universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Grundvorstellungen zur Integralrechnung –
ein empirischer Vergleich zwischen Wien und Berlin

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin:	Lena Meindl
Matrikel-Nummer:	0506590
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie
Betreuer:	Dr. Andreas Ulovec

Wien, am 30.Jänner 2011

Danksagung

In Bezug auf meine Diplomarbeit möchte ich natürlich zuerst meinem Diplomarbeitsbetreuer Dr. Andreas Ulovec danken, der mich während des Verfassens meiner Diplomarbeit immer sehr gut, freundlich und hilfreich beraten hat. Weiters gilt ein großer Dank natürlich auch meiner Familie und Freunden, die mich während dem ganzen Studium so unterstützt haben, dass ich nun hier meine Diplomarbeit schreiben darf.

Vorwort

Die Wahl meines Diplomarbeitsthemas hat sich daraus ergeben, dass ich unbedingt ein Thema bearbeiten wollte, von dem ich in meinem zukünftigen Beruf als Lehrerin profitieren kann. Deshalb habe ich mich dafür entschieden die Diplomarbeit im Bereich der Fachdidaktik zu verfassen. So kam ich dann auf die Idee einen Vergleich zwischen zwei Städten zu machen, um zu erfahren was Schülerinnen und Schüler von einem bestimmten mathematischen Thema mitnehmen und ob es dabei Unterschiede in den jeweiligen Städten gibt. Als Thema dafür habe ich die Integralrechnung gewählt, da sich dieses Thema am besten ergeben hat um die Tests in Wien und Berlin gleichermaßen durchzuführen, da die Integralrechnung in diesen beiden Städten zu unterschiedlichen Zeitpunkten unterrichtet wird.

Die Kontaktaufnahme und die Durchführung der Tests hat in beiden Städten gut funktioniert und die Lehrerinnen und Lehrer sind mir bei meiner Arbeit sehr hilfsbereit entgegengekommen und haben sich auch besonders für das Thema meiner Diplomarbeit und das Resultat interessiert.

Nachdem alle Tests durchgeführt wurden, habe ich diese korrigiert und versucht alle Antworten zu kategorisieren um daraus Statistiken erstellen zu können.

Diese habe ich dann ausgewertet und die Ergebnisse der beiden Städte verglichen, was man nun später in dieser Diplomarbeit lesen kann, wobei zuerst noch der komplette Einstieg in die Integralrechnung vorgestellt wird, um einen gesamten Überblick über das Stoffgebiet zu schaffen.

Danach gehe ich auf die Grundvorstellungen mathematischer Inhalte ein, und dann spezieller auf die Grundvorstellungen zur Integralrechnung.

Das Arbeiten an dieser Diplomarbeit hat mir sehr viel Spaß gemacht, da ich von dem Thema profitieren konnte indem ich einiges für meine Zukunft gelernt habe, wie ich es mir eigentlich auch erwartet habe.

Inhaltsverzeichnis

1 Einstieg in die Integralrechnung

1.1 Einstieg

Ableiten und Differenzieren sind Begriffe, die schon aus der Differentialrechnung bekannt sind.

Wenn man nun eine Funktion $f(x)$ gegeben hat und diese nun ableitet erhält man logischerweise $f'(x)$, was dann der Ableitung von $f(x)$ entspricht. $f(x)$ wird dann eine Stammfunktion von $f'(x)$ genannt. Die mathematische Operation um Differenzieren rückgängig zu machen, also das Aufsuchen einer Stammfunktion, nennt man Integrieren.

$$f(x) \underset{\text{integrieren}}{\overset{\text{differenzieren}}{\rightleftarrows}} f'(x)$$

Definition: Gegeben sei eine Funktion $f: \; y = f(x)$ *auf einem Definitionsbereich D. Eine Funktion F heißt Stammfunktion der Funktion f, wenn* $F'(x) = f(x)$ *für alle* $x \in D$. *Das Aufsuchen einer Stammfunktion heißt Integrieren.*

Satz: Mit jeder Stammfunktion $F(x)$ *einer gegebenen Funktion* $f(x)$ *ist auch jede Funktion* $F(x) + c$ $(c \in R)$ *Stammfunktion der Funktion f.*

Umgekehrt: Außer $F(x) + c$ *gibt es keine weiteren Stammfunktionen von f. D.h. Zwei verschieden Stammfunktionen* $F_1(x)$ *und* $F_2(x)$ *einer gegebenen Funktion* $f(x)$ *unterschieden sich nur um eine additive Konstante. (Götz u.a., Lehrbuch der Mathematik 8)*

Beweis: Sei $G := F_1 - F_2$, *dann gilt* $G' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \quad => G = c$

(Skriptum Humenberger)

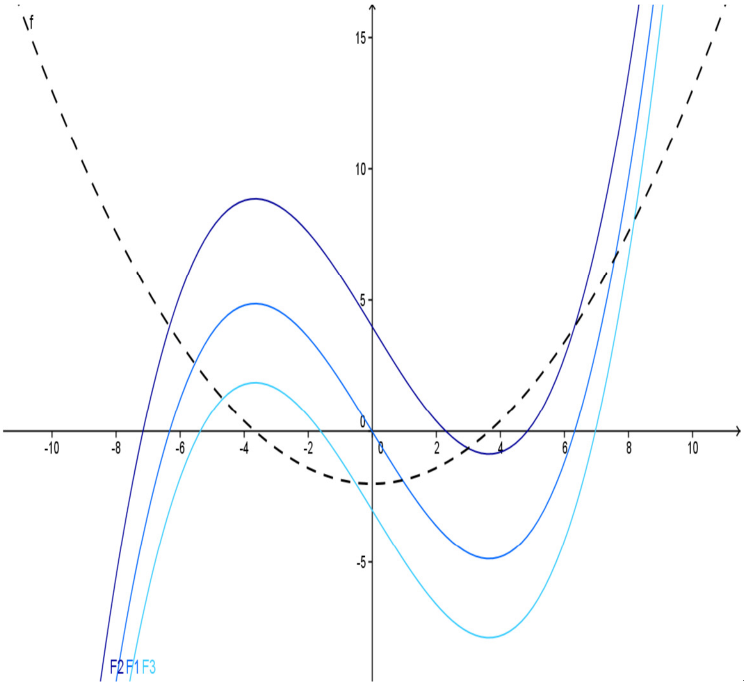
Bsp.: $F_1(x) = 0.05x^3 - 2x$

$F_2(x) = 0.05x^3 - 2x + 4$

$F_3(x) = 0.05x^3 - 2x - 3$

$\text{F'}(\text{x}) = \text{f}(\text{x}) = 0.15x^2 - 2$

Die additive Konstante fällt durch das Ableiten weg.



Hier erkennt man, dass die drei blauen Funktionen sich nur um eine additive Konstante unterscheiden und alle drei Funktionen Stammfunktionen der Funktion $f(x)$ sind.

Abb. 1

Definition: Gegeben sei eine Funktion $f: y = f(x)$*. Wenn* $f(x)$ *eine Stammfunktion* $F(x)$ *besitzt, bezeichnen wir die Menge aller Stammfunktionen* $y = F(x) + c \ \ (c \in R)$ *als das unbestimmte Integral der Funktion f. Wir schreiben:*

$$\int f \, dx \qquad oder \qquad \int f(x) dx$$

$f(x)$ *heißt in diesem Zusammenhang der Integrand und c heißt Integrationskonstante. Diese Integrationskonstante darf bei einem unbestimmten Integral nie weggelassen werden.*

(Götz u.a. , Lehrbuch der Mathematik 8)

Summen- und Differenzregel:

Das Integral der Summe (Differenz) zweier Funktionen ist gleich der Summe der beiden Integrale:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Konstantenregel:

Einen konstanten Faktor im Integranden kann man vor das Integrationszeichen ziehen:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \qquad (k \neq 0)$$

(Götz u.a. , Lehrbuch der Mathematik 8)

Es gibt natürlich auch noch weitere Integrale, die man leicht lösen kann, wenn man weiß, dass Integrieren die Umkehrung des Differenzierens ist.

Beispiel: $(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \int \cos x = \sin x$

Hier einige weitere Beispiele:

Funktion	Ableitungsfunktion	Stammfunktion
$y = f(x) = k$	$y' = f'(x) = 0$	$F(x) = \int k\ dx = kx + c$
$y = f(x) = x^q$	$y' = f'(x) = q \cdot x^{q-1}$	$für\ q \neq -1$: $F(x) = \int x^q dx = \frac{x^{q+1}}{q+1} + c$; $für\ q = -1, also\ f(x) = \frac{1}{x}$: $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = ln\lvert x\rvert + c$
$y = f(x) = e^x$	$y' = f'(x) = e^x$	$F(x) = \int e^x\ dx = e^x + c$

$y = f(x) = a^x$ $\quad$ $y' = f'(x) = a^x \cdot \ln a$ $\quad$ $F(x) = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$y = f(x) = \ln x$ $\quad$ $y' = f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $F(x) = \int \ln x \, dx =$

$= x \cdot \ln x - x + c$

$y = f(x) = \log_a x$ $\quad$ $y' = f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e =$ $\quad$ $F(x) = \int \log_a x \, dx =$

$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ $\quad$ $= \frac{1}{\ln a} \cdot (x \cdot \ln x - x) + c$

$y = f(x) = \sin x$ $\quad$ $y' = f'(x) = \cos x$ $\quad$ $F(x) = \int \sin x \;\, dx = -\cos x + c$

$y = f(x) = \cos x$ $\quad$ $y' = f'(x) = -\sin x$ $\quad$ $F(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + c$

$y = f(x) = \tan x$ $\quad$ $y' = f'(x) = \frac{1}{cos^2}$ $\quad$ $F(x) = \int \tan x \, dx =$

$= -\ln|\cos x| + c$

Weiters gibt es auch noch Integrale bei denen man diese Art der Berechnung nicht anwenden kann. Solche Integrale berechnet man dann mit Hilfe von Integrationsmethoden, die später noch folgen werden.

1.2 Das Flächeninhaltsproblem – Bestimmte Integrale stetiger Funktionen

Mithilfe der Integralrechnung kann man Flächeninhalte berechnen, die zum Beispiel eine Funktion mit der x-Achse einschließt oder die zwei Funktionen miteinander einschließen. Wenn man dieses Flächeninhaltsproblem angeht, sieht man sehr schnell wie das Flächeninhaltsproblem und das Tangentenproblem zusammenhängen. Dadurch kommt man auch schnell zum Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

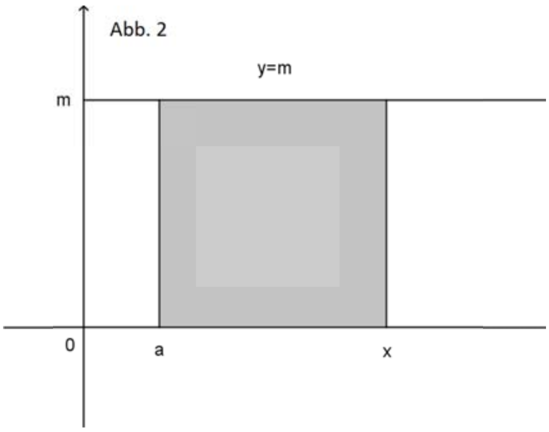
Zuerst wird der Fall betrachtet, dass die Fläche, die die Funktion mit der x-Achse einschließt, zur Gänze oberhalb der x-Achse liegt. Später ergänzt man dann um negative Funktionen, so dass dann alle stetigen Funktionen betrachtet werden können.

Grundproblem:

Es sei eine stetige Funktion $f: y = f(x)$ *gegben, von der wir vorerst voraussetzen, dass ihr Graph (auf* $[a; b]$ *)nur oberhalb der x-Achse liegt, dass also eine positive Funktion vorliegt. Gesucht ist der Flächeninhalt der unter der Funktion liegenden Fläche. Genauer: Gesucht ist der Fläceninhalt A der so genannten Ordinatenmenge* $\{(x|y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ *der Funktion f zwischen a und b. Für eine einfache Funktion* $y = f(x)$ *kann man das Problem sofort lösen.*

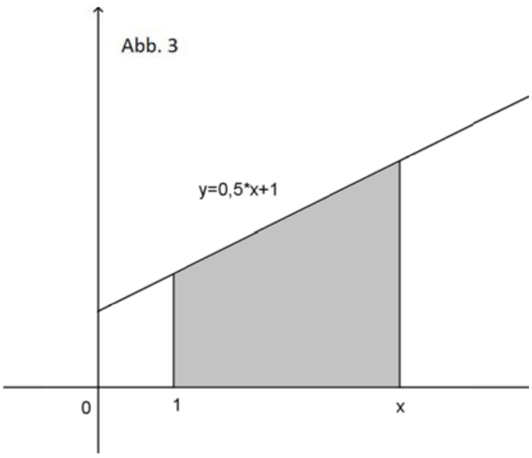
Bei der folgenden Abbildung (Abb. 2) sieht man eine lineare Funktion $y = m$. *Wenn hier die rechte Grenze – mit x bezeichnet – variiert, ist der grau unterlegte Flächeninhalt eine Funktion F(x) dieser Variablen x. Diese Funktion F heißt Flächeninhaltsfunktion der gegeben Funktion f (bei fester linker Grenze a).*

(Götz u.a. , Lehrbuch der Mathematik 8)



$$A = F(x) = m \cdot (x - a) = mx - ma$$

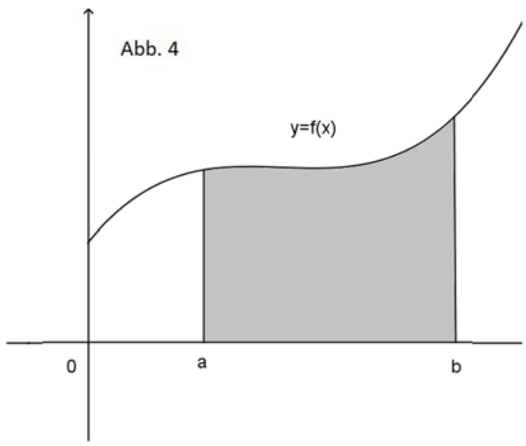
Bei der nächsten Abbildung (Abb. 3) sieht man auch eine lineare Funtkion bei der man den Flächeninhalt mit Hilfe der Flächenbrechnung eines Trapezes in Abhängigkeit von x berechen kann und erhält so auch eine Flächeinhaltsfunktion F(x).



$$A = F(x) = \frac{1}{2}\big(1{,}5 + (0{,}5x + 1)\big) \cdot (x - 1) = 0{,}25x^2 + x - 1{,}25$$

Wie kann man nun den Flächeninhalt der folgenden Funktion berechnen? (Abb. 4)

(Götz u.a. , Lehrbuch der Mathematik 8)

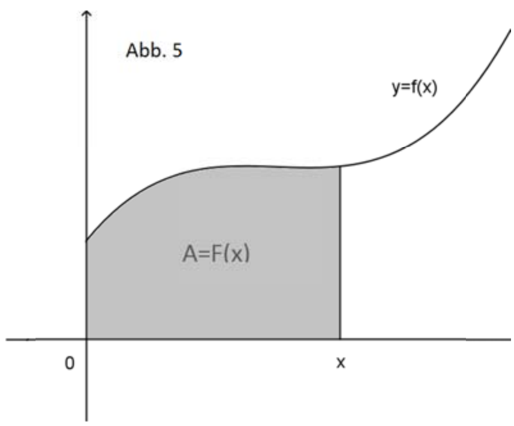


$$A = F(x) = ?$$

(Mit den nächsten Schritten wird auch gleich der Hauptsatz der Differential – und Integralrechnung bewiesen.)

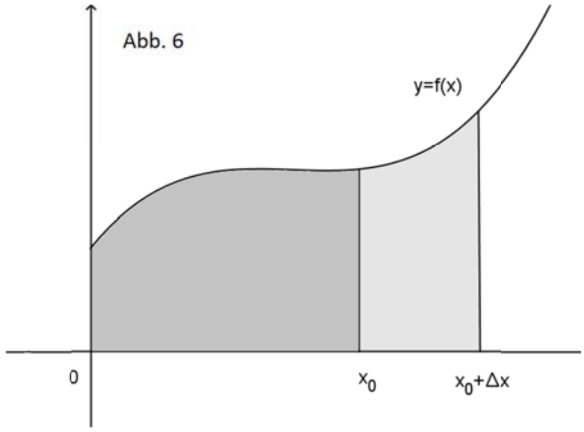
1.Schritt:

Man betrachtet zunächst den in Abb. 5 dargestellten Fall. Wenn man x variiert, ändert sich auch der Inhalt A des grauen Flächenstücks in Abhängigkeit von x. A ist eine Funktion von x; man schreibt A=F(x). Diese Funktion F - die Flächeninhaltsfunktion – wird zunächst untersucht.



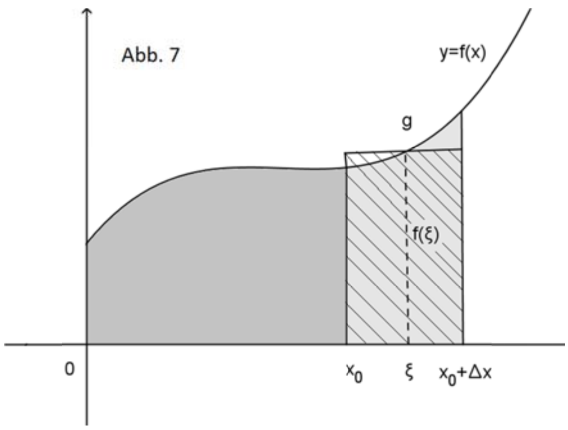
2.Schritt:

Geht man von x_0 *um ein kleines Stück* Δx *weiter nach rechts, so berechnet sich der Flächeninhalt des hinzugekommenen kleinen Streifens durch* $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$ *(siehe Abb. 6)*



3.Schritt:

Der hinzugekommene Streifen ist im Allgemeinen kein Rechteck. Hingegen ist anschaulich klar, dass (siehe Abb. 7) sich eine Zwischenstelle ξ *in* $[x_0; x_0 + \Delta x]$ *finden lässt, so dass das Rechteck mit den Seiten* Δx *und* $f(\xi)$ *flächengleich dem hellgrauen Streifen ist.*



Somit gilt: $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = f(\xi) \cdot \Delta x$

oder $\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = f(\xi)$

4.Schritt:

Nun bildet man den Grenzwert für $\Delta x \to 0$ *und erhält (wegen der Stetigkeit von f):*

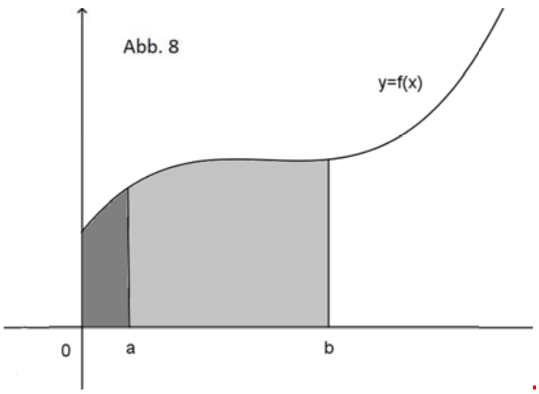
$$Lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x_0)$$

Daraus erkennt man, dass der Grenzwert die Ableitung der Funktion F(x) ist, also F'(x).

Die Funktion F – die Flächeninhaltsfunktion von f – ist eine Stammfunktion der gegebenen Funktion f.

5.Schritt:

Um den Flächeninhalt unter der Funktion f zwischen a und b zu berechnen, braucht man nur noch die Differenz $F(b) - F(a)$ *zu bilden (Abb. 8)*



6. Schritt:

Ziel der Überlegungen war es, den Flächeninhalt A der Ordinatenmenge unter der Funktion f zwischen a und b zu berechnen. Diesen Wert A hat man als $F(b) - F(a)$ *erkannt, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Stammfunktionen sind aber nicht eindeutig bestimmt. Man weiß jedoch, dass sich jede andere Stammfunktion* $\bar{F}(x)$ *von* $F(x)$ *nur durch eine Konstante unterscheidet :* $\bar{F}(x) = F(x) + c$ *, ceR*

Wenn man diese andere Stammfunktion zur Berechnung des Flächeninhalts A verwendet, ergäbe sich wegen

$$\bar{F}(b) - \bar{F}(a) = (F(c) + c) - (F(a) + c) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$$

kein Unterschied. Es ist also egal,welche Stammfunktion verwendet wird.

Es ergibt sich also: Um den Flächeninhalt A unter der stetigen, positiven Funktion f über dem Intervall $[a; b]$ *zu berechnen, muss man irgendeine Stammfunktion F von f finden und den Wert* $F(b) - F(a) = A$ *bilden.*

(Götz u.a. , Lehrbuch der Mathematik 8)

Und so kommt man zum Hauptsatz der Differential – und Integralrechnung.

