universität wien

# DIPLOMARBEIT

## „Grundvorstellungen der Integralrechnung
## Ein Schulbuchvergleich AHS – HTL“

Angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)
an der Fakultät für Mathematik
der Universität Wien


| | |
|---|---|
| Verfasser: | Ronald Prammer |
| Matrikelnummer: | 0348371 |
| Studienkennzahl: | A 190 406 412 |
| Studienrichtung: | LA Mathematik/Physik |
| Betreuer: | Univ.-Prof. Dr. Hans Humenberger |


Wien, am 16.05.2011

# Danksagung

Diese Arbeit entstand während meines Lehramtsstudiums Mathematik/Physik an der Universität Wien. Nach einem Gespräch mit Herrn Univ. Prof. Dr. Hans Humenberger wurde die Idee geboren, eine Arbeit über die Grundvorstellungen der Integralrechnung in Kombination mit einem Schulbuchvergleich zu verfassen.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Univ. Prof. Dr. Hans Humenberger für seine intensive Unterstützung während der Entstehung dieser Arbeit danken.

Ebenso möchte ich allen Freunden und Freundinnen danken, die mich während meines Studiums begleitet und unterstützt haben.

Eine großartige Hilfe beim Korrigieren und Immer-wieder-Lesen der Diplomarbeit war Sylvia. Danke!

Im Besonderen möchte ich mich bei meinen Eltern Martha und Alfred sowie meinem Bruder Bernhard bedanken, die mich nicht nur im Rahmen meines Studiums sondern mein ganzes Leben lang unterstützt haben.

Zu guter Letzt möchte ich meiner Lebensgefährtin Katharina danken, die mir während des Verfassens dieser Arbeit stets eine große Stütze war.

# Inhaltsverzeichnis


## 1. Einführung .....9

1.1. Was SchülerInnen über die Integralrechnung wissen (sollten) .....9

1.2. Historische Entwicklung der Integralrechnung .....10

1.3. Zwei Grundprobleme des Analysisunterrichts in der Oberstufe .....11

1.4. Verhältnis von Anschaulichkeit und Strenge am Beispiel des Grenzwertbegriffes .....13

1.4.1. Beispiel: Medikamentenspiegel im Körper .....15

1.4.2. Beispiel: Wurzelziehen vor 3000 Jahren .....17

1.4.3. Beispiel: Ist $\mathbf{0,9} \stackrel{?}{=} \mathbf{1}$ .....20

## 2. Überblick über die Differentialrechnung .....24

2.1. Tangentenproblem bei der Differentialrechnung .....24

2.1.1. Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente .....24

2.1.2. Die Tangente als Grenzlage von Sekanten .....25

2.1.3. Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert .....25

2.1.4. Fazit .....26

2.2. Momentangeschwindigkeit im Zusammenhang mit der Differentialrechnung .....26

2.3. Vergleich des Tangentenproblems mit der Momentangeschwindigkeit im Rahmen der Differentialrechnung .....29

## 3. Integralrechnung .....32

3.1. Reihenfolge Differential-, Integralrechnung .....32

3.1.1. Fachspezifischer Aspekt .....32

3.1.2. Lernpsychologischer Aspekt .....33

3.1.3. Curricularer Aspekt .....33

3.2. Sinn und Unsinn der Integralrechnung im Schulunterricht .....34

3.3. Grundvorstellungen der Integralrechnung .....35

3.3.1. Das Umkehrproblem der Integralrechnung .....35

3.3.2. Integration als verallgemeinerter Summationsprozess .....37

3.3.3. Geometrische Grundvorstellung der Integralrechnung .....39

3.3.4. Integration als Mittelwertbildung .....42

3.3.5. Integrieren heißt Rekonstruieren .....46

3.3.6. Die „graphische Rekonstruktion“ beim Integrieren .....49

3.4. Präzisierung des Integralbegriffes .....54

## 4. Zusammenhang von Ableiten und Integrieren .....61

4.1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....61

## 5. Lehrpläne.....66

5.1. AHS .....66

5.2. BHS (HTL) .....67

## 6. Schulbuchvergleich.....69

6.1. Vergleichsanalyse.....70

6.1.1. Umfang....70
6.1.2. Abbildungen....71
6.1.3. Farben....72
6.1.4. Infos und Tipps....73
6.1.5. Einleitung....73
6.1.6. Beispiele und Aufgaben....74
6.1.7. Definitionen, Sätze, Beweise....74
6.1.8. Computereinsatz....75
6.1.9. Zusammenfassung....76
6.1.10. Ausblick/Rückblick....76
6.2. Mathematik verstehen 8....77
6.2.1. Einstieg....77
6.2.2. Das Integral....80
6.2.3. Deutung des Integrals....81
6.2.4. Berechnung von Integralen mit Stammfunktionen....82
6.2.5. Anwendungen....84
6.2.6. Der Hauptsatz bei Malle u. a.....85
6.2.7. Weitere Anwendungen und Integrationsmethoden....87
6.3. Ingenieur-Mathematik 3....89
6.3.1. Einstieg....89
6.3.2. Das bestimmte Integral....92
6.3.3. Stammfunktionen und unbestimmtes Integral....95
6.3.4. Hauptsatz bei Timischl/Kaiser....97
6.3.5. Integrationsmethoden....99
6.3.6. Numerische Integration....100
6.3.7. Uneigentliches Integral....101

6.3.8. Anwendung ..... 102

6.4. Schlussfolgerung ..... 105

**7. Eigene Darstellung ..... 109**

7.1. Einstieg „Integrieren heißt Rekonstruieren“ ..... 109

7.2. Einführen von Unter- und Obersummen ..... 114

7.3. Definition „bestimmtes Integral“ ..... 118

7.4. Stammfunktionen ..... 121

7.5. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ..... 126

7.6. Integrationsmethoden und verschiedene Deutungen des Integrals ..... 131

7.7. Exaktifizierung ..... 131

**8. Schlussbemerkung ..... 132**

**Zusammenfassung ..... 134**

**Abstract ..... 135**

**Literaturverzeichnis ..... 136**

**Lebenslauf ..... 139**

# 1. Einführung

Nicht nur Lernende sondern auch Lehrende scheinen mit dem Mathematik-Lehrplan der zwölften Schulstufe ihre Probleme zu haben. Die Differential- und die Integralrechnung sind die beiden letzten großen Kapitel des Analysisunterrichts, mit denen SchülerInnen in der Mittelschule konfrontiert werden. Die Einführung der Differential- vor der Integralrechnung hat sich in der Schule durchgesetzt, sodass für den/die LehrerIn die Zeit, um sich dem Thema der Integralrechnung ausgiebig zu widmen, meist knapp wird, wenn für die Maturavorbereitung noch genügend Zeit bleiben soll. Es gilt daher, einen didaktisch möglichst guten Zugang zur Integralrechnung zu finden, der den SchülerInnen die grundlegende Idee der Integralrechnung nachhaltig und sinnvoll nahe bringt. Nach ausgiebiger Analyse der Fachliteratur, im Speziellen zum Thema Fachdidaktik, möchte ich mich mit zwei gängigen Schulbüchern, einem für die AHS und einem für die HTL, auseinandersetzen und diese einander kritisch gegenüberstellen. Im Anschluss daran möchte ich einen eigenen Zugang finden und einen möglichen Unterrichtsverlauf darstellen.

## 1.1. Was SchülerInnen über die Integralrechnung wissen (sollten)

Wenn ich mich in meinem Bekanntenkreis ein wenig umhöre und mich mit FreundInnen, die zumindest Matura-Niveau besitzen, sowie StudienkollegInnen über mein Diplomarbeitsthema unterhalte, wird sehr oft die Frage gestellt: „Wie war das noch einmal mit dem Integrieren?“. Die historisch motivierten Grundprobleme, „Produktsummen“ sowie das „Flächenproblem“ beziehungsweise auch das Suchen von Stammfunktionen, scheinen langfristig nicht mit der Integralrechnung in Verbindung gesetzt zu werden. So fehlen SchülerInnen grundlegende Vorstellungen der Integralrechnung [Malle G. , 1999, S. 68]. MaturantInnen können zwar Volumina von Rotationskörpern

berechnen, gleichzeitig fehlt ihnen aber die Vorstellung darüber, was ein bestimmtes Integral ist. Bei der Differentialrechnung verhält es sich ähnlich. Ableitungen, Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen, Asymptoten und so weiter von gebrochenrationalen Funktionen vierter Ordnung können berechnet werden, oft fehlt jedoch das inhaltliche Verständnis. Internationale Vergleichstests wie TIMSS III haben gezeigt, dass nur ca. ein Drittel der OberstufenschülerInnen [1] grundlegende Aussagen über Ableitungsfunktionen wie $f'(1) = 0$ geometrisch interpretieren können [Hahn & Prediger, 2008, S. 163].

Dies sind Beispiele dafür, dass im Unterricht zwar Techniken gelehrt werden, wie zum Teil relativ komplexe Aufgaben gelöst werden können, dass das mathematische Verständnis jedoch oft vernachlässigt wird. Damit die Fragen, was die Integralrechnung ist und wozu wir sie brauchen, von SchülerInnen beantwortet werden können, müssen sowohl die Grundvorstellung als auch Anwendungsbeispiele im Unterricht eine zentrale Rolle spielen.

## 1.2. Historische Entwicklung der Integralrechnung

Erste Vorläufer der Integralrechnung sind bereits in der vorgriechischen Antike (Flächenberechnung) zu finden. Archimedes von Syrakus (3. Jahrhundert v. Chr.) hat bereits Inhalte krummlinig begrenzter Flächen berechnet [Popp, 1999, S. 352]. Er hat die Grundsteine der Infinitesimalrechnung gelegt, indem er bereits mit unendlichen Reihen, Ober- und Untersummen gerechnet beziehungsweise Flächen/Körper in Streifen/Schichten zerlegt hat.

Erst zu Beginn des 17. Jahrhunderts haben Mathematiker wie Galileo Galilei, Bonaventura Francesco Cavalieri und Johannes Kepler[2] die antiken Gedanken

[1] Deutschland
[2] Kepler beschäftigte sich mit der Inhaltsbestimmung von Weinfässern.

wieder aufgenommen und neue Impulse für eine Weiterentwicklung in der Mathematik gesetzt [Popp, 1999, S. 364].

Mathematiker wie zum Beispiel Evangelista Torricelli, Pierre de Fermat, Isaac Barrow waren ebenfalls an der Entwicklung der Infinitesimalrechnung grundlegend beteiligt.

Im 17. Jahrhundert haben die beiden Mathematiker Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz unabhängig voneinander Methoden entwickelt, Flächeninhalte unter einem Graphen beziehungsweise Steigungen von Graphen algebraisch zu berechnen. Sie werden somit als die Begründer der Analysis angesehen. Während Leibniz geometrisch vom so genannten „Tangentenproblem“ ausgegangen ist, hat sich Newton von der physikalischen Seite dem „Prinzip der Momentangeschwindigkeit“ angenähert [Büchter & Henn, 2010, S. 80]. Leibniz führte die Differentialschreibweise "$\mathrm{d}x$", das Integralsymbol "$\int$" und die Funktionsbezeichnung "$f(x)$" ein. Johann Bernoulli (1692) hat als erster Leibniz‘ Definition einer infinitesimalen Größen in seinem Lehrbuch veröffentlicht [Tietze, Klika, & Wolpers, 1997, S. 183].

Die Theorie der Infinitesimalrechnung wurde schließlich von den Brüdern Bernoulli, Leonhard Euler („Introduction in Analysis Infinitorum“, 1748), Joseph-Louis de Lagrange („Algebraische Analysis“, 1797), Augustin Louis Cauchy („Cours d‘Analysis de l’Ecole Polytechnique“, 1821), Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano, Jean Baptiste Joseph Fourier, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Bernhard Riemann, Karl Theodor Wilhelm Weierstraß und vielen anderen vervollständigt.

## 1.3. Zwei Grundprobleme des Analysisunterrichts in der Oberstufe

Danckwerts/Vogel (2006) haben folgende Schwierigkeiten, denen sich Lehrende im Analysisunterricht stellen müssen, thematisiert [Danckwerts &

Vogel, 2006, S. 3]. Sinngemäß formulieren sie die beiden zentralen Punkte wie folgt:

- Ein ausgewogenes, richtiges Verhältnis von Anschaulichkeit und Strenge.
- Kaum Raum für heuristische Denk- und Arbeitsweisen.

Der erste Punkt spiegelt wider, wie schwierig es ist, einen ausgewogenen Zugang zum Analysisunterricht zu finden, der einerseits dem/der SchülerIn den Sachverhalt plausibel beziehungsweise anschaulich vermittelt, andererseits aber im mathematischen Sinn korrekt bleibt. Dieser Spagat zwischen Anschaulichkeit und Strenge erfordert einige Überlegungen, denn eine Präzisierung der Theorie geht meistens auf Kosten der anschaulichen intuitiven Vorstellung. Die Darstellungen und Argumentationen können länger und die Verständlichkeit kann erschwert werden [Humenberger, 2009, S. 1]. Die Vorteile liegen hingegen auf der Hand: Es kommt zu einer besseren Absicherung der Theorie beziehungsweise zur besseren Überprüfbarkeit. Außerdem werden Sachverhalte leichter vermittelbar und schließlich sprechen mehr Schönheit und Überzeugungskraft beim logischen Aufbau für eine exakte Fundierung im Nachhinein.

Hinzu kommt noch das Problem, dass den meisten SchülerInnen in diesem Sinne beides fehlt: Einerseits können sie nicht exakt argumentieren (beweisen), andererseits fehlen ihnen konkrete Grundvorstellungen.

Eine nicht untypische Äußerung von LehrerInnen lautet zum Beispiel:

> „Ich weiß doch, wie es richtig wäre, aber im Unterricht kann ich das (leider) so nicht machen. Mir bleiben nur halbe Sachen.“ [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 3]

Der im universitären Bereich streng deduktive Zugang zur Analysis kann im Schulunterricht so nicht praktiziert werden. Trotzdem muss ein gewisses Fundament geschaffen werden, denn wenn wir von Anschaulichkeit sprechen, steht der Begriff des Verstehens in unmittelbarem Wechselspiel mit diesem. Doch ab wann können wir von uns beziehungsweise von den SchülerInnen, die

wir unterrichten, behaupten, etwas verstanden zu haben? Ein einfaches Beispiel: Wissen SchülerInnen, weshalb $x \cdot y = y \cdot x$ ist [Vollrath, 1993, S. 22]? Das heißt, reicht das Wissen, dass die Multiplikation kommutativ ist? Beziehungsweise hat man die Kommutativität erst wirklich verstanden, wenn sie aus den Peano-Axiomen hergeleitet werden kann? Vollrath (1993) denkt dieses Gedankenexperiment aber noch weiter.

> „Hat man sie nicht vielleicht erst wirklich verstanden, wenn man z. B. sich dessen bewußt ist, daß zwar das kartesische Produkt nicht kommutativ ist, wohl aber die darauf zurückgeführte Multiplikation von Kardinalzahlen?“ [Vollrath, 1993, S. 22]

Schnell wird deutlich, dass diese Art der Argumentation kein Ende nimmt und höchstens von philosophischem Standpunkt aus betrachtet einer genaueren Untersuchung bedarf. Dennoch ist klar, dass eine gewisse Strenge im Mathematikunterricht nicht fehlen darf.

Der zweite Punkt, den Danckwerts/Vogel (2006) ansprechen, bezieht sich auf die üblichen ein bis zwei Mathematikstunden pro Woche, zu je 50 Minuten, in denen es sich als besonders schwierig erweist, einen in sich abgeschlossenen sinnstiftenden Unterricht zu gewährleisten. Oft müssen LehrerInnen wichtige Ideen oder Tricks „vom Himmel fallen lassen“, um ihren Unterricht voranzutreiben. Für manche Lehrende aber auch Lernende ist dieser Umstand möglicherweise sehr frustrierend, was sich aber auf Grund des Stundenplanes/Lehrplanes nicht immer vermeiden lässt.

## 1.4. Verhältnis von Anschaulichkeit und Strenge am Beispiel des Grenzwertbegriffes

Der Begriff des Grenzwertes wird zuerst intuitiv in den Mathematikunterricht eingeführt. Dies kann anhand von Funktionen oder auch mittels Folgen

geschehen. Dazu reicht vorerst eine rein verbale Definition von „Grenzwert“. Diese könnte folgendermaßen aussehen:

**Definition:** Mit $g := \lim_{t \to a} s(t)$ ist jener Wert gemeint, dem sich die Funktionswerte $s(t)$ unbegrenzt nähern, wenn sich $t$ dem Wert $a$ unbegrenzt nähert.

Die Verbalisierung des Grenzwertbegriffes ist in obiger Definition unabdingbar. Als Beispiel betrachten wir die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$. Um den Sachverhalt zu verbalisieren, dass die Folge gegen die Zahl 0 konvergiert, gehen Danckwerts/Vogel (2006) auf mehr und weniger gut geeignete Sprechweisen ein [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 26]:

(1) „$\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem $n$ der 0 beliebig nahe.“

(2) „$\frac{1}{n}$ strebt gegen 0 für $n$ gegen ∞.“

(3) „$\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem $n$ der 0 immer näher.“

(4) „$\frac{1}{n}$ kommt der 0 immer näher, ohne sie jemals zu erreichen.“

Uneingeschränkt geeignet sind hier nur die ersten beiden Sprechweisen, (1) und (2). In Variante (3) fehlt der Zusatz „beliebig nahe“, um der verbalen Grenzwertdefinition gerecht zu werden. Die Aussage „kommt immer näher“ ist für die Konvergenz gegen einen Grenzwert zwar notwendig, jedoch noch nicht hinreichend. Beispielsweise kommt die Folge $(3 + \frac{1}{n})$ der Zahl 2 immer näher, 2 ist aber nicht ihr Grenzwert. Die Formulierung (4) ist hingegen völlig unbrauchbar. Die Grenze zur inhaltlichen Verfälschung wird deutlich überschritten. Eine konstante Folge konvergiert für alle $n$ immer genau gegen die Konstante [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 26].

Der intuitive Zugang zum Grenzwert wird am Beispiel der Stammbrüche also sehr anschaulich dargestellt. Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)$ nähert sich immer mehr der Null und kommt ihr sogar beliebig nahe.

Ebenso wird SchülerInnen folgendes Beispiel vermutlich intuitiv vollkommen klar sein: Wird die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen $n$-Eckes, welches in einen Kreis einbeschrieben ist, erhöht, so wird die Form des $n$-Eckes mit wachsendem $n$ beliebig genau den Kreis approximieren. Anders ausgedrückt: Lässt man die Anzahl der Ecken gegen unendlich gehen, so nähert sich das $n$-Eck im Grenzfall dem Kreis.

Anhand diskreter Modellierung von Wachstumsprozessen können SchülerInnen die Begriffe „Folgen“ und „Grenzwerte“ im Unterricht ebenfalls kennenlernen. An den in den folgenden Unterkapiteln dargelegten Beispielen „Medikamentenspiegel im Körper“ und „Wurzelziehen vor 3000 Jahren“ wird dies deutlich [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 18].

### 1.4.1. Beispiel: Medikamentenspiegel im Körper

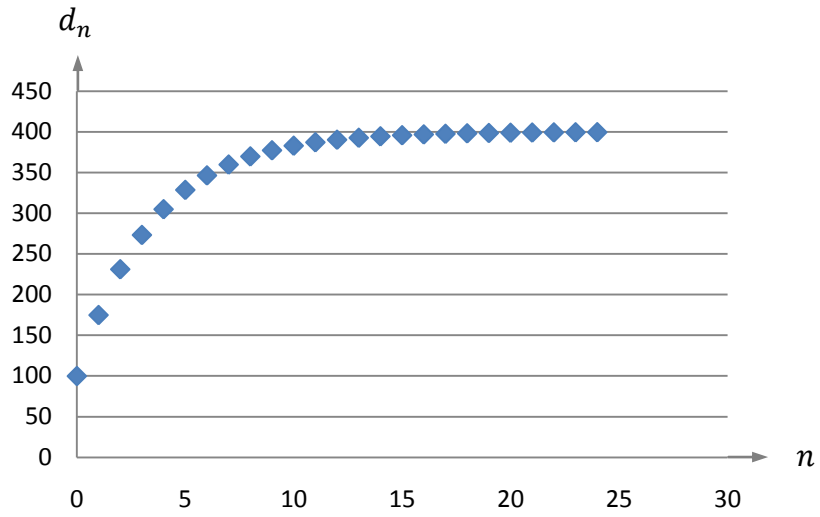
In diesem Beispiel soll untersucht werden, wie sich der Medikamentenspiegel im menschlichen Körper entwickelt, wenn wir davon ausgehen, dass innerhalb von vier Stunden 25 Prozent des Medikaments vom Körper abgebaut wird. Danckwerts/Vogel (2006) gehen des Weiteren davon aus, dass die Anfangsdosis 100 mg beträgt und alle vier Stunden erneut gegeben wird.

Wir beschreiben mit $d_n$ die vorhandene Menge des Medikaments im Körper nach $n$ Perioden, wobei eine Periode vier Stunden beträgt.

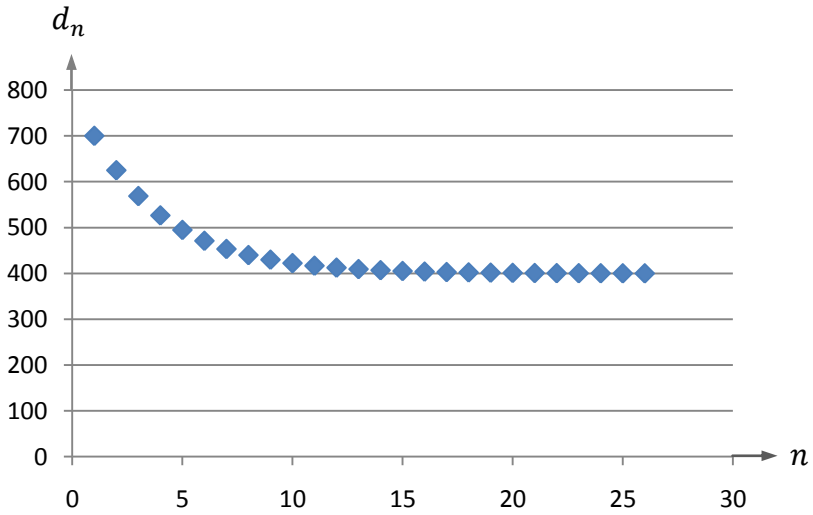
Für den Anfangswert $d_0 = 100$ erhalten wir:

$$d_1 = \frac{3}{4}d_0 + 100, \quad d_2 = \frac{3}{4}d_1 + 100, \quad \dots \quad , d_{n+1} = \frac{3}{4}d_n + 100$$

Die mathematische Modellierung ist ein iterativer Prozess, welcher schon mit einem einfachen Tabellenkalkulationsprogramm veranschaulicht werden kann. Die empirische numerische Lösung zeigt, dass sich der Medikamentenspiegel auf lange Sicht hin bei 400 mg einpendeln wird.




Beginnt man dagegen bei einem anderen Startwert, pendelt sich der Medikamentenspiegel langfristig ebenfalls bei 400 mg ein.




Möchte man eine allgemeine explizite Darstellung, beginnt man mit

$$d_{n+1} = r \cdot d_n + c$$

und iteriert:

$$d_2 = r \cdot d_1 + c = r \cdot (r \cdot d_0 + c) + c = r^2 d_0 + c(r + 1)$$

$$d_3 = r \cdot d_2 + c = r \cdot (r^2 d_0 + c(r+1)) + c = r^3 d_0 + c(r^2 + r + 1)$$

…

$$d_n = r^n d_0 + c(r^{n-1} + \cdots + r + 1)$$

Mit der Summenformel für die endliche geometrische Reihe erhält man dann die explizite Darstellung für $d_n$:

$$d_n = r^n d_0 + c\frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

Im Fall $0 < r < 1$ wird $r^n$ mit wachsendem $n$ beliebig klein. Dies bedeutet, $d_n$ wird sich bei $c/(1-r)$ stabilisieren. Für $c = 100$ und $r = 3/4$ erhalten wir den bereits empirisch gefundenen Wert 400.

### 1.4.2. Beispiel: Wurzelziehen vor 3000 Jahren

Ein weiteres Beispiel von Danckwerts/Vogel (2006) bezieht sich auf das numerische Wurzelziehen, anhand dessen der Grenzwertbegriff diskutiert werden kann. Über die in Tontafeln geritzten Zeichen (Keilschrift) wurde festgestellt, dass die Babylonier (bis 2000 v. Chr.) schon erstaunlich gute Techniken und Lösungsalgorithmen entwickelt hatten. Unter anderem war es ihnen möglich, die Quadratwurzel näherungsweise zu berechnen. Ich möchte dies kurz an einem Beispiel demonstrieren [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 21].

Wir versuchen die Gleichung $x = \sqrt{18}$ bzw. $x^2 = 18$ zu lösen. Als Startwert wählen wir *o. B. d. A.* eine positive Zahl, die in der Nähe der gesuchten Quadratwurzel liegt[3]. Die Zahl $x_0 = 4$ wäre also eine erste Näherung mit $4^2 = 16$. Es fehlt demnach ein Rest, den wir noch nicht kennen und mit $r_0$ bezeichnen. Wir können als nächste Näherung $x_1 = x_0 + r_0$ setzen und erhalten:

$$18 = (4 + r_0)^2 = 16 + 8r_0 + {r_0}^2$$

[3] Der erste Wert sollte praktischerweise in der Nähe der gesuchten Zahl liegen, um das Verfahren zu beschleunigen.

Der Rest $r_0$ ist kleiner als 1, wodurch ${r_0}^2$ noch kleiner wird. Wenn wir den Summanden ${r_0}^2$ vernachlässigen, können wir $r_0$ näherungsweise berechnen:

$$18 \approx 16 + 8r_0 \Leftrightarrow r_0 \approx 0{,}25$$

Somit erhalten wir:

$$x_1 = x_0 + r_0 = 4 + 0{,}25 = 4{,}25$$

Diese Näherung ist mit ${x_1}^2 = 18{,}0625$ deutlich besser als unsere erste. Jetzt können wir aber den Schritt von oben wiederholen:

$$18 = (x_1 + r_1)^2 = {x_1}^2 + 2x_1r_1 + {r_1}^2 \approx {x_1}^2 + 2x_1r_1$$

Wir berechnen wieder den Rest $r_1$:

$$r_1 \approx \frac{18 - {x_1}^2}{2x_1}$$

Die dritte Näherung ist somit:

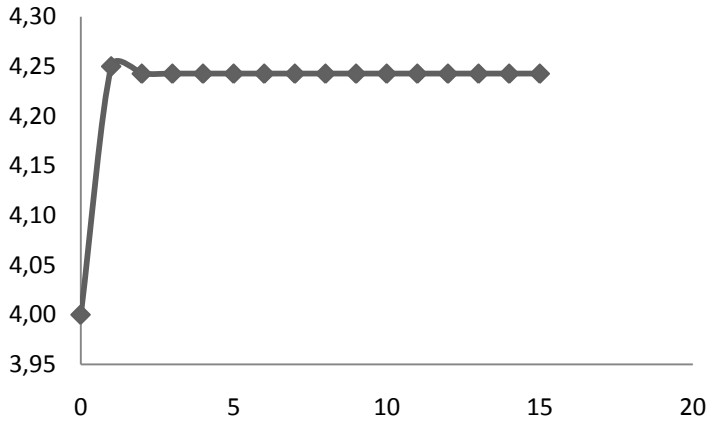
$$x_2 \approx x_1 + r_1 = x_1 + \frac{18 - {x_1}^2}{2x_1} = \frac{18 + {x_1}^2}{2x_1} = 4{,}242647059$$

Ausgehend von $x_2$ können wir die vierte Näherung $x_3$ bestimmen:

$$x_3 = \frac{18 + {x_2}^2}{2x_2} = 4{,}242640687$$

Allgemein kann nun aus der $n$-ten Näherung die $(n+1)$-te Näherung berechnet werden:

$$x_{n+1} = \frac{18 + {x_n}^2}{2x_n}$$




Die Methode ist sehr effektiv. Bereits nach wenigen Schritten erhält man einen stabilen Wert für ${x_n}^2 = 18$.

Möchte man aus einer beliebigen positiven Zahl $a$ die Quadratwurzel ziehen, kann dies analog zu obigem Beispiel durchgeführt werden:

$$x_{n+1} = \frac{a + {x_n}^2}{2x_n}$$

Abschließend soll noch untersucht werden, ob diese Methode immer funktioniert und ob die soeben erhaltene Folge $x_n$ der Zahl $\sqrt{a}$ mit wachsendem $n$ auch wirklich beliebig nahe kommt [Danckwerts & Vogel, 2005, S. 189].

Dazu betrachten wir den Fehler $r_n = \sqrt{a} - x_n$. Es gilt somit:

$$r_{n+1} = \sqrt{a} - x_{n+1} = \sqrt{a} - \frac{a + {x_n}^2}{2x_n} = -\frac{{x_n}^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = -\frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}$$

$$\Longrightarrow r_{n+1} = -\frac{{r_n}^2}{2x_n}$$

Laut Voraussetzung wählten wir den Startwert positiv, wodurch alle Näherungen $x_n$ niemals negative Werte annehmen können. Daher können wir folgern, dass „alle“[4] Fehler $r_n$ negativ sind und sämtliche Näherungen oberhalb von $\sqrt{a}$ liegen müssen.

[4] Mit Ausnahme von $r_0$, der je nach Startwert auch positiv sein kann.

Jetzt können wir zeigen, dass bei jedem Schritt die Beträge der Fehler mindestens halbiert werden.

$$r_{n+1} = -\frac{r_n}{2x_n} \cdot r_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n} \cdot r_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right) \cdot r_n$$

Oder:

$$|r_{n+1}| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right| \cdot |r_n|$$

Für $n > 0$ ist $x_n > \sqrt{a}$, wodurch $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right| < \frac{1}{2}$ gilt.

$$\Longrightarrow \ |r_{n+1}| < \frac{1}{2}|r_n| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|r_{n-1}| < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}|r_2| < \frac{1}{2^n}|r_1|$$

Schließlich erhalten wir:

$$|r_{n+1}| = |a - x_{n+1}| < \frac{1}{2^n} \cdot |r_1|$$

Dies bedeutet aber, dass $\frac{1}{2^n}$ mit wachsendem $n$ beliebig klein wird. Somit muss auch $|a - x_{n+1}|$ beliebig klein werden.

Das heißt, wir können die Näherung für $x_n$ beliebig genau wählen. Zu jeder Genauigkeit finden wir eine Nummer $n_0$, sodass für alle $n \geq n_0$ die gewünschte Genauigkeit erfüllt ist.

In diesem Sinne konvergiert die Folge $x_n$ gegen die Zahl $\sqrt{a}$, (d. h. ab diesem $n_0$) $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

### 1.4.3. Beispiel: Ist $0,\overline{9} \stackrel{?}{=} 1$

Genauso gut kann die Frage, ob $0,\overline{9} \stackrel{?}{=} 1$, herangezogen werden, um den Grenzwertbegriff in der Schule zu thematisieren [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 27]. Egal, wie viele Neunen man dazugibt, SchülerInnen könnten vermuten,

dass doch immer noch etwas fehlt, wenn auch nur ein bisschen, sodass unmöglich obiger „Gleichung“ zugestimmt werden kann. Hier kommt die Zweideutigkeit des Grenzwertes zu tragen. Einerseits gibt es einen Prozess, der dadurch bestimmt ist, immer eine weitere Neun anzuhängen $(0{,}999\ldots)$. Andererseits entsteht ein Produkt, nämlich jene Zahl, an die man durch eben diesen Prozess unbegrenzt nahe kommt und das ist die Zahl 1. In diesem Sinne kann behauptet werden: $0,\overline{9} = 1$. Es lässt sich auch über die geometrische Reihe zeigen, dass $0,\overline{9} = 1$ gilt. Die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe lautet:

$$a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q} \quad (-1 < q < 1)$$

Somit gilt:

$$0,\overline{9} = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots = 0{,}9 + 09 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}1^2 + \cdots =$$

$$= \frac{0{,}9}{1-0{,}1} = \frac{0{,}9}{0{,}9} = 1$$

Anhand dieser drei Beispiele kann der Begriff des Grenzwertes heuristisch erarbeitet werden.

Die wichtige Eigenschaft der Komplementarität von Produkt- und Prozessorientierung kann einerseits anhand der Beschreibung iterativer Prozesse durch diskrete Modellierung oder andererseits anhand der Frage $0,\overline{9} \stackrel{?}{=}$ erarbeitet werden.

Auch wenn ein intuitiver Zugang für das Grundverständnis durchaus ausreichend ist, sollte eine Präzisierung im Nachhinein, das heißt, erst nachdem die Ableitungsregeln usw. behandelt wurden, als eigenes Exaktifizierungskapitel im Unterricht behandelt werden.

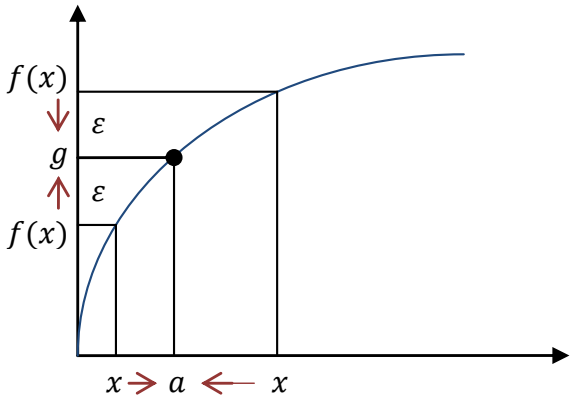
> „Der Grenzwertbegriff (insbesondere Cauchy, ca. 1820) und seine Auswirkungen waren der Knackpunkt in der Exaktifizierung der Analysis, der lange auf sich warten ließ, um den die mathematische Community Jahrhunderte ‚gekämpft‘ hatte; deswegen sollte eine Präzisierung im Mathematikunterricht nicht fehlen!“ [Humenberger, 2009, S. 1]

Schon bei der einfachen Betragsfunktion $f: x \mapsto |x|$ an der Stelle $a = 0$ stoßen wir bei der Betrachtung des Differenzenquotienten mit unserer verbalen Definition des Grenzwertes auf Schwierigkeiten.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} \begin{cases} -1 \text{ für } x < 0 \\ 1 \quad \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Dieser Differenzenquotient nähert sich einmal unbegrenzt dem Wert 1 beziehungsweise dem Wert -1. Bis jetzt war folgende Definition ausreichend: „Mit $g := \lim_{t \to a} s(t)$ ist jener Wert gemeint, dem sich die Funktionswerte $s(t)$ unbegrenzt nähern, wenn sich $t$ dem Wert $a$ unbegrenzt nähert“. Spätestens jetzt ist es aber notwendig, eine genaue Definition des Grenzwertes zu formulieren. Um die Bedeutung „sich unbegrenzt nähern“ besser zu verstehen, ist es sinnvoll, den Grenzwert vorerst noch mit nur einem Parameter $\varepsilon$ (d. h. ohne $\delta$) zu verbalisieren.

