DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens im Geometrieunterricht der AHS und seine Förderung mittels Dynamischer Geometrie-Software“

Verfasserin

Maria Hutsteiner

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wolfern, 2011

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 353 406
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Spanisch UF Mathematik
Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

ABSTRACT

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im ersten Teil mit verschiedenen Strukturkonzepten des räumlichen Vorstellungsvermögens, deren Ziel es ist, diese Kompetenz zu beschreiben und in einzelne Faktoren zu unterteilen. Betreffende wissenschaftlichen Konzepte reichen von Ein-Faktor-Theorien bis hin zu Mehr-Faktoren-Theorien. Der weitere Verlauf dieser Arbeit basiert schließlich auf einem Fünf-Faktoren-Modell, das die Raumvorstellung als ein Zusammenspiel von *Veranschaulichung, Räumliche Beziehungen, Räumliche Orientierung und Faktor K, Räumliche Wahrnehmung* und *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen* erklärt.

Ein Kapitel zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens bei Kindern und Jugendlichen bildet dann den Abschluss des ersten, theoretischen Teils. Hier zeigt sich, dass der Altersbereich von sieben bis vierzehn Jahren diesbezüglich besonders ausschlaggebend ist. Bei der anschließenden Analyse des AHS-Lehrplans stellt sich heraus, dass jener an diesen Umstand gut angepasst ist und der Schwerpunkt an Geometriestoff in der Unterstufe zu finden ist. In puncto umfassende Schulung der Raumvorstellung ist der Lehrplan jedoch weniger zufriedenstellend, da er auf eine relativ einseitige Förderung von nur zwei der fünf Raumvorstellungskomponenten abzielt.

Um diesem Manko Abhilfe zu leisten, werden im Kapitel 6 *Dynamische Geometrie-Software als Fördermittel* Möglichkeiten aufgezeigt, wie die Inhalte des AHS-Lehrplans dennoch so genutzt werden können, dass alle fünf Faktoren der Raumvorstellung geschult werden. Sei es zum Beispiel durch gezieltes Nutzen der Themenbereiche, die den drei kaum im Lehrplan enthaltenen Faktoren zuzuordnen sind oder durch Erweitern von „herkömmlichen" Geometrieaufgaben aus dem Schulbuch mit Hilfe dreidimensionaler Visualisierungen am PC.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

> Das räumliche Vorstellungsvermögen ist ein bedeutsamer Intelligenzfaktor und eine zentrale Fähigkeit, die unsere Wahrnehmungen und Vorstellungen von unserer Umwelt und damit die Art und Weise der Interaktion mit ihr nachhaltig beeinflußt ([MAI1], S. 415 f.).

Dieses Zitat stammt aus der Arbeit *Räumliches Vorstellungsvermögen – Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule* von P. H. Maier, die er 1994 im Rahmen seiner Dissertation verfasste. Die überarbeitete Version des Textes, die 1999 unter dem Titel *Räumliches Vorstellungsvermögen – Ein theoretischer Abriß des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen* als Buch im Auer-Verlag erschien, bietet einen umfassenden Überblick zum Thema Raumvorstellung und wurde zur Basis vieler Arbeiten, die seither rund um das räumliche Vorstellungsvermögen verfasst wurden.

Der umfangreiche Überblick, den Maier über Strukturkonzepte der Raumvorstellung und ihre Entwicklung gibt, diente auch den ersten Kapiteln dieser Arbeit als Leitfaden und hilfreiche Stütze. Das *Fünf-Faktoren-Modell,* welches Maier aus älteren Theorien aus den Komponenten der Raumvorstellung zusammensetzte, wurde schließlich zur Basis der Analyse der Raumvorstellung im Geometrieunterricht der AHS (siehe *Kapitel 5*) und der entwickelten Unterrichtsvorschläge in *Kapitel 6.*

Erheblich zur Realisierung der vorliegenden Arbeit haben ebenfalls die hilfsbereiten Programmautoren verschiedener Geometrie-Lernprogramme beigetragen, die mir bereitwillig Gratis-Versionen ihrer Software zur Verfügung stellten und mir immer für Fragen zur Verfügung standen. Daher möchte ich mich an dieser Stelle bei folgenden Personen für ihr Programm bedanken: A. Goebel für Archimedes Geo3D, dem kapieren.de Team für Vektoris3D und E. Podenstorfer für GAM-3D. Für ihre Unterstützung bei der Arbeit mit GeoGebra und Informationen zum neuesten Forschungsstand von GeoGebra5.0-3D bedanke ich mich bei A. Lindner und K. Söser.

Es hat mir großen Spaß gemacht, verschiedene 3D-Software-Programme für den Geometrieunterricht kennenzulernen und die Möglichkeiten die sie bieten, zu erforschen. Es gibt zur Zeit schon einige tolle Lösungen auf dem Markt, ich denke allerdings, dass das erst der Anfang ist und wir in Zukunft noch viel von der Entwicklung räumlicher Dynamischer Geometrie-Software erwarten können.

Meinen Dank möchte ich an dieser Stelle auch noch an alle weiteren Personen richten, die mich bei der Verfassung der vorliegenden Diplomarbeit unterstützt haben. Ein besonderer Dank gilt hier meinen Eltern, die mir mein Studium ermöglicht haben und immer ein offenes Ohr für mich hatten und meinen Studienkolleg(inn)-en, ohne die ich so manches Problem nicht lösen hätte können.

Ausdrücklich hervorheben möchte ich noch die Hilfe von Dr. Stefan Götz, ohne den diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Er ist mir stets mit Rat und Tat zur Seite gestanden und hat ausgezeichnete Arbeit beim Korrekturlesen, sowie beim Einbringen von neuen Ideen und Verbesserungsvorschlägen geleistet. An ihn richtet sich mein größter Dank.

2 Das räumliche Vorstellungsvermögen

2.1 Ein Definitionsversuch

Eine einheitliche, allgemein gültige Definition des räumlichen Vorstellungsvermögens ist in der Literatur ebenso schwer zu finden wie eine einheitliche Bezeichnung der Sache an sich. Die Begriffe reichen von *räumliches Anschauungsvermögen* über *Raumanschauungsvermögen* und *Raumanschauung*, bis hin zu den aktuell gebräuchlichen und synonym verwendeten Ausdrücken *räumliches Vorstellungsvermögen*, *Raumvorstellungsvermögen* oder kurz *Raumvorstellung*.

Wie wir in den folgenden Kapiteln sehen werden, entwickelten Wissenschaftler(innen) verschiedenste Strukturkonzepte der Raumvorstellung, was folglich auch ihre Definitionen des Begriffs beeinflusste und recht verschieden ausfallen lässt. Maier beschäftigte sich in seinem recht umfangreichen Werk zum räumlichen Vorstellungsvermögen mit den verschiedenen Konzepten der Raumvorstellung und stellte aus den beiden anerkanntesten Theorien auf diesem Gebiet ein Schema der wichtigsten Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens zusammen. Auf dieser Basis fällt seine Definition der Raumvorstellung wie folgt aus:

> Anschaulich kann **Raumvorstellung** umschrieben werden als die Fähigkeit, in der **Vorstellung** räumlich zu sehen und räumlich zu denken. Sie geht über die sinnliche **Wahrnehmung** hinaus, indem die Sinneseindrücke nicht nur regis-

> triert, sondern auch gedanklich verarbeitet werden. So entstehen **Vorstellungsbilder**, die auch ohne das Vorhandensein der realen Objekte verfügbar sind ([MAI], S. 14, Hervorhebung im Original).

Maier betont weiter, dass es sich bei Raumvorstellung nicht nur um das Speichern und Wiederabrufen von Bildern im Gedächtnis handelt:

> Vielmehr kommt die Fähigkeit, mit diesen Bildern aktiv umzugehen, sie *mental umzuordnen* und *neue Bilder aus vorhandenen vorstellungsmäßig zu entwickeln,* als wichtige Komponente mit hinzu ([MAI], S. 14, Hervorhebung im Original).

2.2 Räumliches Vorstellungsvermögen als Komponente der Intelligenz

Wer nach einer einheitlichen Definition für den Begriff *Intelligenz* sucht, wird ebenso wie beim Begriff der Raumvorstellung Schwierigkeiten haben eine solche zu finden. Stattdessen gibt es in der Psychologie verschiedene Ansätze und Theorien zur Intelligenz, von denen viele den Faktor der Raumvorstellung als eine wichtige Komponente enthalten.

Grundlage der meisten dieser Strukturkonzepte der menschlichen Intelligenz ist die vom Psychologen C. Spearman entwickelte *Faktoren*- oder *Faktoranalyse*, die von ihm zur Auswertung von Intelligenztests entwickelt wurde. Hierbei handelt es sich um ein Verfahren, das zur Datenreduktion und Strukturanalyse durch Aufweis möglicher Gemeinsamkeiten innerhalb korrelierender Stichproben aus einer größeren Menge variabler Merkmale dient, die in einem thematischen Zusammenhang stehen (vgl. [FRÖ], S. 186).

Spearman verhalf seine Analyseform bereits 1904 zur Ermittlung eines eindimensionalen Persönlichkeitsmerkmals, dem *Generalfaktor g* (general ability factor), der in vielen verschiedenen Intelligenzleistungen eine mehr oder weniger große Rolle spielen soll (vgl. [SPEA], S. 201 ff.).

Einen wichtigen Grundstein der Intelligenzforschung legte nach Spearman der Amerikaner L. L. Thurstone mit der Erweiterung von Spearmans Theorien und der Entdeckung und Erforschung seiner viel zitieren „Primärfähigkeiten“.

> [...] Thurstones Hauptbeiträge zur Intelligenzforschung liegen einmal in der Weiterentwicklung der von Spearman begründeten faktorenanalytischen Techniken und ihrer Theorie [...] und zum anderen in der empirischen Herausarbeitung einer Reihe von „Primärfähigkeiten“, die er in erster Annäherung als die Grundbedingungen der Intelligenzleistungen ansah ([JÄG], S. 76, Hervorhebung im Original) [...]

Thurstone wendet das Verfahren der Multiplen Faktorenanalyse an und erhält dabei 13 Intelligenzfaktoren, von denen er sieben als klar interpretierbar bezeichnet. Seine Ergebnisse veröffentlicht er 1938 unter dem Titel „Primary Mental Abilities“ im Verlag University of Chicago Press. Hier eine Liste dieser *sieben Primärfaktoren* der Intelligenz (primary mental abilities):

1. Faktor V: Verbal (sprachliches Verständnis)

2. Faktor W: Word Fluency (Flüssigkeit des Sprechens, auch: „Wortflüssigkeit“)

3. Faktor N: Number (Rechenfertigkeit)

4. Faktor P: Percepcion (Wahrnehmungs- oder Auffassungsgeschwindigkeit)

5. **Faktor S: Space (räumliches Vorstellungsvermögen)**

6. Faktor M: Memory (Merkfähigkeit)

7. Faktor R: Reasoning (logisches Denken) (vgl. [MAI], S. 18 ff.)

Der *Faktor S* umfasst die Fähigkeit, mit zwei- oder dreidimensionalen Objekten in der Vorstellung operieren zu können und weist eine relativ hohe Komplexität auf. Dies zeigt sich vor allem dadurch, dass Thurstone den Faktor S einige Jahre später in drei weitere Faktoren unterteilt.

Seine Resultate werden in der Folge von zahlreichen Anderen, die an seine Arbeit anknüpfen und selbst weitere Analysen durchführen, bestätigt. So etwa von A. O. Jäger, der ein moderneres faktorenanalytisches Verfahren benutzt und sechs sogenannte Hauptfaktoren isoliert. Beim Faktor S, von Jäger Faktor 1 genannt und als Anschauungsgebundenes Denken interpretiert, treten hohe Übereinstimmungen auf (vgl. [MAI], S. 19 ff.). Allerdings mit einem grundlegenden Unterschied, wie Jäger selbst bemerkte:

> Dieser Faktor ist sicher weitaus komplexer als Thurstones Space ([JÄG], S. 115, Hervorhebung im Original).

Ein weiteres Modell der menschlichen Intelligenz mit ausgewiesenem Faktor für Raumvorstellung ist H. Gardners *Theorie der multiplen Intelligenzen*. Er spricht von folgenden sechs (bzw. sieben) unterschiedlichen menschlichen Intelligenzen:

1. Linguistische Intelligenz

2. Musikalische Intelligenz

3. Logisch-mathematische Intelligenz

4. Räumliche Intelligenz

5. Körperlich-kinästhetische Intelligenz

6a. Intrapersonale Intelligenz

6b. Interpersonale Intelligenz (vgl. [GARD], S. 75 ff.)

Unter dem vierten Punkt, der räumlichen Intelligenz versteht man

> [...] die visuelle Welt richtig wahrzunehmen, die ursprüngliche Wahrnehmung zu transformieren und zu modifizieren und die Bilder der visuellen Erfahrung auch dann zu reproduzieren, wenn entsprechende physische Stimulierungen fehlen ([GARD], S. 163).

Konkret ordnet Gardner folgende Fertigkeiten dieser Intelligenz zu:

> [...] die Fähigkeit, die Identität eines Elements zu erkennen; die Fähigkeit, ein Element in ein anderes zu transformieren oder eine solche Transformation zu erkennen; die Fähigkeit, eine mentale Vorstellung zu erzeugen und „im Kopf" zu verändern; die Fähigkeit, graphische Entsprechungen räumlicher Informationen zu erzeugen und dergleichen mehr ([GARD], S. 165).

Die Intelligenzmodelle von Thurstone und Gardner sind nur zwei von vielen, in denen die Fähigkeit zur Raumvorstellung eine entscheidende Rolle spielt. Weitere bedeutsame Konzepte sind zum Beispiel das *Strukturmodell von Guilford* oder das *hierarchische Modell der Intelligenz-Faktoren nach Vernon.*

3 Strukturkonzepte der Raumvorstellung

Der Faktor Raumvorstellung beinhaltet, wie bereits erwähnt, die Fähigkeit, mit zwei- oder dreidimensionalen Objekten auf der Vorstellungsebene zu arbeiten und weist eine relativ hohe Komplexität auf. Historisch lässt sich ein Trend von Ein-Faktor-Theorien hin zu Mehr-Faktoren-Theorien erkennen. Immer mehr neue Aspekte des räumlichen Vorstellungsvermögens wurden erforscht und sind heute nicht mehr wegzudenken. Obwohl die Ein-Faktor-Theorien nun veraltert und nicht mehr anerkannt sind, beginnen wir, weil historisch interessant, mit einem kleinen Exkurs dazu.

3.1 Ein-Faktor-Theorien

Besonders erwähnenswert ist hier die frühe Arbeit von *El Koussy (1935),* die ein intensives Interesse an dem Intelligenzfaktor Space begründet. El Koussy bediente sich einer modifizierten Version von Spearmans faktoranaytischem Verfahren und identifiziert so *einen* Faktor k, dem er große Bedeutung im Bezug auf räumliches Vorstellungsvermögen beimisst. Seine Theorie konnte jedoch weder von ihm selbst, noch von anderen untermauert werden, und so modifizierte er 20 Jahre später seine Sichtweise (vgl. [MAI], S. 31 f.).

Die Ein-Faktor-Theorien gehören also heute der Vergangenheit an, wie K. Pawlik schon 1976 bemerkte:

> Die ursprüngliche eindimensionale Hypothese, daß sämtliche Raumvorstellungstests auf einen einzigen gemeinsamen Faktor zurückgingen, darf heute als widerlegt gelten ([PAW], S. 335).

3.2 Zwei-Faktoren-Theorien

Im Bereich der Zwei-Faktoren-Theorien verdienen laut Maier *Michael, Zimmerman und Guilford* besondere Beachtung. Ihnen gelang es mit zwei faktoranalytischen Untersuchungen, wobei eine ein Jahr nach der ersten durchgeführt wurde und diese untermauern konnte, zwei unterschiedliche Faktoren der Raumvorstellung zu ermitteln:

Spatial relation, als die Fähigkeit

> [...] to comprehend the *arrangement* of elements within a visual stimulus pattern, primarily with reference to the human body ([MZG], S. 189 f., Hervorhebung im Original)

und der Faktor *visualization*, welcher

> [...] was hypothesized to represent an ability that requires the mental *manipulation* of visual images ([MZG], S. 190, Hervorhebung im Original).

Als Beispiel einer weiteren Zwei-Faktoren-Theorie möchte ich den Ansatz von *Bishop* erwähnen, da dieser einen anderen interessanten Zugang wählt. Bishops zweidimensionales Konzept beruht nicht nur auf faktorenanalytischen Untersuchungen, sondern auch auf Unterrichtsversuchen und der Arbeit von Entwicklungspsychologen (vgl. [MAI], S. 33). Er unterscheidet zwischen *the*:

- *ability for interpreting figural information (IFI)* und
- *ability for visual processing (VP)*

Bishop definiert *IFI* folgendermaßen:

> Diese Fähigkeit umfaßt ein Verständnis für visuelle Repräsentationen und für ein räumliches „Vokabular", welches bei geometrischen Arbeiten, Graphen, Tabellen und Diagrammen aller Art benützt wird ([BISH2], S. 184, Übersetzung: [MAI], S. 33).

Und

> *VP* beinhaltet andererseits die Vorstellungen von Visualisierungen, der Übersetzung abstrakter Beziehungen und nicht bildlicher Daten in visuelle Informationen, die Manipulation und Extrapolation von visuellen Vorstellungen und die Transformation einer visuellen Vorstellung in eine andere ([BISH1], S. 177, Hervorhebung M. H., Übersetzung: [MAI], S. 33).

3.3 Drei-Faktoren-Theorien

Zwei der bedeutendsten Drei-Faktoren-Theorien sind die Drei-Faktoren-Hypothese nach *Thurstone (1949; 1950)* und die Kategorien nach *Linn und Petersen (1985; 1986).* Diese zwei Strukturkonzepte des räumlichen Vorstellungsvermögens zählen wohl zu den meist zitierten weltweit, vor allem aber auch im deutschsprachigen Raum.

Es gibt gewisse Überschneidungen, jedoch auch gewinnbringende Ergänzungen, die *Maier (1999)* erkannte und zu einem neuen, umfangreicheren Konzept mit fünf Faktoren zusammenfasste. Diese drei heute noch aktuellen Theorien zur Raumvorstellung werden im Folgenden vorgestellt.

3.3.1 Thurstone

Faktor V_z: Veranschaulichung (Visualization)

Dieser Faktor bezeichnet die Fähigkeit, sich gedanklich räumliche Bewegungen von Objekten oder Teilen von ihnen vorzustellen, ohne Hilfen zu verwenden. Zu diesen räumlichen Bewegungen zählen Rotationen um die Horizontal-, Vertikal- oder Tiefenachse, räumliche Verschiebungen und Faltungen.

Tests zur *Veranschaulichung (V_z)* gibt es im zwei- und dreidimensionalen Bereich.

Zu deren Lösung sind meist Denkvorgänge dynamischer Art notwendig.

Ein Beispiel für einen Test im dreidimensionalen Bereich ist der Test *Surface Development* nach Thurstone (Abb. 3.1). Hierbei ist ein perspektivisch gezeichneter Körper mit zugehörigem Netz gegeben. Die Versuchsperson soll die Zuordnung entsprechender Teile der zweidimensionalen Abwicklung mit dem dreidimensionalen Schrägbild vornehmen (vgl. [MAI], S. 34 ff.).

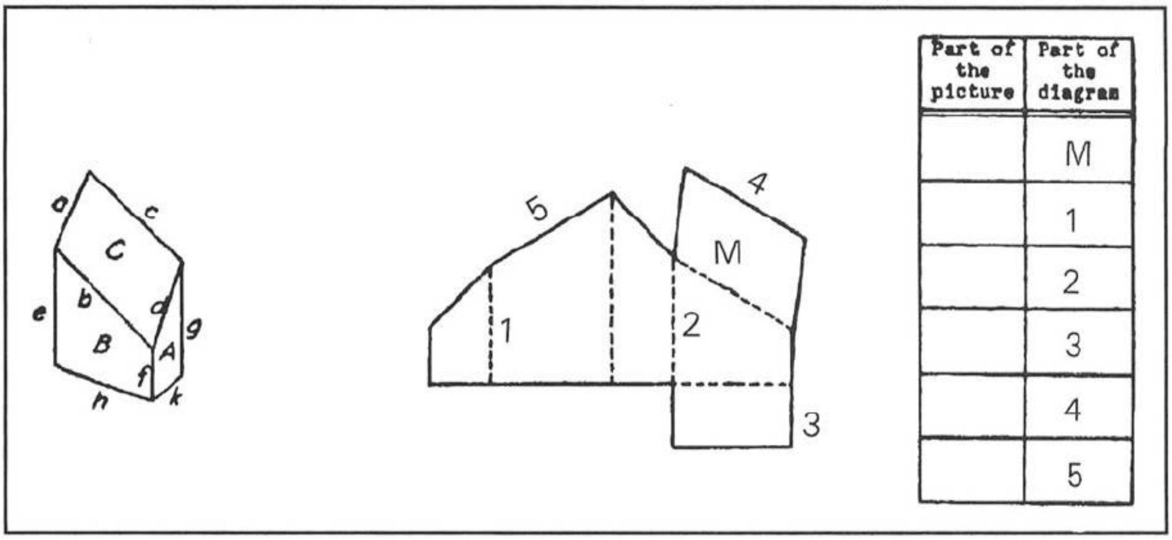


Abb. 3.1: Test *Surface Development*

Faktor S_1: Räumliche Beziehungen (Spatial relations)

Der Faktor *Räumliche Beziehungen (S_1)* bezeichnet die Fähigkeiten, räumliche Konfigurationen von Objekten oder Teilen von ihnen zu erfassen und deren Beziehungen untereinander herzustellen. Die Vorgaben der räumlichen Beziehungen der Objekte sind statischer Natur, dennoch ist es zum Lösen der Aufgaben meist nötig, die Objekte mental zu bewegen. Im Gegensatz zum dritten Faktor, der *Räumlichen Orientierung (S_3)*, befindet sich der Standort der eigenen Person außerhalb der betrachteten räumlichen Situation. Auch hier gibt es wieder Tests im zwei- und dreidimensionalen Bereich.

Der folgende Test *Pair of Cubes*, der in ähnlicher Form auch schon bei Thurstone anzutreffen ist, stammt aus dem dreidimensionalen Bereich und zeigt in perspektivischer Darstellung jeweils zwei Würfel: Abb. 3.2. Es ist zu entscheiden, ob es sich um den selben oder um zwei verschiedene Würfel handelt, wenn man voraussetzt, dass immer alle Seiten unterschiedliche Muster zeigen (vgl. [MAI], S. 38 f.).

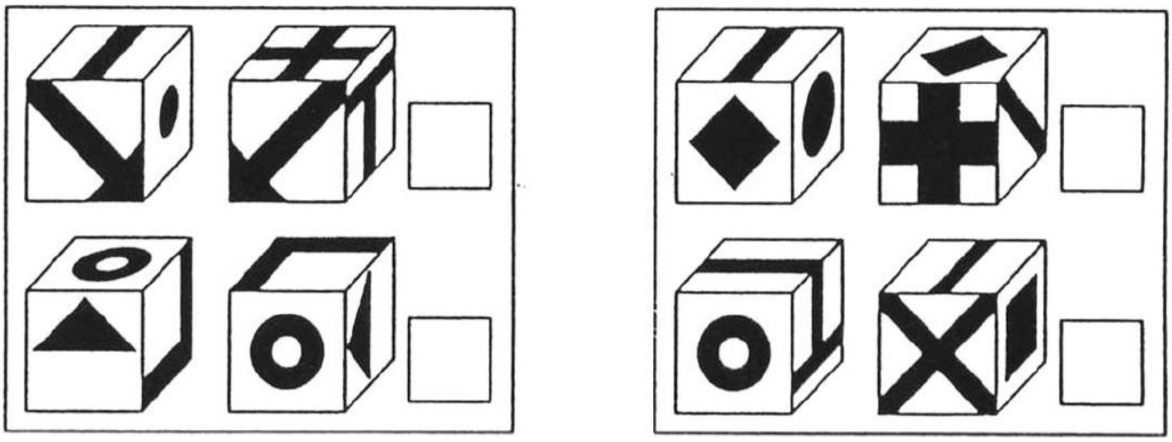


Abb. 3.2: Test *Pair of Cubes*

Faktor S_3: Räumliche Orientierung (Spatial orientation)

Die Fähigkeit, die eigene Person richtig in eine räumliche Situation einzuordnen, bezeichnet Thurstone als *Räumliche Orientierung (S_3).* Der Proband bzw. die Probandin befindet sich hier innerhalb der Aufgabe (im Gegensatz zu S_2) und muss die Fähigkeit unter Beweis stellen, sich als Person real oder mental im Raum zurechtzufinden. Es kann sich dabei sowohl um dynamische als auch statische Aufgaben handeln.

Eine mögliche Problemstellung zum *Faktor S_3* ist der Test *Arial Orientation*. Hierbei wird die Testperson mittels einer lebendigen realitätsnahen Schilderung und eines Landkartenausschnittes in die Situation versetzt, mit einem Boot von Westen nach Osten an einer Küste entlang zu fahren: Abb. 3.3. Ihre Aufgabe ist es, die bei der Reise gemachten „Fotografien“ in die richtige Reihenfolge zu bringen (vgl. [MAI], S. 40 ff.).

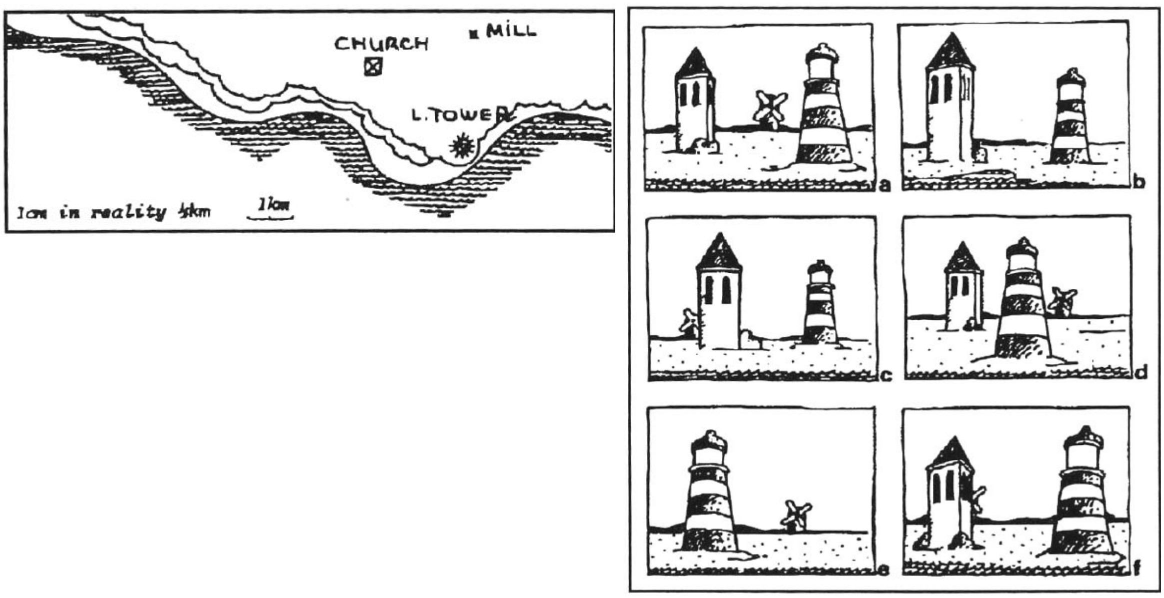


Abb. 3.3: Test *Arial Orientation*

3.3.2 Linn und Petersen

Linn & Petersen (1985) stützen sich bei ihren Untersuchungen ebenso wie Thurstone auf eine Drei-Faktoren-Theorie des räumlichen Vorstellungsvermögens (vgl. [LIPE], S. 1479 ff.).

Faktor: Räumliche Wahrnehmung (Spatial perception)

Dieser Faktor charakterisiert die Fähigkeit, zwischen *horizontal* und *vertikal* unterscheiden zu können (bzw. zwischen oben-unten und vorne-hinten). Die räumlichen Relationen in Bezug auf den eigenen Körper spielen hierbei eine wesentliche Rolle. Eine typische und weitverbreitete Testversion ist der *Rod-and-Frame-Test* (Abb. 3.4), bei dem sich die Versuchsperson in einem verdunkelten Raum befindet und einen Stab vertikal in ein schräg gestelltes Rechteck einführen soll, während sie sich selbst in geneigter Lage befindet; etwa sitzend auf einem schräg gestellten Stuhl.

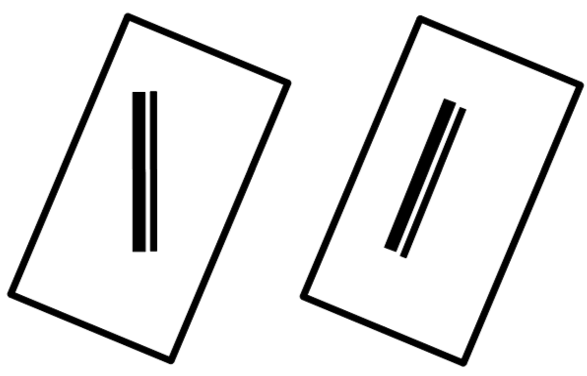


Abb. 3.4: Schematische Darstellung des *Rod-and-Frame* Tests

Faktor: Vorstellungsfähigkeit von Rotationen (Mental rotation)

Die Fähigkeit, sich Rotationen von zwei- oder dreidimensionalen Objekten rasch vorstellen zu können, bezeichnen Linn & Petersen als *Mental rotation.* Ein gängiger Test zur Messung dieser Fähigkeit ist der folgende: Abb. 3.5. Der Proband oder die Probandin soll herausfinden, welche zwei der insgesamt vier Auswahlmöglichkeiten (responses) mit der oberen Ausgangsfigur (standard) übereinstimmen.

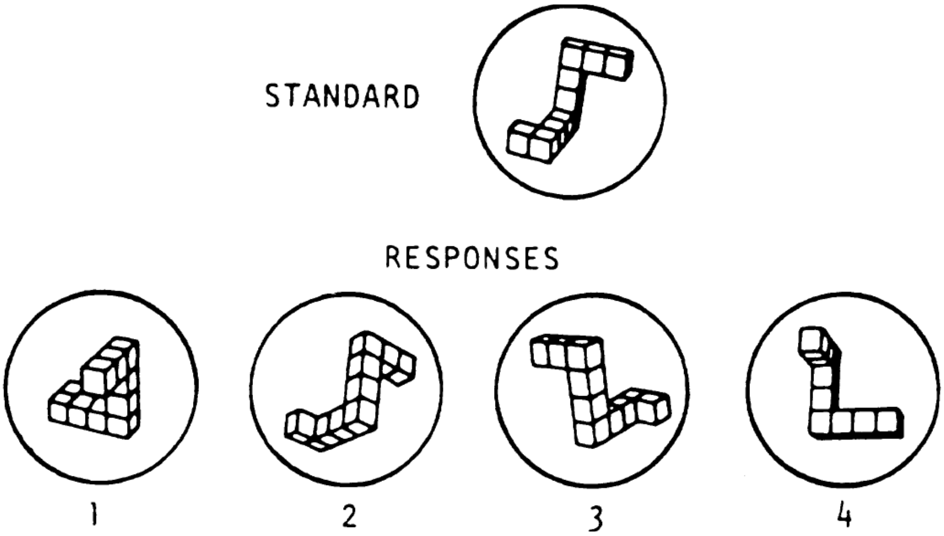


Abb. 3.5: Test *Mental Rotation*

Im Vergleich mit der Drei-Faktoren-Theorie von Thurstone fällt auf, dass sich Linn & Petersens Faktor *Mental rotation* in Thurstones Faktor *Visualization (V_z)* einordnen lässt.

Faktor: Veranschaulichung oder Räumliche Visualisierung (Spatial visualization)

Diesen Faktor könnte man als eine Zusammenfassung der beiden Thurstone'schen Faktoren *Veranschaulichung (V_z – Visualization)* und *Räumliche Beziehungen (S_1 – Spatial relations)* bezeichnen. Zu diesem Schluss kommt man bei näherer Betrachtung der Testaufgaben zu *Spatial visualization.* Dabei findet man nämliche typische Tests zu den beiden eben erwähnten Teilkomponenten nach Thurstone.

Die Zusammenfassung zu einem Faktor scheint hier laut Maier sinnvoll und gerechtfertigt, da sowohl beim Thurstone'schen Faktor *Veranschaulichung* als auch dem Faktor *Räumliche Beziehungen dynamische Denkvorgänge* zur Lösung der Testaufgaben von Nöten sind. Ein Kritikpunkt ist allerdings, dass dieser Faktor *Veranschaulichung oder Räumliche Visualisierung* von Linn & Petersen recht breit und allgemein gewählt ist, während der zweite Faktor ihres Modells *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen* recht eng und speziell definiert ist.

Andere, ebenso typische Bereiche der *Räumlichen Orientierung* wurden sogar gänzlich ausgespart. Das lässt sich aber damit begründen, dass die Räumliche Orientierung mit Papier-und-Bleistift-Tests nur teilweise zu erfassen ist (vgl. [MAI], S. 48).

Ein Beispiel zur Testung dieses Faktors ist der Test *Embedded Figures* (siehe Abb. 3.6). Die Aufgabe dabei ist, das oben abgebildete einfache Muster im unten abgebildeten komplexeren Muster zu entdecken.