1.3 Hauptsatz der Differential – und Integralrechnung

Die Funtkion f sei stetig auf dem Intervall $[a; b]$*; F sei die zugehörige Stammfunktion (Integralfunktion – d.h. Flächeninhaltsfunktion unter f zwischen der festen Grenze a und b) :*

(i) *Umkehrproblem: Setzt man* $F(x) := \int_a^b f(x)dx$ *, so folgt* $F'(x) = f(x)$ *(d.h. mit der Integralfuntkion hat man bei stetigen Funktionen eine Stammfunktion)*

(ii) *Das Flächenproblem:* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Und somit gilt auch:

Integrieren macht Differenzieren rückgängig.

(Skriptum Humenberger)

Definition: Der Wert $F(b) - F(a)$ *wird als das bestimmte Integral der Funktion f mit der Obergrenze b und der Untergrenze a bezeichnet.*

Dabei ist die Unterscheidung zwischen unbestimmten und bestimmten Integral sehr wichtig. Das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ *ist die Menge aller Stammfunktionen F von f. Hingegen ist das bestimmte Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *eine reelle Zahl.*

(Götz u.a. , Lehrbuch der Mathematik 8)

Beispiel:

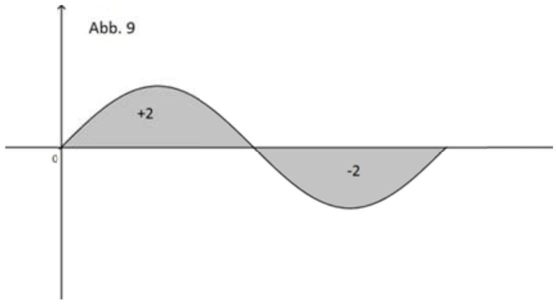
Berechne den Flächeninhalt, den die Funktion $f(x) = x^2$ mit der x-Achse einschließt im Intervall [1; 3] :

$$\int_1^3 x^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\,\frac{2}{3}$$

1.4 Funktionen, deren Graph (auch) unterhalb der x-Achse verläuft

Beispiel:

Berechne $\int_a^b \sin x\, dx = -\cos x =$ *für a) a=0, b=π b)a=π, b=2π c) a=0, b=2π*



a) $= -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - 1 = 2$

b) $= -\cos(2\pi) - (-\cos\pi) = -1 - (-(-1) = -2$

c) $= -\cos(2\pi) - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$

Man sieht: Der Flächeninhalt ist dort positiv (negativ), wo der Graph zur Gänze oberhalb (unterhalb) der x-Achse verläuft. In c) ist der Wert des Integrals null, weil für die Summe der orientierten (d.h. mit Vorzeichen versehenen) Flächeninhalte gemäß a) und b) laut Figur x gilt: A=2+(-2)=0

(Götz u.a. , Lehrbuch der Mathematik 8)

Die Flächeninhalte negativer Funktionen, also wenn $f(x) < 0$ ist, berechnet mit Hilfe der Integralrechnung, sind negativ. Um den tatsächlichen Flächeninhalt zu bestimmen wird daher immer der Betrag des Integrals berechnet.

Wie schon erwähnt ist das der orientierte Flächeninhalt, also der mit Vorzeichen versehene Flächeninhalt.

Man kann dies auf zwei Arten begründen. Zum einen rechnerisch, zum anderen argumentativ:

Rechnerisch ergibt sich klar:

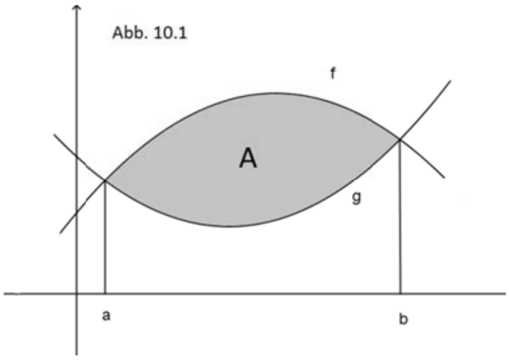
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$-\int_b^a f(x)dx = -\big(F(a) - F(b)\big) = F(b) - F(a)$$

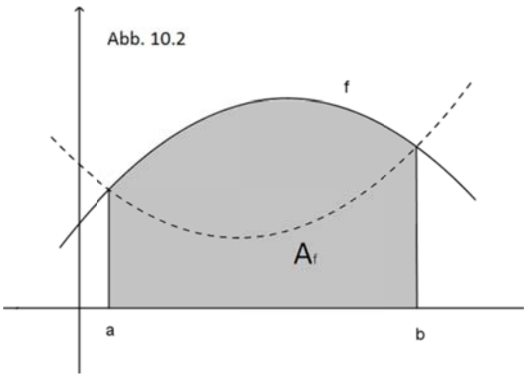
Argumentativ kann man das so begründen: $\int_a^b f(x)dx$ *ist der orientierte Flächenzuwachs zwischen a und b. So kann man das Integral* $-\int_b^a f(x)\,dx$ *als orientierte Flächenabnahme betrachten. Also wenn man von a nach b geht, hat man einen Flächenzuwachs, geht man von b nach a eine Flächenabnahme. (vgl. Humenberger Skript)*

1.5 Fläche zwischen Funktionsgraphen

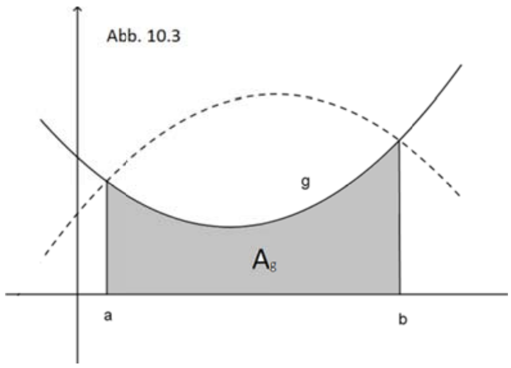
Um den Flächeninhalt zu berechnen, den zwei Funktionsgraphen mit einander einschließen, wird ebenso die Integralrechnung herangezogen. Dabei führt man das auf den Fall mit nur einer Randfunktion zurück, so wie es im folgenden Beispiel gezeigt wird.



=



-



Daraus ergibt sich:

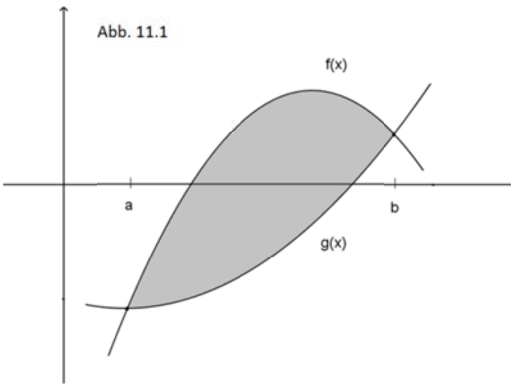
$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)dx$

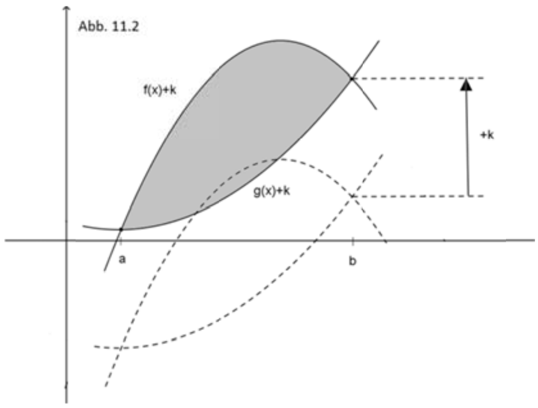
In Worten bedeutet das:

Inhalt der Fläche A zwischen f und g über dem Intervall $[a;b]$ = *Inhalt der Fläche* A_f *unter f über dem Intervall* $[a;b]$ − *Inhalt der Fläche* A_g *unter g über dem Intervall* $[a;b]$

Dabei stellt sich die Frage, wie man vorgeht, wenn die zu betrachtende Fläche nicht zur Gänze oberhalb der x-Achse liegt. Man untersucht nun, wie man vorgeht, wenn die

Fläche A zwischen den Kurven von der x-Achse in zwei Teilflächen von denen eine oberhalb und die andere unterhalb der x-Achse liegt.





Man kann die Graphen von f und g wie abgebildet so weit nach oben verschieben, dass die Fläche A ganz oberhalb der x-Achse liegt. Nun lässt sich der Inhalt von A leicht berechnen:

$$A = \int_a^b \big((f(x) + k) - (g(x) + k)\big)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Im Integranden fällt dann die Verschiebungsgröße k wieder heraus. Die Verschiebung muss also praktisch gar nicht ausgeführt werden.

Fazit: Der Inhalt der Fläche zwischen zwei Kurven f und g lässt sich – unabhängig von der Lage der Fläche – stets durch Integration der Differenzfunktion $f - g$ bestimmen.

(Bigalke/Köhler, Mathematik 12.1. Grundkurs)

Demnach ist es, wie oben bereits erwähnt, egal welche Stammfunktion man wählt um den Flächeninhalt zu berechnen und somit ist es auch egal, wenn die eingeschlossene Fläche nicht zur Gänze oberhalb der x-Achse liegt, da man beliebige andere Stammfunktionen wählen kann, so dass die eingeschlossene Fläche komplett oberhalb der x-Achse liegt.

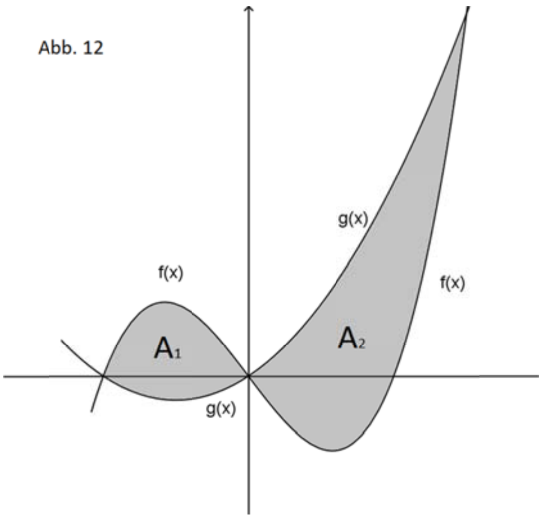
Betrachtet man nun den Fall, dass die von zwei Kurven f und g eingeschlossene Fläche, in zwei oder mehrere Teilflächen zerfällt, was passiert, wenn f und g mehr als zwei Schnittpunkte besitzen berechnet man einfach die einzelnen Teilflächen. Eine Skizze ist dabei vorteilhaft und sollte eigentlich immer gemacht werden, um etwaige Schnittpunkte zu berechnen.

Beispiel:

Man berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$ *und* $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$ *eingeschlossen wird.*

(Bigalke/Köhler, Mathematik 12.1. Grundkurs)

Abb. 12



Zunächst sollten die Graphen von f und g skizziert werden. Dabei fällt auf, dass die Graphen einander schneiden und in zwei Teilflächen A_1 und A_2 zerfallen.

Zuerst werden also die Schnittpunkte berechnet:

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$$

$$\Rightarrow\ x_1 = 0\ , x_2 = -2\ , x_3 = 3$$

Um es zu vereinfachen berechnet man zuerst die Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$. Zerfällt die zu berechnende Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen in mehrere Teilflächen, so wir das Integral der Differenzfunktion auch in den jeweiligen Teilintervallen berechnet.

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 2x$$

Nun kann die Fläche berechnet werden:

$$A_1 = \int_{-2}^{0} h(x)dx = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{9}x^3 - x^2 \Big|_{-2}^{0} = \frac{16}{9}$$

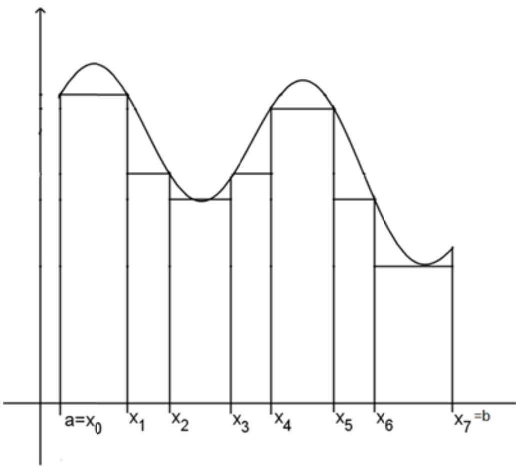
$$A_2 = \int_{0}^{3} h(x)dx = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{9}x^3 - x^2 \Big|_{0}^{3} = -\frac{21}{4}$$

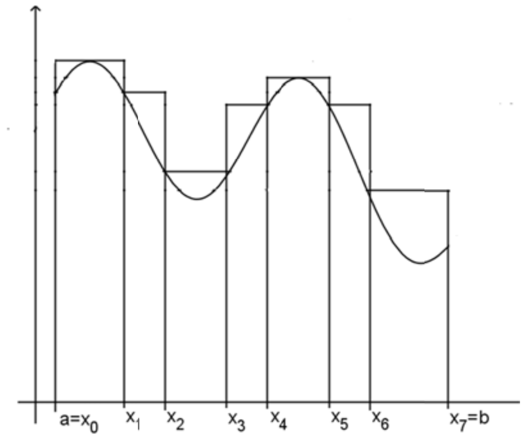
$$A_1 = \frac{16}{9}, A_2 = \frac{21}{4}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{253}{36} \cong 7{,}03$$

1.6 Das bestimmte Integral als Grenzwert von Produktsummen – Exaktifizierung durch Zerlegungen, Ober – und Untersummen

Das Intervall $[a; b]$ *wird zerlegt, wobei diese Zerlegung Z des Intervalls* $[a; b]$ *ein n-Tupel ist:* $Z = (a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$. *Die Zerlegung erfolgt in n Teilintervalle , wobei* $I_k = [x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1, \dots n)$ *ist , mit der Länge* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. *In jedem der Teilintervalle* I_k *soll die Funktion f einen größten* (M_k) *und einen kleinsten* (m_k) *Funktionswert haben.*





Daraus folgt dann:

$O = M_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$ *Obersumme...*

$U = m_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + m \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$ *Untersumme...*

...von f in $[a; b]$ *bei der Zerlegung Z.*

Man nimmt meist eine äquidistante Zerlegung, so dass $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ *(k=1,...,n)*

Satz:

f sein stetig auf $[a; b]$. *Dann gilt* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ O, U$ *mit* $O - U < \varepsilon$

Das heißt man kann zu jeder vorgegebenen Zahl $\lambda > 0$ *einer Zerlegung* $Z = (a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ *finden, so dass in jedem Teilintervall* $M_k - m_k < \lambda$ *(k=1,…,n) ist. Sei* $\varepsilon > 0$ *beliebig und* $\lambda = \frac{\varepsilon}{b-a}$*:*

$$O - U = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k < \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Das heißt, die Intervalle $[U; O]$ *bilden bei stetigen Funktionen und beliebig fein werdender Zerlegung eine Intervallschachtelung: Sie liegen ineinander und deren Länge konvergiert gegen 0. Sie ziehen sich also auf einen Punkt zusammen, auf einen gemeinsamen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist eine bestimmte Zahl:*

Das Integral der Funktion f auf $[a; b]$*:*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i \to \int_a^b f(x)\, dx$$

(Skriptum Humenberger)

1.7 Uneigentliche Integrale

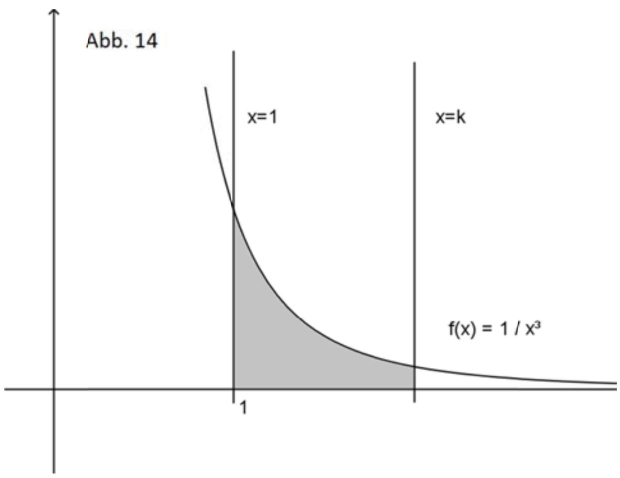
Wie schon erwähnt gibt es bestimmte und unbestimmte Integrale. Bestimmte Integrale sind auf abgeschlossenen Intervallen definiert, denn eine notwendige Vorraussetzung für Integrierbarkeit ist Beschränktheit, da Obersummen sonst beliebig groß werden können. Trotzdem können Grenzwerte von Integralen auch bei Polstellen einen endlichen Wert haben. Diese Integrale heißen uneigentliche Integrale.

Das bedeutet, dass entweder der Integrationsbereich ins Unendliche geht oder die Integrationsgrenze zu einer Polstelle strebt.

1.7.1 Typ 1: Integral über einem unbeschränkten Intervall

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^3}$

- *Man berechne den Inhalt der Fläche A(k) zwischen x=1 und x=k in Abhängigkeit von k.*
- *Man untersuche das Grenzwertverhalten des Flächeninhalts A(k) für* $k \to \infty$



$$f(x) = \frac{\mathbf{1}}{x^3} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

Der gesuchte Flächeninhalt kann nun als bestimmtes Integral von f über dem Intervall $[1; k]$ $(k > 1)$ *berechnet werden.*

$$A(k) = \int_1^k \frac{1}{x^3}\,dx = F(k) - F(1) = -\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2}$$

Das Verhalten von A(k) für k $\rightarrow \infty$: Mit zunehmenden k wandert die Gerade x=k weiter nach rechts, und die Fläche A(k) dehnt sich immer weiter aus.

Für k $\rightarrow \infty$ erstreckt sich die Fläche bis ins Unendliche. Man könnte vermuten, dass diese unendlcih ausgedehnte Fläche einen unendlich großen Flächeninhalt hat. Man sieht allerdings durch die Grenzwertbestimmung:

$lim_{k\rightarrow\infty} A(k) = \lim_{k\rightarrow\infty} \int_1^k \frac{1}{x^3} = \lim_{k\rightarrow\infty} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2}) = \frac{1}{2}$

An diesem Beispiel erkennt man, dass auch Flächen, die nicht nach allen Seiten durch Randkurven begrenzt sind, sondern sich bis ins Unendlcihe erstrecken unter bestimmten Umständen durchaus (endlichen) Flächeninhalt haben können.

Definition: Ist die Funktion auf einem Intervall $[a;\infty[$ *stetig und existiert der Grenzwert*

> $lim_{k\rightarrow\infty} \int_a^k f(x)\,dx$ *, dann definiert man den Grenzwert als uneigentliches Integral von f über* $[a;\infty[$ *und schreibt hierfür* $\int_a^\infty f(x)\,dx$.
>
> *Existiert der Grenzwert nicht, so sagt man, dass das uneigentliche Integral nicht existiert.*

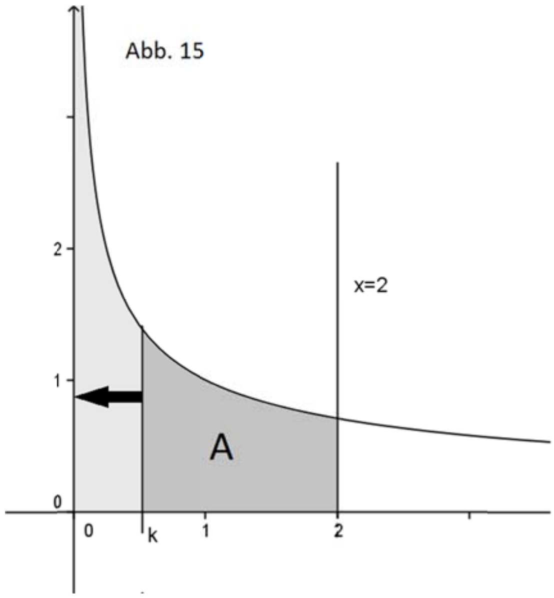
Man betrachtet also zuerst die „normalen Integrale“ mit festen Grenzen a;b, und betrachtet dann den Grenzwert.

1.7.2 Typ 2: Integral einer unbeschränkten Funktion

Bisher wurden nur bis ins Unendliche ausgedehnte Flächen betrachtet, die als bestimmte Integrale unbeschränkten Intervallen darstellbar waren. Das folgende Beispiel zeigt, dass ins Unendliche ausgedehnte Flöchen bei bestimmten Funktionen in anderen Zusammenhängen auftreten können.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Man berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x)$ *, von der Geraden* $x = 2$ *und der x-Achse begrenzt wird.*



Die Funktion f ist für $x = 0$ *nicht definiert. Es gilt also:* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.

