lernarrangements zur Förderung selbstregulierten Lernens im Kontext der Organisation. LIT Verlag, Wien
- Stern T. (2004): „Mathe ist mehr“. In: Lernende Schule 4, Friedrich Verlag, Seelze, 2004, Seite 16 - 21
- Terhart E. (1989) : Lehr-Lern-Methoden – Eine Einführung in die Probleme der methodischen Organisation von Lehrern und Lernen. Grundlagentexte Pädagogik – 4. Auflage, Juventa Verlag, München
- Ulm V. (2007): Quadrate – einfach und reichhaltig. Geometrische Muster als Spielwiese für mathematisches Forschen und Entdecken. In: Praxis Mathematik, Heft 18, Jahrgang 49, Aulis Verlag, Köln, Seite 16 - 20
- Wenzel C. (1999): Schüler forschen. In: Geographie Heute – Schüler forschen. Heft 171, 20. Jahrgang, Friedrich Verlag, Seelze, Seite 1
- Winter H. (1991): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht – Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. 2. Auflage, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden

17 Internetquellen

Begemann M., Brunner E. (2003): Denkprozesse anregen und vertiefen. In: 4 bis 8. Fachzeitschrift für Kindergarten und Unterstufe, Heft 2, Schulverlag plus, Bern, Seite 12 – 15

http://www.epr.ch/bre/cms/images/stories/pdf/denkprozesse_anregen.pdf
(Zugriff: 01.04.2010)

Bruder R. (2003): Methoden und Techniken des Problemlösens.

http://bscw.avmz.uni-siegen.de/pub/nj_bscw.cgi/d1615893/Text-R_Bruder_Problemloesen.pdf (Zugriff: 06.05.2010)

Bundesministerium für Wissenschaft und Forschung (BMWF): Sparkling Science – Wissenschaft ruft Schule. Schule ruft Wissenschaft.

<http://sparklingscience.at/de/schulforschung>

Drexler A. u.a. (2009): Forschendes und entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Mit Praxisnahen Beispielen und Individualisierung.

http://imst.uni-klu.ac.at/imst-wiki/images/a/a3/1427_Langfassung_Drexler.pdf
(Zugriff: 17.03.2010)

Euler D. (2005): Forschendes Lernen. In: Wunderlich, W. und Spoun S. (Hrsg.): Universität und Persönlichkeitsentwicklung heute.

[http://www.iwp.unisg.ch/org/iwp/web.nsf/SysWebRessources/Forschendes%20Lernen/\\$FILE/Forschendes%20Lernen.pdf](http://www.iwp.unisg.ch/org/iwp/web.nsf/SysWebRessources/Forschendes%20Lernen/$FILE/Forschendes%20Lernen.pdf) (Zugriff: 07.04.2010)

Forkel A. (2009): Entdeckendes Lernen mit Lernspielen im Unterricht der Sekundarstufe I – Konzeptionelle Grundlegung, Entwicklung und Erprobung. Dissertationsschrift, Universität Köln

<http://kups.ub.uni-koeln.de/volltexte/2009/2882/pdf/DissForkel.pdf>
(Zugriff: 11.03.2010)

Hartfeldt C. und Henning H. (2002): Muster, Flächen, Parkettierungen – Anregungen für einen kreativen Mathematikunterricht.

<http://www.math.uni-magdeburg.de/reports/2002/parkett.pdf> (Zugriff: 08.05.2010)

Herrmann U. (2004): „Die Einheit von Forschung und Lehre“ – universitäres Gründungsmotiv und Qualitätsgarantie. Eröffnungsvortrag beim 6. gemeinsamen Symposium der Deutschen Vereinigung für Sportwissenschaft, 2004, Tübingen
<http://www.medienfakten.de/uherrmann2/einheitforschunglehre.pdf> (Zugriff: 27.03.2010)

Hof S., Mayer J. (2008): Forderung von wissenschaftsmethodischen Kompetenzen durch Forschendes Lernen – Ein Vergleich zwischen direkter Instruktion und Guided-Scientific-Inquiry. In: Erkenntnisweg Biologiedidaktik 7, Seite 69 – 84

http://www.biologie.fu-berlin.de/didaktik/Erkenntnisweg/2008/2008_05_Hof.pdf

(Zugriff: 01.04.2010)

Grams T. (2009): Schöpferisches Denken – Heuristik. Sammlung von Problemstellungen und Lösungen zum Thema Heuristik.
<http://www2.hs-fulda.de/~grams/Heuristik/Heuristik.htm> (Zugriff: 07.05.2010)

