



universität
wien

MAGISTERARBEIT

Titel der Magisterarbeit

„Implizite Volatilitäten und Beispiele zur
Berechnung“

Verfasserin

Barbara Schneider, Bakk.rer.soc.oec.

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Sozial- und Wirtschaftswissenschaften
(Mag.rer.soc.oec.)

Wien, im Dezember 2011

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 066 951

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Magisterstudium Statistik

Betreuer:

O.Univ.Prof.Dr. Georg Pflug

“Everyone believed in the normal distribution, the mathematicians because they thought it was an experimental fact, the experimenters because they thought it was a mathematical theorem.” Jules Henri Poincaré, 1854-1912

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Allgemeines	5
2.1	Volatilität	5
2.2	Optionen	6
2.3	Optionsmodelle	8
2.4	Berechnung der Parameter	9
3	DAX	11
3.1	Allgemeines	11
3.2	Spezifikationen der DAX-Optionen	12
3.3	Verwendete Daten	13
3.4	Historische Volatilität	16
3.5	Berechnungen	16
4	Black-Scholes	21
4.1	Theorie	21
4.2	Praxis	23
4.2.1	Smile	24
4.2.2	Zeitliche Struktur	26
4.3	Berechnungen	26
5	Heston Modell	38
5.1	Heston Stochastic Volatility Model (1993)	38

5.2	Heston and Nandi GARCH Modell (2000)	40
5.2.1	Theorie	40
5.2.2	Berechnungen	43
6	Modellfreie Methode	53
6.1	Theorie	53
6.2	Berechnungen	56
7	Zusammenfassung	58
	Abbildungsverzeichnis	61
	Tabellenverzeichnis	63
	Symbole und Abkürzungen	65
	Abstract	66

Kapitel 1

Einleitung

Die meisten Publikationen über Optionspreise und implizite Volatilitäten beschäftigen sich mit den Problemen des Volatilitätssmiles, den Unzulänglichkeiten bekannter Optionsmodelle und Versuchen, diese zu verbessern.

Ich möchte in dieser Arbeit auf die impliziten Volatilitäten selbst eingehen und wie diese aus den gegebenen Optionsmarktpreisen ermittelt werden können. Volatilitäten spielen vor allem im Finanzrisikomanagement von Firmen eine bedeutende Rolle. In der Praxis wird sogar im Handel mit Optionen oft nicht von den jeweiligen zu zahlenden Prämien gesprochen sondern von den Volatilitäten. Verwenden Käufer und Verkäufer das gleiche Modell und sind Laufzeit und Strike fixiert, kann noch der zugehörige Euribor-Zinssatz genommen werden und zusammen mit der vereinbarten Volatilität ergibt sich der zu zahlende Preis der Option.

Aus Einfachheitsgründen werde ich hier nur europäische Optionen ohne Dividenden betrachten. Besonderes Augenmerk werde ich auf die out-of-the-money (OTM) Volatilitäten legen. Ein Grund dafür ist, dass OTM Optionen für Firmen oft wesentlich interessanter sind als ATM oder ITM Optionen, da sie zu Absicherungszwecken verwendet werden. Folglich ist auch zu beobachten, dass OTM Optionen im Allgemeinen liquider sind als ITM Kontrakte und daher auch die Preise den Markt genauer darstellen. Ein anderer Grund für die höhere Liquidität ist, dass sie einfach billiger sind und es mit wenig Einsatz möglich ist Gewinne zu machen.

In dieser Arbeit möchte ich anhand von drei verschiedenen Methoden auf die Berechnung der impliziten Volatilitäten eingehen, worauf zu achten ist, auf welche Probleme man dabei stoßen kann und wie sich die Resultate unterscheiden.

Kapitel 2

Allgemeines

2.1 Volatilität

Risikomanagement in den Finanzbereichen vor allem großer Firmen ist nicht erst seit der Finanzkrise ein wichtiges Thema. Volatilitäten von Aktien oder auch Rohstoffen sind hierbei entsprechend wichtig und gehen zum Beispiel in VaR Rechnungen ein.

Die Volatilität wird als Standardabweichung σ über einen Zeitraum, der je nach Anwendungsgebiet beliebig gewählt werden kann, angegeben. Möchte man den errechneten Wert auf eine andere Zeitperiode umlegen, kommt in der Praxis üblicherweise die square-root of time-Regel zur Anwendung. Wird mit σ die jährliche Volatilität angegeben, so wird für den Zeitraum t (angegeben in Jahren) die entsprechende Volatilität berechnet als $\sigma_t = \sigma\sqrt{t}$.

Bei Preisvolatilitäten muss man vor allem zwischen historischen und impliziten unterscheiden.

Historisch

Sind die täglichen Returns gegeben, kann die daraus berechnete Volatilität auf die Periode eines Jahres hochgerechnet werden, indem man die Anzahl der Handelstage im Jahr verwendet. Standardmäßig können dafür 252 Tage genommen werden:

$$\sigma_{ann} = \sigma * \sqrt{252}$$

Eine Methode zur Berechnung der historischen Volatilität ist es, einfach die Standardabweichung der Returns über eine bestimmte Periode zu nehmen.

Falls allerdings Returns über eine lange Periode verwendet werden sollen und die Berechnung täglich durchgeführt werden soll, kann dies bei einer

großen Datenmenge durchaus Kapazitäten und Zeit binden. Der exponentiell gewichtete gleitende Mittelwert (EWMA) der Quadrate der Returns ist in solchen Fällen eine gute Alternative:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) u_{t-1}^2$$

wobei u_{t-1} der letzte beobachtete Return ist (siehe Hull [9], Seite 525). Nach Morgan Stanley ist ein üblicher Wert für λ 0.94.

Da bei der Berechnung der historische Volatilitäten einfach die vergangenen Preise verwendet werden, geben sie keinerlei Auskunft über zukünftige Entwicklungen sondern nur einen Rückblick in die Vergangenheit.

Basierend auf vergangenen Werten ist es allerdings möglich, Modelle zu erstellen, mit denen die zukünftige Entwicklung berechnet werden kann. Ein Beispiel dafür ist das GARCH-Modell, das neben Parametern aus den historischen Preisen auch eine Zufallskomponente enthält. Im Kapitel 5.2 wird darauf noch genauer eingegangen.

Implizit

Die implizite Volatilität wird nicht direkt aus den Marktpreisen berechnet, sondern aus abgeleiteten Produkten, den Derivativen. Optionen werden herangezogen um anhand von Modellen diejenige Volatilität zu ermitteln, die den gehandelten Preis der Option ergibt. Da sich Optionen auf zukünftige Preise beziehen, ist in den Optionsprämien eine Erwartung des Marktes zur Preisentwicklung enthalten. Somit erhält man Volatilitäten die die zukünftige Entwicklung angeben sollen.

In einigen empirischen Arbeiten wurde bereits gezeigt, dass die Preisentwicklungen mit impliziten Volatilitäten besser vorhergesagt werden können als dies historische Volatilitäten tun. Latané/Rendleman [10] (Seite 377) waren die ersten die einen Vergleich anstellten und zeigten, dass gewichtete implizite Volatilität eine bessere Abschätzung der zukünftigen realisierten Volatilität darstellt, als es die historische ermöglicht.

2.2 Optionen

Wie oben erwähnt eignen sich Optionspreise dafür zukünftige Volatilitäten der Preise des Underlyings zu schätzen.

Der Wert einer Call-Option C bzw. eine Put-Option P bei Fälligkeit T ist

$$\begin{aligned} C_T &= \max(0, S_T - K) \\ P_T &= \max(0, K - S_T) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vor Fälligkeit ist der Wert der Option abhängig von der zu erwartenden zukünftigen Entwicklung von S und daher für $t < T$

$$\begin{aligned} C_t &= \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)} \max(0, S_T - K) | \mathcal{F}_t) \\ P_t &= \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)} \max(0, K - S_T) | \mathcal{F}_t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

In Grafik 2.1 sind typische Preiskurven von Call- bzw. Put-Optionen zu sehen. Die Vertikale kennzeichnet den aktuellen Preis des Underlyings S .

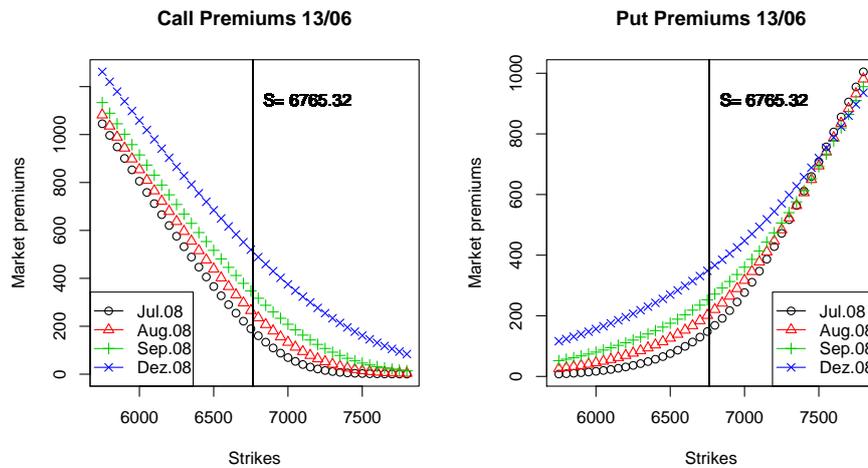


Abbildung 2.1: Prämien DAX-Optionen am 13/06/2008

Für Put-Optionen sind Kontrakte, bei denen der Strike K kleiner ist als der Preis des Underlyings S_t out-of-the-money, für Calls sind Optionen mit $K > S_t$ OTM, dh würden bei sofortiger Ausübung keinen Gewinn bringen. In der Grafik entsprechend deutlich erkennbar ist, dass die Preise der Optionen sinken, je weiter eine Option OTM rutscht. Je länger die Restlaufzeit einer Option, desto höher ist üblicherweise der Preis der Option, da die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn mit steigender Restlaufzeit auch steigt.

Einige nützliche Eigenschaften von Optionspreisen:

Wertobergrenze: (für alle $t \leq T$)

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q(\max(0, S_T - K) | \mathcal{F}_t) \\ &\leq e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q(S_T | \mathcal{F}_t) = S_t \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} P_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q(\max(0, K - S_T) | \mathcal{F}_t) \\ &\leq e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q(K | \mathcal{F}_t) = K e^{-r(T-t)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wertuntergrenze:

$$\begin{aligned}
C_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q(\max(0, S_T - K) | \mathcal{F}_t) \\
&\geq \max(0, \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)}(S_T - K) | \mathcal{F}_t)) = \max(0, S_t - Ke^{-r(T-t)})
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
P_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q(\max(0, K - S_T) | \mathcal{F}_t) \\
&\geq \max(0, \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)}(K - S_T) | \mathcal{F}_t)) = \max(0, Ke^{-r(T-t)} - S_t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Verschiedene Strikes:

$$C_t(K_1) \leq C_t(K_2) \text{ für } K_1 > K_2 \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\max(0, S_T - K_1) - \max(0, S_T - K_2) &\leq (K_2 - K_1) \text{ für } K_2 \geq K_1 \\
\Rightarrow C_t(K_1) - C_t(K_2) &\leq (K_2 - K_1)e^{-r(T-t)} \text{ für } K_2 \geq K_1
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$P_t(K_1) \geq P_t(K_2) \text{ für } K_1 > K_2 \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\max(0, K_2 - S_T) - \max(0, K_1 - S_T) &\leq (K_2 - K_1) \text{ für } K_2 \geq K_1 \\
\Rightarrow P_t(K_2) - P_t(K_1) &\leq (K_2 - K_1)e^{-r(T-t)} \text{ für } K_2 \geq K_1
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Arbitrage zwischen Call und Put mit dem gleichen Strike und gleicher Fälligkeit - die Call-Put-Parität:

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = P_t + S_t \Leftrightarrow P_t = C_t - S_t + Ke^{-r(T-t)} \tag{2.11}$$

Daraus folgt auch, dass Callprämien höher als Putprämien sind wenn $Ke^{-r(T-t)} < S_t$.

2.3 Optionsmodelle

Im Laufe der Zeit wurden immer neue Modelle entwickelt, mit denen Optionsprämien berechnet werden können. Begonnen vom Basismodell von

Black/Scholes wurde versucht, die Modelle zu verbessern um näher an die realen Marktverhältnisse zu gelangen.

Tobias Herwig [8] klassifiziert die verschiedenen Optionsmodelle folgendermaßen:

1. Parametrische Optionspreismodelle, zB
 - Black-Scholes
 - Heston
 - Stochastische Volatilität
2. Deterministische Volatilitätsmodelle, zB
 - PBS: Practitioner Black Scholes Model
 - DVF (deterministic volatility function) von Dumas et al (1998)
 - NTR: naive-trader-rule
3. Nichtparametrische Preismodelle, zB
 - Implied Tree Model
 - Weighted Monte Carlo approach von Avellaneda et al

In dieser Arbeit werden im weiteren das Black-Scholes Modell, das Heston-Modell und dessen Erweiterung von Heston und Nandi sowie eine modellfreie Methode vorgestellt und verwendet.

2.4 Berechnung der Parameter

Die Ermittlung der Parameter bei Verwendung des Black-Scholes-Modelles erfolgt über einfache Näherungsverfahren (Bisektion). Im Heston/Nandi-Modell sind mehr als ein Parameter unbekannt und es wurde als multivariates Näherungsverfahren der Nelder-Mead-Algorithmus angewandt.

Wird bei Verwendung für jeden Kontrakt einzeln die Volatilität berechnet, so ist die implizite Volatilität jenes σ , bei dessen Verwendung man dem Marktpreis am nächsten kommt. Wird über mehrere Kontrakte eine implizite Volatilität gesucht, muss eine Minimierungsfunktion definiert werden, die später noch erwähnt wird.

Die Überprüfung der Qualität des Modells kann auf verschiedene Arten erfolgen, etwa (siehe Bakshi,Cao,Chen, 1997 [2], S2006):

- Sind die implizit hergeleiteten Parameter konsistent mit denen aus gegebenen Zeitreihen?

- Out-of-Sample Fehler
- Hedging Error

Ich werde hier nur grafische In-the-sample Vergleiche der Qualität durchführen.

Kapitel 3

DAX

3.1 Allgemeines

Der Deutsche Aktienindex (DAX) ist der Leitindex des deutschen Aktienmarktes. Er enthält die 30 größten und umsatzstärksten Unternehmen an der Frankfurter Wertpapierbörse und repräsentiert so etwa 80 % des in Deutschland zugelassenen Börsenkapitals. Er wird als Performance- und Kursindex veröffentlicht, wobei üblicherweise vom Performanceindex die Rede ist. Die Dividenden aus den im DAX enthaltenen Aktien werden beim Performanceindex in den Index reinvestiert. Laut eigenen Angaben ist der DAX der drittgrößte Derivative-Index der Welt. Etwa an der EUREX, einer wichtigen Terminbörse die von der Deutschen Börse und der Swiss Exchange betrieben wird, werden Futures und Optionen auf den DAX gehandelt.

Für diese Arbeit wurden Optionen auf den DAX gewählt, da der DAX wie oben beschrieben ein sehr bedeutender Index ist und entsprechend auch die Optionen im Vergleich zu Einzelaktien ein hohes Handelsvolumen haben. Damit sollten die Preise den Markt sehr gut widerspiegeln, außerdem steht eine große Bandbreite an gehandelten Strikes zur Verfügung.

Eigentlich sind Indexoptionen in Optionsmodellen anders zu behandeln als einzelne europäische Aktien. Bei Dividendenauszahlungen fällt der Kurs einer Aktie um diesen Betrag. Im Fall des DAX werden diese Dividenden jedoch reinvestiert und die Optionen können daher wie europäische Aktienoptionen behandelt werden.

In den Grafiken 3.1 und 3.2 sind für den Zeitraum von etwa einem Jahr vor den beobachteten Optionspreisen die historischen Schlusskurse des DAX bzw. die Returns dargestellt.