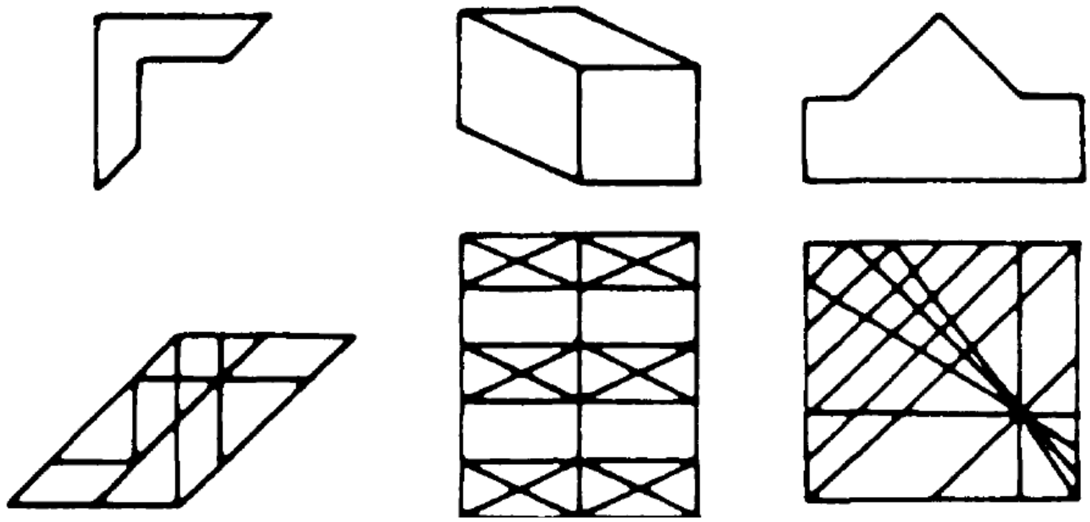


Abb. 3.6: Test *Embedded Figures*

3.4 Zusammenfassendes Modell nach Maier

Wie schon erwähnt, stellte Maier (1999) aus den beiden eben vorgestellten Kategoriensystemen ein zusammenfassendes Modell zusammen, das die *fünf wesentlichsten Komponenten räumlich-visueller Qualifikationen* darstellen soll.

Wichtig zu beachten ist allerdings auch hier, dass es wie bei den vorangehenden Modellen immer noch wechselseitige Beziehungen und Abhängigkeiten zwischen den Subkomponenten gibt; die einzelnen Faktoren also nicht völlig voneinander abgegrenzt werden können.

Die *fünf Faktoren nach Maier* sind:

- Veranschaulichung oder Räumliche Visualisierung*
- Räumliche Beziehungen
- Räumliche Orientierung und Faktor K
- Räumliche Wahrnehmung
- Vorstellungsfähigkeit von Rotationen

(* **Hinweis:** Es geht aus der Arbeit von Maier nicht deutlich hervor, ob er mit diesem Faktor den Faktor „Veranschaulichung oder Räumliche Visualisierung“ nach Linn und Petersen oder den Faktor „Veranschaulichung (V_z)“ nach Thurstone meint. Da Maier aber in der zusammenfassenden Tabelle seiner Theorie nur noch von „Veranschaulichung“ spricht und der Faktor „Räumliche Beziehungen“ ebenfalls extra ausgewiesen ist („Veranschaulichung oder Räumliche Visualisierung“ nach Linn und Petersen wäre ja mehr oder weniger eine Zusammenfassung von „Veranschaulichung“ und „Räumliche Beziehungen“ nach Thurstone), wird in der vorliegenden Arbeit davon ausgegangen, dass sich Maier bei diesem Punkt auf Thurstones „Veranschaulichung“ bezieht.)

Im letzten Punkt taucht der bislang noch nicht erwähnte *Faktor K* auf. Dieser ist nicht zu verwechseln mit dem k-Faktor nach El Koussy aus dem Bereich der Ein-Faktor-Theorien. Er beschreibt vielmehr den Faktor *Kinesthetic imagery* aus der in dieser Arbeit nicht vorgestellten Drei-Faktoren-Theorie nach *Michael, Guilford, Fruchter & Zimmerman (1957)*. Der Faktor K ist eher vorläufiger Natur und lässt sich dem Faktor *Räumliche Orientierung (S_3)* nach Thurstone unterordnen:

> This highly tentative factor represents merely a *left-right discrimination* with respect to the location of the human body […] ([MGFZ], S. 191, Hervorhebung im Original)

Maier nimmt diese Unterordnung des *Faktors K* in die Komponente *Räumliche Orientierun*g in Übereinstimmung mit Guilford (vgl. [GUI], S. 364 ff.) vor, und erhält somit fünf Hauptfaktoren anstatt sechs. (Die dünne „Trennlinie" zwischen *Räumliche Orientierung* und *Faktor K* deutet diese Vereinnahmung an.)

Zur besseren Übersicht und näheren Charakterisierung stellt Maier seine fünf Faktoren in einer Tabelle nach folgendem Schema (Tab. 3.1) zusammen:

Die Faktoren *Veranschaulichung, Räumliche Beziehungen* und *Räumliche Orientierung* werden mittels **großer Flächen** hervorgehoben, da diese laut Maier besonders bedeutsame Qualifikationen in privaten, beruflichen und schulischen Bereichen darstellen.

Die verbleibenden Faktoren *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen, Räumliche Wahrnehmung* und der *Faktor K* (der eigentlich zur *Räumlichen Orientierung* gehört) werden mithilfe **kleinerer Flächen** veranschaulicht, da sie relativ spezifische Fähigkeiten repräsentieren.

Bei den **hellgrau unterlegten** Faktoren *(Veranschaulichung, Räumliche Beziehungen* und *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen)* befindet sich die Versuchsperson bei Bearbeitung einer Testaufgabe außerhalb der Aufgabensituation.

In den **dunkelgrau unterlegten** Komponenten *(Räumliche Orientierung, Räumliche Wahrnehmung* und *Faktor K)* dagegen muss sie sich zur Lösung einer Aufgabe mental oder real in die Problemstellung hineinversetzen.

Eine weitere Unterteilung nimmt Maier in seiner Tabelle (3.1) in *dynamische* und *statische Denkvorgänge* vor.

<table>
<tr><th>Standpunkt der Probanden</th><th>Dynamische Denkvorgänge
Räumliche Relationen am Objekt veränderlich</th><th colspan="2">Statische Denkvorgänge
Räumliche Relationen am Objekt unveränderlich; Relation der Person zum Objekt veränderlich</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Person befindet sich außerhalb</td><td>Veranschaulichung</td><td colspan="2">Räumliche Beziehungen</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Vorstellungsfähigkeit von Rotationen</td><td rowspan="3">Räumliche Wahrnehmung</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Person befindet sich innerhalb</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Räumliche Orientierung</td></tr>
<tr><td>Faktor K</td></tr>
</table>

Tab. 3.1: *Die Faktoren des räumlichen Vorstellungsvermögens*

4 Entwicklung der Raumvorstellung

> Geometrie auf der niedrigsten, der nullten Stufe ist […] die Erfassung des Raumes. Und da wir von Erziehung des Kindes sprechen, ist es die Erfassung des Raumes, in dem das Kind lebt, atmet, sich bewegt, den es kennen lernen muß, den es erforschen und erobern muß, um besser in ihm leben, atmen und sich bewegen zu können ([FREU], S. 376 f.).

Wie stark diese Fähigkeit zur Erfassung des Raumes bei Kindern bestimmten Alters schon entwickelt ist, soll als einführendes Beispiel das folgende Diagramm (siehe Abb. 4.1, hervorgehobener Kurvenverlauf) verdeutlichen. Es handelt sich um eine graphische Darstellung der *Entwicklungsverläufe von Thurstones Primärfähigkeiten der Intelligenz nach B. S. Bloom (1971).*

Zu beachten ist, dass mit dem *Faktor S (Space factor)* nur die Teilkomponente *Veranschaulichung* der Raumvorstellung gemeint ist. Diese ist laut Thurstone bis zu einem Lebensalter von rund vier Jahren der am schwächsten entwickelte Intelligenzfaktor. Die Kurve dieses Faktors steigt dann aber ca. zwischen dem siebten und dem 14. Lebensjahr besonders steil an. Mit neun Jahren sind dann etwa 50% der Leistungsfähigkeit im Bereich Veranschaulichung erreicht und im 14. Lebensjahr schon etwa 80%.

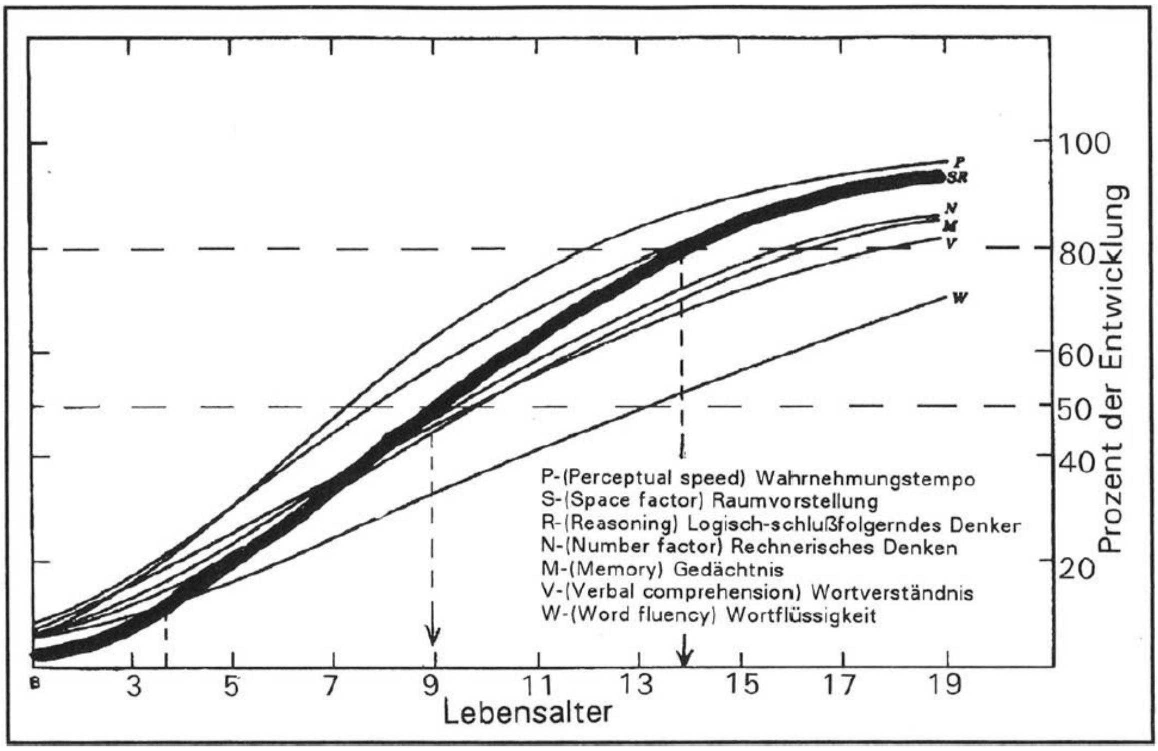


Abb. 4.1: *Entwicklungsverläufe der Primärfähigkeiten der Intelligenz nach Thurstone*

Wenige eher neuere Studien führen den Altersverlauf des Faktors Veranschaulichung nach Bloom fort. Doch es gibt auch viel Kritik und Zweifel an diesem Modell, vor allem im Bezug auf die wissenschaftliche Vorgehensweise (vgl. [MAI], S. 79).

Im Folgenden werden drei weitere Theorien zur Entwicklung der Raumvorstellung bei Kindern vorgestellt, die wohl zu den bekanntesten überhaupt zählen: Die *Stufentheorie nach Stückrath,* der *entwicklungspsychologische Ansatz von Piaget et al.* und der *praxisorientierte Ansatz von D. und P. M. Van Hiele.*

4.1 Die Stufentheorie nach Stückrath

> Von der Stunde der Geburt an vollzieht sich das Leben des Menschen in einer Raumwelt. Der Raum ist mit allen Aktionen und Reaktionen unmittelbar verknüpft, er ist das tragende Fundament der Welterfahrung ([STÜ], S. 14).

F. Stückrath (1968) erforschte auf Basis kontrollierter Beobachtungen die Entwicklungsstadien der Raumorientierung bei Kindern und verfasste so seine berühmte Stufentheorie (siehe Tab. 4.1). Auch wenn sein Konzept zu den Entwicklungsstufen nicht mehr ganz dem Stand der heutigen Forschung entspricht, so stellt es doch einen interessanten deskriptiven Ansatz dar. Überblicksartig lässt sich die Theorie wie folgt darstellen:

<table>
<tr><th colspan="5">Entwicklungsstufen der Raumorientierung nach STÜCKRATH</th></tr>
<tr><td colspan="2">Der Raum der frühen Kindheit
0 - 6 Jahre</td><td colspan="3">Der Raum im Schulalter
6 - 14 Jahre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0 - 1 Jahre</td><td rowspan="2">1 - 6 Jahre</td><td>6 - 7 Jahre</td><td>8 - 10 Jahre</td><td>11 - 14 Jahre</td></tr>
<tr><td>I. Stufe</td><td>II. Stufe</td><td>III. Stufe</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Der Leibraum</td><td rowspan="4">Der Ichraum</td><td colspan="3">Der Handlungsraum</td></tr>
<tr><td>Die Dingstruktur des Objekts</td><td>Die Formstruktur des Objekts</td><td>Die geometrische Struktur des Objekts</td></tr>
<tr><td colspan="3">Der Laufraum</td></tr>
<tr><td>Die dynamische Ordnung</td><td>Die gegenständliche Ordnung</td><td>Die figurale Ordnung</td></tr>
</table>

Tab. 4.1: *Stufentheorie der Entwicklung räumlicher Fähigkeiten beim Kind nach Stückrath*

Stückrath gliedert die Entwicklungsphasen bei Kindern in sogenannte „Räume“.

Der Leibraum

> Das erste Objekt kindlicher Raumerfahrung ist der eigene Leib ([STÜ], S. 15).

Stückrath bezeichnet die ersten Raumerfahrungen im Leben eines Kindes als *Leibraum* und unterteilt diesen in den anfänglichen *Urraum* (bzw. *Mundraum*) und den anschließend ausgebildeten *Greifraum*. Der *Urraum* entsteht durch das Abtasten des eigenen Körpers und das Greifen in den Mund, während der *Greifraum* das nächste Entwicklungsstadium bezeichnet und das Vordringen von Augen und Händen weg vom eigenen Körper, hin zu anderen Dingen beschreibt.

Der Ichraum

Durch eigenständige Fortbewegung des Kindes (z. B. durch Krabbeln, Gehen, Laufen, …) erweitert sich der Leibraum zum *Ichraum*. Das Kind entdeckt immer mehr Gebiete, macht somit neue Raumerfahrungen und steigert so auch seine Fähigkeit zur Raumwahrnehmung. Es lernt dabei elementare Lagebeziehungen wie drinnen-draußen, links-rechts, oben-unten, usw. kennen. Zu beachten ist,

> […] daß der Raum in seiner Ausdehnung der Reichweite der kindlichen Bewegungen angepaßt ist. Er ist so weit aufge-

> schlossen, wie die Aktionen des Kindes reichen ([STÜ], S. 16).

Die Entwicklungen im Handlungsraum sowie im Laufraum vollziehen sich während der Schulzeit (sechs bis 14 Jahre) des Kindes. Beide sind in drei Stufen (nach Altersabschnitten) eingeteilt und es ist wichtig zu beachten, dass die Entwicklung im Handlungsraum der im Laufraum auf der jeweiligen Stufe vorangeht.

Der Handlungsraum

Im Bereich des Handlungsraums vollzieht sich die Entwicklung der Auffassung von Objektstrukturen. Am Anfang (sechs bis sieben Jahre) steht die *Dingstruktur des Objekts*. D. h. das Kind besitzt noch eine ganzheitliche Vorstellung von Formen. Auf der nächsten Stufe der *Formstruktur des Objekts* werden bereits

> […] verschiedenartige Formen, ihre Beziehungen untereinander und ihre Ordnung zu einem Raumganzen ([STÜ], S. 69).

erfasst. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass

> […] die Form an der Körperlichkeit des Dinges haftet und keinesfalls schon als gesonderter Gegenstand Bestand und Bedeutung hat ([STÜ], S. 54).

Das Kind kann also nichts mit dem Begriff „Kugel“ anfangen, sondern identifiziert diese stets als Ball. In der nächsten Stufe ist es ihm aber bereits möglich diese *geometrische Struktur von Objekten* gesondert aufzufassen. Das Kind kann demnach an einzelnen Objekten abstrakte Elemente wie Längen, Breiten, Winkel, etc. erkennen.

Der Laufraum

In den drei Entwicklungsphasen des Laufraums bildet sich die Fähigkeit, sich einen Weg mit allen für die Orientierung notwendigen Daten zu merken und vorstellen zu können. Auf der *ersten Stufe* der *dynamischen Ordnung* hat ein bereits zurückgelegter Weg Erlebnischarakter für das Kind. In seiner Erinnerung finden sich nur gewisse Orte oder Erlebnisse, die es interessant fand. Auf der *zweiten Stufe* kann der Weg durch die Abfolge von gemerkten Stationen rekonstruiert werden. Erst auf der *letzten Stufe* der *figuralen Ordnung* ist es dem Jugendlichen möglich, sich den Weg mit allen nötigen Daten vorzustellen, diesen nicht nur zurückzugehen, sondern auch einen bislang unbekannten abkürzenden Weg zurück zu nehmen.

4.2 Der entwicklungspsychologische Ansatz von Piaget et al.

Die wohl bekannteste, am meisten fortgeführte, aber auch kritisierte entwicklungspsychologische Theorie der kognitiven Entwicklung stammt von J. Piaget, B. Inhelder et al.; namentlich erwähnt wird in der Literatur jedoch meist nur J. Piaget. Dieser führte systematische Experimente mit Kindern aller Altersstufen durch und es gelang ihm einen Grundstein der Kinderpsychologie zu legen. Entscheidend war u. a. Piagets Ansicht, dass nicht die richtige Antwort des Kindes, sondern der Gedankengang wichtig sei (vgl. [MAI], S. 87).

Die Einteilung seiner Stufentheorie der Intelligenzentwicklung in die einzelnen Stadien ist in den verschiedenen Veröffentlichungen nicht eindeutig. Die Altersangaben und Einteilungen in (Unter-)Gruppen und auch Bezeichnungen (der Stadien, Stufen, Phasen) unterscheiden sich daher teilweise.

4.2.1 Die Stufentheorie der kognitiven Entwicklung

Grundsätzlich lassen sich folgende vier Stufen der Intelligenzentwicklung unterscheiden:

- *Sensomotorische Phase* (0 – 1 ½ Jahre)
- *Präoperationale Phase* (1 ½ – 7 Jahre)
- *Konkret-operationale Phase* (7 – 11/12 Jahre)
- *Formal-operationale Phase* (ab 11/12 Jahren)

Im Folgenden werden nur die für die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens relevanten Aspekte der einzelnen Phasen Piagets Theorie erörtert. Wichtig zu erwähnen ist noch, dass Piaget et al. zwischen *wahrgenommenem Raum (Raumwahrnehmung)* und *vorgestelltem Raum (Raumvorstellung*) unterscheiden, wobei sich ihre Stufentheorie hauptsächlich auf die Analyse des *vorgestellten Raums* beschränkt (vgl. [PIIN], S. 23).

Sensomotorische Phase

In dieser Phase beginnt das Kind die Fähigkeit zu entwickeln den Weg zwischen verschiedenen Orten zu finden. Dies geschieht auf der Basis sensomotorischer Aktionen mit verschiedenen Gegenständen (Alltagsgegenständen, Spielzeug). Es mag schon ein gewisses Raumkonzept vorhanden sein, doch eine mentale Rekonstruktion bzw. Vorstellung des Raumes ist dem Kind wahrscheinlich noch nicht möglich (vgl. [PIIN], S. 24 ff.).

Präoperationale Phase

In diesem Stadium werden die in der sensomotorischen Phase erworbenen räumlichen Schemata internalisiert, d. h. sie werden verinnerlicht und entwickeln sich dort zunehmend weiter. Hier kommt auch Piagets zentrale These zum Einsatz. Diese besagt, dass *Denken durch Verinnerlichung von gegenständlichen Handlungen* entsteht. Damit ist gemeint, dass sich räumliche Vorstellungen erst entwickeln können, sobald die Person entsprechende Handlungen selbst ausgeführt hat:

> Einen leicht gelockerten Knoten „sehen“ die Kinder nicht und begreifen ihn nicht als homöomorph zu einem etwas festeren Knoten, ehe sie nicht an der Schnur gezogen haben; den Schnitt durch einen Zylinder stellen sie sich erst dann kreisförmig vor, wenn das auf der Modelliermasse liegende Messer wirklich durchgeschnitten hat; ein perspektivischer Blickwinkel wird nicht rekonstruiert, ehe die Vp den entsprechenden Standort innehat, usw. ([PIIN], S. 525)

An dieser Stelle ist noch zu betonen, dass nicht *das Sehen* selbst die wesentlichste Komponente darstellt, sondern die *Motorik*:

> […] die Motorik, die schon bei der Wahrnehmungsaktivität mitwirkt und daher schon bei der Wahrnehmung in die Konstruktion des Raumes eingreift, erscheint von neuem als wesentliche Komponente beim Erarbeiten des vorgestellten Bildes und folglich auch der anschaulichen Raumvorstellung ([PIIN], S. 67).

Konkret-operationale Phase

> Mit ca. 7 – 8 Jahren erwirbt das Kind die Fähigkeit zu konkreten Operationen, d. h. der Bereich des Sicht- und Fühlbaren, der bisher der bloßen präoperatorischen Anschauung vorbehalten war, wird durch allgemeine, zusammenstellbare und umkehrbare Operationen strukturiert ([PIIN], S. 174).

In diesem Stadium erlangt das räumliche Vorstellungsvermögen eine ganz neue Ebene. Die Fähigkeit des Kindes, aktive mentale Manipulationen an Objekten durchzuführen, ist stark gesteigert. Es kann sich z. B. ein Objekt aus einer anderen Perspektive vorstellen, oder es sogar mental rotieren lassen. Die durchgeführten Operationen sind aber noch *konkret* mit Handlungen verbunden.

Formal-operationale Phase

> Hier gelangt die Anschauung zu ihrer Vollendung, und hier beginnt ein Typus des Denkens, der, obwohl er den Zielpunkt dieser stetigen Verinnerlichung des Handelns darstellt, dank seiner wachsenden diskursiven Formalisierung die Axiomatisierung des Raumes vorbereitet ([PIIN], S. 528).

Die Heranwachsenden lernen also mit abstrakten Räumen und formalen Raumgesetzen umzugehen. Sie benötigen die konkreten Erfahrungen nicht mehr, ganz im Gegenteil sie können sich sogar rein fiktive Räume vorstellen und in ihnen logische Schlussfolgerungen ziehen.

Abgesehen von den eben vorgestellten vier Phasen der Entwicklung kognitiver Fähigkeiten unterscheiden Piaget et al. konkret im Bezug auf die Raumvorstellung die folgenden drei Entwicklungsphasen: topologische, projektive und euklidische Raumvorstellung. Diese drei Stadien sind aufeinander aufbauend und gesondert vom vorhergehenden Vier-Phasen-Modell zu betrachten.

4.2.2 Die Entwicklungsphasen räumlicher Operationen

Die folgenden Ausführungen zu den drei Entwicklungsphasen räumlicher Operationen sind als überblicksartige Darstellung zu verstehen. Auf genauere Einteilungen in sämtliche Untergruppen und eine allzu detaillierte Vorstellung der Theorie wird an dieser Stelle verzichtet.

Topologische Raumvorstellung (im Vorschulalter)

Noch bevor sich bei Kindern Fähigkeiten im Sinne der projektiven oder euklidischen Geometrie entwickeln, ist bei ihnen ein Verständnis für topologische Sachverhalte wie offen-geschlossen, benachbart, aufeinanderfolgend, begrenzt, usw. festzustellen. Zu diesem Ergebnis kamen Piaget et al. u. a. durch einen Versuch, bei dem sie Kinder unterschiedlichen Alters Modelle wie die folgenden (Abb. 4.2) nachzeichnen ließen. Der Schwerpunkt liegt hierbei im topologischen oder euklidischen Bereich, oder ist eine Mischung aus beiden.

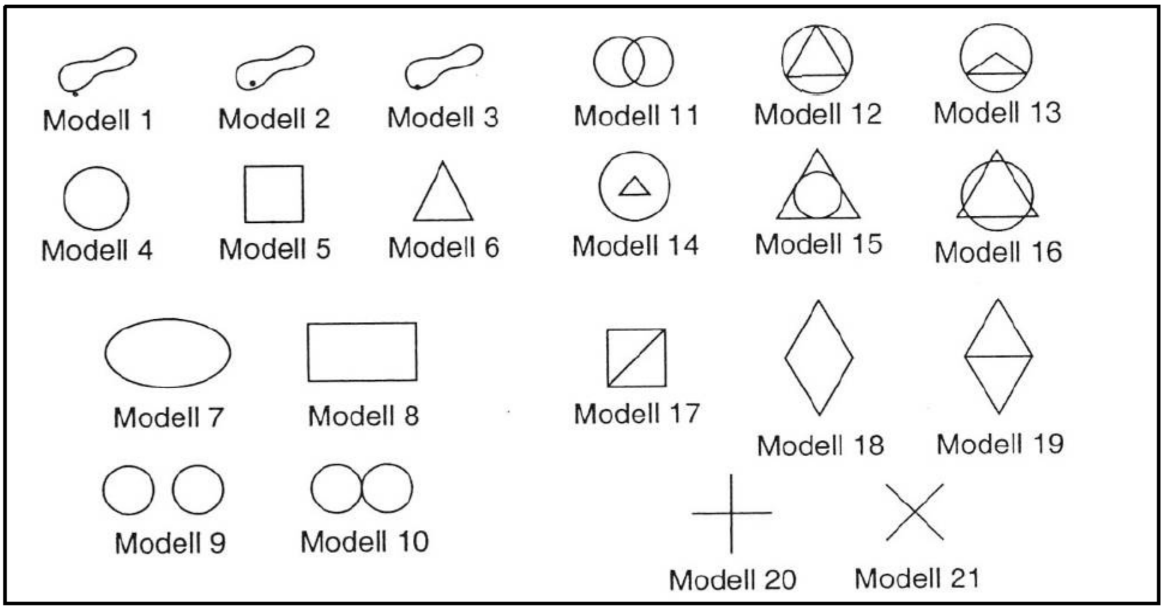


Abb. 4.2: Vorlagen zum Versuch: *Zeichnen geometrischer Formen*

Ein Beispiel das zeigt wie Kinder topologische Relationen schon berücksichtigen, während die euklidischen noch vernachlässigt werden sind folgende Zeichnungen eines Dreijährigen (siehe Abb. 4.3):

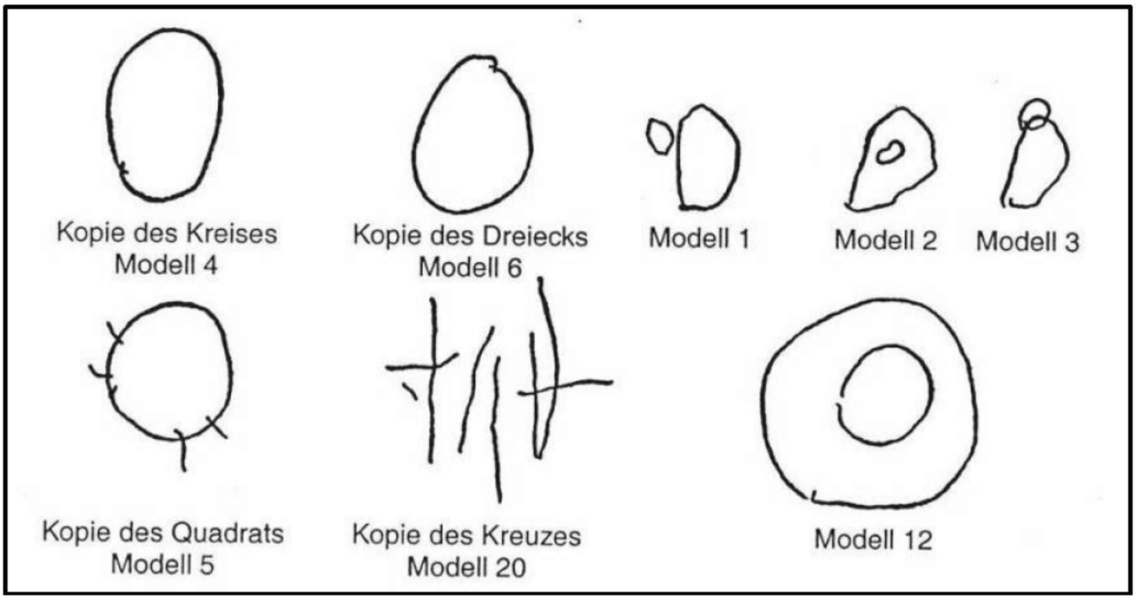


Abb. 4.3: *Zeichnungen eines Dreijährigen*

Projektive Raumvorstellung (ab ca. sieben Jahren)

Ab einem Alter von ca. sieben Jahren sind Kinder laut Piaget et al. in der Regel in der Lage, projektive Geraden zu konstruieren (z. B. Verkürzung von Geraden beim Schrägbild), die Perspektive zu erfassen und zu koordinieren (siehe Drei-Berge-Versuch im Anschluss) und Schattenprojektionen, Schnittoperationen und Flächenabwicklungen zu verstehen.

Der wohl bekannteste Versuch zur projektiven Raumvorstellung ist der eben erwähnte *Drei-Berge-Versuch* (siehe Abb. 4.4).

Basis für diesen Test ist ein Modell von drei Bergen (12 – 30 cm Höhe) aus Pappmaché, wobei jeder der Berge eine andere Farbe und andere Besonderheiten (z. B. Gipfelkreuz, Häuschen) besitzt. Die Testperson befindet sich im Standort A und es werden ihr zehn verschiedene Fotos gezeigt, die die drei Berg aus verschiedenen Blickwinkeln zeigen. Zusätzlich bekommt sie als Hilfestellung drei Pappstücke in den Farben der Berge, mit denen sie die jeweilige Perspektive nachbauen kann, wenn nötig. Anschließend wird eine Puppe an verschiedene Punkte des Pappmaché-Modells gesetzt und der Proband bzw. die Probandin soll jetzt die Fotos den Standorten der Puppe richtig zuordnen.

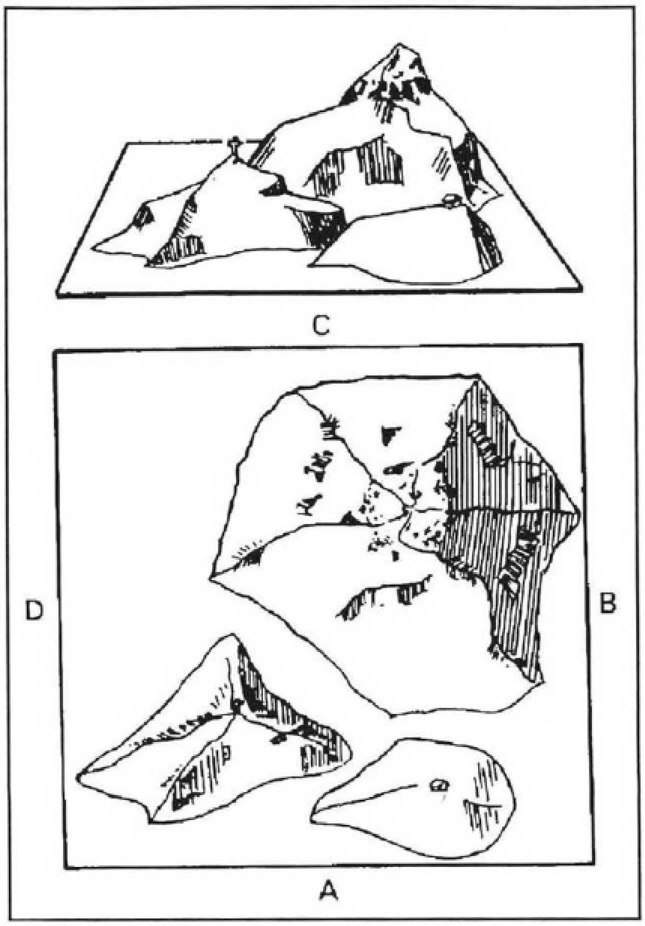


Abb. 4.4: *Drei-Berge-Versuch*

Euklidische Raumvorstellung (ab ca. sieben bis zwölf Jahre)

Die euklidische Raumvorstellung teilen Piaget et al. in drei Ebenen ein:

- *Qualitative Operationen* (Invarianz und Kongruenz: z. B. Erhalten von Abständen, Längen, Flächen und Volumina)

- *Einfache Metrik* (z. B. Messung von Längen, Flächen und Winkeln)

- *Flächen- und Volumsberechnungen*

Als Testung in diesem Bereich, konkret zur Feststellung der Fähigkeiten zur Identifikation der Horizontalen und Vertikalen, wurden folgende Versuche angewandt:

Um zu überprüfen wie weit Kinder unterschiedlichen Alters zur Identifikation der *Horizontalen* fähig sind, wurden ihnen mit einer gefärbten Flüssigkeit gefüllte Gefäße gezeigt. Danach sollten sie in Skizzen dieser Behältnisse den Wasserstand bei normaler und den zu erwartenden Wasserstand bei Schrägstellung einzeichnen. Anschließend wurde vor ihren Augen das echte Gefäß in die jeweilige Lage gebracht und sie hatten die Möglichkeit ihre Zeichnung nachträglich zu korrigieren.

In Abb. 4.5 links sieht man die unterschiedlichen Entwicklungsstadien (von oben nach unten), die sich daraus für Piaget et al. ergaben. Sie reichen von „wildes Gekritzel in und auch außerhalb des Gefäßes“, über „Orientierung des Wasserstandes am Flaschenboden bzw. Flaschenhals“ bis hin zu „Erkennen das bei Schrägstellung die Flüssigkeit in eine Ecke läuft, aber trotzdem falsch (d. h. nicht horizontal eingezeichneter Pegel)“.

Zur Feststellung der Fähigkeit der Kinder mit der *Vertikalen* umzugehen, wurde der Versuch mit den Gefäßen mit einem mit „Masten“ versehenen Korken ergänzt, der auf der Flüssigkeit schwamm.