Die Fläche A dehnt sich also „nach oben" bis ins Unendliche aus, da f in der Nähe von 0 unbeschränkt ist. Um deren Flächeninhalt zu untersuchen, geht man mittels Grenzwertbestimmung vor. Man berechnet den Inhalt der Fläche A(k) unter dem Graphen von f über einem beliebigen Intervall $[k; 2]$ *mit* $0 < k < 2$.

$$A(k) = \int_k^2 f(x)\,dx = \int_k^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{k}$$

Nun soll $k \to 0$ *, so dehnt sich die Fläche immer weiter aus. Der Inhalt der Fläche A ergibt sich dann als Grenzwert des Flächeninhalts A(k) für* $k \to 0$.

$$\lim_{k\to 0} A(k) = \lim_{k\to 0} \int_k^2 f(x)\,dx = \lim_{k\to 0}\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{k}\right) = 2\sqrt{2}$$

Im obigen Beispiel konnte man nicht direkt das Integral von 0 bis 1 bilden, da die Funktion f bei $x = 0$ *nicht definiert, sondern dort unbeschränkt ist. Auch in diesem Fall kann man den errechneten Grenzwert als uneigentliches Integral bezeichnen.*

Definition: Ist die Funktion f an der Stelle a nicht definiert, aber auf dem Intervall $]a;b]$ *stetig und existiert der Grenzwert* $\lim_{k\to a}\int_k^b f(x)\,dx$ *, so definiert man diesen Grenzwert als uneigentliches Integral von f über* $]a;b]$ *.*

(Bigalke/Köhler, Mathematik 12.2. Leistungskurs)

1.8 Integrationsmethoden

1.8.1 Partielle Integration

Die partielle Integration entspricht der Umkehrung der Produktregel beim Differenzieren.

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\Rightarrow f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g' \Rightarrow \int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

Beispiel:

$\int cos^2\varphi \, d\varphi = \int cos\varphi \cdot cos\varphi \, d\varphi = sin\varphi cos\varphi - \int -sin^2\varphi \, d\varphi =$

$sin\varphi cos\varphi + \int(1 - cos^2\varphi)d\varphi = sin\varphi cos\varphi + \varphi - \int cos^2\varphi d\varphi$

$\Rightarrow \int cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{sin\varphi cos\varphi + \varphi}{2}$

1.8.2 Substitutionsmethode

$\int \sqrt{sinx} \cdot cosx \, dx$ *setze:* $u := sinx$

$\Rightarrow \int \sqrt{u} \cdot cosx \, dx$

Was passiert mit cosx und dx? Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

1.) *Ableitungen und Differenzenquotienten im Vordergrund:*

$\frac{du}{dx} = cosx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{cosx}$

$\Rightarrow \int \sqrt{u} \cdot cos\, x \, dx = \int \sqrt{u} \cdot cosx \cdot \frac{du}{cosx} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot (sinx)^{\frac{3}{2}} + c$

Zuerst wird also substituiert, dann integriert, und dann wird die Substitution wieder rückgängig gemacht.

2.) *Differentiale im Vordergrund:*

$u = sinx \quad \Rightarrow \quad du = cosx \cdot dx$

Allgemein gilt: $y = f(x) \quad \Rightarrow \quad dy = f'(x) \cdot dx$

$\int \sqrt{u} \cdot cosx\, dx \quad$ *wobei* $\; du = cosx\, dx$

Die Substitutionsmethode funktioniert immer, wenn

- *die innere Ableitung multiplikativ daneben steht*
- *die innere Ableitung konstant ist.*

Satz: Sei f stetig und g stetig differenzierbar mit $x = g(t)$

$$\Rightarrow \int f(x) = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$$

Beweis 1 (mit Differentialen):

$$x = g(t) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = g'(t) \;\Rightarrow\; dx = g'(t)\, dt$$

Beweis 2 (ohne Differentialen):

F ist eine Stammfunktion zu f. Aufgrund der Kettenregel folgt daraus:

$$\left(F(g(t))\right)' = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

$$\Rightarrow \int f(g(t)) \cdot g'(t) = F(g(t)) + c = F(x) + c = \int f(x)\, dx$$

So gesehen ist die Substitutionsmethode die Umkehrung der Kettenregel beim Differenzieren.

Bei bestimmten Integralen lässt man entweder die Grenzen einstweilen beiseite oder substituiert sie mit.

Beispiel: $\int_1^4 3x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx$

- $\frac{x^2}{2} = u \quad \Rightarrow \quad x \cdot dx = du \quad \Rightarrow \quad \int 3xe^{\frac{x^2}{2}} dx = \int 3xe^u \cdot \frac{du}{x} = 3\int e^u du = 3e^u = 3e^{\frac{x^2}{2}}$

Jetzt die ursprünglichen x-Grenzen einsetzen:

$$3e^{\frac{x^2}{2}}\Bigg|_{1}^{4} = 3 \cdot \left(e^8 - e^{\frac{1}{2}}\right)$$

- $u = \frac{x^2}{2}$, $x = 1 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$, $x = 4 \Leftrightarrow u = 8$

$$3 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{8} e^u du = 3 \cdot (e^8 - e^{\frac{1}{2}})$$

(Skriptum Humenberger)

2 Grundvorstellungen

2.1 Grundvorstellungen mathematischer Inhalte

Der Titel der Diplomarbeit ist „Grundvorstellungen zur Integralrechnung - ein empirischer Vergleich zwischen Wien und Berlin“. Es soll dabei also auf die Grundvorstellungen der Integralrechnung einerseits und die dabei auftretenden Unterschiede im Verständnis und die Fehler der Schülerinnen und Schüler in Wien und Berlin andererseits eingegangen werden.

Bevor ich nun die Grundvorstellungen zur Integralrechnung näher beschreibe, möchte ich vorher noch auf den Begriff der Grundvorstellungen in fachdidaktischer Hinsicht einegehen. Es kommen nämlich dabei Fragen auf wie: „Was sind eigentlich Grundvorstellungen mathematischer Inhalte und was kann man sich darunter vorstellen?“

Wie man weiß ist Mathematik für die meisten Schülerinnen und Schüler nicht das beliebteste Fach, und deshalb wird auch nach der Schulzeit meist versucht, Mathematik irgendwie zu umgehen. Außerdem vergisst man mit der Zeit auch Details und, oder Beweise. Gerade deshalb ist es sehr wichtig, Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten im Unterricht zu vermitteln, denn diese sollen erhalten bleiben, auch wenn Details vergessen werden.

Weiters soll mit diesen Grundvorstellungen auch ein Grundverständnins vermittelt werden, um später, wenn man mit Mathematik konfrontiert wird, dieses Grundverständnins bereichernd einsetzen zu können.

Die Grundvorstellungsidee hat sich über Jahrhunderte entwickelt und wurde immer wieder von Didaktikern und Mathematikern ergänzt, erweitert oder kritisiert. Sie ist durch eine laufende Auseinandersetztung zwischen Theorie und Praxis entstanden. Rudolf vom Hofe beschreibt in seinem Buch „Grundvorstellungen mathematischer Inhalte“ zusammenfassend :

Die Grundvorstellungsidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen

Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- *Sinnkonstituierung des Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach-oder Handlungszusammenhänge beziehungsweise Handlungsvorstellungen,*
- *Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen beziehungsweise „Verinnerlichungen“, die operatives Handeln auf Vorstellungsebene ermöglichen,*
- *Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit ducrh Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur. (Rudolf vom Hofe;Grundvorstellungen mathematischer Inhalte; S.97)*

Unter Grundvorstellungen versteht man also den Übergang zwischen dem mathematischen Inhalt selbst und dem Verständnis des Lernenden, wobei dieses Verständnis individuell verschieden ist, wie auch Rudolf vom Hofe oben beschreibt - nämlich als Beziehung zwischen dem mathematishen Inhalt und der Begriffsbildung des jeweiligen Schülers oder Schülerin. Besonders wichtig erscheint mir der dritte Punkt aus dem oben angeführten Zitat, nämlich die Fähigkeit zur Anwendung des Begriffs auf die Wirklichkeit, denn das ist jene Charakterisierung des Grundvorstellungsbegriffes, welche am naheliegensten ist und die man als erstes damit in Verbindung bringen würde. Also nicht nur bloßes Verständnis eines mathematischen Inhaltes, sondern eben Grundvorstellungen eines ganzen mathematischen Themas zu schaffen, sollte Ziel eines jeden Lehrers oder Lehrerin sein.

Der Terminus „Grundvorstellung“ charakterisiert somit fundamentale mathematische Begriffe oder Verfahren und deren Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen. Er beschreibt damit Beziehungen zwischen mathematischen Strukturen, individuell-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen oder kurz: Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität.

Bei diesem Zitat trifft „fundamental“ die Charakterisierung des Begriffes Grundvorstellung sehr gut und grenzt sich dadurch von der bloßen „Vorstellung“ eines mathematischen Inhaltes ab. Wichtig ist bei der Analyse des Terminus

„Grundvorstellung“ auch die Eigenschaft der „Deutungsmöglichkeit in realen Situationen“. Denn viel zu selten wird die praktische Anwendbarkeit im Mathematikunterricht vermittelt und durch fundamentale Grundvorstellungen fällt die Umlegung theoretischer Inhalte auf praktische Situationen wesentlich leichter.

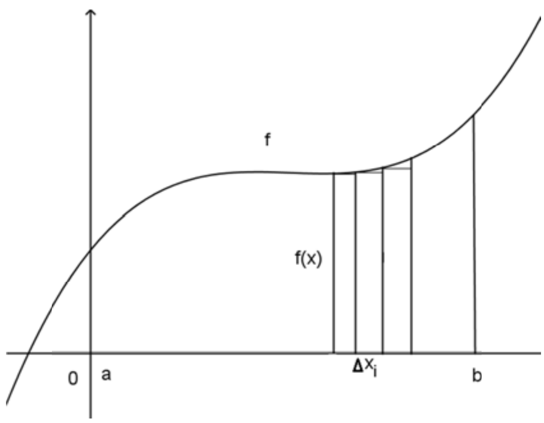
2.2 Grundvorstellungen zur Integralrechnung

Bei dem von mir zusammengestellten Test habe ich Wert auf das Verständnis bezüglich zweier Grundvorstellungen gelegt:

- Das Integral als Grenzwert von Produktsummen
- Integrieren als die Umkehrung zum Differenzieren

2.2.1 Das Integral als Grenzwert von Produktsummen

In einigen Lehrbüchern wird der Einstieg in die Integralrechnung mittels dieser Vorstellung behandelt. Man führt den Begriff des Integrierens als Berechnen des Flächeninhalts unterhalb eines Funktionsgraphen ein, und zwar so, dass der Flächeninhalt die Approximation der Summe von schmalen Rechtecksflächen unter krummlinigen Funktionsgraphen ist.



$$lim \sum f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int f(x)$$

Dabei geht man, wie auch schon im Einstieg in die Integralrechnung gezeigt, davon aus, dass, wenn die Δx genügend klein sind, man also den Grenzwert der Summe der Rechtecksflächen betrachtet, man den tatsächlichen Flächeninhalt unterhalb des Funktionsgraphen bestimmen kann.

Es ist aber auch wichtig, diesen Integralbegriff, beziehungsweise diese Grundvorstellung, nicht nur auf den Flächeninhalt zu reduzieren. Es handelt sich bei dieser Grundvorstellung um die Aussage $\sum f(x_i) \cdot \Delta x_i$, die in Worten bedeutet:

Produkt aus Argumentdifferenzen (Δx_i) und sich ändernden Funktionswerten ($f(x_i)$).

In der Physik ist das zum Beispiel $Arbeit = Kraft \cdot Weg$ oder
$Weg = Geschwindigkeit \cdot Zeit$

Besonders kann man diese Grundvorstellungen auch auf die Volumsberechnung auslegen. Hier gilt dann:

$$Volumen = Querschnittsfläche \cdot Scheibendicke$$

Die zentrale Grundvorstellung soll hier also bei dem „Grenzwert von Produktsummen" liegen, wobei man sich dabei nicht zu sehr nur auf den Flächeninhalt konzentrieren sollte, da man mithilfe dieser Vorstellung auch andere Kapitel der Integralrechnung begründen kann.

Dabei sind eben Integrale die Grenzwerte von Produktsummen und der Flächeninhalt oder das Volumen sind hier „nur" die zugehörigen geometrischen Grundvorstellungen.

2.2.2 Integrieren als Umkehrung zum Differenzieren

Hier geht es bei dem Zusammenhang von Differenzieren und Integrieren darum, dass das eine das jeweils andere rückgängig macht. Habe ich also eine Funktion gegeben und möchte deren Stammfunktion berechnen, so erhalte ich diese Funktion durch Integrieren. Umgekehrt gilt das genauso, durch Ableiten der Stammfunktion erhalte ich dann wieder die ursprüngliche Funktion. Das ist auch das, was der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung unter anderem, neben der schon oben genannten Grundvorstellung, besagt:

Die Funtkion f sei stetig auf dem Intervall $[a;b]$; F sei die zugehörige Stammfunktion (Integralfunktion – d.h. Flächeninhaltsfunktion unter f zwischen der festen Grenze a und b) :

(i) Umkehrproblem: Setzt man $F(x) := \int_a^b f(x)dx$, so folgt $F'(x) = f(x)$ (d.h. mit der Integralfuntkion hat man bei stetigen Funktionen eine Stammfunktion)

(ii) *Das Flächenproblem:* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Und somit gilt auch:

Integrieren macht Differenzieren rückgängig.

(Humenberger Skriptum)

Mit Punkt (i) ist also das Umkehrproblem gelöst, welches auch eines der Grundvorstellungen darstellt. Durch Integrieren kann man zum einen den Flächeninhalt unterhalb eines Funktionsgraphen berechnen und zum andern kann man damit eben die Stammfunktion aufsuchen beziehungsweise durch Differenzieren wieder die ursprüngliche Funktion berechnen.

3 Erläuterungen

Zwecks dieser Diplomarbeit habe ich einen Test erstellt, den ich an drei Wiener Schulen und einer Berliner Schule durchgeführt habe. Dabei wurden in Wien 54 Schülerinnen und Schüler und in Berlin 51 Schülerinnen und Schüler getestet. Bevor die Fehler der Tests analysiert und verglichen werden, möchte ich noch gerne erläutern weshalb ich die Beispiele so gewählt habe wie sie im Test vorkommen. Zu beachten ist dabei aber, dass in Berlin ein anderes Schulsystem herrscht. Und zwar können sich Schülerinnen und Schüler aus Berlin ab der zwölften Schulstufe entscheiden, ob sie den Leistungskurs oder nur den Grundkurs in Mathematik belegen. Dabei haben die Schülerinnen und Schüler des Leistungskurses zwei Wochenstunden mehr Mathematikunterricht als der Grundkurs, dieser hat nämlich drei Wochenstunden, der Leistungskurs sogar fünf. Dadurch wird im Leistungskurs auch wesentlich mehr Stoff durchgenommen, wohl auch weil man davon ausgeht, dass die Schülerinnen und Schüler des Leistungskurses interessierter am Fach Mathematik sind, da sie sich freiwillig für den mehrstündigen Leistungskurs entschieden haben. Um den Vergleich fair zu gestalten, wurde der Test in Wien unter anderem auch an einer naturwissenschaftlichen Schule durchgeführt, die vier Wochenstunden Mathematik hat.

Im Grundkurs gibt es daher einige Kapitel, die im Gegensatz zum Leistungskurs nicht durchgenommen werden. Das wären zum Beispiel die Integrationsmethoden, die auch im Test als Beispiel 3 vorkommen. In Berlin habe ich den Test in einer Leistungskursklasse und zwei Grundkursklassen durchgeführt, weshalb ich den Test für die Schülerinnen und Schüler des Grundkurses ein wenig abgewandelt habe. Und zwar habe ich dabei nur das Beispiel 3 geändert, da die Schülerinnen und Schüler des Grundkurses diese Aufgaben nicht beantworten hätten können.

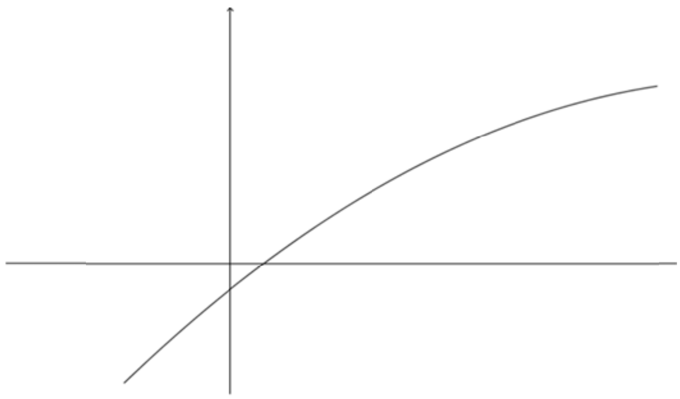
Dies wird natürlich bei der späteren Analyse und beim Vergleich berücksichtigt.

3.1 Allgemeiner Test

(für alle Wiener Schulen und den Leistungskurs der Berliner Schule):

1) a) Was ist ein Integral?

b) Zeichne den Graphen der zugehörigen Integralfunktion per Freihandzeichnung und begründe deine Skizze!



2) $\int_a^b = - \int_b^a$

Begründe diese Gleichung a) mit Worten (argumentativ) und

b) rechnerisch !

3) Berechne:

a) $\int e^x \cdot \sin x \ dx$

b) $\int x \cdot (1 + x^2)^3 \, dx$

4) Berechne den Flächeninhalt, den die Graphen der beiden Funktionen miteinander einschließen:

$$f(x) = x^2 - 2x + 5$$

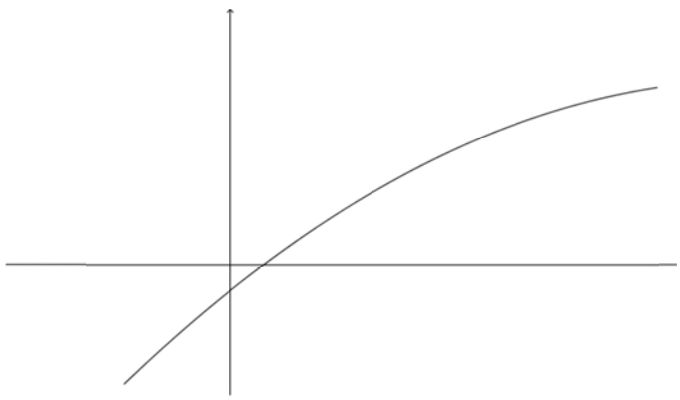
$$g(x) = 3x + 1$$

Danke für eure Mithilfe!

3.2 Angepasster der Test für den Grundkurs an der Berliner Schule

1) a) Was ist ein Integral?

b) Zeichne den Graphen der zugehörigen Integralfunktion per Freihandzeichnung und begründe deine Skizze!



2) $\int_a^b = - \int_b^a$

Begründe diese Gleichung a) mit Worten (argumentativ) und

b) rechnerisch !

3) Berechne:

a) $\int 8x^2 + 2x^3 - x\, dx$

b) Erläutere die Begriffe: „bestimmtes“ und „unbestimmtes“ Integral!

4) Berechne den Flächeninhalt, den die Graphen der beiden Funktionen miteinander einschließen:

$$f(x) = x^2 - 2x + 5$$
$$g(x) = 3x + 1$$

Danke für eure Mithilfe!

3.3 Frage 1

a) „Was ist ein Integral?“ – diese Frage habe ich absichtlich so offen formuliert, weil ich ohne jede fragende Einschränkung wissen wollte, was die Schülerinnen und Schüler mit der Integralrechnung beziehungsweise mit einem Integral in Verbindung bringen. Allerdings habe ich jedes Mal, wenn ich den Test ausgeteilt habe und mit den Schülerinnen und Schülern die Aufgaben durchgegangen bin, hinzugefügt, dass sie bitte alles was ihnen dazu einfällt hinschreiben sollen. Weiters habe ich sie auch gebeten, dass sie, auch wenn sie nur eine Vermutung haben, sich aber nicht sicher sind, diese auch hinschreiben sollen, da ich eine falsche Antwort besser verwerten beziehungsweise analysieren oder vergleichen kann als gar keine.
Erwartet habe ich mir als Antwort auf diese Frage, dass die Grundvorstellungen, so wie sie oben beschrieben sind, dabei vorkommen. Dabei habe ich keine genaue Beschreibung einer Grundvorstellung erwartet, aber doch zumindest Stichwörter, die in Zusammenhang mit zumindest einer Grundvorstellung stehen.

b) Bei dieser Aufgabe wollte ich überprüfen, wie die Schülerinnen und Schüler die Differential- und Integralrechnung kombinieren können. Dabei habe ich auch absichtlich nicht f‘ gezeichnet sondern f, was später, wie ich feststellen konnte, zu Verwirrungen geführt hat, wobei ich darauf später in der Analyse der Fehler noch genauer eingehe. Es ging mir bei diesem Beispiel vor allem darum, den Zusammenhang von f und f‘ graphisch umsetzen zu können. Also wie man die Sätze aus der Differentialrechnung in dem Testbeispiel umgekehrt angeht. Wenn man also davon ausgeht, dass man um die Extrempunkte einer Funktion zu berechnen, die erste Ableitung null gesetzt wird, so kann man umgekehrt bei diesem Beispiel erkennen, dass die Nullstelle bei der gegeben Funktion ein Extrempunkt der Stammfunktion sein muss. Um den weiteren skizzenhaften Verlauf der Stammfunktion zu zeichnen, wendet man dann die Monotoniesätze der Differentialrechnung.