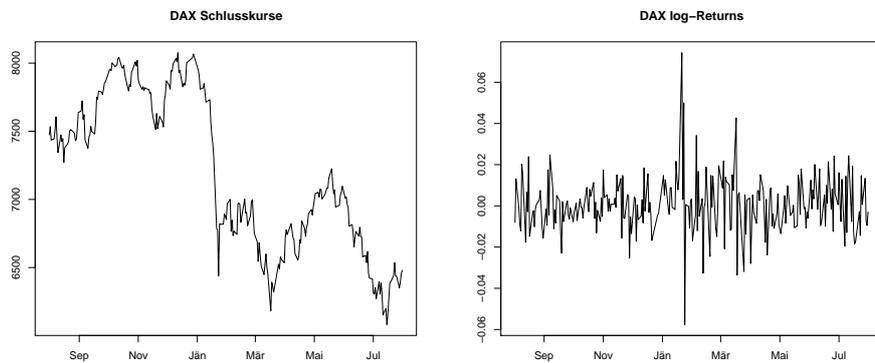


Abbildung 3.1: DAX 1 year closing values Abbildung 3.2: DAX log Returns values

3.2 Spezifikationen der DAX-Optionen

- **Kontraktwert:** EUR 5 pro Indexpunkt des Underlyings
- **Minimale Preisveränderung:** 0.1 Punkte = EUR 0.50
- **Kontraktmonate:** Es werden immer Kontrakte für die nächsten 3 Monate, die darauffolgenden 3 Quartalsmonate und die folgenden 4 Halbjahresmonate angeboten.
- **Letzter Handelstag:** (Final Settlement Day) ist der dritte Freitag jedes Fälligkeitsmonats wenn dies ein Handelstag ist, ansonsten der vorangehende Tag.
- **Täglicher Settlementpreis:** wird von der Eurex festgelegt. Der tägliche Settlementpreis für Aktienindexoptionen wird mittels Black/Scholes 76 bestimmt. Der Underlying Referenzpreis ist der tägliche Settlement Preis der Eurex Futures basierend auf dem jeweiligen Index für Indexoptionskontrakte. (siehe Eurex Clearing Conditions) [1]

Die minimale Preisänderung von 0.1 Punkten muss bei der Betrachtung der far-OTM Optionen beachtet werden. Ein Optionspreis von EUR 0.75 müsste korrekterweise als 0.15 Punkte angegeben werden, wird allerdings auf 0.2 gerundet.

In Tabelle 3.1 sind die Anzahl der handelbaren Strikes je Kontraktmonat sowie die jeweilige Ausübungsdatum aufgelistet. Man kann erkennen, dass die Anzahl der gehandelten Strikes mit vorgeschrittener Laufzeit höher wird.

Die Tatsache, dass bei der Bestimmung des Settlementpreises Futures als Underlying verwendet werden, steht im Gegensatz zur Spezifikation der

Kontraktmonat	Anzahl Strikes	Expiry
Jun.08	62	20.06.2008
Jul.08	61	18.07.2008
Aug.08	55	15.08.2008
Sep.08	74	19.09.2008
Dez.08	68	19.12.2008
Mar.09	50	20.03.2009
Jun.09	39	19.06.2009
Dez.09	40	18.12.2009
Jun.10	21	18.06.2010
Dez.10	21	17.12.2010

Tabelle 3.1: Kontrakte 13/06

DAX-Optionen, die den DAX Index als Underlying definiert. Gründe für die Verwendung der Futures könnten (laut Wilkens [15], S242) geringe Transaktionskosten, fehlendes Tracking Risiko und Möglichkeiten des Short Verkaufs sein.

3.3 Verwendete Daten

Welche Optionspreise verwenden?

In vielen Publikationen werden Intraday Preise oder Closing Preise verwendet, da sie den realen Marktpreis zur jeweiligen DAX Quotierung zum Handelszeitpunkt angeben. Allerdings sind damit nicht immer für alle Kontrakte Preise verfügbar.

Am Ende des Handelstages werden von der Eurex Settlementpreise für alle verfügbaren Strikes aller gehandelten Kontrakte veröffentlicht. Market Maker sorgen beim Börsenhandel dafür, dass bei Anfrage sowohl Geld- als auch Briefkurs für eine Option notiert sind. Die Market-Maker stellen sicher, dass Kauf- und Verkauforder immer ohne Verzögerung zu irgendeinem Kurs ausgeführt werden können und sorgen so für zusätzliche Liquidität an Markt. Damit ergibt sich auch, dass auch für nicht sehr liquide Kontrakte Settlementpreise veröffentlicht werden. Allerdings können diese bei gehandelten Kontrakten von den tatsächlich erzielten Preisen getätigter Trades abweichen und geben so die Markterwartung der Händler nicht genau wieder.

In vielen Publikationen wird angemerkt, dass Optionen die nicht nahe am Geld sind auch nicht bedeutend gehandelt werden und daher nur ATM-Optionen verwendet werden sollten, für die Close-Preise verfügbar sind.

Nagel [11] spricht dieses Problem ebenfalls an. Da er OTM Optionen betrachten möchte, entschließt er sich für die Verwendung von Settlementpreisen, da diese für alle verfügbaren Strikes festgesetzt werden. Der Nachteil ist dabei entsprechend, dass nicht alle diese Preise echte Handelspreise sind. Nagel zeigt in diesem Zusammenhang aber, dass die Settlementpreise die gleichen Charakteristika zeigen wie echte Optionspreise in vielen Publikationen.

Ich tu es Nagel und anderen Publikationen gleich und verwende Settlementpreise.

Kalender- oder Handelstage?

Allgemein ist es üblich, bei Berechnungen mit Börsenpreisen Handelstage zu verwenden. Auch für die Volatilität ist das durchaus sinnvoll, da die beobachteten täglichen Änderungen der Preise nur an Handelstagen möglich sind. Andererseits kann es auch an Nicht-Handelstagen Informationen geben, die die Preise beeinflussen, auch Zinsraten basieren auf Kalendertagen. Welche man nun verwendet, kann durchaus bei kurzläufigen Optionen einen Unterschied machen, wie Studien zeigen (see eg Hafner/Wallmeier, 2001). Ich habe mich für die Verwendung von Handelstagen entschlossen und verwende hierbei standardmäßig 252 Tage, wie es auch zB Wilkens [15] macht.

Risikoloser Zinssatz

Als risikoloser Zinssatz wird standardmäßig der Euribor (European Interbank Offered Rate) verwendet, verfügbar für maximal 12 Monate voraus. Da ich keine Optionen betrachten werde, die darüberhinaus laufen, ist dies ausreichend. Für die Berechnung notwendige Zinssätze werden aus den vorhandenen Euribor-Raten linear interpoliert.

Dividenden

Wie schon erwähnt werden beim DAX Index die ausbezahlten Dividenden wieder in den Index investiert, womit die Dividenden den Kurs also nicht beeinflussen sollten. Trotzdem zeigt sich in der Praxis vor allem im Zeitraum Ende Frühling bzw. Anfang Sommer, in denen viele Firmen ihre Dividendenauszahlungen tätigen, Unterschiede zwischen Impliziten Volatilitäten von Puts und Calls. Hafner und Wallmeier (2001) [13] haben dazu eine Korrektur entwickelt, die auch von Fengler et al. (2003b) beschrieben wird. Ich verwende hier allerdings nur Werte die nicht in den oben genannten Zeitraum fallen und werde daher Dividenden nicht weiter berücksichtigen.

Verwendete Tage

Für den Vergleich der berechneten Volatilitäten wurden zwei verschiedene Tage ausgewählt an denen die Optionen betrachtet wurden. Die Tage wurden so gewählt, dass sie noch vor dem Beginn der Wirtschaftskrise im September 2008 lagen, da nach der Lehman Pleite die Börsen für lange Zeit kein "normales" Verhalten zeigten.

Perioden und Strikes

Je weiter entfernt Strikes vom aktuellen Underlyingpreis sind, desto geringer ist meist auch das Handelsvolumen. DAX Optionen für die beobachteten Zeitpunkte sind für Strikes ab 1600 vorhanden, wirklich gehandelt wurden allerdings erst Optionen mit Strikes ab 4000. Deshalb erfolgt auch eine Filterung nach der Moneyness. Die Moneyness gibt an wie weit ein Strike vom ATM-Wert, also von S_t entfernt ist und kann auf verschiedene Arten angegeben werden. Ich verwende hier die Definition

$$\begin{aligned} \text{MoneynessCall} &= \frac{S_t}{K} \\ \text{MoneynessPut} &= \frac{K}{S_t} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Somit ergibt sich:

ATM = at-the-money (Moneyness um 1)

OTM = out-the-money (Moneyness < 1)

ITM = in-the-money (Moneyness > 1)

Wilkins verwendet in seiner Studie nur Optionskontrakte mit einer Moneyness $\in [0.75, 1.25]$. Herwig verwendet Kontrakte mit Moneynessratios zwischen 0.85 und 1.15, ich habe mich ebenso für diesen Bereich entschieden.

Je weiter Optionen in die Zukunft gehen, desto geringer ist das Handelsvolumen und wenig aussagekräftig sind die Ergebnisse. Außerdem sind auch für langläufige Optionen weniger Strikes handelbar als für nahe Laufzeiten, siehe Grafiken 3.3 und 3.4 und basierend auf den jeweiligen Volumina wurden Perioden ausgeschlossen: 13/06 nur bis Dez 08, 22/08 nur bis Mar 09.

Bakshi, Cao, Chen [2] verwenden in ihren Untersuchungen keine Optionen die eine Restlaufzeit von weniger als sieben Tagen haben, da "*they may induce liquidity-related biases*". Nagel eliminiert Optionen mit Restlaufzeiten mit weniger als 14 Tagen. Ich werde ebenso Kontrakte, die nur noch weniger als sieben Tage laufen nicht betrachten.

Historische Vola von 13/6 bis	
Jul 08	0.2180931
Aug 08	0.2017330
Sep 08	0.2284768
Dez 08	0.4568148

Tabelle 3.2: Historische Volas 1306

Historische Vola von 22/8 bis	
Sep 08	0.286971
Oct 08	0.5288411
Nov 08	0.5528062
Dez 08	0.5545572
Mar 09	0.4837476

Tabelle 3.3: Historische Volas 2208

3.4 Historische Volatilität

Wie schon weiter oben erwähnt, ist die einfachste Methode der Volatilitätsberechnung die der historischen. Ausgehend von den beobachteten Tagen wurden die Volatilitäten der Schlusskurse des DAX bis zum Fälligkeitsdatum berechnet und sind in Tabellen 3.2 und 3.3 ersichtlich.

Hier kann man schon deutlich sehen, wie die Lehman Pleite, mit der die Wirtschaftskrise im September 2008 begann, ab Oktober die Volatilitäten deutlich hebt. Schon an diesem Punkt weiß man, dass die später berechneten impliziten Volatilitäten zumindest für diese Perioden den realisierten nicht nahekommen können.

3.5 Berechnungen

Schon oft wurde gezeigt, dass die Annahme der normalverteilten Returns in der Realität nicht stimmt, da große Negativ-Ereignisse häufiger auftreten als große positive Sprünge und damit die Verteilung linksschief ist. Betrachtet man das Histogramm der DAX>Returns in Grafik 3.5 ist ein negativer Median und ein positiver Mittelwert erkennbar und damit bereits Hinweise auf diese schiefe Verteilung. Außerdem kann hier auch eine Kurtosis erkannt werden, die nicht der Normalverteilung entspricht.

Berechnete Momente für die Periode eines Jahres vor dem 13/06/08:

Volatilität: 0.2107248

Skewness: 0.5237203

Kurtosis: 5.260886

Alternativ wurde die Volatilität als EWMA berechnet. Dabei wurde $\lambda = 0.94$ angenommen und als Startwert die Volatilität auf herkömmliche Weise mit den Werten des vorangegangenen Jahres berechnet (Startwert = 0.1401928). Es ergibt sich mit 13/06/08 ein Vola-Wert von 0.1802198. In Grafik 3.6 wird gezeigt, wie sich diese täglich berechneten Vola-Werte entwickeln. Die zwei Tage mit starken Kursabfällen lassen die Vola sofort deutlich steigen, es dauert allerdings nur einige Tage, bis der Einfluss wieder nachlässt und sich die Vola auf einem Niveau wie davor befindet.

Diese Berechnungsmethode liefert für den 13/06 eine Volatilität von 0.1793011.

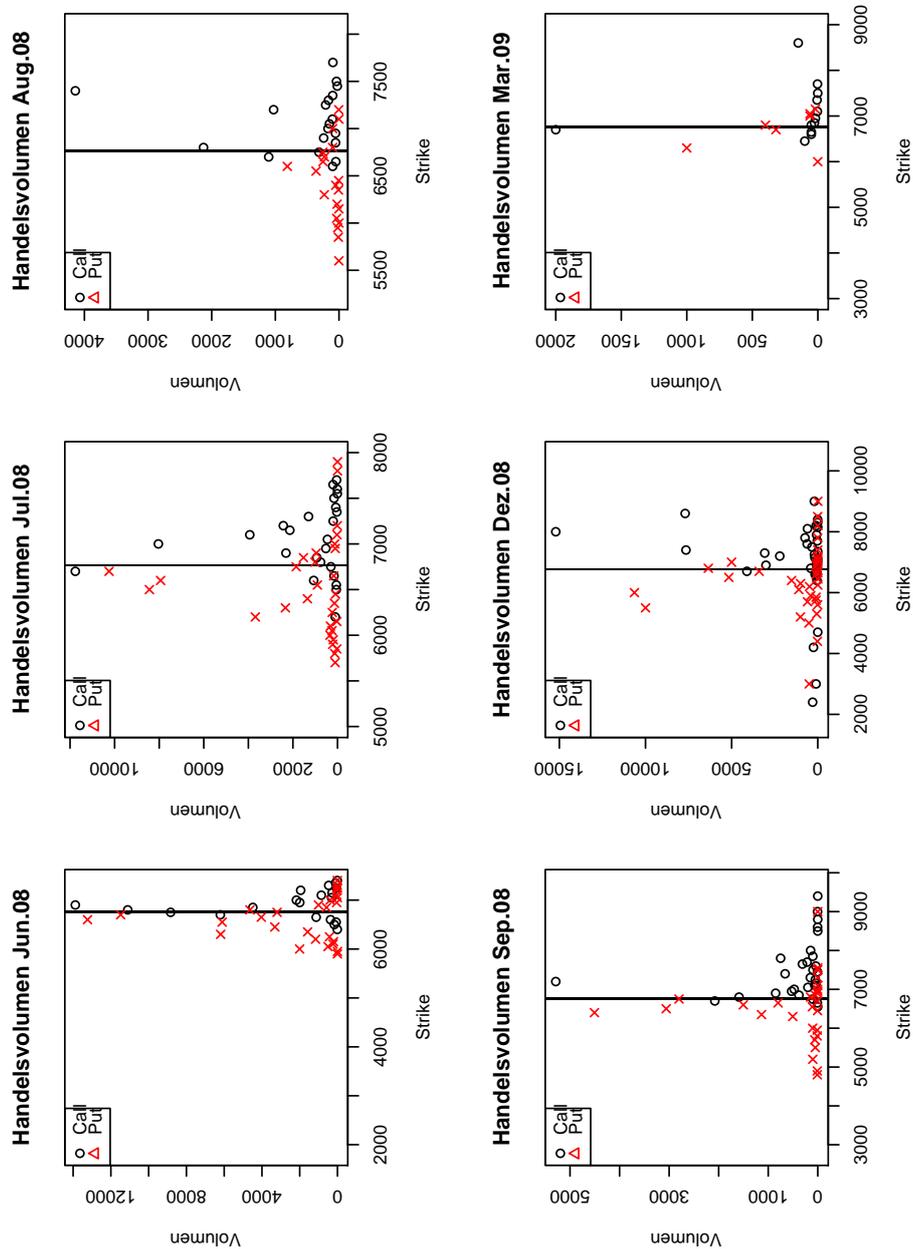


Abbildung 3.3: Handelsvolumina DAX-Optionen vom 13/06/2008 der ersten sechs gehandelten Monatskontrakte, alle handelbaren Strikes, Vertikale = ATM