Ein zweiter Test war es, Kinder auf das Modell eines Berges Bäume und Häuser stecken zu lassen, sodass sie „schön gerade“ sind (Abb. 4.5 rechts, von oben nach unten). Analog zum vorigen Versuch sollte das Ganze auch wieder zeichnerisch festgehalten werden. Hierbei reicht die Palette der Kinderzeichnungen von „Bäume und Häuser parallel zum Hang“ über „Bäume und Häuser im rechten Winkel zum Hang“ bis zur richtigen Lösung „Bäume und Häuser vertikal ausgerichtet“ (vgl. [PIIN], S. 443 ff.).

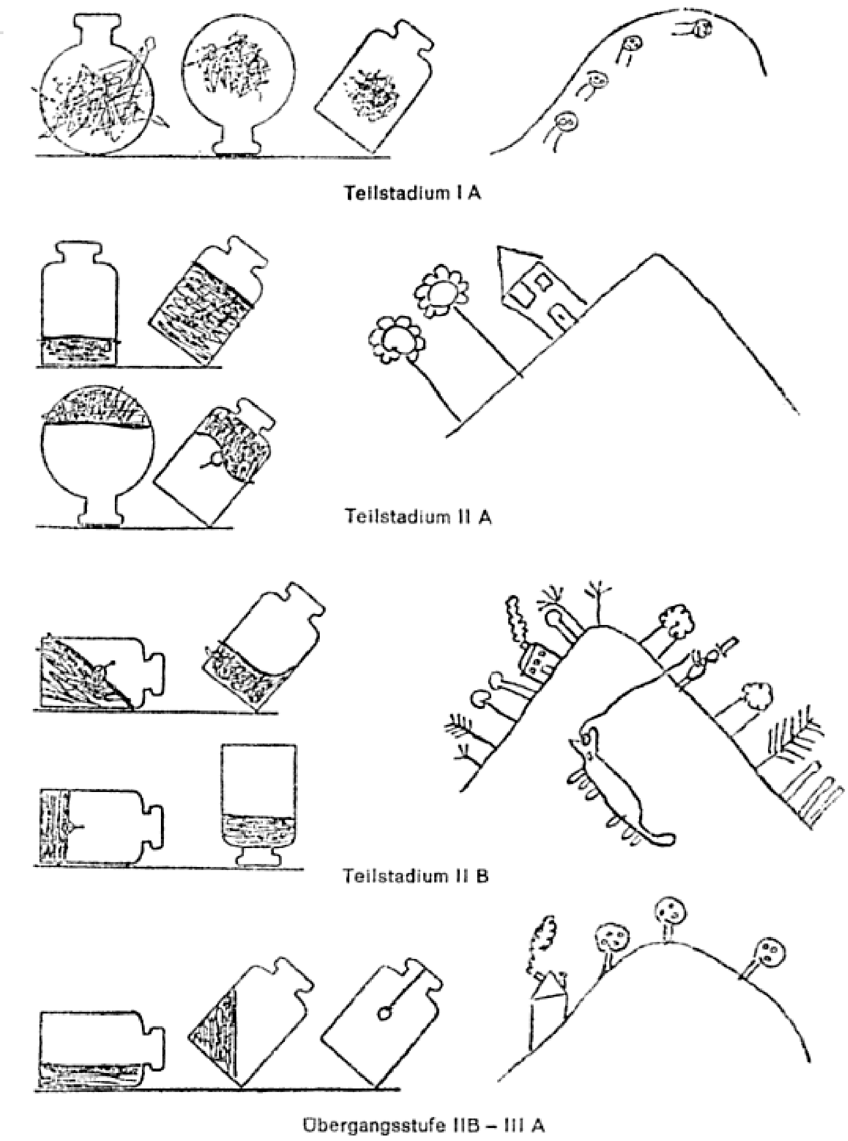


Abb. 4.5: *Entwicklungsstadien der Horizontalen und der Vertikalen*

4.3 Der praxisorientierte Ansatz von D. und P. M. Van Hiele

Das Ehepaar Van Hiele entwickelte eine Theorie, mit der es versuchte, den Prozess des Mathematiklernens durch eine Folge von Denkniveaus zu beschreiben. Besonders relevant sind die Arbeiten der Van Hieles für den Geometrieunterricht, da die beiden ihre Niveautheorie vor allem mithilfe von Beispielen aus diesem Bereich untermauern. Sie zielen mit ihrem Konzept nicht wie die beiden vorangehenden Theorien speziell auf die Entwicklung der Raumvorstellung ab, sondern behandeln vielmehr die Entwicklung des mathematisch-geometrischen Denkens im Allgemeinen.

Dennoch ist die Theorie der Van Hieles an dieser Stelle von nicht unbeachtlicher Bedeutung. Sie stellt bereits einen starken Praxisbezug zum Geometrieunterricht her, der in den folgenden Kapiteln noch weiter ausgebaut werden wird.

Die Denkniveaus oder Denkebenen der Theorie werden auch Niveaustufen genannt und entstanden durch das Beobachten von Schüler(inne)n im Mathematikunterricht. Es handelt sich hierbei um die verschiedenen Ebenen, auf denen in einem bestimmten wissenschaftlichen Fachbereich gedacht und argumentiert werden kann. Die Lehrperson befindet sich laut Van Hiele auf einer höheren Ebene als die Schüler(innen), worin genau das Problem liegt. Kommuniziert diese nämlich auf ihrer Ebene mit den ihr vertrauten Begriffen und Argumenten, so können sie die Schüler(innen), die sich auf einer anderen Denkebene befinden, nicht wirklich verstehen.

Einige Lehrer halten ihre Darlegungen auf ihrer eigenen Ebe-

> ne und erwarten, daß die Schüler auf ihre Fragen antworten. Dies ist jedoch in Wirklichkeit nur ein Monolog […]. Der echte Dialog muß auf der Ebene der Schüler stattfinden ([VANH], S. 130).

Schon in den letzten beiden hier behandelten Theorien, der *Stufentheorie nach Stückrath* und dem *entwicklungspsychologischen Ansatz von Piaget et al.,* wurde von einer gewissen Abfolge der Entwicklung der Raumvorstellung ausgegangen. Im Unterschied zu den Stufen der ersten beiden Theorien betonen die Van Hieles, dass ihre Theorie nicht aus Stufen aufgebaut ist, auf denen der Lernprozess zum Stillstand zu kommen scheint. Die Ebenen dieser Theorie sind vielmehr als vielschichtige, dynamische Lernprozesse zu verstehen, die jeweils in fünf Phasen eingeteilt sind, die zum Erreichen des nächsthöheren Levels dienen.

Es bestehen allerdings nicht nur Unterschiede, sondern auch enge Verbindungen zum Ansatz von Piaget et al., zum Beispiel was die Verinnerlichung durch handlungsorientierten Unterricht betrifft:

> Es ist von Wichtigkeit, bei dieser Gelegenheit die These Piagets zu unterstreichen, nach welcher […] der Ursprung fast jeden Gedankens eine Handlung ist, und ein Stoff häufig erst dann intuitiv wird, wenn man mit ihm umgegangen ist ([VANH], S. 128).

Bevor wir zu den Denkebenen bzw. Niveaustufen kommen sei an dieser Stelle ein kurzer Überblick gegeben, welche Phasen des Lernprozesses die Schüler(innen) mit Unterstützung des Lehrers bzw. der Lehrerin durchlaufen müssen, um von der einen auf die nächste Niveaustufe zu kommen:

1. Phase **Die Information:** Die Schüler(innen) werden zu einem neuen Thema mit geeignetem Material hingeführt.

2. Phase **Die Exploration** oder **gesteuerte Orientierung:** Das Material wird von den Schüler(inne)n systematisch untersucht, um Strukturen und Verbindungen zu entdecken. Der oder die Lehrende hat hier eine richtungsweisende Funktion.

3. Phase **Die Explizierung** oder **Verdeutlichung:** Bereits erlangte Erfahrungen werden mit Fachausdrücken verbunden und es werden somit neue Begriffe eingeführt.

4. Phase **Die freie Orientierung:** Die Schüler(innen) müssen jetzt lernen, sich selbstständig im erlernten Gebiet zurechtzufinden.

5. Phase **Die Integration:** Die Schüler(innen) sollen einen Überblick über das Gelernte bekommen und so die nächste Niveaustufe erreichen.

Ergänzend zu diesem Modell ist noch zu erwähnen, dass es wichtig ist, vor Abschluss des neuen Themas Verbindungen mit bereits vorhandenem Vorwissen herzustellen. Die Schüler(innen) sollen nicht nur einen Überblick über ein spezielles Thema, sondern auch über dessen Bezug zu anderen, bereits vertrauten Bereichen erlangen.

Kommen wir nun zu den Niveaustufen des Denkens nach Van Hiele. Die Bezeichnungen dieser Stufen variieren in den Arbeiten des Ehepaars zwischen Denkniveaus, Denkebenen und Niveaustufen. Ebenso ist die Anzahl der Stufen nicht eindeutig. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die *5-Ebenen-Theorie*, die am umfassendsten gestaltet und Basis vieler weiterführenden Forschungen und Veröffentlichungen ist.

0. Niveaustufe: Räumliches Denken

> Räumliche Beziehungen werden nur in der unmittelbaren Umgebung von den Schülern erfaßt, wobei geometrische Figuren als Ganzheit gesehen werden, nicht jedoch im Hinblick auf Einzelheiten oder Eigenschaften. […] Auf dieser Stufe ist das geometrische Arbeiten weitgehend materialgebunden ([RARI], S. 13).

Beispiele:

- Geometrische Figuren mit eigenen Worten beschreiben: ein Würfel sieht aus wie eine Schachtel, …
- Geometrische Figuren zeichnen, falten, am Geobrett spannen, zusammensetzen, usw. (siehe Abb. 4.6)

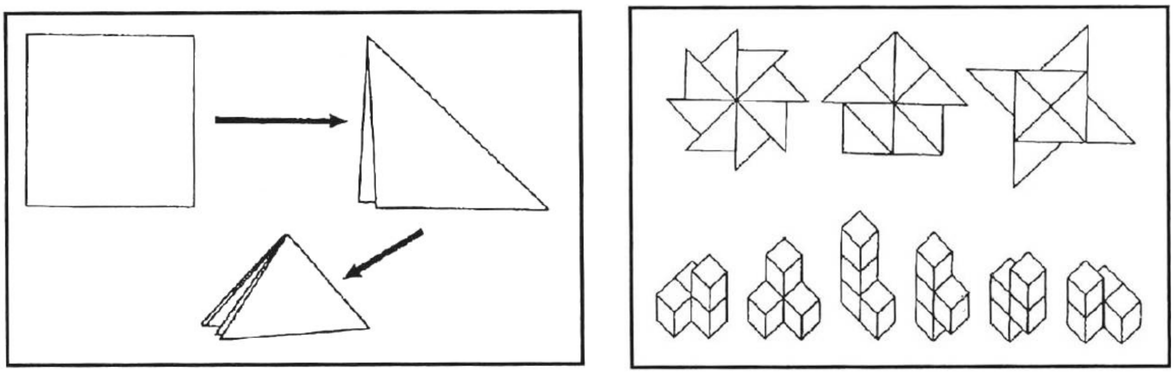


Abb. 4.6: *Falten, Auslegen, Zerlegen, Zusammensetzen geometrischer Formen*

1. Niveaustufe: Geometrisch räumliches Denken

Die Schüler(innen) beginnen die Eigenschaften der geometrischen Objekte zu entdecken. Ein Quadrat wird zum Beispiel nicht mehr nur an seiner Form erkannt, sondern auch beispielsweise daran, dass die vier Seiten gleich lang und jeweils die zwei gegenüberliegenden parallel sind. Zusammenhänge zwischen verschiedenen Figuren wie Quadrat und Raute sind allerdings noch nicht ersichtlich.

Beispiele:

- Geometrische Körper anhand ihrer Haupteigenschaften unterscheiden: rund – eckig, usw.
- Figuren erkennen, die zum Teil verdeckt sind und nach und nach zum Vorschein kommen (siehe Abb. 4.7)

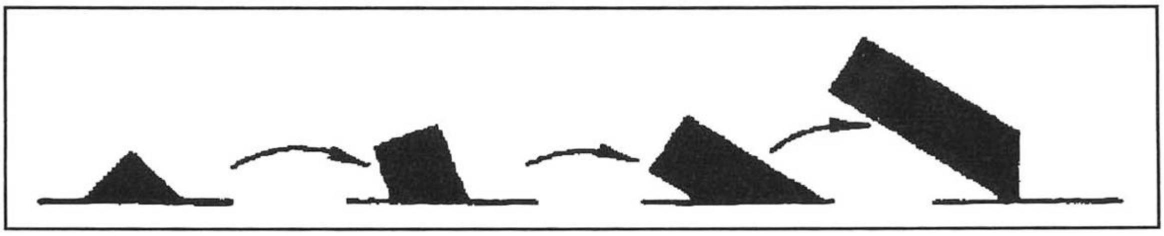


Abb. 4.7: *Verdeckte Vierecke in unterschiedlichen Stadien*

2. Niveaustufe: Mathematisch geometrisches Denken

Was auf der vorangehenden Niveaustufe noch nicht möglich war, beginnt sich jetzt zu entwickeln: Die Schüler(innen) sind in der Lage, Beziehungen zwischen verwandten geometrischen Figuren herzustellen. Sie erkennen gewisse gleiche oder ähnliche Eigenschaften an verschiedenen Figuren oder Körpern und lernen so Klassifizierungen zu verstehen. Ebenso können die Kinder mit geometrischen Definitionen und logischen Implikationen umgehen.

Beispiele:

- Gegenüberstellung der Eigenschaften ähnlicher geometrischer Körper wie z. B. Prisma und Zylinder
- Erkennen der Zusammenhänge zwischen verschiedenen Vierecken und bewusstes Verändern von diesen am Geobrett (siehe Abb. 4.8)

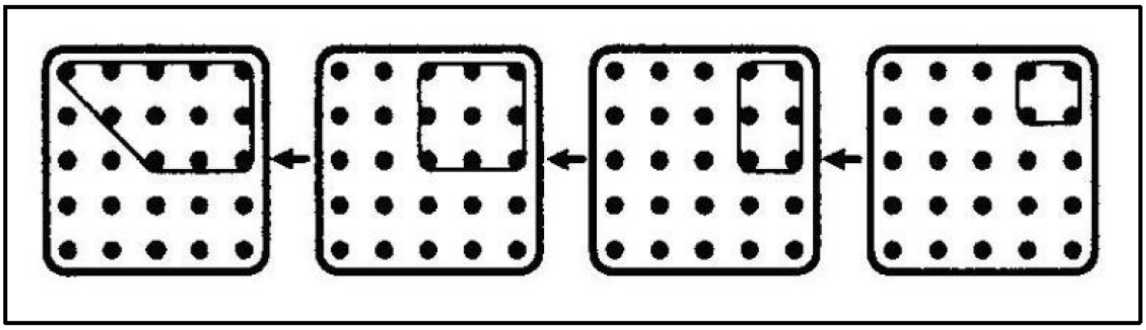


Abb. 4.8: *Viereckformen am Geobrett*

3. Niveaustufe: Logisch mathematisches Denken

Auf dieser Stufe werden Schlussfolgerungen als Grundlage eines geometrischen Systems verstanden und angewendet. Die Schüler(innen) beginnen die Bedeutung von geometrischen Axiomen, Definitionen, Sätzen und Beweisen zu erkennen.

Beispiele:

- Geometrische Figuren und Körper werden exakt definiert.
- Beweis: ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel ist ein Rechteck (vgl. [MAI], S. 102).

4. Niveaustufe: Strenge, abstrakte Geometrie

Das Unterrichtsziel auf dieser Ebene wäre, zu analysieren, worin die Tätigkeit des Mathematikers besteht und worin sie sich von der anderer Fächer unterscheidet ([VANH], S. 135).

Es werden auf dieser letzten Niveaustufe Axiomensysteme eingeführt und untereinander verglichen (z. B. Hilbert, Euklid, usw.). Dieser anspruchsvollere wissenschaftliche Bereich fällt jedoch im Allgemeinen nicht mehr unter den in der Schule gelehrten Stoff.

Der amerikanische Psychologe J. S. Bruner spricht in diesem Zusammenhang in seinem 1960 erschienen Buch „The process of education“ von sogenannten *Fundamentalen Ideen,* die seiner Meinung nach nicht der wissenschaftlichen Forschung auf einem Fachgebiet vorbehalten bleiben dürfen, sondern sich schon zu Beginn der Schulbildung wie ein roter Faden durch den Unterricht in einem Fach zu ziehen haben. Nach Bruner sollte sich der Unterricht auf den verschiedenen Stufen (Grundschule bis Universität) nicht dem Prinzip nach, sondern nur dem Niveau nach unterscheiden (vgl. [HUMRE], Vorwort).

Übergänge von der Grundschule zur Höheren Schule und von dort zur Hochschule werden erleichtert, weil durch die Betonung von Fundamentalen Ideen vom Beginn des Unterrichts an die Kluft zwischen elementarem und fortgeschrittenem Wissen verringert werden kann. Der Unterschied sollte ja nur ein „Niveau-Unterschied“, aber kein prinzipieller mehr sein (vgl. [LOC], S. 37 f.)!

Auf der Suche nach einer Möglichkeit, typische mathematische Ideen und Arbeitsweisen auf einfachere Weise zu demonstrieren, nennt der Wiener Mathematikdidaktiker S. Götz den Begriff der *mathematischen Miniaturen*. Anhand von elementaren Problemen, sogenannten Miniaturen, soll die Tätigkeit des Mathematikers bzw. der Mathematikerin modellhaft und auf leichter verständliche Art und Weise abgebildet werden. Es geht nicht in erster Linie um das dargestellte Problem an sich, sondern hauptsächlich um die modellhafte Abbildung mathematischen Tuns (vgl. [GÖTZ], S. 87).

> Die Charakteristika mathematischen Tuns sind auch in anderen Lebensbereichen nicht unwichtig. Das Verallgemeinern, das Treffen von Fallunterscheidungen, das Betrachten von Extremfällen, das Formulieren von Voraussetzungen, das Verwenden bekannter Methoden in neuen Anwendungen sind nur einige Beispiele dafür ([GÖTZ], S. 87).

Zusammenfassend ist zu sagen, dass die Van Hieles ihre Niveautheorie nicht wie Piaget als biologischen Reifeprozess, sondern als beeinflussbaren Lernprozess sehen:

> Es ist also möglich und wünschenswert, dass der Lehrer ihn fördert und beschleunigt. Das Ziel der Didaktik ist es ja gerade festzustellen, wie diese Phasen durchlaufen werden und wie dem Schüler dabei wirksame Hilfe zuteil werden kann ([VANH], S. 130).

5 Raumvorstellung im Geometrieunterricht der AHS

5.1 Raumvorstellung – ein allgemeines Bildungsziel

Die Relevanz des räumlichen Vorstellungsvermögens zeigt sich in vielen Bereichen des täglichen Lebens, von Schule über Freizeit und Alltag bis hin zum Beruf. Bezüglich letzterem nennt A. Asperl hier einige Beispiele:

> Eine ausgeprägte Raumvorstellung ist wichtig zur Ausübung folgender **Berufe**:
>
> <u>technischer</u> Bereich: Konstrukteur, Modellbauer, Automechaniker, Elektriker, Installateur,...
>
> <u>naturwissenschaftlicher</u> Bereich: Physiker, Chemiker, Botaniker,...
>
> <u>künstlerischer</u> Bereich: Architekt, Designer, Bildhauer
>
> weiters für Mathematiker, Mediziner (Chirurgen, Neurologen) und Piloten (*Asperl,* S. 1).

In diesem Sinne ist die Raumvorstellung den *berufsrelevanten Kompetenzen* laut Lehrplan unterzuordnen:

> Im überschaubaren Rahmen der Schulgemeinschaft sollen Schülerinnen und Schüler Fähigkeiten erwerben, die später in Ausbildung und Beruf dringend gebraucht werden, […] (*LP-AHS allgemein,* S. 2).

Ein weiterer Punkt im allgemeinen Teil des Lehrplans, unter den sich die Notwendigkeit der Förderung der Raumvorstellung zweifelsfrei einordnen lässt, bezieht sich auf den Straßenverkehr:

> **Bildungsbereich Gesundheit und Bewegung:**
> […] Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, sich am Straßenverkehr sicher und unfallverhütend zu beteiligen, […] (*LP-AHS allgemein,* S. 4).

Im AHS-Lehrplan finden sich allerdings nicht nur indirekte Aufforderungen, die räumliche Vorstellungsfähigkeit der Schüler(innen) zu fördern, sondern auch explizit angegebene:

> **Bildungsbereich Natur und Technik:**
>
> […] Als für die Analyse und Lösung von Problemen wesentliche Voraussetzungen sind Formalisierung, Modellbildung, Abstraktions- und Raumvorstellungsvermögen zu vermitteln (*LP-AHS allgemein,* S. 4).

Die Raumvorstellung ist also nicht nur von Psycholog(inn)en als einer der wichtigsten Faktoren der Intelligenz anerkannt, sondern auch unter den a*llgemeinen Bildungszielen* im österreichischen Lehrplan der AHS zu finden.

5.2 Lehrstoff des Geometrieunterrichts

Wir wollen nun der Frage nachgehen, inwieweit der Lehrstoffteil des Lehrplans an das in Rede stehende Bildungsziel angepasst ist, und in welchem Rahmen Lehrer(inne)n bei Einhaltung der Lehrstoffvorgaben eine umfassende Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens möglich ist.

Zu diesem Zweck untersuchen wir den Lehrstoff des Geometrieunterrichts auf sein Potential, zur Verbesserung der Raumvorstellung beizutragen. Potential deshalb, da einzelne Punkte des Lehrstoffs auf verschiedene Weisen erfüllt werden können, auf Arten, die mehr oder weniger auf Raumvorstellungsförderung abzielen.

Es werden im Folgenden (5.2.1 bis 5.2.6) die Lehrinhalte des Geometrieunterrichts den fünf Komponenten der Raumvorstellung nach Maier zugeordnet, je nachdem, welche der Komponenten am ehesten dadurch gefördert wird. Trägt ein Stoffgebiet zu etwa gleichen Teilen zur Förderung mehrerer Raumvorstellungskomponenten bei, so werden all diese angeführt.

Über den Grad (kaum – etwas – viel), in dem ein gewisser Stoff die Raumvorstellung positiv beeinflusst, macht die folgende Analyse keine Aussagen.

Hier noch einmal ein kurzer Überblick über die *fünf Faktoren nach Maier* mit illustrierenden Kompetenzen:

1. Veranschaulichung [siehe *Faktor: Veranschaulichung* nach Thurstone und *Faktor: Veranschaulichung oder Räumliche Visualisierung* nach Linn und Petersen]:

- Gedanklich Bewegungen von Objekten oder Teilen von ihnen vorstellen (Rotation, Verschiebung, Faltung)

2. Räumliche Beziehungen [siehe *Faktor: Räumliche Beziehungen* nach Thurstone und *Faktor: Veranschaulichung oder Räumliche Visualisierung* nach Linn und Petersen]

- Räumliche Konfigurationen von Objekten oder Teilen von ihnen erfassen und deren Beziehungen untereinander herstellen

3. Räumliche Orientierung und Faktor K [siehe *Faktor: Räumliche Orientierung* nach Thurstone und *Faktor: Kinesthetic imagery* nach Michael, Guilford, Fruchter & Zimmerman]

- Die eigene Person richtig in eine räumliche Situation einordnen
- Rechts-links-Unterscheidung

4. Räumliche Wahrnehmung [siehe *Faktor: Räumliche Wahrnehmung* nach Linn und Petersen]

- Identifikation von Horizontal- und Vertikalebenen: Unterscheidung von oben-unten und vorne-hinten
- Relation zum eigenen Körper wichtig

5. Vorstellungsfähigkeit von Rotationen [siehe *Faktor: Vorstellungsfähigkeit von Rotationen* nach Linn und Petersen]

- Sich Rotationen von zwei- oder dreidimensionalen Objekten vorstellen

Auf Grund starker Parallelen zwischen den Punkten *1. Veranschaulichung* und 2. *Räumliche Beziehungen* (bei Linn und Petersen noch zusammengehörig) werden diese zur Untersuchung des Lehrstoffs zu *einer* Komponente zusammengefasst.

Unterschieden wurde hingegen zwischen Inhalten der ebenen und Inhalten der räumlichen Geometrie. Es zeigte sich, dass die ebene Geometrie deutlich stärker im Lehrplan vertreten ist (siehe Abb. 5.1 und Abb. 5.2). In diesen beiden Diagrammen ist der Anteil der räumlichen bzw. der ebenen Geometrie am gesamten Mathematiklehrstoff der einzelnen Klassen der AHS angegeben.

Dazu wird der gesamte Mathematiklehrstoff einer Klasse als die Summe der Themenbereiche bezeichnet, die im Lehrplan (*LP-AHS-Unterstufe,* S. 4 ff. bzw. *LP-AHS Oberstufe* S. 3 ff.) als eine Aufzählung mit Spiegelstrichen angeführt ist. Der Anteil der ebenen Geometrie am Mathematiklehrstoff einer Klasse berechnet sich dann aus dem Quotienten der Anzahl der Spiegelstriche die der ebenen Geometrie zuzuordnen sind und der Anzahl der Spiegelstriche des gesamten Mathematiklehrstoffes in dieser Klasse. Analog verhält es sich mit der räumlichen Geometrie.

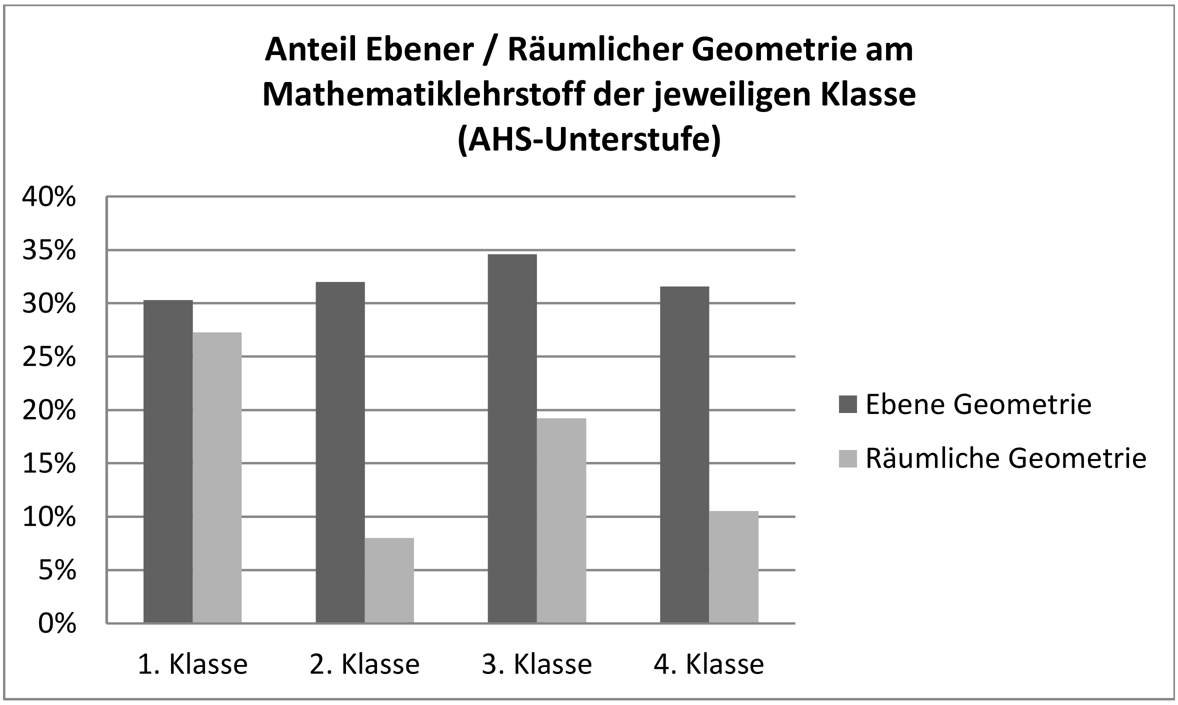


Abb. 5.1: *Anteil Ebener / Räumlicher Geometrie am Mathematiklehrstoff der jeweiligen Klasse (AHS-Unterstufe)*

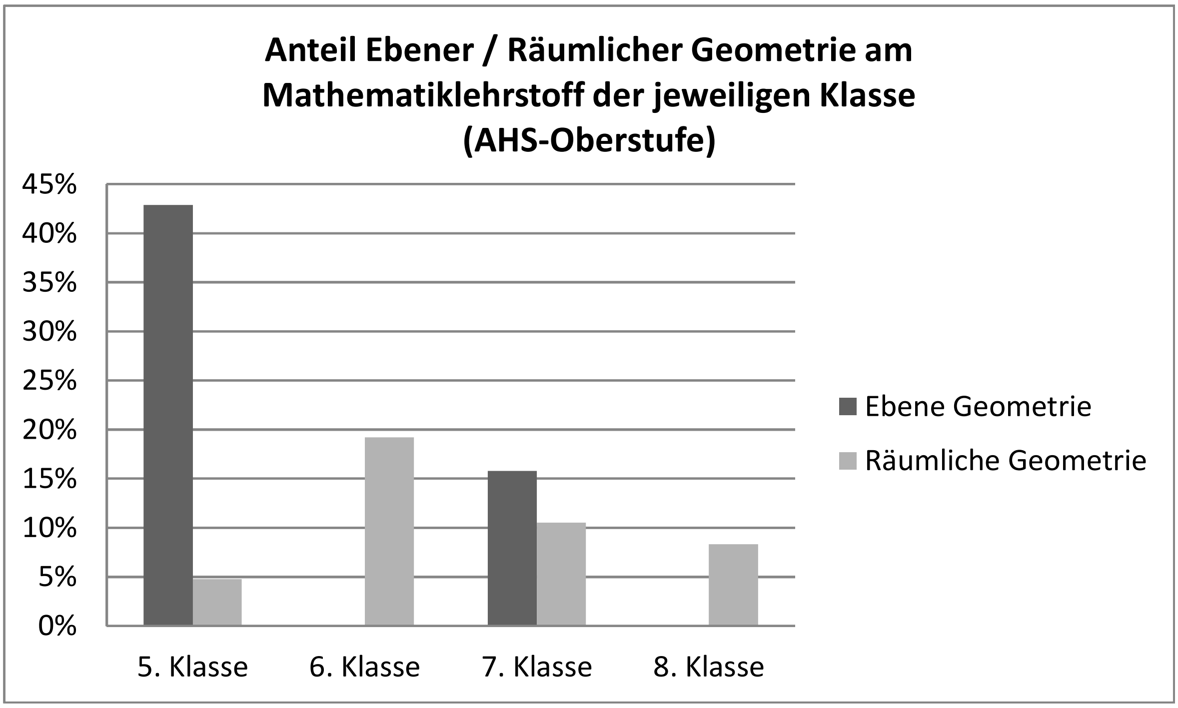


Abb. 5.2: *Anteil Ebener / Räumlicher Geometrie am Mathematiklehrstoff der jeweiligen Klasse (AHS-Oberstufe)*

Auffällig ist, dass in der Oberstufe absolut und prozentuell viel weniger Geometrie im Lehrplan verankert ist als in der Unterstufe. Dieser Umstand lässt sich durch diverse entwicklungspsychologische Theorien, wie die im vorangehenden Kapitel behandelten, relativ gut erklären. Für die Psycholog(inn)en scheint das räumliche Vorstellungsvermögen im Alter von etwa vierzehn bis achtzehn Jahren nämlich keine allzu großen Entwicklungsschritte mehr zu machen.

Thurstone spricht von einem Zuwachs der Komponente *Veranschaulichung* von nur rund 15 Prozentpunkten bei den Vierzehn- bis Neunzehnjährigen, während er den Neun- bis Vierzehnjährigen einen Intelligenzzuwachs im Punkt *Veranschaulichung* von bis zu 30 Prozentpunkten verspricht (siehe Abb. 4.1)

Für Stückrath ist in seiner Stufentheorie mit vierzehn Jahren überhaupt schon die Entwicklung der Raumvorstellung mehr oder weniger abgeschlossen (siehe Tab. 4.1) und bei Piaget et al. beginnt die letzte Phase in der Entwicklung des räumlichen Denkens mit elf bis zwölf Jahren (siehe Kapitel 4.2.1 Die Stufentheorie der kognitiven Entwicklung).