3.4 Frage 2

Bei diesem Beispiel, welches wieder in a) und b) unterteilt ist, liegt die Schwierigkeit in Punkt a). Bei b) war die Aufgabe, das Beispiel rechnerisch zu lösen beziehungsweise zu begründen, was eigentlich keine Schwierigkeit darstellen sollte, wenn man die Formel zur Berechnung eines bestimmten Integrals kennt. Dabei wollte ich überprüfen, ob die Schülerinnen und Schüler mit der Formel auch rechnerisch umgehen können.

Bei Punkt a) wird die Lösung dann schwieriger, da es darum ging, die Aufgabe logisch beziehungsweise mit Worten oder argumentativ zu begründen. Hier kommt dann nämlich der orientierte Flächeninhalt ins Spiel. Wenn man also die erste oben genannte Grundvorstellung verstanden hat, sollte es einem leichter fallen diese Aufgabe zu lösen.

Denn das Integral $\int_a^b f$ stellt die Flächenzunahme dar und das Integral $-\int_b^a f$ die Flächenabnahme. Dabei hilft dann die Vorstellung eines Integrals als Summe von Produkten, dadurch wird dann auch die Vorstellung von Flächenab- und zunahme anschaulicher. Der dazu theoretische Hintergrund ist in Kap. 1. "Einstieg in die Integralrechnung" schon genauer beschrieben.

3.5 Frage 3 und 4

Bei diesen Beispielen geht es mir um die Umsetzung theoretischer Inhalte in rein rechnerische Beispiele. Dabei waren diese zwei Beispiel auch als Vergleich gedacht, ob die Rechenbeispiele ein reiner erlernter Prozess sind oder ob dabei wirklich theoretisches Wissen umgesetzt werden konnte. So war meine Vermutung, dass die Beispiele 3) und 4) keine großen Schwierigkeiten bereiten sollten, jedoch 1) und 2) schon. Dazu nehme ich vorweg, dass einige Schülerinnen und Schüler die ersten beiden Beispiele teilweise kaum oder nur sehr fehlerhaft beantworten konnten, jedoch die Beispiele 3) und 4) ohne gröbere Fehler berechnen konnten. Dies erweckt den Anschein, dass von festsitzenden Grundvorstellungen nicht viel „hängen geblieben" ist, oder dass dies im Unterricht nicht genau durchgenommen wurde. Dazu wird allerdings auch später bei der Analyse der Fehler näher eingegangen.

Beispiel 3) wurde abgeändert für den Grundkurs der Berliner Schule, wobei Punkt a) ein einfaches Integral war, welches man ohne Hilfe von Integrationsmethoden berechnen konnte und b) wieder eine theoretische Frage war. Bei Punkt b) habe ich eben nach dem Unterschied, beziehungsweise einer Erläuterung der Begriffe bestimmtes und unbestimmtes Integral gefragt, wobei das bestimmte Integral die Maßzahl für den Flächeninhalt und das unbestimmte Integral die Menge aller Stammfunktionen ist. Die Begründung warum ich diese Frage gewählt habe, ist diese, dass ich dabei wissen wollte, ob sie die zwei Begriffe per Definition oder so wie im vorigen Satz beschrieben unterscheiden können, oder ob es für sie lediglich einen Unterschied in der Berechnung darstellt. Nämlich, dass man bei dem bestimmten Integral einfach die Grenzen einsetzen muss, ohne zu wissen, was man dabei genau berechnet, beziehungsweise, was man erhält, wenn man keine Grenzen einsetzt.

Dabei wollte ich also wieder erkennen, ob der theoretische Inhalt dahinter verstanden wurde, oder ob man einfach nur weiß, wie man damit in rein rechnerischen Beispielen, wie zum Beispiel einer Flächenberechnung zwischen zwei Funktionsgraphen, umzugehen hat.

Bei Beispiel 4) habe ich ein Beispiel gewählt, bei dem sich zwei Funktionsgraphen schneiden und man die Schnittpunkte dafür selber berechnen musste. Ich habe also keine Grenzen und auch keine Schnittpunkte vorgegeben. Ansonsten ist dieses Beispiel aus derselben Begründung gewählt wie das Beispiel 3a) für den Leistungskurs und die Wiener Schulen, nämlich um herauszufinden beziehungsweise zu vergleichen, ob die Rechenbeispiele einen rein erlernten Prozess darstellen, oder ob dabei auch der theoretische Hintergrund verstanden wurde.

4 Auswertungen und Vergleich

Bevor ich die einzelnen Beispiele des Tests analysiere und vergleiche ist noch einiges allgemein zu erläutern. Zu Beginn ist es wichtig zu sagen, dass die Schülerinnen und Schüler mit den Tests überrascht wurden. Die Lehrerinnen und Lehrer wussten davon, und haben die Schülerinnen und Schüler auch über einen bevorstehenden Test informiert, aber nicht dementsprechend, dass die Schülerinnen und Schüler sich darauf genauer vorbereitet hätten. Es war mir also bewusst, dass die Schülerinnen und Schüler bei einer Schularbeit sicherlich anders abgeschnitten hätten, beziehungsweise sich zumindest mehr darauf vorbereitet hätten. Deshalb habe ich großen Wert darauf gelegt, dass alle Klassen den Test ungefähr im selben Abstand zu ihrer letzten Unterrichtsstunde mit dem Thema Integralrechnung hatten. Genau gleich war das natürlich nicht, das wäre organisatorisch kaum umzusetzen gewesen, da es eben ein Vergleich zwischen Wien und Berlin ist und die Lehrpläne sich auch insofern unterscheiden, wann welches Stoffgebiet unterrichtet wird. So habe ich zum Beispiel in Wien die Tests circa eine Woche vor der schriftlichen Matura durchgeführt, da ich in diesem Fall davon ausgegangen bin, dass erstens der Stoff vor der Matura noch einmal mit der Lehrerin oder dem Lehrer wiederholt wurde, und zweitens die Schülerinnen und Schüler schon für die Matura gelernt haben.

In Berlin habe ich die Tests, nachdem die für den Test notwendigen Stoffgebiete abgeschlossen waren, durchgeführt, wobei das beim Leistungskurs schon länger zurückgelegen ist als bei den Grundkursklassen. Das ist meines Erachtens auch fair, da der Leistungskurs den Stoff genauer und zeitintensiver durchnimmt. Dennoch werde ich diese Tatsache auch bei der Auswertung der Tests berücksichtigen.

Weiters ist noch zu erwähnen, wie ich schon in den Erläuterungen beschrieben habe, dass die ersten beiden Fragen sehr offen gestellt wurden. Dabei habe ich in den Klassen, besonders bei der ersten Frage, hinzugefügt, dass die Schülerinnen und Schüler alles was ihnen dazu einfällt als Antwort schreiben sollen, da ich sonst kaum Antworten erwartet hätte. Ich denke jedoch, dass wenn die Fragen konkreter gewesen wären, vielleicht genauere oder bessere Antworten gekommen wären. Mein Ziel war es aber durch offene Fragen herauszufinden, was die Schülerinnen und Schüler von der

Integralrechnung in Erinnerung behalten haben beziehungsweise was sie damit verbinden oder welche Vorstellungen sie von diesem mathematischen Gebiet haben. Deshalb habe ich die Fragen nicht konkreter gestellt, um nicht Ideen für mögliche Antworten vorweg zu nehmen beziehungsweise wollte ich nicht, dass die Schülerinnen und Schüler durch „multiple choice" Antworten eingeschränkt sind in ihren möglichen Antworten. So konnte jede Schülerin und jeder Schüler ihre/seine Antwort selbst formulieren, was natürlich, und darauf wollte ich hinaus, oft zu falschen oder zumindest falsch formulierten Antworten führte. Darauf werde ich dann aber bei den jeweiligen Beispielen noch genauer eingehen.

Bei der Beschreibung der Fehler gehe ich so vor, dass ich zuerst allgemein eine Tabelle erstelle, die sowohl die Schülerinnen und Schüler aus Wien und Berlin beinhaltet, dann Wien mit Berlin vergleiche und dann auch noch den Grundkurs mit dem Leistungskurs vergleiche. Dabei habe ich immer eine Tabelle erstellt, bei der man die Schülerinnen– und Schülerzahlen sieht, bei den Graphiken sind die Angaben dann prozentuell angegeben um auch einen richtigen verhältnismäßigen Vergleich darstellen zu können.

4.1 Beispiel 1

4.1.1 Beispiel 1a

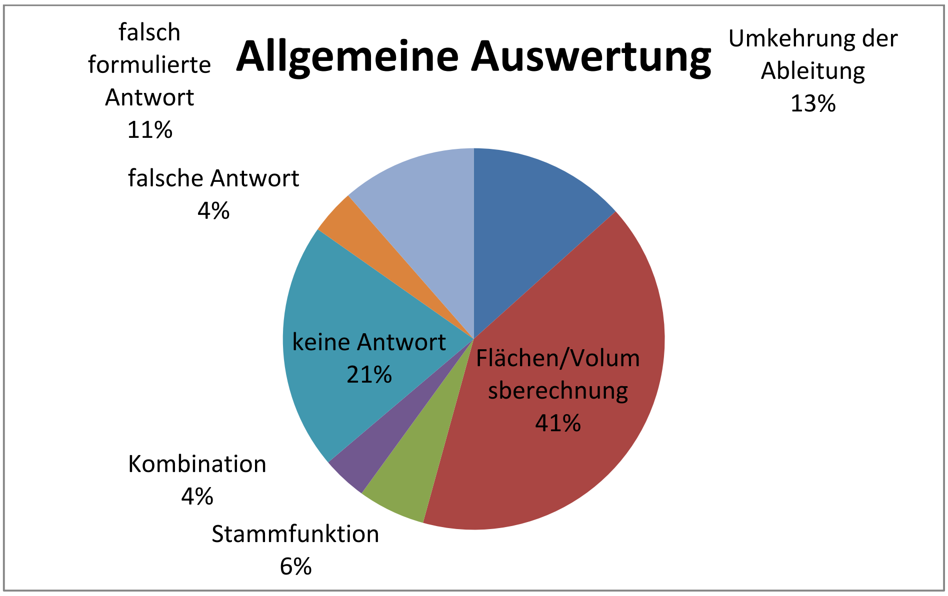
Bei dieser ersten Frage werte ich nicht die Fehler aus, sondern die unterschiedlichen Antworten der Schülerinnen und Schüler. Wobei ich auf besonders gute oder schlecht formulierte Antworten genauer nach den Tabellen eingehe. Dabei war mir nicht die Formulierung wichtig, sondern was die Schülerinnen und Schüler mit der Integralrechnung assoziieren beziehungsweise welche Vorstellungen sie von dem Begriff „Integral“ haben. Dabei hatte ich natürlich Erwartungen beziehungsweise richtige Antworten wären:

- Umkehrung zur Differentialrechnung
- Grenzwerte von Produktsummen
- Mithilfe der Integralrechnung kann man den Flächeninhalt unterhalb eines Funktionsgraphen berechnen, was die zugehörige geometrische Grundvorstellung zu „Grenzwerte von Produktsummen“ ist.
- Mithilfe der Integralrechnung kann man Stammfunktionen berechnen

Das wären mögliche Antworten die richtig sind, wobei die Formulierung der Schülerinnen und Schüler natürlich eine andere ist, beziehungsweise Stichwörter als richtig gewertet wurden.

4.1.1.1 Die allgemeine Auswertung

	Allgemein
Umkehrung der Ableitung	14
Flächen/Volumsberechnung	43
Stammfunktion	6
Kombination	4
keine Antwort	22
falsche Antwort	4
falsch formulierte Antwort	12
Anzahl der SchülerInnen	105



Wie man sofort sieht ist auffallend, dass die Antwort „Flächen – beziehungsweise Volumsberechung“ am häufigsten auftritt, wobei ich dies in eine Antwort zusammengefasst habe. Am häufigsten wurde „dient zur Flächenberechnung“ erwähnt, manche Schülerinnen oder Schüler haben dies dann noch um Volumsberechnung ergänzt ohne näher darauf einzugehen.

Die Schülerinnen und Schüler, wenn man es allgemein betrachtet, verbinden sozusagen die Integralrechnung mit der geometrischen Vorstellung der Flächenberechnung, was aus SchülerInnensicht verständlich ist, da die meisten Anwendungen der Integralrechnung im Unterricht Flächenberechnungsbeispiele sind. Wie gesagt, ist die Flächenberechnung das einzig konkret vorstellbare für viele Schüler. Denn „Umkehrung zur Differentialrechnung“ kommt bei weitem nicht so oft als Antwort vor, ist das doch eher theoretischer und somit schwieriger vorstellbar. Verwundert hat mich allerdings, dass „Stammfunktion aufsuchen“ so selten als Antwort vorkam. Vielleicht liegt das daran, dass der Einstieg in die Integralrechnung meist über die Umkehrung zur Differentialrechnung und aufsuchen einer Stammfunktion passiert und man dann die Flächenberechnung als Anwendung der Integralrechnung einführt, und dass somit eher die Flächenberechnung bei den Schülerinnen und Schülern in Erinnerung bleibt, da man dazu eben wie gesagt am meisten Beispiele rechnet.

Bei dem Punkt „falsch formulierte Antworten“ wusste ich nicht, wie ich die Antworten zuweisen sollte, da manche eventuell richtig gemeint waren, aber zu wenig genau oder einfach sehr ungenau formuliert waren, so dass die Antwort eigentlich falsch ist, aber eben möglicherweise anders gemeint war.

Solche Antworten wären zum Beispiel:

- „Fläche zwischen zwei Punkten“
- „Fläche im Koordinatensystem“
- „mit dem Integral integriert man Zahlen um Flächen und Volumen von verschiedenen Formen zu berechnen“

Weiters gab es auch schlichtweg falsche Antworten, bei denen nicht nur die Formulierung falsch war, sondern einfach der Inhalt nichts stimmte:

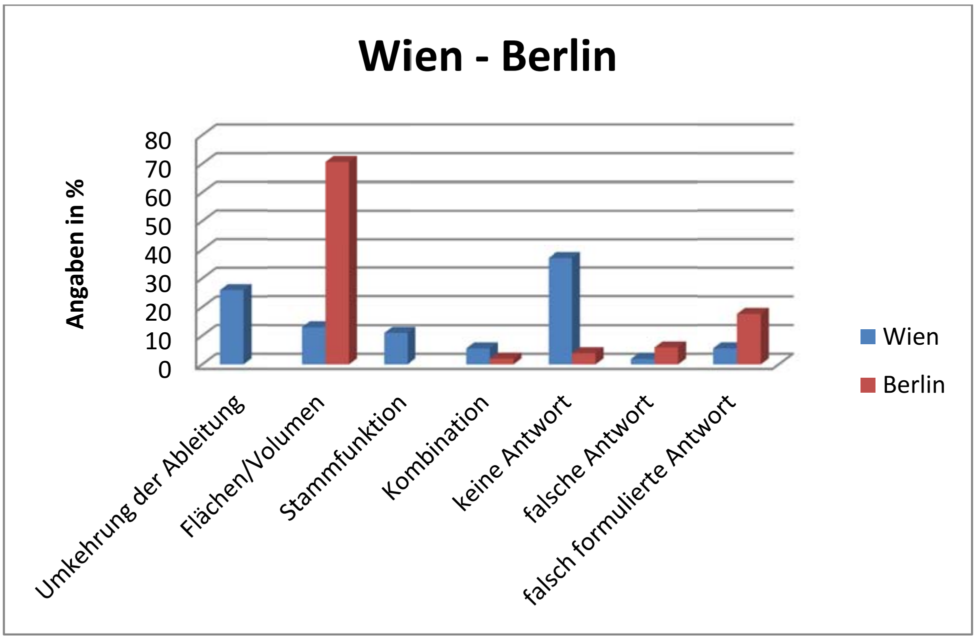
- Differentialgleichung
- „damit kann man sich Kurven von Graphen ausrechnen“

Zur Antwort „Differentialgleichung“ ist zu sagen, dass die Assoziation damit grundsätzlich nicht falsch ist, denn um Differentialgleichungen zu lösen benötigt man die Integralrechnung, dennoch ist diese Antwort auf die von mir gestellte Frage falsche, denn eine Differentialgleichung ist kein Integral.

Interessant ist auch, dass doch ein hoher Prozentsatz diese Frage nicht beantwortet hat, obwohl ich darum gebeten habe einfach alle Assoziationen mit dem Begriff Integralrechnung als Antwort zu schreiben. Vermutlich waren sich doch einige Schülerinnen und Schüler sehr unsicher mit der Antwort, obwohl ich denke, dass das eine sehr geringe Anzahl ist.

4.1.1.2 Vergleich: Wien – Berlin

	Wien	Berlin
Umkehrung der Ableitung	14	-
Flächen/Volumsberechnung	7	36
Stammfunktion	6	-
Kombination	3	1
keine Antwort	20	2
falsche Antwort	1	3
falsch formulierte Antwort	3	9
Anzahl der SchülerInnen	54	51

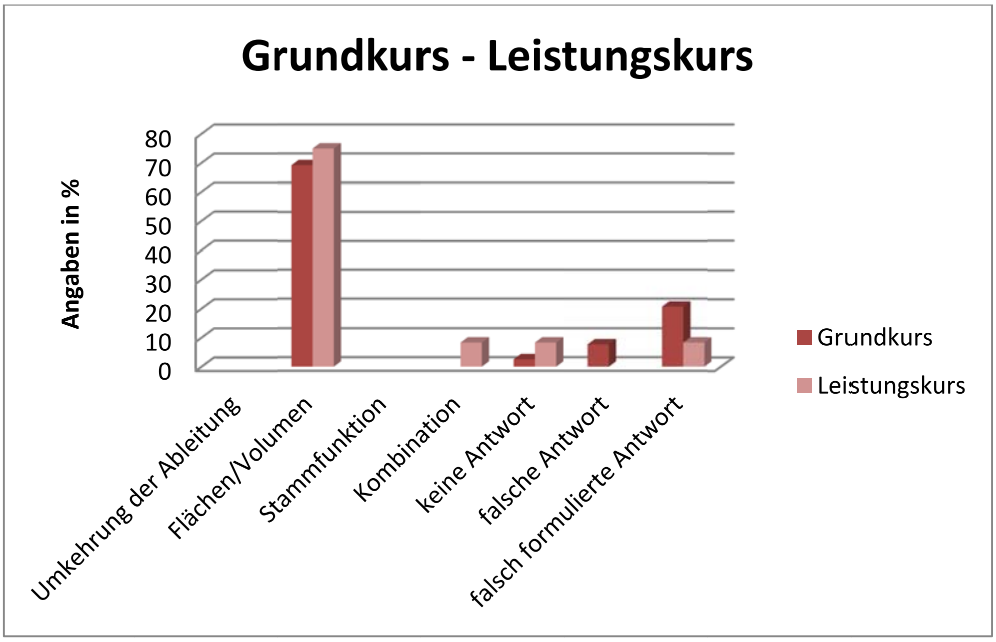


Besonders auffallend ist hier, dass in Berlin auf diese Frage nur die Flächenberechnung als Antwort vorkam, es gab nur eine einzige Schülerin oder Schüler aus der Leistungskursklasse, deren/dessen Antwort eine Kombination beziehungsweise eine doppelte Antwort aus Flächenberechnung und Umkehrung der Ableitung war. Ansonsten wurde die Antwort „Stammfunktion aufsuchen“ und „Umkehrung der Ableitung“ kein einziges Mal gegeben, was eventuell darauf schließen lässt, dass der Unterricht in Berlin das Augenmerk bei dem Thema Integralrechnung mehr auf die Flächenberechnung und vielleicht auch Grenzwerte von Produktsummen legt, als auf die reine „Definition“, dass die Integralrechnung die Umkehrung der Differentialrechnung ist.

In Wien hingegen wurde öfter die „Umkehrung“ als Antwort geschrieben, wobei hier das Spektrum der Antworten wesentlich breiter war als in Berlin. In Berlin wurde eigentlich nur die Flächenberechnung erwähnt, in Wien dazu im Vergleich kamen eigentlich all meine Erwartungen der Antwortmöglichkeiten, außer Grenzwerte von Produktsummen, zumindest vor. Allerdings haben in Wien auch wesentlich mehr Schülerinnen und Schüler keine Antwort gegeben.