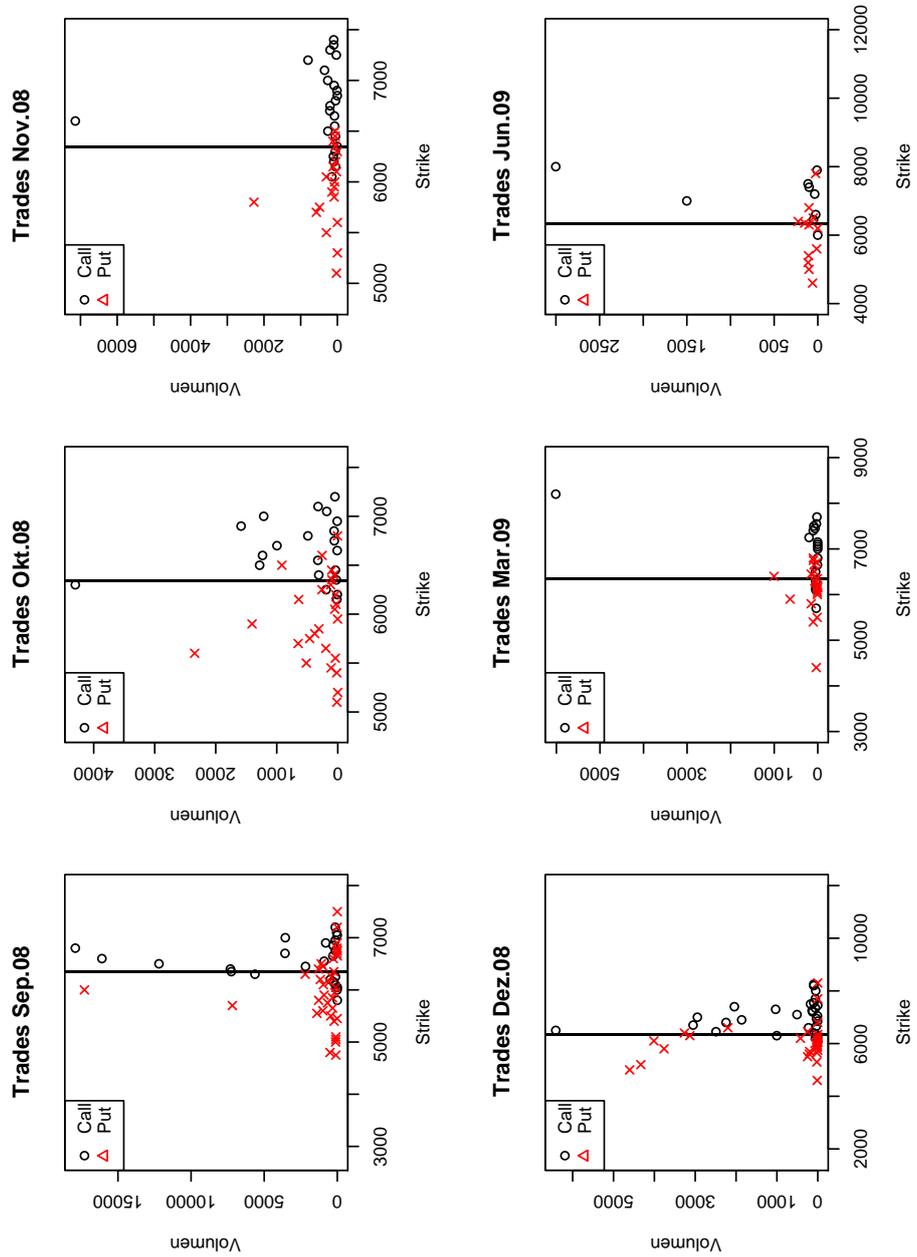


Abbildung 3.4: Handelsvolumina DAX-Optionen vom 22/08/2008 der ersten sechs gehandelten Monatskontrakte, alle handelbaren Strikes, Vertikale = ATM

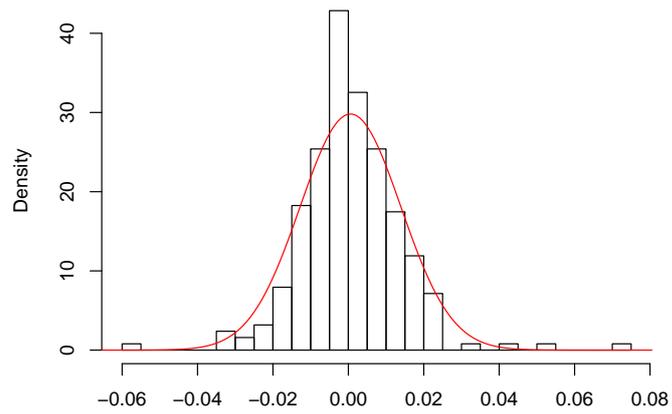


Abbildung 3.5: Histogramm DAX Log-Retuns

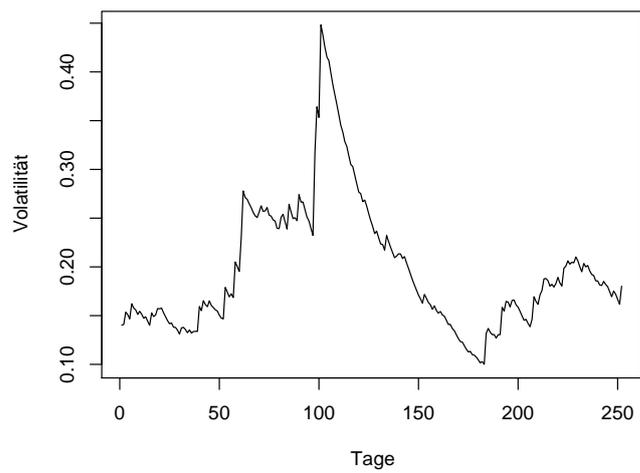


Abbildung 3.6: DAX EWMA-Volatilität

Kapitel 4

Black-Scholes

1973 veröffentlichten Fischer Black und Myron Scholes den bisher für die Finanzwelt wichtigsten Ansatz für die Bepreisung von Optionen. Sie präsentierten ein Modell, mit dem theoretisch faire Preise für Calls und Puts europäischer Aktienoptionen im stetigen Zeitrahmen durch geschlossene Formeln einfach berechnet werden können.

4.1 Theorie

Zur Herleitung der Formeln gibt es verschiedene Herangehensweisen. Hier soll nur in Grundzügen der Weg über die risikoneutrale Bewertung dargestellt werden (siehe auch Hahnenstein/Wilkens/Röder[6]). Risikoneutral bedeutet in diesem Zusammenhang, dass das Modell der Berechnung des theoretisch richtigen Barwertes in einem Rahmen erstellt ist, in dem die Annahme herrscht, dass alle Wirtschaftssubjekte risikoneutral sind.

Zunächst wird der Aktienkurs modelliert: Der Verlauf eines Aktienkurses wird mit Hilfe eines stochastischen Prozesses beschrieben. Es wird unterstellt, dass die Rendite des Aktienkurses S folgendem Prozess folgt:

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dz \quad (4.1)$$

bzw. der Aktienkurs folgendem Prozess (Geometrische Brownsche Bewegung) folgt:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz \quad (4.2)$$

μ ist der Drift, der hier die erwartete kontinuierlich verzinsten Rendite pro Jahr darstellt. σ ist die Volatilität des Underlyings, z ein Wiener Prozess.

Mit Hilfe des Ito-Lemmas kann der Prozess für $\ln(S_t)$ beschrieben werden als

$$d\ln(S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (4.3)$$

Daraus kann abgeleitet werden, dass der logarithmierte Aktienkurs am Verfallstag der Option normalverteilt ist mit

$$\ln(S_t) \sim N \left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right) \quad (4.4)$$

Der Aktienkurs ist also log-normalverteilt.

Bei der risikoneutralen Bewertung wird angenommen, dass die Gleichung keine Variablen enthält, die von den Risikopräferenzen der Investoren beeinflusst werden. Hier finden sich als Variablen der aktuelle Aktienkurs, die Zeit, die Volatilität und der risikofreie Zinssatz, alle sind unabhängig von Risikopräferenzen.

Man gelangt zu folgenden Formeln für die Berechnung der Prämien für Calls C bzw. Put-Optionen P :

$$\begin{aligned} C &= S\phi(d_1) - Ke^{-rt}\phi(d_2), \\ P &= Ke^{-rt}\phi(-d_2) - S\phi(-d_1), \\ d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{t} \end{aligned} \quad (4.5)$$

mit ϕ als kumulative Funktion der Standardnormalverteilung.

Bedingungen für die risikoneutrale Bewertung sind:

- Die Aktie folgt einer Geometrischen Brownschen Bewegung
- Ein risikoloses Wertpapier mit konstanter sicherer stetiger Verzinsung r wird gehandelt
- die Wertpapiere sind beliebig teilbar
- Leerverkäufe sind zugelassen
- keine Dividenden
- kontinuierlicher Handel
- keine Transaktionskosten und Steuern

- risikofreie Arbitrage ist nicht möglich

In der Praxis bestehen diese Annahmen leider nicht:

- Returns sind in Finanzzeitreihen oft nicht normalverteilt sondern haben schwere Enden, große Änderungen kommen in der Realität häufiger vor als dies in der Normalverteilung geschieht. Speziell im Aktienbereich sind die Verteilungen oft linksschief.
- Returns sind nicht unabhängig. Oft ist zwar in der Zeitreihe der Returns keine Autokorrelation zu erkennen, doch verwendet man absolute Werte oder quadratische Returns werden Autokorrelationen sichtbar.
- Volatility Cluster: großen Änderungen folgen oft weitere große Änderungen

Je länger die beobachtete Zeitreihe ist, desto näher kommt die Verteilung der Returns einer Normalverteilung.

Obwohl also hinlänglich bekannt ist, dass die Annahmen des Modells in der Realität nicht zutreffen, ist es wohl dank der einfachen Anwendung trotzdem das Basismodell der Optionstheorie und findet auch in der Praxis seinen Platz.

In den Grafiken 4.1 und 4.2 sind beispielhaft die Abhängigkeiten der Optionsprämien für Calls und Puts von der Volatilität und dem Strike skizziert. Rot gekennzeichnet ist dabei der ATM-Linie. Sowohl bei Calls als auch Puts bildet der ATM-Preis eine deutliche Zäsur: Call-Optionen haben für Strikes die größer als der Underlying-Preis sind kaum einen Wert, besonders wenn auch die Volatilität niedrig ist und daher nicht mehr damit gerechnet wird, dass die Option ins Geld kommt. Entsprechend umgekehrt verhält es sich mit Puts. Bei beiden steigt der Wert der Option mit zunehmender Volatilität.

4.2 Praxis

Wie schon erwähnt können aus Optionsprämien mithilfe von Optionsmodellen Volatilitäten ermittelt werden, die den aktuellen Markterwartungen entsprechen sollen. Sind alle Parameter der obigen Formeln bis auf σ bekannt, so kann man etwa mit der Bisektions-Methode oder Newton-Raphson-Approximation zur Volatilität gelangen.

Die einfachste Methode aus Optionen eine Volatilität abzuleiten ist es, sie aus den gehandelten ATM-Kontrakten zu errechnen. Vorteil ist die Unkompliziertheit und dass der ATM-Strike üblicherweise der meistgehandelte Kontrakt ist und damit die Preise die Markterwartung am besten wiedergeben.

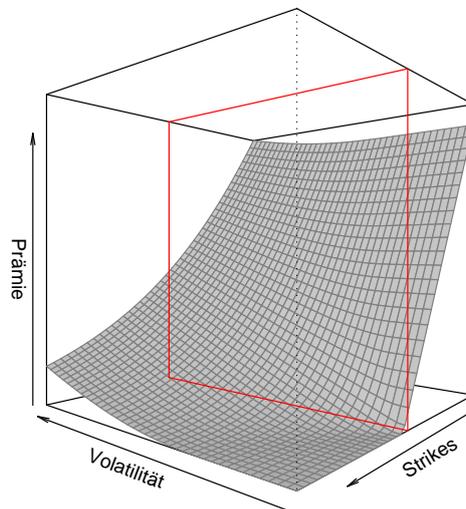


Abbildung 4.1: Black-Scholes Call Prämien in Abhängigkeit von Volatilität und Strike 13/06

Poon nennt außerdem noch die Unverzerrtheit des ATM-Kontraktes (siehe Poon [12], Kapitel 9 und 10.2).

Aus der Annahme einer konstanten Volatilität sollte es genügen, aus einem einzelnen Kontrakt die implizite Volatilität zu berechnen um über die zukünftige Änderung des Underlyings im Kontraktzeitraum Auskunft zu erhalten, doch dem ist nicht so:

4.2.1 Smile

Wenn von IV-Kurven gesprochen wird, fällt unweigerlich der Begriff des Smiles bzw. des Smirks. Werden für die einzelnen Optionskontrakte jeweils implizite Volatilitäten betrachtet, haben die berechneten Kurven oft die Form eines Smiles. Das Minimum dieser Kurve befindet sich typischerweise leicht rechts des ATM-Strikes. Außerdem ist die Kurve rechts des Minimums oft steiler als links davon, somit ergibt sich die oft benutzte Bezeichnung des “Smirks” für eine Kurve von impliziten Volas eines Kontraktmonats über die verschiedenen Strikes.

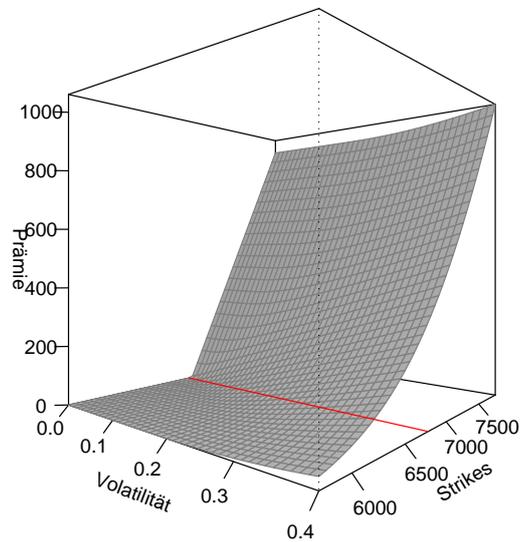


Abbildung 4.2: Black-Scholes Put Prämien in Abhängigkeit von Volatilität und Strike 13/06

Gründe für Smiles sind:

- unvollständiger Markt (damit fehlende Duplikationsmöglichkeiten), unvollkommener Markt (Transaktionskosten, Steuern)
- speziell für kurz laufende Optionen können sehr kleine Zeitwerte auftreten (nur noch innerer Wert), gemeinsam mit Rundungsfehlern der Prämien und Transaktionskosten (siehe Wilkens [15])
- Verteilungsannahme des Underlyings sind nicht realitätstreu

Ein symmetrischer Smile bedeutet, dass das Black-Scholes Modell ITM- und OTM-Optionen unterbewertet bzw. ATM-Optionen überbewertet. Würden für ITM- und OTM-Optionen die implizite Volatilität (IV) verwendet, die sich beim ATM-Kontrakt ergibt, so ergäben sich niedrigere Preise als die tatsächlich am Markt gehandelten.

Der Hauptgrund dieses Smiles ist die empirische Renditeverteilung, die im Vergleich zur Normalverteilung steilgipflig ist und schwerere Enden hat, also eine positive Kurtosis. Seit dem Börsencrash im Jahr 1987 werden allerdings

bei Finanztiteln eher linksschiefe Renditeverteilungen beobachtet. Negative Extremereignisse („Crashes“) werden als wahrscheinlicher angesehen als Booms. Derman [4] erklärt den Smirk damit, dass OTM-Puts als relativ billige Absicherung vor Crashes sehr beliebt sind, was sie im Vergleich zu OTM-Calls teurer macht und die IV anhebt. Ist die Schiefe sehr ausgeprägt, kann sich sogar ein monoton fallender Volasmile ergeben.

Es wurde auch gezeigt, dass Smile-Kurven für Indexoptionen üblicherweise stärker gekrümmt sind als jene von einzelnen Aktienoptionen. Gründe dafür geben Bakshi/Kapadia/Madan [3] oder Branger/Schlag an.

Da die implizite Volatilität in der Nähe von ATM am niedrigsten ist, kann es sinnvoll sein, bei Verwendung der IV in weiteren Risikorechnungen auch andere Strikes zu betrachten, um damit eine höhere IV zu erhalten und in der Folge auf der sicheren Seite zu sein.

4.2.2 Zeitliche Struktur

In Grafik 4.3 ist neben des Smiles auch eine zeitliche Struktur zu erkennen. Je länger die Restlaufzeit ist, desto flacher wird die Smile-Kurve. Rubinstein [14] zeigte dies schon 1985.

Der Wert einer Option setzt sich aus dem intrinsischen (inneren) Wert und dem Zeitwert zusammen. Der intrinsische Wert $C^{(intr)}$ ist der Wert der Option, wenn sie zum aktuellen Zeitpunkt t ausgeübt würde und die zukünftige Entwicklung des Underlyings keine Rolle mehr spielt:

$$C_t^{(intr)} = \max(0, S_t - K)$$

$$P_t^{(intr)} = \max(0, K - S_t)$$

Je näher der Ausübungszeitpunkt kommt, desto höher wird der innere Wert und entsprechend kleiner der Zeitwert. Die Volatilität beeinflusst nur den Zeitwert, daher verringert sich der Einfluss der Volatilität je näher der Ausübungszeitpunkt rückt (siehe Hull [9], S357).

Jedoch wurden in manchen Arbeiten auch schon gegenteilige Effekte gezeigt, also steigende Vola bei steigender Restlaufzeit.

4.3 Berechnungen

Bei der Ermittlung der impliziten Volatilitäten mit Bisektionsmethode und Newton-Raphson ergab sich, dass innerhalb eines begrenzten Strike-Bereichs

beide Berechnungsarten gute und fast gleiche Ergebnisse lieferten. Verwendet man die beiden Methoden bei Kontrakten mit geringer Restlaufzeit und Strikes, die sich weit OTM oder ITM befinden, erweist sich die Bisektion als stabiler und liefert vernünftige Ergebnisse. Aufgrund der Eingrenzung der verwendeten Strikes spielt dies allerdings keine Rolle.