5.2.1 Unterstufe – Ebene Geometrie

1. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Unterstufe,* S. 4 f.)	**Komponenten der Raumvorstellung**
1.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen	
Rechnen mit Maßen und Umwandlungen zur Bearbeitung von Sachaufgaben und geometrischen Berechnungen (2x)* [im mm-, cm-, dm-Bereich] *(2x) … in den Tabellen zur ebenen und räumlichen Geometrie angeführt	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
1.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern	
Aufbauend auf die Grundschule Kenntnisse über grundlegende geometrische Begriffe gewinnen (2x) [ausgehend vom Lehrplan der Grundschule (vgl. *LP-GS.)*	

sei im Folgenden exemplarisch je ein Beispiel pro Raumvorstellungskomponente angeführt: – Erfassen und Benennen der besonderen Eigenschaften von Rechteck und Quadrat – Gestalten symmetrischer Bilder auf Rastern – Bilden von Winkeln, z. B. durch Drehen]	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen** **4. Räumliche Wahrnehmung** **5. Vorstellungsfähigkeit von Rotationen**
Skizzen von Rechtecken, Kreisen, Kreisteilen, [...] anfertigen können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Zeichengeräte zum Konstruieren von Rechtecken, Kreisen [...] gebrauchen können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Maßstabszeichnungen anfertigen und Längen daraus ermitteln können (2x) [im mm-, cm-, dm-Bereich]	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Umfangs- und Flächenberechnungen an Rechtecken (und einfachen daraus zusammengesetzten Figuren) […] durchführen können	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Formeln für diese Umfangs-, Flächen- […] berechnungen aufstellen können	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Gradeinteilung von Winkeln kennen (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Winkel mit dem Winkelmesser (Geodreieck) zeichnen können	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
einfache symmetrische Figuren erkennen und herstellen können	**4. Räumliche Wahrnehmung**

Tab. 5.1: *Ebene Geometrie – 1. Klasse*

2. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Unterstufe,* S. 5 f.)	**Komponenten der Raumvorstellung**
2.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen	
Maße verwenden und Umwandlungen durchführen können in dem Ausmaß, wie es die Bearbeitung von Sachaufgaben und geometrischen Aufgaben erfordert und es dem Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler entspricht. (2x) [im mm-, cm-, dm-Bereich]	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
2.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern	
Dreiecke, Vierecke und regelmäßige Vielecke untersuchen, wesentliche Eigenschaften feststellen,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

die Figuren skizzieren und konstruieren können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Erkennen, ob Angaben mehrdeutig sind oder überhaupt nicht in Konstruktionen umgesetzt werden können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
kongruente Figuren herstellen können, die Kongruenz begründen können;	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Eigenschaften von Strecken- und Winkelsymmetralen kennen,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
und für Konstruktion anwenden können;	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Flächeninhalte von Figuren berechnen können, die sich durch Zerlegen oder Ergänzen auf Rechtecke zurückführen lassen,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen** **[Hier fließt auch *5. Vorstellungsfähigkeit von Rotation*en stark ein. Nachdem Rotationen aber auch in *1. Veranschaulichung* enthalten sind, wird auf eine gesonderte Anführung von *5.* verzichtet.]**

Tab. 5.2: *Ebene Geometrie – 2. Klasse*

3. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Unterstufe,* S. 6 f.)	Komponenten der Raumvorstellung
3.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen	
rationale Zahlen für Darstellungen in Koordinatensystemen verwenden können;	**3. Räumliche Orientierung und Faktor K** **4. Räumliche Wahrnehmung**
3.2 Arbeiten mit Variablen	
Formeln in Sachsituationen und in der Geometrie aufstellen können, (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Aufgaben aus Anwendungsbereichen und aus der Geometrie durch Umformungen von Formeln oder Termen lösen können, (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
dabei auch Aufgaben variieren und graphische Darstellungen nutzen können, (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
3.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern	
Vergrößern und Verkleinern von Figuren,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

ähnliche Figuren erkennen und beschreiben;	**5. Vorstellungsfähigkeit von Rotationen** **1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Formeln für Flächeninhalte von Dreiecken und Vierecken begründen und damit Flächeninhalte berechnen können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Umkehraufgaben lösen können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können.	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Tab. 5.3: *Ebene Geometrie – 3. Klasse*

4. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Unterstufe,* S. 7 f.)	**Komponenten der Raumvorstellung**
4.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern	
den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren [...] nutzen können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

eine Begründung des Lehrsatzes des Pythagoras verstehen,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Berechnungsmöglichkeiten mit Variablen darstellen können;	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Schranken für Umfang und Inhalt des Kreises angeben können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Kreises wissen und anwenden können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Formeln für die Länge eines Kreisbogens und für die Flächeninhalte von Kreisteilen herleiten und anwenden können;	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen** **5. Vorstellungsfähigkeit von Rotationen**

Tab. 5.4: *Ebene Geometrie – 4. Klasse*

5.2.2 Unterstufe – Räumliche Geometrie

1. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Unterstufe,* S. 4 f.)	Komponenten der Raumvorstellung
1.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen	
Rechnen mit Maßen und Umwandlungen zur Bearbeitung von Sachaufgaben und geometrischen Berechnungen (2x) [im m-, km-Bereich]	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen** **3. Räumliche Orientierung und Faktor K**
1.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern	
Ausgehend von Objekten der Umwelt durch Idealisierung und Abstraktion geometrische Figuren und Körper sowie ihre Eigenschaften erkennen und beschreiben können (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Aufbauend auf die Grundschule Kenntnisse über grundlegende geometrische Begriffe gewinnen (2x) [ausgehend vom Lehrplan der Grundschule (vgl. *LP-GS, S. 5 ff.)* sei im Folgenden exemplarisch je ein Beispiel pro Raumvorstellungskomponente angeführt:	

– Vergleichen von Körpern und Ordnen nach ihren Eigenschaften – Erkennen der Abhängigkeit einer Lagebeziehung vom Standort – Erfahren und Erfassen von Begriffen aus der Erlebniswelt des Kindes, wie oben-unten, vorne-hinten – Bilden von Winkeln, z. B. durch Drehen]	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen** **3. Räumliche Orientierung und Faktor K** **4. Räumliche Wahrnehmung** **5. Vorstellungsfähigkeit von Rotationen**
Skizzen von [...] Quadern und ihren Netzen anfertigen können	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Zeichengeräte zum Konstruieren von [...] Schrägrissen gebrauchen können	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Maßstabszeichnungen anfertigen und Längen daraus ermitteln können (2x) [im m-, km-Bereich]	**3. Räumliche Orientierung und Faktor K**
Volums- und Oberflächenberechnungen an Quadern (und einfachen daraus zusammengesetzten Körpern) durchführen können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Formeln für diese [...] Flächen- und Volumsberechnungen aufstellen können	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Winkel im Umfeld finden und skizzieren (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Tab. 5.5: *Räumliche Geometrie – 1. Klasse*

2. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Unterstufe,* S. 5 f.)	**Komponenten der Raumvorstellung**
2.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen	
Maße verwenden und Umwandlungen durchführen können in dem Ausmaß, wie es die Bearbeitung von Sachaufgaben und geometrischen Aufgaben erfordert und es dem Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler entspricht. (2x) [im m-, km-Bereich]	**3. Räumliche Orientierung und Faktor K**
2.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern	
Volumina von Prismen berechnen, möglichst in Anwendungsaufgaben.	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Tab. 5.6: *Räumliche Geometrie – 2. Klasse*

3. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Unterstufe,* S. 6 f.)	**Komponenten der Raumvorstellung**
3.2 Arbeiten mit Variablen	
Formeln in Sachsituationen und in der Geometrie aufstellen können, (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Aufgaben aus Anwendungsbereichen und aus der Geometrie durch Umformungen von Formeln oder Termen lösen können, (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
dabei auch Aufgaben variieren und graphische Darstellungen nutzen können, (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
3.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern	
Gegenstände, die die Gestalt eines Prismas oder einer Pyramide haben, zeichnerisch darstellen können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen** **4. Räumliche Wahrnehmung**
Oberfläche, Rauminhalt und Gewicht von Gegenständen, die die Gestalt eines Prismas oder einer Pyramide haben, berechnen können;	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Tab. 5.7: *Räumliche Geometrie – 3. Klasse*

4. Klasse

LEHRSTOFF LAUT LEHRPLAN (*LP-AHS Unterstufe*, S. 7 f.)	KOMPONENTEN DER RAUMVORSTELLUNG
4.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern	
den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in [...] Körpern nutzen können,	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Formeln für die Berechnung der Oberfläche und des Volumens von Drehzylindern und Drehkegeln sowie für die Kugel erarbeiten und nutzen können.	**5. Vorstellungsfähigkeit von Rotationen**

Tab. 5.8: *Räumliche Geometrie – 4. Klasse*

5.2.3 Unterstufe – Zusammenfassung

Die vorangehenden Tabellen, die den Lehrstoff der AHS-Unterstufe den einzelnen Komponenten der Raumvorstellung zuordnen, zeigen, dass der Geometrieunterricht der Unterstufe hauptsächlich Stoffgebiete zur Förderung der Komponenten *Veranschaulichung* und *Räumliche Beziehungen* enthält (siehe Abb. 5.3 und Abb. 5.4).

Die beiden folgenden Grafiken zeigen den Prozentanteil, den die dieser Arbeit zugrundeliegenden Komponenten der Raumvorstellung am gesamten Geometrie-Lehrstoff der ebenen (Abb. 5.3) bzw. der räumlichen Geometrie (Abb. 5.4) der

AHS-Unterstufe (siehe *LP-AHS Unterstufe*) haben. (Zur Erinnerung: Der gesamte Geometrie-Lehrstoff der ebenen Geometrie der AHS-Unterstufe besteht aus den 33, unter Spiegelstrichen im Lehrplan angeführten Themenbereichen des Mathematiklehrstoffes, die der ebenen Geometrie zuzuordnen sind. Bei der räumlichen Geometrie der Unterstufe verhält es sich analog, wobei man eine Summe von 18 Themenbereichen erhält.)

Die genauen Grundlagen zur Erstellung der beiden folgenden Kreisdiagramme seien hier exemplarisch am Beispiel der *Abb. 5.3: Ebene Geometrie – AHS-Unterstufe* erläutert:

Ist ein Themenbereich eindeutig einer Komponente der Raumvorstellung zuzuordnen (wobei *1. Veranschaulichung* und *2. Räumliche Beziehungen* zusammengefasst wurden und somit als nur eine einzige Komponente zählen), so macht er im Bereich der ebenen Geometrie $\frac{1}{33}$ bzw. 3,03% vom gesamten Ebene-Geometrie-Lehrstoff der Unterstufe aus. Das entspricht $\frac{1}{33}$ der Kreisscheibe in Abb. 5.3. Wurden in den Tabellen 5.1 bis 5.4 zur ebenen Geometrie der Unterstufe mehrere Raumvorstellungskomponenten einem Themenbereich zugeordnet, so teilen sich diese Komponenten gerecht die 3,03% Anteil des jeweiligen Themenbereiches am Ganzen. D. h. bei zwei Komponenten pro Themenbereich kommt je $\frac{1}{66}$ auf eine der beiden Raumvorstellungskomponenten usw.

Anmerkung: Die, in Abb. 5.3 und Abb. 5.4 angegebenen Prozentsätze verstehen sich als gerundete Werte.

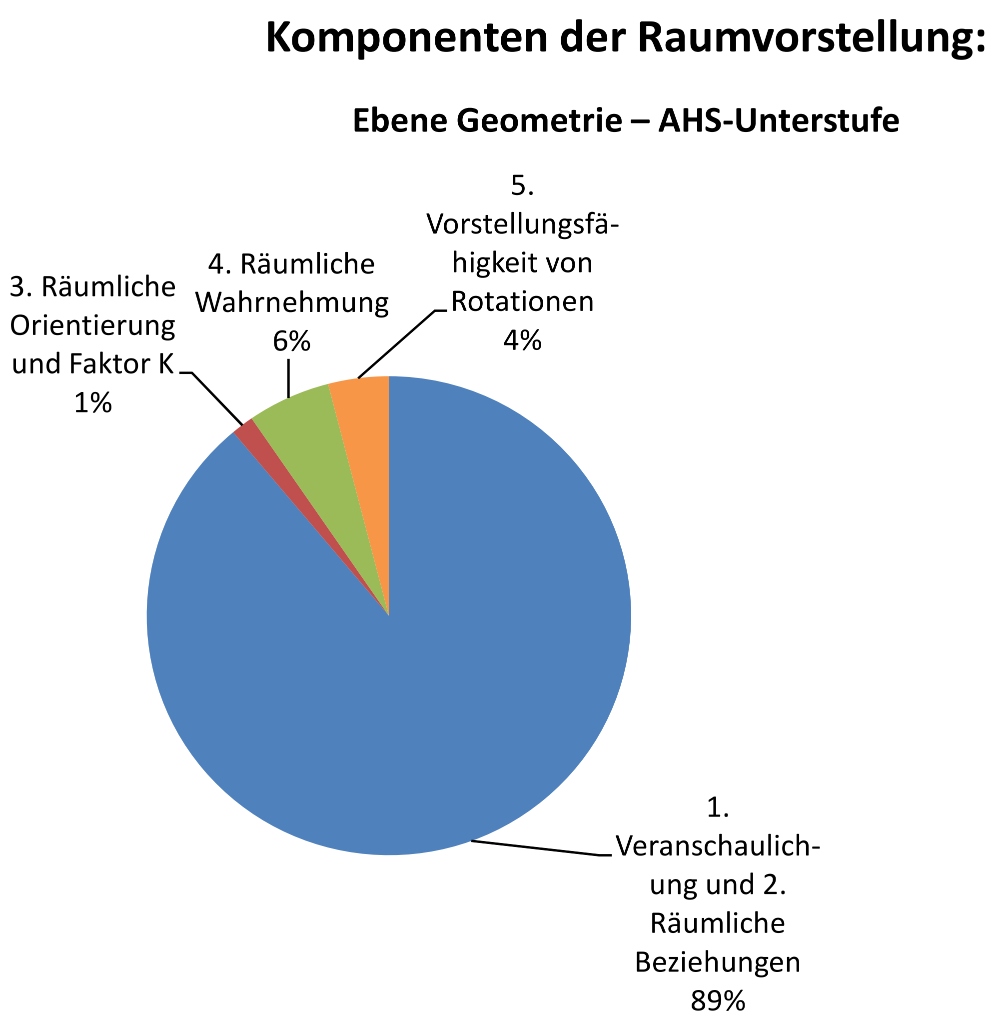


Abb. 5.3: *Ebene Geometrie – AHS-Unterstufe*

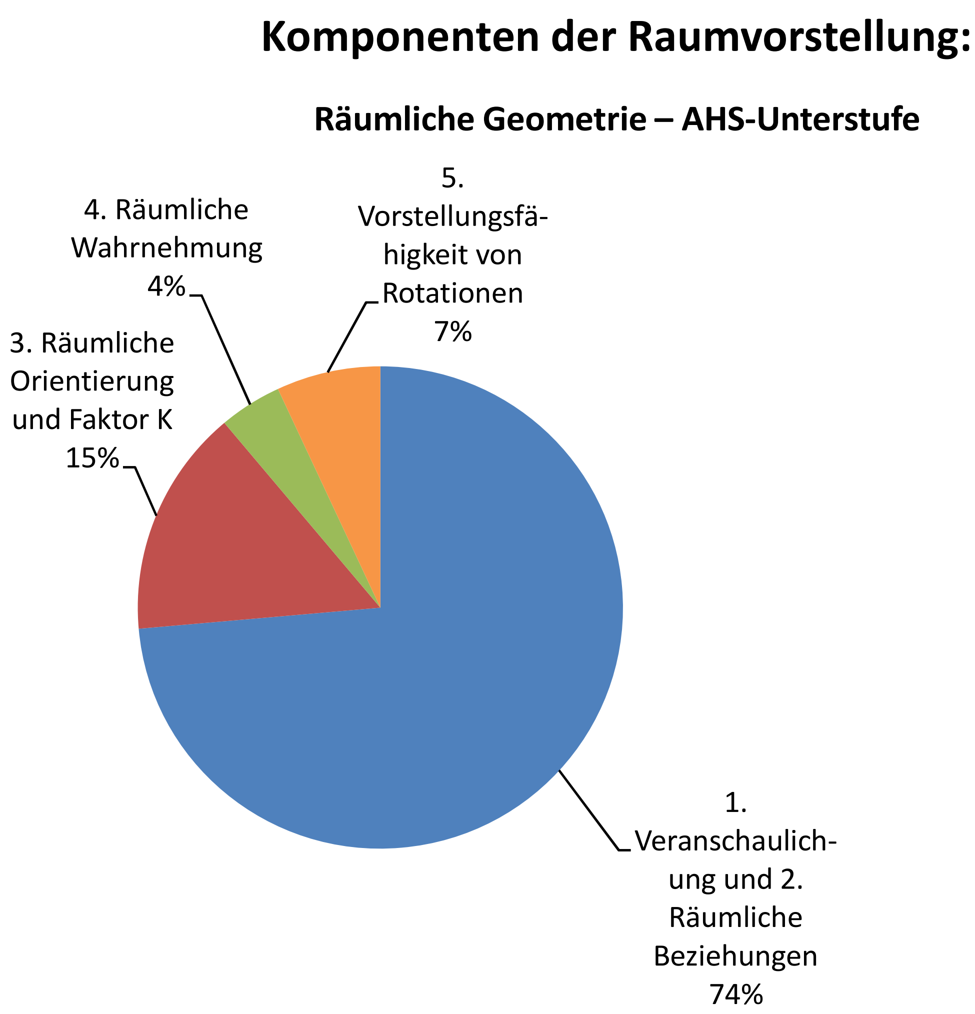


Abb. 5.4: Räumliche *Geometrie – AHS-Unterstufe*

In den verschiedenen, unter *Kapitel 4 – Entwicklung der Raumvorstellung* angeführten, entwicklungspsychologischen Theorien werden allerdings *durchwegs* alle fünf Komponenten der Raumvorstellung angesprochen.

Thurstone, Stückrath, Piaget et al. und die Van Hieles sprechen unisono von einem Altersbereich von etwa sieben bis vierzehn Jahren, der für die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens besonders ausschlaggebend ist. Dieser Zeitraum umfasst sowohl das Grundschul- als auch das AHS-Unterstufenalter.

Bezüglich der fünf Komponenten der Raumvorstellung ist anzumerken, dass nicht in jeder Theorie alle Komponenten explizit enthalten sind, sich aber jede in der einen oder anderen Theorie im hier in Rede stehenden Altersbereich wiederfindet. Es scheint also durchaus wünschenswert zu sein, im Rahmen der Möglichkeiten des Lehrplans, als Lehrer(in) alle Raumvorstellungskomponenten in den Unterricht der AHS-Unterstufe einzubauen. Deswegen ist auch darauf zu achten, dass die im Lehrplan kaum berücksichtigten Komponenten wie *Räumliche Orientierung und Faktor K, Räumliche Wahrnehmung* und *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen* nicht ganz verschwinden.

5.2.4 Oberstufe – Ebene Geometrie

5. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Oberstufe,* S. 3 f.)	Komponenten der Raumvorstellung
Gleichungen und Gleichungssysteme	
Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen, Untersuchen der Lösbarkeit dieser Gleichungssysteme, geometrische Interpretation	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Trigonometrie	
Definieren von sin α, cos α, tan α für 0° ≤α≤ 360°	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren [...] (auch mittels Sinus-und Kosinussatz) (2x) [wenn keine Sachaufgabe im m-, km-Bereich]	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Kennenlernen von Polarkoordinaten	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Vektoren und analytische Geometrie der Ebene	
Addieren von Vektoren und Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperationen	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Ermitteln von Einheitsvektoren und Normalvektoren	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Arbeiten mit dem skalaren Produkt, Ermitteln des Winkels zweier Vektoren	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Tab. 5.9: *Ebene Geometrie – 5. Klasse*

6. Klasse

→ Keine Lehrinhalte aus dem Bereich *ebene Geometrie*

7. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Oberstufe,* S. 5)	Komponenten der Raumvorstellung
Nichtlineare analytische Geometrie	
Beschreiben von Kreisen [...] und Kegelschnittslinien durch Gleichungen (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Tab. 5.10: *Ebene Geometrie – 7. Klasse*

8. Klasse

→ Keine Lehrinhalte aus dem Bereich *ebene Geometrie*

5.2.5 Oberstufe – Räumliche Geometrie

5. Klasse

LEHRSTOFF LAUT LEHRPLAN (*LP-AHS Oberstufe,* S. 3 f.)	KOMPONENTEN DER RAUMVORSTELLUNG
Trigonometrie	
Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (auch mittels Sinus-und Kosinussatz) (2x)	
– Berechnungen an Körpern (ohne Sachaufgaben im m-, km-Bereich)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
– Sachaufgaben im m-, km-Bereich	**3. Räumliche Orientierung und Faktor K** **4. Räumliche Wahrnehmung**

Tab. 5.11: Räumliche *Geometrie – 5. Klasse*

6. Klasse

LEHRSTOFF LAUT LEHRPLAN (*LP-AHS Oberstufe,* S. 4 f.)	KOMPONENTEN DER RAUMVORSTELLUNG
Analytische Geometrie des Raumes	
Übertragen bekannter Begriffe und Methoden aus der zweidimensionalen analytischen Geometrie, Erkennen der Grenzen dieser Übertragbarkeit	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Ermitteln von Normalvektoren, Definieren des vektoriellen Produkts	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Beschreiben von Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Schneiden von Geraden und Ebenen, Untersuchen von Lagebeziehungen	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Tab. 5.12: Räumliche *Geometrie – 6. Klasse*

7. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Oberstufe,* S. 5)	Komponenten der Raumvorstellung
Nichtlineare analytische Geometrie	
Beschreiben von [...] Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen (2x)	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**
*Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellungen** *Die kursiv gesetzten Inhalte sind für alle Schulstufen mit mehr als drei Wochenstunden obligatorisch.	**1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen**

Tab. 5.13: Räumliche *Geometrie – 7. Klasse*

8. Klasse

Lehrstoff laut Lehrplan (*LP-AHS Oberstufe,* S. 5 f.)	Komponenten der Raumvorstellung
Integralrechnung	
Arbeiten mit verschiedenen Deutungen des Integrals (insbesondere Flächeninhalt, Volumen, physikalische Deutungen)	**5. Vorstellungsfähigkeit von Rotationen**

Tab. 5.14: Räumliche *Geometrie – 8. Klasse*

5.2.6 Oberstufe – Zusammenfassung

Im Geometrieunterricht der AHS-Oberstufe finden sich fast ausschließlich Lehrinhalte zu den Komponenten *Veranschaulichung* und *Räumliche Beziehungen.* In der ebenen Geometrie beträgt der Anteil der zusammengefassten Komponente *1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen* sogar 100%, weshalb auf eine graphische Darstellung der ebenen Geometrie der Oberstufe verzichtet wurde.

Auch im Bereich der räumlichen Geometrie der Oberstufe lässt sich ein deutlicher Überhang der in Rede stehenden zusammengefassten Komponente nicht von der Hand weisen (siehe Abb. 5.5).

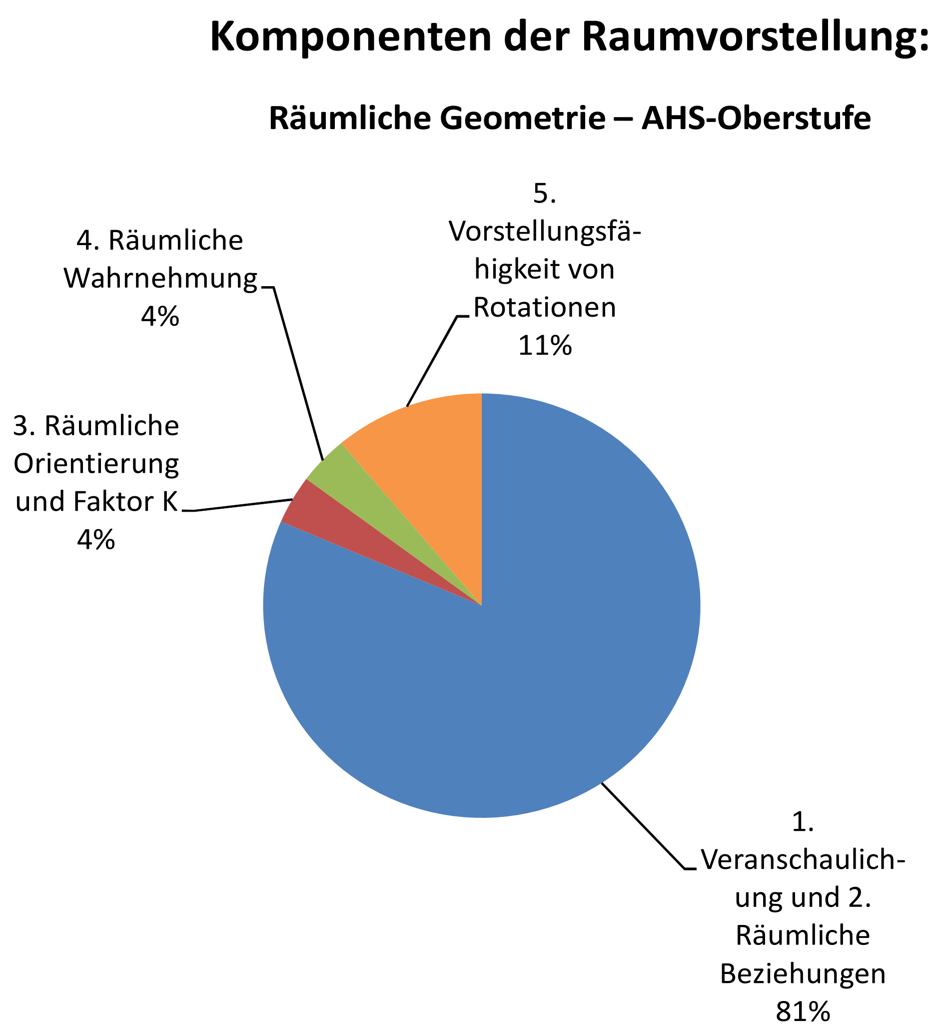


Abb. 5.5: *Räumliche Geometrie – AHS-Oberstufe*

Trotz der Dominanz der Komponente *1. Veranschaulichung und 2. Räumliche Beziehungen* ist es durchaus möglich, im Rahmen des Lehrplans auch die anderen drei Komponenten der Raumvorstellung in den Unterricht einfließen zu lassen. Vor allem der Punkt *Räumliche Orientierung und Faktor K* könnte im Bereich der analytischen Geometrie mit gezielten anwendungsorientierten Aufgabenstellungen weiterentwickelt werden.

Als Beispiel sei hier die Anwendungsaufgabe *Die Pyramiden von Gizeh* von T. Unkelbach genannt. Da es sich um ein recht umfangreiches Beispiel handelt, sind im Folgenden nur Ausschnitte und eine Veranschaulichung der Lösung angeführt. Diese wurde mit der Software Vektoris3D angefertigt und besteht aus der graphischen Darstellung, sowie einer Beschreibung aller notwendigen Konstruktionsschritte zur Lösung der Aufgabe mit diesem Programm.

Anwendungsaufgabe – Die Pyramiden von Gizeh

In der 4. Dynastie (2639 – 2504 v. Chr.) entstanden in Gizeh die drei wohl berühmtesten Pyramiden des Alten Reichs in Ägypten. 13 km westlich von Kairo, an der Grenze zur Libyschen Wüste liegen die Pyramiden von Gizeh. […] Die Punkte A(4|0|0) , B(0|4|0) , C(-4|0|0) , D(0|-4|0) und E(0|0|6) beschreiben die Chephrenpyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze E.

a) *Zeichnen Sie die Chephrenpyramide in ein räumliches Koordinatensystem.* **Hinweis:** Wegen der Größenverhältnisse und der weiteren Zeichnungen ist es erforderlich, das Heft quer zu legen, die x_2-Achse in der Mitte der Seite zu zeichnen und sie von -16 bis 6 laufen zu lassen.

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ gibt die Richtung von parallel einfallendem Sonnenlicht an. Dabei wirft die Chephrenpyramide ABCDE einen Schatten auf die x_1x_2-Ebene.

> **b)** *Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes* E' *der Pyramidenspitze* E *in der x_1x_2-Ebene und tragen Sie diesen in das Koordinatensystem aus Aufgabenteil* **a)** *ein.* [**Kontrollergebnis:** E'(10|-10|0)] [...] (*Selbstlernmaterial,* S.1)

Lösung:

a) *Schritt 1:* Die Punkte A, B, C, D, und E einzeichnen.

Schritt 2: Für die Seitenflächen der Pyramide Dreiecksflächen anfertigen (jeweils zwischen zwei nebeneinanderliegenden Punkten der Grundfläche und der Spitze).

Schritt 3: Für den „Boden" eine Ebene E1 durch drei beliebige Punkte der Grundfläche der Pyramide zeichnen.

Hinweis: Die genauen Befehlseingaben der Schritte 1 – 3 sind im Folgenden unter „Skripteingabe" angeführt. Analog verhält es sich später mit den Schritten 4 und 5 in der Lösung zur Aufgabe b).

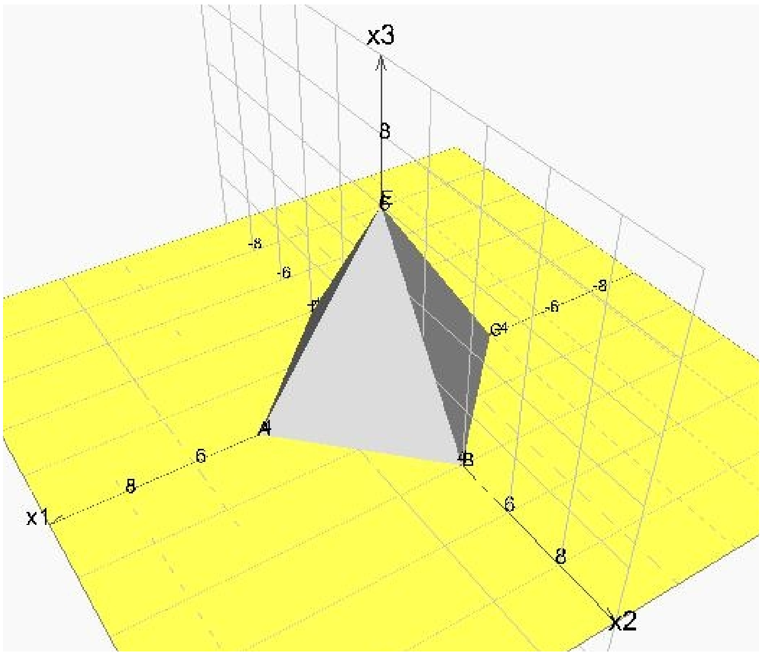


Abb. 5.6: Lösung zu a) – Die Pyramiden von Gizeh

Skripteingabe

A:Punkt(4, 0, 0)
B:Punkt(0, 4, 0)
C:Punkt(-4, 0, 0)
D:Punkt(0, -4, 0)
E:Punkt(0, 0, 6)
ABE:Dreiecksflaeche(A, B, E)
BCE:Dreiecksflaeche(B, C, E)
CDE:Dreiecksflaeche(C, D, E)
DAE:Dreiecksflaeche(D, A, E)
E1:Ebene3P(A, B, C)

b) *Schritt 4:* Den Vektor v einzeichnen (siehe Abb. 5.7).

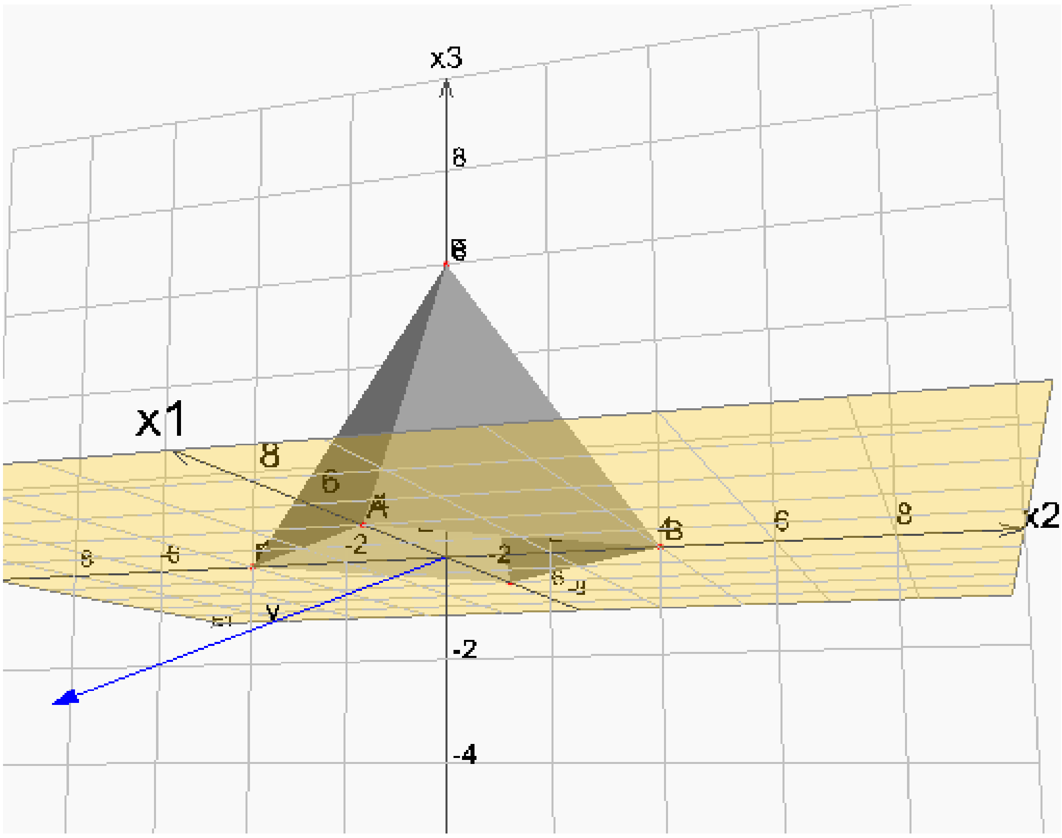


Abb. 5.7: Lösung zu b) *Schritt 4* – Die Pyramiden von Gizeh: eingezeichnet sind die Pyramide, der Vektor v und die x_1x_2-Ebene, die den Boden der Pyramide enthält

Schritt 5: Eine Gerade durch die Pyramidenspitze E mit Richtungsvektor v konstruieren (siehe Abb. 5.8). Den gesuchten Punkt E' erhält man in Vektoris3D, indem man das „Schnittgebilde" zwischen der Geraden g und der Ebene E1 anzeigen lässt (→ rechnerische Lösung siehe *Anhang*).