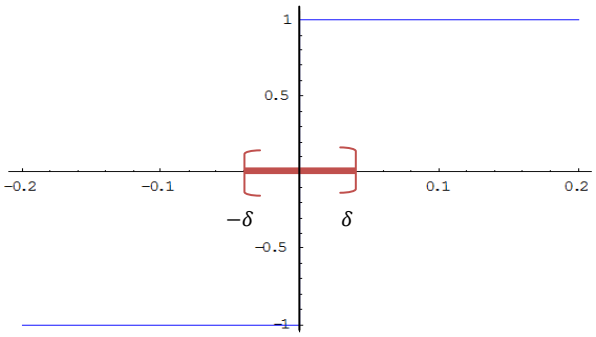
> „Für jede noch so kleine ‚Zulässigkeitsschranke‘ $\varepsilon > 0$ um $g$ (Output, Fkt.wert) kann man $x$ so nahe an $a$ wählen (Input, Argument, ‚Genauigkeitsschranke‘, d.h. $|x - a|$ so klein), dass die Zulässigkeitsschranke erfüllt wird: $|f(x) - g| < \varepsilon$.“ [Humenberger, 2009, S. 2]




Danach kann die Definition des Grenzwertes mit zwei Parametern ($\varepsilon$ und $\delta$) folgen.

**Definition:** Der Wert $g$ heißt Grenzwert einer Funktion $f$ für $x \longrightarrow a$ (symbolisch: $\lim_{x \to a} f(x) = g$), wenn gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit: $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon$ .

Für das obige Beispiel der Betragsfunktion wird jetzt deutlich, dass $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ nicht existiert. Unabhängig davon, wie klein $\delta > 0$ gewählt wird, werden die Funktionswerte keiner festen Zahl $g$ beliebig nahe kommen.




Im Intervall $(-\delta, \delta)$ unterscheiden sich die Funktionswerte immer um zwei, egal wie klein $\delta > 0$ gewählt wird.

# 2. Überblick über die Differentialrechnung

In diesem Kapitel möchte ich kurz die wichtigsten Punkte der Differentialrechnung und die dazugehörigen Grundvorstellungen zusammenfassen. Der Ableitungsbegriff lässt sich einerseits über das Tangentenproblem, andererseits über das Beispiel der Momentan-geschwindigkeit einführen. Für den/die SchülerIn scheint der Zugang über die Momentangeschwindigkeit aus mehreren Gründen besser geeignet zu sein als über das Tangentenproblem. Zuerst möchte ich die Schwierigkeiten erläutern, die beim Tangentenproblem auftreten, und anschließend den Ableitungsbegriff über die Momentangeschwindigkeit als Alternative einführen.

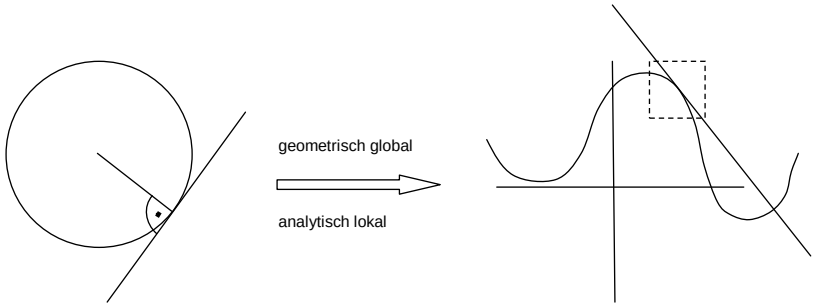
## 2.1. Tangentenproblem bei der Differentialrechnung

Wählt man den klassischen Zugang, den Ableitungsbegriff über das Tangentenproblem einzuführen, sollten die einzelnen Schritte und deren Schwierigkeiten genauer untersucht werden. Zuerst wird man die Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente definieren. Als nächstes betrachtet man die Tangente als Grenzlage von Sekanten und im letzten Schritt berechnet man die Tangentensteigung als Grenzwert [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 45].

### 2.1.1. Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente

Das Hauptproblem besteht darin, SchülerInnen den Begriff der Tangente nahezubringen oder diese entscheidende Frage zumindest nicht in den Hintergrund zu drängen [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 46]. Die Tangente wird üblicherweise als eine Gerade, die sich lokal der Kurve um den Berührungspunkt anschmiegt, verstanden. Die Definition beschreibt die

Tangente also als bestapproximierende Gerade an einem Punkt der Kurve. Die Grundvorstellungen der SchülerInnen sind vom Kreis geprägt, die hier die Tangente als eine Gerade sehen, die den Kreis an genau einem Punkt berührt, diesen aber nicht durchdringt. Diese Grundvorstellung muss hier vom geometrisch globalen Charakter auf den analytisch lokalen Charakter erweitert werden:




Dies bedeutet, dass die Tangente die Funktion, im Gegensatz zum Kreis, nicht nur lokal an einem Punkt berührt, sondern unter Umständen die Funktion an einem Punkt oder mehreren anderen Punkten schneidet.

### 2.1.2. Die Tangente als Grenzlage von Sekanten

In diesem Arbeitsschritt, wird die Tangente in einem Punkt durch benachbarte Sekanten angenähert. Für SchülerInnen ist es möglicherweise sehr schwer, diesen Schritt selbst zu erarbeiten. Die Idee muss vom Lehrer/der Lehrerin vorgegeben werden. Sie fällt sprichwörtlich „vom Himmel“ und hat zunächst nichts mit der ursprünglichen Definition der Tangente (als bestapproximierende Gerade) zu tun [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 47].

### 2.1.3. Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert

Im letzten Schritt wird man voraussichtlich am Beispiel der Normalparabel argumentieren. In der Regel wird die Tangentensteigung mit Hilfe eines intuitiven Grenzwertbegriffs durch Annäherung benachbarter Sekanten am

Beispiel der Normalparabel berechnet. Es ergibt sich das Problem, dass für die Berechnung von Sekanten zwei Punkte notwendig sind, also $x \neq x_0$ vorausgesetzt wird und schließlich scheinbar doch $x = x_0$ gesetzt wird [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 48]. Hier liegt die Schwierigkeit im Begriff des Grenzwertes selbst, unter dem die SchülerInnen eher den Prozess als das Endprodukt dieses Prozesses verstehen.

### 2.1.4. Fazit

Nach all den Schwierigkeiten, die das Tangentenproblem mit sich bringt, bleibt die Frage offen, wieso wir uns überhaupt für den lokalen Anstieg interessieren. Genauer: Was ist die Motivation, um sich für eine lokale Änderungsrate zu interessieren? Es stellt sich die Frage nach dem Realitätsbezug, der aus dem Tangentenproblem so nicht ersichtlich ist.

Hier bietet es sich an, an die Erfahrungswelt von SchülerInnen anzuknüpfen und den Ableitungsbegriff als lokale Änderungsrate heuristisch zu erarbeiten. Ein dafür gut geeignetes Beispiel ist die Momentangeschwindigkeit.

## 2.2. Momentangeschwindigkeit im Zusammenhang mit der Differentialrechnung

Ausgehend von einem einfachen Beispiel (ein Auto legt in einer gewissen Zeit eine bestimmte Strecke zurück) wird Schritt für Schritt der Ableitungsbegriff hergeleitet. Durchaus realistisch ist die Vorstellung, dass der Weg-Zeit-Zusammenhang des Anfahrvorganges annähernd quadratisch ist, d. h. eine gleichmäßige Beschleunigung stattfindet. Es kann also angenommen werden, dass für den bis zum Zeitpunkt $t$ zurückgelegten Weg $s(t)$ folgende Zeit-Weg-Funktion gilt:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2$$

Verwenden wir den einfachsten Fall, d. h. wir wählen für die Beschleunigung $a = 2\ m/s^2$, erhalten wir für den zurückgelegten Weg die Form:

$$s(t) = t^2$$

Nun kommt man sehr schnell zu der Erkenntnis, dass sich der zurückgelegte Weg in einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$ über die Differenz $s(t_1) - s(t_0)$ berechnen lässt. Jetzt ist es nicht mehr weit zu der Annahme, dass sich die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[t_0, t_1]$ wie folgt berechnet:

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \quad \left(= \frac{\text{Länge des zurückgelegten Weges}}{\text{benötigte Zeit}}\right)$$

Dieser Quotient gibt nun die mittlere Geschwindigkeit oder auch die Durchschnittsgeschwindigkeit an. Diese entspricht der mittleren Änderungsrate (dem Differenzenquotienten) des Weges bezüglich der Zeit in diesem Intervall. Dieses Beispiel könnte ebenso gut mit der Beschleunigung, welche dann durch die relative Änderung der Geschwindigkeit in einem Zeitintervall beschrieben wird, durchgeführt werden [Büchter & Henn, 2010, S. 83]. Entscheidend für unser Beispiel ist der Begriff der mittleren Änderungsrate. Allgemein könnte man den Begriff so formulieren:

> „Allgemein geht es um die (absolute) Veränderung $\Delta y$ einer (abhängigen) Größe $y = f(x)$ im Verhältnis zur zugrunde liegenden Änderung (der unabhängigen Größe) $\Delta x$ von $x$, also $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Dieses Verhältnis nennt man die mittlere Änderungsrate der Größe $y$ $[= f(x)]$ im Intervall $[x_1;\ x_2]$." [Büchter & Henn, 2010, S. 83]

Typische, aus dem Alltag bekannte Beispiele zu mittleren Änderungsraten sind Preissteigerungs- oder Lohnzuwachsraten, Inflationsrate, Verkehrsdichte, Stromstärke, Temperaturgefälle, Druckgefälle, Steigung und so weiter [Tietze, Klika, & Wolpers, 1997, S. 191].

Im letzten Schritt interessieren wir uns jedoch nicht für die Durchschnitts- sondern für die Momentangeschwindigkeit, die wir aber über die mittlere Geschwindigkeit annähern können. Infolge dieser genialen Idee nähern wir uns einem vorgegebenen Zeitpunkt, sagen wir drei Sekunden, in einem Intervall, einmal von links und einmal von rechts, der Zahl 3. Dabei ist klar, dass die lokale Geschwindigkeitsaussage umso besser präzisiert werden kann, je kleiner das Zeitintervall wird.

| **Zeitintervall [3;$t$]** | **Mittlere Geschw. $\bar{v}$(3; $t$)** | **Zeitintervall [$t$;3]** | **Mittlere Geschw. $\bar{v}$($t$; 3)** |
|---|---|---|---|
| [3; 4] | 7 | [2; 3] | 5 |
| [3; 3,5] | 6,5 | [2,5; 3] | 5,5 |
| [3; 3,1] | 6,1 | [2,9; 3] | 5,9 |
| [3; 3,01] | 6,01 | [2,99; 3] | 5,99 |
| [3; 3,001] | 6,001 | [2,999; 3] | 5,999 |

In beiden Fällen nähert sich die mittlere Geschwindigkeit dem Wert 6, den wir für die gesuchte Momentangeschwindigkeit nach drei Sekunden halten. Ganz allgemein können wir auch folgenden Term betrachten, den wir durch Umformung erhalten:

$$\bar{v}(3,t) = \frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \frac{t^2 - 3^2}{t - 3} = \frac{(t-3)(t+3)}{t-3} = t + 3$$

Jetzt ist klar, nähert sich $t$ unbegrenzt der Zahl 3, so nähert sich der Wert $t$+3 unbegrenzt der Zahl 6. Dieser Wert wird „Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3“ genannt. Dieser Zusammenhang kann wie folgt gedeutet werden [Büchter & Henn, 2010, S. 84]:

- als der Übergang von der mittleren zur lokalen Geschwindigkeit,
- allgemein als der Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate,

- geometrisch als der Übergang von der Steigung der Sekante zur Steigung der Tangente.

Mit dem Grenzübergang kann der Differenzialquotient definiert werden.

**Definition**: Der Differenzialquotient, kurz $f'(x_0)$, ist der Grenzwert eines Differenzenquotienten in einem gegebenen Intervall. Symbolisch:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Man sagt auch: $f$ heißt in $x_0$ differenzierbar, wenn der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert. Er wird als „Ableitung von $f$ an der Stelle $x_0$" bezeichnet.

## 2.3. Vergleich des Tangentenproblems mit der Momentangeschwindigkeit im Rahmen der Differentialrechnung

Danckwerts/Vogel (2006) weisen darauf hin, dass manche Schwierigkeiten des Ableitungsbegriffes beim Zugang über die Momentangeschwindigkeit nicht auftreten. SchülerInnen sind mit dem Begriff der Geschwindigkeit vertraut, während der Begriff der Tangente erst erweitert werden muss. Es findet ein nicht unbedingt trivialer Paradigmenwechsel vom geometrisch globalen zum analytisch lokalen Charakter der Tangente statt.

Ein wesentlicher Aspekt ist, dass die Idee des Annäherns durch Differenzenquotienten eben nicht „vom Himmel fällt", sondern aus dem Kontext, dass Geschwindigkeiten in Zeitintervallen gemessen werden, hervorgeht. Die Momentangeschwindigkeit als Annäherung der Durchschnittsgeschwindigkeit in einem Zeitintervall kann auch von SchülerInnen erkannt werden, während die

Annäherung über die Sekantensteigung von der Lehrperson vorgegeben werden muss.

Die Schwierigkeiten, die beim Grenzwertbegriff entstehen (Prozess – Produkt), bleiben bei beiden Zugängen bestehen, doch werden SchülerInnen nicht daran zweifeln, dass der gefundene Wert tatsächlich die Momentangeschwindigkeit beschreibt [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 56].

Meiner Meinung nach liegt der größte Vorteil, den Ableitungsbegriff nicht über das Tangentenproblem sondern über die Momentangeschwindigkeit einzuführen, darin, dass die Vorstellung einer Ableitung nicht nur geometrisch geprägt ist, sondern aus dem Sachkontext hervorgeht und somit auf viele weitere reale Bezüge wie Physik, Sport und Wirtschaft angewandt werden kann.

Als wichtiges Lernziel weisen Blum/Kirsch (1996) darauf hin, dass SchülerInnen den Ableitungsbegriff $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ (als lokale Änderungsrate) anhand der Größen $x$ und $f(x)$ in verschiedenen Kontexten interpretieren können [Blum & Kirsch, 1996, S. 60]:

- Wenn $f(x)$ die Ordinate des Punktes auf einem Graphen mit Abszisse $x$ bedeutet, dann ist $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ die Steigung der Kurve in diesem Punkt.
- Wenn $f(x)$ den vom Start bis zum Zeitpunkt $x$ zurückgelegten Weg bedeutet, dann ist $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ die Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.
- Wenn $f(x)$ die Einkommensteuer beim zu versteuernden Einkommen $x$ bedeutet, dann ist $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ der Grenzsteuersatz [5] bei diesem Einkommen.

[5] Dieser bezeichnet den Steuersatz, mit dem die jeweils nächste Einheit der Steuerbemessung belastet wird [Wikipedia, 2010].

- Wenn $f(x)$ die vom Anfangspunkt bis zur Wegstelle $x$ verrichtete Arbeit bedeutet, dann ist $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ die an dieser Stelle wirkende Kraftkomponente.
- Wenn $f(x)$ das Volumen einer Kugel mit Radius $x$ bedeutet, dann ist $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ der Oberflächeninhalt dieser Kugel.
- Wenn $f(x)$ das Volumen eines Körpers bis zur Höhe $x$ bedeutet, dann ist $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ die Querschnitts-Fläche des Körpers an dieser Stelle.
- Wenn $f(x)$ den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der $x$-Achse bis zur Stelle $x$ wiedergibt, dann ist $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ die Ordinate des Kurvenpunktes mit der Abszisse $x$.
- Wenn $f(x)$ das Integral $\int_a^x g(u)\,\mathrm{d}u$ einer Funktion $g$ im Intervall $[a;x]$ bedeutet, dann ist $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ der Funktionswert $g(x)$.

# 3. Integralrechnung

Zunächst möchte ich mich mit der heute im Schulunterricht üblichen Reihenfolge, Differential- vor Integralrechnung, befassen. Danach soll über die Sinnhaftigkeit mancher Schulbeispiele im Unterricht diskutiert werden. Der Hauptteil dieses Kapitels wird sich dem Thema Grundvorstellungen der Integralrechnung widmen. Im Anschluss daran möchte ich den Integralbegriff präzisieren und abschließend den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung samt Plausibilitätsbeweis darstellen.

## 3.1. Reihenfolge Differential-, Integralrechnung

Im Schulunterricht hat sich im Laufe der letzten Jahrzehnte die heute übliche Reihenfolge, zuerst Differential- dann Integralrechnung zu lehren, durchgesetzt. Aus der historischen Entwicklung der Analysis im 3. Jahrhundert v. Chr. ist jedoch bekannt, dass zuerst die klassische Fragestellung der Flächen- und Volumenberechnung im Vordergrund stand. Wieso ist es zu diesem Wechsel gekommen? Einige Punkte sprechen dafür, die Integralrechnung vorzuziehen [Blum & Törner, 1983, S. 156]. Dabei unterscheidet man die fachspezifischen, den lernpsychologischen und den curricularen Aspekt.

### 3.1.1. Fachspezifischer Aspekt

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt als Kernpunkt der Infinitesimalrechnung. Seine Aussage über den Zusammenhang von Integration und Differentiation ist eine wichtige Verbindung der Analysis. Die Differentialrechnung lässt sich als Umkehrproblem zur Integralrechnung erarbeiten (aber eben auch umgekehrt, siehe unten) [Blum & Törner, 1983, S. 156].

### 3.1.2. Lernpsychologischer Aspekt

Hier stellt sich die Frage, ob Flächeninhalte für SchülerInnen nicht unmittelbar zugänglicher sind. Zu den auftretenden infinitesimalen Prozessen kommt beim Behandeln des Tangentenproblems die Begriffsentwicklung[6] selbst noch ins Spiel, welche für sich schon genug Schwierigkeiten beinhaltet [Blum & Törner, 1983, S. 157].

### 3.1.3. Curricularer Aspekt

In der Schule bietet sich die Integralrechnung als Weiterführung der Flächen- und Volumenberechnung des Geometrieunterrichtes in der Sekundarstufe 1 an.

Im Gegensatz dazu weisen Blum/Törner (1983) darauf hin, dass der Begriff des bestimmten Integrales bei einer präzisierenden Hinterfragung am Beginn des Analysisunterrichts für SchülerInnen zu schwierig sei, während Tangentenaufgaben leichter lösbar seien. Bezüglich des Hauptsatzes muss gesagt werden, dass umgekehrt genauso gut die Integralrechnung als Umkehrproblem zur Differentialrechnung erarbeitet werden kann und dieser Aspekt, so gesehen, keinen wirklichen Vorteil mit sich bringt.

> „Schließlich ist der Begriff Integral selbst komplizierter als der Begriff Ableitung. Vielleicht liegt hierin der Hauptgrund dafür, daß sich in der Schule die Reihenfolge Ableitung – Integral durchgesetzt hat.“ [Tietze, Klika, & Wolpers, 1997, S. 279]

[6] Was ist eine Tangente überhaupt? Bis zur siebten Schulstufe ist nur die Kreistangente bekannt.

## 3.2. Sinn und Unsinn der Integralrechnung im Schulunterricht

Typische Schulbeispiele, an die sich auch später noch die meisten Gymnasial-AbsolventInnen erinnern, sind meistens von der Form: „Berechne den Flächeninhalt, den der Graph einer gegebenen Funktion[7] mit der $x$-Achse[8] einschließt.“ Diese Aufgaben können SchülerInnen oft mit Standardmethoden wie partielles Integrieren, Substitution usw. erfolgreich lösen. Es scheint verlockend zu sein, „Rezepte“ zu unterrichten und verständnisorientierte Aufgaben, so gut es geht, zu vermeiden. So kann unangenehmen Fragen aus dem Weg gegangen werden, SchülerInnen können ohne Weiteres rechnen und ihre Algorithmen anwenden.

Weshalb solche typischen Schulaufgaben gerade in Ballungszentren vordergründig behandelt werden, könnte laut Tietz/Klika/Wolpers (1997) auf folgendes Problem zurückzuführen sein: In vielen städtischen Gebieten beträgt der Anteil der Gymnasialschüler an einem Schülerjahrgang mehr als 50 Prozent [Tietze, Klika, & Wolpers, 1997, S. 221]. Diese Veränderung der Schülerpopulation in Großstädten führt, in Kombination mit den hohen Anforderungen der Mathematik an allgemein bildenden höheren Schulen und dem Fehlen von Grundkonzepten, zu Spannungen zwischen den Anforderungen und den Möglichkeiten von LehrerInnen und SchülerInnen.

> „In der Schulpraxis haben diese Umstände zu einer schleichenden Sinnentleerung des Analysisunterrichts geführt, so daß unter anspruchsvollem Etikett zunehmend die Vermittlung enger Kalküle und Lösungsroutinen den Unterricht prägt.“ [Tietze, Klika, & Wolpers, 1997, S. 221]

Wie wichtig es ist, Sinn und Zusammenhänge im Analysisunterricht zu vermitteln, wird umso deutlicher, wenn keine Standardaufgaben gefragt sind, die mit Standardmethoden gelöst werden können. So stößt man zum Beispiel bei den Integranden $e^{-x^2}$ oder $\frac{\sin x}{x}$, die keine elementaren Stammfunktionen

[7] Typisch: $f(x) = \frac{4x^4+3x^2-9}{2x^3}, x \neq 0$

[8] bzw. der Geraden $g$ mit $y = 3x$

besitzen, auf ein Problem. Hier stellt sich die Frage, ob es nicht sinnvoller wäre, die zwar weniger elegante, dafür aber allgemeinere, numerische Integration als Standardmethode zu bevorzugen [Winkler, 2007, S. 8]. Computer-Algebra-Systeme (CAS) sind in vielerlei Hinsicht dem Menschen weitaus überlegen und liefern in nur Bruchteilen von Sekunden die Ergebnisse diverser Integrale. Daher wäre es vermutlich sinnvoll, im Schulunterricht mehr Aufmerksamkeit auf den Kern der Integralrechnung und deren Bedeutung zu richten. TechnikerInnen oder MathematikerInnen müssen im Berufsleben meist keine Standardaufgaben nach vorgefertigten Rezepten lösen. Wenn Lehrende also Mathematik erfolgreich vermitteln wollen, sollte es deren Aufgabe sein, einen verständnisorientierten Unterricht zu fördern und Standardaufgaben (wie oben beschrieben) dem CAS zu überlassen. Sinnvoll gestellte Aufgaben bieten genügend Platz, um sich mit dem Wesen der Mathematik auseinanderzusetzen und rücken die von SchülerInnen oft gestellte Frage, warum sie bestimmte Aufgaben rechnen sollen, in den Hintergrund.

## 3.3. Grundvorstellungen der Integralrechnung

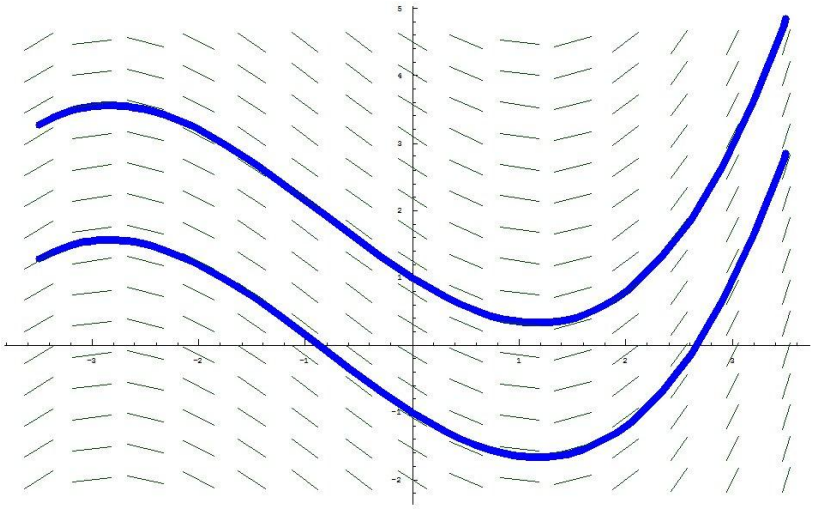
In diesem Kapitel möchte ich auf die verschiedenen Grundvorstellungen der Integralrechnung eingehen. Neben den klassischen Zugängen, die auf Newton und Leibniz zurückführen, gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten den Integralbegriff in der Schule einzuführen. Vor allem CAS und dynamische Mathematik-Software sind dabei hilfreiche Instrumente, die das Grundverständnis fördern.

### 3.3.1. Das Umkehrproblem der Integralrechnung

Das „Umkehrproblem“ geht auf Newton zurück, welcher sich im Jahr 1687 einer genaueren Analyse der Geschwindigkeit als Ableitung widmete. Das heißt, zu

einer gegebenen Funktion $f$ suchte er eine Funktion $g$ mit $g' = f$ (eine Stammfunktion von $f$) [Blum & Törner, 1983, S. 158]. Durch die Betrachtung des Richtungsfeldes lässt sich die Tatsache veranschaulichen, dass sich je zwei Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante unterscheiden. Das Richtungsfeld lässt sich leicht konstruieren, indem jedem Punkt $(x, y)$ ein Pfeil mit der Steigung $y' = f(x)$ zugeordnet wird. Somit ist die Steigung des Graphen in jedem Punkt $(x, y(x))$ vorgegeben und das Richtungsfeld kann skizziert werden.

Als Beispiel wird hier das Richtungsfeld der Funktion $f(x) = 0{,}3x^2 + 0{,}5x - 1$ mit Mathematica erstellt[9]. Jede Stammfunktion erscheint nun als Pfad und man erkennt sofort den oben beschriebenen Zusammenhang:



Hier wird außerdem deutlich, dass die Differenz $F(b) - F(a)$ nicht von der gewählten Stammfunktion $F$ abhängig ist.

Bei einfachen Funktionsgleichungen lässt sich die Frage, ob es zu einer gegebenen Funktion $f$ eine Funktion $F$ gibt, deren Ableitung $F'$ gleich $f$ ist, leicht beantworten.

Zur Funktion $f(x) = 2x$ gibt es offensichtlich die Funktion $F(x) = x^2$ mit der gewünschten Eigenschaft, wie durch Differenzieren leicht überprüft werden kann $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$.

[9] Befehl: plotRichtungsFeld[0.3x^2+0.5x-1,{x,-3.5,3.5},{y,-2,4.5},15]

Eine Stammfunktion $F$ zu finden ist aber nicht immer so leicht, wie in obigem Beispiel. Bei Funktionen wie $f(x) = x \cdot \ln x$ oder $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ wird das Finden einer Stammfunktion schon schwieriger, während für andere Funktionen wie zum Beispiel $f(x) = \frac{e^x}{x}$ oder $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ keine Stammfunktion in der üblichen analytischen oder geschlossenen Form existiert [Malle H. , 1996, S. 234].

### 3.3.2. Integration als verallgemeinerter Summationsprozess

Diese Grundidee stammt von Leibniz, der im Jahr 1648 das Hauptaugenmerk der Integration als inverse Operation zur Differenzenbildung thematisierte [Blum & Törner, 1983, S. 158]. Die Idee, Summen von kleinen Produkten zu bilden, ist in vielerlei Hinsicht von großer Bedeutung. So gibt es eine Vielzahl von Aufgaben, die diesen Prozess veranschaulichen:

- Kraft mal Weglänge liefert Arbeit.
- Geschwindigkeit mal Zeit liefert den zurückgelegten Weg.
- Beschleunigung mal Zeit liefert die Geschwindigkeit.
- Höhe mal Streifenlänge liefert den Flächeninhalt.
- Querschnittsflächeninhalte mal Scheibendicke liefert das Volumen.

So ergibt sich hier das Grundverständnis, dass das bestimmte Integral $\int_a^b f$ einer Funktion $f$ in einem Intervall $[a; b]$ eine Zahl ist, die sich aus dem Grenzprozess der verallgemeinerten Summation[10] ergibt. Sie gibt eine Art „verallgemeinertes Produkt“ von Funktionswerten von $f$ mit Argumentendifferenzen in $[a; b]$ an [Blum & Törner, 1983, S. 160].

[10] Auf Grund dieser Überlegung, führte Leibniz das Symbol: $\int$ („S“) als Integrationszeichen ein.

**Beispiel Arbeit**

Wie wir nun bereits wissen, liefert Kraft mal Weglänge die Arbeit: $W = F \cdot s$. Für kleine Wege $\Delta s$ gilt $\Delta W = F \cdot \Delta s$ . Insgesamt können wir also für alle $n$ Wegelemente schreiben:

$$W(s_0, s) = \sum \Delta \mathrm{W} = \sum F(s) \cdot \Delta s$$

Mit dem Grenzwertprozess $n \to \infty$ wird $W(s_0, s)$ zu:

$$W(s_0, s) = \int_{s_s}^{s} F(s) \cdot \mathrm{d}s$$

Hier weisen Blum/Kirsch (1996) auf die Wichtigkeit dieser Grundvorstellung (Integral als verallgemeinertes Produkt) hin und empfehlen diese an verschiedenen Beispielen zu festigen. Hierbei sollen SchülerInnen zu gegebener Bedeutung von $x$ und $f(x)$ als Größen in verschiedenen Zusammenhängen die des Integrals $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ interpretieren können [Blum & Kirsch, 1996, S. 62]:

Der Bedeutung für $f(x)$ im Intervall $x \in [a; b]$ ist die Grundvorstellung des Integrals $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ gegenüberzustellen:

- Wenn $f(x)$ die Ordinate des Punktes auf einer geeigneten Kurve mit der Abszisse $x$ bedeutet, dann ist das zugehörige Integral der orientierte Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der $x$-Achse zwischen $a$ und $b$.
- Wenn $f(x)$ die Geschwindigkeit im Zeitpunkt $x$ bedeutet, dann bedeutet das Integral den zwischen den Zeitpunkten $a$ und $b$ zurückgelegten Weg.
- Wenn $f(x)$ als Grenzsteuersatz beim Einkommen $x$ interpretiert wird, dann gibt das Integral die Einkommensteuer beim zu versteuernden Einkommen $b$ wieder[11].

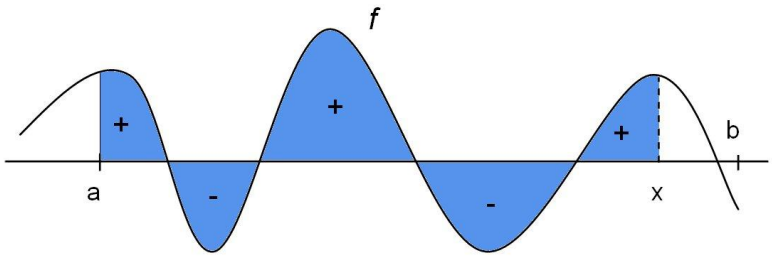
[11] Sofern $a$ = Existenzminimum.

- Wenn $f(x)$ die an der Wegstelle $x$ wirkende Kraftkomponente ist, dann bedeutet das Integral die zwischen den Wegpunkten $a$ und $b$ verrichtete Arbeit.
- Wenn $f(x)$ als Oberflächeninhalt der Kugel mit Radius $x$ gedeutet wird, dann bedeutet das Integral das Volumen der Kugelschale vom inneren Radius $a$ bis zum äußeren Radius $b$.
- Generell gilt: Ist $f(x)$ die Querschnittfläche eines Körpers in der Höhe $x$, dann ist das Integral das Volumen des Körpers zwischen den Höhen $a$ und $b$.
- Wird $f(x)$ als Steigung einer Kurve im Punkt mit Abszisse $x$ interpretiert, dann ist das Integral der Ordinatenzuwachs der Kurve zwischen den Stellen $a$ und $b$.
- Ist $f(x)$ die Ableitung $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$ einer Funktion $F$ an der Stelle $x$, dann gibt das Integral die Differenz $F(b) - F(a)$ der Funktionswerte $F(a)$ und $F(b)$ wieder.

### 3.3.3. Geometrische Grundvorstellung der Integralrechnung

Bei der geometrischen Grundvorstellung wird das Integral als orientierter Flächeninhalt verstanden. Dazu betrachten wir eine in einem Intervall $I = [a, b]$ stetige Funktion $f$ und berechnen den Inhalt der Fläche zwischen $a$ und $x \leq b$ zwischen dem Funktionsgraphen und der $x$-Achse. Der Flächeninhalt wird verwendet, um die „Integralfunktion“ zu definieren.

**Definition:** Zu einer Berandung $f: [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gehört die Integralfunktion $I_a$, die jedem $x \in [a; b]$ den orientierten Inhalt der Fläche zuordnet, die $f$ mit der $x$-Achse zwischen $a$ und $x$ einschließt [Humenberger, 2009, S. 11].

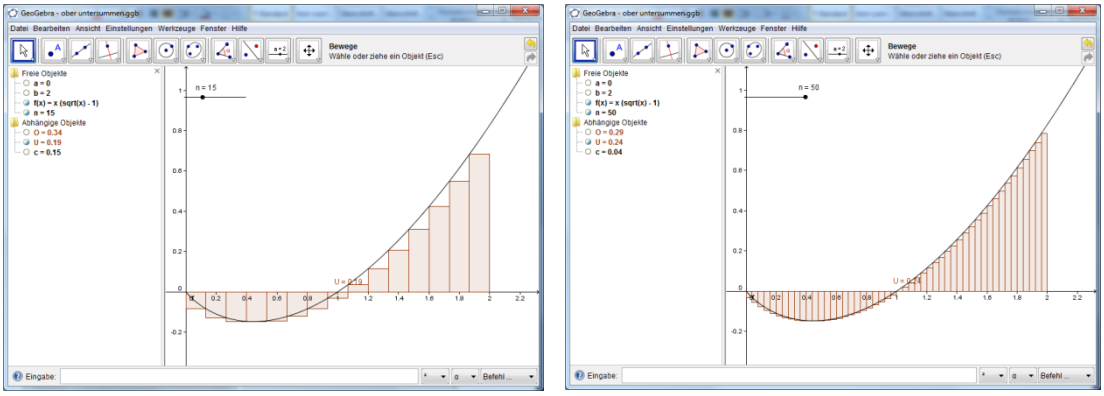



$I_a(x) :=$ (Summe der Inhalte aller oberhalb der $x$ -Achse gelegenen Flächenstücke zwischen $a$ und $x$) – (Summe der Inhalte aller unterhalb der $x$-Achse gelegenen Flächenstücke zwischen $a$ und $x$)

Die Funktionswerte der Integralfunktion heißen „Integrale“ [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 103].

Bei der Berechnung der Flächenstücke können wir, ähnlich wie beim Kreis, dessen Flächeninhalt sich durch ein- und umbeschriebene regelmäßige $n$-Ecke berechnen lässt, vorgehen.