Da nicht alle Strikes für alle Fälligkeiten gehandelt wurden, habe ich die Volatilitäten für vorhandene Kontrakte berechnet und für eine bessere Vergleichbarkeit und grafische Analyse für fehlende Kontrakte interpoliert. Für die Berechnung theoretischer Preise von Optionskontrakten, die nicht gehandelt werden, ist diese Methode durchaus auch in der Praxis üblich.

In Grafik 4.3 sind die für jeden einzelnen Kontrakt berechneten impliziten Volas dargestellt. Für Calls wurde mit Grafik 4.4 eine dreidimensionale Darstellung gewählt. Es ist für nahe Laufzeiten wie oben beschrieben ein Smirk zu erkennen der mit zunehmender Restlaufzeit flacher wird bzw. verschwindet. Das Minimum der Kurven liegt bei allen Laufzeiten rechts vom ATM. Außerdem ist erkennbar, dass für Puts die Ergebnisse höher sind als für Calls.

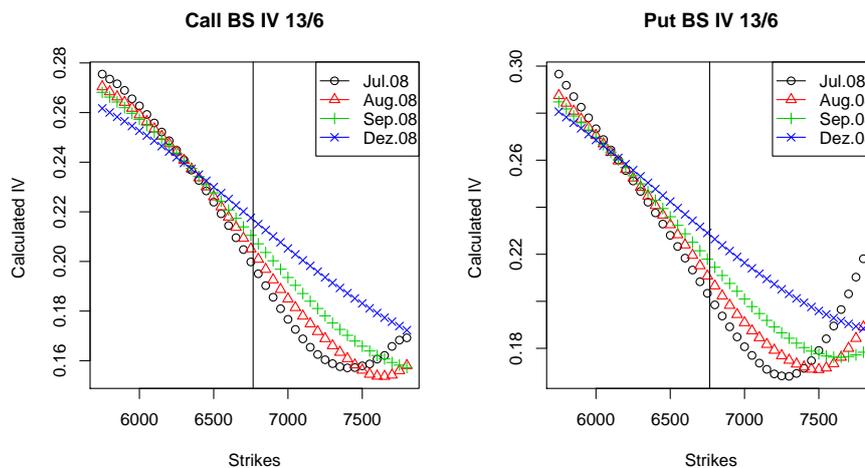


Abbildung 4.3: Black-Scholes IV einzelner Kontrakte 13/06

Für die Praxis ist allerdings üblicherweise eine einzelne Volatilität für eine bestimmte Laufzeit nötig. Die naheliegendste Lösung ist die Berechnung am ATM-Strike. Da üblicherweise kein Strike gehandelt wird, der genau dem ATM entspricht, wurde für die Berechnung zwischen den zwei um ATM nächstliegenden Put- bzw. Call-Strikes linear interpoliert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

Schon in Grafik 4.3 zeigt sich, dass man bei gleichen Strikes für Calls und Puts unterschiedliche Volatilitäten erhält. Es ist durchaus üblich, im Zu-

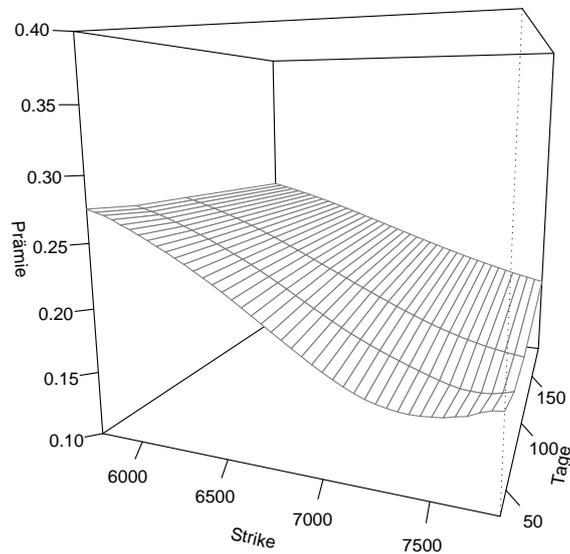


Abbildung 4.4: Black-Scholes IV Surface Call 13/06

sammenhang mit der Berechnung impliziter Volas nur OTM-Kontrakte zu verwenden, damit wird jeder Strike nur einmal betrachtet. Ein wesentlicher Grund dafür ist, dass OTM-Kontrakte häufiger gehandelt werden als ITM-Optionen, wie auch in Grafik 3.3 erkennbar. Ab hier werde ich nur noch OTM-Kontrakte betrachten.

Zu Testzwecken wurde aus den berechneten ATM-Volas der verschiedenen Laufzeiten der Mittelwert genommen und mit diesem Wert theoretische Prämien berechnet. Vergleicht man diese mit den tatsächlichen Marktpreisen ergeben sich die in Grafik 4.5 dargestellten Differenzen. Für Puts ergaben

13/06		22/08	
Jul 08	0.2008347	Sep 08	0.1998221
Aug 08	0.2077358	Oct 08	0.2083961
Sep 08	0.2146035	Nov 08	0.2121920
Dez 08	0.2247749	Dez 08	0.2148194
		Mar 09	0.2143179

Tabelle 4.1: BS ATM Volas

sich Prämien, die über dem Marktpreis liegen, für Calls lagen die errechneten Preise unter den tatsächlichen.

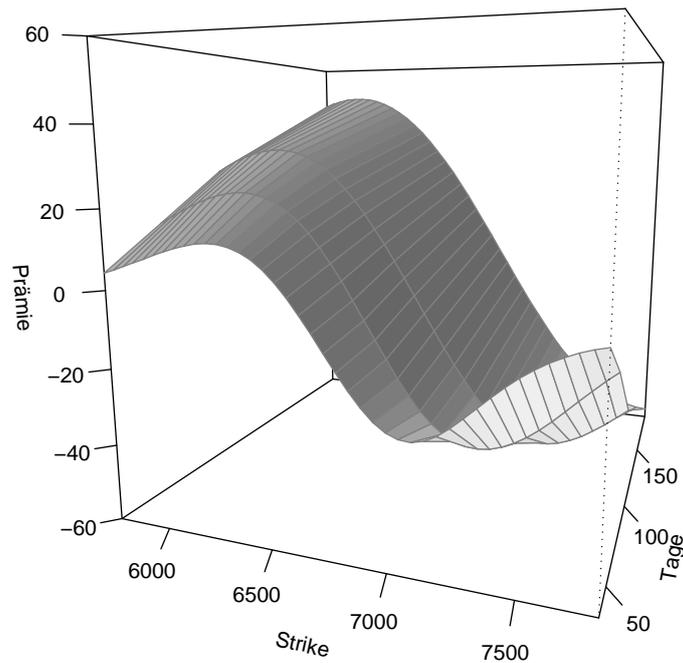


Abbildung 4.5: Black-Scholes Call Differenzen 13/06

Wird über mehrere Kontrakte eine implizite Vola gesucht, muss eine Minimierungsfunktion definiert werden. Es wurden folgende gewählt und die resultierenden σ miteinander verglichen:

$$\min1 = \sum_i \omega_i (p_i^{\text{market}} - p_i^{\text{estim}})^2$$

$$\min2 = \sum_i \omega_i (\text{abs}(p_i^{\text{market}} - p_i^{\text{estim}}))$$

$$\min3 = \max_i \{ \omega_i (\text{abs}(p_i^{\text{market}} - p_i^{\text{estim}})) \}$$

$$min4 = \sum_i \omega_i \left(abs \left(\frac{p_i^{market} - p_i^{estim}}{p_i^{market}} \right) \right)$$

mit i = Laufindex der Kontrakte

ω_i = Gewichtung der einzelnen Kontrakte

p^{market} = Marktpreis der Option

p^{estim} = theoretisch berechneter Preis der Option bei Verwendung der berechneten IV

Da die Berechnungen für die verschiedenen Kontraktmonate einzeln angestellt werden, also keine gemeinsame IV für mehrere Kontraktmonate errechnet werden soll, sind die Kontrakte in unserem Fall die Strikes je Kontraktmonat. Im einfachsten Fall werden diese Strikes gleichgewichtet, später werden noch alternative Gewichtungen betrachtet.

Bei den Funktionen 1 bis 3 erhalten hochpreisige Optionen mehr Einfluss als billige, was gleichsam einen stärkeren Einfluss der Optionen die nahe dem Geld sind bedeutet als dies OTM-Optionen haben. Bei Funktion 1 wird dieser Effekt noch verstärkt. Würden auch ITM-Optionen verwendet, hätten diese den größten Einfluss. Bei Funktion 4 haben die Strikes noch am ehesten alle etwa den gleichen Einfluss auf die Wahl des σ .

In den Grafiken 4.6 und 4.7 ist beispielhaft abgebildet, wie sich die Preise der Optionen relativ ändern, wenn die Volatilität ansteigt. Es zeigt sich deutlich, wie sensibel die Optionspreise im far-OTM-Bereich auf Änderungen reagieren. Bei Anwendung der Minimierungsfunktion Min4 wird somit dem far-OTM-Bereich eine größere Bedeutung eingeräumt als in den anderen Minimierungsfunktionen.

In den Tabellen 4.2 und 4.3 sind die Ergebnisse bei Gleichgewichtung der verschiedenen Strikes je Laufzeit aufgelistet. Auffällig ist, dass die σ bei Verwendung von Min4 deutlich niedriger sind als bei den anderen Minimierungsfunktionen, was sich wie folgt erklären lässt: In Grafik 4.3 zeigen sich für Juli-Kontrakte OTM-Calls σ in der Höhe von etwa 0.16 (einzelne Markt-Volatilität), σ der OTM-Puts liegen in Bereichen zwischen 0.25 bis 0.3. Werden die relativen Fehler betrachtet, "dürfen" die absoluten Fehler bei Puts daher größer sein als bei Calls, so ergibt sich der größere Einfluss der OTM-Calls. In den Grafiken 4.6 und 4.7 zeigt sich bei Calls diese größere Sensitivität dieses Falles. Wird ein σ angenommen, das zwischen den einzelnen σ der OTM-Call und OTM-Put liegt, so ist der relative Fehler bei Calls (rechte Grafik: Fehler bei Volatilerhöhung) deutlich höher als bei Puts (linke Grafik: Fehler bei Volatilenkung).

In Grafik 4.8 sind die Ergebnisse für die verschiedenen Minimierungsfunk-

Monat	Min 1	Min 2	Min 3	Min 4
Jul 08	0.1986015	0.1902649	0.2009421	0.1621393
Aug 08	0.2030175	0.1968138	0.2067012	0.1583180
Sep 08	0.2075134	0.2002733	0.2109980	0.1702347
Dez 08	0.2160079	0.2101012	0.2171342	0.2028631

Tabelle 4.2: BS IV Gleichgewichtung 13/06

Monat	Min 1	Min 2	Min 3	Min 4
Sep 08	0.2006650	0.1953755	0.2033614	0.1818764
Oct 08	0.2070746	0.2039584	0.2097957	0.1761232
Nov 08	0.2101041	0.2049673	0.2129312	0.1837611
Dez 08	0.2114904	0.2075904	0.2147367	0.1896449
Mar 09	0.2119153	0.2057097	0.2137567	0.2016044

Tabelle 4.3: BS IV Gleichgewichtung 22/08

tionen aufgezeichnet. Mit der historischen Volatilität können jedoch nur die ersten drei Kontraktmonate verglichen werden: bei diesen zeigt sich tendenziell ein höheres realisiertes σ als durch die Optionen vorhergesagt. Für 22/08 zeigen sich kaum Unterschiede in der Struktur der Fehler, daher wurde auf eine Grafik hier verzichtet.

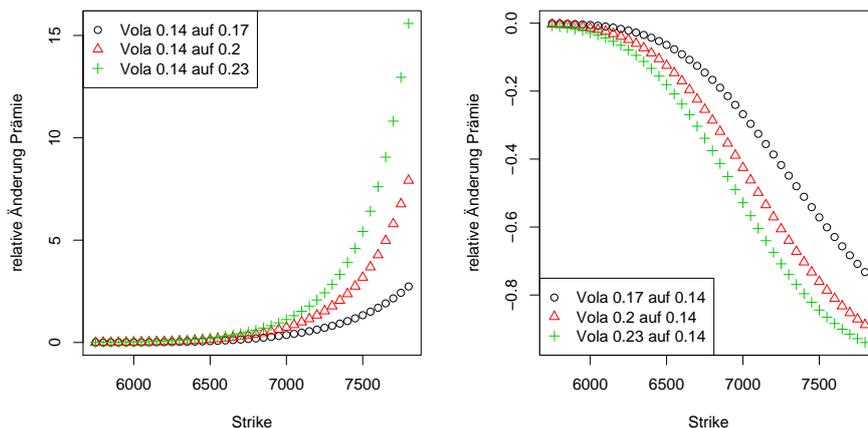


Abbildung 4.6: Black-Scholes relative Änderung Call-Prämien 13/06

In Grafik 4.9 sind die Marktpreise im Vergleich zu den mittels Min1 berechneten Prämien dargestellt, Grafik 4.10 und 4.11 zeigen die Differenzen.

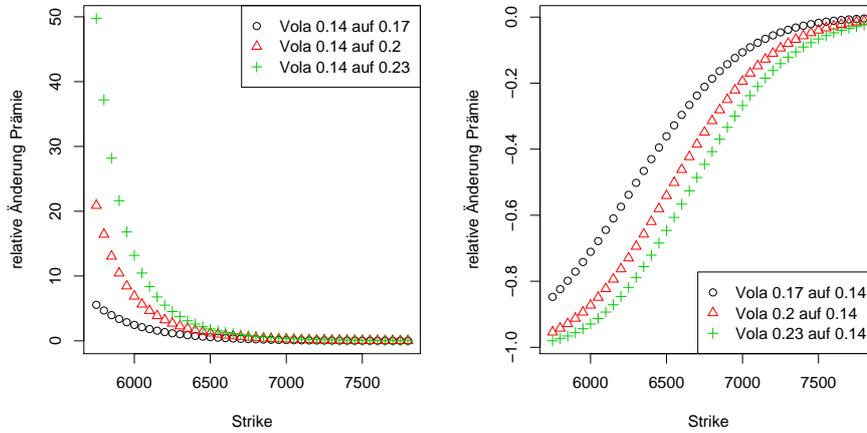


Abbildung 4.7: Black-Scholes relative Änderung Put-Prämien 13/06

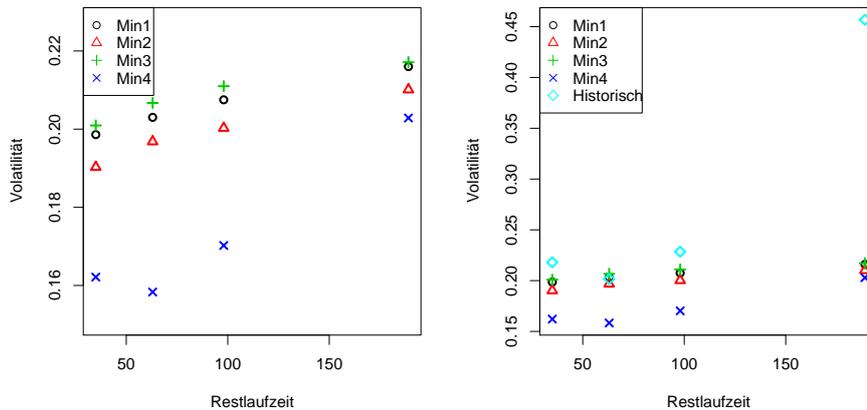


Abbildung 4.8: Black Scholes IV Gleichgewichtung 13/06

Es zeigen sich für zeitnah auslaufende Kontrakte sehr kleine Fehler, obwohl der zuvor betrachtete Vola-Smile sehr steil war und man daher große Fehler bei Verwendung eines einzelnen σ erwartet hätte. Jedoch steigt der Anteil des inneren Wertes in der Prämie je kürzer die Restlaufzeit ist und der Einfluss der Vola sinkt entsprechend.

Für Strikes links vom ATM sind die theoretischen Preise durchwegs niedriger als die tatsächlichen Marktpreise, was bedeuten würde dass die OTM-Put-Optionen am Markt zu hoch gehandelt würden. Rechts vom ATM zeigt sich

umgekehrt die zu hohen theoretischen Preise für OTM-Calls.