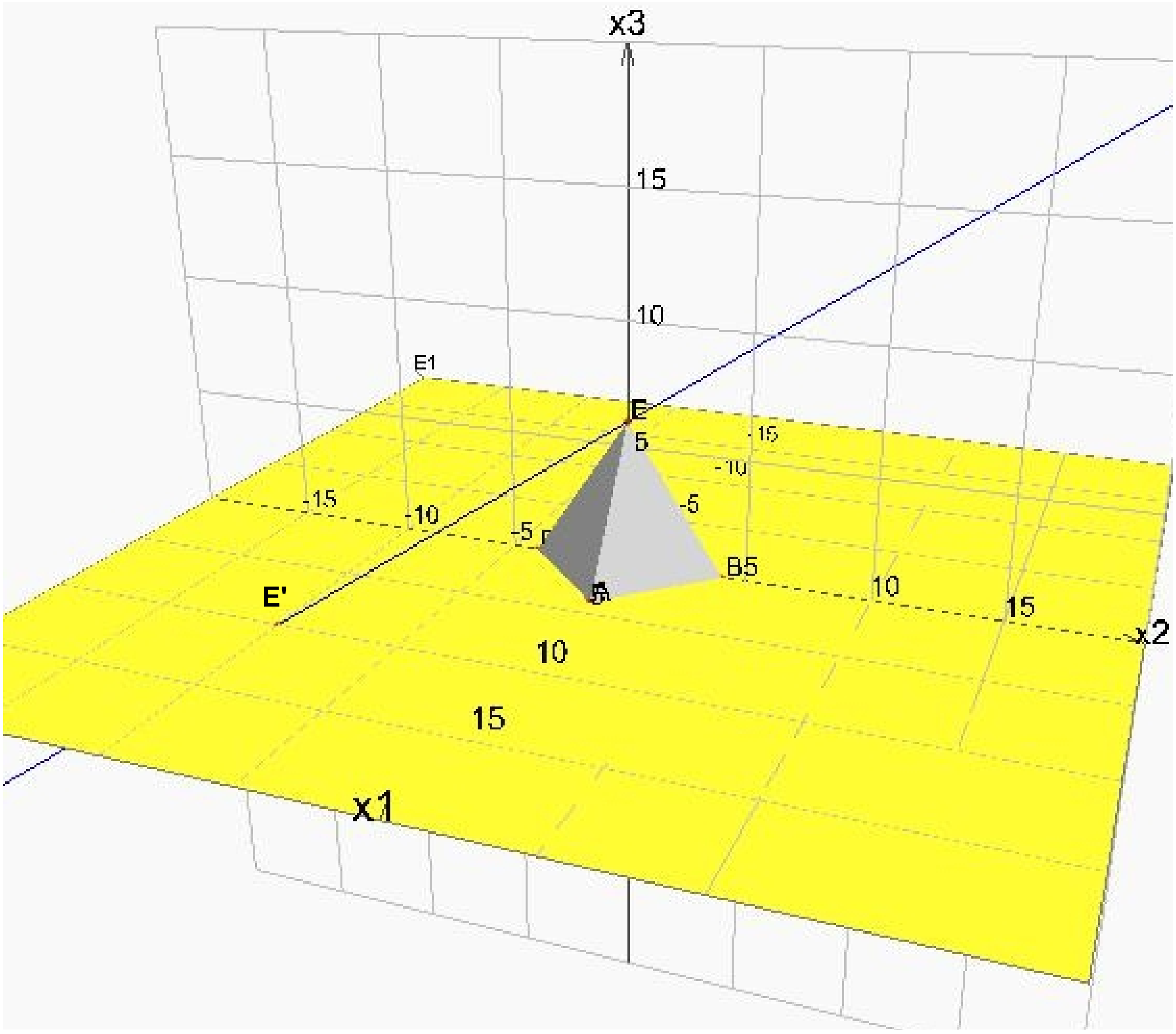


Abb. 5.8: Lösung zu b) *Schritt 5* – Die Pyramiden von Gizeh

Skripteingabe

A:Punkt(4, 0, 0)
B:Punkt(0, 4, 0)
C:Punkt(-4, 0, 0)
D:Punkt(0, -4, 0)
E:Punkt(0, 0, 6)
ABE:Dreiecksflaeche(A, B, E)
BCE:Dreiecksflaeche(B, C, E)
CDE:Dreiecksflaeche(C, D, E)
DAE:Dreiecksflaeche(D, A, E)
E1:Ebene3P(A, B, C)
v:Vektor(5, -5, -3)
g:Gerade(E, v)

6 Dynamische Geometrie-Software als Fördermittel

> Medium bedeutet „das in der Mitte“. Medien sind „Mittler“, im Unterricht unterstützen sie das Lernen und Verstehen: sie *ver-Mittel-n* beim Entdecken neuer Zusammenhänge, beim Systematisieren von Erkenntnissen und beim Üben. Dieser Anspruch gilt für alle Medien – klassisch oder modern, digital oder real. Ob ein Körpermodell oder ein Computerprogramm genutzt wird – letztlich geht es darum, einen Sachverhalt besser zu verstehen und die Auseinandersetzung damit durch eine Vielfalt unterschiedlicher mathematische Aktivitäten anzuregen ([BAWE], S. 4, Hervorhebung im Original).

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Rolle des Computers als *Vermittler* beim Entdecken neuer (raum-)geometrischer Zusammenhänge und der Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens im Mathematikunterricht zu untersuchen. Im speziellen geht es um die Frage, inwieweit Dynamische Geometrie-Systeme bei der Weiterentwicklung der Raumvorstellung hilfreich sind und wie sie konkret eingesetzt werden können.

> Der Einsatz von dynamischer Geometriesoftware könnte nun für die Schulung des Anschauungsvermögens einen wesentlichen Beitrag leisten. Der größte Vorteil gegenüber konventionellen Methoden liegt dabei in der Dynamik selbst. Schüler

> können aktiv im Raum handeln und sich auf diese Weise die Auswirkungen von Bewegungen und Veränderungen an bestehenden Konfigurationen vor Augen führen (*Luig / Strässer,* S. 1).

Beim Arbeiten mit Dynamischer Geometrie-Software ist es dem Benutzer bzw. der Benutzerin möglich, verschiedene geometrische Figuren und Körper (je nach Programm auch Vektoren, Ebenen oder Raumkurven) zu konstruieren und diese, zum Beispiel durch Drehen der Koordinatenachsen, von allen Seiten zu betrachten. Es ist weiters auch möglich, durch selbst gesteuertes Verschieben oder Drehen des Objekts, dieses frei im Raum zu bewegen.

Dass so räumliche Vorstellungsabläufe geschult werden können, wäre naheliegend. Doch wurde diese Tatsache bereits wissenschaftlich belegt?

6.1 Studien zur Förderung der Raumvorstellung

Es gibt bereits eine Vielzahl an Studien, die den Einfluss des Computers auf das räumliche Vorstellungsvermögen untersucht haben. Schwerpunkt der Forschung waren verschiedenste Computeranwendungen, von speziellen Geometrie-Lernprogrammen bis hin zu Computerspielen. Was allerdings alle Untersuchungsgegenstände, auf die hier Bezug genommen wird, gemeinsam hatten, waren graphische dynamische Animationen.

Eine Studie, die nicht die Auswirkungen eines speziellen Computerprogramms auf die Raumvorstellung, sondern die Fähigkeit zur räumlichen Vorstellung bei Personen, die sich vorwiegend mit Computern beschäftigen, untersuchte, wurde von einer Forschungsgruppe der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg durchgeführt.

Teilnehmer(innen) der Testung waren Studierende der Computerwissenschaften und als Kontrollgruppe Studierende anderer, nicht-computerspezifischer Fächer.

> Ein Vergleich der Studentengruppen ergab folgende Ergebnisse: Die Computerwissenschaftler schnitten auch unter Kontrolle der Variable Geschlecht in beiden Raumvorstellungstests signifikant besser ab als Studierende von Nicht-Computerwissenschaften (Psychologie, Sport, Geistes-, Sozial- und Erziehungswissenschaften). Es zeigten sich hingegen keine bedeutsamen Unterschiede zwischen den einzelnen Computerwissenschaften, […] Ferner kristallisierte sich eine größere Bedeutung der Computererfahrung für die Visualisierungsfähigkeit (Schnitte) als für die mentale Rotation (MRT) heraus (*Quaiser-Pohl et al.,* S. 2).

Bei dieser Studie ist jedoch zu beachten, dass das Ergebnis nicht unbedingt einen positiven Effekt von Computererfahrung auf die Raumvorstellung beweist. Es könnte genauso gut sein, dass es bedeutet, dass Menschen mit ausgeprägtem räumlichem Vorstellungsvermögen sich eher für Computerwissenschaften interessieren als diesbezüglich unbegabtere, oder dass eine Aufnahme zum Studium der Computerwissenschaften bzw. ein positiver Studienerfolg von der in Rede stehenden Fähigkeit abhängig ist.

> Offen bleibt, ob es sich dabei um Selektionseffekte handelt oder um durch die Inhalte des Studiums bedingte Übungseffekte (*Quaiser-Pohl et al.,* S. 5).

Die Frage nach der Auswirkung von Computern auf die Raumvorstellung beschäftige schon vor rund 30 Jahren die Forscher(innen).

> So argumentierten bereits Anfang der 80er Jahre Lowery und Knirk (1982-83) und Greenfield (1984), daß die intensive Beschäftigung mit multimedialen Reizen (z. B. Computerspielen) insbesondere zu einer forcierten Entwicklung räumlicher Fähigkeiten führe. Diese Annahmen wurden vor allem damit begründet, daß bei Computerspielen eine aktive Interaktion mit dynamischen graphischen Animationen erfolgt ([SOU], S. 5, Hervorhebung im Original).

E. Souvignier führte Ende der 90er zu diesem Thema eine weitere Studie durch. Verglichen wurden drei Untersuchungsgruppen: die erste Gruppe trainierte mit Computerspielen, die zweite mit einem computergestützten Lehrgang in technischem Zeichnen und die Kontrollgruppe beschäftigte sich vorwiegend mit Textverarbeitung am PC. Erwartet wurde, dass sich die ersten beiden Gruppen in höherem Maße in ihren räumlichen Fähigkeiten verbesserten als die dritte (vgl. [SOU], S. 10).

Besonders interessant für die vorliegende Arbeit ist das Ergebnis der Gruppe die mit dem Lehrgang in technischem Zeichnen gefördert wurde. Hier wurde mit einer technischen Software gearbeitet, die mit Geometrie-Programmen vergleichbar ist. Der Schwerpunkt lag darauf, einen in isometrischer Ansicht gezeigten Gegenstand mit der Drei-Tafel-Projektion (Vorderansicht, Seitenansicht, Draufsicht) zu vergleichen, wobei das Erlernen dieser Vorstellungsleistungen durch animierte Simulationen unterstützt wurde.

Ähnlich wie bei Computerspielen mussten also auch hier Bewegungen von Objekten nachvollzogen bzw. vorgestellt werden und aktiv darauf reagiert werden. Das Ergebnis zeigte, dass die Teilnehmer(innen) der Übungsgruppe mit den Computerspielen sowie die Teilnehmer(innen) der Gruppe technisches Zeichnen im Vergleich zur Kontrollgruppe signifikant gesteigerte räumliche Fähigkeiten vorweisen konnten (vgl. [SOU], S. 12 f.).

Souvignier zieht zusammenfassend, auf Basis von eigenen und fremden Experimenten mit verschiedenartigen Computerspielen und Lernsoftware (allesamt mit einem hohen Maß an graphischen Animationen und Interaktionen), den Schluss, dass der Umgang mit Computerprogrammen, die das Bewegen und eventuell auch perspektivische Verändern von Objekten ermöglichen, die räumliche Vorstellungsfähigkeit stark fördert (vgl. [SOU], S. 13 f.):

> Offensichtlich sind es weniger spezifische Programme, die räumliche Fähigkeiten in besonders effektiver Weise verbessern, sondern der Aspekt der Beschäftigung mit den «neuen Medien», daß Bewegungen von Objekten verfolgt und bewertet werden müssen und die Anforderung darin besteht, aktiv darauf zu reagieren ([SOU], S. 14).

Erwähnenswert ist außerdem ein vielzitiertes und hochgepriesenes Projekt von *G. Gittler* am Institut für Klinische, Biologische und Differentielle Psychologie der Universität Wien (vgl. [GITT]). Gittler führte eine *Studie zur Auswirkung des DG-*

Unterrichts (in dem bekanntlich viel mit Geometrie-Software gearbeitet wird) *auf das räumliche Vorstellungsvermögen* durch und kam zu einem aus Sicht der DG-Lehrer(innen) sehr positiven Ergebnis.

Es zeigte sich, dass Schüler(innen) mit DG-Unterricht am Ende der 8. Klasse weitaus bessere Ergebnisse beim 3DW-Test (3D-Würfel-Test: vergleiche Abb. 3.2: Test *Pair of Cubes*), der die Fähigkeit zur Raumvorstellung überprüfen sollte, erzielen konnten (siehe Abb. 6.1).

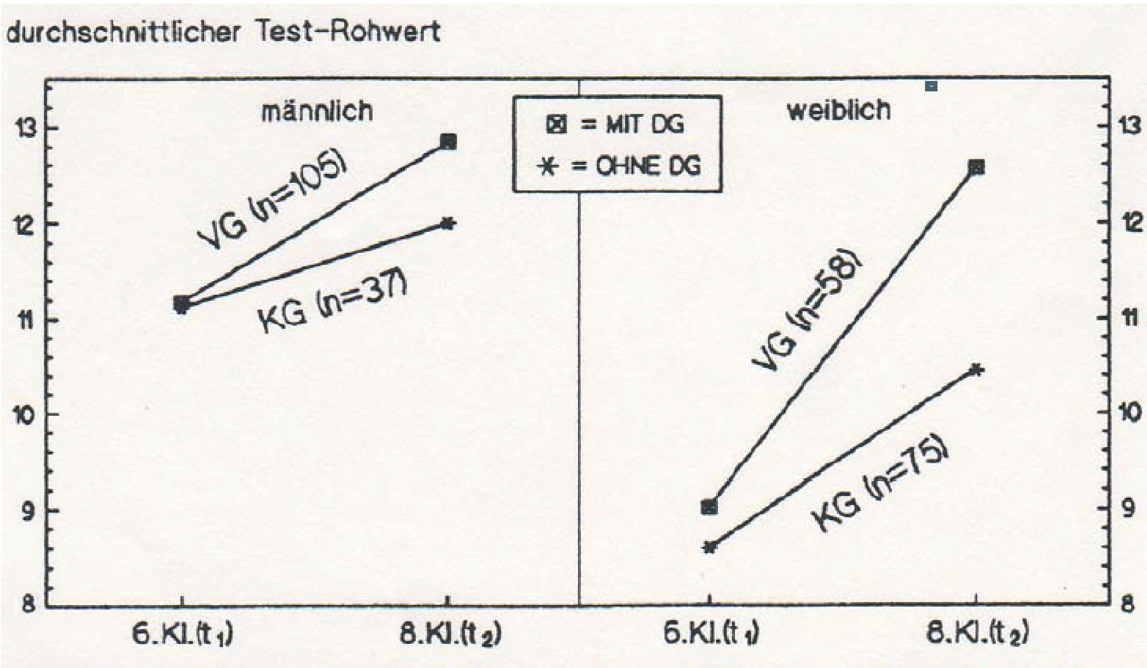


Abbildung 3: 3DW-Leistungen männlicher und weiblicher Schüler zu zwei Zeitpunkten (abhängige Daten, n = 275).

Abb. 6.1: *Raumvorstellung mit und ohne DG-Unterricht*

6.2 Software in der Praxis des Geometrieunterrichts

Im Rahmen seiner Dissertation an der TU-Wien befragte T. Müller 2006 224 Mathematiklehrer(innen) aus AHS, BHS und HS zum Thema *Softwareeinsatz im Geometrieunterricht.* Dabei ergaben sich unter anderem folgende Ergebnisse:

- Mehr als 60% aller Befragten gaben an, mit den neuen Medien die Raumvorstellung besser schulen zu können, nur knapp 6% glaubten, dass dies nicht der Fall sei ([MÜL], S. 193 f.).

- Konstruktionswerkzeuge wie CAD und DGS wurden vom überwiegenden Teil der Befragten als sehr brauchbar im Unterricht eingeschätzt (vgl. [MÜL], S. 240).

- Eine deutliche Mehrheit der Befragten gab an, Software im Geometrieunterricht zu verwenden ([MÜL], S. 277, siehe Abb. 6.2)

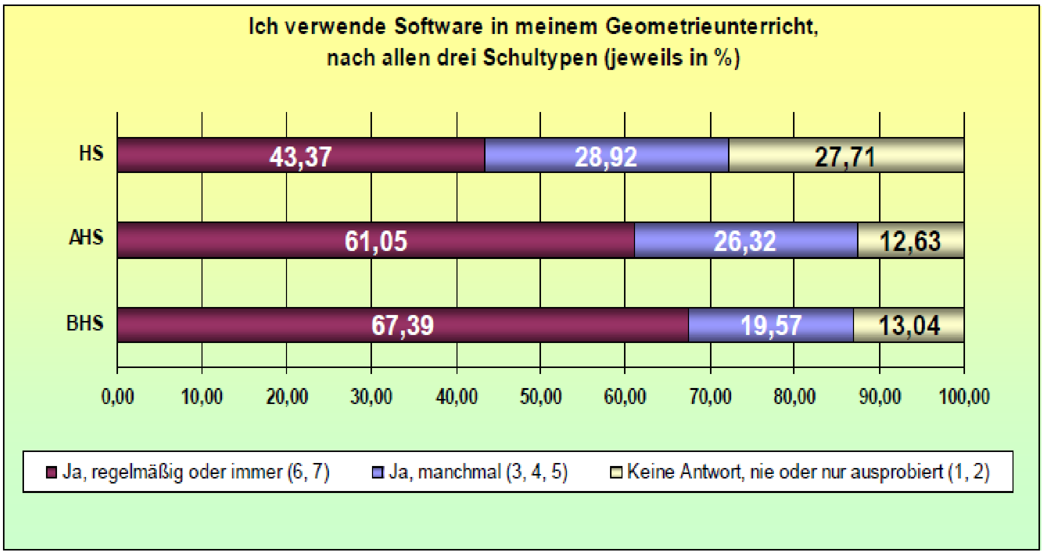


Abb. 6.2: *Verwendung von Software im Geometrieunterricht (2006)*

6.3 Vorläufiges Resümee

Es lässt sich also zusammenfassend festhalten, dass das Arbeiten mit dynamischen Visualisierungen von zwei- oder dreidimensionalen Objekten durchaus förderlich für die Entwicklung der Raumvorstellung ist, wie dies einige Studien belegen (siehe *Kapitel 6.1 – Studien zur Förderung der Raumvorstellung)*.

Speziell für die Nutzung im Mathematikunterricht bietet der Markt ein umfangreiches Angebot an verschiedenen didaktischen Geometrie-Softwareprogrammen. Die Palette reicht von einfachen zweidimensionalen Zeichenprogrammen bis hin zu 3D-fähigen Dynamischen Geometrie-Systemen, die je nach Lehrstoff und Schulstufe in Österreichs Schulen ihre Anwendung finden. So gab zum Beispiel 2006 bei einer Umfrage mehr als die Hälfte der befragten 224 Lehrer(innen) aus ganz Österreich an, in ihrem Geometrieunterricht regelmäßig Software zu verwenden (vgl. [MÜL], S. 277).

Wie aber lässt sich die Raumvorstellung mit Dynamischer Geometrie-Software möglichst umfassend schulen? Wie eine Analyse des Lehrplans in *Kapitel 5 – Raumvorstellung im Geometrieunterricht der AHS* ergab, enthält dieser hauptsächlich Themenbereiche zur Verbesserung der Komponenten *Veranschaulichung* und *Räumliche Beziehungen* des 5-Faktoren Modells nach Maier. Für eine ganzheitliche Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens (d. h. aller fünf Komponenten) wäre es demnach sinnvoll, ein besonderes Augenmerk auf die drei vernachlässigten Faktoren *Räumliche Orientierung und Faktor K, Räumliche Wahrnehmung* und *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen* zu legen.

Um diesem Mangel etwas Abhilfe zu leisten, werden im folgenden *Kapitel 6.4 – Unterrichtsvorschläge mit Dynamischer Geometrie-Software* zu den Faktoren *Räumliche Orientierung und Faktor K, Räumliche Wahrnehmung* und *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen* Vorschläge für computergestützte Unterrichtssequenzen gegeben.

6.4 Unterrichtsvorschläge mit Dynamischer Geometrie-Software

Die folgenden Unterrichtsvorschläge sind nicht als vollständige Einheiten oder themenabdeckende Stundenbilder zu verstehen, sondern lediglich als Bestandteile von Unterrichtssequenzen, die in den computergestützten Unterricht eingebettet werden können. Es wurde wie bereits erwähnt Wert darauf gelegt, zu den im Lehrplan zu kurz kommenden drei Komponenten der Raumvorstellung Beispiele zu finden, um so Anregungen für weitere Ideen zu Förderung dieser Komponenten zu geben.

Ziel war es ebenso, didaktische Geometrie-Software zu verwenden, die ein ansprechendes Design bietet, leicht und schnell zu erlernen ist, das dynamische Bewegen von Objekten unterstützt und keine hohen Kosten in der Anschaffung mit sich bringt.

6.4.1 Unterrichtssequenz zu *Räumliche Orientierung und Faktor K* und V*orstellungsfähigkeit von Rotationen*

Verwendete Software

Zum Einsatz kam hier das didaktische 3D-CAD-Programm *GAM-3D* (**G**enerieren – **A**bbilden – **M**odellieren: *www.gam3d.at,* 29. 11. 2011) des Grazers E. Podenstorfer. Die Software wurde ursprünglich für die Fächer Geometrisches Zeichnen und Darstellende Geometrie entwickelt, bietet aber auch für das Fach Mathematik spezielle Werkzeuge, wie etwa parametrisch definierte Kurven und Flächen (vgl. *GAM-3D*).

Als Ziele von GAM werden genannt:

- Fördern und Fordern des räumlichen Vorstellungsvermögens
- Fördern des konstruktiven Raumdenkens
- Erlernen des selbstverständlichen Umgangs mit Koordinatensystemen, Koordinaten und Objekten im Raum
- Kennenlernen der Arbeitsweisen professioneller CAD-3D-Software (*GAM-3D*)

GAM ist zwar kein Dynamisches Geometrie-System, unterstützt aber den Export von VRLM-Dateien, was es ermöglicht, die in GAM konstruierten Objekte als dreidimensionale bewegbare Bilder im Internet anzusehen und beliebig im Raum rotieren zu lassen. Alles, was hierfür benötigt wird, ist ein Plugin (Ergänzungsmodul) für den Browser, das z. B. direkt unter *www.gam3d.at/seiten/download_vrml.html* (29. 11. 2011) gratis heruntergeladen werden kann.

GAM-3D ist in Österreich ein sehr beliebtes Programm im Schulunterricht (siehe Abb. 6.3) und es gibt bereits Landeslizenzen (freie Benutzung für alle Schüler(innen) und Lehrenden) für alle Bundesländer bis auf Wien, wo im Herbst 2011 vom Stadtschulrat entschieden wird, ob ebenfalls eine Lizenz angeschafft wird (Information von Podenstorfer per E-Mail am 15. 10. 2011.)

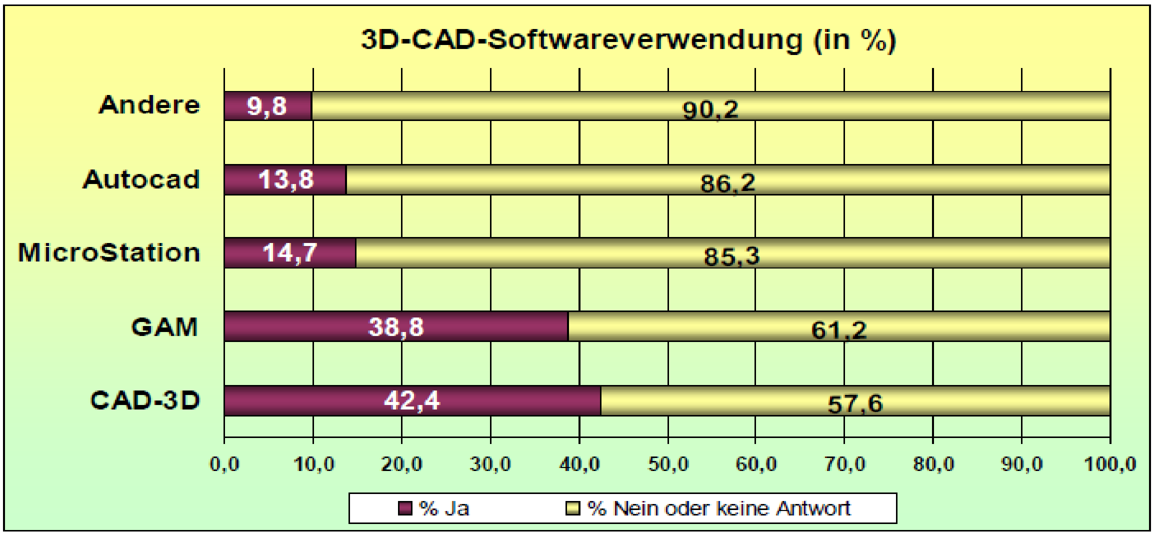


Abb. 6.3: *3D-CAD-Softwareverwendung in Österreich (2006)*

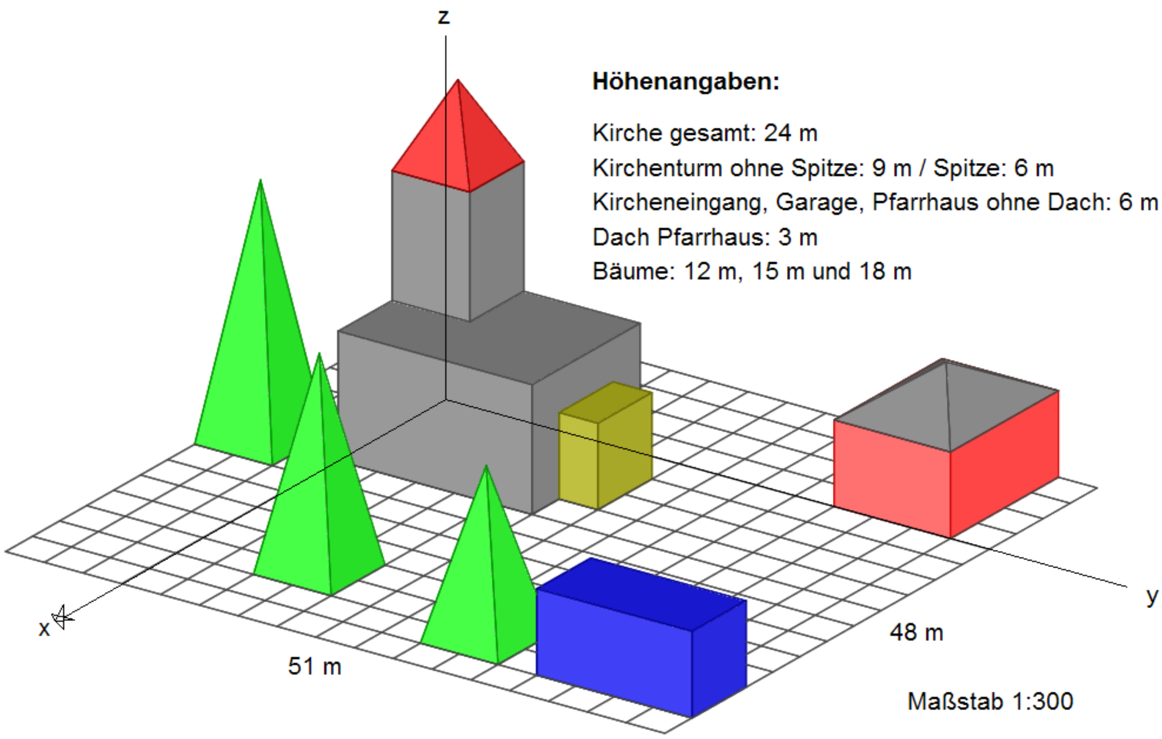
Unterrichtsmaterial

Beispiel – Kirchenplatz

→ Lösung siehe *Anhang*

Sonntag Morgen am Kirchenplatz

Das folgende Bild zeigt einen Kirchenplatz mit Kirche, Pfarrhaus (rot mit grauem Dach), Garage (blau) und drei Tannenbäumen.

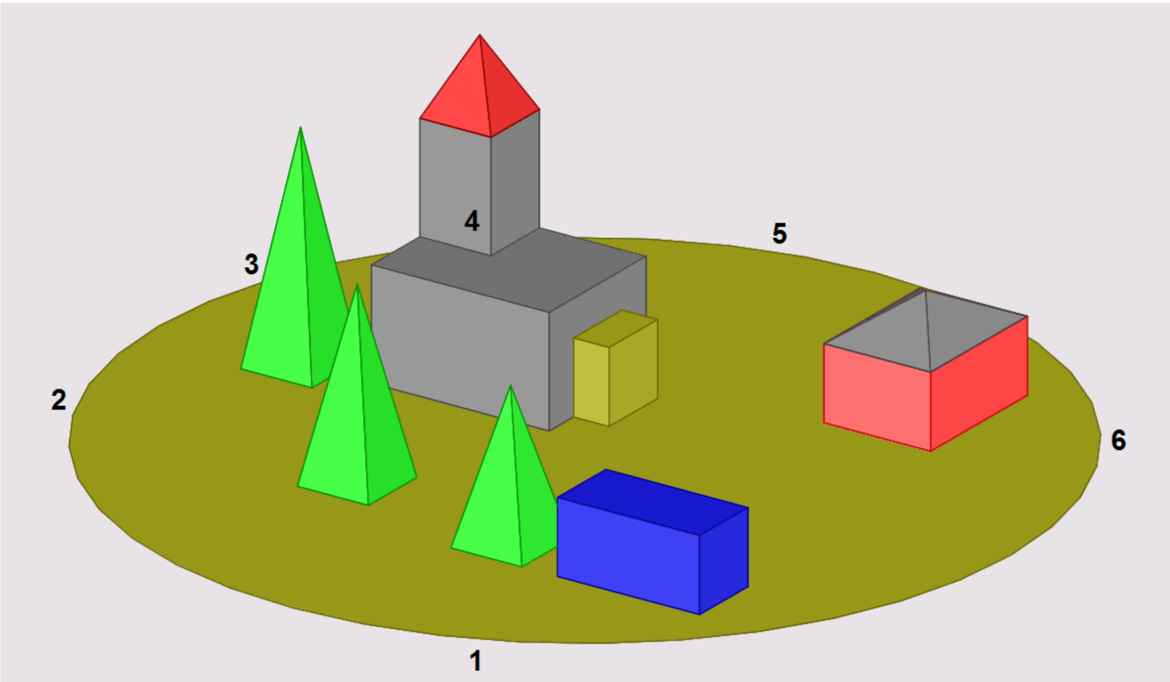


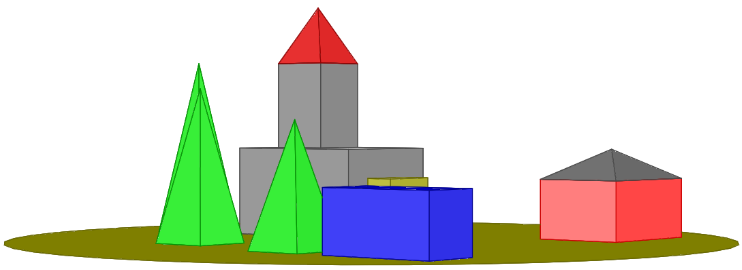
Erledige folgende Aufgaben:

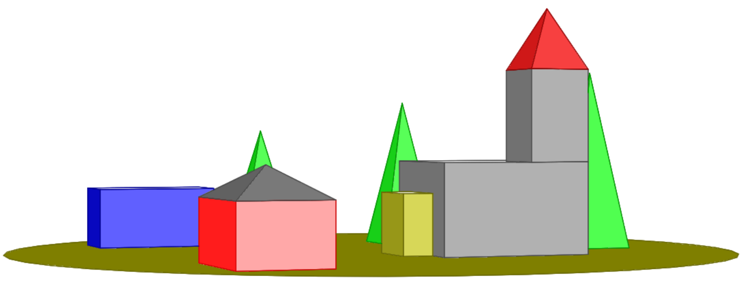
a) Öffne das Programm GAM-3D und zeichne den Kirchenplatz im angegebenen Maßstab nach. (**Erinnere:** alle Objekte erscheinen erst im Koordinatenursprung und müssen dann um den Schiebevektor an ihren richtigen Platz verschoben werden.) Speichere deine Arbeit anschließend unter *Kirchenplatz_Nachname.gap.*

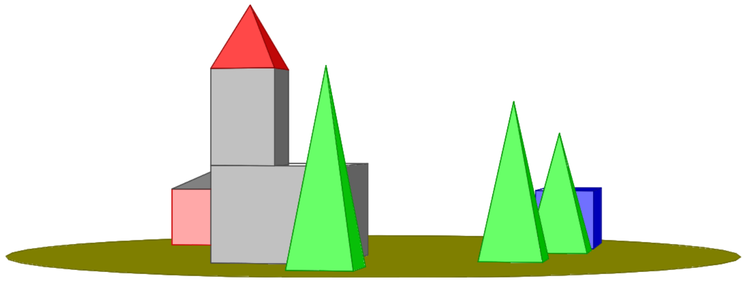
b) Zeichne einen Kreis mit Radius 12 in die xy-Ebene ein, verschiebe diesen um den Vektor (4|6|0) und erstelle eine VRLM-Datei unter dem Namen *Kirchenplatz_Nachname.wrl.*

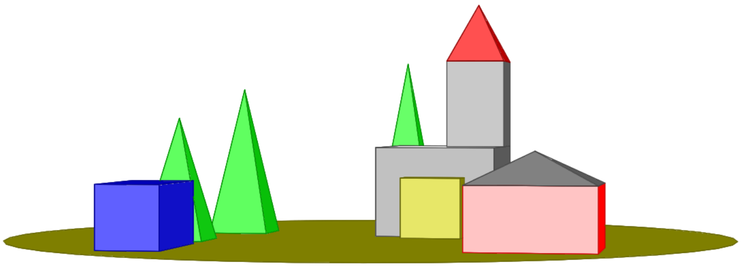
c) Stelle dir vor, du startest im Punk 1 und machst einen Rundgang im Uhrzeigersinn, entlang dem eingezeichneten Kreis, um den Kirchenplatz. Im Anschluss findest du sechs Bilder des Platzes aus verschiedenen Perspektiven. Welches Bild gehört zu welchem Standort? Ordne die Nummern richtig zu. (**Hinweis:** Sieh dir als Hilfe die VRLM-Datei aus b) an!)