Anhand immer schmäler werdender Rechtecke wird der Flächeninhalt approximiert. Beim Grenzprozess werden diese schließlich beliebig schmal [Blum & Törner, 1983, S. 160]. Anhand dynamischer-Mathematik-Software, wie zum Beispiel GeoGebra [12], lässt sich dieser Zusammenhang anschaulich darstellen.



Gerade diese Möglichkeit, den Flächeninhalt (zwischen dem Graphen einer Funktion und der $x$-Achse) dynamisch zu visualisieren, macht den Gebrauch

[12] Freeware: z. B. auf http://www.GeoGebra.org/cms/

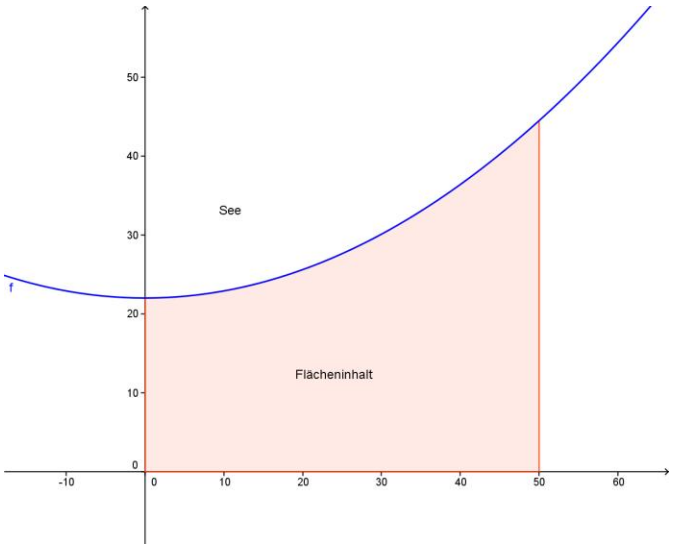
des Computers im Mathematikunterricht besonders attraktiv. Hier bietet sich für SchülerInnen eine Vielzahl von Möglichkeiten zu experimentieren und sich mit der Grundvorstellung des Integrals als orientierter Flächeninhalt vertraut zu machen.

Allgemein gilt (siehe später Hauptsatz):

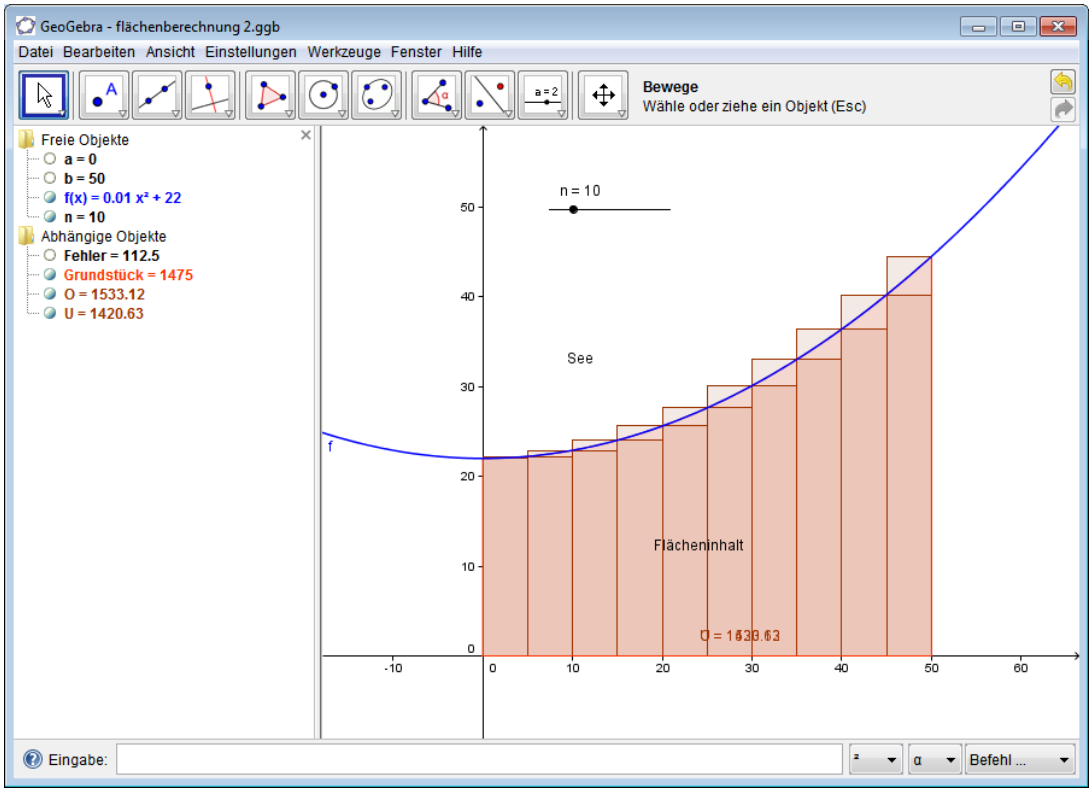
Die zu einer auf dem Intervall $[a;b]$ stetigen Funktion $f$ gehörigen Integralfunktion $I_a$ ist eine Stammfunktion von $f$: ${I_a}' = f$.

**Beispiel: Berechnung von Flächeninhalten mit GeoGebra [Schmidtpott, 2010]**

Ein Grundstück, das an einen See grenzt, soll um 10 €/m² verkauft werden. Wie viel wird der Eigentümer für seinen Grund voraussichtlich bekommen?




Dazu wird der Flächeninhalt näherungsweise mit GeoGebra berechnet. Anhand einer vorgegebenen Datei können SchülerInnen experimentieren. Die Variable $U$ steht hierbei für die Summe der Rechtecksflächen unter der Funktion und $O$ für die Summe der Rechtecksflächen oberhalb. Mit $n$ beziehungsweise dem Schieberegler lassen sich die Anzahl der Rechtecke variieren.




Des Weiteren können sich SchülerInnen über die Differenz und deren Bedeutung von Ober- und Untersummen Gedanken machen. Ab wann wird die Differenz zwischen Ober- und Untersumme kleiner als 1000, 500, 100, 50 beziehungsweise 25?

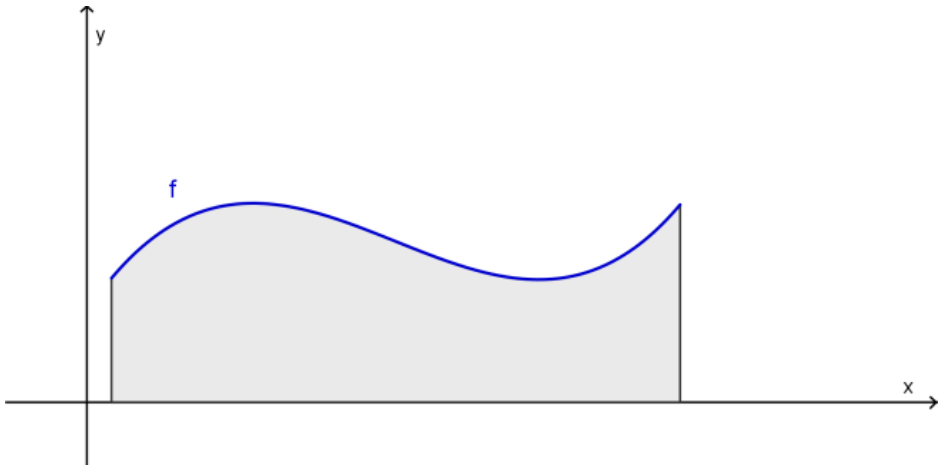
Solche und viele weitere Aufgaben findet man auch auf der Internetseite von GeoGebra[13].

### 3.3.4. Integration als Mittelwertbildung

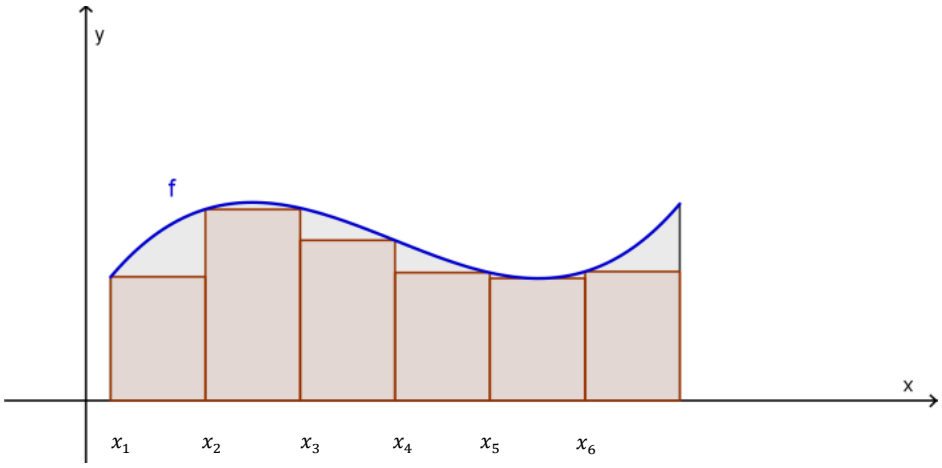
Ein mögliches Einführungsbeispiel, um das Integral anhand der Mittelwertbildung einzuführen, könnte in etwa so aussehen [Büchter & Henn, 2010, S. 245]:

[13] http://www.geogebra.org/de/wiki/index.php/Integralrechnung

Aus Wetterstatistiken können die mittleren Temperaturen bestimmter Städte entnommen werden. Wenn wir davon ausgehen, dass Wetterstationen alle zehn Minuten (beziehungsweise jede Minute oder jede Sekunde) die Temperatur messen, erhalten wir zum Beispiel, nachdem man die Punkte zu einer glatten Kurve verbunden hat, folgende Temperaturkurve:



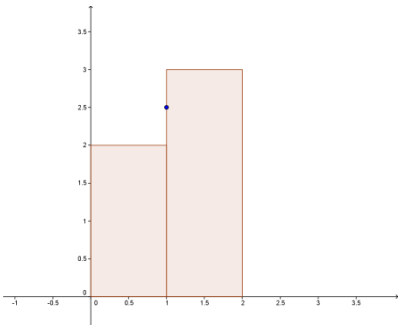

Um die Durchschnittstemperatur in einem Zeitintervall bestimmen zu können, nehmen wir aus den Daten $n$ Funktionswerte und berechnen das arithmetische Mittel und kommen so auf „Mittelwerte einer Funktion in einem Intervall“




Hier für $n = 6$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Hierbei muss jedoch für den arithmetischen Mittelwert nicht unbedingt gelten, dass dieser auch als „mittlerer Funktionswert“ angenommen wird. Im Fall diskreter Einzelwerte kann zum Beispiel durchaus $\bar{y} \neq f(x_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ gelten.



$$f(x) = \begin{cases} 2 & f\ddot{u}r\ 0 < x < 1 \\ 3 & f\ddot{u}r\ 1 < x < 2 \\ 0 & f\ddot{u}r\ x < 0\ \wedge\ x > 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \bar{y} = 2{,}5 \neq f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Nicht einmal im kontinuierlichen Fall muss dies im Allgemeinen gelten. Erst mit der Eigenschaft, dass $f$ stetig ist, wird der Mittelwert als Funktionswert auch wirklich angenommen.

Somit erhalten wir den Integralwert, der aus der Mittelwertbildung direkt hervorgeht. Für die Summe der Rechteckflächen können wir schreiben:

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = (b-a) \cdot \bar{y}$$

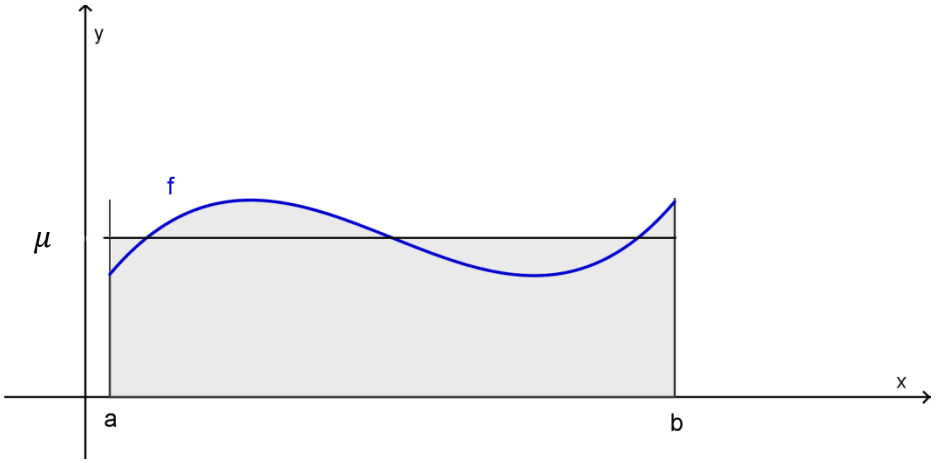
Für $n \to \infty$ wird die linke Seite zum Flächeninhalt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

Nach diesem Schritt kann ein vernünftiger, kontinuierlicher Durchschnittswert von $f$ in $[a, b]$ definiert werden. Wir erhalten diesen aus der Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels.

$$\mu := \frac{1}{b-a} \cdot \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

Geometrisch gedeutet kann gesagt werden, dass der Mittelwert $\mu$ derjenige Wert ist, der als konstante Funktion über dem Intervall $[a, b]$ denselben Flächeninhalt unter dem Graphen hat wie $f$ [Büchter & Henn, 2010, S. 246].




Dies ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung:

**Satz:**
Ist $f$ eine im Intervall $[a; b]$ stetige Funktion, dann gibt es ein $\xi \in [a; b]$ mit:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Begründung**

Für die Begründung verwenden wir den Zwischenwertsatz, der besagt, dass eine stetige Funktion $f$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.

$$m := \min_{x\in[a;b]} f(x) \quad \text{und} \quad M := \max_{x\in[a;b]} f(x)$$

Dann gilt:

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M \cdot (b-a)$$

Division durch $(b-a)$ ergibt:

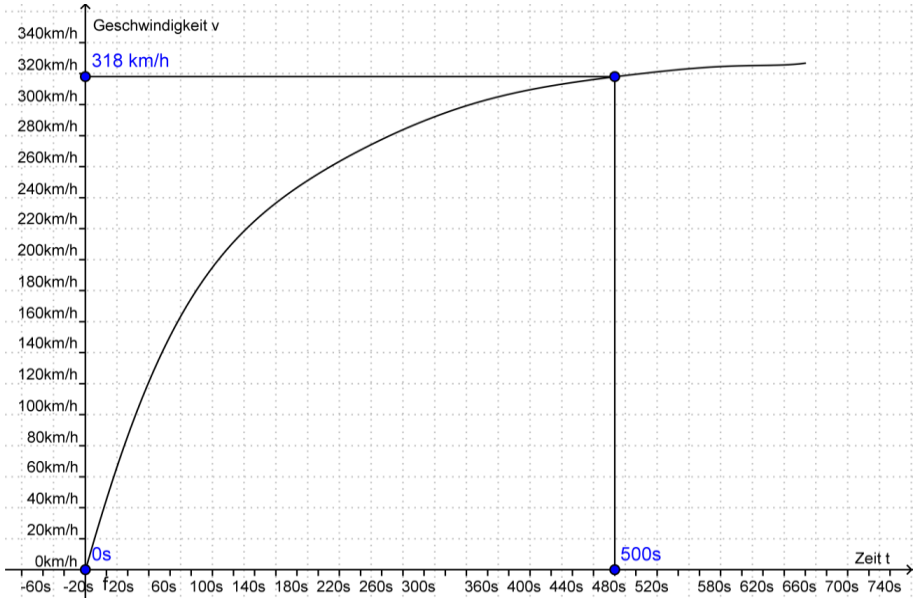
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M$$

Wegen der Stetigkeit nimmt $f$ im Intervall $[a;b]$ jeden Wert zwischen $m$ und $M$ an. Somit wird auch an irgendeiner Stelle der Wert $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ angenommen, was zu beweisen war.

### 3.3.5. Integrieren heißt Rekonstruieren

Die Idee des Rekonstruierens kann sehr schön über den bekannten Zusammenhang, dass der zurückgelegte Weg das Produkt von Geschwindigkeit und Zeit ist ($s = v \cdot t$), dargestellt werden. Hier bietet sich an, den zurückgelegten Weg eines Fahrzeuges (zum Beispiel eines Zuges) nach einer bestimmten Zeit $t$ zu untersuchen, wobei die Geschwindigkeit nicht konstant ist [Büchter & Henn, 2010, S. 92].

Wir gehen davon aus, dass der Zug die ersten 500 Sekunden beschleunigt und seine Geschwindigkeit somit kontinuierlich erhöht. Aus einem fiktiv angenommenen „$v$-$t$-Diagramm“ können wir ablesen, dass der Zug nach ca. 500 Sekunden eine Endgeschwindigkeit von ca. 318 $km/h$ erreicht hat.




Es kann angenommen werden, dass der Zug in den ersten 500 Sekunden mehr als 0 m zurücklegt aber auch weniger als 44,16 km ($\approx 318\ km/h \cdot 500s$).

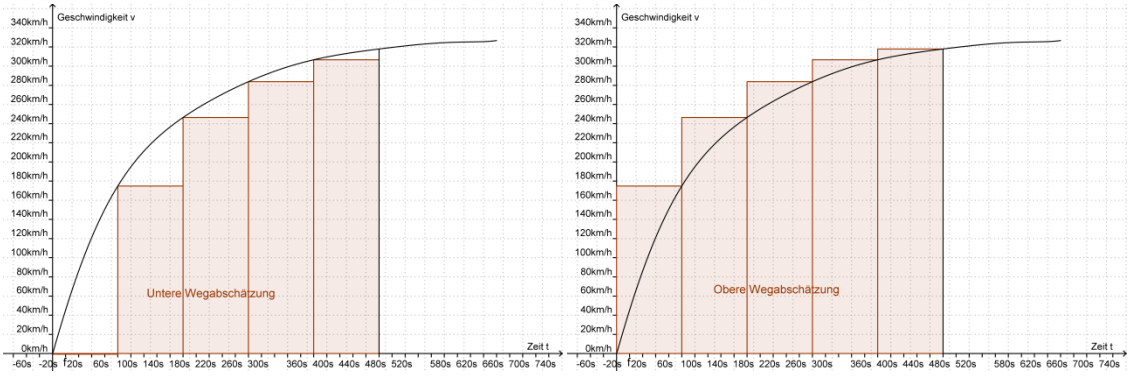
Diese Abschätzung ist jedoch sehr ungenau, weshalb es sinnvoll erscheint, die Abschätzung (für die minimale und maximale Geschwindigkeit) in Intervallen von zum Beispiel $\Delta t = 100s$ durchzuführen.

| **Zeit $t$ in s** | | **Geschwindigkeit $v$ in km/h** | | **Weg $s$ in km** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Intervall** | **$\Delta t$** | **min** | **max** | **min** | **max** |
| 0-100 | 100 | 0 | 185 | 0,00 | 5,14 |
| 100-200 | 100 | 185 | 255 | 5,14 | 7,08 |
| 200-300 | 100 | 255 | 285 | 7,08 | 7,92 |
| 300-400 | 100 | 285 | 305 | 7,92 | 8,47 |
| 400-500 | 100 | 305 | 318 | 8,47 | 8,83 |

| | | |
|---|---|---|
| **Gesamtweg** | **28,61** | **37,44** |

Diese Abschätzung ist also schon wesentlich genauer als die erste. Der Zug legt mehr als 28,61 km aber auch weniger als 37,44 km zurück.

Graphisch können wir die Terme „ $s = v \cdot \Delta t$ “ durch Rechtecke veranschaulichen, deren Flächeninhalt jeweils die untere und obere Abschätzung des Wegzuwachses in der Zeit $\Delta t$ darstellt.




Je kleiner wir das Zeitintervall $\Delta t$ wählen, desto genauer wird die Abschätzung.

Durch den Grenzübergang $\Delta t \longrightarrow 0$ wird die Wegzunahme schließlich exakt rekonstruiert. Geometrisch bedeutet dies, dass lauter kleine orientierte Rechteckflächen aufsummiert werden. Werden die Streifenbreiten genügend klein, unterscheidet sich der Flächeninhalt unter $f$ beliebig wenig von dem rekonstruierten Funktionswert $F(t)$.

Somit haben wir aus einer bekannten Änderungsratenfunktion $f$, die noch unbekannte Bestandsfunktion $F$ rekonstruiert [Büchter & Henn, 2010, S. 95]. Negative Flächenstücke lassen sich als negative Geschwindigkeiten interpretieren. Der Zug fährt wieder zurück und der Abstand zum Ausganspunkt nimmt wieder ab.

Die Idee „Integrieren heißt Rekonstruieren“ ist sehr vielseitig anwendbar. So ist zum Beispiel auch folgendes Beispiel sehr gut geeignet, um das Grundverständnis vom Integrieren als Rekonstruieren zu erarbeiten.

> „In einer Badewanne wird eine gewisse Zeit lang Wasser eingelassen, dann die Wasserzufuhr gestoppt, gleichzeitig der Abfluss geöffnet und

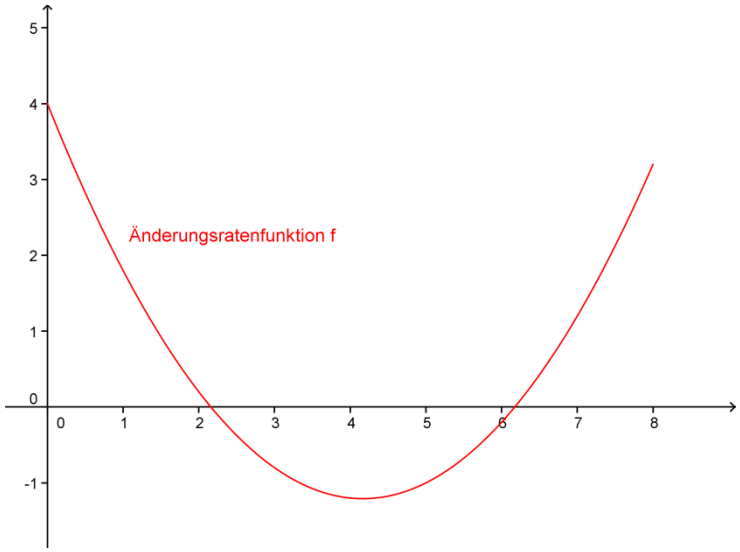
nach einer Weile wieder geschlossen.“ [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 96]

Analog zu obigem Beispiel wird aus der Kenntnis der Zuflussgeschwindigkeit des Wassers zu jedem Zeitpunkt auf die Wassermenge zu jedem Zeitpunkt zurückgeschlossen. Aus $V'$ wird demnach $V$ rekonstruiert. Generell nennen wir einen solchen Vorgang, das Wiederherstellen einer Bestandsfunktion aus der bekannten Änderungsratenfunktion durch Bilden von Produktsummen, „Integrieren“ und können sagen:

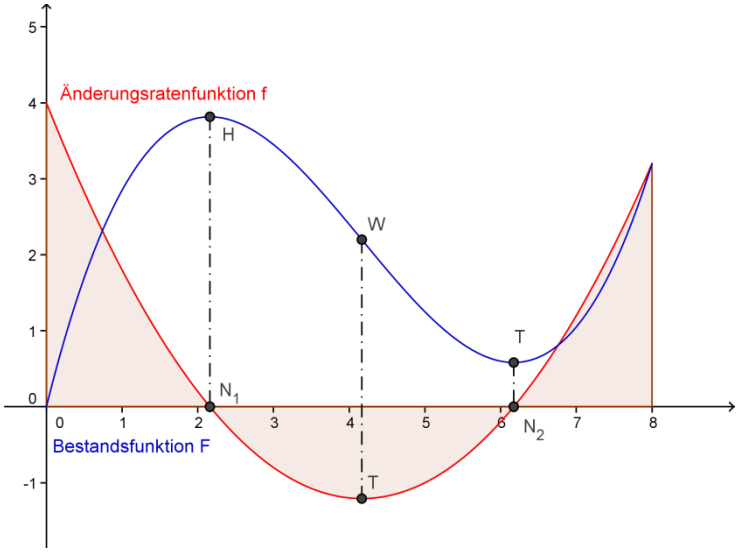
> „Kennt man die lokale Änderungsrate einer Funktion in einem Intervall, so lassen sich dort die Werte der Funktion rekonstruieren. Die rekonstruierten Funktionswerte (das sind die Integrale) sind interpretier- und berechenbar als orientierte Flächeninhalte.“ [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 102]

### 3.3.6. Die „graphische Rekonstruktion“ beim Integrieren

Wenn die Grundvorstellung „Integration heißt Rekonstruktion“ ausreichend diskutiert wurde, lässt sich die unbekannte Bestandsfunktion aus der bekannten Änderungsratenfunktion auch graphisch darstellen. Dazu betrachten wir etwa den Graphen der Funktion $f(x) = 0{,}3x^2 - 2{,}5x + 4$ als Änderungsratenfunktion:




Änderungsratenfunktion: $f(x) = 0{,}3x^2 - 2{,}5x + 4$ im Intervall $[0; 8]$




Ausgehend davon, dass die Funktion $f$ (rot eingezeichnet) im Intervall $[0{,}0]$ keinen orientierten Flächeninhalt besitzt, beginnen wir mit der Rekonstruktion von $F$ (blau eingezeichnet) bei 0. Jetzt wandern wir auf der $x$-Achse schrittweise nach rechts. Den größten Flächenzuwachs haben wir gleich zu Beginn (daher ist $F$ gleich zu Beginn streng monoton wachsend und sehr steil). Im Intervall $[2;\ 2{,}1]$ haben wir ebenfalls noch einen Flächenzuwachs der jedoch deutlich geringer ausfällt als zu Beginn und schließlich bei $f(x) = 0$ (erste Nullstelle bei $x \approx 2{,}1$ ) stoppt. Ab dann $(f(x) < 0)$ nimmt der orientierte Flächeninhalt ab, daher muss sich bei $F$ an der Stelle $f(x) = 0$ ein lokales Maximum befinden. Geometrisch bedeutet dies, dass $F$ von monoton steigend auf monoton fallend wechselt. Generell gilt ja, dass der Funktionswert $F(x) = c$ genau dem Flächeninhalt, den der Graph von $f$ und die $x$-Achse im Intervall von 0 bis $x$ einschließt, entspricht.

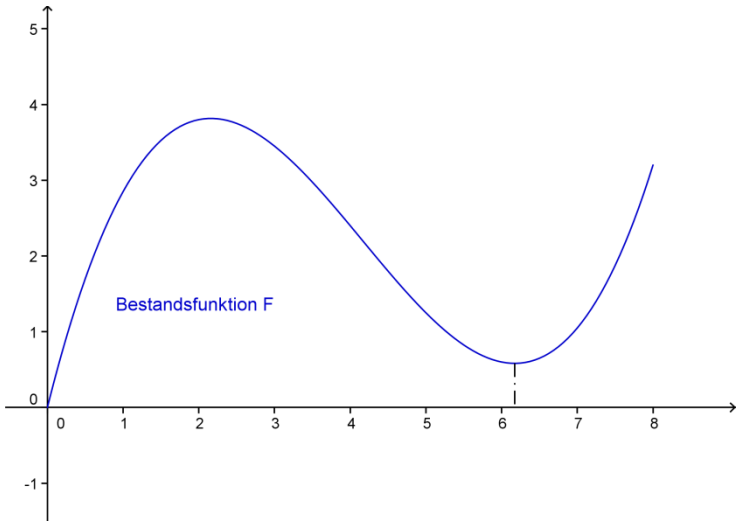
Solange $f(x) < 0$ ist, muss $F$ aufgrund des negativen Flächenzuwachses monoton fallend sein. An der Stelle $x \approx 4{,}1$ befindet sich bei $f(x)$ ein Minimum. Dies bedeutet, dass die Abnahme des orientierten Flächeninhaltes „weniger schnell“ voranschreitet und zwar aufgrund der immer kleiner werdenden „Flächeninhaltsstücke“ zwischen Graph und $x$-Achse bis zur nächsten Nullstelle von $f$ . Eine Änderung des Krümmungsverhaltens (Wendepunkt) ist die Konsequenz für $F$ . Generell können wir sagen: Eine Änderung des

Monotonieverhaltens von $f$ bedeutet eine Änderung des Krümmungsverhaltens von $F$.

Zum orientierten Flächeninhalt kommt ab $N_2$ wieder etwas dazu. Wir befinden uns schließlich mit $f$ wieder über der $x$-Achse ($f(x) > 0$ für $x > 6{,}17$). Auf diese Weise lässt sich $F$ schrittweise rekonstruieren.

Nullstellen von $F$ treten überall dort auf, wo der orientierte Flächeninhalt Null beträgt. In unserem Beispiel ist dies nicht der Fall.

Physikalisch wären hier, im Zusammenhang mit der Bewegung eines Körpers, negative Änderungsraten als negative Geschwindigkeiten zu interpretieren. Für die Bestandsfunktion $F$ heißt dies, dass der Abstand (Weg) zum Ursprung (Bahnhof) abnimmt.

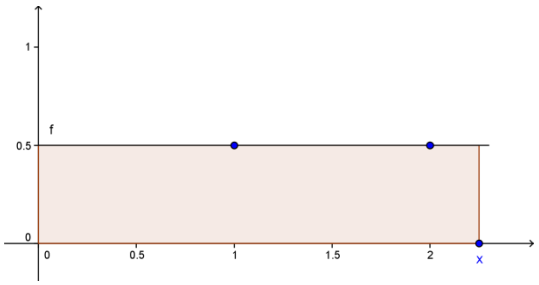



Rekonstruierte Bestandsfunktion: $F(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}25x^2 + 4x$ im Intervall [0;8]

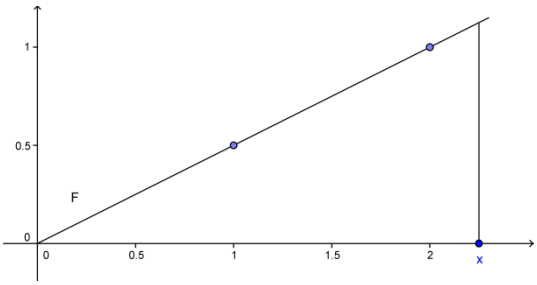
Ein Problem im Unterricht zeigt sich außerdem dadurch, dass Flächen durch Längen dargestellt werden. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ist für SchülerInnen nicht leicht einsehbar [Kirsch, 1996, S. 56].

Bei dieser Problemstellung, dem Gleichsetzen von Flächen und Strecken, muss darauf hingewiesen werden, dass unabhängig vom Größencharakter beide Größen als Zahlen verstanden werden. Am Beispiel stückweise definierter konstanter und linearer Funktionen können SchülerInnen dies üben und sich so die Antwort auf die Frage, weshalb eine Fläche gleich einer Länge entspricht, selbst erarbeiten [Kirsch, 1996, S. 59]. Zuerst sollen SchülerInnen punktweise die Flächeninhaltsfunktion bestimmen. Im Anschluss daran kann die Flächeninhaltsfunktion zusätzlich mithilfe von Flächenformeln für Dreiecke, Rechtecke und Trapeze algebraisch berechnet werden.

**Beispiel 1)**



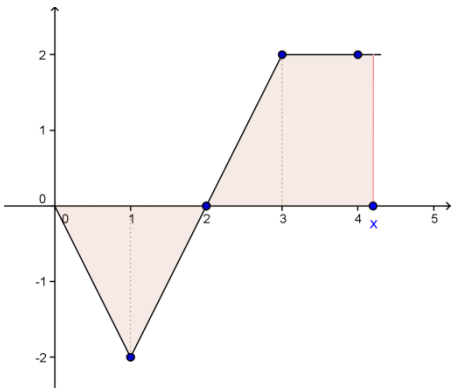

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

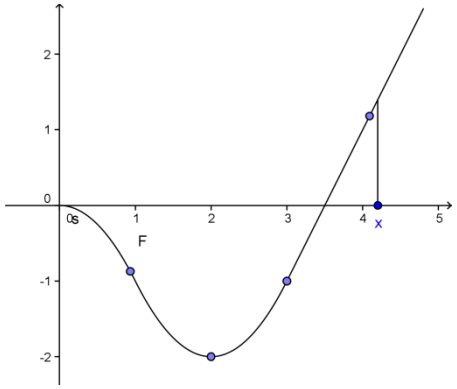



$$I_0(x) = \frac{1}{2}x$$

Dieses Beispiel soll möglichst einfach die Idee, Flächen als Längen darzustellen, veranschaulichen. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}$ hat in Abhängigkeit der Variablen $x$ die Rechteckfläche $\frac{1}{2} \cdot x$. Das heißt, die Funktionswerte von $I_0(x)$, als Längen interpretiert, geben den Flächeninhalt der Funktion $f(x)$ zwischen dem Graphen und der $x$-Achse wieder. Im nächsten Beispiel gehen wir einen Schritt weiter.