4.1.1.3 Vergleich Grundkurs – Leistungskurs

	Grundkurs	Leistungskurs
Umkehrung der Ableitung	-	-
Flächen/Volumsberechnung	27	9
Stammfunktion	-	-
Kombination	-	1
keine Antwort	1	1
falsche Antwort	3	-
falsch formulierte Antwort	8	1
Anzahl der SchülerInnen	39	12



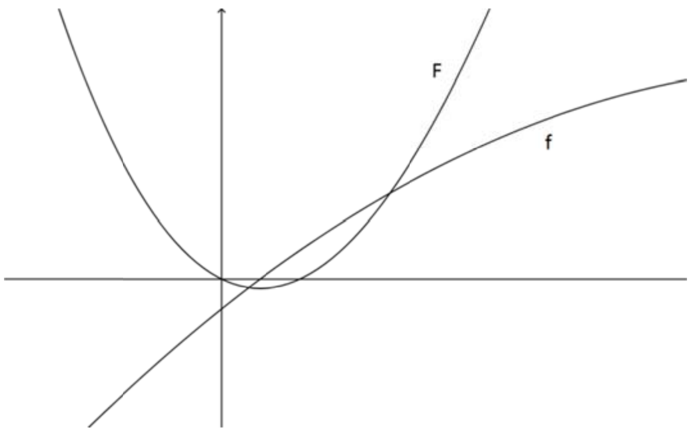
Wie man sofort sieht gibt es im Leistungskurs keine falsche, und nur eine falsch formulierte Antwort. Jedoch hat auch der Leistungskurs nur die Flächenberechnung als einzige Assoziation zur Integralrechnung angegeben. Ein/e einzige/r Schülerin oder Schüler hat eine Doppelantwort gegeben, die sowohl die Flächenberechnung, als auch die Umkehrung beinhaltet.

Deutlich zu sehen ist auch, dass im Grundkurs die Antworten wesentlich öfter falsch formuliert waren, was im Leistungskurs kaum vorkommt. Nur ein/e Schülerin oder Schüler formulierte die Antwort falsch beziehungsweise ungenau, alle anderen Schülerinnen und Schüler dieser Klasse haben ihre Antworten aber grundsätzlich gut und richtig formuliert. Allgemein war die Formulierung der Antwort bei diesem Beispiel im Leistungskurs besser als im Grundkurs, was sich bestimmt darauf zurückführen lässt, dass der Leistungskurs zwei Stunden mehr Mathematik in der Woche hat als der Grundkurs und dadurch theoretische Inhalte auch öfter und genauer durchgenommen beziehungsweise besprochen werden können.

4.1.2 Beispiel 1b

Dieses Beispiel war so zu lösen, indem man erkennt, dass die Nullstelle der Funktion ein Extrempunkt in der zugehörigen Stammfunktion sein muss. Den weiteren Verlauf des Funktionsgraphen kann man dann mit Hilfe des Monotoniesatzes herausfinden. So erkennt man, dass dort wo die Funktion negativ ist, die zugehörige Stammfunktion monoton fallend sein muss, und dort wo die Funktion positiv ist, ist die Stammfunktion monoton steigend. Somit ist der Extrempunkt ein Tiefpunkt.

Hier also die richtige Lösung:

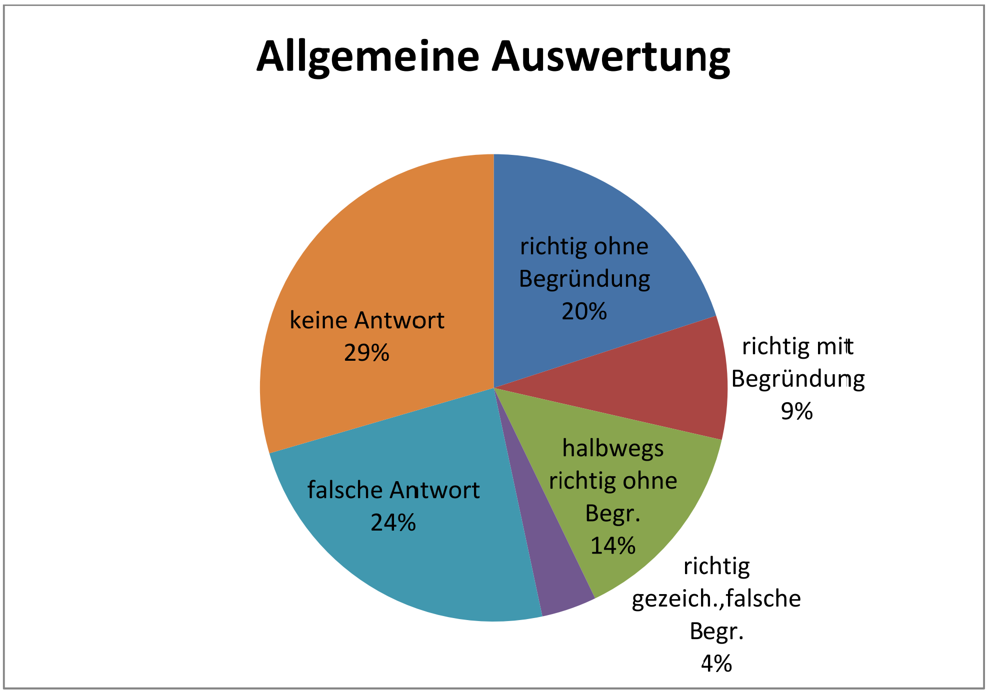


Die Begründung dafür wäre, wie bereits oben erwähnt, dass man anhand der Nullstelle der Funktion f erkennt, dass die Stammfunktion hier einen Extrempunkt besitzt. Dort wo f negativ, also $f(x) < 0$ ist, ist die Stammfunktion F also monoton fallend, dort wo die Funktion f positiv, also $f(x) > 0$ ist, ist die Stammfunktion monoton steigend. Daraus folgt, dass der Extrempunkt ein Tiefpunkt ist und man kann die gesuchte Stammfunktion skizzieren.

Bei diesem Beispiel habe ich in jeder Klasse mitgeholfen, indem ich den Schülerinnen und Schülern Tipps gegeben habe, was es denn für die Stammfunktion bedeuten könnte wenn die Funktion f eine Nullstelle besitzt und wie man mithilfe des Monotoniesatzes den weiteren Verlauf bestimmen kann. Dennoch war für viele Schülerinnen und Schüler das Umdenken von Differentialrechnung auf Integralrechnung schwierig. Das Problem dabei war nämlich, wie man die Sätze aus der Differentialrechnung, die man ständig und meist auch ohne Problem bei einer Kurvendiskussion anwendet, umgekehrt für dieses Beispiel verwenden kann. Deshalb wurde mir dann auch oft die Frage gestellt, ob die gezeichnete Funktion f „nicht eigentlich f'" sein sollte. Dabei habe ich absichtlich die Funktion absichtlich mit f bezeichnet und die Schülerinnen und Schüler sollten die Stammfunktion F finden. Die Aufgabenstellung wäre glaube ich leichter gewesen, wenn ich die Funktion f' genannt hätte, aber dann hätten die Schülerinnen und Schüler nicht diese Art von Umdenken anwenden müssen.

4.1.2.1 Allgemeine Auswertung

	Allgemein
richtig ohne Begründung	21
richtig mit Begründung	9
halbwegs richtig ohne Begr.	15
richtig gezeich.,falsche Begr.	4
falsche Antwort	25
keine Antwort	31
Anzahl der SchülerInnen	105



Bevor ich genauer auf das Ergebnis der allgemeinen Auswertung eingehe, werde ich die stark verkürzten Antworten aus der Tabelle beschreiben.

- richtig ohne Begründung: Die Stammfunktion wurde richtig eingezeichnet, ohne eine Begründung wieso die Skizze so aussieht beziehungsweise woher man weiß wie der Verlauf der Stammfunktion ungefähr aussehen sollte
- richtig mit Begründung: Die Skizze der Stammfunktion ist richtig gezeichnet und richtig begründet.

- halbwegs richtig ohne Begründung: Als halbwegs richtig habe ich alle Skizzen eingestuft, die vom Verlauf her zwar richtig sind, aber eine Stück zu weit links oder rechts, also wenn der Tiefpunkt der Stammfunktion nicht auf derselben Höhe ist wie die Nullstelle der gegebenen Funktion. Dabei wurde entweder nicht genau gearbeitet oder schlecht abgeschrieben, denn diese Art von Skizzen waren immer ohne Begründung des Verlaufs des Funktionsgraphen.
- richtig gezeichnet, falsche Begründung: Die Skizze ist zwar richtig gezeichnet, aber die Begründung ist eher falsch bis falsch formuliert, so dass der Sinn der Begründung eher schwierig zu verstehen ist.
- falsche Antwort und keine Antwort ist selbsterklärend

Zu Beginn ist nochmals zu erwähnen, dass ich bei diesem Beispiel in jeder Klasse Tipps gegeben habe, beziehungsweise den Schülerinnen und Schülern das Beispiel noch einmal sehr genau erklärt habe, was genau gemeint und gefragt ist. Dabei kam dann eben oft die Frage auf, ob die dargestellte Funktion nicht eigentlich f' ist. Anscheinend gab es wegen der Benennung der Funktion Schwierigkeiten, da es die Schüler gewohnt sind, den Monotoniesatz und andere Sätze der Differentialrechnung nur in die eine Richtung anzuwenden. Nämlich wenn eine Funktion f gegeben ist, zu wissen wie dann f' aussieht, da man vom rechnerischen Vorgang bei einer Kurvendiskussion weiß, dass eine Funktion dort einen Extrempunkt hat, wo die Ableitung eine Nullstelle besitzt. Das war eben die Schwierigkeit an diesem Beispiel, dass wenn eine Nullstelle einer Funktion gegeben ist, was dies dann für die zugehörige Stammfunktion bedeutet. Deshalb konnten auch sehr viele Schülerinnen und Schüler, wenn sie die Funktion richtig gezeichnet haben, oft keine Begründung abgeben, weil ich denke, dass es ihnen sehr schwer gefallen ist, dies in Worte die mathematisch auch einen Sinn ergeben sollten zu fassen. Bei der tabellarischen Antwort „richtig mit Begründung" ist eigentlich nicht mehr viel hinzuzufügen, einige Schüler haben es dennoch geschafft, den Verlauf des Funktionsgraphen richtig und einwandfrei zu begründen.

Bei „richtig gezeichnet ohne Begründung" denke ich, dass das Hauptproblem für viele Schülerinnen und Schüler die richtige Formulierung war. Sie haben zwar teilweise sicherlich verstanden, wieso der Funktionsgraph eben genauso aussehen soll, waren aber nicht in der Lage, dies richtig zu formulieren.

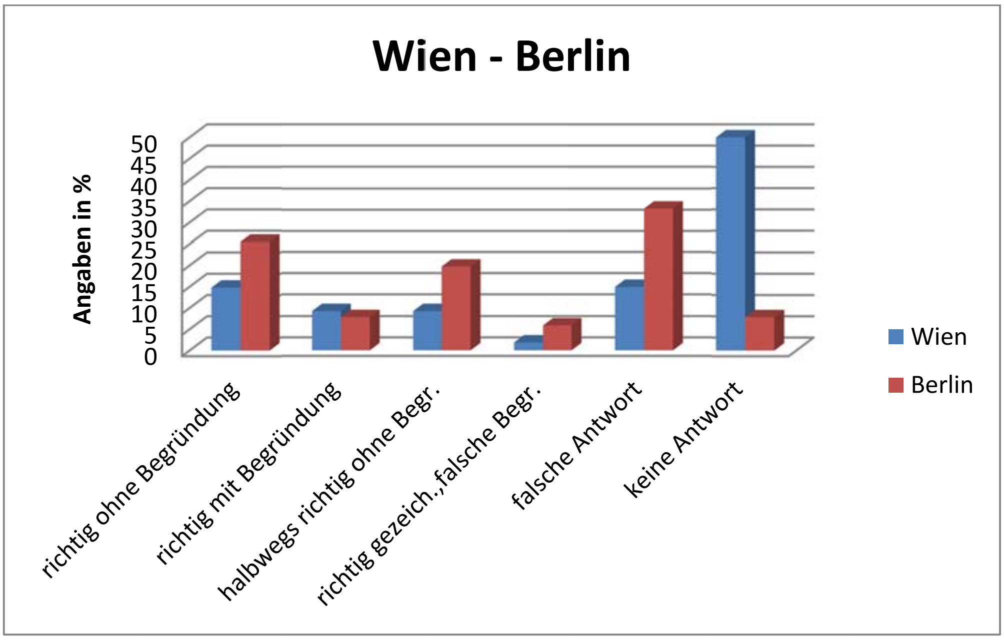
Natürlich könnte es auch sein, dass einige der Schülerinnen und Schüler einfach die Skizze des Nachbarn abgeschrieben haben, was auch erklären würde warum einige der Schülerinnen und Schüler zu „halbwegs richtig gezeichnet ohne Begründung“ gezählt wurden. Dabei wurde einfach nur der Verlauf des Graphen abgezeichnet, ohne dabei zu überlegen, dass der Tiefpunkt der Funktion auf selber Höhe wie die Nullstelle der vorgegebenen Funktion sein sollte.

Nur sehr wenig Schülerinnen und Schüler haben es geschafft die Skizze richtig zu zeichnen und auch eine dazu richtige Begründung abzugeben. Eine falsche Antwort ist leider auch sehr oft vorgekommen, dabei hatte die Skizze nichts mit der gegebenen Funktion zu tun und wurde vermutlich rein nach Gefühl oder dem „Zufallsprinzip“ („vielleicht stimmt es was ich gezeichnet habe“) gezeichnet.

Oft wurde auch keine Funktion gezeichnet, was natürlich zeigt, dass dieses Umdenken anhand dieses Beispiels nicht funktioniert hat, beziehungsweise die Schülerinnen und Schüler trotz meiner Hilfe nicht erahnen konnten, wie der Funktionsgraph der Stammfunktion aussieht.

4.1.2.2 Vergleich Wien – Berlin

	Wien	Berlin
richtig ohne Begründung	8	13
richtig mit Begründung	5	4
halbwegs richtig ohne Begr.	5	10
richtig gezeich.,falsche Begr.	1	3
falsche Antwort	8	17
keine Antwort	27	4
Anzahl der SchülerInnen	54	51



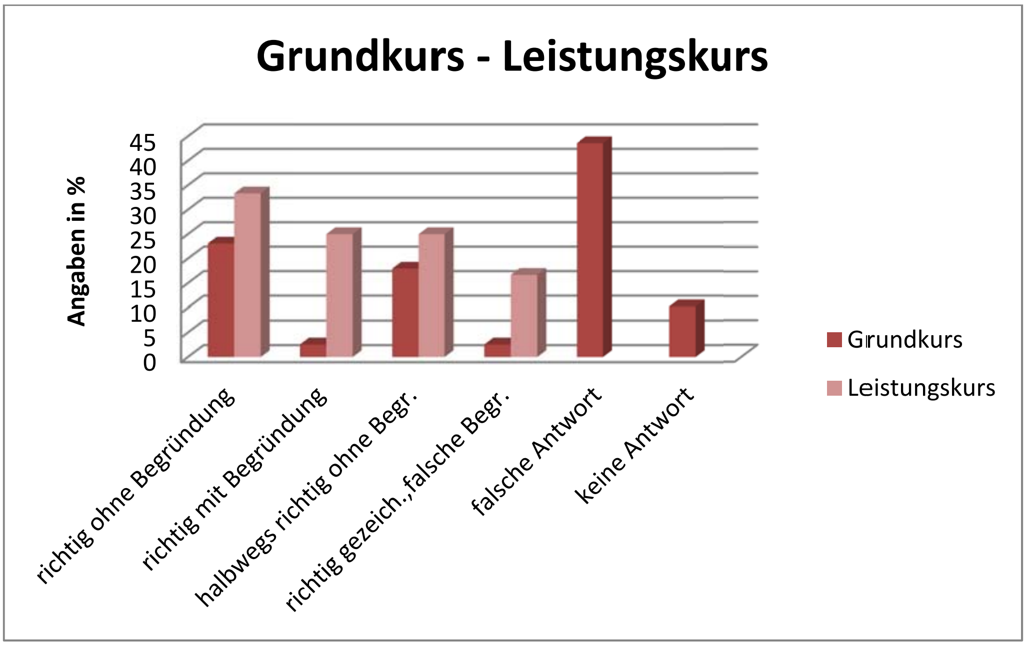
Prozentuell haben ungefähr gleich viele Schülerinnen und Schüler aus Wien und Berlin die Frage 1b komplett richtig beantwortet, wobei Wien hier ein bisschen besser abschneidet. Dafür ist der Prozentsatz der richtigen Zeichnungen ohne Begründung in Berlin höher als in Wien. Lässt man die Begründung weg, und beurteilt nur die richtigen Skizzen, dann haben in Wien 14 Schüler die Frage richtig beantworten können und in Berlin 20 Schüler. Prozentuell bedeutet das, dass in Berlin circa 39% der Schülerinnen und Schüler die Frage richtig beantwortet haben - im Gegensatz dazu haben in Wien circa 26% der Schülerinnen und Schüler die Frage korrekt beantwortet. Lässt man also kurz die Begründung außer Acht, so schneiden bei dieser Frage die Schülerinnen und Schüler in Berlin besser ab.

Geht man davon aus, dass alle Schülerinnen und Schüler, die unter die Sparte „halbwegs richtig gezeichnet ohne Begründung“ fallen, zu einem großen Teil abgeschrieben haben - denn wenn ihnen bewusst wäre wie die Skizze wirklich aussehen soll, dann kann man erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler die Skizze so richtig zeichnen, dass der Tiefpunkt des Funktionsgraphen der Stammfunktion auf gleicher Höhe wie die Nullstelle der vorgegebenen Funktion liegt – dann könnte man sagen, dass in Berlin wesentlich mehr Schülerinnen und Schüler abgeschrieben haben. Dies ist allerdings eine reine Vermutung, die man eventuell mit dem Ausgang der Ergebnisse belegen kann.

Falsch gezeichnet haben die Skizze wesentlich mehr Schülerinnen und Schüler aus Berlin, wobei vielmehr in Wien gar keine Antwort gegeben haben. Das könnte vielleicht daran liegen, dass das Interesse am Test in Berlin größer war, weshalb man sich zumindest bemüht hat, eine Funktion zu zeichnen, auch wenn diese falsch war.

4.1.2.3 Vergleich Grundkurs-Leistungskurs

	Grundkurs	Leistungskurs
richtig ohne Begründung	9	4
richtig mit Begründung	1	3
halbwegs richtig ohne Begr.	7	3
richtig gezeich.,falsche Begr.	1	2
falsche Antwort	17	-
keine Antwort	4	-
Anzahl der SchülerInnen	39	12



Man sieht auf den ersten Blick, dass bei diesem Beispiel der Leistungskurs viel besser abschneidet als der Grundkurs. Im Leistungskurs hat niemand die Frage falsch oder gar nicht beantwortet, das passierte nur im Grundkurs. Hier sieht man also einen sehr großen Unterschied zwischen Leistungs – und Grundkurs.

4.2 Beispiel 2

Das Beispiel 2 ist unterteilt in a) und b), wobei im Unterschied zum ersten Beispiel die beiden Unterfragen zusammenhängen. Gegeben ist eine Gleichung, die sowohl rechnerisch als auch argumentativ erklärt werden sollte.

4.2.1 Beispiel 2a

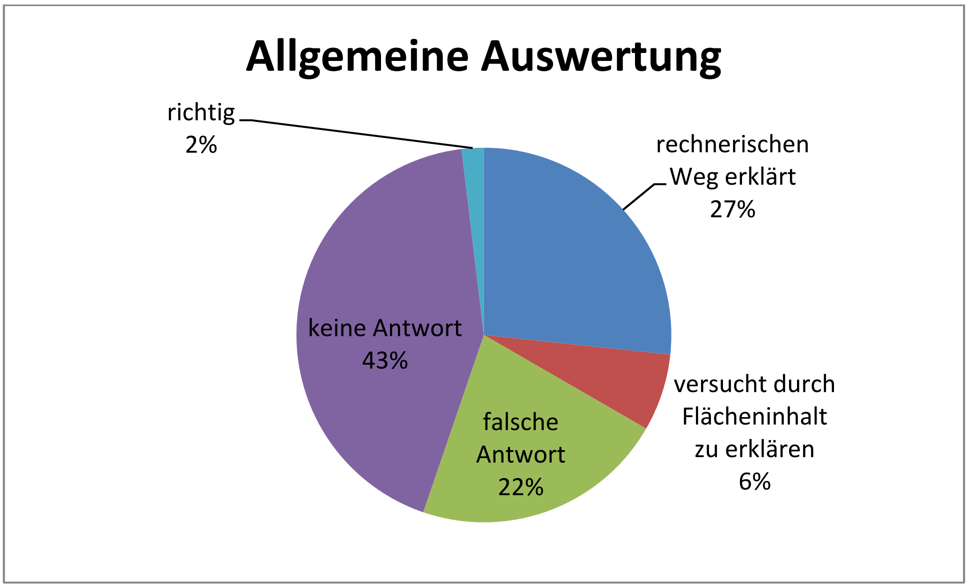
Bei diesem Beispiel habe ich mir als richtige Antwort erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler die Gleichung mithilfe vom „orientierten Flächeninhalt" beschreiben.