IMST (Hrsg.) (2010): Kategorie: Lernformen.
<http://imst.uni-klu.ac.at/imst-wiki/index.php/Kategorie:Lernformen> (Zugriff: 17.06.2010)

Leuders T. (2006): Mit Aufgaben Kommunikation und Kooperation im Mathematikunterricht fördern – fachliches und soziales Lernen miteinander verbinden.
http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienBT/Leuders_Kooperatives_Lernen.pdf (Zugriff: 15.03.2010)

Leuders T. (2003): Welche Mathematik brauchen wir? In: forum schule, Heft 1/03, Seite 19 – 23
http://www.forum-schule.de/forum-schule-archiv/archiv/10/fs10/magma_1.html (Zugriff: 24.04.2010)

OECD Programme for International Student Assessment (Hrsg.): Beispielaufgaben aus dem Mathematiktest 2000.
http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/Beispielaufgaben_Mathematik.PDF (Zugriff: 29.03.2010)

Pädagogische Hochschule Wien (Hrsg.) (2009): IFIS–Newsletter.
http://www.phwien.ac.at/fileadmin/phvie/users/27/ifis-news/IFIS-Newsletter_Nov-2009_FDZ.pdf (Zugriff: 17. 06. 2010)

Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung (Hrsg.) (1999): Offene Aufgabenstellungen – Methodiküberlegungen für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Erstellt im Auftrag des bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultur, München;
<http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=e28bf04f9ee21976430af184a1b3aab4> (Zugriff: 14.03.2010)

Winter H. (1988): Lernen durch Entdecken? In: Mathematik lehren. Heft 28, Friedrich Verlag, Seelze;
<http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/mattheis/unterricht/lernen-durch-entdecken> (Zugriff: 11.03.2010)

Wirtschaftskammer Vorarlberg (Hrsg.) (2010): „Wif-zack“ - Die Wissensoffensive der Wirtschaftskammer Vorarlberg.
<http://www.wif-zack.at/> (Zugriff: 17.06.2010)

Wildt J. (2009): Forschendes Lernen – Lernen im „Format“ der Forschung. In: Journal Hochschuldidaktik, Jahrgang 20, Heft 2; http://www.hdz.uni-dortmund.de/fileadmin/JournalHD/2009_2/2009_2_Wildt.pdf (Zugriff: 10.03.2010)

18 ExpertInneninterviews

Drexler A. (2010): Forschendes und Entdeckendes Lernen im Gymnasium Geringergasse. Persönliches Interview, geführt von der Verfasserin. 12. Mai, 2010, Wien

Fertl I. (2010): Portfolios am Gymnasium Marchettigasse. Persönliches Interview, geführt von der Verfasserin. 18. Mai, 2010, Wien

Hermann R. (2010):): SchülerInnen – Fragen. Raimund.Hermann@aon.at, 27. März, 2010

Vielhaber Ch. (2010): Die Wahrnehmung von Forschung. Persönliches Interview, geführt von der Verfasserin. 21. Jänner, 2010, Wien

Luksch K. (2010): Forschendes und Entdeckendes Lernen im Gymnasium Geringergasse. Persönliches Interview, geführt von der Verfasserin. 12. Mai, 2010, Wien

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Villotti Carmen
Geburtsdatum: 18. September 1986 in Dornbirn
Geburtsort: Dornbirn, Österreich

Ausbildung

Oktober 2005 Lehramtsstudium Mathematik/ Geographie und
Wirtschaftskunde an der Universität Wien
2001 – 2005 Bundesoberstufenrealgymnasium Schoren - Musikzweig,
Dornbirn
1997 – 2001 Bundesrealgymnasium Schoren, Dornbirn
1993 – 1997 Volksschule Schoren, Dornbirn

Berufliche Tätigkeiten

2010/11 Mitarbeiterin der AG Geomorphologische Systeme und
Risikoforschung, Geologischer Dienst Niederösterreich
2008/2009/2010 Tutorin der Lehrveranstaltung „Wirtschaftsgeografie für
LehramtskandidatInnen“ an der Universität Wien
2006/2007 Büro- und Fertigungstätigkeiten bei der Hilti AG, Thüringen
2003/2004/2005 Konzertauftritte mit dem Salonorchester des
Jugendsymphonieorchesters Dornbirn, Bregenz

Auslandsaufenthalte

08/09. 2007 Indien
08. 2008 Vietnam
08. 2009 Namibia/Botswana
02. 2010 Argentinien