**Beispiel 2)**

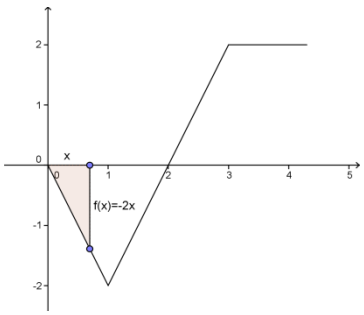


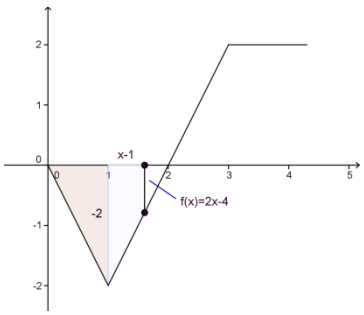



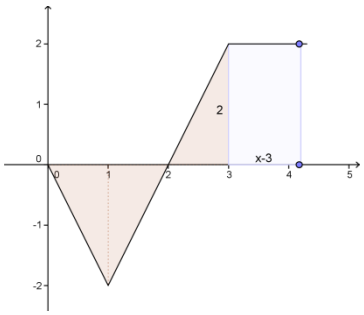

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x \leq 1 \\ 2x - 4 & \text{für } 1 < x \leq 3 \\ 2 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$$I_0(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ -2 + (x-2)^2 & \text{für } 1 < x \leq 3 \\ 2x - 7 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

Für den ersten Abschnitt verwenden wir die Flächenformel für Dreiecke, dann für Trapeze und als letztes für Rechtecke:




Der Flächeninhalt ist zunächst Null, daher muss für $x \leq 1$ gelten:

$0 + \frac{x \cdot (-2x)}{2} = -x^2$ ($= 0$ + Dreieckfläche)

Im nächsten Intervall $x \in [1,3]$ muss der orientierte Flächeninhalt bis zur Stelle 1 berücksichtigt werden. Dieser kann leicht berechnet werden, indem die Zahl 1 in obige Formel eingesetzt wird: $-(1)^2 = -1$

Für $1 < x < 3$ gilt: $-1 + \frac{-2+(2x-4)}{2} \cdot (x-1) = x^2 - 4x + 2$ ($= -1$ +Trapezfläche)

Analog zu oben setzt man die Zahl 3 in die soeben erhaltene Formel ein und erhält für den orientierten Flächeninhalt bis zur Stelle 3 den Wert, der wieder berücksichtigt werden muss: $3^2 - 4 \cdot 3 + 2 = -1$

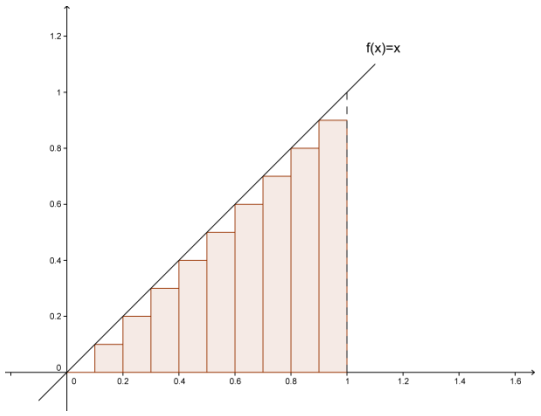
Somit muss für $x < 3$ gelten:

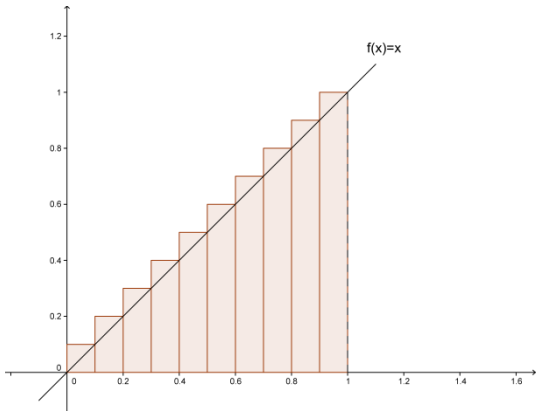
$-1 + 2 \cdot (x - 3) = 2x - 7$ ($= -1$ + Rechteckfläche)

## 3.4. Präzisierung des Integralbegriffes

Bis jetzt war die Vorstellung, das Integral als den orientierten Flächeninhalt einer Funktion $f$ in einem Intervall $[a; b]$ zwischen dem Graphen und der $x$-Achse zu definieren, ausreichend. Inwieweit sich das Integral beliebig genau durch das Aufsummieren von Rechteckflächen approximieren lässt, muss noch geklärt werden. An einem einfachen Beispiel kann diese Frage erläutert werden [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 118].

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x$ und berechnen das Integral näherungsweise im Intervall $[0,1]$ durch $n$ gleichbreite Rechtecke.




Die Summen der unterhalb und oberhalb von $f$ liegenden Rechteckflächen lassen sich berechnen:

Untersumme: $\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$

Obersumme: $\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

Differenz (Ober- und Untersumme): $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n}$

Die Differenz wird mit wachsendem $n$ beliebig klein beziehungsweise kommen die Untersummen wie die Obersummen dem Wert $\frac{1}{2}$ beliebig nahe. Dies entspricht dem exakten Wert des Integrals $I_0(1) = \frac{1}{2}$, der sich ja auch über die Dreiecksfläche berechnen lässt. „In diesem Sinne wird das Integral beliebig gut durch Rechtecksummen approximiert [Danckwerts & Vogel, 2006, S. 119]."

Eine weitere Exaktifizierung beim Integralbegriff, der intuitiv gewonnen wurde, ist schwierig und im Mathematikunterricht möglicherweise auch nicht sehr sinnvoll.

> „Der Riemann'sche Integralbegriff, […], wird in seiner Allgemeinheit im MU nicht erarbeitet. Die Notwendigkeit einer Quantifizierung über alle möglichen Zerlegungsfolgen im betrachteten Intervall ist für Schüler schwer einsehbar. Man beschränkt sich daher meist darauf, die Existenz des Inhaltes naiv der Anschauung zu entnehmen und die Berechnung desselben zu erarbeiten. […] Es ist fraglich, ob eine stärkere Exaktifizierung in formaler Hinsicht überhaupt wünschenswert ist. Die Vermutung der fundamentalen Idee Integral ist bereits mit einem als ‚präexistent' angenommenen Inhaltsbegriff möglich, ohne an die Approximation z. B. durch Rechteckflächen zu denken." [Tietze, Klika, & Wolpers, 1997, S. 283]

Für SchülerInnen, die ein Realgymnasium oder eine AHS mit Schwerpunkt Mathematik besuchen, könnte im Nachhinein[14] folgende Präzisierung für stetige Funktionen in drei Schritten dennoch sinnvoll erscheinen [Humenberger, 2009, S. 25]:

**Erster Schritt:** Zerlegung des Intervalls einer Funktion in Teilintervalle sowie Erstellen von Ober- und Untersummen.

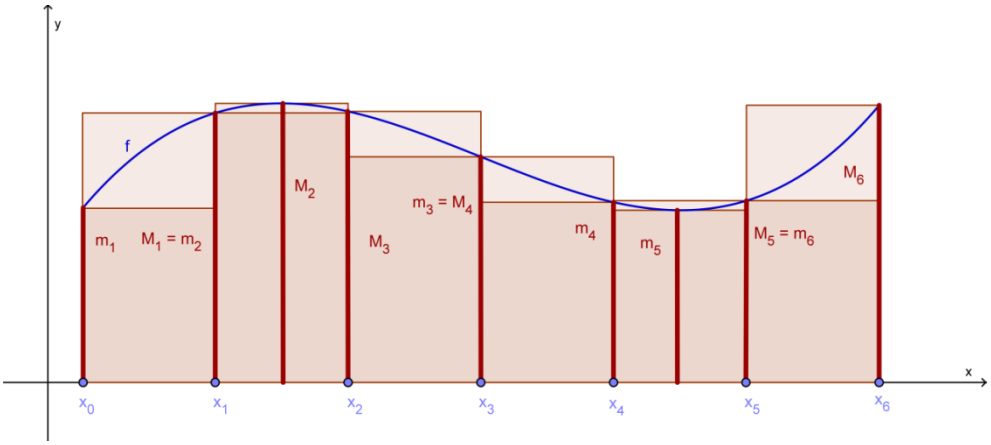
[14] Eine Präzisierung könnte z. B. nachdem der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im Unterricht behandelt wurde folgen.

**Zweiter Schritt:** Bei „feinerer“ Zerlegung des Intervalls nimmt die Untersumme zu und die Obersumme ab. Die Untersumme ist nie größer als die Obersumme.

**Dritter Schritt:** Es gibt genau eine reelle Zahl, die zwischen allen Unter- und Obersummen liegt. Diese Zahl heißt „Integral“.

### Ad erster Schritt

Bei einer Zerlegung $Z = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ eines Intervalls $I = [a; b]$ in $n$ Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}; x_k] \quad (k = 1, \dots n)$ bestimmen wir in jedem Teilintervall einen größten $(M_k)$ und einen kleinsten $(m_k)$ Funktionswert einer gegebenen Funktion $f$[15]. Die Teilintervalllänge ist $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.




Jetzt können Obersummen $O(Z)$ und Untersummen $U(Z)$ der Funktion $f$ im Intervall $[a; b]$ laut obiger Zerlegung definiert werden:

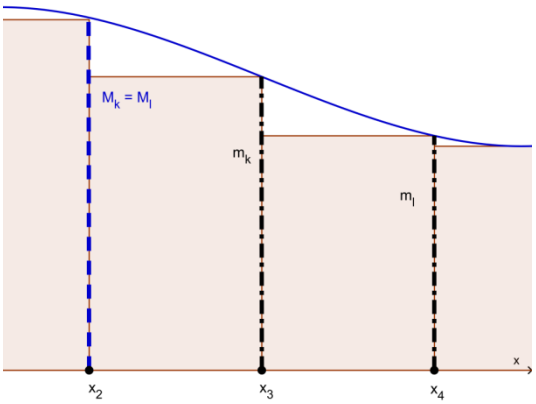
$$O(Z) := M_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

$$U(Z) := m_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + m_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$

[15] Ein kleinster beziehungsweise ein größter Funktionswert wird bei stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sicher angenommen.

**Ad zweiter Schritt**

Im zweiten Schritt überlegen wir uns [Humenberger, 2009, S. 26], dass der kleinste Funktionswert $m_k \in I_k$ nie kleiner sein kann als der kleinste Funktionswert $m_l \in I_l$ eines größeren Intervalls, welches das Teilintervall $I_k$ umfasst. Umgekehrt muss für den größten Funktionswert $M_k \in I_k$ gelten, dass er nie größer sein kann als der größte Funktionswert $M_l \in I_l$ des entsprechend größeren Intervalls, welches das kleinere Teilintervall $I_k$ umfasst.




$$m_k \in [x_2; x_3]$$
$$m_l \in [x_2; x_4]$$

mit: $m_k > m_l$

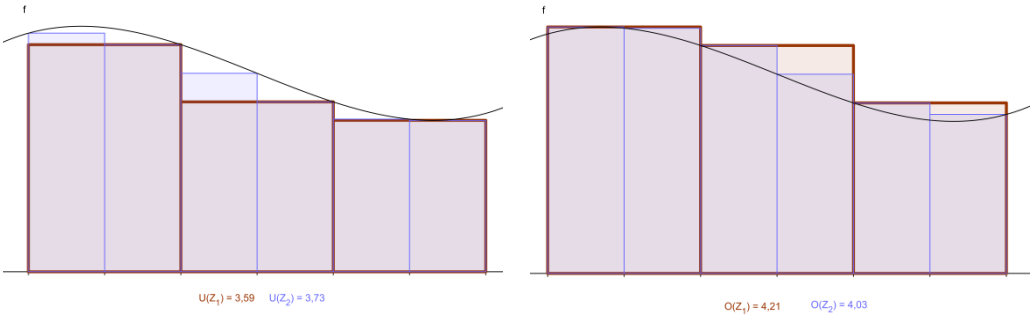
$$M_k \in [x_2; x_3]$$
$$M_l \in [x_2; x_4]$$

mit: $M_k = M_l$

Das heißt, es muss gelten:

$$m_k \geq m_l \text{ und } M_k \leq M_l$$

Somit kann gefolgert werden, dass bei einer „feineren“ Zerlegung (o. B. d. A. $Z_2$ hat eine „feinere“ Zerlegung als $Z_1$) die Untersumme im Allgemeinen zu- und die Obersumme abnimmt. Eine „feinere“ Zerlegung bedeutet hier, dass zu den alten Teilungspunkten neue hinzukommen. Zum Beispiel könnten wir den Abstand zweier Teilungspunkte halbieren, sodass auf diese Weise ein neuer Teilungspunkt entsteht. Fügen wir alle Punkte, die auf diese Weise entstanden sind, unserer alten Zerlegung hinzu, haben wir diese „verfeinert“. Die alten Teilungspunkte bleiben dabei erhalten.




$$U(Z_1) \leq U(Z_2) \text{ und } O(Z_1) \geq O(Z_2)$$

Für eine Zerlegung $Z_n$ und eine Zerlegung $Z_m$ gilt für stetige Funktionen außerdem stets:

$$U(Z_n) \leq O(Z_m)$$

**Beweis**

Für $Z_n = Z_m$ gilt:

$$U(Z_n) = m_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + m_n \cdot \Delta x_n \leq M_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + M_m \cdot \Delta x_m = O(Z_m)$$

Für $Z_n \neq Z_m$ gilt:

Eine Vereinigung $(Z_n \cup Z_m)$ von zwei Zerlegungen $Z_n$ und $Z_m$ ist stets „feiner“ als $Z_n$ beziehungsweise $Z_m$. Sie enthält alle Zerlegungspunkte von $Z_n$ und $Z_m$. Anhand dieser Überlegung können wir schreiben:

$$U(Z_n) \leq U(Z_n \cup Z_m) \text{ und } O(Z_m) \geq O(Z_n \cup Z_m)$$

$$\Rightarrow \quad U(Z_n) \leq U(Z_n \cup Z_m)) \leq O(Z_n \cup Z_m) \leq O(Z_m)$$

Was zu beweisen war.

**Ad dritter Schritt**

Im letzten Schritt soll gezeigt werden, dass es genau eine reelle Zahl gibt, die zwischen allen Unter- und Obersummen liegt. Diese Zahl wird dann „das Integral der Funktion $f$ im Intervall $[a; b]$“ genannt (symbolisch: $\int_a^b f$).

$$U \leq \int_a^b f \leq O$$

Dazu müssen wir zeigen, dass wir, wenn $f$ auf einem Intervall $[a;b]$ stetig ist, für alle $\varepsilon > 0$ Ober- und Untersummen finden können, sodass $O - U < \varepsilon$ gilt [Humenberger, 2009, S. 26]. Zuerst können wir für jede beliebige Zahl $\kappa$ eine Zerlegung $Z$ so wählen, dass in jedem dieser Teilintervalle gilt:

$$M_k - m_k < \kappa \quad (k = 1, \dots, n)$$

Stetigkeit bedeutet hier, dass wir die maximale Differenz zweier Funktionswerte $\Delta y$ bei entsprechend „feiner" Zerlegung in diesem Intervall durch eine Zahl $\kappa > 0$ festlegen (kontrollieren) können. Dieses $\Delta y$ (Funktionswertänderung) kann also beliebig klein gehalten werden. Wir brauchen dazu nur das „Intervall" $\Delta x$ (Argumentänderung) genügend klein zu wählen.

Jetzt können wir für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und $\kappa = \frac{\varepsilon}{b-a}$ schreiben:

$$O - U = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot \Delta x_k < \kappa \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als dass die Differenz $O - U$ bei entsprechend „feiner" Zerlegung beliebig klein wird. Somit gilt bei entsprechend „feiner" Zerlegung, dass die Intervalle $[U;O]$ eine Intervallschachtelung bilden, deren Länge gegen 0 konvergiert [Humenberger, 2009, S. 26]. Geht die Zahl $\varepsilon$ gegen Null, nähern sich Ober- und Untersummen beliebig gut einander an. Im Grenzfall nehmen diese den gleichen Wert an.

Aus $U \leq \int_a^b f \leq O$ folgt somit im Grenzwert:

$$U = O = \int_a^b f$$

Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert diese Zahl auch. Das Ergebnis motiviert folgende Definition:

„Definition: Es sei $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig. Jene reelle Zahl, die zwischen allen Unter- und Obersummen liegt, heißt, Integral der Funktion $f$ auf $[a; b]$‘ und wird bezeichnet mit $\int_a^b f$ oder mit $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.“ [Humenberger, 2009, S. 27]

Somit haben wir den Integralbegriff von einer anschaulichen Ebene auf eine exakte Definition gebracht, deren Erläuterung für den Schulunterricht durchaus vorstellbar ist. Vor allem dynamische Mathematiksoftware wie GeoGebra ist für das Berechnen von Unter- und Obersummen ein hilfreiches Handwerkzeug. Mühsames Berechnen per Hand ist unnötig und sollte folglich vermieden werden.

# 4. Zusammenhang von Ableiten und Integrieren

Nachdem die Grundvorstellungen von Ableitung und Integral ausgiebig behandelt wurden, soll nun im Anschluss der wichtige Zusammenhang zwischen dem Differenzieren und dem Integrieren besprochen werden. Es wurde schon in Kapitel 3.3.6 gezeigt, wie sich die unbekannte Bestandsfunktion aus der bekannten Änderungsratenfunktion graphisch darstellen lässt. Algebraisch haben wir die Flächeninhaltsfunktion oder auch Integralfunktion durch Integrieren der Änderungsratenfunktion bekommen.

Umgekehrt können wir aber durch Differenzieren aus jeder Bestandsfunktion auf die Änderungsratenfunktion schließen. Graphisch können wir jedem Punkt der Funktion durch die Ableitung seine Steigung zuordnen und diese auch aufzeichnen. Integrieren und Ableiten hängen also eng miteinander zusammen [Büchter & Henn, 2010, S. 99]. Durch das Ableiten wird das Integrieren rückgängig gemacht und umgekehrt. Diesen Zusammenhang nennt man auch den „Hauptsatz“ der Differential- und Integralrechnung, welcher im folgenden Kapitel besprochen werden soll.

## 4.1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beschreibt den wichtigen Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren. Dabei rücken zwei zentrale Aspekte in den Vordergrund. Einerseits geht es um das Ableiten der Integralfunktion, andererseits werden bestimmte Integrale mittels Stammfunktionen berechnet. Die beiden Punkte werden in „Erster“ und „Zweiter Hauptsatz“ unterteilt.

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

Ist $f$ eine in einem Intervall $[a;b]$ stetige Funktion, so gilt für alle $x \in [a;b]$:

*Erster Hauptsatz:*

Für $F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ gilt $F'(x) = (\int_a^x f(t)\mathrm{d}t)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t) = f(x)$

*Zweiter Hauptsatz:*

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

Der Erste Hauptsatz besagt demnach, dass Differenzieren Integrieren rückgängig macht, während der Zweite Hauptsatz zwei verschiedene Bedeutungen hat. Einerseits lassen sich bequeme Berechnungsregeln für Integrale mittels Stammfunktionen finden, andererseits sagt der Zweite Hauptsatz aus, dass Integrieren Differenzieren rückgängig macht, was auf den ersten Blick eventuell nicht so leicht einzusehen ist. Hier ist die Schreibweise $F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ besser geeignet. Zu einem bekannten Funktionswert $F(a)$ ist die Ableitungsfunktion $f(t)$ gegeben. Der gesuchte, unbekannte Funktionswert $F(b)$ kann aber durch Integration der Ableitungsfunktion $f(t)$ rekonstruiert werden. Somit macht Integrieren Differenzieren rückgängig.

**Plausibilitätsbegründung des „Ersten Hauptsatzes“**

Ausgangspunkt der Plausibilitätsbegründung ist, dass die Flächeninhaltsfunktion $I_a(x)$ den orientierten Flächeninhalt einer Funktion $f$ in einem Intervall $x \in [a;b]$ zwischen dem Graphen von $f$ und der $x$-Achse angibt.

Wir wollen zeigen, dass $I_a'(x) = f(x)$ gilt. Wir haben bereits die Grundvorstellung von der Ableitung einer Funktion als Momentangeschwindigkeit kennengelernt. Dies können wir jetzt auf die

Flächeninhaltsfunktion übertragen und $I_a'(x)$ als Änderungsgeschwindigkeit (Änderungsrate) des Flächeninhaltes deuten [Kirsch, 1996, S. 55]. Kirsch (1996) weist darauf hin, sich zuerst auf den Sonderfall positiver Funktionen zu beschränken.

> „Man sollte also ohne Skrupel die entscheidenden Ideen erst einmal auf diesen Sonderfall entwickeln. Die Übertragung auf Funktionen mit auch negativen Werten wird dann kaum noch grundsätzliche Schwierigkeiten bereiten.“ [Kirsch, 1996, S. 56]

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, wie schnell der Flächeninhalt wächst, wenn die $x$-Achse gleichmäßig durchlaufen wird. SchülerInnen könnten vermuten, dass es auf die Höhe des Graphen an der Stelle $x$ ankommt. Die entscheidende Idee, dass die Änderungsgeschwindigkeit proportional zur Höhe ist, kann also von SchülerInnen eingesehen werden. Wurde zuvor (wie in Punkt 3.3.6) der Zusammenhang von Flächen und Längen thematisiert, sollten SchülerInnen kein Problem mit dieser Vorstellung haben.

Die Änderungsgeschwindigkeit der Fläche lässt sich näherungsweise als Quotient des Flächenzuwachses zwischen $x$ und $x + \Delta x$ und der Zeitspanne $\Delta x$ berechnen. Für die Zeit wird $x$ gewählt. Die $x$-Achse wird laut Voraussetzung mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen. Wir kommen also zu folgendem Ergebnis:

$$\text{Änderungsgeschwindigkeit} \approx \frac{\text{Fläche des Streifens zwischen } x \text{ und } x + \Delta x}{(\text{kleine})\text{Zeitspanne } \Delta x}$$

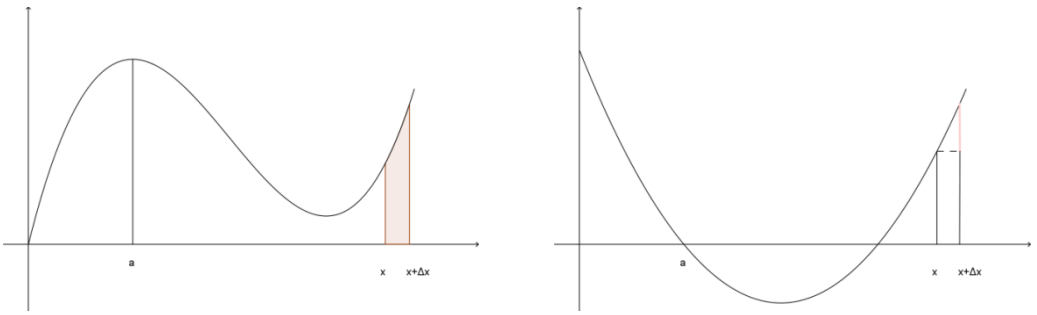
$$I_a'(x) \approx \frac{f(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

Es wird bewusst auf den Grenzübergang "$\Delta x \to 0$" verzichtet, um vorerst die Grundvorstellung zu festigen. Dieses $\Delta x$ soll gedanklich so klein gewählt werden, dass sich der Quotient kaum mehr ändert und wir $I_a'(x) \approx f(x)$ beliebig genau bestimmen können, wenn nur $\Delta x$ genügend klein gemacht wird, womit wir den Ersten Hauptsatz inhaltlich durchdacht haben.

Wir können uns jetzt noch die Frage stellen, wie die Fläche mit der Tangente zusammenhängt. Konkret wollen wir die Änderungsgeschwindigkeit des Flächeninhaltes als Tangentensteigung deuten. Wir fassen also zusammen [Kirsch, 1996, S. 59]:

$I_a(x)$ bedeutet einerseits die Fläche unter $f$ bis zur Stelle $x$, andererseits die Höhe von $I_a$ an der Stelle $x$.

$I_a(x+\Delta x) - I_a(x)$ ist somit das Flächenstück unter $f$ zwischen $x$ und $x+\Delta x$ beziehungsweise der Höhenzuwachs von $I_a$ von $x$ bis $x+\Delta x$.




$\frac{I_a(x+\Delta x)-I_a(x)}{\Delta x}$ wird demnach zur mittleren Höhe (Fläche dividiert durch Breite $\Delta x$ ergibt Höhe) von $f$ im Intervall $[x, x+\Delta x]$ oder zur Sekantensteigung (Gegenkathete dividiert durch Ankathete) von $I_a$ im Intervall $[x, x+\Delta x]$. Für kleine $\Delta x$ wird dieser Quotient näherungsweise zur Höhe von $f$ an der Stelle $x$ und zur Tangentensteigung von $I_a$ an der Stelle $x$. Somit haben wir den Zusammenhang von Fläche und Tangente hergestellt.

**Plausibilitätsbegründung des „Zweiten Hauptsatzes“**

Ähnlich wie in der Plausibilitätsbegründung zum Ersten Hauptsatz wird für die Begründung des Zweiten Hauptsatzes zur Ableitungsfunktion einer gegebenen Funktion die Bedeutung des Integrals herangezogen. Unsere Überlegungen beziehen sich auf die in den Grundvorstellungen behandelte Idee „Integrieren heißt Rekonstruieren“, wobei wir $x$ als Zeit, $F(x)$ als zurückgelegten Weg bis zum Zeitpunkt $x$, und $f(x)$ als Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $x$ festlegen. $F(b) - F(a)$ ist dabei der gesamte Wegzuwachs im Intervall $[a; b]$.

Es soll geklärt werden, welche Bedeutung das Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hat, wenn $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$ gilt [Blum & Kirsch, 1996, S. 64].

Es gilt lokal, für kleine Zeitstücke $\Delta t$ und kleine Wegstücke $\Delta s$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx v \text{ bzw. } \Delta s \approx v \cdot \Delta t,$$

Die Variable $v$ entspricht dabei der Momentangeschwindigkeit. Dies erwarten wir auch allgemein global und bestimmen daher das verallgemeinerte Produkt. Dazu teilen wir das Intervall $[a; b]$ in kleine Teile und bilden in jedem Teilintervall das Produkt Geschwindigkeit mal „kleines Zeitstück“. Diese Produkte werden summiert und geben somit den gesamten Wegzuwachs im angegebenen Intervall an:

$$\sum \text{ (Geschwindigkeit} \cdot \Delta\text{Zeit)} \approx \Delta\text{Weg auf } [a; b]$$

Für den Grenzübergang $\Delta$Zeit$\rightarrow 0$ führt dies zu einem Gleichheitszeichen.

Wenn wir unsere Überlegungen zusammenfassen, kommen wir zu folgendem Resultat:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \text{ mit } \Delta_i x = x_{i+1} - x_i \text{ und } \Delta_i F(x) = F(x_{i+1}) - F(x_i)$$

Es gilt: $f(x_i) \cdot \Delta_i x \approx \Delta_i F(x)$ für alle $i = 0, \ldots, n-1$

Summiert über alle Produkte erhalten wir somit:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta_i x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i F(x) = F(b) - F(a)$$

Für $n \rightarrow \infty$ gilt $\Delta_i x \rightarrow 0$ und wir können schreiben:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Was zu beweisen war.

# 5. Lehrpläne

In diesem Abschnitt möchte ich die Lehrpläne [Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur, 2007] der allgemeinbildenden höheren Schule (AHS) und der berufsbildenden höheren Schule (BHS) gegenüberstellen. Konkret handelt es sich beim Lehrplan der BHS um den Lehrplan der höheren technischen Lehranstalt (HTL).

## 5.1. AHS

**Integralrechnung – 8. Klasse**

- Ermitteln von Stammfunktionen
- Definieren des bestimmten Integrals, Deuten einer Summe von „sehr kleinen Produkten“ der Form $f(x) \cdot \Delta x$ als Näherungswert des bestimmten Integrals
- Kennen des Zusammenhangs zwischen Differenzieren und Integrieren sowie des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung
- Berechnen von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln
- Arbeiten mit verschiedenen Deutungen des Integrals (insbesondere Flächeninhalt, Volumen, physikalische Deutungen) [Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur, 2007]

Der erste Punkt, „Ermitteln von Stammfunktionen“, spiegelt die Grundvorstellung „3.3.1. Das Umkehrproblem der Integralrechnung“ wider. Die Idee von Newton, zu einer gegebenen Funktion $f$ eine Funktion $g$ mit der Eigenschaft $g' = f$ zu suchen, wird hier im Lehrplan thematisiert. Aber auch die Idee von Leibniz, Integration als verallgemeinerten Summationsprozess zu sehen, wie sie in Kapitel 3.3.2. dargestellt wurde, spielt im Lehrplan eine Rolle. Es wird keiner der beiden Zugänge favorisiert. Ein Punkt, der in der Schule

nicht fehlen darf, ist der wichtige Zusammenhang von Differenzieren und Integrieren sowie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, welcher in Kapitel 4 ausgiebig diskutiert wurde. Der Lehrplan sieht des Weiteren vor, bestimmte Integrale mittels Stammfunktionen zu berechnen. Numerische Integration beziehungsweise das Verwenden von dynamischer Mathematiksoftware zur Berechnung von Unter- und Obersummen wird nicht erwähnt. Gerade stückweise definierte Funktionen aber auch Funktionen wie $e^{-x^2}$ oder $\frac{\sin x}{x}$ haben keine elementaren Stammfunktionen. Dass aber im Besonderen die Berechnung orientierter Flächeninhalte von stückweise definierten Funktionen sehr hilfreich für die Grundvorstellung des Integrales sein kann, wurde in Kapitel 3.3.6. gezeigt. Der letzte Punkt schreibt vor, mit verschiedenen Deutungen des Integrals zu arbeiten.

## 5.2. BHS (HTL)

Die folgenden Aufzählungen sind ein Auszug aus dem Lehrplan für die HTL-Elektrotechnik/Maschineningenieurwesen/Bautechnik [Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur, 2007]:

**Integralrechnung – III. Jahrgang**

- bestimmtes und unbestimmtes Integral
- Integration elementarer Funktionen
- Anwendungen der Integralrechnung
- numerische Integration

**Integralrechnung – IV. Jahrgang**

- Integraltransformationen

**Integralrechnung – V. Jahrgang**

- Nicht vorgesehen

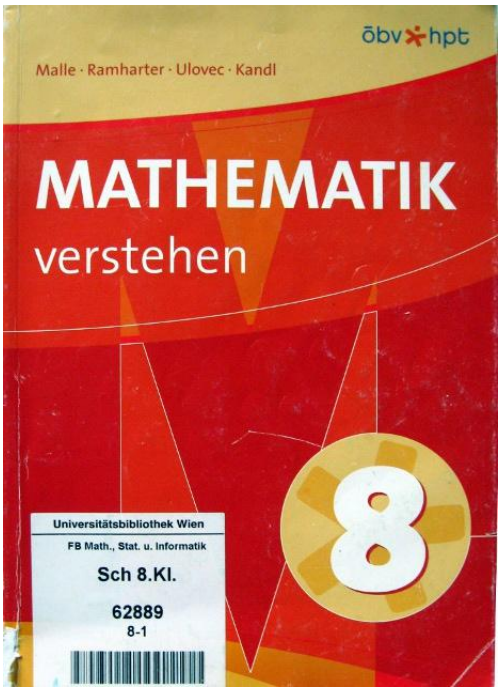
Im Lehrplan der HTL wird im Unterschied zum Lehrplan der AHS das unbestimmte Integral erwähnt. Ob die Grundvorstellung „Stammfunktionen“ oder „Produktsummen“ für den Einstieg in die Integralrechnung zu favorisieren ist, wird auch hier nicht vom Lehrplan festgelegt. Ein weiterer Punkt, der im AHS-Lehrplan nicht vorgesehen ist, ist die numerische Integration, wobei auf eine spezielle Methode (Rechtecks-, Mittelpunkt-, Trapez-, Simpsonformel usw.) oder den Einsatz von Computeralgebrasystemen nicht hingewiesen wird. Es fällt auf, dass in der HTL bereits in der 3. Klasse das Thema Integralrechnung behandelt wird, während das Integral in der AHS erst in der 8. Klasse (≙ 4. Klasse Oberstufe/Maturaklasse) eingeführt wird. In der 4. Klasse HTL sollen LehrerInnen und SchülerInnen laut Lehrplan Integraltransformationen (Fourier- und Laplace-Transformationen) behandeln. In der 5. Klasse HTL (Maturaklasse) ist die Integralrechnung im Mathematikunterricht nicht explizit vorgeschrieben. Der Zusammenhang von Differenzieren und Integrieren wird im Lehrplan nicht erwähnt.

Die beiden Lehrpläne spiegeln sehr gut wider, wo die Schwerpunkte der beiden Schultypen liegen: Während in der AHS mehr auf die Grundvorstellungen und die Deutung des Integrals Wert gelegt wird, sind die Schwerpunkte in der HTL vermehrt das Anwenden und Rechnen.

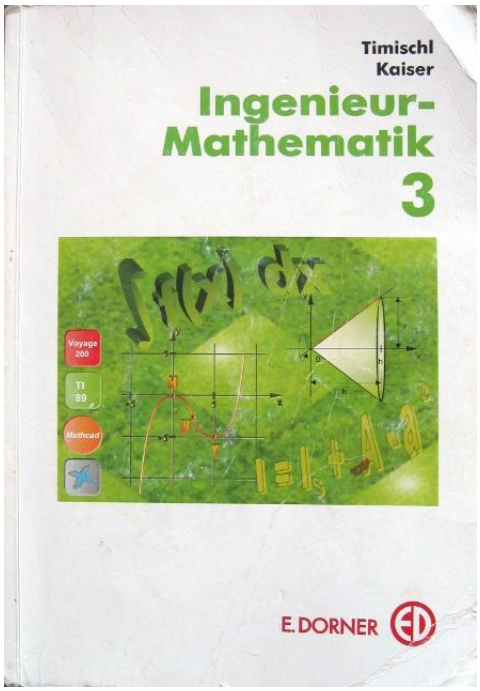
# 6. Schulbuchvergleich

Aufgrund der unterschiedlichen Lehrpläne werde ich für den Schulbuchvergleich ein Buch der 3. Klasse HTL und ein Schulbuch der 8. Klasse AHS verwenden. In der 3. Klasse HTL und in der 8. Klasse AHS ist laut Lehrplan in beiden Schultypen der Einstieg in die Integralrechnung vorgesehen. Die AutorInnen des AHS-Schulbuches sind Günther Malle, Esther Ramharter, Andreas Ulovec und Susanne Kandl (im Folgenden nur noch als „Malle u. a." angegeben) und trägt den Titel „Mathematik verstehen 8". „Ingenieur-Mathematik 3" lautet der Titel des HTL-Schulbuches und wurde von Wolfgang Timischl und Gerald Kaiser verfasst. Werden im folgenden Abschnitt die AutorInnen, Malle u. a. beziehungsweise Timischl/Kaiser, erwähnt, beziehe ich mich immer auf deren jeweilige Lehrbücher, die im Jahr 2007 veröffentlicht wurden.

Nach einer Vergleichsanalyse der beiden Bücher folgt eine genauere inhaltliche Untersuchung. Alle nachfolgenden Abbildungen habe ich, soweit nicht separat gekennzeichnet, den Lehrbüchern entnommen.




AHS Lehrbuch




HTL Lehrbuch

## 6.1. Vergleichsanalyse

In diesem Kapitel möchte ich kurz die wichtigsten Eckdaten zusammenfassen und so einen ersten Eindruck der unterschiedlichen Lehrbücher präsentieren. Dabei stelle ich den Umfang, die Abbildungen, die farbliche Gestaltung, inwiefern auf zusätzliche Information eingegangen wird, die Einleitung, Beispiele, Definitionen/Sätze/Beweise, den Einsatz von CAS, Zusammenfassungen und Ausblicke/Rückblicke einander vorwiegend quantitativ gegenüber.