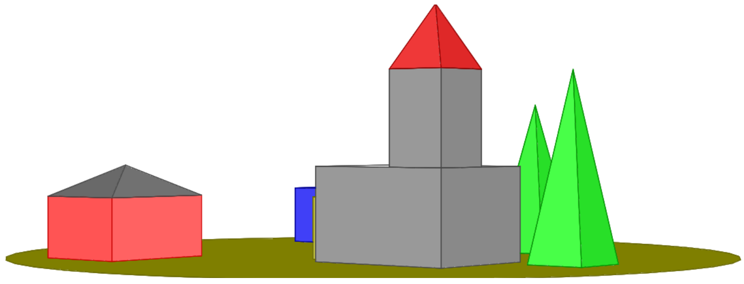


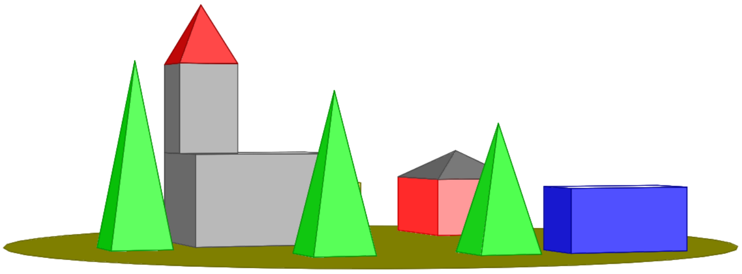












Gutes Gelingen! ☺

Hintergrundinformationen

Lernziele

Am *Beispiel – Kirchenplatz* sollen die Schüler(innen) folgende Punkte lernen bzw. üben:

- Räumliche Orientierung und Faktor K
- Vorstellungsfähigkeit von Rotationen
- dreidimensionale Maßstabszeichnungen anfertigen
- Umgang mit 3D-CAD-Programm
- Objekte im Raum um Vektoren verschieben

VRLM-Datei

Im Punkt b) des Beispiels werden die Schüler(innen) aufgefordert, eine VRLM-Datei der Konstruktion anzufertigen, und im Punkt c) sollen sie diese öffnen und zur Lösung der Aufgabe benutzen. Wie bereits erwähnt ist es möglich, im Internet-Browser VRLM-Dateien zu öffnen und so ein bewegtes dreidimensionales Bild zu erhalten. Im Folgenden soll mit ein paar Screenshots gezeigt werden, wie eine solche VRLM-Visualisierung aussieht. Exemplarisch wurde der konstruierte Kirchenplatz mit der Maus in sechs verschiedene Perspektiven gedreht, um das Ganze besser zu veranschaulichen.

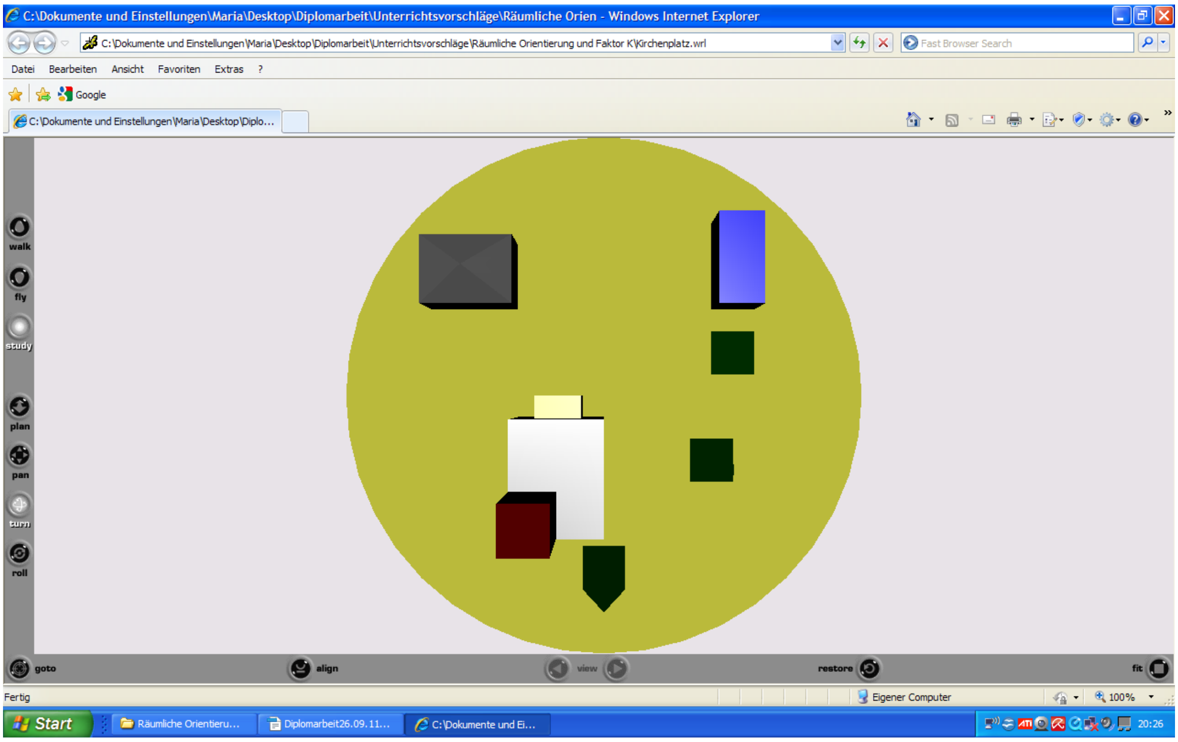


Abb. 6.4: *Kirchenplatz – VRLM 1*

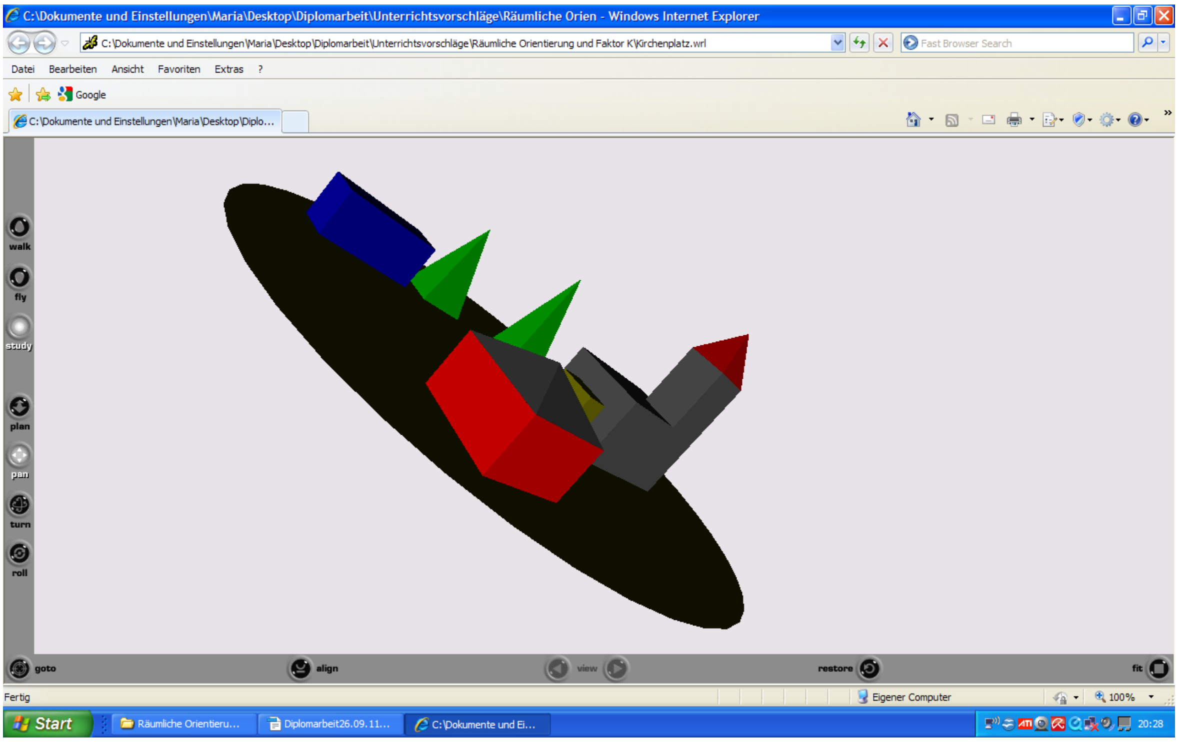


Abb. 6.5: *Kirchenplatz – VRLM 2*

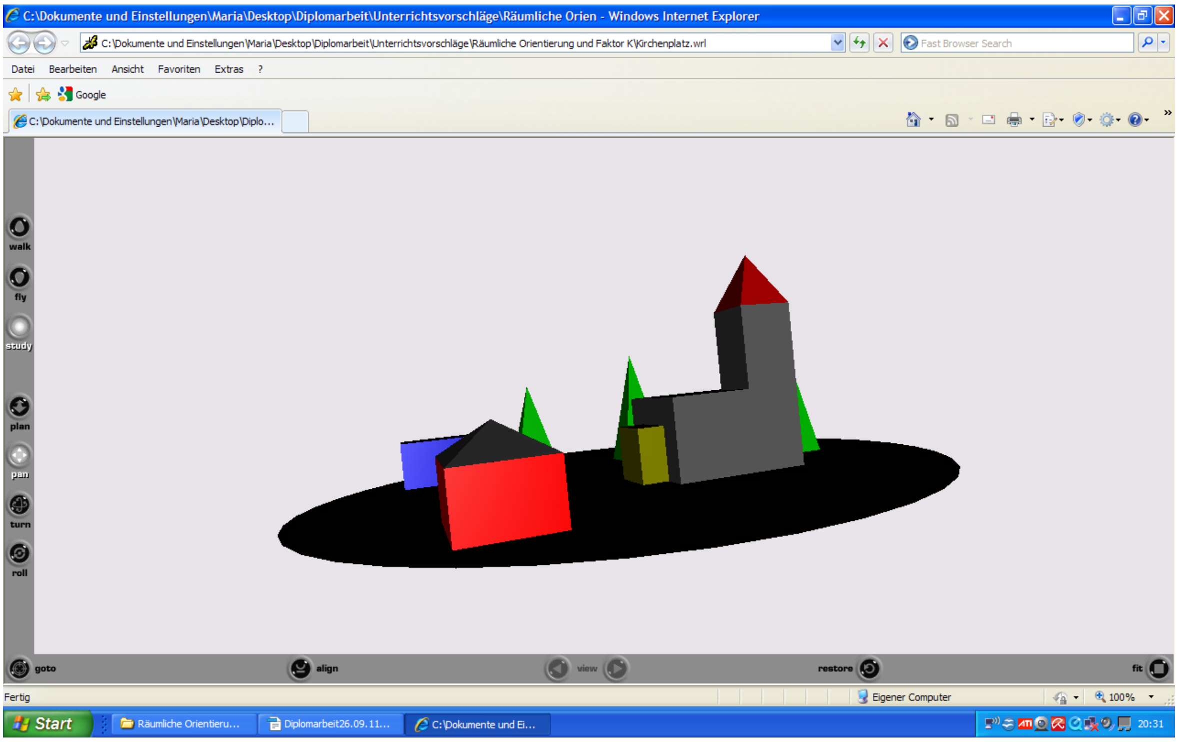


Abb. 6.6: *Kirchenplatz – VRLM 3*

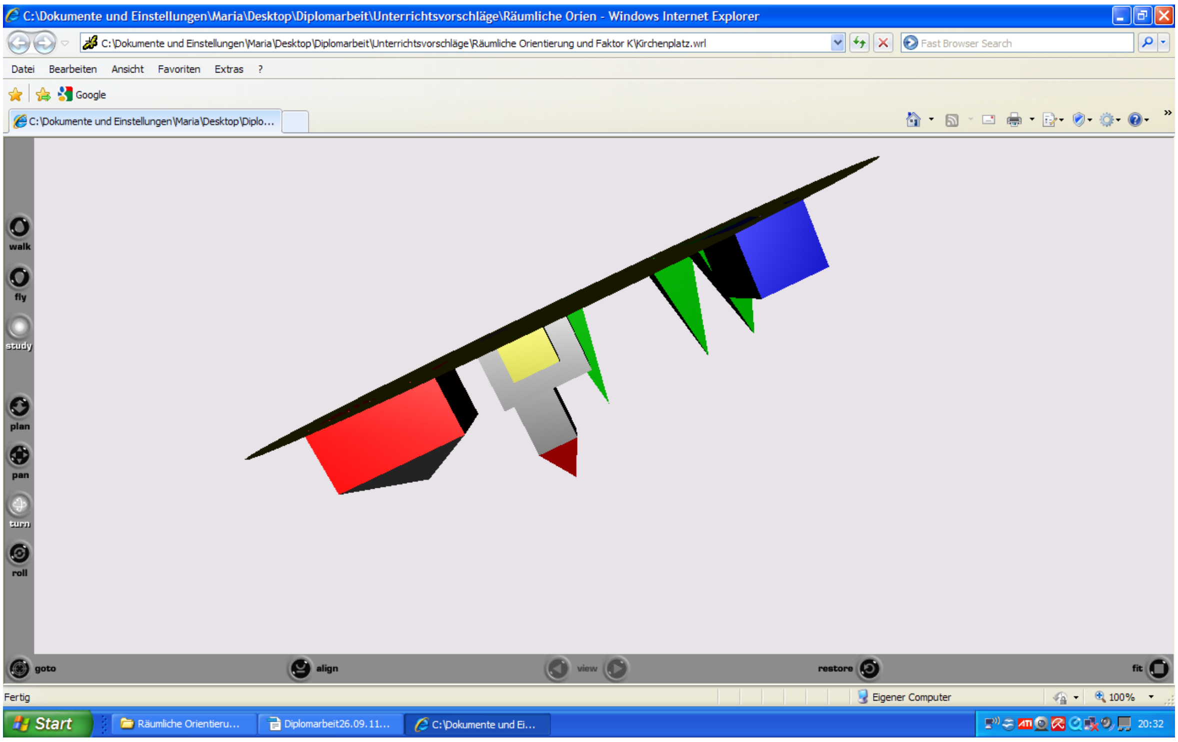


Abb. 6.7: *Kirchenplatz – VRLM 4*

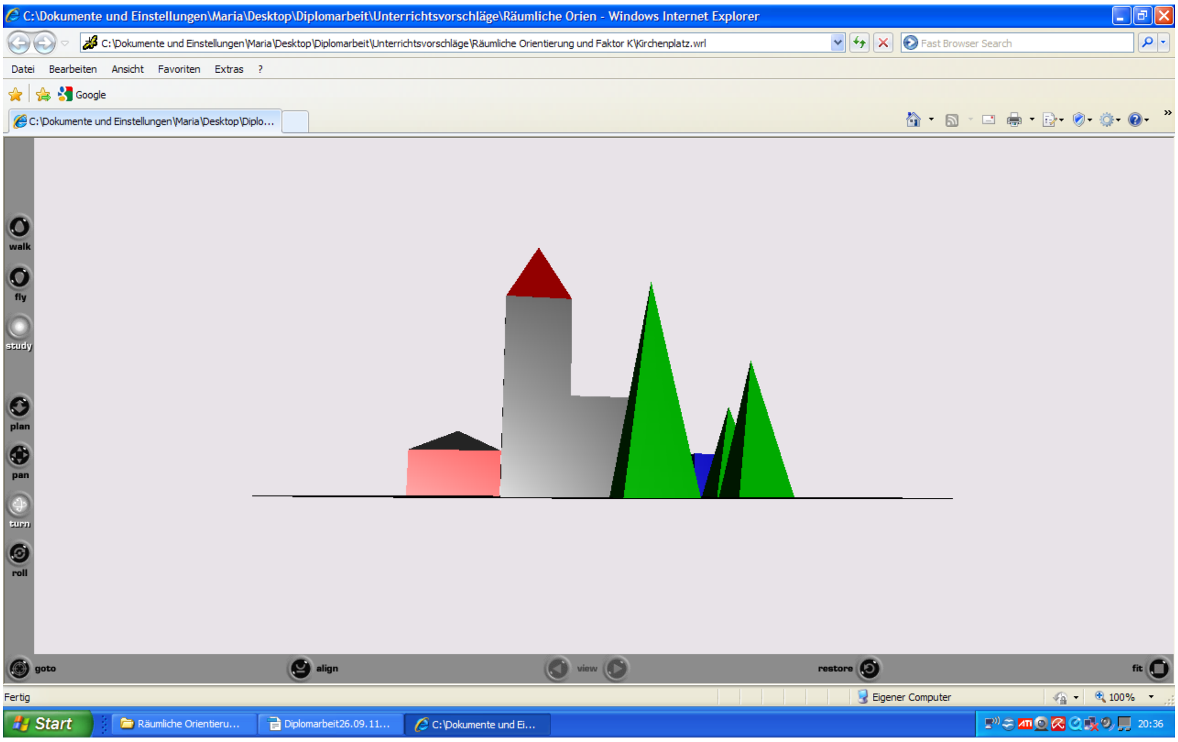


Abb. 6.8: *Kirchenplatz – VRLM 5*

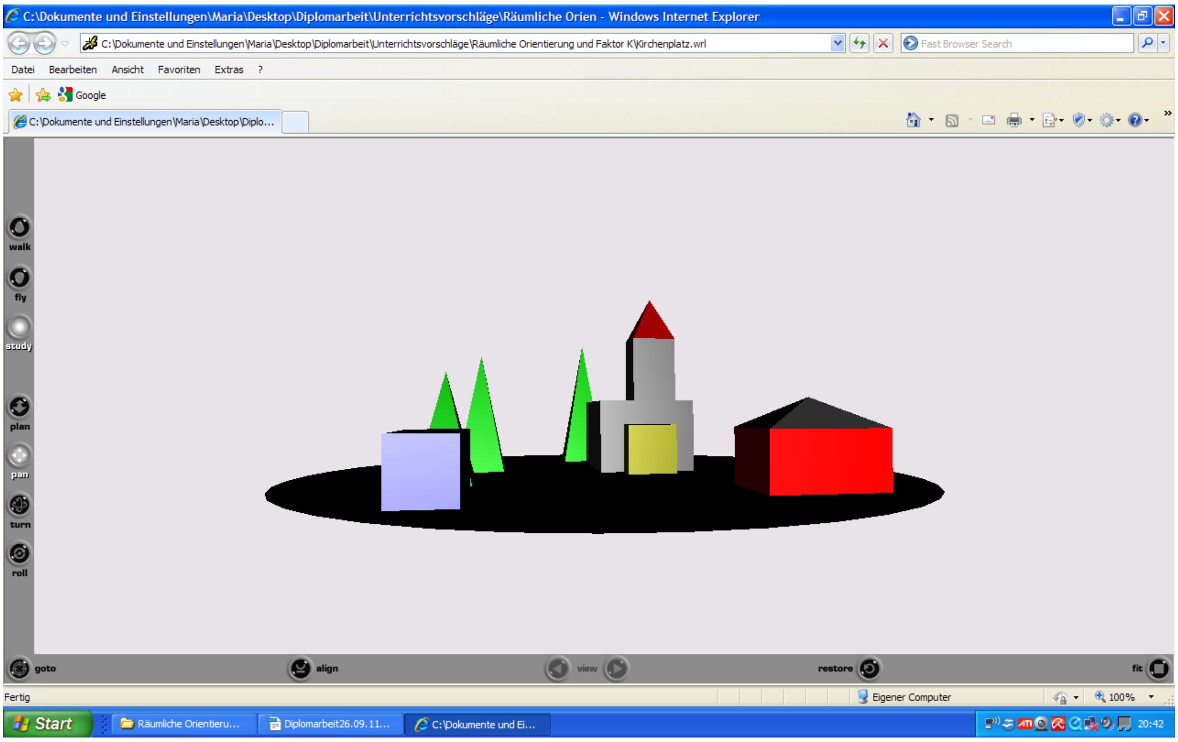


Abb. 6.9: *Kirchenplatz – VRLM 6*

6.4.2 Unterrichtssequenz zu Räumliche Wahrnehmung

Verwendete Software

Für die Aufgabenstellung zur *Räumlichen Wahrnehmung* wurde die Dynamische Geometrie-Software *GeoGebra (www.geogebra.org,* 29. 11. 2011*)* verwendet. Diese wurde vom gebürtigen Salzburger M. Hohenwarter entwickelt und ist heute aus dem Schulunterricht in Österreich kaum mehr wegzudenken. Bereits 2006 ergab die Umfrage von Müller, dass GeoGebra die am dritthäufigsten für den Unterricht verwendete Dynamische Geometrie-Software unter 224 Lehrern aus ganz Österreich war (siehe Abb. 6.10).

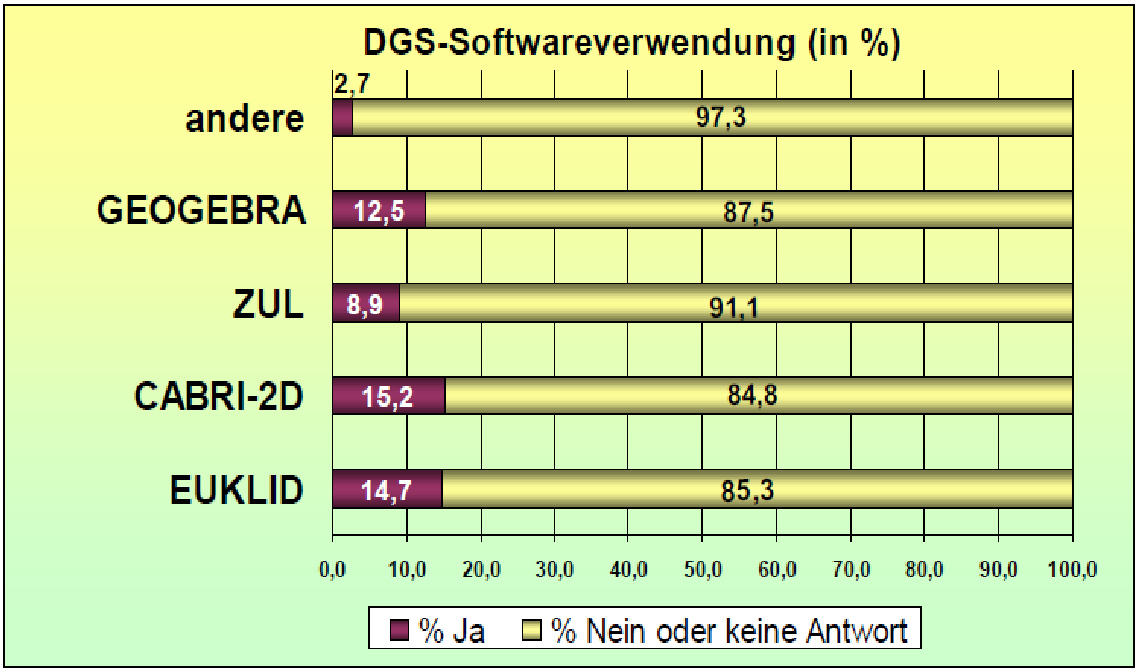


Abb. 6.10: *DGS-Softwareverwendung in Österreich (2006)*

Es liegt allerdings die Vermutung nahe, dass GeoGebra im Vergleich zu seinen Mitstreitern heute noch verbreiteter im Schulunterricht zum Einsatz kommt, als es 2006 der Fall war. Das Programm ist kostenlos nutzbar und wird stetig weiterentwickelt. Es ist auch bereits eine Betaversion von dem zurzeit noch in der Entwicklung stehenden 3D-fähigen GeoGebra 5.0 für den Download verfügbar (29. 11. 2011).

Unterrichtsmaterial

Das folgende Beispiel wurde als dynamisches Arbeitsblatt (HTML-Datei) entwickelt, welches im Internet-Browser geöffnet werden kann. In der Grafik mit Paulchen Panther kann dabei der rote Punkt entlang der gepunkteten senkrechten Strecke zwischen den Punkten *Kopf* und *Fuß* bewegt werden. Der Spiegel, die Strahlen sowie die waagrechte Hilfslinie durch den roten Punkt bewegen sich dabei dynamisch mit (siehe Abb. 6.11).

Die im Anschluss unter „Beispiel – Spiegel" abgebildete Grafik (Abb. 6.11) ist nur ein statisches Bild der Ausgangsposition, die bei Öffnen der HTML-Datei erscheint. Im Unterkapitel „Hintergrundinformationen" finden sich dann vier Abbildungen des Applets, bei denen sich der rote Punkt in verschiedenen Positionen befindet, um die dynamischen Bewegungen zu veranschaulichen.

Beispiel – Spiegel (vgl. *Götz – Schulmathematik* 2)

→ Lösung siehe *Anhang*

Spieglein, Spieglein an der Wand ...

Paulchen Panther steht vor einem schwierigen Problem. Er hat sich einen Wandspiegel gekauft und möchte diesen nun aufhängen. Doch wo soll er ihn platzieren? Er möchte sich schließlich von Kopf [inklusive Kappe] bis Fuß darin bewundern können. Kannst du ihm aus dieser misslichen Lage helfen?

Geh Schritt für Schritt die untenstehenden Fragen durch:

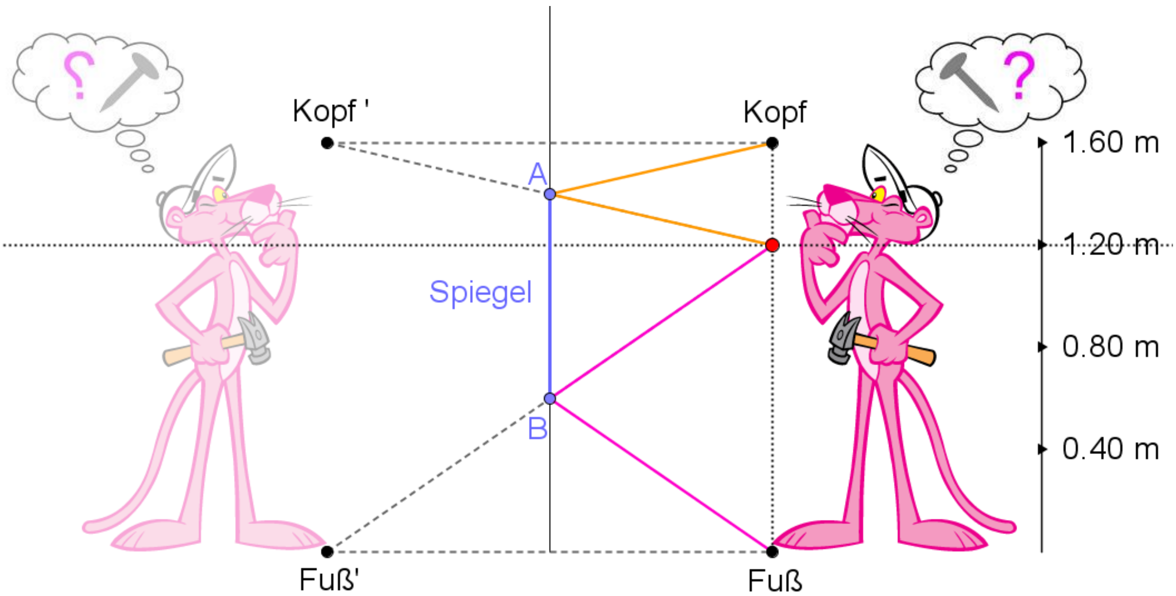


Abb. 6.11: *Spiegel*

a) Fasse den roten Punkt und bewege ihn! Was passiert mit dem Spiegel?

b) Wie hoch ist der Spiegel? Und wie groß ist er im Verhältnis zur Körpergröße (inkl. Kappe)?

c) Wo wird der orange "Strahl" reflektiert und wo der rosarote? (Ausgangspunkte sind "Kopf" bzw. "Fuß") Und was bedeutet das Ganze für das Spiegelbild? Was kann man wo im Spiegel sehen? Versuche zu erklären!

d) Wo gelangen die "Strahlen" nach der Reflexion im Spiegel hin? Auf welche Höhe würdest du etwa den roten Punkt setzen und warum?

e) Jetzt hast du den Spiegel auf die (deiner Meinung nach) richtige Höhe geschoben. Aber wo muss Paulchen denn den obersten Nagel einschlagen (Punkt A)? Er hat leider kein Maßband zur Hand. Beschreibe ihm die Höhe irgendwie anders!

Gutes Gelingen! ☺

Hintergrundinformationen

Lernziele

Am *Beispiel – Spiegel* sollen die Schüler(innen) folgende Punkte lernen bzw. üben:

- Räumliche Wahrnehmung
- Analytisches Denken
- Formulieren von Beobachtungen
- Prinzip eines Spiegels

HTML-Datei

Das dynamische Arbeitsblatt (HTML-Datei) ermöglicht den Schüler(innen) aktives Verändern der Grafik durch Verschieben des roten Punktes. Es können zum Beispiel folgende Positionen eingenommen werden: Abb. 6.12 bis 6.15.

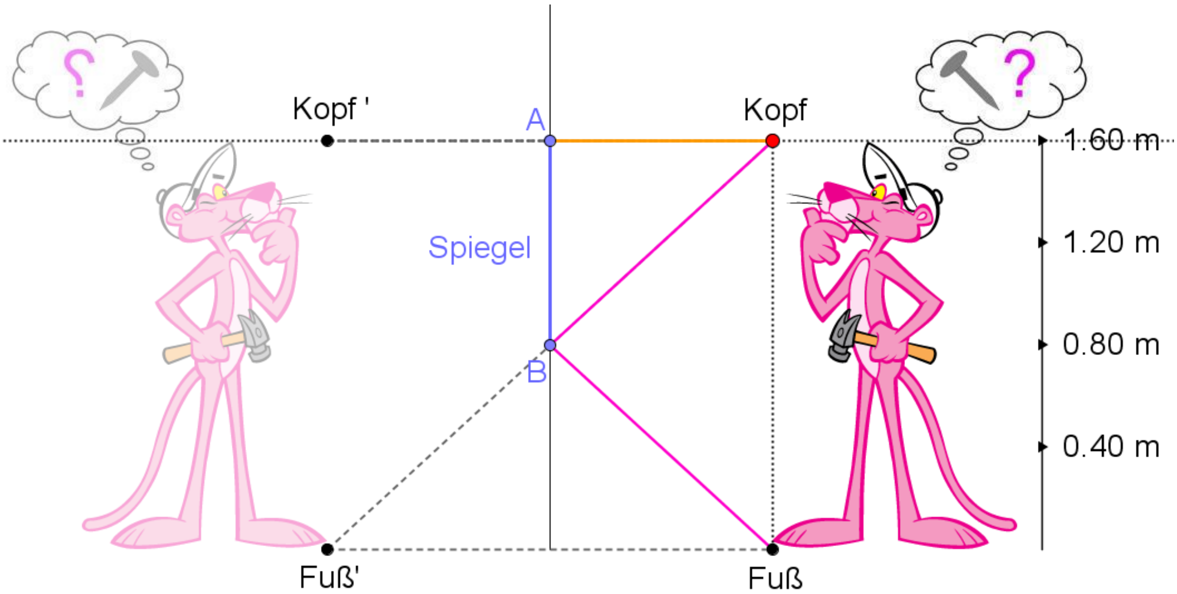


Abb. 6.12: *Spiegel – HTML 1*

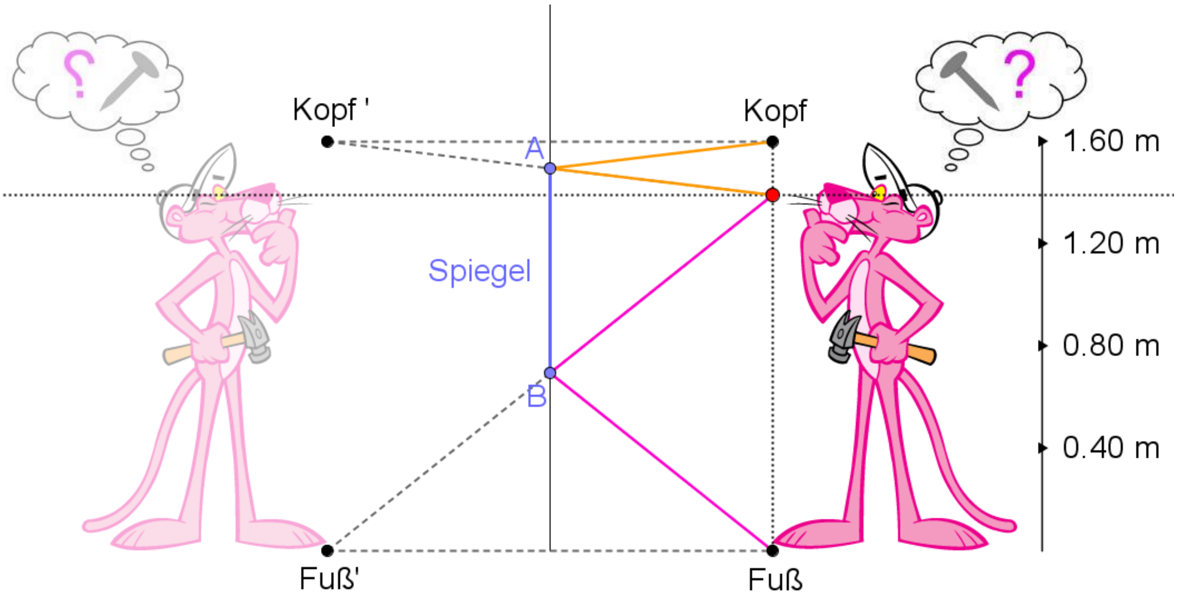


Abb. 6.13: *Spiegel – HTML 2 (Augenhöhe: Lösung zu d))*

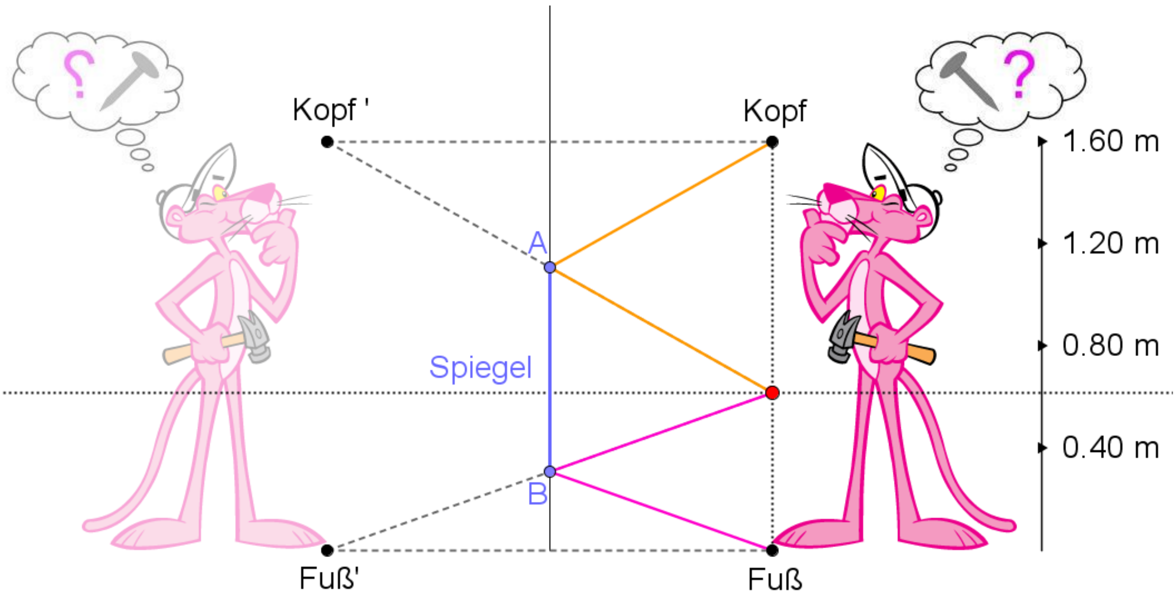


Abb. 6.14: *Spiegel – HTML 3*

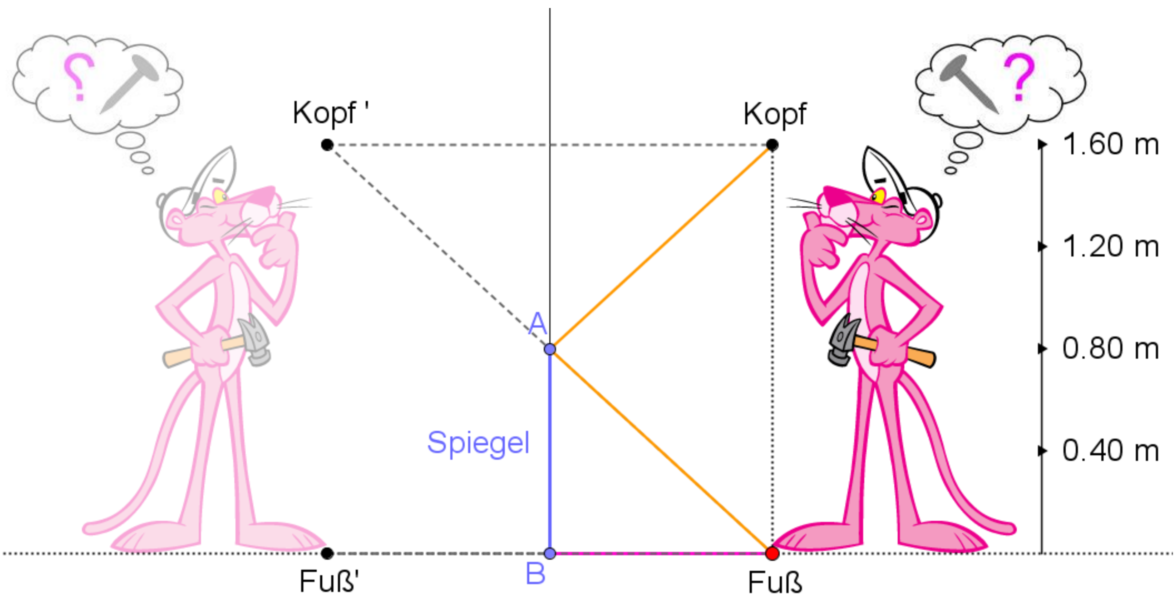


Abb. 6.15: *Spiegel – HTML 4 (Position zum Ablesen von b))*

6.4.3 Unterrichtssequenz zu *allen fünf Faktoren der Raumvorstellung nach Maier*

Verwendete Software

Zur Veranschaulichung und als Lösungshilfe wurde für die folgende Aufgabe die Software *Vektoris3D (www.kapieren.de,* 29. 11. 2011*)* in der Version 2.0 verwendet. Das Programm wurde vom deutschen Lernmedien-Partner kapieren.de entwickelt und wird auch über diesen vertrieben.