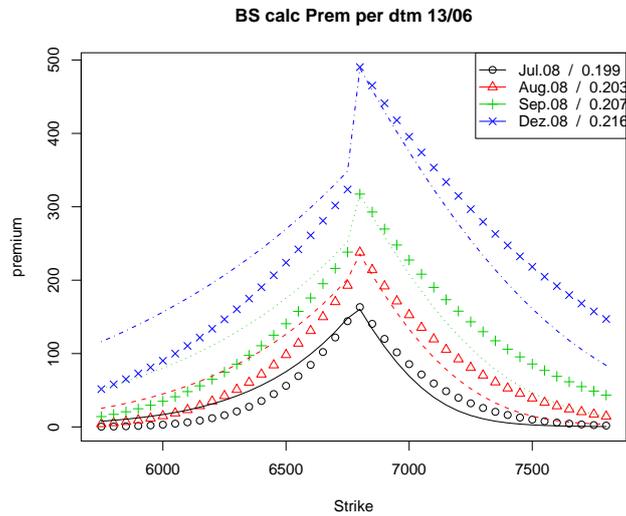


Abbildung 4.9: Black Scholes Prämien Min1 13/06

Statt einer Gleichgewichtung könnte das Handelsvolumen zur Gewichtung herangezogen werden, damit würden Strikes ein geringeres Gewicht zugeordnet je weiter entfernt sie vom ATM sind. Alternativ kann über Vega (partielle Ableitung des Optionspreises nach der Volatilität) gewichtet werden. Da ATM üblicherweise das höchste Handelsvolumen und die höchste Sensitivität zur Volatilität ist, sollte dieser Strike auch das höchste Gewicht erhalten. Im Vergleich dazu ändern sich far-OTM-Kontrakte nur sehr gering mit veränderter Volatilität. Far-ITM haben ebenso eine geringe Sensitivität, da in deren Prämien der innere Wert einen hohen Anteil einnimmt. Doch schon bei den Minimierungsfunktionen 1 bis 3 haben Optionen, die nahe am Geld sind, einen stärkeren Einfluss bekommen. .

Verschiedene Gewichtungsarten wurden in diversen Publikationen getestet und es zeigte sich, dass jene, die ATM mehr Gewicht zuordnen zu bevorzugen sind.

Fengler [5] verwendet für seine Auswertungen folgende Gewichtungen:

$$\omega(\kappa) = \frac{1}{\pi} \arctan \alpha(1 - \kappa) + 0.5 \text{ für Calls}$$

$$\omega(\kappa) = \frac{1}{\pi} \arctan \alpha(\kappa - 1) + 0.5 \text{ für Puts}$$

mit $\kappa = \text{moneyness}$

α bestimmt die Geschwindigkeit, mit der ITM Optionen weniger Gewicht

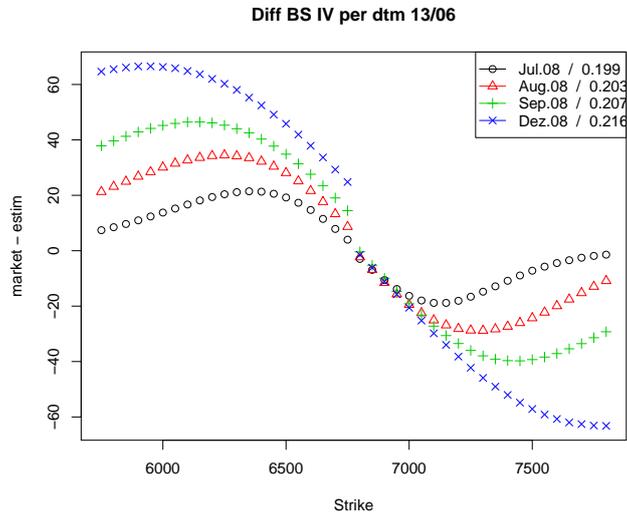


Abbildung 4.10: Black Scholes Differenzen Min1 13/06

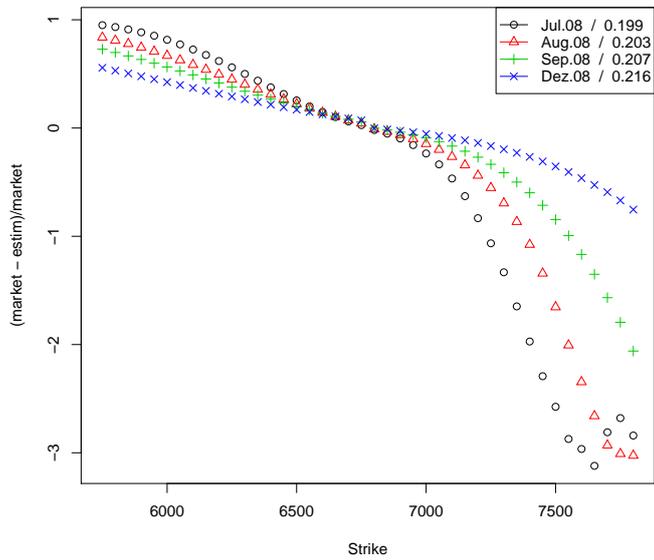


Abbildung 4.11: Black-Scholes relative Differenzen Min1 13/06

Monat	Min1	Min2	Min3	Min4
Jul 08	0.1985852	0.1902649	0.2010633	0.1621393
Aug 08	0.2029404	0.1968138	0.2068344	0.1582399
Sep 08	0.2073821	0.2002733	0.2110109	0.1702347
Dez 08	0.2158507	0.2101012	0.2168056	0.2004560

Tabelle 4.4: BS Volas mit Gewichtung Fengler 13/06

Monat	Min1	Min2	Min3	Min4
Sep 08	0.2006659	0.1953755	0.2034038	0.1818764
Oct 08	0.2070197	0.2006396	0.2098437	0.1761232
Nov 08	0.2100084	0.2049673	0.2129433	0.1837611
Dez 08	0.2113387	0.2075904	0.2146869	0.1896449
Mar 09	0.2117455	0.2057097	0.2135499	0.2016044

Tabelle 4.5: BS Volas mit Gewichtung Fengler 22/08

erhalten. ATM Optionen sind gleich gewichtet. Außerhalb von $\kappa \approx 1$ erhalten nur OTM Optionen relevante Gewichte. Er verwendete in seiner Arbeit $\alpha = 9$.

Verwendet man die von Fengler vorgeschlagene Gewichtung, ergeben sich für far-OTM höhere Gewichte, da die Differenz der Prämien immer kleiner wird, je weiter der Strike vom ATM entfernt ist. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Tabellen 4.4 und 4.5 zu sehen. Die Gewichtungen würden vor allem den ITM-Optionen geringere Gewichte zuweisen, da diese allerdings hier von vornherein ausgeschlossen wurden, unterscheiden sich die Ergebnisse nicht wesentlich.

Die Volatilitäten für 13/06 können nun mit den im vorigen Kapitel berechneten tatsächlichen historischen Volas (Tabelle 3.2) verglichen werden. Der Vergleich des 22/08 ist wegen der stark gestiegenen historischen Vola aufgrund der Wirtschaftskrise nicht sinnvoll. In Grafik 4.13 sind die bisherigen Ergebnisse (bei Verwendung von Min1) zusammengefasst. Die drei verschiedenen Berechnungsarten der impliziten Volatilität mittels Black-Scholes Methode werden mit den tatsächlich historischen Volas verglichen. In der linken Grafik wurden die nächsten vier Kontraktmonate dargestellt. Hier ist auch Dezember 2008 dargestellt. Bis dorthin ist die tatsächliche Vola aufgrund der Marktturbulenzen deutlich über 0.45 gestiegen, was allerdings im Juni 2008 noch nicht vorhersehbar war und sich daher in den Optionspreisen und damit in den impliziten Volas nicht widerspiegelt. Zur besseren Kenntlichkeit wurde rechts dieser hohe Wert ausgeschlossen.

Die einzelne ATM-Volatilität ist dabei etwas höher als die aus allen Strikes

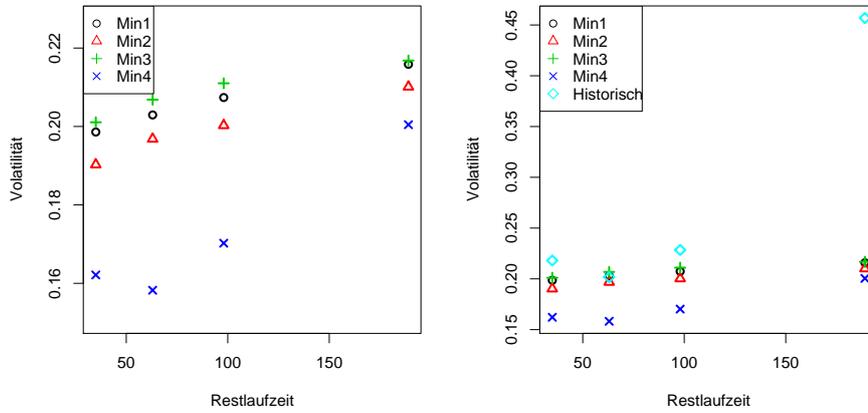


Abbildung 4.12: Black Scholes IV Gewichtung Fengler 13/06

berechnete. Betrachtet man die einzeln berechneten Volas der verschiedenen Kontrakte in den Grafiken 4.3, so könnte man daraus schließen, dass aufgrund der steilen Kurve für niedrige Strikes die Verwendung von mehr Strikes anstatt nur des ATM die Volatilität steigen müsste. Die Berechnung der impliziten Vola erfolgte jedoch über Minimierung der Summe der absoluten Differenzen zwischen den beobachteten Preisen und den theoretischen.

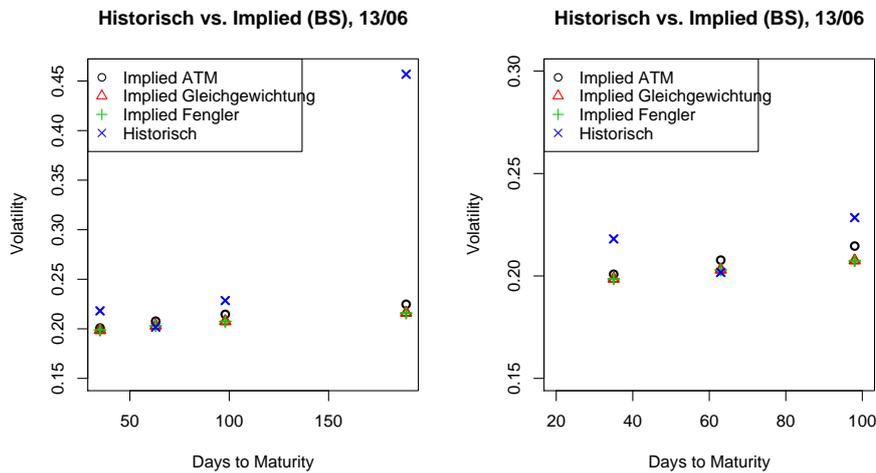


Abbildung 4.13: Vergleich Implied vs Historisch 1306, rechts: Zoom

Komplexere parametrische Methoden binden auch stochastische Zinssätze und/oder stochastische Jumps in die Berechnungen ein. Bakshi et al. (1997)

zeigten, dass das Berücksichtigen von stochastischen Jumps oder stochastischen Zinssätzen die Güte der Preisbewertung nur geringfügig verbessern. Herwig beschränkt sich aufgrund dessen nur auf die Verwendung von stochastischen Volatilitäten (Herwig [7])

Kapitel 5

Heston Modell

5.1 Heston Stochastic Volatility Model (1993)

Wie beim Black-Scholes-Modell wird auch hier angenommen, dass die Volatilität einem Wiener Prozess folgt. Allerdings wird hier die Annahme, die Returns seien normalverteilt mit konstantem Mittelwert und konstanter Varianz, fallengelassen. Schon die Tatsache, dass im vorigen Kapitel die Berechnungen für verschiedene Restlaufzeiten auch unterschiedliche implizite Volas lieferten, zeigt schon, dass keine konstante Varianz angenommen werden darf. Im Heston-Modell wird dieses Problem gelöst und eine stochastische Varianz verwendet.

Die Berechnung der Prämien mittels dieses Ansatzes kann via Monte Carlo Simulation erfolgen, es gibt allerdings auch eine geschlossene Formel, was es im Vergleich zu anderen Modellen mit stochastischer Volatilität einfach in der Anwendung macht.

Grundlegende Ideen dieses Modelles: (siehe Poon [12])

Die Preise des Underlyings S_t folgen einem Diffusionsprozess

$$dS_t = \mu S dt + \sqrt{v_t} S dz_t^1$$

mit μ als Driftparameter und z_t^1 ein Wiener Prozess. Für die Varianz gilt:

$$dv_t = \kappa[\theta - v_t]dt + \sigma_v \sqrt{v_t} S dz_t^2$$

wobei

v_t = momentante (instantaneous) Varianz

κ = die Geschwindigkeit der Mean Reversion

θ = langfristige (long-run) Volatilität

σ_v = Volatilität der Volatilität.

μ = Drift Parameter

dz_t^1, dz_t^2 = Wiener Prozesse mit konstanter Korrelation ρ .

Ist die Risikoprämie gegeben, kann der risikoneutrale Volatilitätsprozess beschrieben werden als:

$$\begin{aligned} dv_t &= \kappa[\theta - v_t]dt - \lambda v_t dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dz_t^{2*} \\ &= \kappa^*[\theta^* - v_t]dt + \sigma_v \sqrt{v_t} S dz_t^{2*} \end{aligned}$$

wobei λ der Marktpreis des (Volatilitäts-) Risikos ist, $\kappa^* = \kappa + \lambda$ und $\theta^* = \kappa\theta/(\kappa + \theta)$.

Hier ist κ^* der risikoneutrale Mean-Reversion Parameter und θ^* ist das risikoneutrale langfristige Niveau der Volatilität.

ρ ist die Korrelation zwischen dem Preis und dem Volatilitätsprozess. Verwendet man $\lambda = 0$, so wird der Volatilitätsprozess risikoneutral und κ und θ werden κ^* bzw. θ^*

In den meisten Simulationen wird die momentane Volatility σ_t gleichgesetzt mit dem langfristigen Mittel θ .

Die einzelnen Parameter haben folgenden Einfluss (siehe Poon [12]):

- $\lambda = 0$: Heston und Black Scholes Preis sind gleich. Ein negatives λ erzeugt höhere Heston Preise und höhere BS IV. Der Einfluss bleibt der gleiche, egal ob die Korrelation ρ negativ oder positiv ist.
- erhöhtes σ_v = erhöhte Volatilität und Kurtosis
- ρ = Einfluss auf Skewness, kaum Einfluss bei ATM
- je höher θ , desto näher kommt die Verteilung der Returns einer Normalverteilung, sogar wenn σ_v und die Startvolatilität $\sqrt{v_t}$ beide hoch sind

Noch mehr Beschreibung der einzelnen Einflüsse der Parameter können bei Poon [12] (Kapitel 9) nachgelesen werden.

Da die Ermittlung der einzelnen Parameter aus gegebenen Marktpreisen sehr aufwendig ist, zitiere ich nur die Ergebnisse Nagels:

Nagel [11] beschreibt die Ermittlung der Parameter wie folgt: Aus den historischen Daten können via GMM (generalized method of moments) alle Parameter geschätzt werden (S 123): *“... treten auch bei Verwendung von empirischen Daten negative und damit modellinkonsistente Schätzwerte für kappa und theta auf. Dies geschieht um so öfter, je kleiner der Wert von κ^{dach} ist.“* Nur der Risikoparameter λ kann nicht aus historischen Daten geschätzt werden. Stattdessen wird er implizit aus den ATM-Optionen ermittelt. S 124: *“ für unterschiedliche Moneyness-klassen zeigt λ ein sehr ähnliches Verhalten wie die impliziten Black/Scholes-Volatilitäten.“* Also auch hier ergeben sich keine Parameter, die für alle Strikes und Laufzeiten Preise liefern, die mit den Marktpreisen übereinstimmen.

Aufgrund der Komplexität der Parameterermittlung und der Kritik Nagels zu den Ergebnissen, belasse ich es mit dieser kurzen Beschreibung des Modells und wende mich einer adaptierten Version zu:

5.2 Heston and Nandi GARCH Modell (2000)

5.2.1 Theorie

Im zuvor beschriebenen Heston-Modell wurde die Bedingung der konstanten Varianz des Black-Scholes-Modells fallengelassen und stattdessen ein Modell mit einer zeitabhängigen Varianz entwickelt. Wie bereits erwähnt, zeigen sich allerdings in den Returns auch oft Cluster. Im Heston-Nandi-Modell wird berücksichtigt, dass die Returns autokorreliert sind. Ein großer Vorteil dieses Modells ist weiters, dass eine geschlossene Formel vorhanden ist.

Es geht die Idee ein, dass die Volatilität durch einen GARCH(1,1)-Prozess beschrieben werden kann. GARCH-Modelle liefern meist Verteilungen mit höherer Kurtosis und schwereren Enden als Normalverteilungen, was der Verteilung realer Aktienreturns am Kapitalmarkt näher kommt. Heston/Nandi zeigten auch, dass dieses GARCH(1,1)-Modell für inkrementelle Zeitperioden gegen das Heston Modell strebt.