$\int_a^b f(x)dx$ ist der orientierte Flächenzuwachs zwischen a und b. So kann man das Integral $-\int_b^a f(x)\,dx$ als orientierte Flächenabnahme betrachten. Also wenn man von a nach b geht hat man einen Flächenzuwachs, geht man von b nach a eine Flächenabnahme. (vgl. Humenberger Skript)

Das wurde so allerdings leider nicht verstanden, und deshalb haben viele Schülerinnen und Schüler einfach den rechnerwischen Weg aus Beispiel 2b) in Worten beschrieben, was natürlich nicht falsch ist, aber nicht der erwarteten Antwort entspricht.

4.2.1.1 Allgemeine Auswertung

	Allgemein
rechnerischen Weg erklärt	28
versucht durch Flächeninhalt zu erklären	7
falsche Antwort	23
keine Antwort	45
richtig	2
Anzahl der SchülerInnen	105



Bei diesem Beispiel fällt natürlich gleich der hohe Anteil auf, der die Frage nicht beantwortet hat, was daran liegen könnte, dass den Schülerinnen und Schülern einfach oft nicht klar war, worum es geht, wenn man diese Gleichung argumentativ beschreiben soll. Deswegen haben auch viele einfach den rechnerischen Weg erklärt, also in Worten beschrieben was sie in Beispiel 2b) berechnet haben. Da die Fragestellung vielleicht nicht deutlich genug war habe ich diese Beschreibung des rechnerischen Wegs als richtig anerkannt, wohl weil es auch zu viel verlangt gewesen wäre, dass die Schüler die Gleichung durch den orientierten Flächeninhalt beschreiben, zumal dieses Thema im Unterricht oft nur sehr kurz oder gar nicht angeschnitten wird.

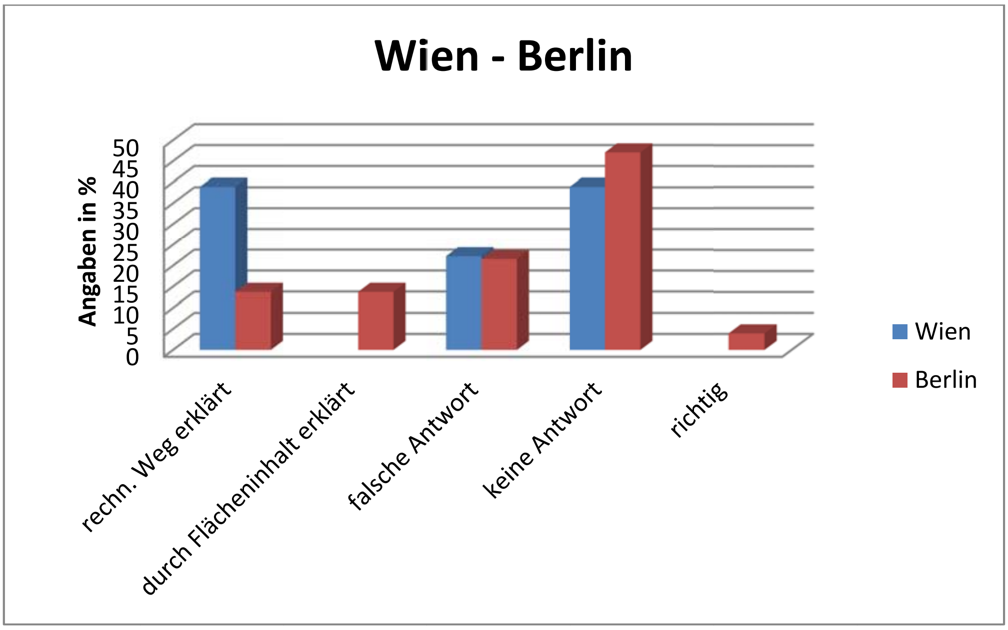
Immerhin 6% der Schüler haben aber versucht, die Gleichung durch den Flächeninhalt zu beschreiben, was in konkreten Fällen so aussieht:

- „Fläche kann nur positiv sein"
- „zur Flächenberechnung nimmt man immer den Betrag des Integrals, da eine Fläche nicht negativ sein kann"
- „das Vorzeichen ist egal, da wir Flächeninhalt suchen"

Das waren grundsätzlich gute Ansätze und durchaus richtige Aussagen, aber in diesem Zusammenhang stimmen die Sätze nicht, beziehungsweise beschreiben nicht was die Gleichung aussagt, auch wenn die Aussagen für sich allein nicht falsch sind.

4.2.1.2 Vergleich Wien- Berlin

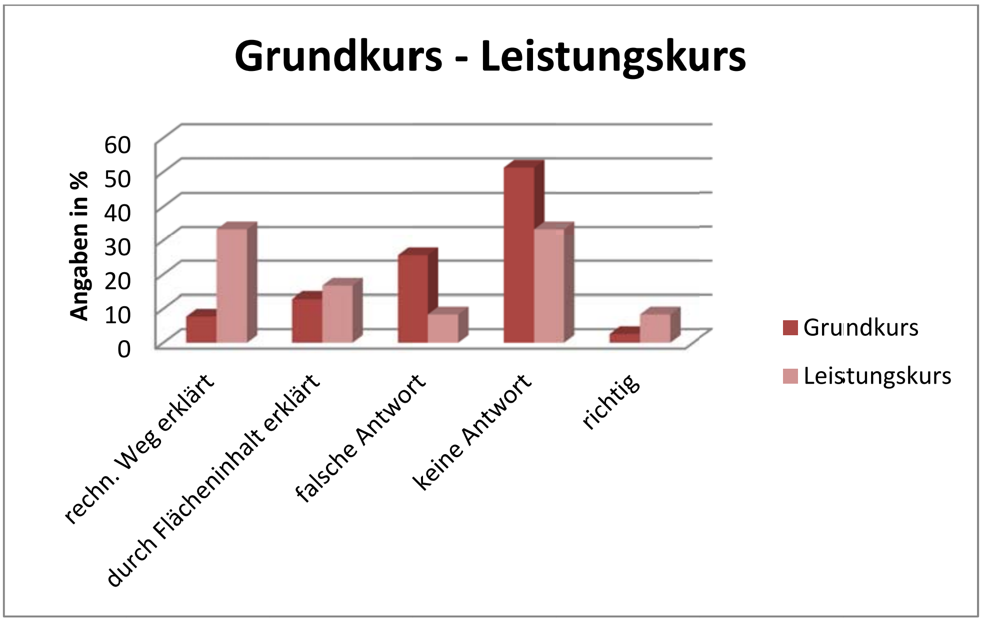
	Wien	Berlin
rechnerischen Weg erklärt	21	7
versucht durch Flächeninhalt zu erklären	-	7
falsche Antwort	12	11
keine Antwort	21	24
richtig	-	2
Anzahl der SchülerInnen	54	51



Bei den falschen Antworten liegen Wien und Berlin prozentuell ungefähr gleich auf, also verhältnismäßig hat in beiden Städten ungefähr derselbe Prozentsatz an Schülerinnen und Schülern die Frage falsch beantwortet. Weiters fällt auf, da bei den vorigen Auswertungen die Schülerinnen und Schüler aus Wien keine Antwort gegeben haben, dass es hier umgekehrt ist. In Berlin haben mehr Schülerinnen und Schüler keine Antwort gegeben, dafür haben in Wien mehr Personen versucht den rechnerischen Weg argumentativ zu beschreiben. Zwei Schülerinnen oder Schüler aus Berlin haben die Frage sogar ansatzweise richtig beantwortet, in dem sie einfach beschrieben haben, dass egal in welche Richtung das Intervall geht, die Fläche immer dieselbe ist: „Die Fläche von a bis b ist gleich der Fläche von b bis a“. Diese Formulierung ist natürlich auch nicht komplett richtig, aber dennoch sieht man hier einen Ansatz in die richtige Richtung, der noch am ehesten die von mir erwartete Antwort beschreibt, und deshalb habe ich diese Antwort als „richtig“ gewertet.

4.2.1.3 Vergleich Grundkurs – Leistungskurs

	Grundkurs	Leistungskurs
rechnerischen Weg erklärt	3	4
versucht durch Flächeninhalt zu erklären	5	2
falsche Antwort	10	1
keine Antwort	20	4
richtig	1	1
Anzahl der SchülerInnen	39	12



Auch hier erkennt man wieder, dass der Leistungskurs diese Frage besser beantwortet hat als der Grundkurs, weil die Schülerinnen und Schüler aus dem Grundkurs häufiger eine falsche oder keine Antwort gegeben haben. Man sieht auch, dass der Leistungskurs wesentlich öfter zumindest versucht hat, den rechnerischen Weg in Worte zu fassen oder die Gleichung durch eine positive Fläche zu begründen. Jeweils ein/e Schülerin oder Schüler im Leistungskurs und Grundkurs hat die Frage sogar „richtig“ (im Sinne wie oben beschrieben) beantwortet, wobei das prozentuell natürlich beim Leistungskurs wesentlich mehr ins Gewicht fällt, da in dieser Klasse nur 12 Schülerinnen und Schüler waren, im Grundkurs hingegen 39.

4.2.2 Beispiel 2b

Die Aufgabe b der zweiten Frage, die Gleichung rechnerisch zu begründen ist wesentlich leichter und eindeutiger beurteilbar, als Aufgabe a, bei der man die Gleichung argumentativ beschreiben sollte.

Hier ist die Lösung eindeutig, und zwar:

$$\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)$$

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

$$-\int_b^a f(x) = -\big(F(a) - F(b)\big) = F(b) - F(a)$$

Ich habe trotzdem als Hilfestellung in jeder Klasse die allgemeine Formel zur Berechnung eines bestimmte Integrals an die Tafel geschrieben, da auch hier einige Schülerinnen und Schüler nicht verstanden haben, was sie bei diesem Beispiel machen sollten. Somit lag die einzige Schwierigkeit eigentlich nur dabei, das zweite Integral aufgrund des „–„ vor der Klammer so umzuformen, dass man offensichtlich sieht, dass beide Integrale den gleichen Wert haben und somit die Gleichung stimmt.

Meine Erwartungen an dieses Beispiel war sehr hoch, da es eigentlich vom rechnerischen Vorgang her das leichteste Beispiel vom gesamten Test war, ich in jeder Klasse die Formel zur Berechnung eines bestimmten Integrals an die Tafel geschrieben habe und die Schülerinnen und Schüler eigentlich mit dieser Formel umgehen können sollten, da jedes Flächenberechnungsbeispiel auf dieser Formel beruht.

Als richtig gewertet habe ich auch jene Schülerinnen und Schüler, die die Gleichung anhand eines konkreten Beispiels gelöst haben. So haben einige Schülerinnen und

Schüler zum Beispiel die Funktion $f(x) = x$ integriert und dann die Grenzen in beide Seiten der Gleichung eingesetzt und haben somit auch gezeigt, dass die Gleichung stimmt.

Als „keine Antwort" habe ich jene Antworten gewertet, bei denen einfach nur die Formel, die ich bereits als Hilfe an die Tafel geschrieben habe, für jeweils beide Integrale abgeschrieben wurde und nicht weiter darauf eingegangen wurde, dass es sich um eine Gleichung handelt. Dies hat zum Beispiel so ausgesehen:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

$$-\int_b^a f(x) = F(a) - F(b)$$

Wobei hier teilweise das „-„ auf der rechten Seite der Gleichung vergessen wurde, oder, selbst wenn es dabei stand, wurde nicht weiter darauf eingegangen.

In solchen Fällen war das Beispiel nicht vollständig begründet, da hier einige Schülerinnen und Schüler eigentlich nur die Formel von der Tafel abgeschrieben haben.

Wirklich falsch waren Antworten, wie:

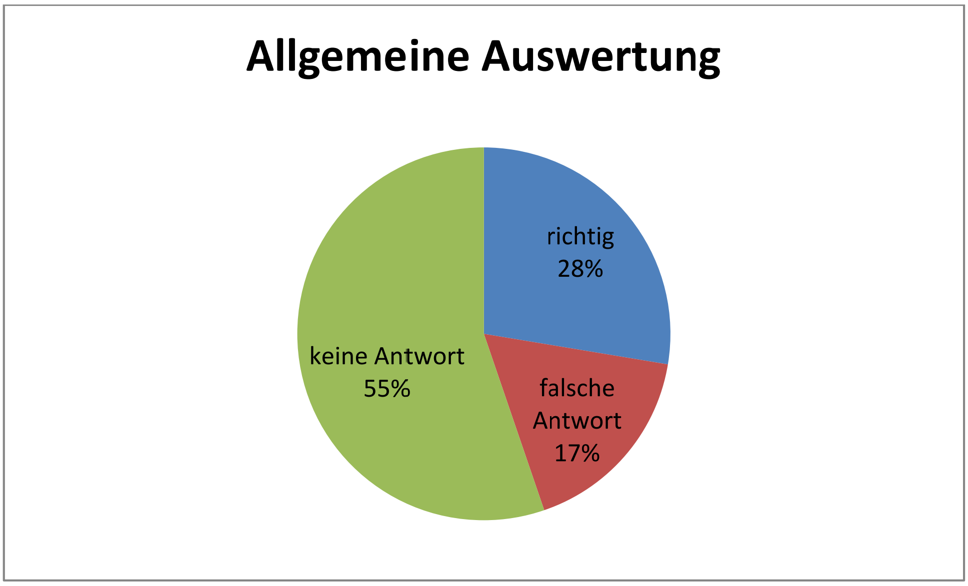
$$\int_a^b = b - a$$

$$-\int_b^a = -(a - b)$$

Vielleicht haben damit die Schülerinnen und Schüler das richtige gemeint und waren verwirrt, dass bei dem Integral nicht $f(x)$ dabeistand. Dennoch habe ich solche Antworten, die doch einige Male vorkamen, als falsch gewertet.

4.2.2.1 Allgemeine Auswertung

	Allgemein
richtig	29
falsche Antwort	18
keine Antwort	58
Anzahl der SchülerInnen	105



Bei dieser Frage, habe ich, wie schon oben angeführt, alle Antworten versucht in drei Gruppen zu unterteilen, wobei auffällt, dass die meisten Schülerinnen und Schüler keine Antwort gegeben haben. Davon ist sicher ein großer Teil jene Personen, die ich als „keine Antwort" gewertet habe, weil sie einfach nicht vollständig war, beziehungsweise nur die an der Tafel stehende Formel abgeschrieben wurde.

Eine falsche Antwort haben eigentlich auch einige gegeben, wobei ich denke, dass das nicht an der Schwierigkeit der Aufgabe lag, sondern, weil es einfach zu Verwirrungen geführt hat, dass in der Angabe bei dem Integral nicht $f(x)$ dabeistand. Daran erkennt man aber auch, dass die Schülerinnen und Schüler nicht wirklich verstanden haben worum es bei der Berechnung eines bestimmten Integrals geht, sondern einfach nur routinemäßig in eine Formel eingesetzt haben. Denn die eigentliche Formel ist:

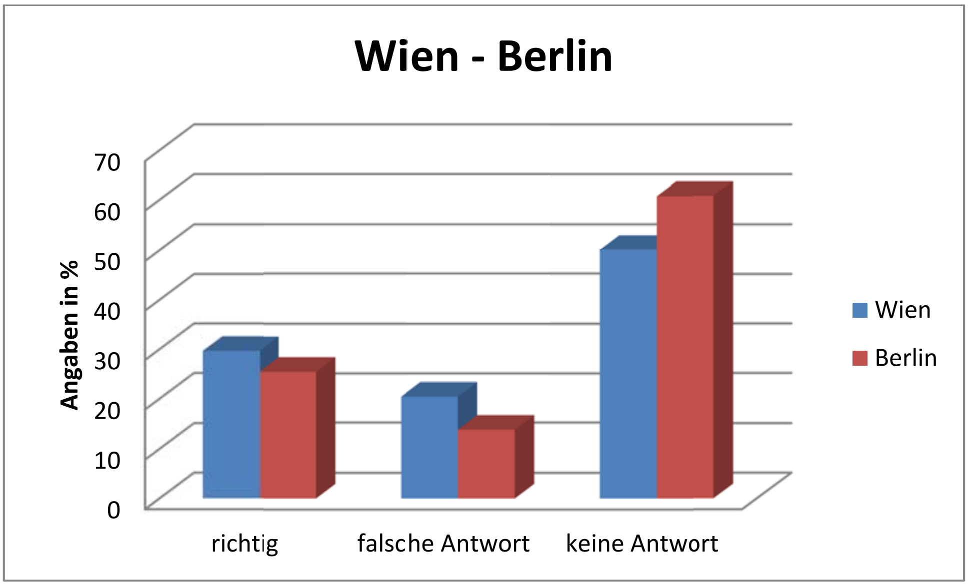
$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

Und so kann man vermuten, dass einige Schülerinnen und Schüler dachten, sie haben keine Funktion in die sie einsetzen können und ziehen deshalb einfach die Grenzen von einander ab, was geometrisch in diesem Fall einfach eine Zahl auf der x-Achse darstellt.

Eventuell haben sie das richtige gemeint, aber nicht wirklich den Hintergrund des Beispiels verstanden.

4.2.2.2 Vergleich Wien – Berlin

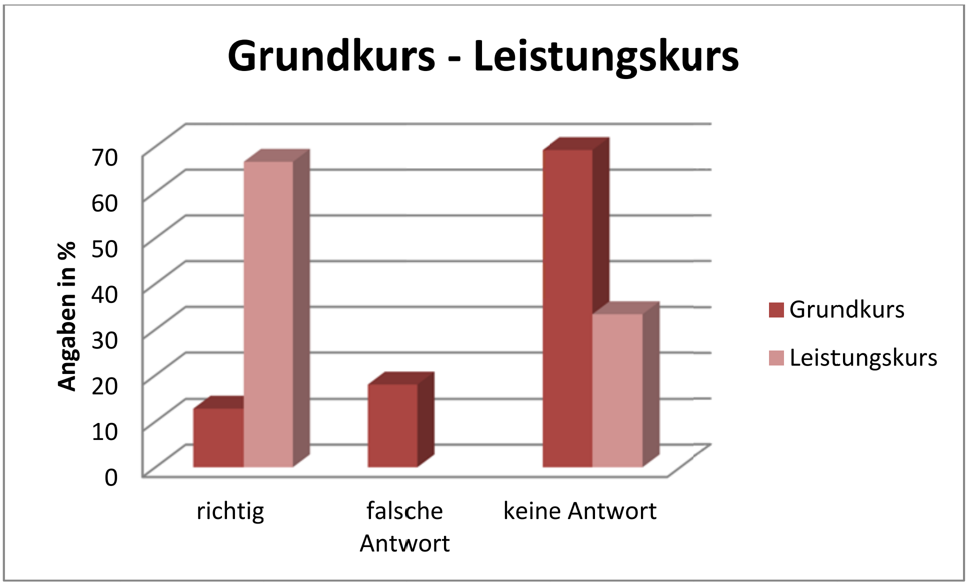
	Wien	Berlin
richtig	16	13
falsche Antwort	11	7
keine Antwort	27	31
Anzahl der SchülerInnen	54	51



Betrachtet man hier die Statistik, sieht man eigentlich gleich, dass bei diesem Beispiel Wien besser abschneidet als Berlin. Zwar wurde in Berlin die Frage weniger oft falsch beantwortet, aber der Anteil an Schülerinnen und Schüler, die die Frage nicht beziehungsweise nicht vollständig beantwortet haben, ist in Berlin höher. Weiters gibt es auch mehr richtige Antworten in Wien und somit ergibt sich im Gesamtvergleich, dass bei diesem Beispiel die Auswertung für Wien besser ausfällt als für Berlin.

4.2.2.3 Vergleich Grundkurs-Leistungskurs

	Grundkurs	Leistungskurs
richtig	5	8
falsche Antwort	7	-
keine Antwort	27	4
Anzahl der SchülerInnen	39	12



Vergleicht man den Grundkurs mit dem Leistungskurs, dann wird die vorige Auswertung des Wien – Berlin Vergleichs interessanter, denn hier sieht man, dass die falschen Antworten nur aus dem Grundkurs kommen. Der Leistungskurs hat die Frage zumindest nicht falsch beantwortet, also es kam keine Antwort der Form „ $\int_a^b = b - a$“ vor, was vielleicht ein Zeichen dafür ist, dass die Schülerinnen und Schüler aus dieser Klasse doch besser mit der Formel umgehen können beziehungsweise den theoretischen Hintergrund dazu doch besser verstehen.

Der Großteil der Leistungskursklasse hat diese Frage richtig beantwortet und einige nicht vollständig, indem sie nur die Formel abgeschrieben und die Gleichung nicht weiter fortgeführt haben. Hingegen im Grundkurs hat der Großteil der Klasse keine beziehungsweise keine vollständige Antwort gegeben, einige haben das Beispiel aber trotzdem richtig lösen können.