### 6.1.1. Umfang

| | Seitenanzahl |
|---|---|
| **Mathematik verstehen 8** | |
| Kapitel 1: Stammfunktion und Integral | 21 |
| Kapitel 2: Einige Anwendungen der Integralrechnung | 30 |
| Kapitel 3: Theoretische Ergänzung | 3 |
| Kapitel 4: Weitere Integrationsmethoden und Anwendungen | 20 |
| Summe | **74** |
| **Ingenieur-Mathematik 3** | |
| Kapitel 6: Integralrechnung | 0 |
| Kapitel 6.1: Bestimmtes Integral als Flächeninhalt | 9 |
| Kapitel 6.2: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung | 9 |
| Kapitel 6.3: Integrationsmethoden | 14 |
| Kapitel 6.4: Numerische Integration | 10 |
| Kapitel 6.5: Uneigentliche Integrale | 4 |

| | |
|---|---|
| Kapitel 7: Anwendung der Integralrechnung | 0 |
| Kapitel 7.1: Flächeninhalt, Volumen, Bogenlänge | 15 |
| Kapitel 7.2: Schwerpunkt | 11 |
| Kapitel 7.3: Trägheitsmoment | 8 |
| Kapitel 7.4: Biegelinien | 3 |
| Kapitel 7.5: Mittelwerte von Funktionen | 7 |
| Summe | **90** |

Dem Motto des Verlegers, „So viel Theorie wie notwendig, so viel Anwendung wie möglich“ [Dorner], entsprechend bietet das Schulbuch der HTL bei einem Seitenformat von 16,5 x 24 cm quantitativ 16 Seiten mehr Schulstoff als das der AHS. Dies entspricht ohne Kopf- und Fußzeile etwa einem DIN-A5 Format (14,8 x 21 cm). Der Öbv wirbt auf seiner Homepage unter anderem mit „[Der Band] bietet einen fundierten fachlichen und didaktischen Aufbau bei gleichzeitiger Konzentration auf das Basiswissen“ [oebv], wobei 74 Seiten, bei einem Format von 17 x 24 cm, auf die Kapitel der Integralrechnung entfallen.

### 6.1.2. Abbildungen

| Ingenieur-Mathematik 3 | Mathematik verstehen 8 |
|---|---|
| Im Buch „Ingenieur-Mathematik 3“ werden in den Kapiteln 6 und 7 insgesamt 99 Bilder dargestellt, welche sich hauptsächlich auf den mathematischen Kontext beziehen. Die Graphiken sind in Farbe dargestellt und fortlaufend durchnummeriert. Zusätzlich sind insgesamt 28 Screenshots des | Auf den 74 Seiten sind insgesamt 121 Graphiken abgebildet. Sie sind ebenfalls in Farbe dargestellt, jedoch nicht durchgehend nummeriert. Geht aus dem Kontext hervor, welche Abbildung gemeint ist, verzichteten die AutorInnen auf die Nummerierung. Screenshots von CAS oder Taschenrechnern werden nicht |

| | |
|---|---|
| Taschenrechners „Voyage 200“ sowie des „TI 89“ abgebildet und 23 beispielbezogene Graphiken, die nicht nummeriert sind. | dargestellt. |

Das Buch „Ingenieur-Mathematik 3“ kommt mit insgesamt 99 + 28 + 23 = 150 Bildern, die auf 90 Seiten verteilt sind, auf durchschnittliche 1,7 Bilder pro Seite. „Mathematik verstehen 8“ kommt auf ca. 1,6 Bilder pro Seite.

### 6.1.3. Farben

| Ingenieur-Mathematik 3 | Mathematik verstehen 8 |
|---|---|
| Musterbeispiele samt Lösungswege werden mit einem durchgehenden blauen Strich seitlich markiert. Alle Informationen, die mit dem „Voyager 200“ in Verbindung stehen, werden durch einen durchgehenden, roten, die für den „TI 89“ mit einem grünen Strich am linken Seitenrand hervorgehoben. Definitionen sind grün, Sätze rot umrandet. Zusammenfassungen am Ende eines jeden (Unter-) Kapitels werden mit einem gelben Strich am linken Seitenrand dargestellt. Alle Graphiken werden in Farbe dargestellt. | Musterbeispiele und Lösungswege werden mit grüner Farbe hervorgehoben. Sätze und Definitionen sind orange markiert. Farblich unterscheiden sich Definitionen und Sätze nur in der Schriftfarbe. Das Wort „Definition“ wird lila und das Wort „Satz“ wird in der Farbe Blau dargestellt. Beweise werden farblich nicht hervorgehoben. Bilder sind ebenso in Farbe dargestellt. Am Ende der Kapitel zur Integralrechnung folgt ein historischer Überblick, der vorwiegend als Lesestoff dienen soll und gelb hinterlegt ist. |

Die AutorInnen beider Lehrbücher haben sich bemüht, eine einheitliche Formatierung zu wählen und Sätze, Definitionen, Zusammenfassungen und so weiter farblich auf den ersten Blick unterscheidbar zu machen. Während bei Malle u. a. visuell nicht so schnell zwischen Definitionen und Sätzen unterschieden werden kann, sieht man bei Timischl/Kaiser auf den ersten Blick, um welche Form der Information es sich handelt. An dieser Stelle sei angemerkt, dass in Bezug auf Layout-Fragen der jeweilige Verlag mitentscheidet und die AutorInnen vermutlich nicht das letzte Wort haben.

### 6.1.4. Infos und Tipps

| Ingenieur-Mathematik 3 | Mathematik verstehen 8 |
|---|---|
| Möchten die Autoren im Speziellen auf etwas aufmerksam machen, wird dies unter „Anmerkungen“ angekündigt. Ansonsten wird nicht im Speziellen auf ein Thema/Problem hingewiesen. | Gleich nach dem Inhaltsverzeichnis folgt eine Zeichenerklärung. Das Computersymbol weist auf die Verwendung eines Computers hin, während das Rufzeichen auf wichtige Stellen im Buch hinweist. |

Das rote Rufzeichen bei Malle u. a. kommt insgesamt drei Mal vor. Es ist bemerkenswert, dass das Computersymbol hingegen kein einziges Mal Verwendung findet.

### 6.1.5. Einleitung

| Ingenieur-Mathematik 3 | Mathematik verstehen 8 |
|---|---|

| | |
|---|---|
| Nach einigen Einführungsworten folgt meist ein Musterbeispiel mit Lösungsweg. | (Unter-) Kapitel beginnen entweder mit einem Einführungsbeispiel oder einem Satz. |

In beiden Lehrbüchern wird zu Beginn kurz beschrieben, wovon das jeweilige Kapitel handeln wird. Danach folgt meistens ein Beispiel, anhand dessen die Eingangsfrage (Vermutung) diskutiert wird. Bei Malle u. a. wird auch oft mit einem Satz begonnen, der im Anschluss begründet wird.

### 6.1.6. Beispiele und Aufgaben

| Ingenieur-Mathematik 3 | Mathematik verstehen 8 |
|---|---|
| 61 Musterbeispiele mit Lösungswegen<br>154 Aufgaben | 24 Musterbeispiele mit Lösungswegen<br>110 Grundaufgaben<br>100 weiterführende Aufgaben |

Während die Anzahl der vorgerechneten Musterbeispiele bei Timischl/Kaiser mehr als doppelt so hoch ist wie bei Malle u. a., unterscheiden diese zwischen „Grundaufgaben“ und „Weiterführenden Aufgaben“, die zusammen 234 Übungsaufgaben ergeben. Somit stehen SchülerInnen bei Malle u. a. mehr Aufgaben zum Üben zur Verfügung als bei Timischl/Kaiser.

### 6.1.7. Definitionen, Sätze, Beweise

| Ingenieur-Mathematik 3 | Mathematik verstehen 8 |
|---|---|
| 6 Definitionen | 7 Definitionen |

| | |
|---|---|
| 24 Sätze<br>0 Beweise<br>18 Plausibilitätsbegründungen | 29 Sätze<br>19 Beweise<br>6 Plausibilitätsbegründungen |

Hier ist ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden Lehrbüchern zu erkennen. Während bei Malle u. a. versucht wird, soweit es den AutorInnen sinnvoll erscheint, einen Beweis oder eine Plausibilitätsbegründung zu den Sätzen zu liefern (nur vier Sätze bleiben unbegründet/-bewiesen), wird bei Timischl/Kaiser nicht bewiesen, sondern ausschließlich per Plausibilitätsbegründung argumentiert. Im Allgemeinen wird bei Timischl/Kaiser zuerst ein Sachverhalt erarbeitet und anschließend als Satz zusammengefasst beziehungsweise festgehalten. Dabei wird oft von einem Spezialfall (Musterbeispiel) auf den allgemeinen Fall geschlossen. Das Ende eines Beweises wird bei Malle u. a. durch einen („das“) Quadrat gekennzeichnet.

### 6.1.8. Computereinsatz

| Ingenieur-Mathematik 3 | Mathematik verstehen 8 |
|---|---|
| TR: „Voyager 200“ kommt neun Mal vor.<br>TR: „TI89“ kommt sechs Mal vor.<br>Fünf Mal wird auf ein CAS hingewiesen. | Der Einsatz des Computers beziehungsweise von CAS wird in den Kapiteln zur Integralrechnung nicht thematisiert. |

Im Lehrbuch „Ingenieur-Mathematik 3“ wird in regelmäßigen Abständen auf die Taschenrechner (TR) „Voyager 200“ beziehungsweise „TI89“ hingewiesen. Dabei wird erklärt, wie man den TR verwendet. Es werden aber auch Anleitungen zu kleinen Programmen vorgegeben, mit denen das Rechnen

vereinfacht wird. Einige Male wird auch auf CAS hingewiesen, mit denen bestimmte Integrale ausgerechnet wurden (oder ausgerechnet werden sollen). Timischl/Kaiser nennen konkret das CAS „Mathcad“. Malle u. a. verzichten dagegen auf den Einsatz von CAS. An dieser Stelle sei jedoch darauf hingewiesen, dass es bei Malle u. a. ein eigenes Computerheft als Ergänzungsmaterial zu erwerben gibt.

### 6.1.9. Zusammenfassung

| Ingenieur-Mathematik 3 | Mathematik verstehen 8 |
|---|---|
| Am Ende eines jeden Unterkapitels ist unter der Überschrift „Im Überblick…“ das Wichtigste noch einmal zusammengefasst. | Fehlt bei Malle u. a. |

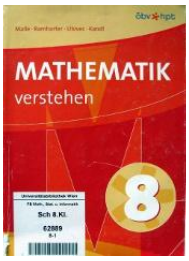
### 6.1.10. Ausblick/Rückblick

| Ingenieur-Mathematik 3 | Mathematik verstehen 8 |
|---|---|
| „Ausblicke“ bezüglich Anwendung der Integralrechnung | eigenes Kapitel „Historisches zur Integralrechnung“ |

Timischl/Kaiser verzichten auf eine längere geschichtliche Hintergrundinformation, während Malle u. a. ein umfassendes Kapitel am Ende der Integralrechnung anhängen (acht Seiten). Bei beiden Schulbüchern wird fast immer am Beginn eines Kapitels kurz beschrieben, wovon es handeln wird. Im Besonderen weisen Timischl/Kaiser zu Beginn der Integralrechnung darauf

hin, weshalb die Integralrechnung für die Technik/Physik wichtig ist. In einigen Fällen wird auch auf spätere Kapitel hingewiesen.

## 6.2. Mathematik verstehen 8




Die folgenden beiden Unterkapitel widmen sich der genaueren Analyse der beiden Schulbücher „Mathematik verstehen 8“ und „Ingenieur-Mathematik 3“. Dabei werden manche Kapitel auf Grund des Umfanges etwas weniger ausführlich behandelt als andere. Der Schwerpunkt liegt bei den jeweiligen Einstiegen (wie bereiten die AutorInnen die Lernenden auf das Thema vor?), beim Integralbegriff (wie wird der Begriff entwickelt/definiert?), bei der Deutung und den zugehörigen Grundvorstellungen sowie beim Hauptsatzes.

### 6.2.1. Einstieg

Gleich zu Beginn, im ersten Kapitel, stürzen sich die AutorInnen auf das Thema der Stammfunktionen. Dem Leser/der Leserin wird an dieser Stelle vermittelt, dass es in diesem Abschnitt darum gehen wird, die ursprüngliche Funktion zu Ableitungsfunktionen zu finden. Was dies mit der Integralrechnung zu tun hat, bleibt jedoch noch unerwähnt. Anhand zweier einleitender Aufgaben sollen SchülerInnen den Begriff der Stammfunktion erarbeiten.

Im Text der ersten Aufgabe (Bewegungsaufgabe) wird darauf hingewiesen, dass $v(t) = s'(t)$ und $a(t) = v'(t)$ gilt. Jetzt soll $s(t)$ gefunden werden, wenn $v(t) = 2t \left(\frac{m}{s}\right)$ gegeben ist beziehungsweise wenn $a(t) = a$ gegeben ist ($a$ konstant). Die zweite Aufgabe ist ohne Anwendungsbezug. Allgemein soll zu einer gegebenen Funktion $f(x) = x^2$ eine Funktion $F(x)$ gefunden werden, für die gilt $F'(x) = f(x)$. Nach kurzer Rechnung einigt man sich auf die Lösung: $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Das Ergebnis der zweiten Aufgabe wird noch geometrisch interpretiert. Danach folgt eine Definition des Begriffes Stammfunktion [Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2007, S. 7]:

**Definition:** Sind f und F reelle Funktionen mit derselben Definitionsmenge A und gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in A$,
dann heißt F eine **Stammfunktion von f**.

Kurz:

F ist Stammfunktion von f $\Leftrightarrow F' = f$

Im Anschluss daran folgt der Satz, dass alle Stammfunktionen von $f$ von der Form $F(x) = F_0(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ sind, wenn $F_0$ eine Stammfunktion von $f$ ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass $f$ eine reelle Funktion ist, deren Definitionsbereich ein Intervall ist. Hier verzichten Malle u. a. auf einen Beweis, verweisen aber auf die wesentliche Voraussetzung, dass der Definitionsbereich von $f$ ein Intervall sein muss.

Als nächstes werden Stammfunktionen von konstanten Funktionen, Potenzfunktionen, Summen und Vielfachen von Funktionen, rationalen Funktionen, Winkelfunktionen und der Exponentialfunktion hergeleitet. Eine Tabelle [Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2007, S. 10] fasst die Ergebnisse zusammen und es folgen Grundaufgaben.

| **Funktion** | **eine Stammfunktion** |
|---|---|
| $f(x) = k$ (mit $k \in \mathbb{R}$) | $F(x) = k \cdot x$ |
| $f(x) = x^q$ (mit $q \in \mathbb{Q}, q \neq -1$) | $F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ |
| $f(x) = \sin x$ | $F(x) = -\cos x$ |
| $f(x) = \cos x$ | $F(x) = \sin x$ |
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = e^x$ |
| $f(x) = a^x$ (mit $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$) | $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ (mit $x \in \mathbb{R}^+$) | $F(x) = \ln x$ |

Im nächsten Abschnitt werden mit Hilfe von Unter-, Ober- und Zwischensummen näherungsweise Flächeninhalte und Weglängen berechnet. Was dies mit der Integralrechnung zu tun hat, bleibt für den Leser/die Leserin noch verborgen. Dazu wird der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der

Funktion $f(x) = \frac{10}{x+1}$ und der $x$-Achse im Intervall $[0;4]$ näherungsweise exemplarisch vorgerechnet. Zuerst wird nur eine grobe Näherung (ohne Teilungspunkte), dann eine mit vier und anschließend eine mit acht gleich langen Teilungspunkten gewählt. Die folgende Frage lautet, wie genau der Flächeninhalt im Intervall $[0;4]$ berechnet werden könne. Über Unter- und Obersummen kommt man schließlich zu dem Ergebnis, dass die Differenz $O - U$ beliebig klein gehalten werden kann, wenn nur die Anzahl $n$ der Teilintervalle genügend groß gewählt wird.

Im nächsten Beispiel, der Berechnung von Weglängen, kommt die Grundvorstellung des „Rekonstruierens“ (bei Malle u. a. allerdings nicht so benannt) zu tragen. Dabei wird, ausgehend von einer Geschwindigkeitsfunktion, nach dem zurückgelegten Weg gesucht. Wieder wird das Zeitintervall in verschiedene Teilintervalle mit der Annahme einer gleichförmigen Bewegung in jedem Teilintervall zerlegt. Auch hier kommt der/die LeserIn zu der Einsicht, dass der Weg beliebig genau über Rechtecksummen berechnet werden kann.

Jetzt wird der Zusammenhang von Flächeninhaltsberechnung und Weglängenberechnungen thematisiert. Die beiden vorhergehenden Aufgaben lassen diesen Zusammenhang bereits vermuten. Es werden Unter- und Obersummen zu einer Zerlegung $Z$ eines Intervalls $[a;b]$ definiert und das Summenzeichen $\sum$ wird zur übersichtlicheren Schreibweise eingeführt. Danach folgt das Kapitel „Das Integral“.

***Kritik:*** *Ich finde die Idee, zuerst unabhängig vom Integralbegriff, den Begriff „Stammfunktionen“ einzuführen und Flächeninhalte (durch Aufsummieren von Rechtecksflächen) zu berechnen, interessant. In den elf Seiten, die Malle u. a. dafür verwenden, wird Vorarbeit geleistet, um sich später dem Integral zu widmen. Es bleibt nur zu befürchten, dass SchülerInnen die nötige Motivation fehlen könnte und sich eventuell die Frage stellen: „Wieso ist das Suchen von Stammfunktionen für uns interessant?“. Ansonsten finde ich die Beispiele gut gewählt. Vor allem der Praxisbezug durch die Bewegungsaufgaben ist in beiden*

*Fällen (Stammfunktionen und Weglängenberechnung) vorhanden. SchülerInnen bekommen ein erstes Gefühl fürs „Integrieren“ (auch wenn dies bis jetzt noch nicht erwähnt wurde), nämlich im Sinne von „Produktsummen bilden“. Es wird klar, dass sich Wege über Flächeninhalte unter Geschwindigkeitsgraphen berechnen lassen. Die Idee dahinter wird jedoch nicht weiter thematisiert: „Bestandsfunktionen können durch Bilden von Produktsummen aus ihrer Änderungsratenfunktion rekonstruiert werden!“.*

*Stammfunktionen werden durch die Umkehrung des Differenzierens gefunden. Die Sätze über Stammfunktionen von konstanten Funktionen usw. werden alle mit Hilfe der Differentialrechnung bewiesen. Für Berechnungen von Ober- und Untersummen würde ich die dynamische Mathematiksoftware GeoGebra im Unterricht verwenden. Hier könnten dann auch Aufgaben gestellt werden, die sich der Frage: „Wie fein muss die Zerlegung gewählt werden, damit die Differenz $O - U$ kleiner als z. B. 0,5 ist?“ widmen.*

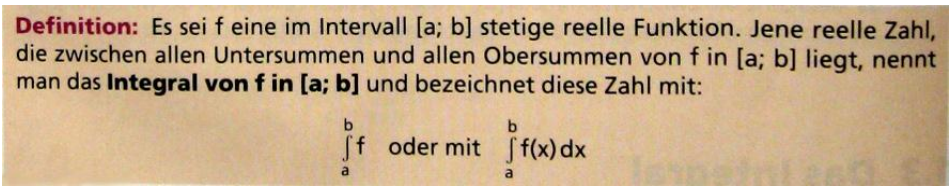
### 6.2.2. Das Integral

Jetzt werden bei Malle u. a. die zentralen Begriffe der Integralrechnung vorgestellt. Die Behauptung gleich zu Beginn lautet, dass, wenn $f$ eine im Intervall $[a; b]$ stetige Funktion ist, für alle Zerlegungen $Z$ von $[a; b]$ gilt, dass die Untersumme nie größer als die Obersumme sein kann ($U_f(Z) \leq O_f(Z)$). Der Beweis wird hier nur für den einen Fall, dass $U$ und $O$ die gleiche Zerlegung haben, bewiesen. Der nächste Satz, der schließlich zur Definition des Integrals führt, lautet [Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2007, S. 18]:

**Satz:** Ist f stetig im Intervall [a; b], dann gibt es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von [a; b], sodass $O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$.

Nach einer kurzen Beweisskizze wird zusammengefasst: Die Unterschiede zwischen Ober- und Untersummen können beliebig klein gemacht werden. Dies lässt vermuten, dass es genau eine reelle Zahl gibt, die zwischen allen Unter- und Obersummen liegt. Diese Zahl erhält den eigenen Namen „Integral“. Hier

verzichten Malle u. a. auf einen exakten Beweis und definieren [Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2007, S. 18]:


**Definition:** Es sei f eine im Intervall [a; b] stetige reelle Funktion. Jene reelle Zahl, die zwischen allen Untersummen und allen Obersummen von f in [a; b] liegt, nennt man das **Integral von f in [a; b]** und bezeichnet diese Zahl mit:

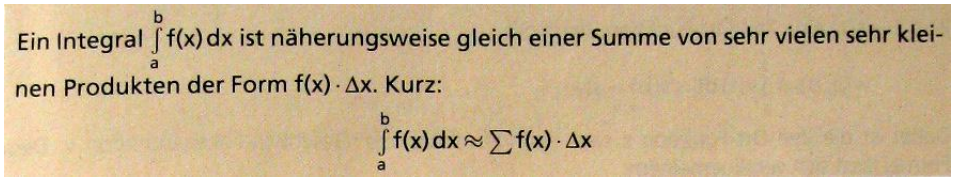
$$\int_a^b f \quad \text{oder mit} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Nachdem der Integralbegriff definiert und einige Bemerkungen zum Integralsymbol gemacht wurden, folgen verschiedene Deutungen des Integrals.

***Kritik:*** *Der Begriff des Integrals wird hier (abgesehen von den Einführungsbeispielen) unabhängig von Grundvorstellungen entwickelt. Dies gelingt meiner Meinung nach auch sehr gut. Die AutorInnen schreiben gleich zu Beginn des Kapitels, dass die Sätze über Unter- und Obersummen aufgrund der vorigen Beispiele „anschaulich einleuchtend" sind. Auch wenn aufgrund des vorigen Abschnittes SchülerInnen die Richtigkeit der Sätze schon vermuten lässt, würde ich auch hier zusätzlich die dynamische Mathematiksoftware GeoGebra verwenden. Ich denke, dass SchülerInnen auf diese Weise ein noch besseres Verständnis für Ober- und Untersummen bekommen. Für mich stellt sich die Frage, ob gleich zu Beginn eine so „präzise" Einführung des Integrals notwendig ist. Ich würde vorerst einen rein intuitiven Zugang zum bestimmten Integral bevorzugen und erst später das Integral in einem eigenen Kapitel exaktifizieren.*

### 6.2.3. Deutung des Integrals

Nachdem das Integral eingeführt wurde, wird dieses als Flächeninhalt beziehungsweise als Weglänge gedeutet. Danach kommt eine wichtige (mit einem roten Rufzeichen gekennzeichnete) Vorstellung des Integrals. An dieser Stelle ist es den AutorInnen wichtig, auf eine intuitiv wichtige Vorstellung des Integrals hinzuweisen [Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2007, S. 21]:


Ein Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist näherungsweise gleich einer Summe von sehr vielen sehr kleinen Produkten der Form $f(x) \cdot \Delta x$. Kurz:

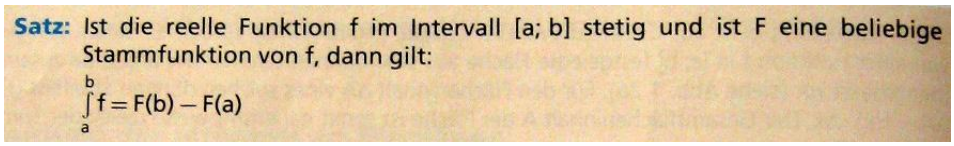
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum f(x) \cdot \Delta x$$

Es wird ausführlich darüber berichtet, dass die präsentierte Vorstellung auf Leibniz zurückgeht und wie der Forscher zu dieser Auffassung gekommen ist. Das Differential $\mathrm{d}x$ wird als „unendlich kleine" Breite bezeichnet und das Produkt $f(x) \cdot \mathrm{d}x$ als „unendlich dünner" Streifen. Die Gesamtfläche ist demnach die Summe all dieser „unendlich dünnen" Streifen. Da es sich bei dieser Summe um „unendlich viele unendlich kleine" Produkte handelt, wurde der Buchstabe „S" (S wie Summe) zu einem Integralzeichen $\int$ „aufgebogen".

***Kritik:*** *Ich finde die Erklärung der AutorInnen sehr gut und wichtig. SchülerInnen bekommen eine fundierte Vorstellung vom Integral und auch davon, was die Zeichen bedeuten. Ich denke, der/die LeserIn sollte nach diesem Abschnitt den Ausdruck* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *richtig interpretieren beziehungsweise erklären können.*

### 6.2.4. Berechnung von Integralen mit Stammfunktionen

Die AutorInnen kommen jetzt auf den Begriff der Stammfunktionen zurück, anhand dessen sie Integrale berechnen wollen. Dazu wird der Zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (wird von Malle u. a. aber nicht so genannt) formuliert und bewiesen [Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2007, S. 22].


**Satz:** Ist die reelle Funktion f im Intervall [a; b] stetig und ist F eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Nach dem Beweis folgen Grundaufgaben und weiterführende Aufgaben. Wurde die Berechnung von Integralen mit Stammfunktionen gefestigt, folgen Sätze über Integrale.

„Sätze“: Für die in einem Intervall $[a; b]$ stetigen reellen Funktionen $f$ und $g$ gilt:

1. Satz: $\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

2. Satz: $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

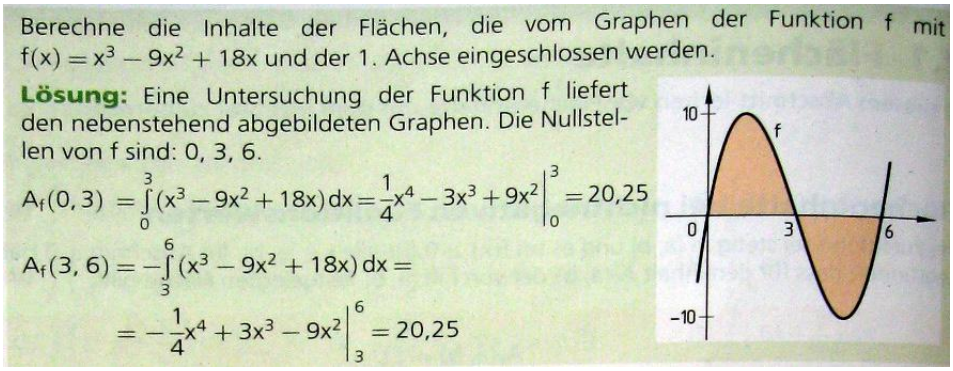
3. Satz: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f \quad \text{mit } a < b < c$

Die Sätze werden mittels Stammfunktionen bewiesen, im Anschluss werden wieder Grund- und weiterführende Aufgaben angeboten. Hier endet das erste Kapitel bei Malle u. a. und es folgen Anwendungen der Integralrechnung.

***Kritik:*** *Beim Beweis des Zweiten Hauptsatzes wird auf den Mittelwertsatz der Differential- und Integralrechnung zurückgegriffen. Eigentlich behaupten die AutorInnen, dass es in jedem Teilintervall eine Stelle gibt, an der die Steigung der Tangente gleich der Steigung der Sekante durch den Anfangs- und Endpunkt des Teilintervalls ist. Dies wird jedoch nicht bewiesen, sondern es wird auf den Mittelwertsatz zurückgegriffen beziehungsweise auf das Lehrbuch „Mathematik verstehen 7, Seite 122“ hingewiesen. Auch dort wird der Mittelwertsatz zwar formuliert, jedoch nicht bewiesen. Ich finde, dass der Mittelwertsatz ohnehin keine zentrale Rolle im Schulunterricht spielen sollte. Dieser gehört zu den wichtigen Sätzen der höheren Analysis und wird dementsprechend an Hochschulen gelehrt. In der Schule kommt man auch ohne Mittelwertsatz zurecht, gerade wenn dieser nur als „Mittel zum Zweck“ (zur Beweisführung) verwendet wird. Dass der zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch ohne Mittelwertsatz bewiesen werden kann, wurde in Kapitel 4.1 gezeigt.*

### 6.2.5. Anwendungen

Hier wird noch einmal der Flächeninhalt thematisiert, nur dass jetzt auch negative Funktionswerte erlaubt sind. Gilt $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a; b]$ wird die Funktion $f$ an der ersten Achse gespiegelt. Funktioniert diese Methode nicht, da die Funktion $f$ auch positive Werte annimmt, muss über die Nullstellen von $f$ stückweise integriert werden. Malle u. a. zeigen dies an einem Beispiel [Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2007, S. 28]:



Berechne die Inhalte der Flächen, die vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x$ und der 1. Achse eingeschlossen werden.

**Lösung:** Eine Untersuchung der Funktion f liefert den nebenstehend abgebildeten Graphen. Die Nullstellen von f sind: 0, 3, 6.

$$A_f(0,3) = \int_0^3 (x^3 - 9x^2 + 18x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 9x^2\Big|_0^3 = 20{,}25$$

$$A_f(3,6) = -\int_3^6 (x^3 - 9x^2 + 18x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - 9x^2\Big|_3^6 = 20{,}25$$



***Kritik:*** *Die AutorInnen wollen nun Flächeninhalte bei negativen Funktionswerten berechnen. Dabei wird angenommen, dass der/die LeserIn bereits weiß, dass das Integral, wenn es als Flächeninhalt interpretiert wird, vorzeichenbehaftet ist. Dies wurde bis jetzt aber noch nicht thematisiert und auch hier wird nicht auf den orientierten Flächeninhalt eingegangen. Ich finde, spätestens an dieser Stelle müsste dies explizit angesprochen werden.*

Der Reihe nach werden nun Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen, Weglängen (wie schon anfangs thematisiert), Volumina von Rotationskörpern und physikalische Anwendungen behandelt (über 29 Seiten hinweg). Nach einer wichtigen Schlussbemerkung folgt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als eigenes Kapitel. In der Schlussbemerkung (wieder rotes Rufzeichen) wird noch einmal das Wesentliche zusammengefasst. Die AutorInnen weisen darauf hin, dass das Integral mit keiner der Deutungen

(Flächeninhalt, Volumen, Arbeit, usw.) identisch ist, sondern einen abstrakten Dachbegriff für die einzelnen Deutungen darstellt.

***Kritik:*** *Erst jetzt, 29 Seiten später, wird das Integral als orientierter Flächeninhalt thematisiert. Gut gefällt mir, dass nicht nur Volumina von Rotationskörpern berechnet werden, sondern auch Volumen über „Schnittflächen". Dies fördert meiner Meinung nach die Grundvorstellung des Integrals, unabhängig vom Flächenbegriff, da hier das Volumen als Summe der Produkte von „Querschnittflächen mal Scheibendicke" zum Tragen kommt. Auch die Schlussbemerkung fasst meiner Meinung nach das Wesentliche noch einmal gut zusammen.*

### 6.2.6. Der Hauptsatz bei Malle u. a.

Zuerst definieren Malle u. a. die Integralfunktion [Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2007, S. 57]:

**Definition:** Die reelle Funktion f sei im Intervall A stetig und es sei $a \in A$. Die für alle $x \in A$ mit $x > a$ definierte Funktion I mit

$$I(x) = \int_a^x f$$

heißt **Integralfunktion von f** (bezüglich a).

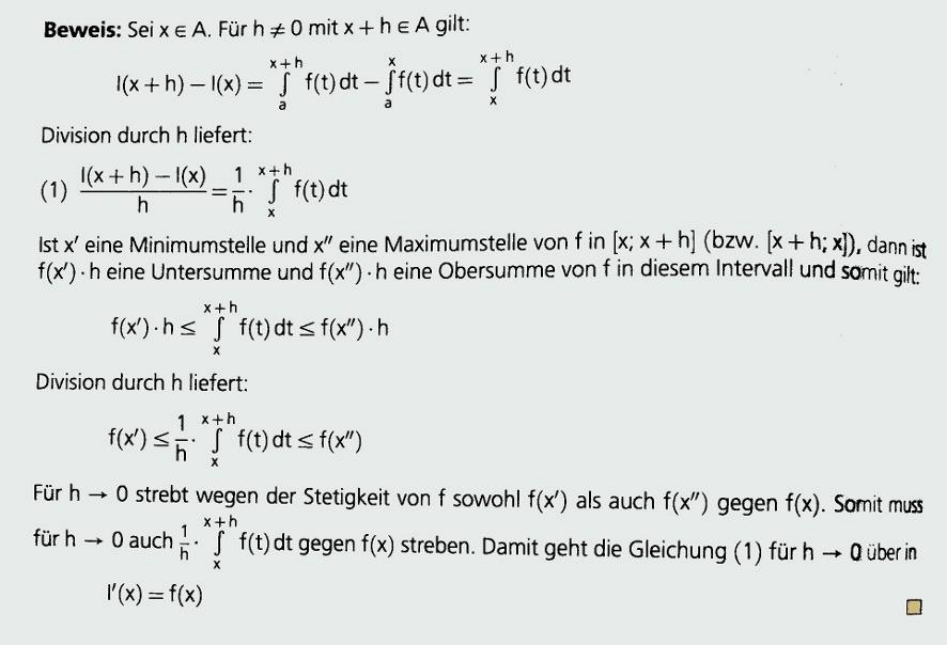
Dann erweitern sie diese mit $\int_a^a f := 0$ und $\int_a^b f := -\int_b^a f$, falls $b < a$.

Jetzt wird der Erste Hauptsatz formuliert und bewiesen:

**Satz** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Die reelle Funktion $f$ sei im Intervall $A$ stetig und es sei $a \in A$. Dann ist die Integralfunktion $I$ (bezüglich $a$) eine Stammfunktion von $f$.

***Kritik:*** *Der Zusatz "bezüglich $a$", bezieht sich nicht auf die Stamm-, sondern die Integralfunktion. Das heißt, eigentlich meinen Malle u. a. „Integralfunktion mit Anfang $a$“. Dies ist meiner Meinung nach etwas verwirrend formuliert, denn die eigentliche Bedeutung des Satzes ist erst auf den zweiten Blick erkennbar.*

Beweis bei Malle u. a. [Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2007, S. 58]:



**Beweis:** Sei $x \in A$. Für $h \neq 0$ mit $x + h \in A$ gilt:

$$I(x+h) - I(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Division durch h liefert:

$$(1)\quad \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Ist $x'$ eine Minimumstelle und $x''$ eine Maximumstelle von f in $[x; x+h]$ (bzw. $[x+h; x]$), dann ist $f(x') \cdot h$ eine Untersumme und $f(x'') \cdot h$ eine Obersumme von f in diesem Intervall und somit gilt:

$$f(x') \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(x'') \cdot h$$

Division durch h liefert:

$$f(x') \leq \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(x'')$$

Für $h \to 0$ strebt wegen der Stetigkeit von f sowohl $f(x')$ als auch $f(x'')$ gegen $f(x)$. Somit muss für $h \to 0$ auch $\frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,dt$ gegen $f(x)$ streben. Damit geht die Gleichung (1) für $h \to 0$ über in

$$I'(x) = f(x)$$

□

Der nächste Satz wird mit Hilfe des „Hauptsatzes“ bewiesen.