Ein GARCH(1,1)-Prozess hat prinzipiell folgende Form:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2 \quad (5.1)$$

wobei ω eine Konstante, α und β Gewichtungen des letzten quadrierten Returns r_t bzw. σ^2 sind.

Die langfristige Varianz im GARCH(1,1)-Modell ist gegeben durch:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (5.2)$$

dh Gleichung 5.1 kann geschrieben werden als

$$\sigma_t^2 = \sigma^2(1 - \alpha - \beta) + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (5.3)$$

Die Varianz, die sich für n Tage in der Zukunft ergibt, ist somit

$$\sigma_{t+n}^2 = \sigma^2(1 - \alpha - \beta) + \alpha r_{t+n-1}^2 + \beta \sigma_{t+n-1}^2 \quad (5.4)$$

und somit

$$\sigma_{t+n}^2 - \sigma^2 = \alpha(r_{t+n-1}^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_{t+n-1}^2 - \sigma^2) \quad (5.5)$$

Zum Zeitpunkt t ist der Erwartungswert $\mathbb{E}_t(r_{t+n-1}^2) = \sigma_{t+n-1}^2$, es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t(\sigma_{t+n}^2 - \sigma^2) &= (\alpha + \beta)\mathbb{E}_t(\sigma_{t+n-1}^2 - \sigma^2) \\ &= (\alpha + \beta)^2\mathbb{E}_t(\sigma_{t+n-2}^2 - \sigma^2) \\ &= \dots = (\alpha + \beta)^n\mathbb{E}_t(\sigma_t^2 - \sigma^2) \\ &= (\alpha + \beta)^n(\sigma_t^2 - \sigma^2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Definiert man $V(n) = \mathbb{E}_t(\sigma_{t+n}^2)$ und $a = -\ln(\alpha + \beta)$, so kann mithilfe von Hull [9](Kapitel 19) die Funktion $V(n)$ geschrieben werden als:

$$V(n) = \sigma^2 + e^{-an}(V(0) - \sigma^2) \quad (5.7)$$

Die durchschnittliche Varianz (auf Tagesbasis) im Zeitraum $(0, T)$ ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{u=0}^T V(u) du &= \frac{1}{T} \left(u\sigma^2 - \frac{e^{-au}}{a}(V(0) - \sigma^2) \right) \Big|_{u=0}^{u=T} \\ &= \sigma^2 + \frac{1 - e^{-aT}}{aT}(V(0) - \sigma^2) \end{aligned} \quad (5.8)$$

wobei $V(0) = \sigma_t^2$ die aktuelle GARCH-Varianz (zum Zeitpunkt t , Zeitpunkt der Beobachtungen) ist.

Daraus und mit Gleichung 5.2 ergibt sich die durchschnittliche Varianz über den Zeitraum $[0, T]$ (auf Jahresbasis) als:

$$\sigma^2(T) = 252 * \left(\frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} + \frac{1 - e^{\ln(\alpha + \beta)T}}{-\ln(\alpha + \beta)T} \left(\sigma_t^2 - \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \right) \right) \quad (5.9)$$

Heston und Nandi verwenden in ihrem Modell diesen Prozess folgendermaßen:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha(z_t - \gamma\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2 \quad (5.10)$$

$$r_{t+1} = r + \lambda\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1} \quad (5.11)$$

wobei

r = risikoloser Zinssatz

σ_t^2 = bedingte Varianz

z_t = standardnormalverteilter Fehlerterm

In diesem Modell misst

$$\alpha\gamma^2 + \beta \quad (5.12)$$

die Persistenz der Volatilität. Die Summe muss kleiner 1 sein, damit der Prozess tatsächlich mean-reverting ist. Je näher der Wert bei null ist, desto schneller kehrt die Volatilität zur langfristigen Varianz zurück. α gibt in diesem Modell die Kurtosis an, γ die Skewness.

Der Preis einer Call-Option ist gegeben als:

$$C = e^{-rT} E_t^*[(S_{t+T} - K, 0)] = S_t P_1 - K e^{-rT} P_2$$

wobei E^* der Erwartungswert zur Zeit t unter der risikoneutralen Verteilung ist. S_1 und S_2 sind die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten. Die erzeugende Funktion hat die Form:

$$f(\phi) = S_t^\phi \exp(A_t + B_t \sigma_{t+1}^2)$$

mit

$$A_t = A_{t+1} + \phi r + B_{t+1} \omega - \frac{1}{2} \log(1 - 2\alpha B_{t+1})$$

$$B_t = \phi(\lambda + \gamma) - \frac{1}{2} \gamma^2 + \beta B_{t+1} + \frac{\frac{1}{2}(\phi - \gamma)^2}{1 - 2\alpha B_{t+1}}$$

mit

$$A_{t+T} = B_{t+T} = 0$$

wobei $t + T$ die Zeit bis zur Ausübung der Option ist.

Für die risikoneutrale erzeugende Funktion f^* wird $\lambda = -0.5$ verwendet.

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{e^{-rT}}{\pi S_t} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi + 1)}{i\phi} \right] d\phi$$

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi)}{i\phi} \right] d\phi$$

5.2.2 Berechnungen

Berechnet man mithilfe von Gleichung 5.9 die zukünftigen durchschnittlichen (auf ein Jahr bezogene) Varianzen bis zum Zeitpunkt der Expiry der Optionen anhand der Parameter, die aus den Schlusskursen eines Jahres bestimmt wurden, erhält man die in Tabelle 5.1 dargestellten Werte.

Monat	Vola
Jul 08	0.1834310
Aug 08	0.1819269
Sep 08	0.1812402
Dez 08	0.1806428

Tabelle 5.1: GARCH-Volas 13/06

Mittels Nelder-Mead-Algorithmus wurde versucht, jene Parameter zu ermitteln, zu denen die beobachteten Marktpreise am besten passen. Als Start-Parameter verwendete ich Parameter die aus der historischen Zeitreihe eines Jahre geschätzt wurden (Tabelle 5.2). Eine Ungenauigkeit dabei ist, dass nur ein (historischer) risikofreier Zinssatz verwendet wird. Zwei Ausreißertage in der historischen Kurve steigern die aktuelle mittlere Volatilität, deshalb ergibt sich bei Plot der zukünftigen Volas eine stark fallende Kurve zur langfristigen Volatilität.

Start-Parameter	
alpha	4.835563e-06
beta	0.829762
gamma	0.6262976
omega	2.205556e-05
lambda	-0.5

Tabelle 5.2: Heston-Nandi Startparameter 13/06

Vergleicht man die Qualität der Anpassung mit der der Black-Scholes Methode, muss natürlich berücksichtigt werden, dass hier sechs freie Parameter

an die gegebenen Marktpreise angepasst werden, während es beim Black-Scholes nur die Volatilität ist, und schon deshalb die Anpassung an die vorhandenen Marktdaten besser ist.

Für die Ermittlung der einzelnen Parameter wurden drei verschiedenen Minimierungsfunktionen verwendet:

$$min1 = \sum_i \left(abs \left(p_i^{market} - p_i^{estim} \right) \right)$$

$$min2 = max_i \left\{ \left(abs \left(p_i^{market} - p_i^{estim} \right) \right) \right\}$$

$$min3 = \sum_i \left(abs \left(\frac{p_i^{market} - p_i^{estim}}{p_i^{market}} \right) \right)$$

In Tabelle 5.3 sind die Ergebnisse der Parameterschätzungen für Calls vom 13/06 aufgelistet, Tabelle 5.4 zeigt die daraus errechneten zukünftigen Volatilitäten. Die Parameter ergeben einen mean-reverting Prozess (vgl. Gleichung 5.12). In der Grafiken 5.1 bis 5.3 sind jeweils für die verwendete Minimierungsfunktionen 1 bis 3 die Differenzen zwischen den Marktpreisen der Optionen und den aus den ermittelten Parametern berechneten Heston-Nandi-Preise auf verschiedene Arten abgebildet. Bei Verwendung von Min1 ergeben sich für OTM und ITM-Optionen größere absolute Differenzen als bei Verwendung von Min2, umgekehrt werden Optionspreise in der Nähe von ATM bei Verwendung von Min1 absolut gesehen besser beschrieben als bei Min2. In allen Fällen sind die relativen Fehler bei OTM-Optionen vor allem für kurze Restlaufzeiten wegen der sehr kleinen Prämien sehr groß.

In Tabelle 5.5 und 5.6 sind die Ergebnisse für Puts aufgelistet, die Grafiken 5.4 bis 5.6 zeigen die gleichen Fehlerstrukturen wie für Calls.

Es erscheint wieder das Ausschließen der hochpreisigen ITM-Optionen sinnvoll. Auch bei Betrachtung der Ergebnisse aus den OTM-Optionen und den Fehlern in den Grafiken 5.7 bis 5.9 zeigen sich bei den relativen Fehlern für hohe Strikes, also far-OTM-Calls, hohe Ausschläge. Grund sind die im Vergleich zu far-OTM-Puts niedrigen Prämien für far-OTM-Calls.

Zusammenfassend erhält man eine bessere Anpassung als mit dem Black-Scholes Modell (die zumindest zum Teil auf die höhere Zahl der freien Parameter zurückzuführen ist), doch auch hier verschwinden die systematischen Fehler nicht.

Parameter	min1	min2	min3
alpha	1.105133e-05	1.001115e-05	4.999563e-06
beta	0.5236251	0.5357154	0.7850454
gamma	0.2240017	0.4945749	0.4654467
omega	6.485965e-05	6.30789e-05	2.561294e-05
lambda	0.968072	0.7639361	-0.2046581

Tabelle 5.3: Heston-Nandi Call Parameter 13/06

Monat	min1	min2	min3
Jul 08	0.1871182	0.1870043	0.1806521
Aug 08	0.1862827	0.1861318	0.1774353
Sep 08	0.1859084	0.1857410	0.1759708
Dez 08	0.1855835	0.1854016	0.1746916

Tabelle 5.4: Heston-Nandi Call Volatilitäten 13/06

Nimmt man an, dass sich die Parameter mit der Zeit ändern bzw. die Optionen je nach Laufzeit verschiedene Information über das zukünftige Marktwachstum enthalten, müssen die Berechnungen für die Laufzeiten separat gemacht werden, da dies durch das Modell nicht korrekt abgebildet werden kann. Eigentlich sollten zum Beispiel die Optionspreise für August-Kontrakte die erwartete zukünftige Entwicklung bis zum Fälligkeitsdatum der Juli-Kontrakte und die darauffolgende Entwicklung bis Fälligkeit der August-Kontrakte. Erstere sollte mit den Erwartungen bzw. Volatilitäten aus den Juli-Kontrakten übereinstimmen.

In Tabelle 5.7 und 5.8 sind die Ergebnisse aufgelistet. Die Spalten geben die Resultate je nach verwendeter Datengrundlage an, die Zeilen die errechneten σ für die einzelnen Restlaufzeiten. Zum Beispiel wurde mittels der Parameter, die aufgrund der Optionspreise für Juli-Kontrakte errechnet wurden, ein $\sigma = 0.1671651$ für den Zeitraum bis zur Fälligkeit der August-Optionen ermittelt. Würden die Erwartungen der zukünftigen Preisentwicklungen in den Optionspreisen über alle Kontraktmonate gleich beinhaltet sein und das Modell richtig sein, so müssten sich in den Zeilen jeweils gleiche Werte befinden.

Bei Berechnung für 22/08 ergaben sich sehr ähnliche Strukturen und Fehler, daher werde ich hier auf deren Wiedergabe verzichtet.

Parameter	min1	min2	min3
alpha	1.424402e-05	1.173228e-05	4.319006e-06
beta	0.6436797	0.4492984	0.8717726
gamma	7.347619	1.312784	1.015815
omega	4.969792e-05	8.896122e-05	2.034149e-05
lambda	0.9350295	0.7600691	0.5334497

Tabelle 5.5: Heston-Nandi Put Parameter 13/06

Monat	min1	min2	min3
Jul 08	0.1900037	0.2023514	0.2037654
Aug 08	0.1888868	0.2020912	0.2021502
Sep 08	0.1883860	0.2019750	0.2013686
Dez 08	0.1879509	0.2018742	0.2006840

Tabelle 5.6: Heston-Nandi Put Volatilitäten 13/06

Parameter	Jul 08	Aug 08	Sep 08	Dez 08
alpha	2.990316e-05	6.617795e-06	7.955694e-06	7.780547e-06
beta	0.873085	0.6717554	0.6721245	0.6775282
gamma	-0.6625152	0.593004	0.7660954	0.9166293
omega	1.229480e-05	4.437363e-05	4.62894e-05	4.498408e-05
lambda	0.5133305	0.7862716	0.8932766	0.916698

Tabelle 5.7: Heston-Nandi OTM Parameter Min1 13/06

Monat	Jul 08	Aug 08	Sep 08	Dez 08
Jul 08	0.1747647	0.1877228	0.1913021	0.1903636
Aug 08	0.1671651	0.1863370	0.1901247	0.1891030
Sep 08	0.1633733	0.1857149	0.1895966	0.1885374
Dez 08	0.1599896	0.1851740	0.1891378	0.1880459