4.3 Beispiel 3

Die dritte Frage des Tests hat sich im Grundkurs von den anderen Klassen unterschieden, deshalb habe ich eigene Statistiken und Tabellen für die dritte Frage des Grundkurses entworfen.

Allgemein ist noch zu sagen, dass ich die Rechenfehler bei Beispiel drei und vier nicht in die Tabellen mit einfließen habe lassen, da so etwas nichts mit den Grundvorstellungen zu tun hat. Ein Rechenfehler kann immer passieren, wenn ich aber gemerkt habe, dass das Beispiel richtig weitergerechnet wurde, dann habe ich dieses auch als richtige Antwort gelten lassen.

4.3.1 Beispiel 3 – Grundkurs

Um ein ähnliches Beispiel wie für den allgemeinen Test zu gestalten, besteht die erste Aufgabe darin, ein unbestimmtes Integral zu berechnen, also einfach ohne Integrationsmethoden das Integral zu berechnen, was eigentlich keine Schwierigkeit darstellen sollte, denn das ist die Grundlage für jede weitere Anwendung der Integralrechnung. Hier habe ich mir einen sehr hohen Prozentsatz an richtigen Antworten erwartet.

Die richtige Lösung des Beispiels wäre gewesen:

$$\int 8x^2 + 2x^3 - x\,dx = 8\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c$$

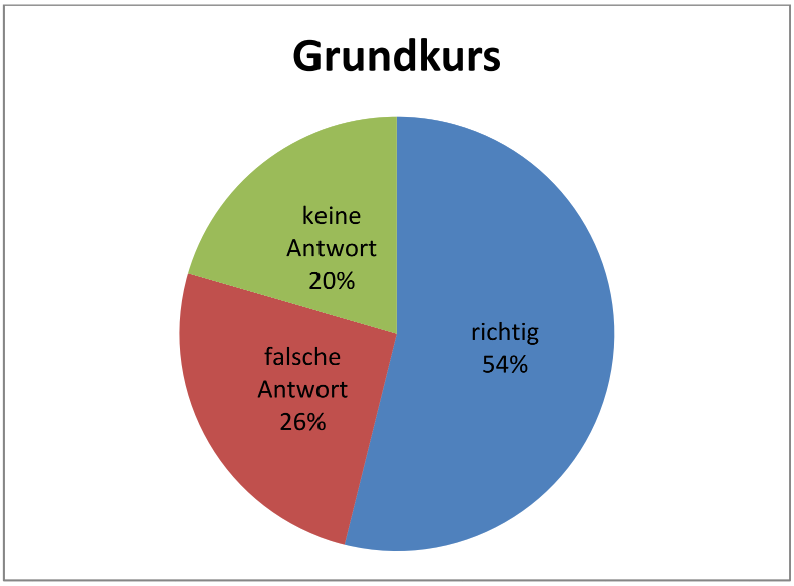
Weiters wollte ich noch eine theoretische Frage stellen, die im Nachhinein allgemein sehr interessant für den Test gewesen wäre, nämlich die Unterscheidung zwischen bestimmten und unbestimmten Integral.

Dabei wäre die richtige Antwort gewesen, das unbestimmte Integral als die Menge aller Stammfunktionen und das bestimmte Integral als Maßzahl für den Flächeninhalt unterhalb eines Funktionsgraphen zu beschreiben.

Leider haben die Schüler in einer Grundkursklasse das unbestimmte Integral als Definition nicht durchgenommen, was sich dann natürlich im Ergebnis wiederspiegelt.

4.3.1.1 Auswertung Beispiel 3a

	Grundkurs
richtig	21
falsche Antwort	10
keine Antwort	8
Anzahl der SchülerInnen	39



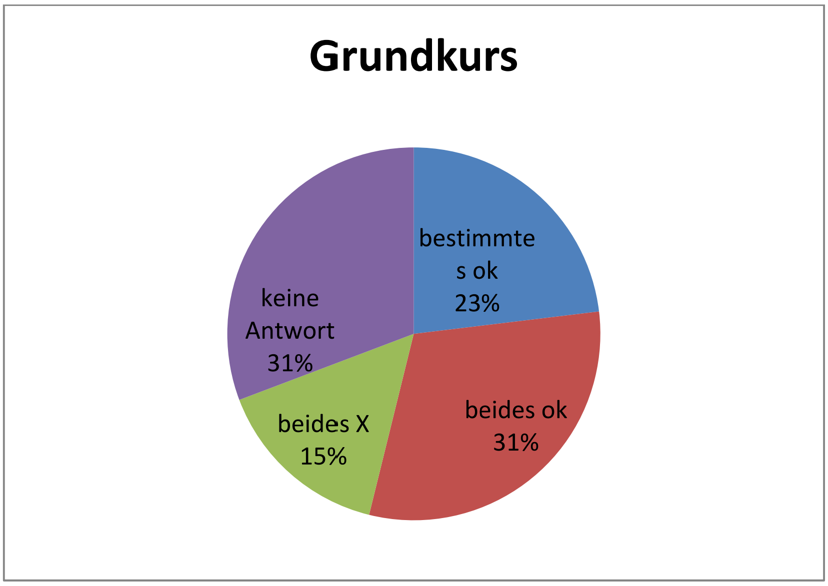
Wie erwartet ist hier der Prozentsatz der richtigen Antworten von allen Aufgaben bis jetzt der höchste. Bei den falschen Antworten muss man dazu erwähnen, dass natürlich auch teilweise komplett falsch integriert wurde, aber auch hier gab es weniger schwere Fehler die gemacht wurden und trotzdem als falsche Antwort gezählt wurden. So haben sehr viele Schülerinnen und Schüler diese Frage wie folgt beantwortet:

$$\int 8x^2 + 2x^3 - x\,dx = \frac{8x^3}{3} + \frac{2x^4}{4}$$

Diese „Lösung“ habe ich natürlich als falsch gewertet, da sie „x“ nicht mehr integriert haben, was ich mir selbst auch nicht erklären kann. Aufgrund dieser Antwort, die eben des Öfteren aufgetreten ist, sieht man bei diesem Beispiel trotzdem auch einen relativ hohen Anteil an falschen Antworten.

4.3.1.2 Allgemeine Auswertung 3b

	Grundkurs
bestimmtes ok	9
beides ok	12
beides X	6
keine Antwort	12
Anzahl der SchülerInnen	39



Da in einer der beiden Klassen das unbestimmtes Integral als Definition gar nicht und in der anderen Klasse nur angeschnitten wurde, ergibt sich, dass manche Schülerinnen und Schüler nur das bestimmte Integral beschrieben haben. Manche haben das unbestimmte Integral aber doch versucht zu erklären, in dem sie geschrieben haben:

„Das unbestimmte Integral hat keine Grenzen angegeben“

Diese Antwort habe ich bei diesen Klassen als richtig gelten lassen, da sie die Definition als Menge von Stammfunktionen nicht gelernt haben.

Zählt man nun den Prozentsatz von „beides ok“ und „bestimmtes ok“ zusammen, so kommt man immerhin auf 54% richtige Antworten der Frage. Bei „beides X“ bedeutet, dass hier sowohl das bestimmte, als auch das unbestimmte Integral falsch definiert oder beschrieben wurden.

31% der Schülerinnen und Schüler haben keine Antwort gegeben, wobei ganz klar auffällt, dass der Prozentsatz von „keine Antwort“ bei theoretischen Fragen immer deutlich höher ist, als bei rein rechnerischen Fragen.

4.3.2 Beispiel 3 - allgemeiner Test

Bei Beispiel 3 des allgemeinen Tests ist die Aufgabenstellung eigentlich recht klar, es handelt sich um typische Beispiele zu den Integrationsmethoden, wobei nicht angegeben war, welche Integrationsmethode die Schülerinnen und Schüler anwenden sollten.

Bei Beispiel a) sollten die Schülerinnen und Schüler die partielle Integrationsmethode anwenden, bei Beispiel b) die Substitution.

Die erwartete richtige Lösung der Beispiele ist folgende:

Beispiel 3a)

$$\int e^x \cdot \sin x = e^x \cdot (-\cos x) - \int e^x \cdot (-\cos x) =$$

$$-e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x$$

$$\int e^x \cdot \sin x = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x$$

$$2 \cdot \int e^x \cdot \sin x = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{e^x \cdot (\sin x - \cos x)}{2}$$

Beispiel 3b)

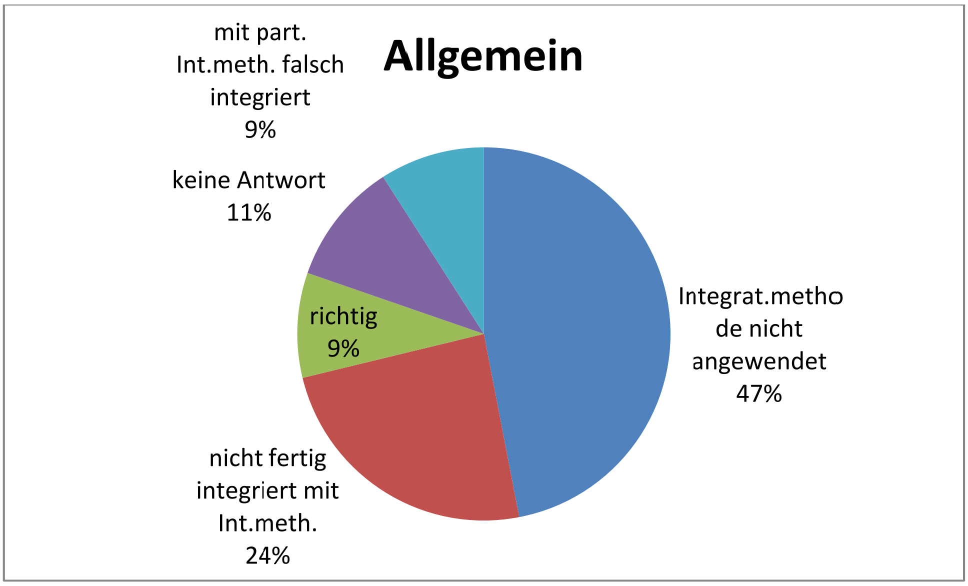
$\int x \cdot (1+x^2)^3 dx = \int x \cdot u^3 \cdot \frac{du}{2x} =$ $\qquad u = (1+x^2)^3$

$= \frac{1}{2} \int u^3 du =$ $\qquad u' = \frac{du}{dx} = 2x$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} = \frac{(1+x^2)^4}{8} + c$ $\qquad dx = \frac{du}{2x}$

4.3.2.1 Allgemeine Auswertung - Beispiel 3a

	Allgemein
Integrat.methode nicht angewendet	31
nicht fertig integriert mit Int.meth.	16
richtig	6
keine Antwort	7
mit part. Int.meth. falsch integriert	6
Anzahl der SchülerInnen	66



Zuerst möchte ich erläutern was die Einträge in der Tabelle und der Statistik genau bedeuten:

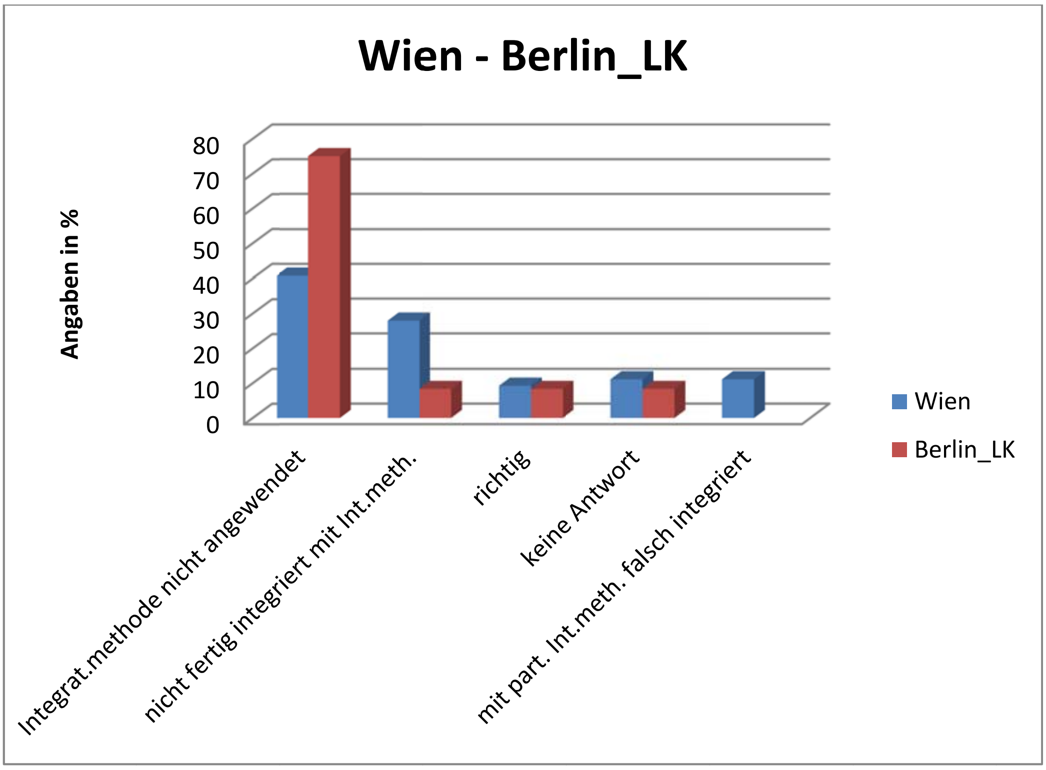
- „Integrationsmethode nicht angewendet“: Hier haben die Schülerinnen und Schüler einfach die Integrationsmethode der partiellen Integration nicht angewendet, sondern das Integral integriert, als ob statt dem „·“ ein „+“ stehen würde:
$$\int e^x \cdot \sin x \; dx = \; e^x \cdot (-\cos x) + c$$
- „nicht fertig integriert mit Integrationsmethode“: Einige haben erkannt, dass die partielle Integration anzuwenden ist, doch musste man bei diesem Beispiel zweimal integrieren, um auf eine Lösung zu kommen. Das haben einige dann nicht mehr weiter fortgeführt oder überhaupt nur einmal integriert und wussten dann nicht mehr weiter.
- „richtig“: Diese Antwort ist eigentlich selbsterklärend. Einige Schülerinnen und Schüler haben das Beispiel komplett richtig gelöst, indem sie zweimal partiell integriert und dann die Gleichung umgeformt haben, um auf die richtige Lösung zu kommen.
- „mit partieller Integrationsmethode falsch integriert“: Hier haben einige zwar erkannt, dass das Beispiel durch partielle Integration zu lösen ist, aber dabei falsch integriert, und sind so zu keiner richtigen Lösung gekommen.

Erstaunlich groß ist der Anteil an Schülerinnen und Schülern, die die Integrationsmethode überhaupt nicht angewendet haben. Entweder dieses Stoffgebiet wurde nicht genau durchgenommen oder ist schon wieder in Vergessenheit geraten, denn eigentlich ist dieses Beispiel in fast jedem Schulbuch enthalten und wird auch oft im Unterricht behandelt.

Immerhin haben insgesamt 42% erkannt, dass die partielle Integrationsmethode anzuwenden ist, auch wenn dann nicht alle das Beispiel richtig oder vollständig durchgerechnet haben. „Richtig“ beantwortet haben überhaupt nur 9% der Schülerinnen und Schüler diese Frage, was meines Erachtens doch ein sehr niedriger Prozentsatz ist.

4.3.2.2 Vergleich Wien- Berlin Leistungskurs – Beispiel 3a

	Wien	Berlin_LK
Integrat.methode nicht angewendet	22	9
nicht fertig integriert mit Int.meth.	15	1
richtig	5	1
keine Antwort	6	1
mit part. Int.meth. falsch integriert	6	-
Anzahl der SchülerInnen	54	12



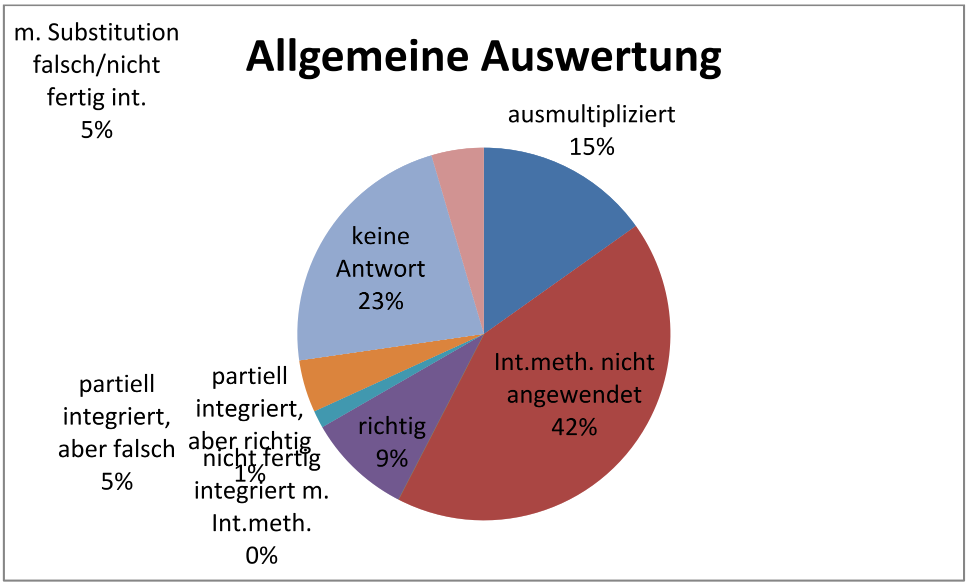
Der Prozentsatz der Schülerinnen und Schüler, die diese Frage korrekt beantwortet haben, ist in Wien und Berlin-Leistungsklasse circa gleich hoch, genauso wie prozentuell jene, die keine Antwort gegeben haben. Erstaunlicherweise schneidet der Leistungskurs bei diesem Beispiel eher schlecht ab, da 75% die partielle Integrationsmethode einfach nicht angewendet haben, was natürlich bei jeder Schularbeit oder Klausur ein schwerwiegender Fehler wäre.

Gesamt gesehen schneidet die Leistungsklasse aus Berlin bei diesem Beispiel im Vergleich zu Wien sehr schlecht ab, was verwunderlich ist, denn bei den vorigen Beispielen hat eigentlich der Leistungskurs immer sehr gut abgeschnitten.

Dies könnte vielleicht daran liegen, dass der Unterricht zur Integralrechnung bei dieser Klasse am längsten zurückliegt, im Vergleich zu allen anderen Klassen, was meiner Ansicht nach für die Fairness des Tests in Ordnung war, da diese Klasse auch fünf Mathematikstunden pro Woche hat und somit in dieser Klasse die Integralrechnung natürlich auch zeitintensiver durchgenommen wurde. Die theoretischen Fragen hat diese Klasse nämlich immer am besten beantwortet, was vielleicht darauf zurückschließen lässt, dass hier sehr wohl Grundvorstellungen zur Integralrechnung verankert sind, aber Anwendungen wie Integrationsmethoden doch eher vergessen wurden, beziehungsweise einfach wieder zurück ins Gedächtnis hätten gerufen werden müssen.

4.3.2.3 Allgemeine Auswertung - Beispiel 3b

	Allgemein
ausmultipliziert	10
Int.meth. nicht angewendet	28
nicht fertig integriert m. Int.meth.	-
richtig	6
partiell integriert, aber richtig	1
partiell integriert, aber falsch	3
keine Antwort	15
m. Substitution falsch/nicht fertig int.	3
Anzahl der SchülerInnen	66



Auch hier bedarf es einige Erklärungen:

- „ausmultipliziert“: Einige Schülerinnen und Schüler haben hier nicht die Substitution angewendet, sondern einfach den Term ausmultipliziert und dann jedes Glied für sich integriert.
- „partiell integriert, aber falsch/richtig“: Einige haben hier eine Integrationsmethode angewendet, aber nicht die, die eigentlich gemeint war, und mit der man das Integral wesentlich leichter berechnen hätte können.
- „Integrationsmethode nicht angewendet“: Hier habe die Schülerinnen und Schüler wieder einen ähnlichen Fehler gemacht wie auch bei Aufgabe a) und zwar haben sie zum Beispiel wie folgt integriert:

$$\int x \cdot (1+x^2)^3 \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^4}{4} + c$$

Dies war zum Beispiel eine der falschen Lösungen, bei der die Schülerinnen und Schüler so oder ähnlich falsch integriert haben.