**Satz:** Ist die reelle Funktion $f$ im Intervall $[a; b]$ stetig und ist $F$ eine beliebige Stammfunktion von $f$, dann gilt:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Der Beweis bei Malle u. a. sieht folgendermaßen aus [Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2007, S. 58]:

**Beweis:** Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Funktion I mit $I(x) = \int_a^x f$ eine Stammfunktion von f. Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, muss für alle $x \in [a; b]$ gelten:

$$F(x) = I(x) + c \quad (\text{mit } c \in \mathbb{R})$$

Insbesondere gilt für $x = a$ bzw. $x = b$:

$$F(a) = I(a) + c \quad \text{und} \quad F(b) = I(b) + c$$

Daraus folgt:

$$F(b) - F(a) = [I(b) + c] - [I(a) + c] = I(b) - I(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f - 0 = \int_a^b f$$ □

Danach wird der Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erklärt. Es wird noch einmal darauf hingewiesen, dass Differenzieren und Integrieren Umkehrungen voneinander sind. Am Schluss wird kurz das unbestimmte Integral genannt, aber nicht näher thematisiert.

***Kritik:*** *Die AutorInnen unterscheiden nicht zwischen Erstem und Zweitem Hauptsatz. Es gibt nur „den Hauptsatz" und der Zweite wird „nur" als weiterer Satz dargestellt, der eigentlich schon zuvor gebraucht wurde: bei der Berechnung des Integrals über Stammfunktionen. Dort wurde er auch bereits als eigenständiger Satz (mit Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes) bewiesen, jetzt hingegen mit Hilfe des „Hauptsatzes". So gesehen könnte man sich den Beweis des Ersten Hauptsatzes, so wie Malle u. a. es in ihrem Lehrbuch zeigen, sparen und ihn viel schneller und einfacher direkt als Folgerung des Zweiten Hauptsatzes zeigen. Wenn man schon weiß, dass* $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$ *gilt, folgt sofort:* $(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t)' = I'(x) = F'(x) = f(x)$. *Nachdem die beiden Sätze bewiesen wurden, wird noch einmal explizit auf den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren eingegangen. Das unbestimmte Integral wird nur kurz angesprochen, aber nicht weiter erläutert.*

### 6.2.7. Weitere Anwendungen und Integrationsmethoden

Als weitere Integrationsmethoden werden hier „Integralrechnung durch Substitution" und „Partielle Integration" behandelt. Es folgen noch weitere

Anwendungen des Integrals wie die Berechnung der Kurvenlänge, Oberflächeninhalte von Rotationskörpern, Schwerpunkt von Flächen und ein abschließendes Kapitel mit dem Titel „Historisches zur Integralrechnung“. In diesem letzten Kapitel erfährt der/die LeserIn zuerst Informatives über die „Quadratur des Kreises“ und über das „Exhaustionsverfahren“. Danach werden die „Quadratur der Parabel“ und die „Quadratur der Hyperbel“ besprochen. Während 1882 der Mathematiker C. L. F. Lindemann gezeigt hatte, dass die Quadratur des Kreises unmöglich ist, gelang dies bei der Parabel und der Hyperbel. Nach einem längeren Absatz über die „Indivisibilienmethode“ wird der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung noch einmal thematisiert. Über die geschichtliche Entwicklung der „Exaktifizierung der Integralrechnung“ wird am Ende des Kapitels berichtet.

***Kritik:*** *Eingangs wird darauf hingewiesen, dass es für rationale Funktionen keine allgemeine Regel zur Ermittlung von Stammfunktionen gibt. Auf die Methode der Partialbruchzerlegung wird nicht eingegangen, was durchaus ein Manko darstellt. Ansonsten empfinde ich den letzten, historischen Teil als sehr informativ und als gut gelungenen Abschluss der Integralrechnung. Ich finde die Abschnitte über die Quadratur des Kreises, der Parabel und der Hyperbel gut gelungen und der/die LeserIn bekommt einen guten Überblick über die historisch motivierten Probleme der Integralrechnung. Ich finde es auch wichtig, dass jede/r SchülerIn die Begriffe „Exhaustionsverfahren“ und „Indivisibilienmethode“ zumindest einmal gehört hat.*

## 6.3. Ingenieur-Mathematik 3

Im Folgenden soll nun auch das Lehrbuch von Timischl/Kaiser genauer unter die Lupe genommen werden. Kurz zusammengefasst kann festgehalten werden, dass die Autoren von Ingenieur-Mathematik 3 folgende Vorgehensweise wählten:

Gleich zu Beginn wird das bestimmte Integral als Flächeninhalt eingeführt. Danach folgen schon der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und das Berechnen von Integralen mittels Stammfunktionen. Nachdem die wichtigsten Integrationsmethoden vorgestellt wurden, wird zur numerischen Integration übergegangen. Im Anschluss daran wird das uneigentliche Integral thematisiert. Verschiedene Anwendungen des Integrals schließen die Kapitel der Integralrechnung ab.

### 6.3.1. Einstieg

In kurzen Einführungsworten bereiten die Autoren den/die LeserIn auf die Wichtigkeit und Bedeutung des Integrals vor.

> „Die Berechnung von Bogenlängen, Schwerpunkt und Trägheitsmoment, der Arbeit und des Effektivwertes eines elektrischen Wechselstromes, der Bahnkurve von Satelliten, des Zeitverhaltens von Schwingungen oder der Zuverlässigkeit von Bauteilen kann mit Hilfe der Integralrechnung erfolgen. Alle diese Fragestellungen lassen sich auf eine Grundaufgabe zurückführen: *die Bestimmung des Flächeninhaltes von krummlinig begrenzten Flächen*. Dabei zeigt sich die überraschende Tatsache, dass die Integralrechnung direkt auf die Umkehrung des Differenzierens führt.“ [Timischl & Kaiser, 2007, S. 188]

***Kritik:*** *In nur wenigen Worten bekommt der/die LeserIn einen gut fundierten Ausblick auf die kommenden Kapitel zur Integralrechnung. Die Autoren leisten hier keine „Vorarbeit“, sondern sprechen direkt den Kern der Integralrechnung an. Sogar der Zusammenhang von Differenzieren und Integrieren wird hier*

*schon thematisiert. Diese gelungene Einführung motiviert durchaus zum Weiterlesen.*

Danach folgt ein Einführungsbeispiel, wobei es zunächst um die Bestimmung der Wassermenge eines Behälters geht [Timischl & Kaiser, 2007, S. 188].

**Einführendes Beispiel**

Ein anfänglich leerer Behälter wird durch einen Zufluss, dessen Stärke beliebig geändert werden kann, mit Wasser gefüllt. Der Behälter besitzt ferner eine Abflussmöglichkeit von gleichbleibend 100 $l$ pro Minute.

a) Der Zufluss hat fünf Minuten lang die konstante Stärke $i = 200\ l/min$. Danach wird der Zufluss beendet und der Abfluss für fünf Minuten geöffnet.
b) Die Zuflussstärke $i(t)$ wird von 0 $l/min$ nach der Beziehung $i(t) = 20 \cdot t^2$ gesteigert, wobei $t$ die Zeit in Minuten ist. Nach fünf Minuten wird der Zufluss eingestellt und der Abfluss wieder für fünf Minuten geöffnet.

Wie groß ist danach die Wassermenge im Behälter?

Timischl/Kaiser (2007) zeigen anhand zweier Skizzen die Lösung der Aufgabe [Timischl & Kaiser, 2007, S. 188].

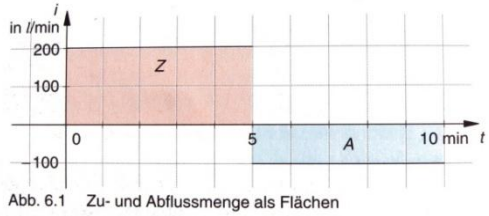


Abb. 6.1 Zu- und Abflussmenge als Flächen

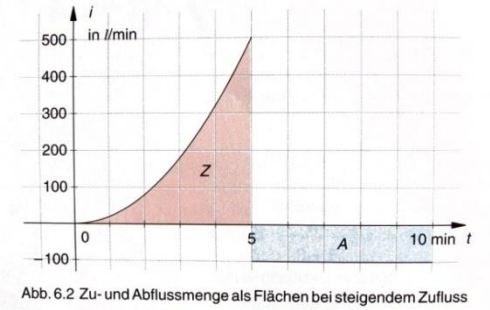


Abb. 6.2 Zu- und Abflussmenge als Flächen bei steigendem Zufluss

Während Aufgabe a) einfach zu lösen ist (1000 $l$ – 500 $l$ = 500 $l$), müssen SchülerInnen bei Aufgabe b) mit ihren bisher bekannten Möglichkeiten

scheitern, so die Autoren. Die Lösung des Problems liegt in der Approximation des Flächeninhalts durch Rechtecke. Die Rechtecke sollen eine Breite von einer Minute haben, während ihre Höhe mit dem jeweiligen Funktionswert im Mittelpunkt der Rechteckbreite übereinstimmen soll. Es wird darauf hingewiesen, dass es kein Problem ist, den linken ebenso wie den rechten Randpunkt als Höhe mit dem jeweiligen Funktionswert zu wählen [Timischl & Kaiser, 2007, S. 189].

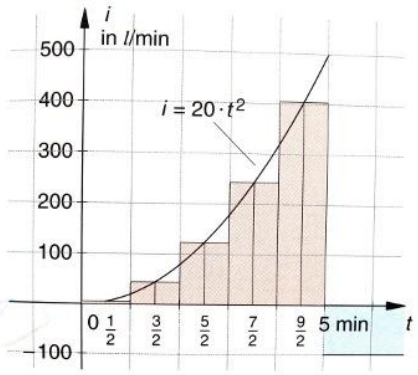


Abb. 6.3 Näherung durch Rechteckflächen

Näherungsweise wird auf diese Weise die Fläche zwischen dem Graphen und der $t$-Achse berechnet. Für die Zuflussmenge $Z$ (in Litern) erhält man:

$$Z \approx 1 \cdot 20\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot 20\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cdots + 1 \cdot 20\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 825$$

Es muss allerdings festgehalten werden, dass $Z$ umso genauer wird, je kleiner die Rechteckbreiten sind.

Das Volumen im Behälter beträgt demnach: $V = 825\ l - 500\ l = 325\ l$

In Bezug auf das Beispiel wird erklärt, dass es zweckmäßig sein kann, Flächeninhalten ein Vorzeichen zu geben und diese dann als „orientierte Flächeninhalte“ zu bezeichnen.

***Kritik:*** *Das Einführungsbeispiel ist sehr anschaulich und plausibel erklärt. Die Idee dahinter wird wie bei Malle u. a. nicht weiter thematisiert: „Bestandsfunktionen können durch Bilden von Produktsummen aus ihrer Änderungsratenfunktion rekonstruiert werden!“ An dieser Stelle hielte ich es für sinnvoll auf diesen Zusammenhang auch explizit einzugehen. Orientierte Flächeninhalte werden bei Timischl/Kaiser hingegen gleich zu Beginn thematisiert, was ich wiederum als sehr wichtig empfinde.*

### 6.3.2. Das bestimmte Integral

Nun wird aufbauend auf das Einführungsbeispiel der Integralbegriff Schritt für Schritt erarbeitet. Die Autoren setzen vorerst eine im Intervall $[a; b]$ monoton steigende, stetige Funktion $y = f(x)$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [a; b]$ voraus. Danach werden Unter- und Obersummen als untere beziehungsweise obere Schranke aller ein- und umgeschriebenen Rechtecke über dem Intervall $[a; b]$ der Funktion $y = f(x)$ bezüglich der gegebenen Intervallzerlegung eingeführt. Eine Skizze veranschaulicht die Idee [Timischl & Kaiser, 2007, S. 190]:

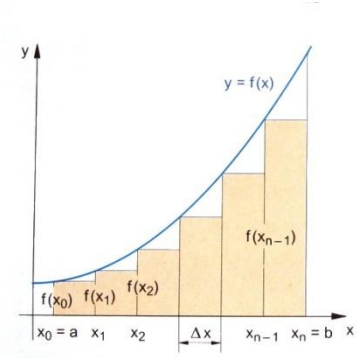


Abb. 6.5 Untersumme

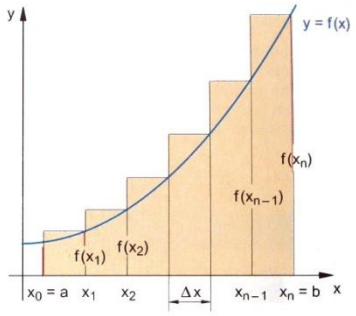


Abb. 6.6 Obersumme

Für die Untersumme $U_n$ und die Obersumme $O_n$ definieren Timischl/Kaiser:

$$U_n = \Delta x \cdot [f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$O_n = \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Danach stellen sie folgenden Zusammenhang her:

$$U_n \leq A \leq O_n$$

Anhand des nächsten Beispiels über Unter- und Obersummen wird erklärt, wie mit Hilfe des Taschenrechners „Voyage 200“ bequem Unter- und Obersummen berechnet werden können. Danach folgt auch schon die Definition des bestimmten Integrals [Timischl & Kaiser, 2007, S. 191]:

**Bestimmtes Integral**

Es sei $y = f(x)$ eine Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert und beschränkt ist. Man zerlegt nun das Intervall $[a, b]$ in n gleich breite Teilintervalle und bildet für diese Zerlegung die Obersumme $O_n$ und die Untersumme $U_n$. Existiert dann für $n \to \infty$ sowohl der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} U_n$ der Folge der Untersummen als auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} O_n$ der Folge der Obersummen *und* stimmen diese Grenzwerte überein, so heißt die Funktion $y = f(x)$ **integrierbar** auf $[a, b]$. Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Integral** von $y = f(x)$ auf $[a, b]$ genannt.

Man schreibt: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U_n \quad (= \lim_{n\to\infty} O_n)$.

Bezeichnungen:
$f(x)$ ..... **Integrand**
$x$ ..... **Integrationsvariable**
$a, b$ ..... **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**
$[a, b]$ ..... **Integrationsintervall**

Es schließen Anmerkungen bezüglich der Definition an. So schreiben die Autoren, dass vor allem die stetigen und stückweise stetigen Funktionen integrierbar seien, jedoch ohne dies weiter zu begründen. Die geometrische Deutung des Integrals als orientierter Flächeninhalt wird betont. Es wird des Weiteren das Integralzeichen $\int$ als ein in die Länge gezogenes S (als Grenzwert einer Summe) gedeutet und auf die beliebige Bezeichnung der Integrationsvariablen hingewiesen. Timischl/Kaiser erwähnen, dass das Integral als Grenzwert einer Produktsumme definiert ist und viele physikalische Größen als solche Grenzwerte und damit als Integrale definiert werden. Im letzten Punkt der Anmerkung teilen die Autoren dem/der LeserIn mit, dass das definierte Integral das so genannte Riemann-Integral sei, und es zwar weitere Integralbegriffe gebe, dieser für die Anwendung jedoch als der wichtigste begriffen werden könne.

Nach zwei Musterbeispielen werden folgender Satz und die Definitionen angeschlossen [Timischl & Kaiser, 2007, S. 193]:

**Stückweise Integration** nach Zerlegung des Integrationsintervalls:

Für $a < c < b$ gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Noch zwei naheliegende Definitionen:

1) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$ Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel.

2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Jetzt wird mittels Unter- und Obersummen das bestimmte Integral $\int_0^2 \frac{1}{2}x^2 \mathrm{d}x$ als Grenzwert der Unter- beziehungsweise Obersumme berechnet. Die Unterteilung des Intervalls geschieht in $n$ gleich breite Streifen. Unter Anwendung der Quadratischen Summenformel wird schließlich die Fläche unter der Parabel berechnet. Für die Untersumme berechnen die Autoren [Timischl & Kaiser, 2007, S. 6]:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}$$

Analog wird das Integral als Grenzwert der Obersumme berechnet:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\cdot\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}$$

Somit folgern die Autoren: $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \frac{4}{3} \implies \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}$

Nach einer Zusammenfassung und Übungsaufgaben folgt ein Kapitel über Stammfunktionen und im Anschluss daran der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

***Kritik:*** *Die Begriffsbestimmung des bestimmten Integrals erfolgt mittels Plausibilitätsbegründung anhand Ober- und Untersummen sowie der vorhergehenden Aufgaben. Ohne weitere Begründung wird angenommen, dass $U_n \leq A \leq O_n$ gilt und der Flächeninhalt $A$ auch intuitiv existiert. Die Begründung bezieht sich außerdem auf eine im Intervall monoton steigende stetige Funktion, deren Funktionswerte alle positiv sind. Die Grundvorstellung des Integrals ist hier klar auf das Erstellen einer „Produktsumme“ ausgerichtet.*

*Für die Berechnung von Unter- und Obersummen wird kein CAS empfohlen, jedoch die Verwendung des Taschenrechners.*

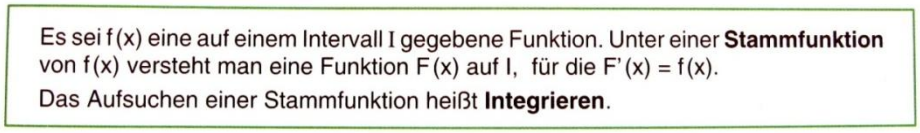
*Zur Berechnung des Integrals als Grenzwerte der Unter- beziehungsweise der Obersummen wird auf die quadratische Summenformel zurückgegriffen. Diese wird nicht weiter begründet, sondern „fällt vom Himmel" (die Autoren weisen auf eine Formelsammlung hin) – der Taschenrechner soll die Summierung vornehmen.*

*Nach der Einführung des Integrals folgt auch gleich der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, wobei nach der Überschrift noch Stammfunktionen eingeführt werden.*

*Vermutung: Die Autoren wollen so schnell wie möglich zu Anwendungsbeispielen gelangen und mit Hilfe von Stammfunktionen bequem Integrale berechnen. Diese Vorgehensweise ist durchaus als legitim zu bezeichnen, meines Erachtens wird jedoch zu wenig Wert auf Begründungen gelegt.*

### 6.3.3. Stammfunktionen und unbestimmtes Integral

Zuerst wird (ohne einführende Worte) der Begriff Stammfunktion definiert [Timischl & Kaiser, 2007, S. 197]:


Es sei f(x) eine auf einem Intervall I gegebene Funktion. Unter einer **Stammfunktion** von f(x) versteht man eine Funktion F(x) auf I, für die F'(x) = f(x).
Das Aufsuchen einer Stammfunktion heißt **Integrieren**.

Nachdem das Integral als gemeinsamer Grenzwert von Folgen der Unter- beziehungsweise Obersummen eingeführt wurde, wird jetzt in einem Satz erwähnt, dass das Aufsuchen einer Stammfunktion „Integrieren" heißt. Anhand eines Beispiels zeigen die Autoren, was gemeint ist: Zu einer gegebenen Funktion $f(x) = x^2 + 1$ soll eine Stammfunktion gefunden werden. Nachdem verschiedene Stammfunktionen gefunden wurden, wird allgemein die Lösung

$y = \frac{x^3}{3} + x + C$ mit $C$ als beliebiger Konstante angegeben. An dieser Stelle wird bereits erwähnt, dass das Integrieren die Umkehrung des Differenzierens sei und dass es sich dabei um das Wiederherstellen der „unversehrten“, noch nicht abgeleiteten Funktion $F(x)$ handle. Der folgende Satz lautet:

„Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist jede weitere Stammfunktion $G(x)$ von $f(x)$ in der Form $G(x) = F(x) + C$ darstellbar.“ [Timischl & Kaiser, 2007, S. 197]

Die Autoren begründen dies wie folgt:

Sind $G(x)$ und $F(x)$ zwei beliebige Stammfunktionen von $f(x)$, so gilt für alle $x$ des betrachteten Intervalls:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Die Ableitung einer konstanten Funktion ist 0. Es gilt aber auch, was die Autoren nicht näher begründen, die Umkehrung. Sie schreiben, aus $(G(x) - F(x))'$ ist identisch null folgt, dass $G(x) - F(x)$ konstant ist, und somit gilt: $G(x) = F(x) + C$

Unmittelbar im Anschluss daran folgt eine Definition mit Anmerkungen und Aufgaben zum unbestimmten Integral. Anhand einer Bewegungsaufgabe „Ein Körper wird […] senkrecht mit der Geschwindigkeit $v_0$ nach oben geworfen“ wird die Bedeutung der Integrationskonstante erläutert.

***Kritik:*** *Für mich stellt sich die Frage, inwieweit für SchülerInnen der Beweis über Stammfunktionen (identisch null?) verständlich ist. Ich bin der Meinung, dass solche Formulierungen in einem Schulbuch nicht angebracht sind, wenn diese nicht näher erläutert werden. Außerdem sollten die Autoren nicht verstecken, dass es hier etwas zu begründen gäbe. Timischl/Kaiser zeigen nur die eine Richtung des Beweises und lassen die andere unter den Tisch fallen. Dies müsste aber auch festgestellt werden, andernfalls darf von SchülerInnen nicht erwartet werden, dass diese es richtig machen.*

### 6.3.4. Hauptsatz bei Timischl/Kaiser

Im nächsten Abschnitt des Buches wird der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besprochen. Dieser wird zuerst begründet und danach als Satz festgehalten. Die Autoren erklären, dass bisher immer angenommen wurde, dass zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ immer eine Stammfunktion $F(x)$ existiert. Diese Annahme wollen Timischl/Kaiser für stetige Funktionen verifizieren. Anhand der Flächeninhaltsbestimmung zwischen den Grenzen $a$ und $x$ ($x$ variabel) soll dies gelingen. Auf Grund der variablen oberen Grenze $x$ wird die Integrationsvariable mit $t$ bezeichnet.

Dies wird bei Timischl/Kaiser folgendermaßen dargestellt [Timischl & Kaiser, 2007, S. 201]:

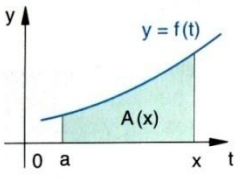



Abb. 6.14 Flächenfunktion

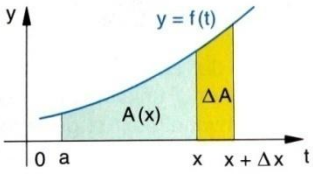



Abb. 6.15 Flächenzuwachs

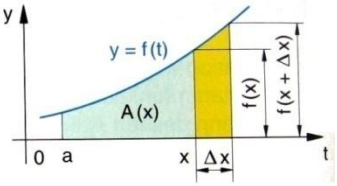



Abb. 6.16 Abschätzung des Flächenzuwachses

$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist geometrisch gedeutet, der (orientierte) Flächeninhalt zwischen den Grenzen a und x, der nun eine Funktion der oberen Grenze x ist. Wir nennen diese Funktion **Flächenfunktion** oder **Integralfunktion** A(x). Vergrößert man die obere Grenze x um $\Delta x$ (Abb. 6.15), so ändert sich A(x) um $\Delta A$. Aus Abb. 6.16 entnimmt man eine Abschätzung von $\Delta A$ durch die Flächeninhalte zweier Rechtecke:

$f(x) \cdot \Delta x \leq \Delta A \leq f(x + \Delta x) \cdot \Delta x.$

Dividiert man durch $\Delta x$, so erhält man $f(x) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x).$

In dieser Ungleichung wird nun der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ausgeführt:

$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x).$

Wegen $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = A'(x)$, $\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$ und $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$ folgt:

$f(x) \leq A'(x) \leq f(x)$, was bedeutet, dass $A'(x) = f(x)$ ist.

Das heißt aber gerade, dass die Flächenfunktion $A(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist! Da Flächenfunktionen bei stetigen Funktionen $y = f(t)$ sinnvoll gebildet werden können (siehe Anmerkung (1), Seite 192), besitzt jedenfalls eine auf einem Intervall stetige Funktion eine Stammfunktion.

Daraus folgt weiters eine elegante Möglichkeit der Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(t)\ dt$. Ist nämlich $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion einer stetigen Funktion $f(t)$, so unterscheidet sie sich nach dem Satz auf Seite 197 von der besonderen Stammfunktion $A(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ nur durch Addition einer Konstanten: $F(x) = A(x) + C$. Daraus folgt:

$$F(b) - F(a) = A(b) + C - [A(a) + C] = A(b) - A(a) = \int_a^b f(t)\ dt,$$

da $A(a) = \int_a^a f(t)\ dt$ gleich null ist.

Die bisherigen Überlegungen fasst der folgende fundamentale Satz zusammen:

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

Es sei $f(t)$ eine auf einem Intervall $I$ stetige Funktion.

**a)** Die Funktion $A(x) = \int_a^x f(t)\ dt\ (a, x \in I)$ ist eine Stammfunktion von $f(t)$, d.h. $A'(x) = f(x)$.

**b)** Ist $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(t)$, so gilt für beliebige $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Der Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren wird kurz in zwei Sätzen erwähnt: „Jede Flächenfunktion $A(x)$ ist eine Stammfunktion und kann als solche durch ‚umgekehrtes Differenzieren' ermittelt werden." [Timischl & Kaiser, 2007, S. 201]

Des Weiteren erwähnen die Autoren, dass, wenn keine Stammfunktion existiert, zur Berechnung des bestimmten Integrals numerische Methoden verwendet werden können.

Zwei Musterbeispiele über das Berechnen von Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen, ein Hinweis über das Berechnen von Integralen mit dem Taschenrechner „TI89", eine Tabelle über Grundintegrale, eine Zusammenfassung und Aufgaben schließen das Kapitel ab.

***Kritik:*** *Der Hauptsatz wird wie bei Malle u. a. unter der Voraussetzung, dass die Funktion $f(x)$ stetig ist, bewiesen. An der Stelle, wo die Stetigkeit eine entscheidende Rolle spielt, nämlich beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$, wird im Beweis aber nicht explizit darauf hingewiesen. Zwei Zeilen später wird erwähnt, dass Flächenfunktionen bei stetigen Funktionen sinnvoll gebildet werden können und auf die Anmerkung (1), Seite 192, verwiesen, wo geschrieben steht:*

> „Integrierbar sind, was nicht weiter begründet wird, vor allem die stetigen Funktionen und auch die stückweise stetigen Funktionen. Für die Integrierbarkeit einer Funktion bestehen weniger strenge Forderungen als für die Differenzierbarkeit." [Timischl & Kaiser, 2007, S. 192]

*Hier führen die Autoren den/die LeserIn in die Irre, indem sie auf eine Anmerkung verweisen, die nicht näher begründet wird.*

*Mit Hilfe der Information, dass sich zwei Stammfunktionen nur um eine additive Konstante unterscheiden, wird dann der Zweite Hauptsatz aus dem Ersten abgeleitet. Dass beziehungsweise inwieweit die Differential- und Integralrechnung zusammenhängen, wird nur in einer Randbemerkung erwähnt. SchülerInnen bleibt verborgen, was das „Tangentenproblem" und das „Flächeninhaltsproblem" gemeinsam haben.*

### 6.3.5. Integrationsmethoden

Nachdem das Berechnen von Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen besprochen (und geübt) wurde, folgen Integrationsmethoden. Aus der Differentialrechnung folgern Timischl/Kaiser die Faktor- und die Summenregel [Timischl & Kaiser, 2007, S. 206]:

**Faktorregel:** $\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

Ein konstanter Faktor a kann vor das Integralzeichen gesetzt werden.

**Summenregel:** $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Eine endliche Summe (Differenz) von Funktionen kann gliedweise integriert werden.

Nach einem Musterbeispiel und weiteren Aufgaben folgen Integration durch Substitution, partielle Integration und die Partialbruchzerlegung.

***Kritik:*** *Zu allen Integrationsmethoden findet man Musteraufgaben mit hilfreichen Hinweisen zur Vorgehensweise. Die Autoren behandeln auch das Thema der Partialbruchzerlegung, wodurch gebrochenrationale Funktionen integriert werden können. An dieser Stelle wird auch darauf aufmerksam gemacht, dass die Partialbruchzerlegung später bei der Laplace-Transformation (Ingenieur-Mathematik 4) benötigt werden wird, was ein guter Hinweis ist. Timischl/Kaiser erwähnen, dass die Zerlegung in Partialbrüche immer in eindeutiger Weise möglich sei, dies aber nicht näher begründet werden könne* [Timischl & Kaiser, 2007, S. 214].

### 6.3.6. Numerische Integration

Die Autoren weisen darauf hin, dass in Fällen, in denen die Integration zu aufwendig ist, numerische Integrationsverfahren verwendet werden, und sich so der Wert des Integrals zwar nur näherungsweise, dafür aber beliebig genau berechnen lässt. Nach und nach werden folgende Methoden erläutert, auf die an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen werden soll:

Mittelpunkts- oder Tangentenformel: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx M_n = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+0,5})$

Trapezformel: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

Keplerformel: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{\mathrm{b-a}}{6} \cdot [f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$

Simpsonformel: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{\mathrm{b-a}}{6 \cdot \mathrm{n}} \cdot [f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + \cdots +$

$4 \cdot f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]$

***Kritik:*** *Die Näherungsverfahren werden zum Teil sehr anschaulich begründet und anhand von Musteraufgaben vorgestellt. Die Kepler-Formel wird kaum begründet und die Simpsonformel als mehrfache Anwendung derselben hergeleitet. Die Autoren gehen auch auf die Fehlerschranken ein, ohne dies näher zu begründen. CAS werden nicht verwendet, dafür werden Programme aufgelistet, mit denen der Taschenrechner programmiert werden kann, um so damit das eine oder andere Näherungsverfahren anzuwenden. Die numerische Integration ist sehr nützlich und auch hilfreich. Leider wird sehr schnell vorangegangen und wenig begründet. Hier scheinen die Autoren das Hauptaugenmerk auf die Anwendung gerichtet zu haben. Es scheint ihnen wichtig zu sein, dass die SchülerInnen so rasch wie möglich Integrale ausrechnen können. Aufgrund der begrenzten Zeit an Schulstunden im Unterricht ist eine ausführlichere Behandlung des Themas vermutlich nicht möglich.*

### 6.3.7. Uneigentliches Integral

Im letzten Unterkapitel vor dem nächsten großen Kapitel „Anwendung der Integralrechnung“ wird das uneigentliche Integral behandelt. Hier unterscheiden die Autoren zwischen zwei Typen: Einmal ist das Integrationsintervall unbeschränkt und das andere Mal der Integrand. Die Integrationsaufgaben sind in beiden Fällen als Grenzwertaufgaben anzusehen. Wenn der Grenzwert existiert, spricht man von einem „uneigentlichen Integral“.

***Kritik:*** *Anhand der Bestimmung der Fluchtgeschwindigkeit wird sehr schön gezeigt, inwiefern das uneigentliche Integral in der Praxis von Nutzen sein kann. Es folgen einige Aufgaben (unter anderem auch einige Praxisbeispiele), die zur Übung für die SchülerInnen gedacht sind. Mit zwei Seiten Erklärung und zwei Seiten Aufgaben ist dieses Kapitel relativ kurz gehalten, wobei ich die Aufgaben als gut gewählt und die Erklärungen als verständlich empfinde.*

### 6.3.8. Anwendung

Im zweiten großen Teil des Lehrbuches von Timischl/Kaiser wird ausführlich über die Anwendung des Integrals berichtet. Ich möchte dies kurz zusammenfassen.

Zuerst wird gezeigt, dass für Funktionen, deren Funktionswerte nicht überall positiv sind, gewisse Punkte beachtet werden müssen, wenn mit Hilfe der Integralrechnung der Flächeninhalt berechnet werden soll. Ebenfalls behandelt wird die Berechnung des Flächeninhalts zwischen zwei Graphen.

Es folgen typische Aufgaben zur Berechnung von Rotationskörpern. Einmal wird um die $x$-Achse und einmal um die $y$-Achse rotiert. Danach möchte man Bogenlängen ebener Kurven berechnen, um sich anschließend wieder der Berechnung von Volumina zu widmen. Diesmal wird jedoch kein Rotationskörper sondern ein Zylinderhuf mit Hilfe von Volumselementen berechnet. Im Anschluss daran folgt ein Überblick über das bereits Gelernte und Übungsaufgaben.

Danach wird mit Hilfe der Integralrechnung der Schwerpunkt verschiedener geometrischer Figuren berechnet. Für den Schwerpunkt von Rotationskörpern werden die erste und die zweite Guldin'sche Regel behandelt. Es folgen wieder ein Überblick und Rechenaufgaben.

Die letzten Anwendungen, die behandelt werden, sind das Trägheitsmoment, Biegelinien und abschließend der „Mittelwert von Funktionen".

***Kritik:*** *In diesem Kapitel wird viel Wert auf die Anwendung gelegt. Dabei wird immer wieder die Bedeutung des Integrals thematisiert. So weisen die Autoren darauf hin, dass es sich bei der Flächenberechnung um orientierte Flächeninhalte handelt. Bei der Berechnung des Volumens von Rotationskörpern wird erwähnt, dass es sich bei der Integration um das Aufsummieren von Volumselementen handelt. Bei der Berechnung der Bogenlänge werden alle Linienelemente summiert. Mit diesen Methoden*

*werden in Folge zum Beispiel der Umfang eines Kreises durch Integration von Linienelementen, der Flächeninhalt eines Kreises durch Integration von Flächenelementen oder das Volumen einer Kugel durch Integration von Volumselementen berechnet. Ich denke, hier wird sehr anschaulich gezeigt, dass außerhalb der Grundvorstellung, das Integral als Flächeninhalt zu interpretieren, noch andere Zusammenhänge existieren. Auch im anschließenden Kapitel, das der Berechnung des Schwerpunktes gewidmet ist, wird auf die Bedeutung des Integralsymboles hingewiesen: „Das Symbol* $\int_m$ *drückt aus, dass über alle Massenelemente* $\mathrm{d}m$ *des Körpers zu summieren, d.h. zu integrieren ist."* [Timischl & Kaiser, 2007, S. 249] *Der physikalische Begriff des Trägheitsmomentes wird zum Beispiel so erklärt:*

> „Der Körper mit Masse $m$ wird in Massenelemente $\mathrm{d}m$ zerlegt und für jedes Element das elementare Trägheitsmoment $dI = r^2 \cdot \mathrm{d}m$ bezüglich der Drehachse gebildet. Wird die Anzahl der Massenelemente beliebig groß und jedes einzelne Element unbegrenzt klein, so wird aus der Summe über alle elementaren Trägheitsmomente das bestimmte Integral $I = \int_m r^2 \mathrm{d}m$, das Massenträgheitsmoment des gesamten Körpers." [Timischl & Kaiser, 2007, S. 260]

*Auch hier kommt demnach das Grundverständnis der „Produktsumme" zur Sprache. Interessant ist auch die Berechnung der Biegelinie, wobei es hier sehr technisch wird und Differentialgleichungen eine Rolle spielen, die bisher eigentlich noch gar nicht behandelt wurden. Es wird die so genannte „Querkraft"* $Q(x)$ *als die Summe aller senkrecht wirkenden Kräfte vom Auflagepunkt* $F_A$ *(das ist die Kraft, die den senkrecht wirkenden Kräften entgegenwirkt) bis zur Entfernung* $x$ *auf einen Träger definiert:* $Q(x) = F_A - \int_0^x q(x)\mathrm{d}x$*. Die Größe* $q(x)$ *ist dabei die Streckenlast und beschreibt zum Beispiel die kontinuierliche Belastung eines Trägers durch Schüttgut. Die Last auf einem Träger der Breite* $\mathrm{d}x$ *ist demnach näherungsweise* $q(x) \cdot \mathrm{d}x$*. Der gesamte Träger erfährt somit eine Last, die sich durch die Summe dieser Produkte berechnen lässt. Jetzt verweisen die Autoren auf den Hauptsatz und folgern daraus den Zusammenhang* $Q'(x) = -q(x)$*. Der Aspekt des Produktsummenbildens kommt hier meiner Meinung nach wieder sehr gut zum Tragen. Der Rest des Kapitels*

*wird, wie bereits erwähnt, relativ technisch unter Einsatz von Differentialgleichungen und CAS abgerundet.*

*Im letzten Kapitel „Mittelwerte von Funktionen“ wird der Mittelwert* $m_1 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *einer Funktion im Intervall* $[a; b]$ *definiert und daraus gefolgert, dass deshalb zu gelten habe, dass der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der* $x$*-Achse gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit Seitenlänge* $m_1$ *und* $b - a$ *sein muss. Hier existiert also per Definition ein Mittelwert. Die meisten folgenden Beispiele spielen in der Elektrotechnik eine Rolle (zum Beispiel Effektivwert, Gleichrichtwert, Wirkleistung eines sinusförmigen Wechselstroms).*

## 6.4. Schlussfolgerung

Beide Lehrbücher erfüllen meines Erachtens ihren Zweck. Die AutorInnen der beiden Schulbücher „Mathematik verstehen 8“ und „Ingenieur-Mathematik 4“ erfüllen voll und ganz die Anforderungen des Lehrplanes.