Vektoris3D dient vor allem zur Veranschaulichung von Raumgeometrie im Bereich der dreidimensionalen analytischen Geometrie und enthält ausschließlich unterrichtsrelevante Themen. Daher eignet es sich ausgezeichnet als Unterstützung für den Geometrieunterricht, um Inhalte aus der analytischen Geometrie schnell und leicht zu visualisieren. Die Software unterstützt sowohl das automatische Rotieren des dreidimensionalen Koordinatensystems um die z- oder x_3-Achse, als auch das manuell gesteuerte Bewegen des Systems in beliebige Richtungen.

Typische Berechnungsaufgaben aus der analytischen Geometrie können ebenfalls mithilfe des Programms durchgeführt werden: Abstände zwischen Punkten, Ebenen und Geraden, verschiedene Darstellungsformen von Ebenengleichungen, Schnittgebilde von Ebenen, Geraden und Kugeln sowie Schnittwinkel von Ebenen und Geraden fallen in diesen Bereich.

Unterrichtsmaterial

Bei dem hier verwendeten Beispiel handelt es sich um eine typische Berechnungsaufgabe zur analytischen Geometrie des Raumes aus dem Schulbuch *Mathematik 6* (siehe [GRMH], S. 4). Es soll gezeigt werden, dass aus einem klassischen Schulbuchbeispiel zu Geraden und Ebenen durch Visualisierung am PC die Anzahl der angesprochenen Raumvorstellungskomponenten deutlich erhöht werden kann.

Die folgende Aufgabe ist, wie fast alle analytischen Geometrie-Aufgaben aus dem Schulunterricht, den Komponenten *Veranschaulichung* und *Räumliche Beziehungen* zuzuordnen. Ergänzt man diese jedoch durch eine Konstruktion im dynamischen Raumgeometrie-Programm Vektoris3D, können durch die individuell drehbare 3D-Darstellung auch die restlichen drei Komponenten der Raumvorstellung *Räumliche Orientierung und Faktor K, Räumliche Wahrnehmung* und V*orstellungsfähigkeit von Rotationen* angesprochen werden.

Beispiel – Schneiden von Gerade und Ebene (vgl. [GRMH], S. 48, Bsp. 153b)

→ Rechnerische Lösung zu a) siehe *Anhang* (erst im Anhang angeführt, da die Lösung dieses Unterpunktes nicht explizit zur Verbesserung der Raumvorstellung beiträgt)

Schneiden von Gerade und Ebene

a) Wo und unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die Ebene ε?

$$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \qquad \varepsilon: 3\mathrm{x} + 12\mathrm{y} - 4\mathrm{z} = -4$$

b) Stelle g und ε in Vektoris3D graphisch dar und kontrolliere deine Rechenergebnisse aus a) am Computer!

Gutes Gelingen! ☺

Hintergrundinformationen

Lernziele

Am *Beispiel – Schneiden von Gerade und Ebene* sollen die Schüler(innen) folgende Punkte lernen bzw. üben:

- Trainieren der fünf Raumvorstellungskomponenten Veranschaulichung, Räumliche Beziehungen, Räumliche Orientierung und Faktor K, Räumliche Wahrnehmung und Vorstellungsfähigkeit von Rotationen
- Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene berechnen
- Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene berechnen

Lösung zu b)

Bei der **graphischen Darstellung** in Vektoris3D werden auch die drei vernachlässigten Komponenten des räumlichen Vorstellungsvermögens aktiviert. Die *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen* wird durch das dynamische Drehen der 3D-Darstelung gefördert, die *Räumliche Wahrnehmung* wird vor allem durch die als Gitternetz dargestellte Horizontal- (x_1x_2-Ebene) und Vertikalebene (x_2x_3-Ebene) unterstützt und auch der Faktor *Räumliche Orientierung und Faktor K* wird durch die ansprechende dynamische Visualisierung in den Blick genommen.

Im Anschluss finden sich Screenshots der graphischen Lösung aus verschiedenen Perspektiven, um die dynamischen Drehungen zu visualisieren:

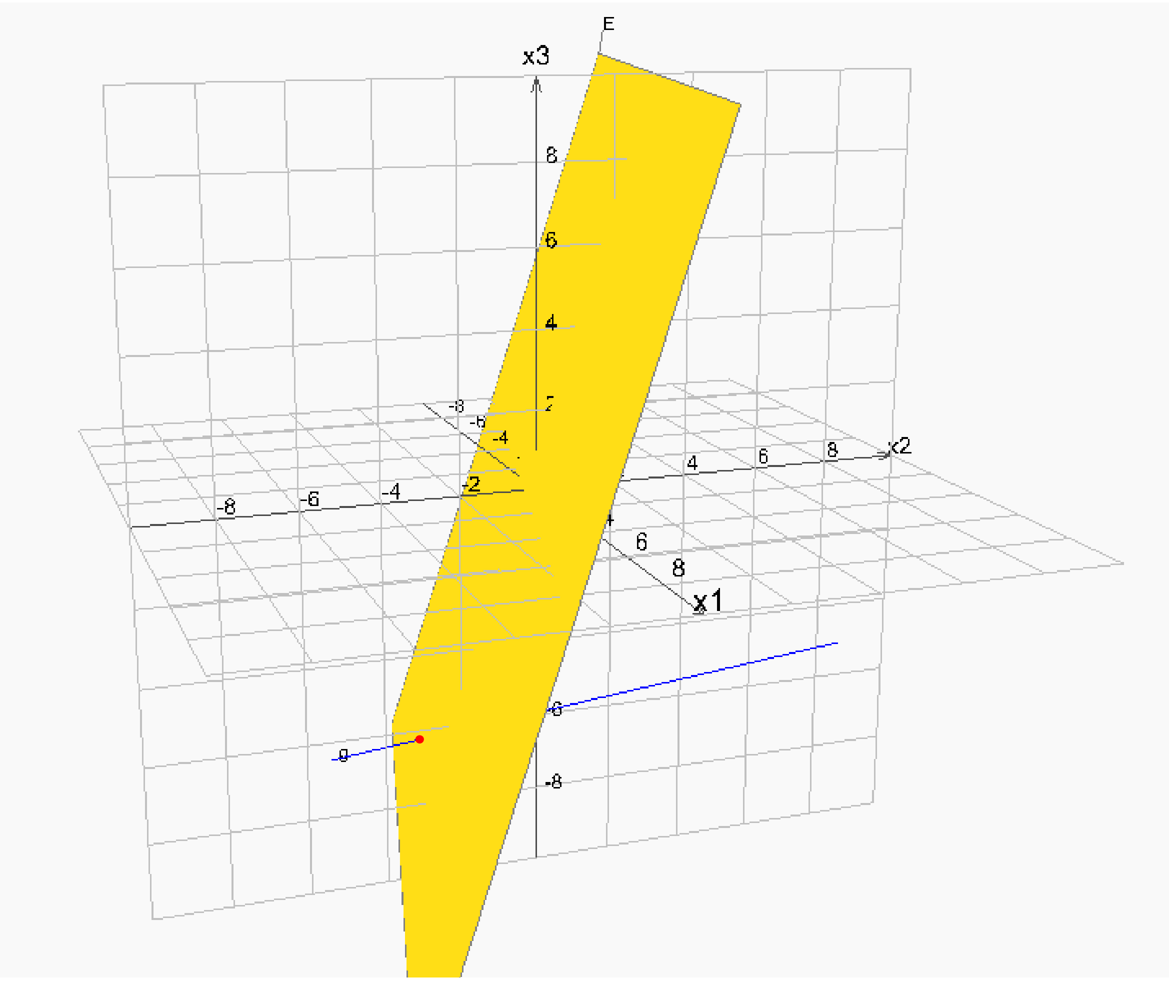


Abb. 6.16: *Gerade und Ebene 1*

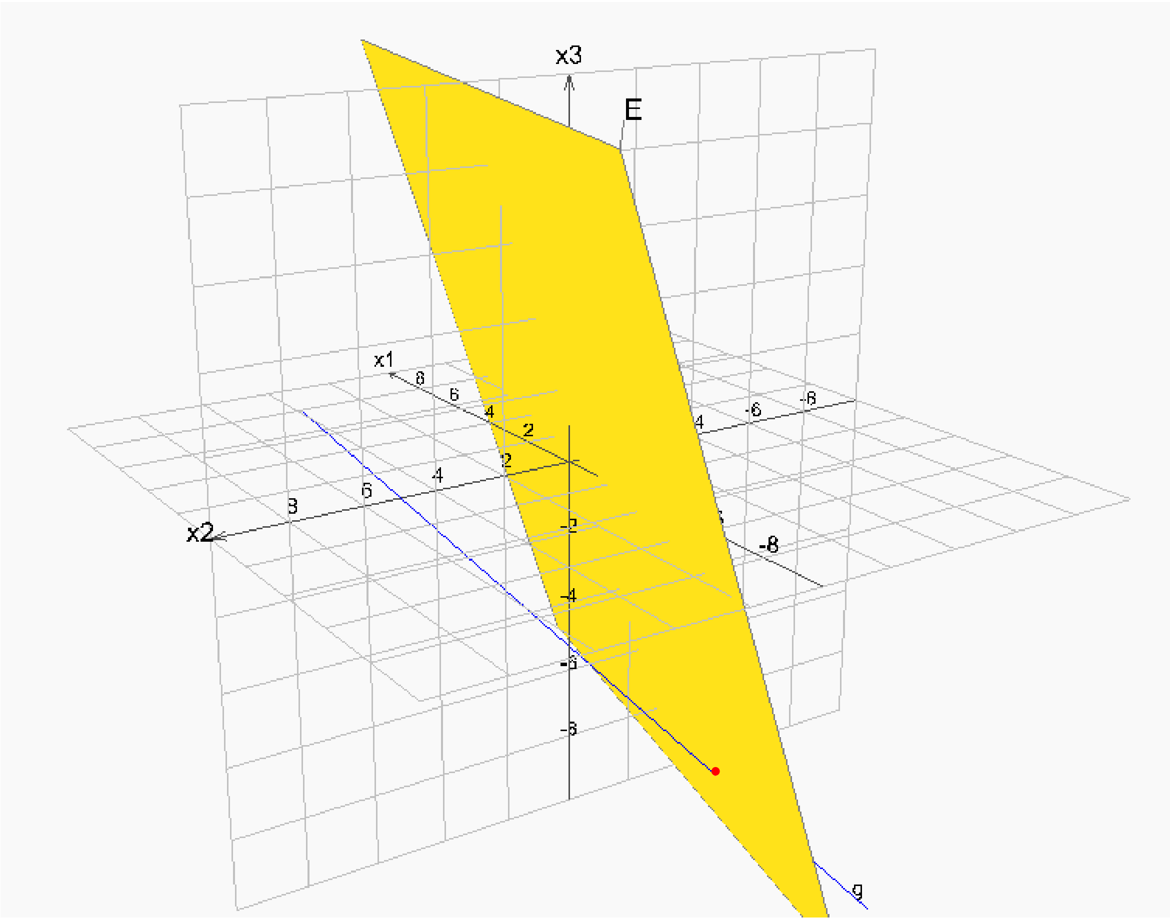


Abb. 6.17: *Gerade und Ebene 2*

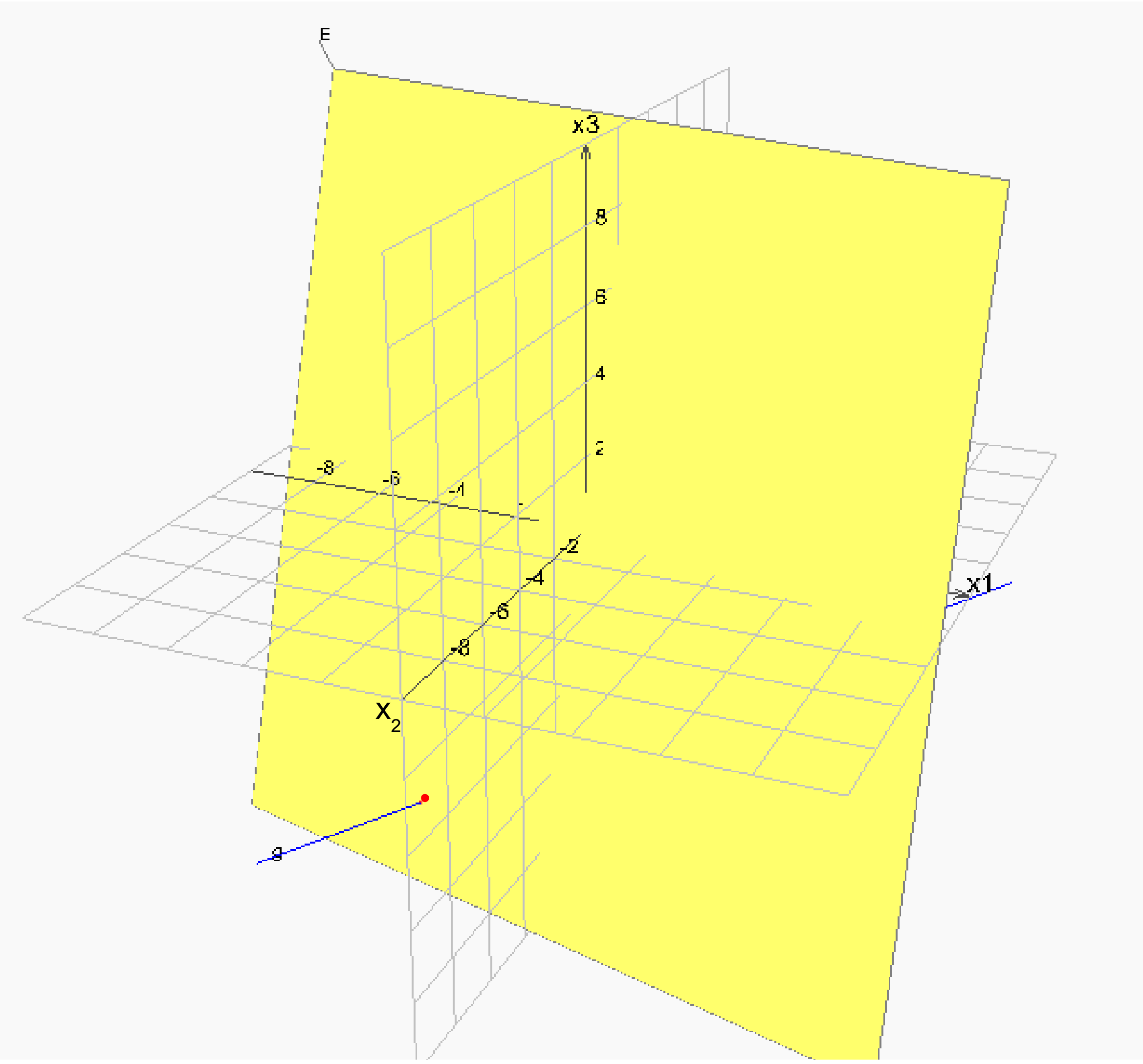


Abb. 6.18: *Gerade und Ebene 3*

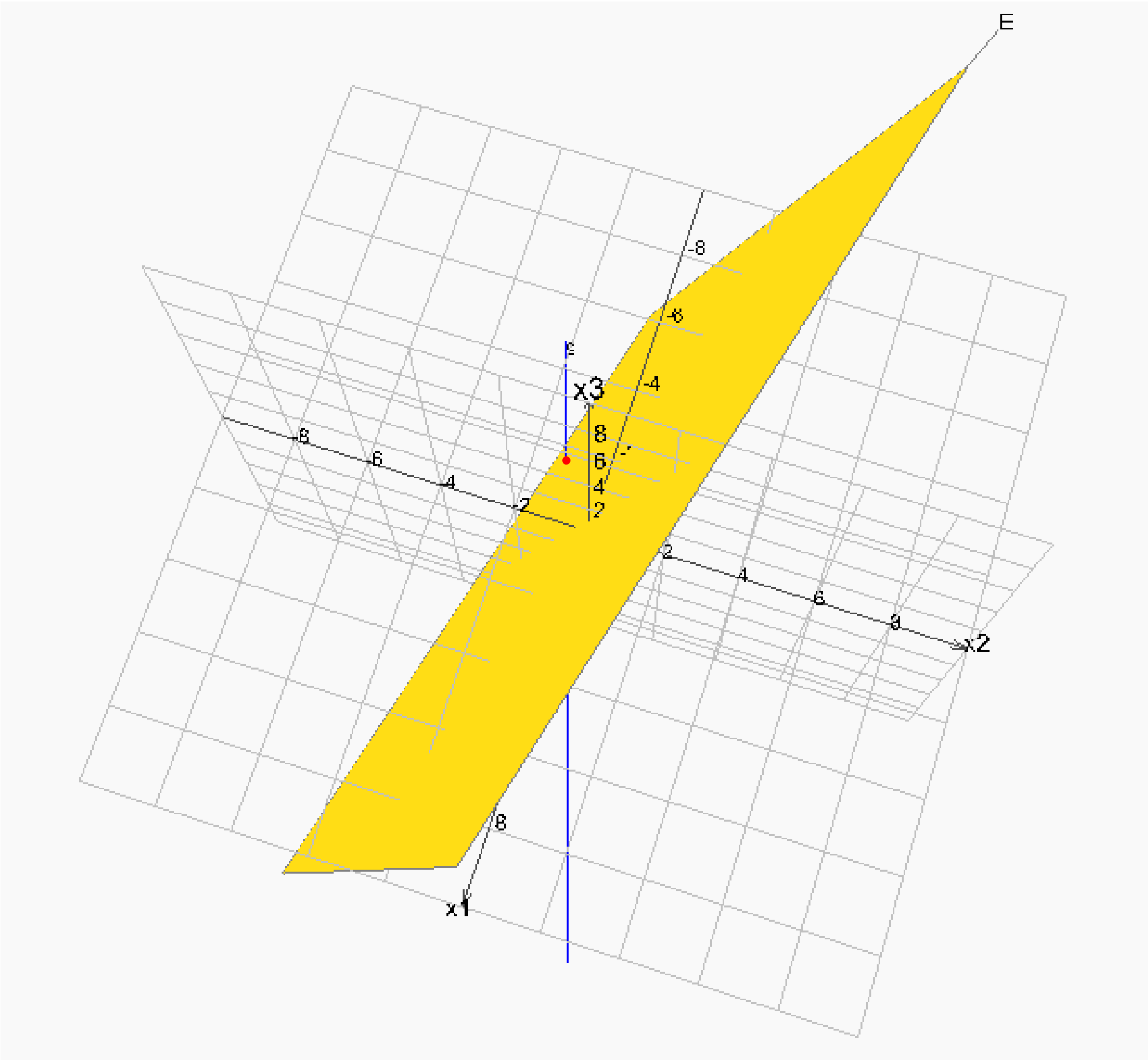


Abb. 6.19: *Gerade und Ebene 4*

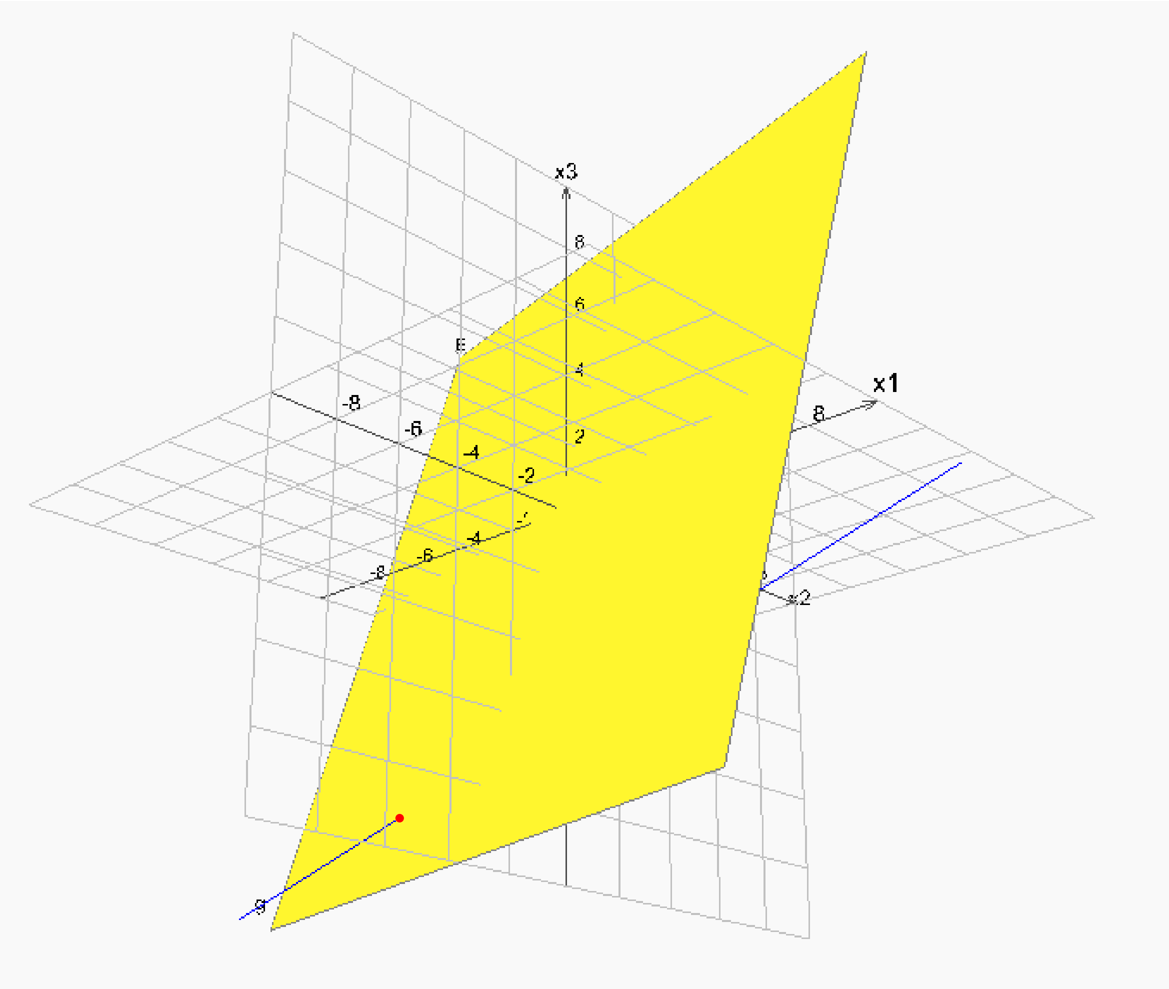


Abb. 6.20: *Gerade und Ebene 5*

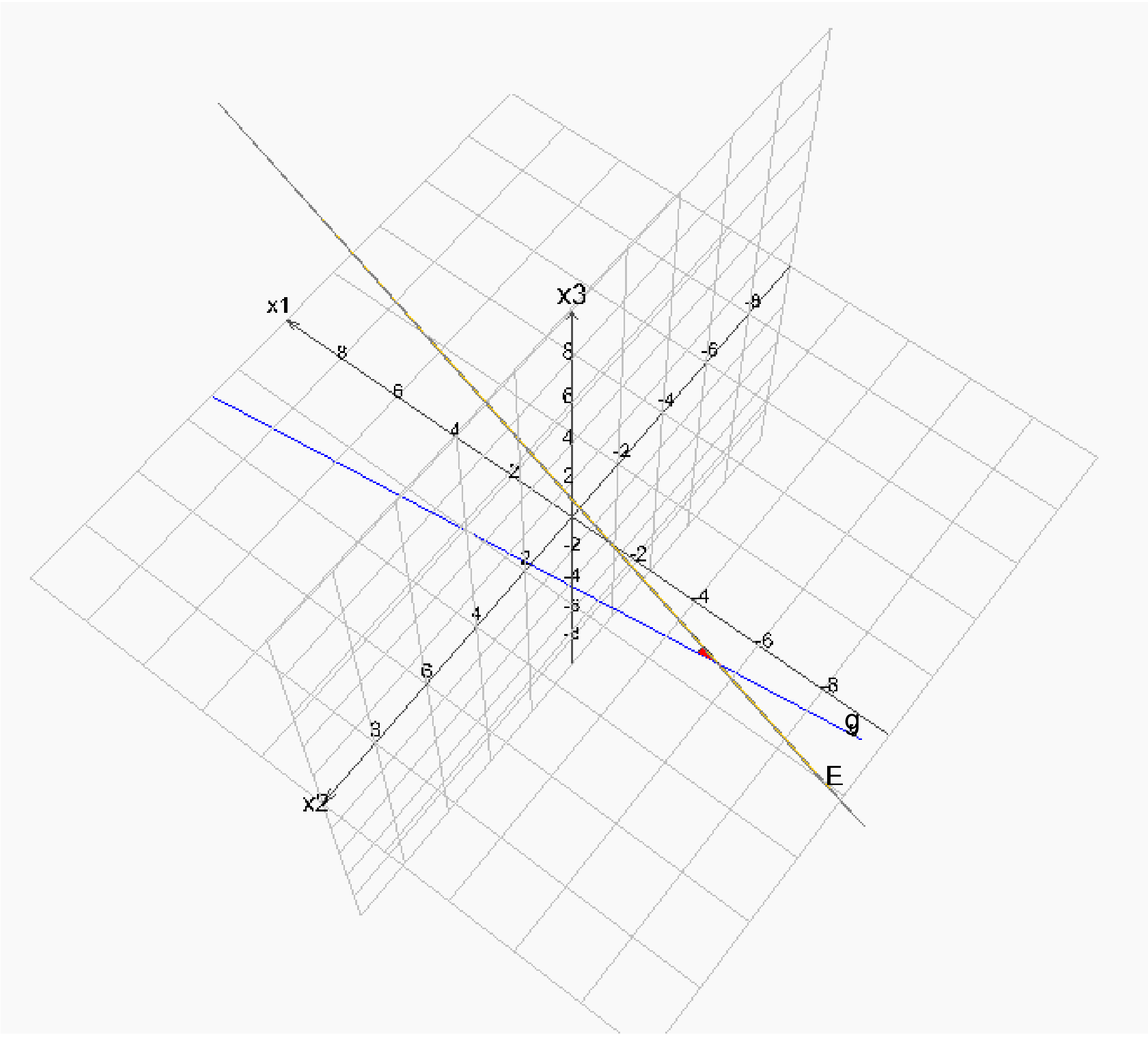


Abb. 6.21: *Gerade und Ebene 6* (Schnittwinkel rot eingezeichnet)

Die notwendigen Schritte zur Konstruktion gestalten sich wie folgt:

Schritt 1: Im Feld „Elemente“ *Gerade* auswählen und nach der Vorlage im Feld „Variante“ bzw. den zugehörigen Erklärungen im Feld „Erläuterung“ im Feld „Skripteingabe“ die Gerade g definieren (siehe Abb. 6.21).

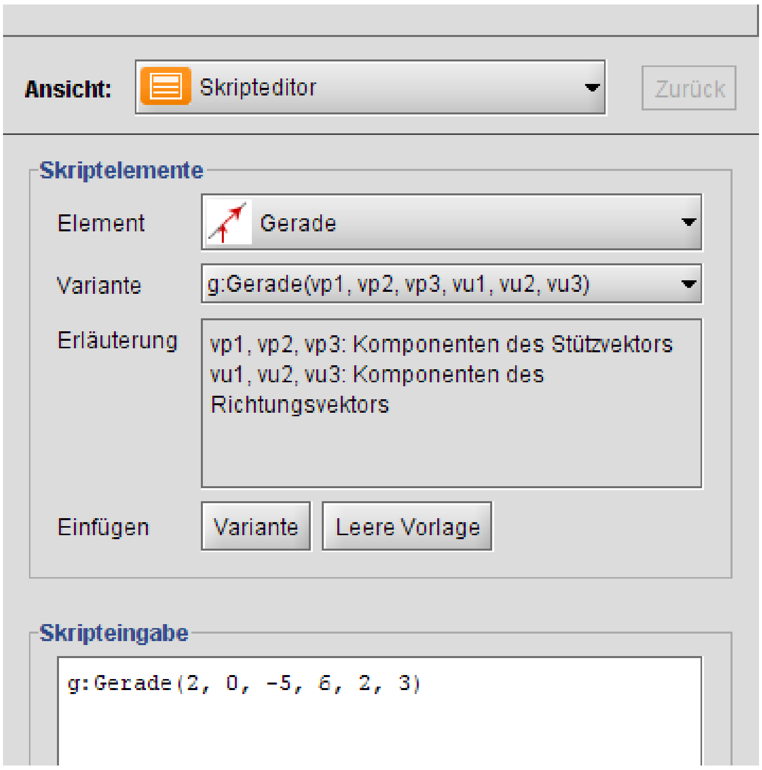


Abb. 6.21: Vektoris3D – Gerade in Parameterform definieren

Schritt 2: Im Feld „Elemente“ *Ebene in Koordinatenform* auswählen und nach der Vorlage im Feld „Variante“ bzw. den zugehörigen Erklärungen im Feld „Erläuterung“ im Feld „Skripteingabe“ die Ebene ε definieren (siehe Abb. 6.22).

Schritt 3: Um die definierte Gerade und Ebene zu zeichnen, muss man nur noch auf „Aktualisieren“ klicken (siehe Abb. 6.22).