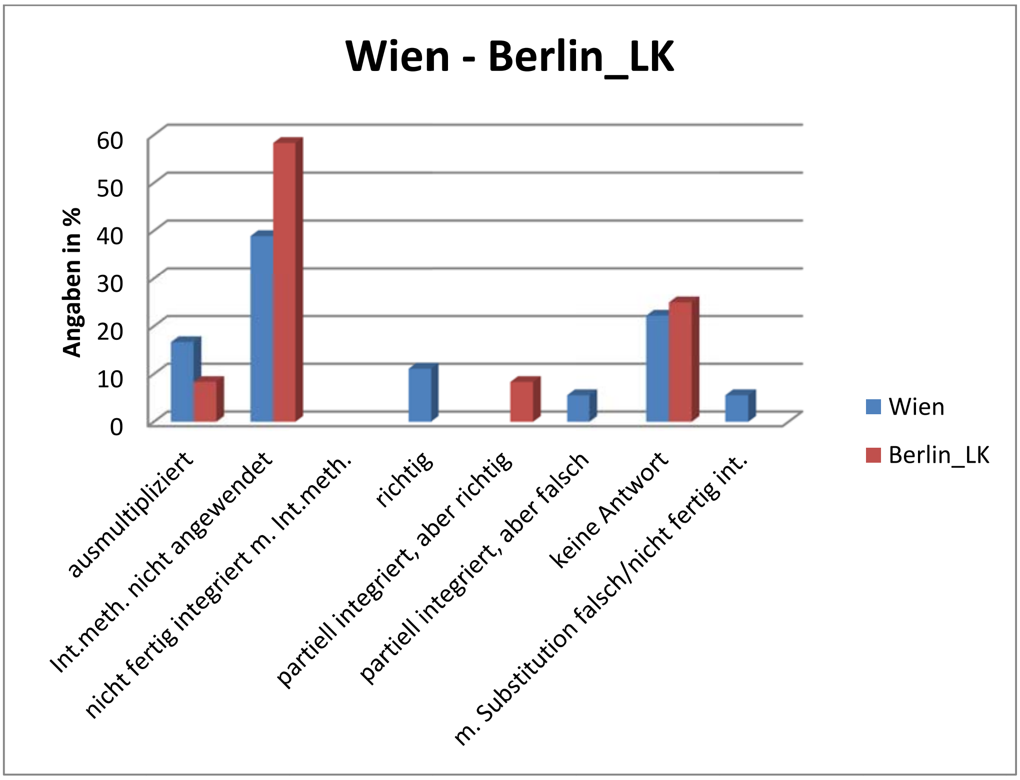
Auch hier haben viele Schülerinnen und Schüler wieder nicht die Substitution als Integrationsmethode angewendet. Einige haben den Term ausmultipliziert und dann eben richtig gelöst. Diese Antwort ist eigentlich richtig, da ich nicht angegeben habe wie die Schülerinnen und Schüler das Beispiel lösen sollten. Weiters hätte ich den

Exponenten einfach erhöhen sollen, dann hätten sie den Term wahrscheinlich nicht mehr ausmultipliziert.

Einige wenige haben dieses Beispiel sogar mit der partiellen Integration lösen wollen, was bis auf einer/m Schüler/in nicht gelungen ist. Die eine Person, die dieses Beispiel mit partieller Integration richtig gelöst hat, hat diese Frage natürlich auch korrekt beantwortet, auch wenn ich mir erwartet habe, dass dieses Beispiel durch Substitution gelöst wird.

4.3.2.4 Vergleich Wien – Berlin_Leistungskurs – Beispiel 3b

	Wien	Berlin_LK
ausmultipliziert	9	1
Int.meth. nicht angewendet	21	7
nicht fertig integriert m. Int.meth.	-	-
richtig	6	-
partiell integriert, aber richtig	-	1
partiell integriert, aber falsch	3	-
keine Antwort	12	3
m. Substitution falsch/nicht fertig int.	3	-
Anzahl der SchülerInnen	54	12



In Berlin und Wien haben zwar ungefähr gleich viel Prozent der Schülerinnen und Schüler keine Antwort gegeben, in Berlin wurde aber wesentlich öfter die Integrationsmethode der Substitution nicht angewendet, dafür haben einige partiell richtig integriert. Das Beispiel wurde außerdem nur in Wien richtig gelöst, in Berlin kein einziges Mal.

4.4 Beispiel 4

Die Aufgabe dabei war es, die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen zu berechnen, diese als Grenzen zu verwenden und die Fläche zwischen den Funktionsgraphen zu berechnen. Dieses Beispiel stellt eigentlich keine großen Hindernisse dar, man muss keine Teilintervalle berechnen und ähnliche Beispiele werden auch immer im Unterricht durchgenommen.

Die Lösung dieses Beispiels habe ich mir derart vorgestellt:

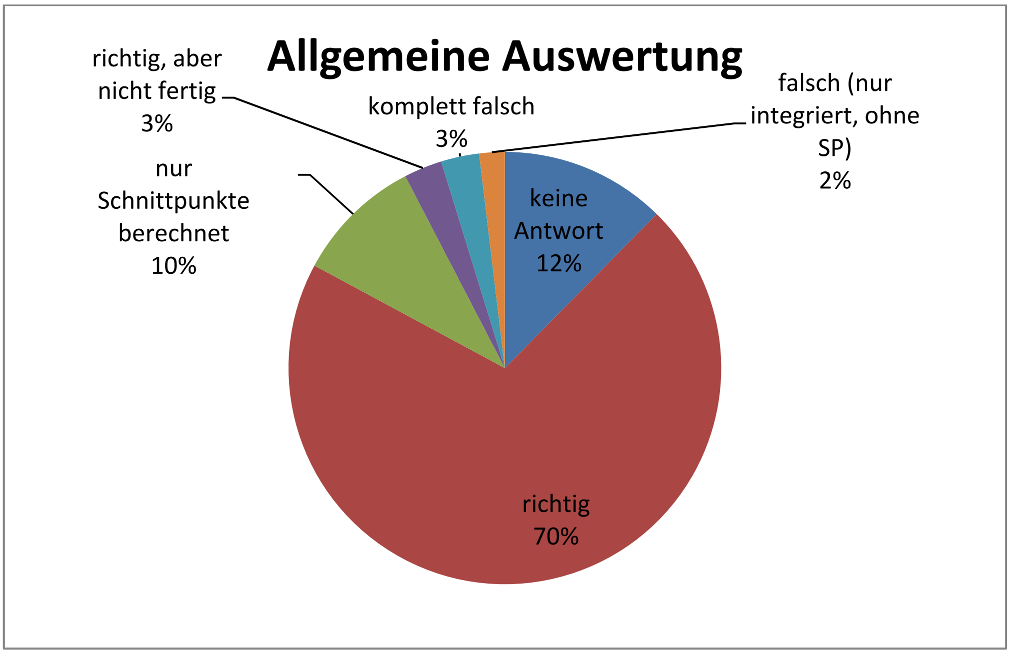
Schnittpunkte berechnen: $f(x) = g(x) \quad \leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 5 = 3x - 1$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x_1 = 4 \wedge x_2 = 1$$

$$\int_1^4 f(x) - g(x) = \int_1^4 x^2 - 5x + 4 = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x \Big|_1^4 = 4{,}5$$

4.4.1.1 Allgemeine Auswertung

	Allgemein
keine Antwort	13
richtig	74
nur Schnittpunkte berechnet	10
richtig, aber nicht fertig	3
komplett falsch	3
falsch (nur integriert, ohne SP)	2
Anzahl der SchülerInnen	105



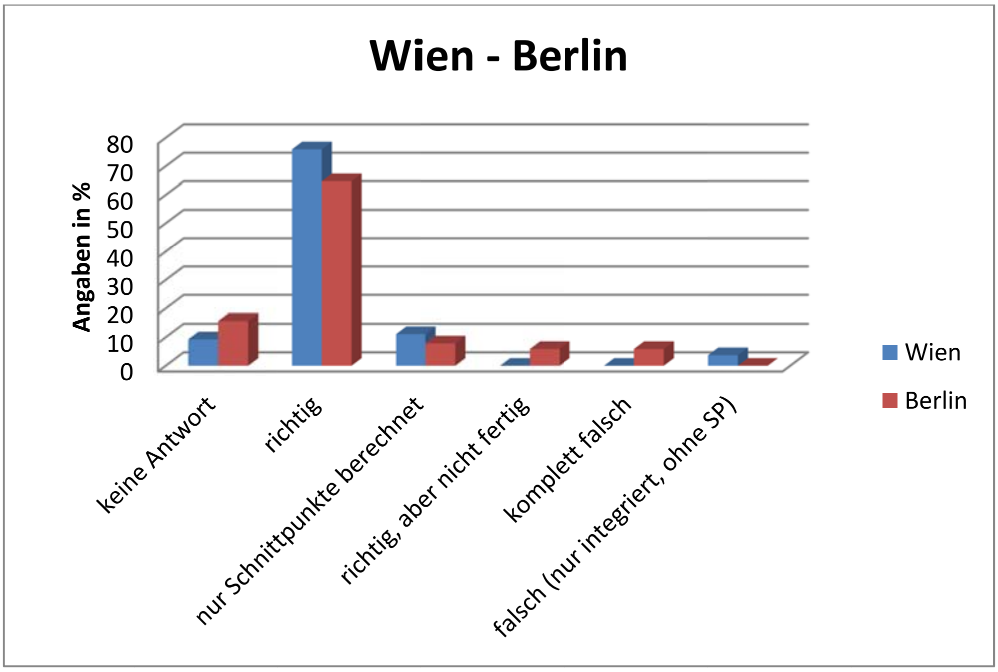
Die Abkürzung bei „falsch (nur integriert, ohne SP)" steht für Schnittpunkte. Hier haben zwei Schülerinnen und/oder Schüler die Funktionen nur integriert, ohne dabei die Schnittpunkte zu berechnen und Grenzen einzusetzen. Sie haben sozusagen von beiden Funktionen nur das unbestimmte Integral berechnet.

Hier sieht man aber, dass der Großteil der Schülerinnen und Schüler das Beispiel bewältigen konnte. Die Rechenfehler fließen in diese Statistik nicht ein, wobei man anmerken kann, dass von 74 richtigen Tests, 48-mal Rechenfehler gemacht wurden. Das heißt, dass mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler, die dieses Beispiel eigentlich richtig gelöst haben, trotzdem solche Rechenfehler gemacht haben, dass das Endergebnis falsch war.

Auch der Anteil jener, die hier keine Antwort gegeben haben, ist bei diesem Beispiel im Vergleich zu allen anderen Beispielen sehr gering, was zeigt, dass diese Art von Beispielen anscheinend die wenigsten Probleme bereitet.

4.4.1.2 Vergleich Wien – Berlin

	Wien	Berlin
keine Antwort	5	8
richtig	41	33
nur Schnittpunkte berechnet	6	4
richtig, aber nicht fertig	-	3
komplett falsch	-	3
falsch (nur integriert, ohne SP)	2	-
Anzahl der SchülerInnen	54	51

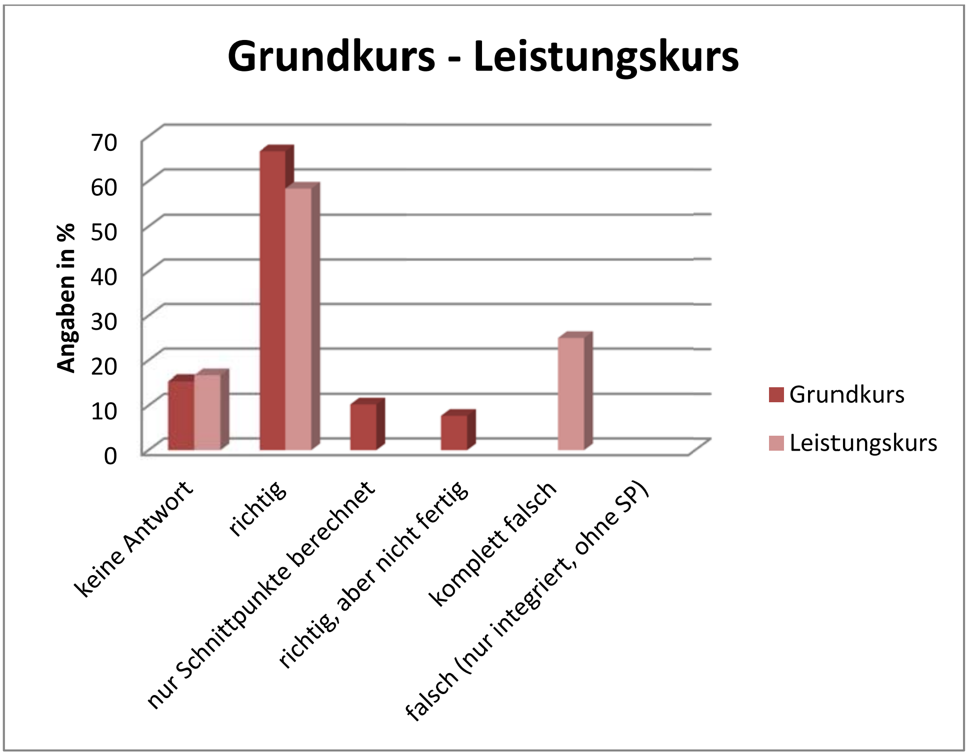


Hier schneiden beide Städte ungefähr gleich ab, wobei in Wien doch mehr Schülerinnen und Schüler das Beispiel richtig gelöst haben.

Wie schon oben beschrieben, war dieses vierte Beispiel ein Standardbeispiel, das immer, egal wie man den Einstieg oder den Unterricht der Integralrechnung gestaltet, durchgenommen wird, und für die meisten Schülerinnen und Schüler kein Problem darstellt, weil es zum einen keine theoretischen Fragen beinhaltet und zum anderen weil es eigentlich ein Beispiel „nach Rezept" ist. Das heißt, dass man dieses Beispiel auch durch reines auswendig lernen oder durch erlernen des Rechenweges bewältigen kann, ohne den genaueren theoretischen Hintergrund zu verstehen.

4.4.1.3 Vergleich Grundkurs – Leistungskurs

	Grundkurs	Leistungskurs
keine Antwort	6	2
richtig	26	7
nur Schnittpunkte berechnet	4	-
richtig, aber nicht fertig	3	-
komplett falsch	-	3
falsch (nur integriert, ohne SP)	-	-
Anzahl der SchülerInnen	39	12



Interessanterweise schneidet hier der Grundkurs besser ab als der Leistungskurs. Im Leistungskurs haben weniger Schülerinnen und Schüler die Frage richtig beantwortet und mehr keine Antwort gegeben. Weiters hat niemand im Grundkurs das Beispiel falsch gelöst, im Leistungskurs hingegen schon.

5 Endergebnis

Das Endergebnis war für mich eigentlich schlechter als erwartet. Natürlich muss man die Tatsache mit einbeziehen, dass einige Schülerinnen und Schüler kein Interesse am Test gezeigt haben und dass sie sich alle nicht auf den Test vorbereiten konnten, dennoch habe ich mir mehr erwartet. Vor allem bei Beispiel 3 war ich sehr erstaunt wie viele die Integrationsmethoden einfach nicht angewendet haben.

Bei den theoretischen Fragen habe ich mir allerdings erwartet, dass hier oft falsche oder keine Antworten kommen würden, da dies im Unterricht sehr oft nicht genau durchgenommen wird, beziehungsweise nur sehr selten auch in dieser Form abgeprüft wird. Ich bin mir nach diesem Test auch nicht sicher, ob dieses theoretische Wissen in Zusammenhang mit einer Punktezahl einer Schularbeit steht, da eben theoretisches Wissen oft nicht abgeprüft wird. Denn wenn man nun die Tests des Leistungskurses in Berlin betrachtet, so sieht man, dass hier die Schülerinnen und Schüler dieser Klasse bei den theoretischen Fragen weitaus besser abschneiden als der Grundkurs und alle Wiener Klassen, bei den rein rechnerischen Beispielen aber steht diese Klasse eher im Mittelfeld oder gehört sogar zu den eher schlechteren Klassen.

Wie schon erwähnt, darf man natürlich nicht vergessen, dass der Test für diese Klasse am längsten von der letzten Unterrichtsstunde zur Integralrechnung entfernt lag, woraus man eventuell auch wieder schließen kann, dass in dieser Klasse die theoretischen Inhalte, also auch die Grundvorstellungen zum Teil gefestigt waren, aber jegliche Anwendungen vergessen wurden. Denn bei allen theoretischen Fragen konnten die meisten Schülerinnen und Schüler dieser Klasse richtige Antworten geben, die zum Teil auch sehr gut formuliert waren.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung könnten natürlich zu einer bildungspolitischen Debatte führen, was den Rahmen dieser Diplomarbeit aber überschreiten würde.

Im Gesamten kann man sagen, dass die Klassen beider Städte ungefähr gleich abschneiden, bei gewissen Bereichen war Wien besser, bei anderen Berlin, dennoch sind die Grundvorstellungen zur Integralrechnung am meisten im Leistungskurs in Berlin „hängengeblieben“, was natürlich auch damit zusammenhängt, dass diese Klasse, im

Vergleich zu den Wiener Klassen, ein bis zwei Stunden mehr Mathematikunterricht pro Woche hat.

6 Schlusswort

Für mich war diese Untersuchung eine sehr interessante Erfahrung und auch eine Bereicherung für meine weitere Laufbahn als angehende Lehrerin.

Ich habe dadurch vieles gelernt, zum Beispiel wie wichtig die konkrete und korrekte Formulierung einer Aufgabe für Schularbeiten ist, da Beispiele anscheinend oft missverstanden werden oder es zu Unklarheiten kommen kann.

Weiters war es sehr interessant, die unterschiedlichen Bildungssysteme in zwei verschiedenen Städten miterleben zu dürfen und dabei versuchen herauszufinden woran es liegen könnte, warum bestimmte Schülerinnen und/oder Schüler diverse Fehler machen.

Auch die Auseinandersetzung mit dem Stoffgebiet der Integralrechnung in den verschiedenen Lehrbüchern, oder wie der Einstieg in die Integralrechnung gestaltet werden kann, war sehr interessant für mich.

Abschließend kann ich sagen, dass ich sehr stark von dieser Untersuchung profitiert habe, denn zum einen wurde mein Interesse unter anderem auch in Bildungssysteme und Bildungspolitik geweckt und zum anderen habe ich, wie schon oben erwähnt, auch einiges Wissenswertes, das man fast nur durch „learning by doing“ erwirbt, für meinen späteren Berufsweg dazugelernt.

7 Literaturliste

- Bigalke, A.; Köhler, N.: Mathematik 12.1. Grundkurs; 1.Auflage; 1998; Cornelson Verlag; Berlin
- Bigalke, A.; Köhler, N.: Mathematik 12.2. Leistungskurs; 1.Auflage; 1999; Cornelson Verlag; Berlin
- Götz, S; Reichel, H.C.; Müller, R; Hanisch, G.: Lehrbuch der Mathematik 8.Klasse; 4.Auflage; 2004 ; öbv&hpt; Wien
- Thorwartl, W; Wagner, G.; Wagner, H.: Mathematik positiv! 6.Klasse AHS; Band 1 Musterbeispiele und Aufgaben; 2.Auflage; 2002; öbv&hpt; Wien
- Teilskriptum zur Vorlesung Schulmathematik 6 (Differential – und Integralrechnung) von Professor Humenberger (Universität Wien) http://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/SM-DIFF-INT/07-Integralrechnung-Einstiege.pdf
- Vom Hofe, R.: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte, Texte zur Didaktik der Mathematik; 1995; Spektrum Akademischer Verlag; Heidelberg-Berlin-Oxford

Lebenslauf

Lena Meindl

Persönliche Daten:

- Adresse: Rudolfsplatz 8/2/7
  A – 1010 Wien
- Tel.nr.: 0043/ 699 / 11715866
- E-Mail: Lena.Meindl@gmx.at
- Geburtsdatum: 24.06. 1987
- Geburtsort: Wien
- Familienstand: ledig
- Staatsbürgerschaft: Österreich

Schulausbildung:

- 1993 – 1997 Volkschule Börsegasse , 1010 Wien
- 1997 – 2005 Bundesrealgymnasium I (naturwissenschaftlicher Zweig)
- 2005: positive Ablegung der Reifeprüfung (mit ausgezeichnetem Erfolg)

Erworbene Qualifikationen während der Schulzeit:

- Schulballorganisatorin
- Klassensprecherin
- Teilnahme an einem zweitägigen Kommunikationsseminar

Hochschulausbildung

- seit Wintersemester 05/06 Lehramtsstudium Mathematik, Psychologie und Philosophie an der Universität Wien

Berufserfahrung

- Mitarbeit im ehemaligen Betrieb meiner Eltern
- 2002 - 2008 Verkäuferin im Kaufhaus Steffl bei Fa. AVG
- Seit 2008 freier Dienstnehmer im Aktuariat der Abteilung Leben in der Generali Versicherung
- Nachhilfe für Mathematik und Englisch

EDV – Kenntnisse:

- Microsoft Office (Word, Power Point, Excel, Outlook)
- Matlab
- C
- APL

Fremdsprachen:

- Englisch (Universitätsniveau)
- Französisch (Maturaniveau)
- Italienisch (Grundkenntnisse)

Freizeit:

- Reisen
- Sport (Joggen, Wintersport, Tennis, Radfahren,…)
- Lesen