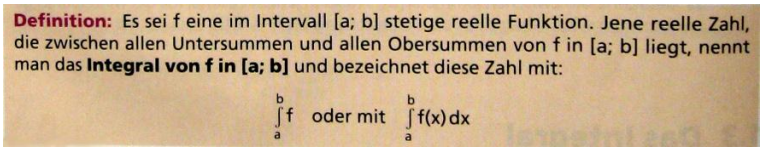
| **AHS Lehrplan** | **Mathematik verstehen 8** |
|---|---|
| Stammfunktionen ermitteln | erfüllt |
| Definition des bestimmten Integrals | erfüllt |
| Deutung des bestimmten Integrals | erfüllt |
| Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren | erfüllt |
| Hauptsatz | erfüllt |
| Berechnung des best. Int. mit Hilfe von Stammfunktionen | erfüllt |
| Deutungen des Integrals als Flächeninhalt | erfüllt |
| Deutungen des Integrals als Volumen | erfüllt |
| Physikalische Deutung des Integrals | erfüllt |

| **HTL Lehrplan** | **Ingenieur-Mathematik 3** |
|---|---|
| Bestimmtes Integral | erfüllt |
| Unbestimmtes Integral | erfüllt |
| Integration elementarer Funktionen | erfüllt |
| Anwendungen der Integralrechnung | erfüllt |
| Numerische Integration | erfüllt |

Es ist sehr deutlich zu erkennen, dass die Autoren des HTL-Lehrbuchs in den Kapiteln zur Integralrechnung sehr viel mehr Wert auf die Anwendung, im Sinne physikalischer Aufgaben, legen. Malle u. a. versuchen hingegen, mehr im mathematischen Sinn, exakter zu argumentieren. Bei der Vorgehensweise unterscheiden sich die beiden Lehrbücher massiv. Bei Malle u. a. finde ich förderlich, wie Schritt für Schritt auf den Begriff des Integrales vorbereitet wird. Wieso am Beginn der Bezug zur Integralrechnung unerwähnt bleibt, ist allerdings unverständlich. Ich denke, so wie bei Timischl/Kaiser, die durch ihre kurze Einleitung von Anfang an die „Karten offen auf den Tisch“ legen, ist für SchülerInnen ab der ersten Seite klar, wozu jetzt Flächen unter Graphen beziehungsweise vor allem das Finden von Stammfunktionen wichtig sein könnte. In beiden Schulbüchern findet man gleich zu Beginn Aufgaben anhand derer „Bestandsfunktionen“ aus „Änderungsratenfunktionen“ rekonstruiert werden können: bei Timischl/Kaiser das Beispiel über die Zuflussgeschwindigkeit und bei Malle das Beispiel zur Berechnung von Weglängen. Beide Lehrbücher fassen diesen Aspekt jedoch nicht explizit auf.

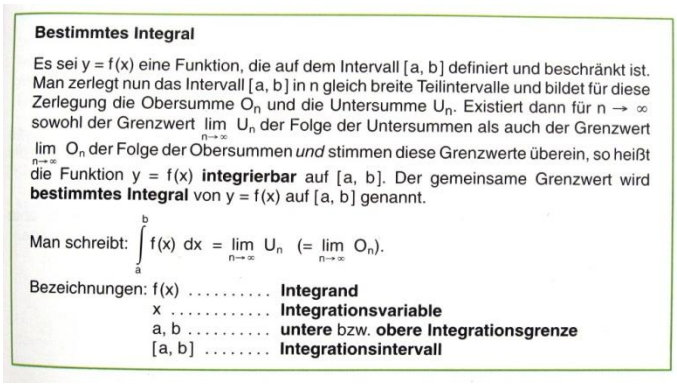
Die Definition des bestimmten Integrals wird in den beiden Lehrbüchern sehr unterschiedlich formuliert. Hier noch einmal der Vergleich:

Malle u. a.:


**Definition:** Es sei f eine im Intervall [a; b] stetige reelle Funktion. Jene reelle Zahl, die zwischen allen Untersummen und allen Obersummen von f in [a; b] liegt, nennt man das **Integral von f in [a; b]** und bezeichnet diese Zahl mit:

$$\int_a^b f \quad \text{oder mit} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Timischl/Kaiser:


**Bestimmtes Integral**

Es sei $y = f(x)$ eine Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert und beschränkt ist. Man zerlegt nun das Intervall $[a, b]$ in n gleich breite Teilintervalle und bildet für diese Zerlegung die Obersumme $O_n$ und die Untersumme $U_n$. Existiert dann für $n \to \infty$ sowohl der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} U_n$ der Folge der Untersummen als auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} O_n$ der Folge der Obersummen *und* stimmen diese Grenzwerte überein, so heißt die Funktion $y = f(x)$ **integrierbar** auf $[a, b]$. Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Integral** von $y = f(x)$ auf $[a, b]$ genannt.

Man schreibt: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U_n \quad (= \lim_{n\to\infty} O_n)$.

Bezeichnungen:
- $f(x)$ ..... **Integrand**
- $x$ ..... **Integrationsvariable**
- $a, b$ ..... **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**
- $[a, b]$ ..... **Integrationsintervall**

Während Malle u. a. nur vier Zeilen für die Definition benötigen, verwenden Timischl/Kaiser einen ganzen Absatz. Hier ist die erste Variante wesentlich kompakter und bietet mehr Übersicht.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird bei Timischl/Kaiser verhältnismäßig rasch dargebracht, bei Malle u. a. erst relativ spät. In beiden Lehrbüchern wird der Hauptsatz begründet, wobei ebenfalls in beiden Büchern der Zweite Hauptsatz jeweils mit Hilfe des Ersten Hauptsatzes bewiesen wird. Im Lehrbuch „Mathematik verstehen 8“ wird der Zweite Hauptsatz nicht als solcher bezeichnet, dafür unabhängig vom Ersten separat bewiesen (noch vor dem Ersten Hauptsatz). Dadurch vermitteln beide AutorInnen relativ rasch die Kompetenz, Integrale mittels Stammfunktionen bequem zu berechnen.

Bei Malle u. a. wird nach dem Hauptsatz noch einmal in einem separaten Kapitel erklärt, inwiefern Differenzieren und Integrieren zusammenhängen. Timischl/Kaiser dagegen widmen dieser wichtigen Erkenntnis nur zwei Zeilen.

Es steht in beiden Schulbüchern das Berechnen von Flächeninhalten als Grundvorstellung des Integrales im Vordergrund. Bei Malle u. a. kommt noch die Berechnung von Weglängen dazu. Danach wird in verschiedenen Kontexten das Integral als „Summe von Produkten“ gedeutet. Der wichtige Aspekt, dass das Integral als orientierter Flächeninhalt gedeutet werden kann, kommt bei Malle u. a. erst sehr spät zur Sprache (und nur in einem Satz). Timischl/Kaiser sprechen diesen Aspekt dagegen gleich zu Beginn an. Ansonsten bieten beide Bücher viele verschiedene Anwendungskontexte der Integralrechnung, anhand derer der Integralbegriff unabhängig vom Flächeninhalt gedeutet werden kann.

In „Ingenieur-Mathematik 3“ wird immer wieder auf die graphikfähigen Taschenrechner „Voyage 200“ beziehungsweise „TI 89“ hingewiesen. Mit selbstgeschriebenen Programmen können mit diesem Unter- und Obersummen berechnet werden. Malle u. a. weisen nicht explizit auf CAS hin. Ich würde im Unterricht auf jeden Fall „GeoGebra“ verwenden, damit SchülerInnen ein besseres Gefühl für Unter- und Obersummen bekommen. In Büchern ist dies

natürlich schwer, vielleicht auch gar nicht möglich, einen mathematischen Zusammenhang dynamisch zu visualisieren.

Eine Präzisierung des Integralbegriffes am Ende des jeweiligen Abschnitts wäre in beiden Lehrbüchern möglich, wird von den AutorInnen jedoch ausgespart.

# 7. Eigene Darstellung

In diesem Kapitel möchte ich meine Erkenntnisse aus den Recherchen der Fachliteratur und den beiden Lehrbüchern „Mathematik verstehen 8“ und „Ingenieur-Mathematik 3“ zusammenfassen.

**Darstellungsskizze:**

- Einführungsbeispiel: Badewanne mit Wasser füllen (Grundvorstellung von Integrieren heißt Rekonstruieren)
- Einführung der Integralfunktion (beziehungsweise Flächeninhaltsfunktion) und (exakte) Berechnung dieser anhand stückweise definierter, linearer Funktionen
- Erweiterung des Badewannenbeispiels (Berechnung von Flächeninhalten krummlinig begrenzter Flächen)
- Einführung von Ober- und Untersummen
- näherungsweises Berechnen der Flächeninhaltsfunktion mit Hilfe von GeoGebra
- Definition „bestimmtes Integral“
- Einführung von Stammfunktionen mittels Bewegungsaufgaben
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Erarbeiten von Regeln zur Berechnung von Stammfunktionen
- Integrationsmethoden und verschiedene Deutungen des Integrals
- Exaktifizierung

## 7.1. Einstieg „Integrieren heißt Rekonstruieren“

Für den Einstieg in die Integralrechnung favorisiere ich die Grundvorstellung „Integrieren heißt Rekonstruieren“, so wie Büchter/Henn (2010) (Beschleunigung eines Zuges in den ersten 500 Sekunden) beziehungsweise Danckwerts/Vogel (2006) (Badewannenbeispiel) dies vorschlagen und in

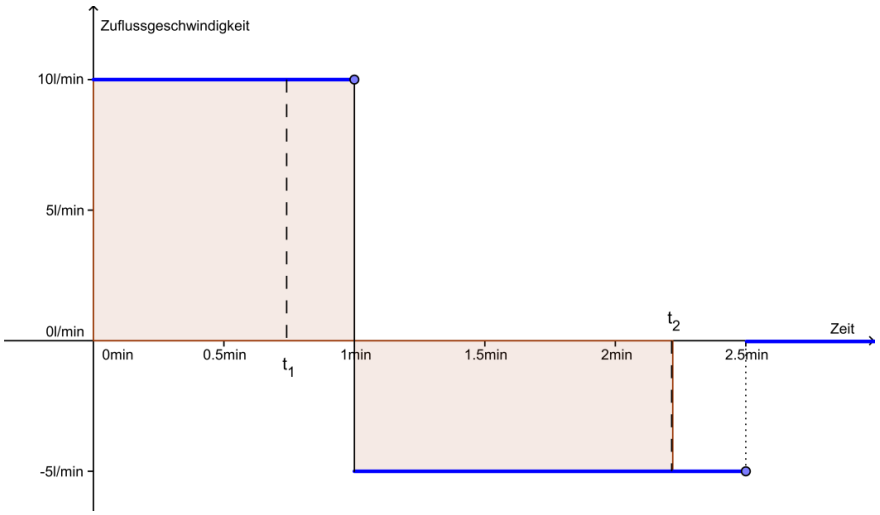
Kapitel 3.3.5 zusammengefasst wurde. Meiner Ansicht nach sprechen mehrere Aspekte für diesen Einstieg:

- Es handelt sich um ein realitätsbezogenes Einführungsbeispiel.
- SchülerInnen können dieses Beispiel sehr gut selber erarbeiten.
- Es ist eine wichtige Grundvorstellung, dass durch Aufsummieren von Rechteckflächen (Produkten) die Wegzunahme exakt rekonstruiert werden kann.
- Der geometrische Aspekt des orientierten Flächeninhaltes kommt zur Sprache (negative Flächenstücke lassen sich als negative Geschwindigkeiten interpretieren).
- Die Idee „Integrieren heißt Rekonstruieren“ ist sehr vielseitig anwendbar.

**Beispiel: Badewanne füllen**

Eine zunächst leere Badewanne wird für eine Minute gleichförmig mit Wasser gefüllt. Danach wird die Wasserzufuhr gestoppt und gleichzeitig für 1,5 Minuten der Abfluss geöffnet, wodurch das Wasser gleichförmig abfließen kann, bevor dieser wieder geschlossen wird [Danckwerts & Vogel, 2005, S. 206].

Zuerst veranschaulichen wir die Zuflussgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit durch eine Skizze, wenn für die Zuflussgeschwindigkeit 10 $l/min$ und für die Abflussgeschwindigkeit 5 $l/min$ angenommen werden.



Jetzt interessiert uns die vorhandene Wassermenge zu einem beliebigen Zeitpunkt.

Anhand der Graphik kann dies zu jedem Zeitpunkt berechnet werden. Nach zwei Minuten befinden sich zum Beispiel fünf Liter Wasser in der Badewanne (nach einer Minute befinden sich 10 $l$ Wasser in der Wanne, danach fließen für eine Minute 5 $l$ Wasser ab). Für einen beliebigen Zeitpunkt $t_1$, während das Wasser zufließt, erhalten wir allgemein den Term:

$$10\frac{l}{min} \cdot t_1 min = 10 \cdot t_1\, l$$

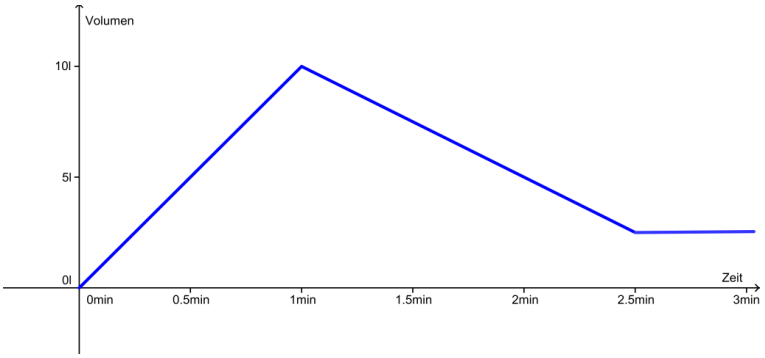
Wollen wir einen allgemeinen Term für die Abflussphase bestimmen, müssen wir von der zugeflossenen Wassermenge die bis zum Zeitpunkt $t_2$ wieder abgeflossene Wassermenge abziehen. Algebraisch müssen wir dazu nur den Flächeninhalt des Rechtecks unterhalb der Zeitachse bis zum Zeitpunkt $t_2$ vom Flächeninhalt des Rechtecks oberhalb der Zeitachse abziehen:

$$10 \cdot 1 - 5(t_2 - 1) = 15 - 5t_2 l$$

Nachdem nach 2,5 $min$ der Abfluss wieder geschlossen wurde, befinden sich ab diesem Zeitpunkt konstant 2,5 $l$ Wasser in der Badewanne (10 $l$ – 7,5 $l$ = 2,5 $l$).

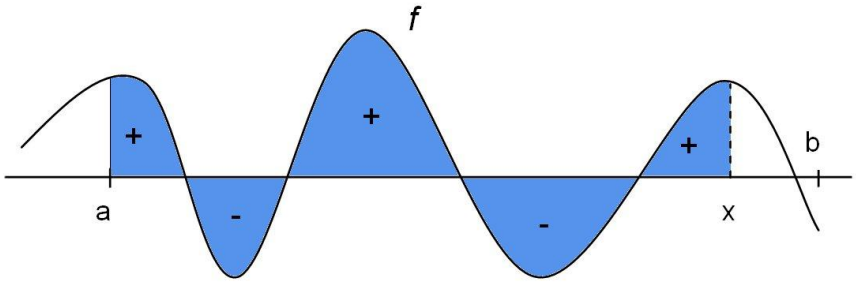
Zusammengefasst können wir für das vorhandene Wasservolumen $V$ in Abhängigkeit von der Zeit $t$ schreiben:

$$V(t) = \begin{cases} 10t & \text{für} \quad 0 \le t \le 1 \\ 15 - 5t & \text{für} \quad 1 < t \le 2{,}5 \\ 2{,}5 & \text{für} \quad t > 2{,}5 \end{cases}$$



Aus den Angaben der Zufluss- und Abflussgeschwindigkeit wurde die Bestandsfunktion $V(t)$ rekonstruiert, wobei $V(t)$ eine Summe von vorzeichenbehafteten Rechteckflächen ist. Wird einem Flächeninhalt ein Vorzeichen zugeordnet, so wird er als „orientierter Flächeninhalt“ bezeichnet.

**Definition:** Wird der Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der $x$-Achse ein Vorzeichen zugeordnet, spricht man von einem „orientierten Flächeninhalt“. Dabei wird diesen Flächen oberhalb der $x$-Achse ein positives und unterhalb der $x$-Achse ein negatives Vorzeichen zugeordnet.




Nach diesem Beispiel sollten SchülerInnen wissen, was unter einem „orientierten Flächeninhalt“ verstanden wird, und dass aus einer bekannten Änderungsratenfunktion die Bestandsfunktion durch Aufsummieren orientierter Flächeninhalte rekonstruiert werden kann.

Somit kann schon in einer ersten Form der Begriff des Integrals thematisiert werden. Ist die Änderungsratenfunktion in einem Intervall bekannt, so lassen sich durch Aufsummieren von orientierten Flächeninhalten die Werte der Bestandsfunktion rekonstruieren. Diese rekonstruierten Funktionswerte nennt man „Integrale“.

Beispiele:

| **Änderungsratenfunktion** | **Bestandsfunktion** |
|---|---|
| Geschwindigkeit | Weg |
| Beschleunigung | Geschwindigkeit |
| Zuflussgeschwindigkeit | Volumen |
| Steigung | Höhe |

An dieser Stelle bietet es sich an, die SchülerInnen anhand stückweise definierter linearer Funktionen diesen Zusammenhang selber üben zu lassen [Kirsch, 1996, S. 78]:

**Aufgabe 1)**

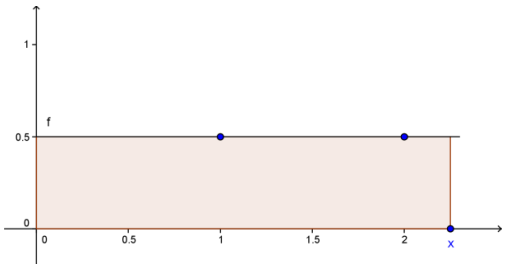
Gegeben ist jeweils der Graph einer Änderungsratenfunktion (interpretiert als Geschwindigkeit eines Fahrzeuges).

a.) Bestimme die Termdarstellung $f(x)$ anhand der gegebenen Graphen und interpretiere das Ergebnis.

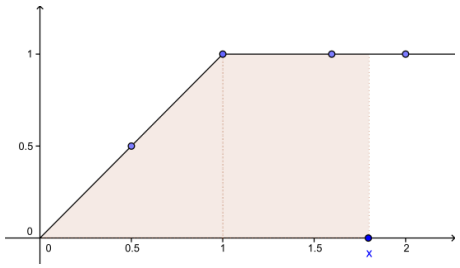
b.) Bestimme mit Hilfe von Flächenformeln für Dreiecke, Rechtecke und Trapeze algebraisch die Integralfunktion $I_a(x)$ (beziehungsweise Flächeninhaltsfunktion). Die zu $f(x)$ gehörige Integralfunktion $I_a(x)$ ist jene Funktion, die jedem $x > a$ den orientierten Flächeninhalt unterhalb des Graphen von $f(x)$ zwischen $a$ und $x$ zuordnet.

c.) Zeichne den Graphen der Integralfunktion und interpretiere das Ergebnis.

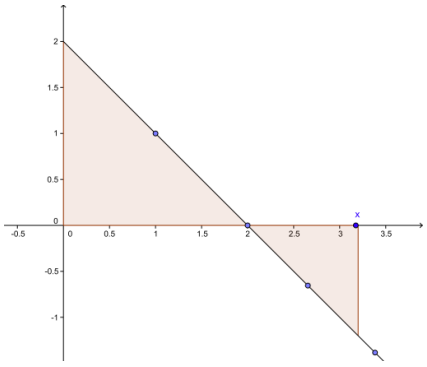
**a.)**



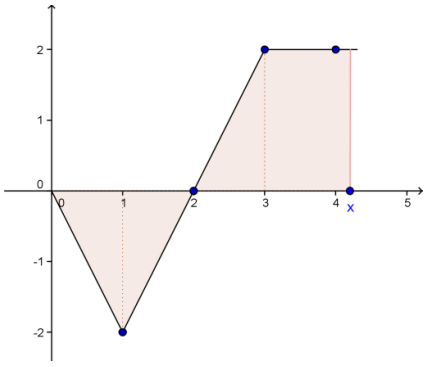

**b.)**




**c.)**

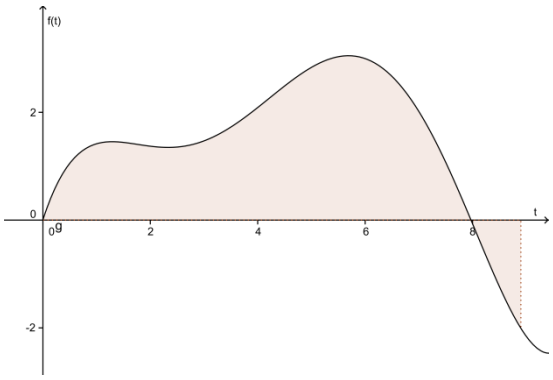



**d.)**



Diese Aufgaben halte ich deshalb für sinnvoll, weil hier zwei wichtige Aspekte behandelt werden: Einerseits wird die Deutung eines orientierten Flächeninhalts klar, andererseits wird der für SchülerInnen ungewohnte Sachverhalt geübt, dass Flächen durch Strecken darstellbar sind.

Im nächsten Schritt wird das Badewannenbeispiel erweitert. Es spricht nichts dagegen, dass die Zuflussgeschwindigkeit nicht konstant ist, sondern etwa so verläuft, wie in folgender Graphik dargestellt:




Wir kommen nun zu dem Problem, Flächeninhalte krummlinig begrenzter Flächen zu berechnen. Dazu betrachten wir die Zuflussgeschwindigkeit in kleinen Zeitintervallen als nahezu konstant. Dadurch kann der Flächeninhalt durch Rechtecksflächen approximiert werden.

## 7.2. Einführen von Unter- und Obersummen

Die Idee, die Zuflussgeschwindigkeit in kleinen Intervallen als konstant anzunehmen, bietet an, in einem nächsten Schritt Unter- und Obersummen einzuführen sowie diese genauer zu untersuchen.

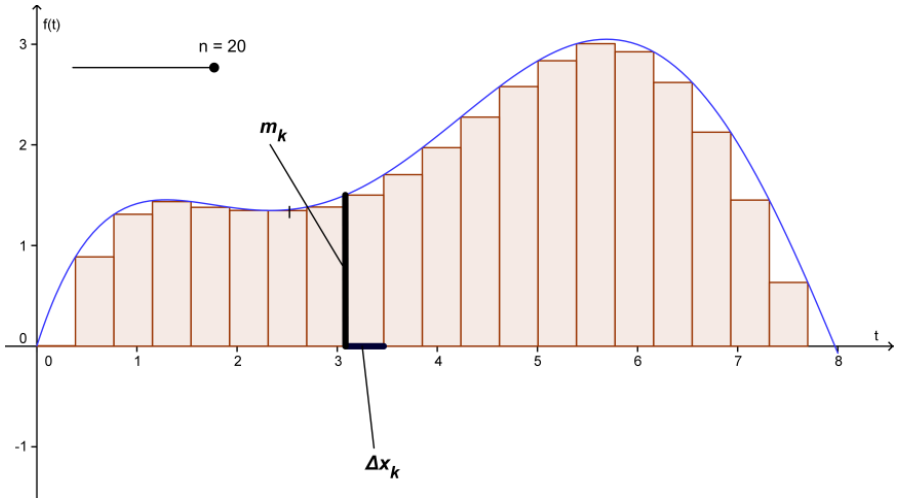
Dabei unterteilen wir das Intervall $[a; b]$ in $n$ Teilintervalle der Länge $\Delta x_n = \frac{b-a}{n}$ und bestimmen in jedem Teilintervall einen größten $(M_k)$ und einen kleinsten $(m_k)$ Funktionswert einer gegebenen Funktion $f(x)$. Die Untersumme $U_n$ und die Obersumme $O_n$ können dann folgendermaßen definiert werden:

$$O_n := M_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

$$U_n := m_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + m_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$

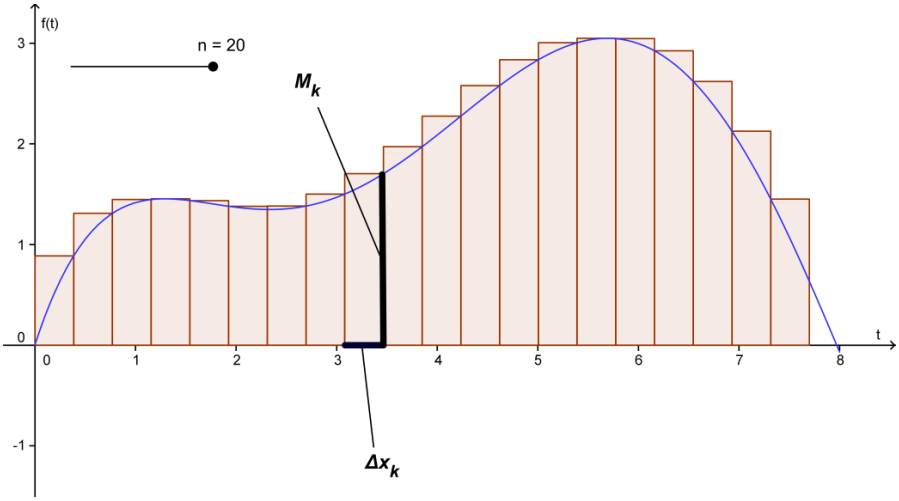
Für eine graphische Visualisierung eignet sich meiner Meinung nach die dynamische Mathematiksoftware „GeoGebra“ am besten:

**Untersumme:**




$$U_n := m_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + m_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$

**Obersumme:**




$$O_n := M_1 \cdot \Delta x_1 + \cdots + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$$

Es bietet sich an, SchülerInnen selber am Computer experimentieren zu lassen. Sind nicht genügend Computer vorhanden, wäre es sinnvoll, dass die Lehrperson die einzelnen Arbeitsschritte mit Hilfe eines Projektors in der Klasse vorzeigt. Mit Hilfe von GeoGebra wird sehr anschaulich gezeigt, dass durch das Aufsummieren von Rechtecken der Flächeninhalt beliebig genau berechnet werden kann. Die Vermutung liegt nahe, dass in Bezug auf GeoGebra die Integralfunktion $I_a(x)$ beliebig genau berechnet werden kann, wenn nur die Anzahl $n$ der Teilintervalle entsprechend angepasst wird. Das heißt, Lernende können durch Experimentieren feststellen, dass durch eine beliebig feine Einteilung der Teilintervalle der Flächeninhalt beliebig genau berechnet werden kann.

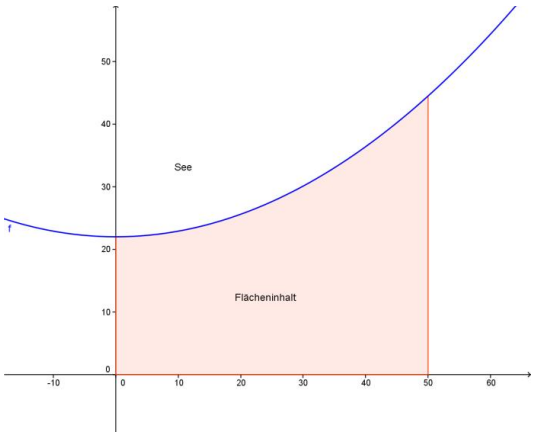
Folgende Aufgabe aus Kapitel 3.3.3 sollten SchülerInnen danach selber lösen können:

**Aufgabe 2) Berechnung von Flächeninhalten mit GeoGebra**

Ein Grundstück, das an einen See grenzt, soll um 10 €/m² verkauft werden.

a.) Wie viel wird der Eigentümer für seinen Grund voraussichtlich bekommen?

b.) Bestimme, wie viele Teilintervalle $n$ mindestens nötig sind, damit die Differenz zwischen Ober- und Untersumme im Intervall $[0; 50]$ kleiner als 1000, 500, 100, 50 beziehungsweise 25 wird.



Die Integralfunktion $I_a(x)$ kann nun zu einer Summe orientierter Rechtecksflächen anhand Ober- und Untersummen erweitert werden:

$$I_a(b) \cong O_n \cong U_n$$

Wählt man anstelle des größten und kleinsten Funktionswertes in jedem Teilintervall den Funktionswert am linken und rechten Intervallende, so ergibt sich im Allgemeinen weder eine Unter- noch eine Obersumme, denn die Minima beziehungsweise Maxima müssen nicht unbedingt an den Intervallenden liegen.

Im Fall streng monoton wachsender Funktionen liegt der kleinste Funktionswert immer am linken Intervallende, deshalb gilt hier:

$$U_n = \Delta x \cdot [f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Analog gilt für die Obersumme, dass der größte Funktionswert immer am rechten Intervallende liegt:

$$O_n = \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

**Bemerkung:** Mit dieser Methode kann für Funktionen, die keine „geschlossene“ Stammfunktion besitzen (zum Beispiel: $e^{-x^2}, \frac{\sin x}{x}, \ldots$), näherungsweise das bestimmte Integral relativ einfach berechnet werden. Dabei wird die Funktion $f$ in jedem Teilintervall durch die konstante Funktion ersetzt und erhält auf diese Weise die so genannte „Rechtecksformel“:

- Funktionswert am linken Intervallende: $RL_n(f) = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$
- Funktionswert am rechten Intervallende: $RR_n(f) = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

Somit kann in weiterer Folge das bestimmte Integral $\int_a^b f$ einer Funktion $f$ in einem Intervall $[a; b]$ als eine Zahl definiert werden, die aus dem Grenzprozess der verallgemeinerten Summation von Produkten hervorgeht.

## 7.3. Definition „bestimmtes Integral“

**Definiton:** Zu einer in einem Intervall $A$ stetigen Funktion $f$ können Unter- und Obersummen berechnet werden. Jene Zahl, die zwischen allen Unter- und Obersummen liegt, wird das „bestimmte Integral“ von $f$ im Intervall $A$ genannt. Symbolisch:

$$U_n \leq I_a(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq O_n$$

Dabei sollten SchülerInnen das Integralsymbol richtig interpretieren. Zur Begriffserklärung ist die (etwas ungenaue) Schreibweise geeignet[16]:

$$I_a(b) \cong \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x \; = \; \sum_{a}^{b} f(x) \cdot \Delta x \xrightarrow{\Delta x \to 0} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Das Summenzeichen wird im Grenzübergang zu einem langgezogenen $\int$ (S) aufgebogen, während gleichzeitig das $\Delta x$ zu einem $\mathrm{d}x$ wird. Das $\mathrm{d}x$ weist nicht nur darauf hin, dass es sich beim Integral um „unendlich dünne“ Rechtecke mit Breite $\mathrm{d}x$ und Höhe $f(x)$ handelt, sondern auch darauf, nach welcher Variablen integriert wird (in der Regel: $\int_a^b x^2 y \,\mathrm{d}x \neq \int_a^b x^2 y \,\mathrm{d}y$). So gesehen lässt sich das bestimmte Integral als „Summe unendlich vieler unendlich kleiner“ Produkte (Rechteckflächen) interpretieren.

Danach ist es meiner Ansicht nach wichtig, die verschiedenen Bedeutungen für $f(x)$ im Intervall $x \in [a; b]$ der Grundvorstellung des Integrals $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$[17], gegenüberzustellen:

[16] Der Einfachheit halber kann für die Untersumme auch die „Rechtecksformel“ verwendet werden (Das heißt, die Summe über Rechteckflächen mit Höhe $f(x_i)$ am linken Intervallende). Dadurch kann die Untersumme näherungsweise dargestellt werden (für streng monoton steigende Funktionen stimmt die linke Rechtecksformel mit der Untersumme wirklich überein).

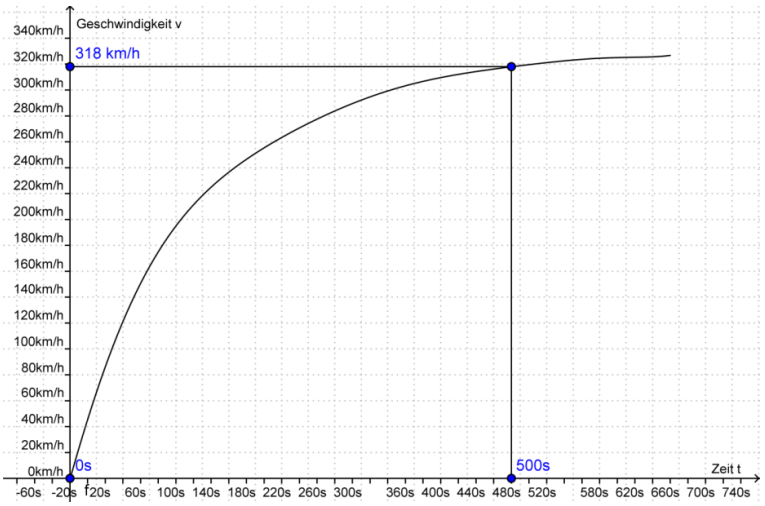
[17] Wie in Kapitel 3.3.2. „Integration als verallgemeinerter Summationsprozess“ beschrieben wurde.