Tabelle 5.8: Heston-Nandi OTM Volatilitäten Min1 13/06

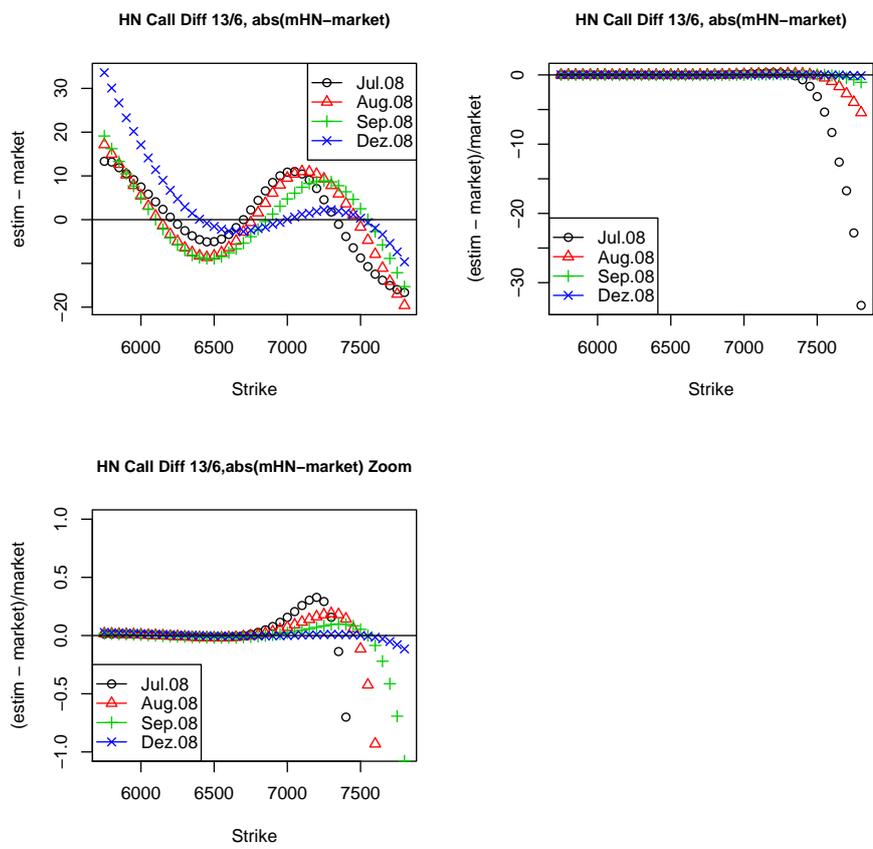


Abbildung 5.1: HN Differenzen aus Min1 Call 13/06

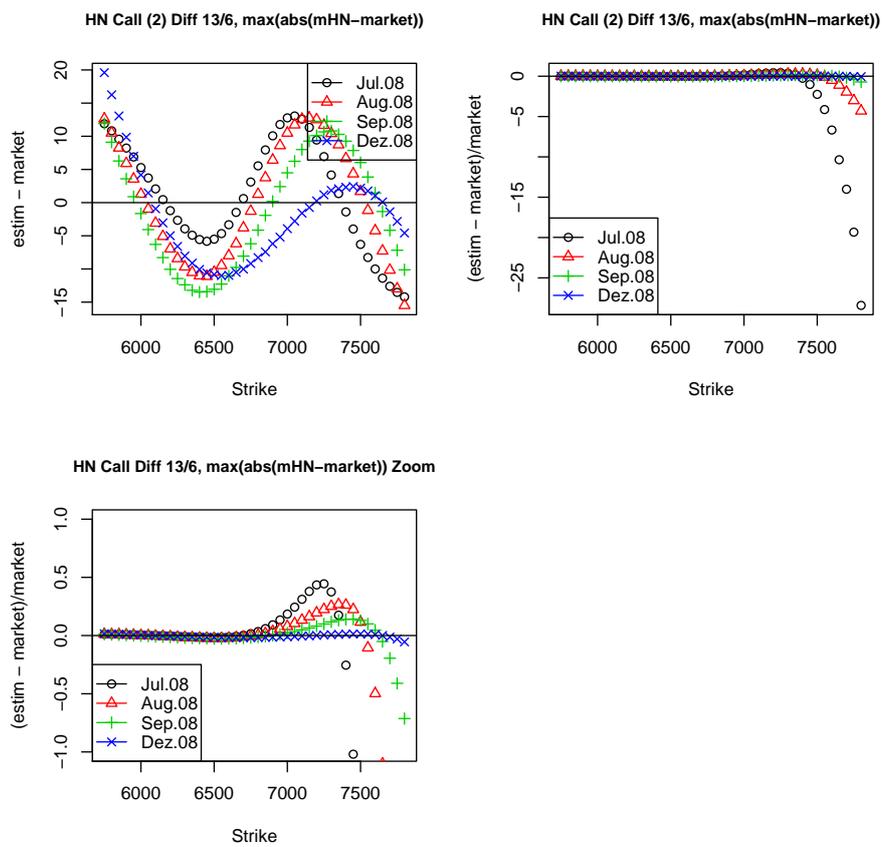


Abbildung 5.2: HN Differenzen aus Min2 Call 13/06

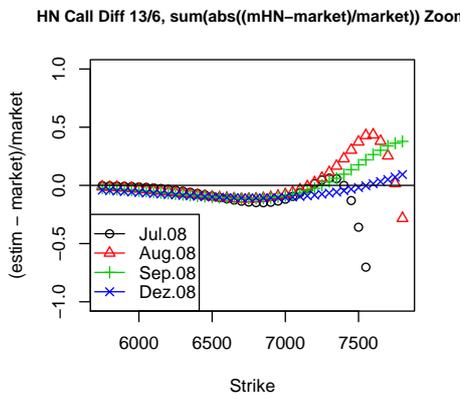
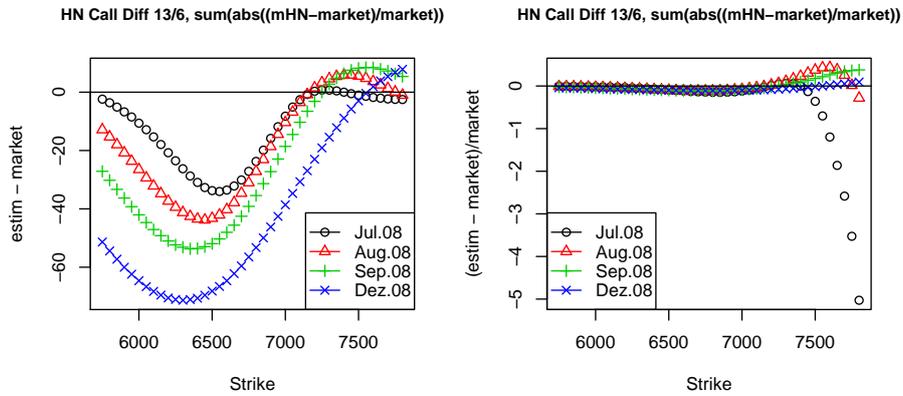


Abbildung 5.3: HN Differenzen aus Min3 Call 13/06

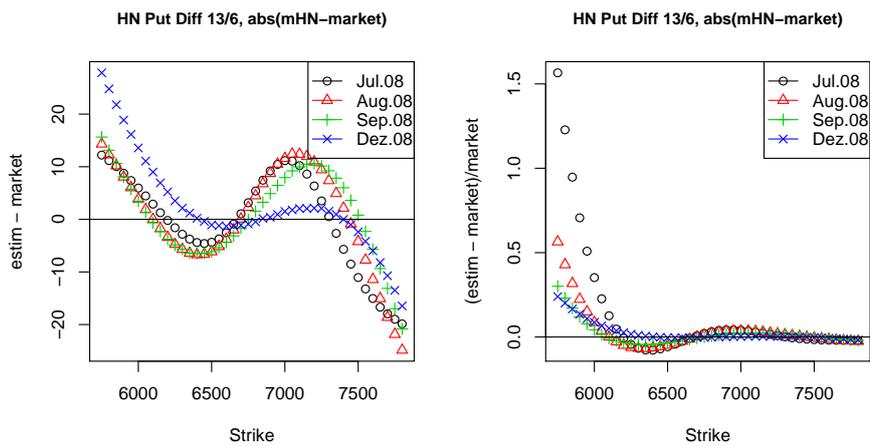


Abbildung 5.4: HN Differenzen aus Min1 Put 13/06

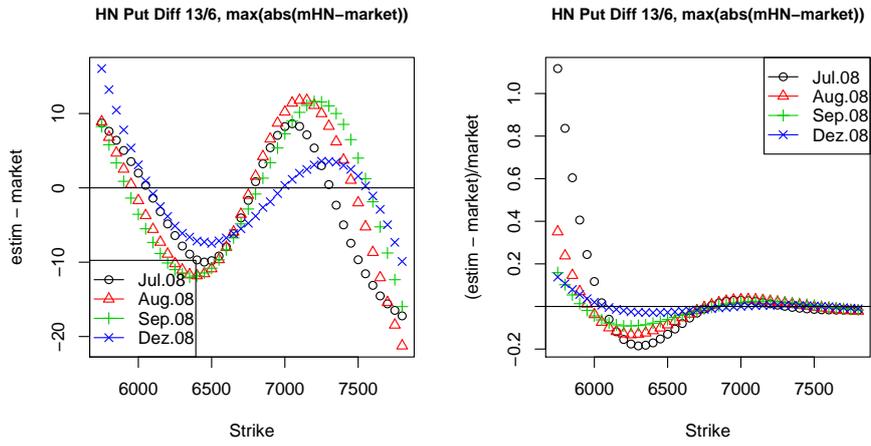


Abbildung 5.5: HN Differenzen aus Min2 Put 13/06

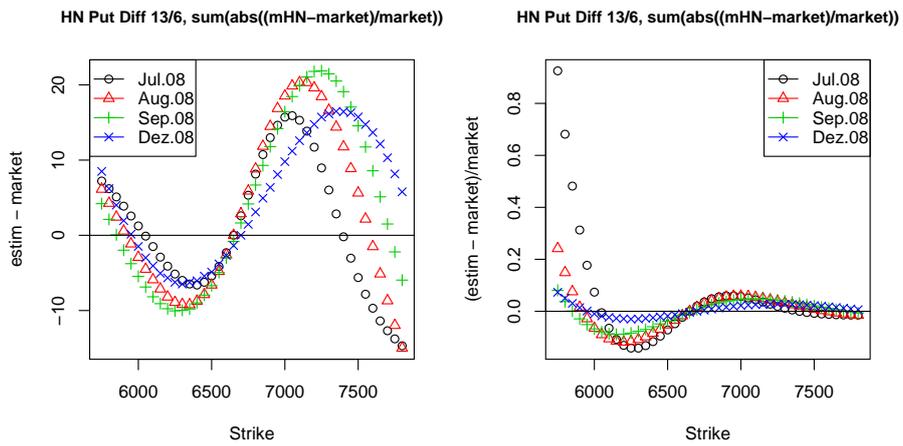


Abbildung 5.6: HN Differenzen aus Min3 Put 13/06

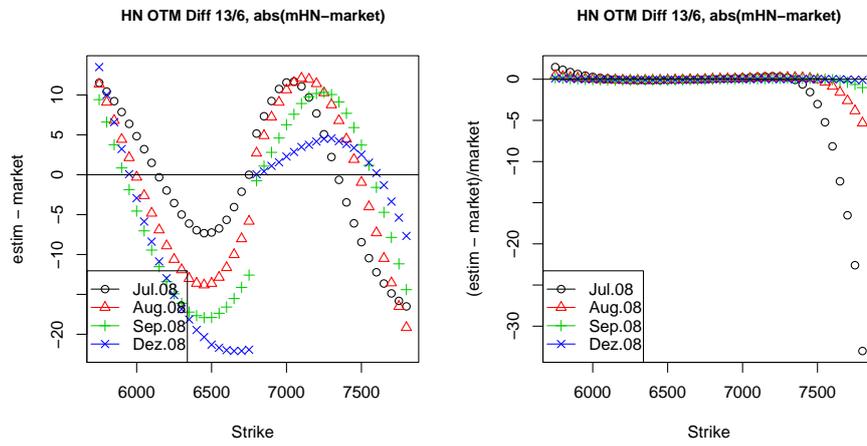


Abbildung 5.7: HN Differenzen aus Min1 OTM 13/06

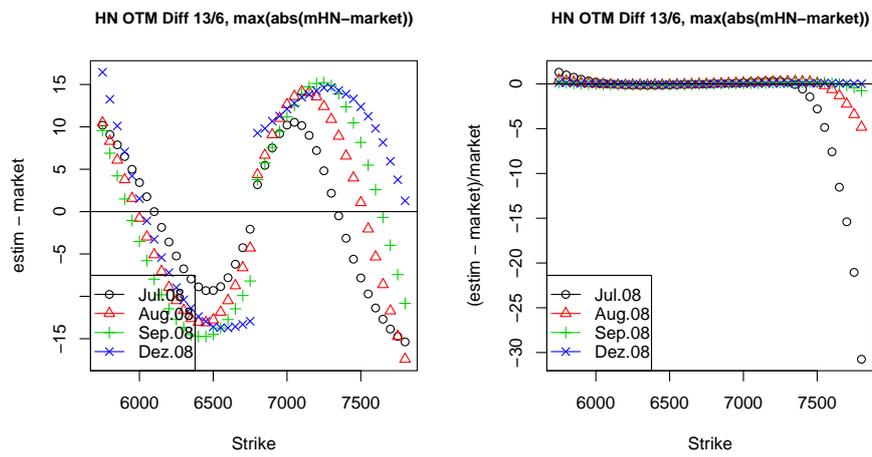


Abbildung 5.8: HN Differenzen aus Min2 OTM 13/06

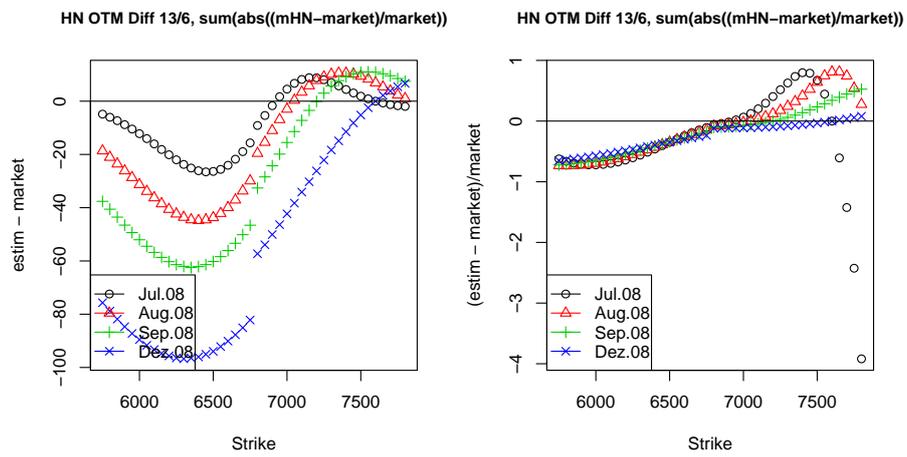


Abbildung 5.9: HN Differenzen aus Min3 OTM 13/06

Kapitel 6

Modellfreie Methode

6.1 Theorie

Bakshi, Kapadia und Madan (2003) haben eine modellfreie Methode entwickelt um Volatilität, Skewness und Kurtosis aus Optionspreisen zu berechnen. Wie schon erwähnt folgen die Returns üblicherweise keiner reinen Normalverteilung sondern sind meist schief und steilgipflig. Mit Berücksichtigung von Skewness und Kurtosis in dieser Methode soll der realen Volatilität näher gekommen werden.

Anders als im vorigen Kapitel über das Black-Scholes-Modell gibt es hier kein parametrisches Modell mit dem die Optionspreise berechnet werden können. Stattdessen werden die Parameter direkt über die risikoneutrale Verteilung aus gegebenen OTM-Calls und OTM-Puts ermittelt. Das besondere hierbei ist, dass mit der Verwendung von Calls und Puts für verschiedene Strikes das Problem der Auswahl zu verwendender Strikes (Verwendung ITM) bei der Berechnung nicht mehr besteht.

Grundidee bei der Berechnung ist die von Carr und Madan (2001) erstellte Definition einer Payoff-Funktion $H[S]$ die vom Underlying-Preis abhängt. Der Preis des Payoff wird errechnet als Erwartungswert

$$E^q[H[S]] = \int_0^\infty H[S]q[S]dS \quad (6.1)$$

mit $q[S]$ als risikoneutrale Dichte. Der Preis einer Call- bzw. Put-Option wird damit errechnet als

$$C(t, \tau; K) = \int_0^\infty e^{-rt} \max(0, S - K)q[S]dS \quad (6.2)$$

$$P(t, \tau; K) = \int_0^\infty e^{-rt} \max(0, K - S) q[S] dS \quad (6.3)$$

wobei τ die Restlaufzeit ist.

Carr and Madan (2001) zeigten, dass jede Payoff-Funktion, die einen begrenzten Erwartungswert hat, durch OTM-Calls und Puts aufgespannt wird. Wenn die Payoff-Funktion zweimal stetig differenzierbar ist, kann sie erklärt werden als:

$$\begin{aligned} H[S] &= H[\bar{S}] + (S - \bar{S})H_S[\bar{S}] + \int_{\bar{S}}^\infty H_{SS}[K] \max(0, S - K) dK \\ &+ \int_0^{\bar{S}} H_{SS}[K] (\max(0, K - S)) dK \end{aligned} \quad (6.4)$$

wobei $H_S = \partial H / \partial S$ und $H_{SS} = \partial^2 H / \partial S^2$ die erste bzw. zweite Ableitung sind. $H[\bar{S}]$ und $H_S[\bar{S}]$ sind die Werte der Payoff-Funktion und deren Ableitung für einen Wert \bar{S} .

Der Payoff wird mit dem risikfreien Zinssatz diskontiert und man erhält durch den risikoneutralen Erwartungswert den Preis:

$$\begin{aligned} E^q[e^{-r\tau} H[S]] &= (H[\bar{S}] - \bar{S}H_S[\bar{S}])e^{-r\tau} + H_S[\bar{S}]S(t) \\ &+ \int_{\bar{S}}^\infty H_{SS}[K] C(t, \tau; K) dK + \int_0^{\bar{S}} H_{SS}[K] P(t, \tau; K) dK \end{aligned} \quad (6.5)$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass jeder Payoff durch folgenden drei Assets repliziert werden kann:

1. ein Zero-Coupon Bond über $H[\bar{S}] - \bar{S}H_S[\bar{S}]$
2. eine Aktie über $H_S[\bar{S}]$
3. eine Linearkombination aus OTM-Calls und Puts mit Gewichtungen $H_{SS}[K]$

Auf dieser Grundlage erweiterten Bakshi, Kapadia und Madan die Methode auf Skewness und Kurtosis. Zunächst definierten sie Returns $R_{t,\tau} = \ln[S_{t+\tau}/S_t]$ und darauf basierend drei Kontrakte, deren Preise wie folgt beschrieben werden:

$$V(t, \tau) = E^q[e^{-r\tau} R_{t,\tau}^2]$$

$$W(t, \tau) = E^q[e^{-r\tau} R_{t,\tau}^3]$$

$$X(t, \tau) = E^q[e^{-r\tau} R_{t,\tau}^4]$$

$$\begin{aligned} V(t, \tau) &= \int_{S_t}^{\infty} \frac{2(1 - \ln(K/S_t))}{K^2} C(t, \tau; K) dK \\ &+ \int_0^{S_t} \frac{2(1 + \ln(S_t/K))}{K^2} P(t, \tau; K) dK \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} W(t, \tau) &= \int_{S_t}^{\infty} \frac{6\ln(K/S_t) - 3(\ln(K/S_t))^2}{K^2} C(t, \tau; K) dK \\ &+ \int_0^{S_t} \frac{6\ln(S_t/K) + 3(\ln(S_t/K))^2}{K^2} P(t, \tau; K) dK \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} X(t, \tau) &= \int_{S_t}^{\infty} \frac{12(\ln(K/S_t))^2 - 4(\ln(K/S_t))^3}{K^2} C(t, \tau; K) dK \\ &+ \int_0^{S_t} \frac{12(\ln(S_t/K))^2 + 4(\ln(S_t/K))^3}{K^2} P(t, \tau; K) dK \end{aligned} \quad (6.8)$$

Diese Preise werden in den Gleichungen 6.4 und 6.5 um die risikoneutralen Momente zu erhalten:

$$Var(t, \tau) = E^q[(R_{t,\tau} - E^q[R_{t,\tau}])^2] = e^{r\tau} V(t, \tau) - \mu(t, \tau)^2$$

$$\begin{aligned} Skewness(t, \tau) &= \frac{E^q[(R_{t,\tau} - E^q[R_{t,\tau}])^3]}{E^q[(R_{t,\tau} - E^q[R_{t,\tau}])^2]^{3/2}} \\ &= \frac{e^{r\tau} W(t, \tau) - 3e^{r\tau} \mu(t, \tau) V(t, \tau) + 2\mu(t, \tau)^3}{(e^{r\tau} V(t, \tau) - \mu(t, \tau)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Kurtosis(t, \tau) &= \frac{E^q[(R_{t,\tau} - E^q[R_{t,\tau}])^4]}{E^q[(R_{t,\tau} - E^q[R_{t,\tau}])^2]^2} \\ &= \frac{e^{r\tau} X(t, \tau) - 4e^{r\tau} \mu(t, \tau) W(t, \tau) + 6e^{r\tau} \mu(t, \tau)^2 V(t, \tau) - 3\mu(t, \tau)^4}{(e^{r\tau} V(t, \tau) - \mu(t, \tau)^2)^2} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\mu(t, \tau) &= E^q \ln \left[\frac{S_{t+\tau}}{S_t} \right] \\ &= e^{r\tau} - 1 - \frac{e^{r\tau}}{2} V(t, \tau) - \frac{e^{r\tau}}{6} W(t, \tau) - \frac{e^{r\tau}}{24} X(t, \tau)\end{aligned}$$

Für die praktische Anwendung dieses Modelles müssen die Integrale der Gleichungen 6.6 bis 6.8 berechnet werden. Hier wurde die Trapezregel für die numerische Berechnung verwendet. Wie schon beim Black-Scholes Modell wurde die Datenmenge im Bezug auf die Strikes eingeschränkt. Da die Integrale für Calls und Puts jeweils nur auf die OTM-Strikes begrenzt sind und die Prämien kleiner werden je weiter entfernt der Strike von S liegt, ist das Ausklammern kleiner bzw. großer Strikes bei der Berechnung durchaus vertretbar (siehe auch die Prämien in Grafik 2.1).