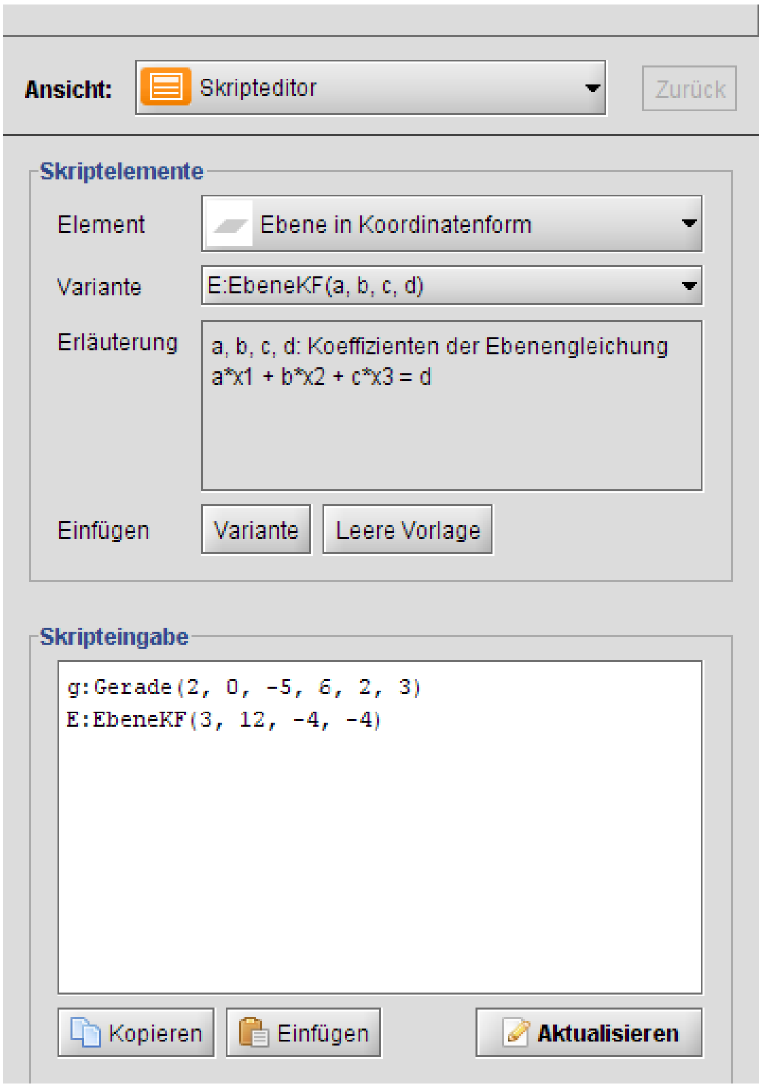


Abb. 6.22: Vektoris3D – Ebene in Normalvektorform definieren

Zur **Kontrolle der Rechenergebnisse** für den Schnittpunkt und den Schnittwinkel muss man im Feld „Ansicht“ *Schnittgebilde* bzw. *Schnittwinkel* auswählen, was geschnitten werden soll (siehe Abb. 6.23 und 6.24). Nachdem in unserem Beispiel nur eine Gerade g und eine Ebene ε definiert wurden, stehen auch nur diese beiden zur Auswahl.

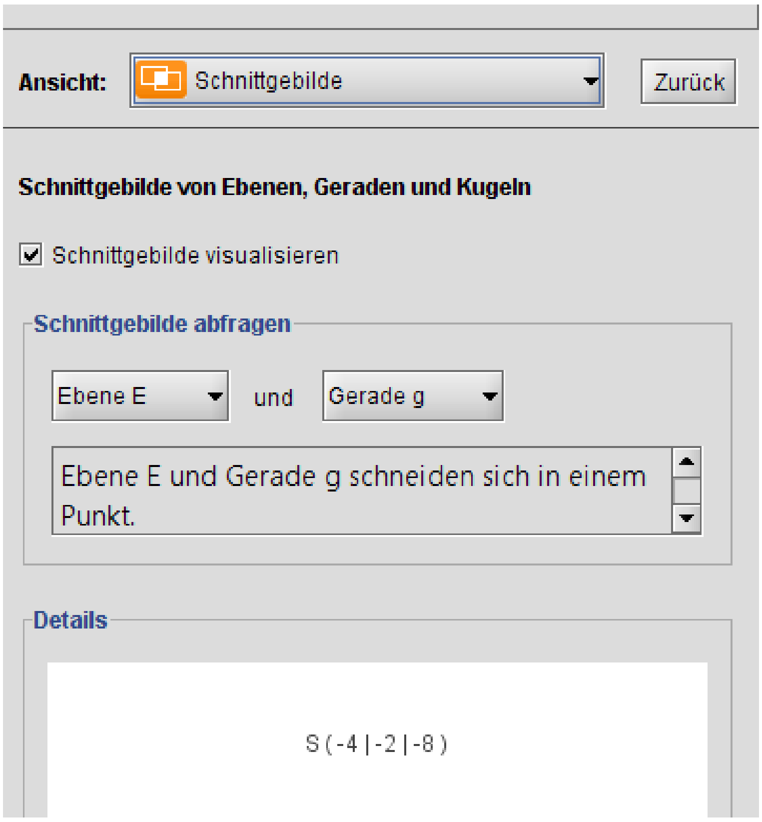


Abb. 6.23: Vektoris3D – Schnittpunkt bestimmen

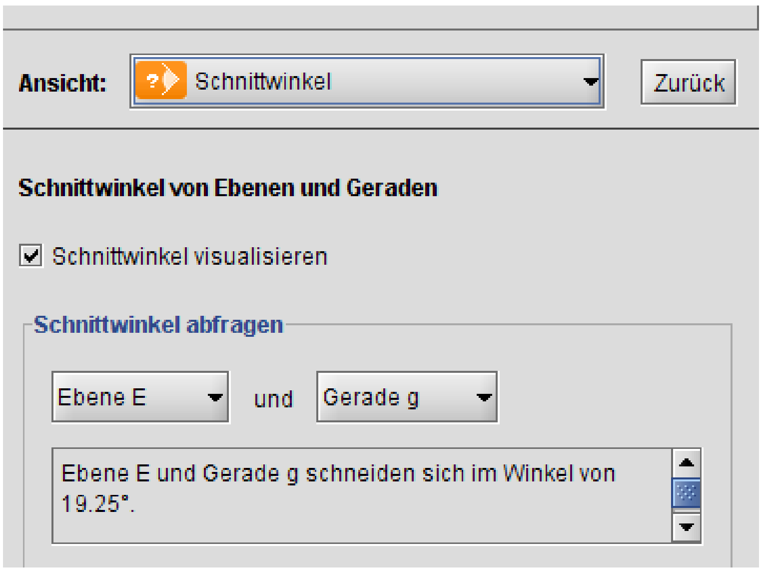


Abb. 6.24: Vektoris3D – Schnittwinkel bestimmen

7 Resümee

Das räumliche Vorstellungsvermögen ist eine unverzichtbare Kompetenz für viele Berufe und auch für das tägliche Leben. Ob beim Landkartenlesen, Wohnungseinrichten oder einfach nur beim Autofahren, ohne die Fähigkeit, sich räumliche Situationen vorstellen zu können, werden wir es nicht einfach im Leben haben. Das erkannte auch die Wissenschaft und so bildet die Raumvorstellung eine wichtige Komponente verschiedenster Intelligenzmodelle.

Psycholog(-inn)en entwarfen die unterschiedlichsten Strukturkonzepte zur Raumvorstellung, die von Ein-Faktor-Theorien bis Mehr-Faktoren-Theorien reichen. Maier studierte die anerkanntesten dieser Theorien und konzipierte aus ihnen ein zusammenfassendes Fünf-Faktoren-Modell, welches aus den Komponenten V*eranschaulichung, Räumliche Beziehungen, Räumliche Orientierung und Faktor K, Räumliche Wahrnehmung* und *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen* besteht.

Eine Analyse des österreichischen Lehrplans für AHS ergab, dass eine Förderung der Raumvorstellung im allgemeinen Teil des Lehrplans zwar explizit gefordert wird, der Lehrstoffteil in gängiger Interpretation aber nicht allzu viele Möglichkeiten bietet, diese in ihren verschiedensten Ausformungen zu schulen. Die angegebenen Themenbereiche für den Mathematikunterricht können hauptsächlich zur Verbesserung der Komponenten *Veranschaulichung* und *Räumliche Beziehungen* genutzt werden. Die restlichen drei Komponenten, *Räumliche Orientierung und Faktor K, Räumliche Wahrnehmung* und *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen* sind nur in sehr geringem Ausmaß thematisch im Lehrplan abgedeckt. Daher ist es wichtig für Lehrer(innen), diese wenigen Gebiete im Lehrstoff zu nutzen und nach Möglichkeit noch auszubauen, um die Schüler(innen) bei einer ganzheitliche Entwicklung ihrer Raumvorstellung zu unterstützen.

Besonders wichtig ist dieses umfangreiche Training während des Schulbesuchs der AHS in der Unterstufe, da Kinder in diesem Alter eine diesbezüglich bedeutende Entwicklungsphase durchmachen. Thurstone, Stückrath, Piaget et al. und die Van Hieles sprechen alle von einem Altersbereich von etwa sieben bis vierzehn Jahren, in dem die Raumvorstellung einen deutlichen Entwicklungsschritt vollzieht.

Da sich, wie schon erwähnt, herausstellte, dass drei der fünf Komponenten der Raumvorstellung im Lehrplan der AHS zu kurz kommen, wurden im letzten Teil der vorliegenden Arbeit computergestützte lehrplankonforme Unterrichtsvorschläge entwickelt, die eine oder mehrere dieser drei Komponenten als Lernziele beinhalten. Es zeigt sich, dass auch „normale“ Geometrieaufgaben aus Schulbüchern zu diesem Zweck erweitert werden können, wenn entsprechende Medien eingesetzt werden.

Zur Realisierung wurde didaktische Geometrie-Software verwendet, die 3D-fähig, leicht zu erlernen, vom Design her ansprechend und kostengünstig sein sollte. Es wurden mehrere in Frage kommende Programme getestet, wobei letztendlich nur drei von Ihnen, nämlich *GAM-3D, GeoGebra* und *Vektoris3D* für diese Arbeit verwendet wurden. Die so erstellten Unterrichtssequenzen sollen zum einen als Anregung für weitere Unterrichtsbeispiele zu den Komponenten *Räumliche Orientierung und Faktor K, Räumliche Wahrnehmung* und *Vorstellungsfähigkeit von Rotationen* dienen und zum anderen den Gebrauch von Geometrie-Software im Unterricht anregen.

8 Bibliografie

Literatur

[BAWE] Barzel, B. / Weigand, H. G.: Medien vernetzen. In: mathematik lehren (2008) 146, S. 4 – 10.

[BISH1] Bishop, A. J.: Spatial abilities and mathematical thinking. In: Proceeding of the fourth international congress on mathematical education, Berkeley, California, 4 (1980), S. 176 – 178.

[BISH2] Bishop, A. J.: Space and Geometry. In: R. Lesh (Ed.): Acquisition of mathematics concepts and processes, New York, (1983), S. 175 – 203.

[BLO] Bloom, B. S.: Stabilität und Veränderung menschlicher Merkmale. Übers.: Eggert, D. / Eggert, G. Weinheim, Berlin und Basel: Beltz 1971.

[FRAN] Franke, M.: Didaktik der Geometrie. Heidelberg: Spektrum 2000.

[FREU] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 2. 1. Aufl. Stuttgart: Klett 1973.

[FRÖ] Fröhlich, W. D.: Wörterbuch Psychologie. München: dtv 2005.

[GARD] Gardner, H.: Abschied vom IQ. Die Rahmentheorie der vielfachen Intelligenzen. Übers.: Heim, M. Stuttgart: Klett-Cotta 1991.

[GITT] Gittler, G.: Intelligenzförderung durch Schulunterricht: Darstellende Geometrie und räumliches Vorstellungsvermögen. In: Gittler, G. (Hrsg.): Die Seele ist ein weites Land. Aktuelle Forschung am Wiener Institut für Psychologie. Wien: WUV-Univ.-Verl. 1994.

[GÖTZ] Götz, S.: Würfel und Augensummen – ein unmögliches Paar. In: Teaching Mathematics and Computer Science, 4 (2006) 1, S. 71 – 88.

[GRMH] Götz, S. (Hrsg.) / Reichel, H.-C. (Hrsg.) / Müller, R. / Hanisch, G.: Mathematik 6. Wien: öbv 2010.

[GUI] Guilford, J. P.: Persönlichkeit – Logik, Methodik und Ergebnisse ihrer quantitativen Erforschung. Übers.: Kottenhoff H. / Agrell U. Weinheim: Beltz 1964.

[HUMRE] Humenberger, J. / Reichel, H.-C.: Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. Mannheim, Leipzig, Wien und Zürich: BI-Wiss.-Verl. 1995.

[JÄG] Jäger, A. O.: Dimensionen der Intelligenz. Göttingen: Hogrefe 1967.

[LIPE] Linn, M. C. / Petersen, A. C.: Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta-analysis. In: Child Development, 56 (1985) 6, S. 1479 – 1498.

[LOC] Loch, W.: Vorwort. In: Bruner J. S.: Der Prozeß der Erziehung. Übers.: Harttung, A. Berlin: Berlin-Verlag u. a. 1970.

[MAI1] Maier, P. H.: Räumliches Vorstellungsvermögen – Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule. Dissertation. In: Europäische Hochschulschriften, Bd. 493. Frankfurt, Berlin, Bern, New York, Paris und Wien: Peter Lang 1994.

[MAI] Maier, P. H.: Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriß des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen. Mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht. Donauwörth: Auer 1999.

[MGFZ] Michael, W. B. / Guilford, J. P. / Fruchter, B. / Zimmerman, W. S.: The description of spatial-visualization abilities. In: Educational and Psychological Measurement, 17 (1957), S. 185 – 199.

[MZG] Michael, W. B. / Zimmerman, W. S. / Guilford, J. P.: An investigation of two hypotheses regarding the nature of the spatial-relations and visualization factors. In: Educational and Psychological Measurement, 11 (1950), S. 187 – 213.

[MÜL] Müller, T.: Die Bedeutung neuer Medien in der Fachdidaktik für den Unterrichtsgegenstand Darstellende Geometrie. Dissertation.

TU Wien 2006.

[PAW] Pawlik, K.: Dimensionen des Verhaltens. Eine Einführung in Methodik und Ergebnisse faktorenanalytischer psychologischer Forschung. 3. Aufl. Bern: Huber 1976.

[PIIN] Piaget, J. / Inhelder, B. et al.: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Übers.: Heipcke, R. 1. Aufl. Stuttgart: Klett 1971.

[RARI] Radatz, H. / Rickmeyer, K.: Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel 1991.

[SOU] Souvignier, E.: Die Verbesserung räumlicher Fähigkeiten durch computerunterstützte Fördermaßnahmen: Zwei Evaluationsstudien. In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 13 (1999) 1 – 2, S. 4 – 16.

[SPEA] Spearman, C.: General Intelligence. Objectively Determined and Measured. In: American Journal of Psychology, 15 (1904), S. 201 – 293.

[STÜ] Stückrath, F.: Kind und Raum. Psychologische Voraussetzungen der Raumlehre in der Volksschule. 3. Aufl. München: Kösel 1968.

[THUR] Thurstone, L. L.: Primary Mental Abilities. New Impression 1969. Chicago: University of Chicago Press 1938.

[VANH] Van Hiele, P. M. / Van Hiele-Geldorf, D.: Die Bedeutung der Denkebene im Unterrichtssystem nach der deduktiven Methode. In: Steiner, H. G. (Hrsg.): Didaktik der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1978.

Internet

Asperl *Asperl, A.: GZ abseits von Trampelpfaden. Vortrag Herzogenburg 1997:* http://www.dmg.tuwien.ac.at/asperl/vortrag_herzogenburg_97.pdf, 10. 08. 2011

GAM-3D *Programmbeschreibung – GAM-3D:* http://www.gam3d.at/seiten/download.html, 15. 10. 2011

Götz – Schulmathematik 2 *Übung: Schulmathematik 2 (Geometrie) – Blatt 2:* http://plone.mat.univie.ac.at/Members/goetz/sm22010.pdf, 16. 10. 2011

LP-AHS allgemein *Lehrplan für die AHS – Allgemeiner Teil 2004:* http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11668/11668.pdf, 22. 07. 2011

LP-AHS Unterstufe *Lehrplan für die AHS-Unterstufe – Mathematik 2003:* http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf, 22. 07. 2011

LP-AHS Oberstufe *Lehrplan für die AHS-Oberstufe – Mathematik 2004:* http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, 22. 07. 2011

LP-GS *Lehrplan für die Grundschule – Mathematik 2003:* http://www.bmukk.gv.at/medienpool/3996/VS7T_Mathematik.pdf, 09. 08. 2011

Luig / Strässer *Luig, K. / Strässer, R.: Förderung ausgewählter Aspekte der Raumvorstellung mit dynamischer Geometriesoftware:* http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/alle%20ModSek/Ludwig_ModSek/LUIG_Karsten_2009_Raumvorstellung.pdf, 06. 10. 2011

Pink Panther *Grafik – Pink Panther*: http://franchising.owenscorning.com/franchise-opportunities/, 19. 10. 2011

Quaiser-Pohl et al. *Jordan, K. / Lehmann, W. / Quaiser-Pohl, C. / Schirra, J. R. J.: Zum Einfluss des Computers auf die Raumvorstellung – eine differenzielle Analyse bei Studierenden von Computerwissenschaften (2001):* http://isgwww.cs.uni-magdeburg.de/~schirra/Work/Papers/P01/P01-9/Leipzig.pdf, 12. 10. 2011

Selbstlernmaterial *Unkelbach, T.: Die Pyramiden von Gizeh – Aufgabe und Lösung:* http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/ag/aa1/aa1 _pyramiden_1.pdf, 13. 10. 2011

9 Abbildungsverzeichnis

Literatur

Internet

Abb. 6.11: *Spiegel* und Abb. 6.12: *Spiegel-HTML1* – Abb. 6.15: *Spiegel-HTML4 (Position zum Ablesen von b))*: Grafik des Pink Panthers: *Pink Panther*

10 TABELLENVERZEICHNIS

Literatur

Hinweis: Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

11 Anhang (Lösungen)

11.1 Anwendungsaufgabe – Die Pyramiden von Gizeh

(S. 84)

b)

Gleichungen von Gerade g und Ebene E1 aufstellen:

$$g: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad E1: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt E' berechnen:

Schritt 1: Gleichsetzen von g und E1 und Parameter berechnen. (Es reicht t auszudrücken, da man anschließend durch Einsetzen des Wertes für t in die Geradengleichung den Schnittpunkt E1 erhält.)

$$6 - 3\mathrm{t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = 3\mathrm{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = 2$$

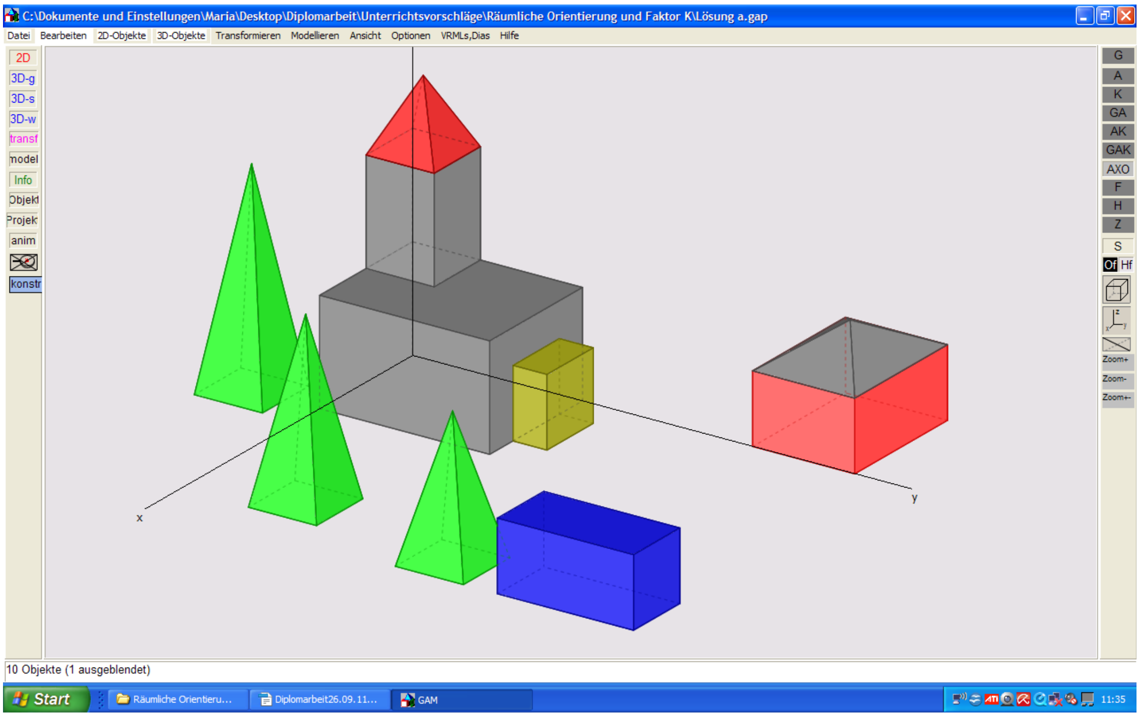
Schritt 2: In der Geradengleichung für t den Wert 2 einsetzen und so den gesuchten Schnittpunkt E1 berechnen.

$$E' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

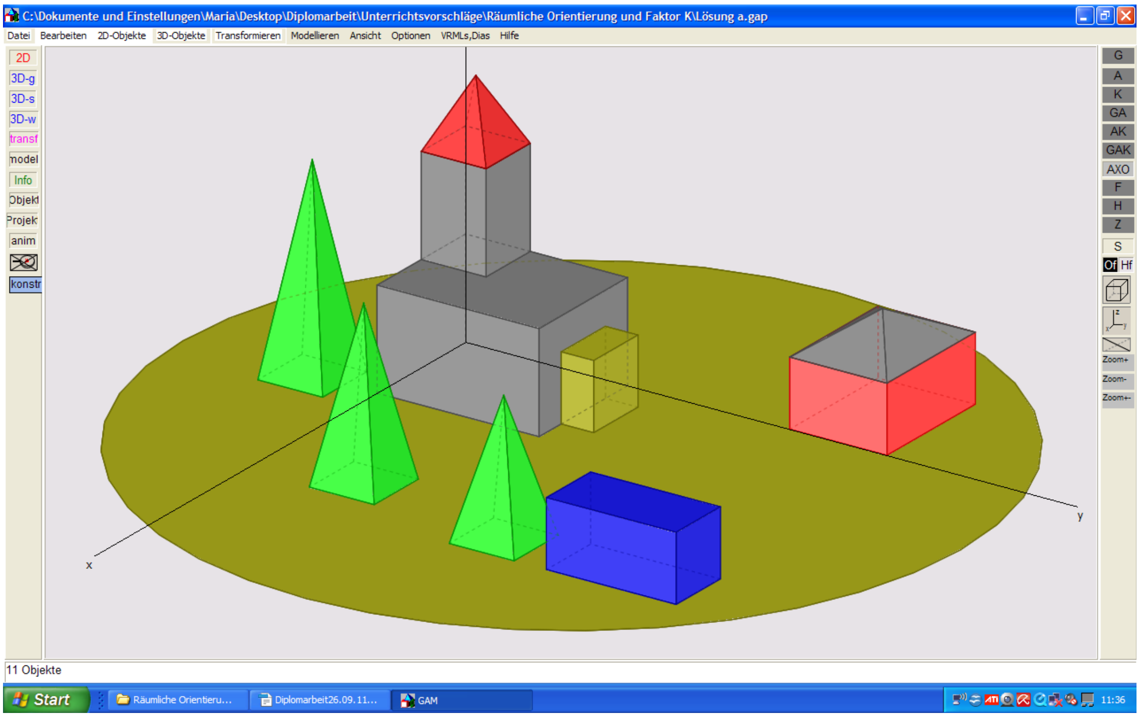
11.2 Beispiel – Kirchenplatz

(S. 100)

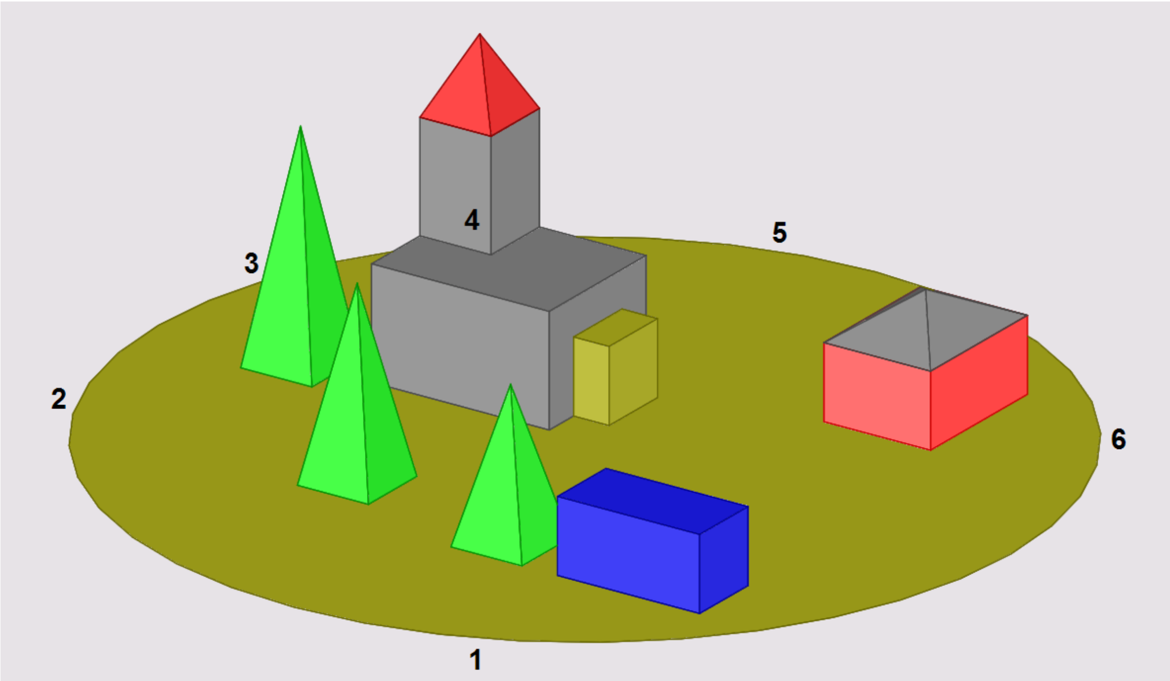
a)

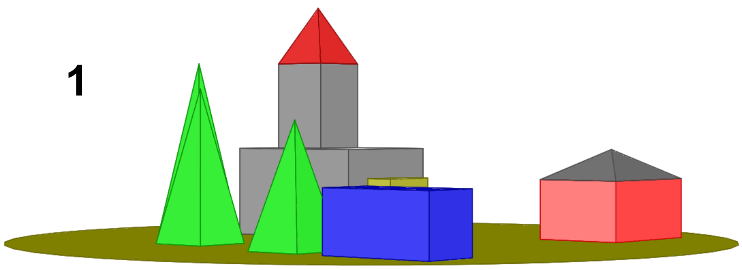


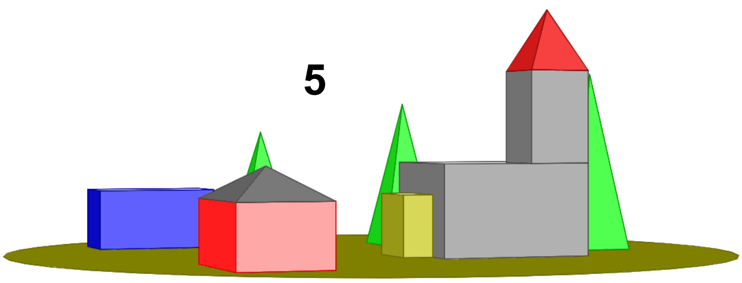
b)

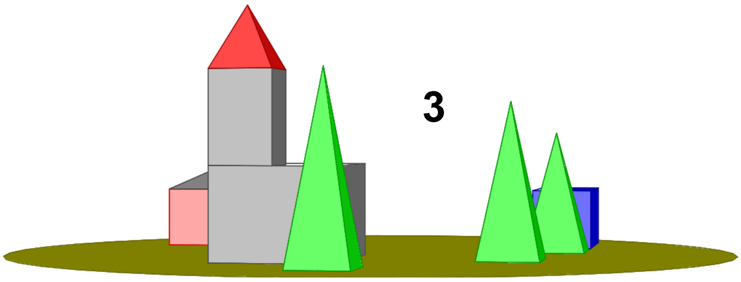


c)

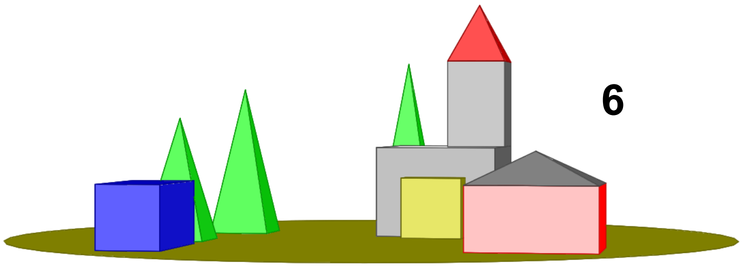




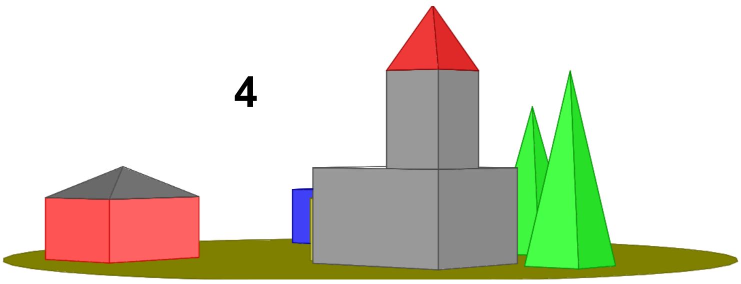




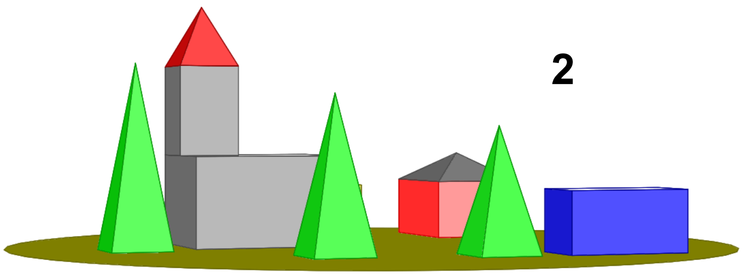
3



6



4



2

11.3 Beispiel – Spiegel

(S. 109)

a) Der Spiegel bewegt sich senkrecht an der Wand auf und ab. Er kann höchstens mit der Oberkante auf Kappenhöhe geschoben werden und der tiefst mögliche Punkt ist, wenn die Unterkante auf dem Boden (=Fußhöhe) auftrifft.

b) Der Spiegel ist 80 cm hoch. Das ist halb so groß wie Paulchen Panther mit Kappe.

c) Der orange Strahl wird im Punkt A (Spiegeloberkante) reflektiert und der rosarote im Punkt B (Spiegelunterkante). D. h. der Kopf ist im Spiegel ganz oben (Punkt A) und der Fuß im Spiegel ganz unten (Punk B) zu sehen. Paulchen ist also ganz im Spiegel zu sehen und füllt diesen der Länge nach genau aus.

d) Die Strahlen treffen einander nach der Reflexion im roten Punkt. Ich würde den roten Punkt auf Augenhöhe setzen, damit sich Paulchen als Ganzes sehen kann, ohne sich zu bücken oder zu strecken. Wäre der Punkt tiefer, müsste der Panther in die Knie gehen um sich ganz (allerdings gebückt!) zu sehen.

e) Die richtige Höhe ist es, den roten Punkt auf Augenhöhe zu schieben (siehe Abb. 6.13: *Spiegel – HTML 2 (Augenhöhe: Lösung zu d)).* Der Nagel muss auf halber Höhe zwischen Augenhöhe und Höhe der Kappe (bzw. normalerweise des Kopfes) eingeschlagen werden.

11.4 Beispiel – Schneiden von Gerade und Ebene

(S. 116)

a)

Schnittpunkt berechnen:

$$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon: 3x + 12y - 4z = -4$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2+6t \\ y &= 0+2t \\ z &= -5+3t \end{aligned}\right\} \text{ in } \varepsilon \text{ einsetzen:}$$

$$3\cdot(2+6t)+12\cdot(2t)-4\cdot(-5+3t)=-4$$

$$6+18t+24t+20-12t=-4$$

$$26+30t=-4$$

$$30t=-30$$

$$t=-1$$

$t=-1$ in g einsetzen:

$$S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad S(-4|-2|-8)$$

Schnittwinkel berechnen:

$$\cos(\sphericalangle(g,\vec{n})) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{6^2+2^2+3^2} \cdot \sqrt{3^2+12^2+(-4)^2}} = \frac{18+24-12}{91} = \frac{30}{91}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(g,\vec{n}) = 70{,}75°$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(g,\varepsilon) = 90° - \sphericalangle(g,\vec{n}) = 90° - 70{,}75° = 19{,}25°$$

12 Lebenslauf

Persönliche Daten:	Maria Hutsteiner Geb.: Steyr, 07. 01. 1987 Österreich	
Bildungsgang:	*Schulbildung*	
	Volksschule Gleink:	1993 – 1997
	Bundesrealgymnasium Steyr:	1997 – 2001
	Handelsakademie Steyr – Schwerpunkt Personalmanagement:	2001 – 2006
	Berufsbildung	
	Studium – Universität Wien (Lehramt – Spanisch / Mathematik):	seit 2006
	Auslandssemester – Santiago de Compostela, Spanien:	2009
Ferialtätigkeiten:	Glück Werkzeug- und Maschinenbau GmbH & Co KG – Wolfern (Büro)	2002
	Magistrat Steyr (Büro)	2003
	Magistrat Steyr (Stadtgärtnerei)	2004
	Magistrat Steyr (Stadtgärtnerei)	2005
	BMW Motoren GmbH – Steyr (Büro)	2006
	BMW Motoren GmbH – Steyr (Produktion)	2007
	Schülerhilfe und learnUP – Steyr (Nachhilfe)	2009
	Schülerhilfe – Steyr (Nachhilfe)	2010