- Wenn $f(x)$ die Ordinate des Punktes auf einer geeigneten Kurve mit der Abszisse $x$ bedeutet, dann ist das zugehörige Integral der orientierte Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der $x$-Achse zwischen $a$ und $b$.
- Wenn $f(x)$ die Geschwindigkeit im Zeitpunkt $x$ bedeutet, dann ist das Integral der zwischen den Zeitpunkten $a$ und $b$ zurückgelegte Weg.
- Wenn $f(x)$ die an der Wegstelle $x$ wirkende Kraftkomponente ist, dann bedeutet das Integral die zwischen den Wegpunkten $a$ und $b$ verrichtete Arbeit.
- … und so weiter.

Als eigenständige Aufgabe könnten SchülerInnen nun versuchen, das folgende Bewegungsbeispiel selber zu erarbeiten [Büchter & Henn, 2010, S. 92].

**Aufgabe 3) Beschleunigung eines Zuges**

Versuche den zurückgelegten Weg anhand des gegebenen $v$-$t$-Diagrammes eines Zuges in den ersten 500 Sekunden zu rekonstruieren. Beachte, dass der zurückgelegte Weg des Zuges über das Produkt von Geschwindigkeit und Zeit ($s = v \cdot t$) berechnet wird. Eine erste Abschätzung wäre zum Beispiel, dass der Zug in den ersten 500 Sekunden sicher mehr als 0 m zurücklegt aber auch weniger als 44,16 km ($\approx 318\ km/h \cdot 500s$).

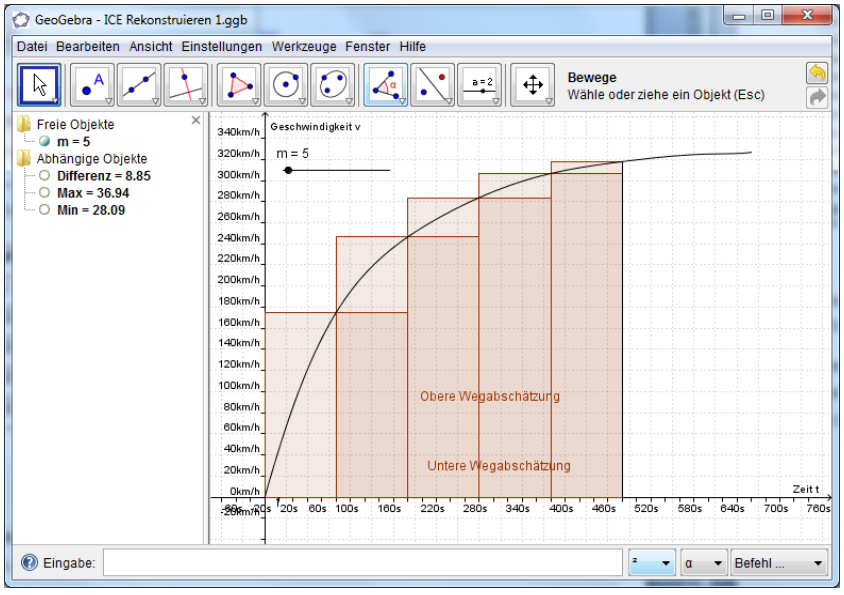


a.) Aufgrund der Ungenauigkeit dieser Abschätzung unterteile das Intervall in $\Delta t = 100s$ und verfeinere so das Ergebnis für den Weg, der maximal beziehungsweise der mindestens zurückgelegt wird (betrachte die Geschwindigkeit in den Teilintervallen als konstant).

| **Zeit $t$ in s** | | **Geschwindigkeit $v$ in km/h** | | **Weg $s$ in km** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Intervall** | **$\Delta t$** | **min** | **max** | **min** | **max** |
| 0-100 | 100 | | | | |
| 100-200 | 100 | | | | |
| 200-300 | 100 | | | | |
| 300-400 | 100 | | | | |
| 400-500 | 100 | | | | |

| **Gesamtweg** |
|---|

b.) In wie viele Teile $n$ muss das Intervall $[0; 500]$ nun unterteilt werden, damit der Unterschied zwischen min$(s)$ und max$(s)$ kleiner als 5 km, 4 km, 3 km, 2 km, 1 km und 500 m wird? Arbeite mit GeoGebra!



**SchülerInnen haben bis jetzt gelernt:**

- … was ein orientierter Flächeninhalt ist und weshalb dieser eingeführt wird. Negative Funktionswerte (Abfluss, Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung) bewirken, dass das Volumen oder der Wegabstand zum Ursprung abnimmt.
- … wie die Integralfunktion (beziehungsweise Flächeninhaltsfunktion) stückweiser definierter linearer Funktionen exakt mit Hilfe von Flächenformeln für Dreiecke, Rechtecke und Trapeze berechnet wird.
- … was Unter- und Obersummen sind und wozu sie benötigt werden.
- … wie näherungsweise das Integral (beziehungsweise der orientierte Flächeninhalt) durch Aufsummieren schmaler Rechteckstreifen bei krummlinig begrenzten Flächen „händisch“ und mit Hilfe von GeoGebra berechnet werden kann.
- … eine erste Definition des Integrals (basierend auf der Grundvorstellung der verallgemeinerten Produktsumme).

**Nächste Schritte/Fragestellungen:**

- Das Einführen von Stammfunktionen.
- Was haben Flächeninhaltsfunktionen mit Stammfunktionen zu tun (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)?
- Wie hängen Differenzieren und Integrieren zusammen?
- Weitere Deutungen beziehungsweise Anwendungen der Integralrechnung.

## 7.4. Stammfunktionen

Nachdem die Grundvorstellung vom Integrieren (als verallgemeinerte Produktsumme) gefestigt wurde, möchte ich auf den Aspekt der Stammfunktionen eingehen. Dabei favorisiere ich den Zugang, der bei Malle

u. a. vorgestellt ist. Die Überlegungen zu Bewegungsaufgaben haben nicht nur einen praktischen Hintergrund (SchülerInnen sind mit den Begriffen vertraut), sondern auch einen historischen (Newton).

**Beispiel: Bewegungsaufgabe**

Ein Auto befindet sich zum Zeitpunkt $t$ am Ort $s(t)$. Es hat dabei die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$.

Dabei gilt: $v(t) = s'(t)$ und $a(t) = v'(t)$

Wie kann $s(t)$ ermittelt werden, wenn

a.) sich das Auto mit einer Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t$ mit annähernd $v(t) = 2t$ $(m/s)$ bewegt und $s(0) = 3$ $(m)$ gilt?

b.) die Beschleunigung des Autos mit $a(t) = a$ $(m/s^2)$ gegeben ist ($a$ konstant) und seine Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 10\ m/s$ beträgt?

**ad a.)** Gesucht ist eine Funktion $s(t)$, deren Ableitung $s'(t) = 2t$ ergibt. Durch Probieren erhält man $s(t) = t^2$ denn $s'(t) = (t^2)' = 2t$.

Auch die Funktion $s(t) = t^2 +$ Konstante würde die Anforderung erfüllen, weil bereits aus der Differentialrechnung bekannt sein sollte (Konstantenlemma), dass die Ableitung der konstanten Funktion Null ergibt. Mit der Bedingung $s(0) = 3$ kann die Konstante bestimmt werden:

$$s(0) = 0^2 + \text{Konstante} = 3 \qquad \Longrightarrow \text{Konstante} = 3$$

Somit ist die Lösung: $s(t) = t^2 + 3$

**ad b.)** Zuerst wird wieder eine Funktion $v(t)$ gesucht, deren Ableitung die Konstante $v'(t) = a$ ergibt. Durch Differenzieren überzeugt man sich, dass $v(t) = a \cdot t +$ Konstante die gesuchte Lösung sein muss. Mit der Bedingung

(wird auch „Anfangsbedingung“ genannt) $v(0) = 10$ bestimmen wir wiederum die Konstante.

$$v(0) = a \cdot 0 + \text{Konstante} = 10 \qquad \Longrightarrow v(t) = a \cdot t + 10$$

Jetzt suchen wir $s(t)$, sodass $s'(t) = v(t)$ mit $s(0) = 3$ erfüllt ist. Auch wenn dies auf den ersten Blick etwas schwieriger erscheint, können SchülerInnen durchaus von selber auf die Lösung kommen:

$$s(t) = \frac{a \cdot t^2}{2} + 10 \cdot t + 3$$

$$(s'(t) = at + 10 = v(t))$$

Folgende Aufgabe könnten SchülerInnen im Anschluss selbstständig erarbeiten:

**Aufgabe 4)**

Finde eine Funktion $F(x)$, für die gilt, dass $F'(x) = f(x)$, wenn

a.) $f(x) = 18$
b.) $f(x) = x^2$
c.) $f(x) = x^3$
d.) $f(x) = x^4$
e.) $f(x) = \cos x$
f.) $f(x) = \sin x$

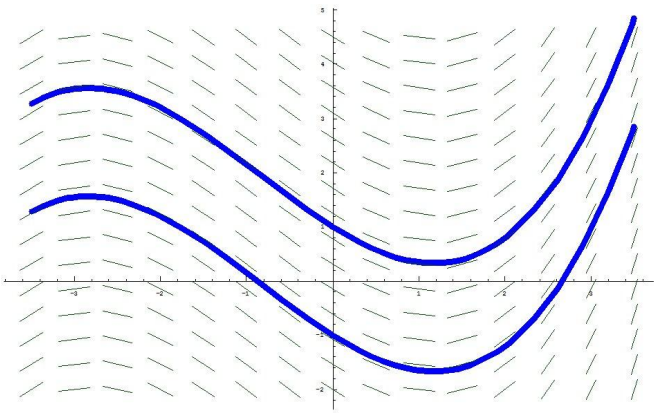
gegeben ist. Berücksichtige dabei auch die additive Konstante.

Jetzt kann der Begriff „Stammfunktion“ definiert werden:

**Definition:** Sind $f$ und $F$ reelle Funktionen mit derselben Definitionsmenge $A$ und gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in A$, dann heißt $F$ „Stammfunktion“ von $f$.

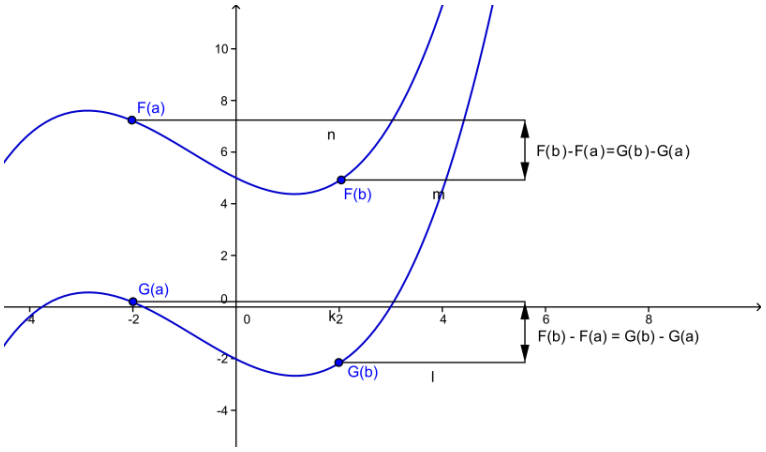
Wenn $f(x) = F'(x)$ gegeben ist, können wir in jedem Punkt $x \in A$ die Steigung der Funktion $F(x)$ in diesem Punkt durch einen kleinen Strich (der diese Steigung hat) andeuten. Somit ist die Steigung des Graphen in jedem Punkt $(x, f(x))$ vorgegeben und das so genannte Richtungsfeld kann skizziert werden. Werden die „Steigungsstriche“ zu einer Linie verbunden, erhält man den Graphen der Stammfunktion $F(x)$.

Zum Beispiel:



Es ist sehr schön zu erkennen, dass sehr viele (unendlich viele) Stammfunktionen existieren und sich diese nur durch eine additive Konstante unterscheiden. Durch eine geeignete Anfangsbedingung wird meist ein Repräsentant gewählt. Des Weiteren möchte ich festhalten, dass unabhängig von der gewählten Stammfunktion die Differenz $F(b) - F(a)$ immer gleich bleibt. Sind F(x) und G(x) zwei Stammfunktionen von f(x) auf einem Intervall [a;b], gilt stets:

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$




Zur geometrischen Anschauung kann auch der folgende Satz formuliert und bewiesen werden [Humenberger, 2009, S. 13]:

**Satz:**
Ist $F_0$ eine Stammfunktion von $f$ auf einem Intervall $A$, so ist jede weitere Stammfunktion $F$ der Form: $F(x) = F_0(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

**Beweis:**

Wir definieren $H(x) := F(x) - F_0(x)$

Dann gilt: $H'(x) = F'(x) - F'_0(x) = f(x) - f(x) = 0$

Jetzt folgt aus dem Konstantenlemma, dass, wenn $H'(x) = 0$ ist, $H(x)$ auf dem Intervall $A$ konstant sein muss: $H(x) = c$

$$\Longrightarrow F(x) = F_0(x) + c$$

Was zu beweisen war.

**Bemerkung:** Die Voraussetzung ist wichtig, dass $A$ ein Intervall ist. Betrachten wir folgendes Beispiel: Gegeben ist die einfache Funktion $f(x) = 0$.

Die folgenden Funktionen $F$ und $G$ sind auf $A = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ definiert,

$$F(x) = 2 \qquad\qquad G(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x < 1 \\ 7 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

und dort auch Stammfunktionen von $f(x)$. Hier gilt jedoch nicht $F(x) = G(x) + c$ auf ganz $A$, weil $A$ kein Intervall ist. Wird hingegen $A = \mathbb{R}$ gewählt, ist $G(x)$ keine Stammfunktion von $f(x)$ (an der Stelle 1 nicht differenzierbar).

Bevor jetzt die wichtigsten Regeln (über Stammfunktionen) erarbeitet werden, möchte ich zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung übergehen. Es ist meiner Meinung nach wichtig, dass SchülerInnen wissen, weshalb das Finden von Stammfunktonen von Bedeutung ist.

## 7.5. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Dem wichtigen Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren steht nun nichts mehr entgegen. Der Hauptsatz soll offenbaren, inwiefern Integral- oder Flächeninhaltsfunktionen mit dem Finden von Stammfunktionen zusammenhängen.

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**

Ist $f$ eine in einem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion und $I_a(x)$ die zugehörige Integralfunktion, so gilt für alle $x \in [a; b]$:

*Erster Hauptsatz:*

Für $I_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ gilt: $I_a{}'(x) = (\int_a^x f(t)\mathrm{d}t)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t) = f(x)$

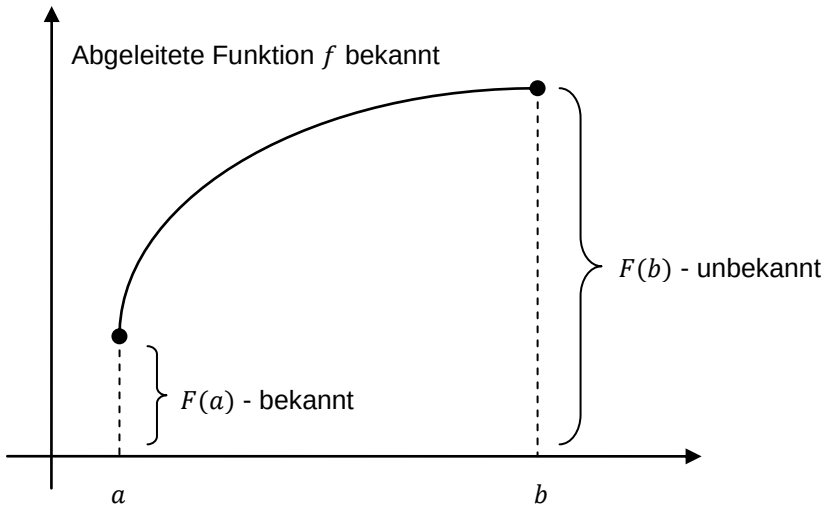
*Zweiter Hauptsatz:*

$I_a(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

**Plausibilitätsbegründung: Kapitel 4.1. (Seite 62 – 65)**

Der Erste Hauptsatz besagt, dass die Integralfunktion $I_a(x)$ (oder Flächeninhaltsfunktion) offensichtlich eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Eine weitere Aussage des Ersten Hauptsatzes ist, dass durch Differenzieren Integrieren rückgängig gemacht wird.

Der Zweite Hauptsatz besagt, dass das bestimmte Integral (Zahlenwert) mittels Stammfunktionen (soweit/wenn bekannt) bequem berechnet werden kann. Eine weitere Aussage des Zweiten Hauptsatzes ist, dass Integrieren Differenzieren rückgängig macht. Eine Skizze bietet hier mehr Einblick:




$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ : Der Wert $F(b)$ wird durch Integrieren einer Ableitungsfunktion $f(x)$ rekonstruiert, indem zu einem bekannten Funktionswert $F(a)$ die integrierte Ableitungsfunktion addiert wird. So gesehen macht Integrieren Differenzieren rückgängig.

Wie in Kapitel 4 „Zusammenhang von ‚Ableiten' und ‚Integrieren'" dargestellt, könnten der Erste und Zweite Hauptsatz unabhängig voneinander per Plausibilitätsbegründung beweisen werden. Sehr wichtig erscheint mir, dass klar und deutlich hervorgeht, dass die Differential- und die Integralrechnung Umkehroperatoren des jeweils anderen sind. Unabhängig davon kann noch einmal explizit die Frage, wie die Fläche mit der Tangente zusammenhängt, besprochen werden.

Im Folgenden sind die sprachlichen und inhaltlichen Zusammenhänge zusammengefasst [Humenberger, 2009, S. 17]:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Tangentensteigung | ⇔ | Grenzwert von Differenzenquotienten | ⇔ | Grundvorstellung bei Differentialrechnung |
| Flächeninhalt | ⇔ | Grenzwert von Produktsummen | ⇔ | Grundvorstellung bei Integralrechnung |
| | | Invers zueinander | | |

Ist hingegen der Erste Hauptsatz bereits bewiesen, folgt daraus sofort der Zweite und umgekehrt.

**Beweis des Zweiten Hauptsatzes als Folgerung des Ersten:**

Es gilt: $I_a{}'(x) = f(x)$. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}$. Nun ist $I_a(x)$ offensichtlich eine Stammfunktion von $f(x)$. Ist $F(x)$ eine weitere Stammfunktion von $f(x)$ muss also gelten:

$$I_a(x) = F(x) + c$$

Für $x = a$ gilt: $I_a(a) = F(a) + c \implies 0 = F(a) + c \Leftrightarrow c = -F(a)$

Für $x = b$ gilt: $I_a(b) = F(b) + c$

$$\Longrightarrow I_a(b) = F(b) - F(a)$$

Was zu beweisen war.

**Beweis des Ersten Hauptsatzes als Folgerung des Zweiten:**

Aus $I_a(b) = F(b) - F(a)$ folgt sofort:

$$\big(I_a(x)\big)' = \big(F(x) - F(a)\big)' = F'(x) - F'(a) = f(x) - 0$$

$$\Longrightarrow I_a'(x) = f(x)$$

Was zu beweisen war.

**Zurück zu Stammfunktionen**

Nachdem bekannt ist, wie Integrieren und das Bestimmen von Stammfunktionen zusammenhängen, sollten jetzt (mit Blick auf die Differentialrechnung von verschiedenen Funktionen) Stammfunktionen tabellarisch angeführt werden.

| **Funktion** | **eine Stammfunktion** |
|---|---|
| $f(x) = k \ (\text{mit } k \in \mathbb{R})$ | $F(x) = k \cdot x$ |
| $f(x) = x^q \ (\text{mit } q \in \mathbb{Q}, q \neq -1)$ | $F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ |
| $f(x) = \sin x$ | $F(x) = -\cos x$ |
| $f(x) = \cos x$ | $F(x) = \sin x$ |
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = e^x$ |
| $f(x) = a^x \ (\text{mit } a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$ | $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x} \ (\text{mit } x \in \mathbb{R}^+)$ | $F(x) = \ln x$ |

**Aufgabe 5)**

Verifiziere obige Tabelle über Stammfunktionen durch Nachrechnen. (Hinweis: Differenziere die Stammfunktion und überprüfe, ob das Ergebnis mit der linken Spalte übereinstimmt.)

**Sätze über Integrale:**

Für die in einem Intervall $[a;b]$ stetigen reellen Funktionen $f$ und $g$ gilt:

Satz 1: $\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

Satz 2: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

Satz 3: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{mit } a < c < b$

**Beweis:**

(Die Beweise folgen unmittelbar aus dem Zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

ad Satz 1:

$$\int_a^b cf = \int_a^b (cF)' = (cF)\Big|_a^b = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) = c \cdot \int_a^b f$$

ad Satz 2:

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b (F+G)' = (F+G)\Big|_a^b = F(b) + G(b) - \big(F(a) - G(a)\big)$$

$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

ad Satz 3:

$$\int_a^b f = F\Big|_a^b = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Was zu beweisen war.

## 7.6. Integrationsmethoden und verschiedene Deutungen des Integrals

Neben den verschiedenen Integrationsmethoden ist mir wichtig, dass jetzt weitere verschiedene Deutungen des Integrals besprochen werden. Dabei sind die Deutung des Integrals als Volumen (nicht nur bei Rotationskörpern) und physikalische Anwendungen eine wichtige Ergänzung zur Grundvorstellung des Integrals als orientiertem Flächeninhalt.

**Integrationsmethoden**

- Integralberechnung durch Substitution
- Partielle Integration
- Partialbruchzerlegung
- Numerische Integration (CAS)

**Verschiedene Deutungen des bestimmten Integrals**

- Inhalt von Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen
- Volumina über Querschnittsflächen und Rotation um Achsen
- Physik (Schwerpunkt von Flächen, Kraft, Arbeit, usw.)

## 7.7. Exaktifizierung

Am Ende sollte eine Exaktifizierung nicht fehlen. In Kapitel 3.4. „Präzisierung des Integralbegriffes“ wurden bereits zwei mögliche Wege aufgezeigt, wie diese erfolgen kann. Sollte die Exaktifizierung im Mathematikunterricht aus zeitlichen Gründen nicht mehr durchführbar sein, so denke ich, dass dennoch bereits eine gute Basis in Bezug auf die Integralrechnung geschaffen und ein fundiertes Wissen vermittelt wurde, mit dem Lernende auch nachhaltig etwas verbinden können.

# 8. Schlussbemerkung

Der Begriff des Integrals ist relativ abstrakt, weshalb es sinnvoll ist, im Schulunterricht den Schwerpunkt auf das Grundverständnis der Integralrechnung zu setzen. Dazu bieten sich verschiedene Möglichkeiten an. Am Ende sollten SchülerInnen vor allem einen wesentlichen Punkt mit der Integralrechnung in Verbindung setzen können: Integration als „verallgemeinerte Produktbildung“. Diese Vorstellung kann über verschiedene Wege erarbeitet werden. Der meiner Meinung nach am besten geeignetste Zugang ist es, aus einer Änderungsratenfunktion (zum Beispiel: Geschwindigkeit) die Bestandsfunktion zu rekonstruieren (zum Beispiel den Weg). Anhand solcher Beispiele wird an die Lebenswelt von SchülerInnen angeknüpft und man tastet sich auf diese Weise Schritt für Schritt an den Begriff des Integrals heran. Es ergibt sich dabei von selbst, was ein orientierter Flächeninhalt ist und dass dieser anhand von Ober- und Untersummen näherungsweise berechnet werden kann. Durch diesen Zugang kann eine erste Definition des Integrals, basierend auf der Grundvorstellung der verallgemeinerten Produktsumme, thematisiert werden.

Erst wenn diese Grundvorstellung in den Köpfen der SchülerInnen verankert ist, soll mittels Stammfunktionen ein einfacher Weg erarbeitet werden, wie das bestimmte Integral bequem mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet werden kann. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, welcher die wichtigsten Zusammenhänge offenbart: Was hat die Integralfunktion (oder Flächenfunktion) mit dem Finden von Stammfunktionen gemeinsam und wie hängen Differenzieren und Integrieren zusammen?

Um den Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung verstehen zu können, ist es wichtig, dass die Grundvorstellung der Differentialrechnung nicht nur alleine auf dem Bestimmen der Tangentensteigung basiert. Hier darf die Grundvorstellung der Ableitung als Momentangeschwindigkeit nicht fehlen (Ableitung als lokale Änderungsrate).

Danach können verschiedene Integrationsmethoden und weitere anwendungsorientierte Aufgaben erarbeitet und diskutiert werden. Am Ende sollte eine Präzisierung des Integralbegriffes nicht fehlen. Durch die meist knappe Zeit (8. Klasse – Maturavorbereitung) kann dies unter Umständen jedoch nicht durchgeführt werden. Aber auch in diesem Fall kann guten Gewissens festgestellt werden, dass trotzdem bereits eine gute Basis in Bezug auf die Integralrechnung geschaffen und fundiertes Wissen, mit dem SchülerInnen auch nachhaltig etwas verbinden können, vermittelt wurde.

Mein persönliches Fazit lautet, dass das Verfassen dieser Arbeit für mich ein wichtiger Lernprozess war, der mir (als zukünftigem Lehrer) in vielerlei Hinsicht dabei geholfen hat, gängige Lern- und Lehrstrategien kritisch zu hinterfragen. Ich hoffe, dass nicht nur mir, sondern auch der/dem einen oder der/dem anderen SchülerIn, StudentIn, LehrerIn oder interessierte/n LeserIn mit den Erkenntnissen, die in dieser Arbeit gewonnen werden konnten, ein Stück weitergeholfen ist.

## Zusammenfassung

Diese Arbeit widmete sich der Frage, wie der Einstieg in die Integralrechnung im Schulunterricht möglichst intuitiv, basierend auf deren Grundvorstellung, dargebracht werden kann. Dabei stand der Begriff des Integrals als „verallgemeinerte Produktsumme“ im Zentrum.

Nach einem kurzen historischen Exkurs über die Entwicklung der Integralrechnung wurden zwei Grundprobleme des Analysisunterrichts in der Oberstufe angesprochen: einerseits das Problem eines ausgewogenen Verhältnisses von Anschaulichkeit und Strenge und andererseits die Frage, wie heuristische Denk- und Arbeitsweisen in den Unterricht integriert werden können. Anhand des Grenzwertbegriffes wurde dies im Anschluss anschaulich diskutiert. Zusammengefasst kann gesagt werden, dass ein intuitiver Zugang sinnvoll erscheint, der im Nachhinein präzisiert wird.

In diesem Sinne wurde auch bei der Einführung in die Integralrechnung auf einen (auf den Grundvorstellungen basierenden) intuitiven Einstieg Wert gelegt, dem ein anschließendes Exaktifizierungskapitel folgte.

Um den Zusammenhang von Ableiten und Integrieren besser nachvollziehen zu können, wurde des Weiteren die Differentialrechnung nicht über das „Tangentenproblem“, sondern über die „Momentangeschwindigkeit“ eingeführt.

Anhand eines Schulbuchvergleiches zweier gängiger Lehrbücher wurden zwei weitere mögliche Einstiege in die Integralrechnung diskutiert und kritisch hinterfragt. Zuerst fasste eine rein quantitative Vergleichsanalyse die wichtigsten Eckdaten zusammen, während im Anschluss eine genauere Analyse der beiden Lehrbücher folgte.

Anhand der gesammelten Informationen aus der Fachliteratur und den beiden Schulbüchern wurde die Arbeit mit einem eigenen möglichen Unterrichtsverlauf, basierend auf der Grundvorstellung „Integrieren heißt Rekonstruieren“, abgeschlossen.

## Abstract

This paper discusses the question how students in secondary education can be first introduced to the concept of integral calculus intuitively while taking into account their basic notion. Focus has been put on the integral as a “generalized product sum”.

After a short historical excursus on the development of integral calculus, two basic problems of teaching mathematical analysis in senior secondary education are debated: on the one hand, how to balance explicative teaching and strictness, and on the other hand, how heuristic thinking and working methods can be integrated into the lessons. To illustrate this, the concept of the limit is used. In a nutshell, it can be said that an intuitive approach appears to be sensible, a notion that will be discussed in more detail later on.

Similarly, emphasis has been put on an intuitive approach (that bases on the students’ general notion) when introducing them to the concept of the integral calculus. This is elaborated on in the following chapter.

Moreover, in order to provide the students with a better understanding of the correlation of differential and integral calculus, the differential calculus is introduced making use of the “instantaneous velocity problem” rather than the “tangent line”.

By contrasting two commonly used school books two additional possibilities of how to familiarize students with the concept of integral calculus are discussed and analyzed. Firstly, a merely quantitative contrasting analysis summarizes the key data, which is then followed by a more detailed analysis of both school books.

The final chapter of this paper suggests what a lesson could look like that is based on the principle “integrating means reconstructing” and implements the information collected from literature and the analyzed school books.

# Literaturverzeichnis


Blum, W., & Kirsch, A. (1996). Die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnugn. *Mathematik lehren/Heft 78* , S. 60 - 65.

Blum, W., & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Büchter, A., & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis - Von der Anschauung zur Theorie.* Heidelberg: Spektrum.

*Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur*. (04. 12 2007). Abgerufen am 16. 10 2010 von http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/index.xml.

Danckwerts, R., & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten.* Heidelberg: Spektrum.

Danckwerts, R., & Vogel, D. (2005). *Elementare Analysis.* Norderstedt: Books on Demand GmbH.

Dorner, E. (kein Datum). *www.dorner-verlag.at*. Abgerufen am 07. 03 2011 von http://www.dorner-verlag.at: http://www.dorner-verlag.at/detailansicht.php?id=978-3-7055-0157-7&gegenstand=23&schultyp=BBS.

Hahn, S., & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematikdidaktik 29* , S. 163 - 198.

Humenberger, H. (2009). *§ 6 Exaktifizierung des Grenzwertbegriffes – Stetigkeit - Fehlvorstellungen.* Abgerufen am 19. 11. 2009 von Universität Wien - Vorlesungsverzeichnis Sommersemester 2009: http://online.univie.ac.at/vlvz?titel=&match_t=substring&zuname=humenberger&vorname=&match=substring&lvnr=&sprachauswahl=-

1&von_t=&von_m=&von_j=&wt=&von_stunde=&von_min=&bis_stunde=&bis_min=&semester=S2009&extended=Y.

Humenberger, H. (2009). *§7-Einstiege in die Integralrechnung*. Abgerufen am 11. 02. 2011 von Universität Wien - Vorlesungsverzeichnis Sommersemester 2009: http://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/SM-DIFF-INT/07-Integralrechnung-Einstiege.pdf.

Kirsch, A. (1996). Der Hauptsatz anschaulich? *Mathematik lehren/Heft 78* , S. 55 - 59.

Malle, G. (1999). Grundvorstellungen zum Differenzieren - und Differenzenquotienten. *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft - Didaktikheft Nr. 30* .

Malle, G., Ramharter, E., Ulovec, A., & Kandl, S. (2007). *Mathematik verstehen 8.* Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG.

Malle, H. (1996). *Mathematik erleben: ein Lehr- und Übungsbuch für Schule und Praxis; Band 3. Statistik, Algebra III, Differentialrechnung, Integralrechnung; mit Turbo-Pascal- und Mathematica- Anwendungen.* Frankfurt am Main: Harri Deutsch.

oebv. (kein Datum). *http://www.oebv.at*. Abgerufen am 08. 03 2011 von www.oebv.at: http://www.oebv.at/sixcms/list.php?page=titelfamilie&titelfamilie=Mathematik+verstehen&modul=produktdetail&isbn=3-209-05486-9

Popp, W. (1999). *Fachdidaktik Mathematik: Ein entwicklungsgeschichtlicher Ansatz.* Köln: Aulis Verlag Deubner & CO KG.

Schmidtpott, S. (02. 09 2010). *GeoGebra*. Abgerufen am 11. 01 2011 von Integralrechnung: http://www.geogebra.org/de/wiki/index.php/Integralrechnung.

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II; Band 1: Fachdidaktische Grundfragen - Didaktik der Analysis.* Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH.

Timischl, W., & Kaiser, G. (2007). *Ingenieur-Mathematik 3.* Wien: E. Dorner GmbH.

Vollrath, H.-J. (1993). Paradoxien des Verstehens von Mathematik. *Journal für Mathematikdidaktik 14* , S. 35-58.

*Wikipedia*. (01. 10 2010). Abgerufen am 17. 01 2011 von Grenzsteuersatz: http://de.wikipedia.org/wiki/Grenzsteuersatz.

Winkler, R. (2007). Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht. *Didaktikheft der ÖMG - Heft 39* , S. 155-165.

# Lebenslauf

| | |
|---|---|
| **Name:** | Ronald Prammer |
| **Geburtsdatum:** | 31.12.1980 |
| **Geburtsort:** | Linz, Österreich |

**Ausbildung:**

**seit Oktober 2004**: Studium an der Universität Wien (Mathematik und Physik Lehramt)

**Oktober 2005 bis Dezember 2005**: Ausbildung zum E-Learning Tutor beim Verein Österreichischer Gewerkschaftlicher Bildung (VÖGB)

**Juni 2003**: Berufsreifeprüfung an der Höheren Bundeslehranstalt für wirtschaftliche Berufe (Linz, Landwiedstraße)

**Februar 2000**: Lehrabschlussprüfung Maschinenschlosser

**September 1995 bis Februar 2000**: Lehre als Maschinenschlosser (Rosenbauer International AG, Leonding)

**Berufliche Tätigkeiten:**

**seit März 2006**: freier Dienstnehmer beim VÖGB - Laufende Betreuung von E-Learning Seminaren; PC - Trainer (speziell ECDL - Module)

**Oktober 2006 bis Februar 2011**: Volleyballtrainer (Log In)

**Februar 2006 bis Februar 2011**: freier Dienstnehmer am BBRZ Wien (Berufliches Bildungs- und Rehabilitationszentrum) – Trainer für Mathematik (Erwachsenenbildung)

**Jänner 2005 bis Februar 2006**: Volleyballtrainer (VC Simmering), Nachwuchstraining von 10 bis 17-jährigen Mädchen

**März 2001 bis Oktober 2004**: Angestellter der Firma Rosenbauer International AG

**Juli 2000 bis März 2001**: Präsenzdienst - Bundesheer (Kaserne Ebelsberg)

**September 1995 bis Juli 2000**: Angestellter der Firma Rosenbauer International AG

## SACHERSCHLIESSUNG

der

**Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien**

## Klassifikation

**Aufstellungsort:** ☐ **HoA** ☒ **HoD**

**MSC2000: 00A35 – 97I50 – 97D50 – 97U20**

**BK: 31.04**

## Schlagwortketten nach RSWK

Integral – Begriff – Schulmathematik – Mathematikunterricht (1234)

- - Integral – Begriff – Schulmathematik – Schulbuchanalyse (4123)

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

**13. Mai 2011**

..... .....

Datum Unterschrift