6.2 Berechnungen

In den Tabellen 6.1 sind die berechneten Ergebnisse für 13/06 aufgelistet und zum Vergleich die aus den historischen Schlusskursen berechneten Momente. Auffällig ist, dass mit steigender Laufzeit die Volatilität abnimmt, während Skewness und Kurtosis stärker werden. Für Jul 08 sind Skewness und Kurtosis noch am kleinsten und die Volatilität sollte so noch am ehesten an die der Black-Scholes-Methode herankommen, was sie auch tut.

Monat	Vola	Skewness	Kurtosis
Jul 08	0.1854904	-0.1264026	1.260657
Aug 08	0.1759845	0.5103884	3.808601
Sep 08	0.1638883	0.9954949	5.809668
Dez 08	0.1379072	1.2653749	10.095023
historisch:	0.2107248	0.5237203	5.260886

Tabelle 6.1: Model Free Method 13/06

Monat	Vola	Skewness	Kurtosis
Sep 08	0.1905708	-0.3093480	-1.174248
Oct 08	0.1842437	0.2894700	1.839008
Nov 08	0.1697512	0.6655838	4.278293
Dez 08	0.1596693	0.8327896	5.761764
Mar 09	0.1328376	0.9579891	9.893008
historisch:	0.2124119	0.5127967	5.081022

Tabelle 6.2: Model Free Method 22/08

Kapitel 7

Zusammenfassung

Es wurden verschiedene Wege gezeigt, um implizite Volatilitäten, die für weitere Berechnungen vor allem im Risikomanagement hilfreich sind, zu berechnen. Für jede Laufzeit wurde versucht durch Berechnung einer impliziten Volatilität ein Modell zu erstellen, das möglichst nahe an die Marktdaten herankommt. Sollen mehrere tatsächliche Preise durch dieses eine Modell dargestellt werden, können nie alle Marktpreise einer Laufzeit exakt erreicht werden, es wird dabei immer wieder über- oder unterbewertete Kontrakte geben. Allerdings gibt es über Strikes, Gewichtung und Art der Minimierung Möglichkeiten, Einfluss auf diese Modellanpassungen zu nehmen:

Bei der Berechnung muss entschieden werden, ob man sich nur auf at-the-money Kontrakte stützt oder auch andere Strikes verwendet. Werden mehrere Strikes zur Berechnung herangezogen, muss bestimmt werden welche Gewichtungen diesen zugewiesen werden. Außerdem können verschiedene Minimierungsfunktionen gewählt werden. Da ITM-Optionen die höchsten Prämien haben, beeinflussen sie bei Gleichgewichtung und Minimierung der absoluten Fehler die Berechnung einer einzelnen Volatilität stark und es kann daher sinnvoll sein, sich nur auf ATM- und OTM-Kontrakte zu beschränken. Auch über die Minimierungsfunktion kann der Einfluss von ITM oder OTM-Kontrakten gesteuert werden. Etwa durch Verwendung relativer Fehler anstatt absoluter wird den hohen ITM-Preisen entgegengesteuert. Für den Fall, dass man ein größeres Vertrauen in einen Teil der Strikes, etwa OTM hat, also annimmt diese spiegeln die Erwartungen der Marktteilnehmer besser wieder als ITM-Kontrakte, kann zB auch durch richtige Wahl von Gewichtung und Minimierungsfunktion ein Modell berechnet werden, das OTM-Preise möglichst gut anpassen soll und andere Kontrakte vernachlässigt.

Es zeigte sich, dass bei Verwendung von OTM- und ATM-Kontrakten mit Gewichtungen eine Feinabstimmung möglich ist, die Ergebnisse allerdings

nicht stark voneinander abweichen. Im Vergleich mit der realisierten (historischen) Volatilität und im Hinblick darauf, dass es vernünftig sein kann einen Sicherheitspolster für weiterführende Risikokalkulationen auf Basis der errechneten impliziten Volatilität zu haben, sind Funktionen, die Strikes um ATM höher gewichten als OTM-Kontrakte, zu bevorzugen.

Die einfachste Methode ist die Anwendung des Black-Scholes Modells. Dass die Annahmen des Modells nicht mit der Realität übereinstimmt wurde erwähnt, aber hingenommen. Bei den verschiedenen Minimierungsfunktionen ergaben sich deutliche Unterschiede und man muss entscheiden, welche für die jeweilige Verwendung sinnvoll ist.

Während die Berechnung der künftigen Volatilität als GARCH-Prozess im Laufe der Zeit leicht sinkende Volatilitäten lieferten, ergaben sich bei Anwendung des Black-Scholes Modells auf die Marktpreise der Optionen mit steigender Restlaufzeit auch steigende σ .

Bei Anwendung des Heston/Nandi Modells wurden die errechneten Volatilitäten mit steigender Restlaufzeit niedriger, im Gegensatz zum Black-Scholes Modell. Die σ unterschieden sich je nach verwendeter Minimierungsfunktion hier nicht mehr so stark voneinander wie beim Black-Scholes Modell. Wie schon beim Black-Scholes Modell ergaben sich auch hier bei Puts etwas höhere σ als für Calls.

Obwohl verschiedene Minimierungsfunktionen verwendet wurden, konnte bei Betrachtung der jeweiligen Fehler keine als optimal festgestellt werden. Es zeigen sich bei allen Strukturen in den Fehlergrafiken, die nicht zufällig erscheinen. Entsprechend spiegelt keines der Modelle den Markt richtig wieder. Außerdem ist zu erwähnen, dass in diesem Modell mehr freie Parameter eine genauere Anpassung ermöglichen sollten, dies in den Ergebnissen aber keineswegs deutlich zu erkennen war.

Die modellfreie Methode bietet eine Möglichkeit, neben der Volatilität auch Skewness und Kurtosis der Verteilung zu schätzen. Die Resultate liefern im Gegensatz zum Black-Scholes Verfahren für steigende Restlaufzeiten sinkende Volatilitäten, doch Schiefe und Wölbung nehmen stattdessen stark zu. Für die Modellierung zukünftiger Verteilungen ist diese Methode durchaus interessant. Ist die Absicht der Parameterschätzung allerdings nur die Ermittlung des σ ohne weitere Berücksichtigung der anderen zwei Parameter, so ist diese Methode definitiv nicht geeignet.

Symbole und Abkürzungen

K = Strike Preis, Ausübungspreis
 S = Marktpreis des Underlyings
 T = Restlaufzeit (in Jahren)

S/K = Moneyness für Calls
 K/S = Moneyness für Puts
 ATM = at-the-money (Moneyness um 1)
 OTM = out-the-money (Moneyness < 1)
 ITM = in-the-money (Moneyness > 1)

ϕ = kumulative Standard Normalverteilung
 σ = Standardabweichung
 ν = Skewness = $\frac{E((X-E(X))^3)}{\sqrt{Var(X)}^3}$
 γ = Kurtosis = $\frac{E((X-E(X))^4)}{(Var(X))^2}$

Abbildungsverzeichnis

2.1	Prämien DAX-Optionen am 13/06/2008	7
3.1	DAX 1 year closing values	12
3.2	DAX log Returns	12
3.3	Handelsvolumina DAX-Optionen vom 13/06/2008 der ersten sechs gehandelten Monatskontrakte, alle handelbaren Strikes, Vertikale = ATM	18
3.4	Handelsvolumina DAX-Optionen vom 22/08/2008 der ersten sechs gehandelten Monatskontrakte, alle handelbaren Strikes, Vertikale = ATM	19
3.5	Histogramm DAX Log-Retuns	20
3.6	DAX EWMA-Volatilität	20
4.1	Black-Scholes Call Prämien in Abhängigkeit von Volatilität und Strike 13/06	24
4.2	Black-Scholes Put Prämien in Abhängigkeit von Volatilität und Strike 13/06	25
4.3	Black-Scholes IV einzelner Kontrakte 13/06	27
4.4	Black-Scholes IV Surface Call 13/06	28
4.5	Black-Scholes Call Differenzen 13/06	29
4.6	Black-Scholes relative Änderung Call-Prämien 13/06	31
4.7	Black-Scholes relative Änderung Put-Prämien 13/06	32
4.8	Black Scholes IV Gleichgewichtung 13/06	32
4.9	Black Scholes Prämien Min1 13/06	33
4.10	Black Scholes Differenzen Min1 13/06	34
4.11	Black-Scholes relative Differenzen Min1 13/06	34

4.12	Black Scholes IV Gewichtung Fengler 13/06	36
4.13	Vergleich Implied vs Historisch 1306, rechts: Zoom	36
5.1	HN Differenzen aus Min1 Call 13/06	47
5.2	HN Differenzen aus Min2 Call 13/06	48
5.3	HN Differenzen aus Min3 Call 13/06	49
5.4	HN Differenzen aus Min1 Put 13/06	49
5.5	HN Differenzen aus Min2 Put 13/06	50
5.6	HN Differenzen aus Min3 Put 13/06	50
5.7	HN Differenzen aus Min1 OTM 13/06	51
5.8	HN Differenzen aus Min2 OTM 13/06	51
5.9	HN Differenzen aus Min3 OTM 13/06	52

Tabellenverzeichnis

3.1	Kontrakte 13/06	13
3.2	Historische Volas 1306	16
3.3	Historische Volas 2208	16
4.1	BS ATM Volas	28
4.2	BS IV Gleichgewichtung 13/06	31
4.3	BS IV Gleichgewichtung 22/08	31
4.4	BS Volas mit Gewichtung Fengler 13/06	35
4.5	BS Volas mit Gewichtung Fengler 22/08	35
5.1	GARCH-Volas 13/06	43
5.2	Heston-Nandi Startparameter 13/06	43
5.3	Heston-Nandi Call Parameter 13/06	45
5.4	Heston-Nandi Call Volatilitäten 13/06	45
5.5	Heston-Nandi Put Parameter 13/06	46
5.6	Heston-Nandi Put Volatilitäten 13/06	46
5.7	Heston-Nandi OTM Parameter Min1 13/06	46
5.8	Heston-Nandi OTM Volatilitäten Min1 13/06	46
6.1	Model Free Method 13/06	56
6.2	Model Free Method 22/08	57

Literaturverzeichnis

- [1] Eurex contract specifications.
- [2] Bakshi, Cao, and Chen. Empirical performance of alternative option pricing models. *Journal of Finance*, 52:2003–2049, 1997.
- [3] Gurdip Bakshi, Nikunj Kapadia, and Dilip Madan. Stock return characteristics, skew laws, and the differential pricing of individual equity options. *Review of Financial Studies*, 16(1):101–143, 2003.
- [4] Emanuel Derman. *My Life as a Quant: Reflections on Physics and Finance*. John Wiley and Sons, 2004.
- [5] Matthias R. Fengler. *Semiparametric modeling of implied volatility*. Springer, 2005.
- [6] Lutz Hahnenstein, Sascha Wilkens, and Klaus Röder. Die black-scholes-optionspreisformel.
- [7] Tobias Herwig. *Construction of Arbitrage-Free Implied Trees: A New Approach*. [http : //papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id = 643584](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=643584), 2005.
- [8] Tobias Herwig. *Market-Conform Valuation of Options*. Springer, 2006.
- [9] John Hull. *Optionen, Futures und andere Derivative*. Oldenbourg, 1995.
- [10] Henry A. Latané and Richard J. Rendleman. Standard deviations of stock price ratios implied in option prices. *The Journal of Finance*, 31:369–381, 1976.
- [11] Hartmut Nagel. *Optionsbewertung bei stochastischer Volatilität*. Deutscher Universitäts-Verlag, 2001.
- [12] Ser-Huang Poon. *A practical guide to forecasting Financial Market Volatility*. 2005.
- [13] Hafner R. and Wallmeier M. The dynamics of dax implied volatilities. *International Quarterly Journal of Finance* 1, 1:1–27, 2001.

- [14] Mark Rubinstein. Nonparametric tests of alternative option pricing models. *Journal of Finance*, 40(2):455–480, 1985.
- [15] Sascha Wilkens. *Optionsbewertung und Risikomanagement unter gemischten Verteilungen*. Deutscher Universitäts-Verlag, 2003.

Abstract

Die vorliegende Masterarbeit beschäftigt sich mit impliziten Volatilitäten von Optionen. Zunächst wird allgemeine Theorie zu Volatilitäten und verschiedenen Optionsmodellen behandelt. Neben dem Standardmodell von Black-Scholes wurde als komplexeres Modell jenes von Heston-Nandi erwähnt. Als drittes wurde eine modellfreie Methode vorgestellt, die im Gegensatz zu den beiden vorigen Modellen nicht der Modellierung der Optionspreise dient, sondern nur der Berechnung von Verteilungsparametern, wie der Volatilität. Es wird dabei auch immer auf Augenmerk auf die praktische Anwendung gelegt. Die Modelle setzen Eigenschaften des Marktes und der Produktpreise voraus, die in der Realität nicht immer zutreffen. Der dabei oft verwendete Begriff des Optionssmiles wird dabei erklärt und mögliche Gründe dafür erwähnt.

Anhand von Optionspreisen des Deutschen Aktienindex (DAX) wurden unter Anwendung der erwähnten theoretischen Modelle bzw. Methoden implizite Volatilitäten berechnet. Diese wurden genutzt um so theoretische Optionspreise zu berechnen und mit den tatsächlichen Marktpreisen zu vergleichen, um so die Qualität des jeweiligen Modelles für die Praxis zu überprüfen. Auch mit historischen Volatilitäten wurde verglichen. Außerdem wurde gezeigt, wie mit Entscheidungen zu Gewichtungen, Art der Minimierung oder Teilauswahl von gegebenen Marktdaten die Berechnungen je nach Bedarf oder Priorität angepasst werden können. Es zeigte sich, dass auch mit komplexeren Modellen keine genaue Anpassung an die realen Marktdaten möglich ist. Es ist also fragwürdig, ob sich dieser rechnerische Mehraufwand rentiert.

Akademischer Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Barbara Schneider, geb. Jalits
Geboren	1979 in Oberwart (Burgenland)
Staatsbürgerschaft	Österreich
Wohnhaft in	Wien

Ausbildung

1985 - 1989	Volksschule Kleinpetersdorf
1989 - 1993	Hauptschule Großpetersdorf
1993 - 1998	Handelsakademie Oberwart
2002 - 2007	Bakkalaureatsstudium Statistik, Universität Wien
seit 2007	Magisterstudium Statistik, Universität Wien

Bakkalaureatsarbeiten

- Anpassen von theoretischen Copulas an Aktienkurse des ATX (2006)
- Modellierung saisonabhängiger Daten am Beispiel österreichischer Strompreise (2007)