universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Die frühe Behandlung des Themas „Wahrscheinlichkeit“ ab der 6./7. Schulstufe in Deutschland – Beispiele, Vorteile und fachdidaktische Reflexionen

Verfasserin

Sabine Steger

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Steyr, im Juni 2012

Matrikelnummer:	0550886
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 362 406
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Russisch UF Mathematik
Betreuer:	Univ.-Prof. Dr. Hans Humenberger

„Die auf tägliche Erfahrung begründete oder durch Furcht und Hoffnung übertriebene Wahrscheinlichkeit macht mehr Eindruck auf uns als eine größere, aber nur aus der Rechnung folgende Wahrscheinlichkeit.“

(P.S. de Laplace, 1814)

Vorwort

Die Idee zu der vorliegenden Diplomarbeit stammt von Univ.-Prof. Dr. Hans Humenberger. An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich für seine intensive Unterstützung beim Entstehen dieser Arbeit und für viele wertvolle Hilfestellungen bedanken.

Ein lieber Dank gebührt meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, die mir dieses Studium ermöglicht haben. Des Weiteren danke ich meinem Freund, FreundInnen und StudienkollegInnen, die mir immer wieder eine große Stütze sind.

Inhaltsverzeichnis

IV. Möglichkeiten und Risiken der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Sekundarstufe I

Kapitel I

Einleitung

Die Idee mich mit dem Thema „Stochastik in der Unterstufe“ auseinanderzusetzen kam von Herrn Univ.-Prof. Dr. Humenberger.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, auf Vor- und Nachteile der Behandlung des Themas „Wahrscheinlichkeit“ ab der 6. bzw. 7. Schulstufe einzugehen und konkrete Vorschläge für den Mathematikunterricht vorzustellen.

Als Einführung in die Thematik soll auf psychologische Aspekte der Entwicklung der Begriffe „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ bei Kindern und Jugendlichen eingegangen werden. Die Beschäftigung mit empirischen Untersuchungen soll dann als Grundlage für die weiteren, fachdidaktischen Überlegungen dienen.

Im Anschluss sollen verschiedene Gründe genannt werden, die für eine (frühe) Behandlung des Themas „Wahrscheinlichkeit“ sprechen. Des Weiteren sollen sowohl der Lehrplan in Deutschland als auch in Österreich näher untersucht werden. Da es in der Bundesrepublik Deutschland keinen einheitlichen Lehrplan gibt dienen in der vorliegenden Arbeit die Lehrpläne der Bundesländer Bayern, Niedersachsen, Baden-Württemberg und Nordrhein-Westfalen als Vergleich.

Anregungen für fachdidaktische Überlegungen liefert ein Vergleich mehrerer deutscher Schulbücher, deren positive und negative Aspekte beleuchtet werden sollen. Anschließend folgt ein kurzer Vergleich mit den in österreichischen Mathematik-Lehrbüchern für die 6. Klasse gewählten Einstiegen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Im Anschluss an dieses Kapitel soll ein möglicher Einstieg in das Thema anhand ausgewählter Beispiele skizziert werden.

Alle Bezeichnungen in der vorliegenden Diplomarbeit sind geschlechtsneutral zu verstehen.

Kapitel II

Die Entwicklung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffs bei Kindern und Jugendlichen

Um verschiedene Möglichkeiten der Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe I ausreichend beurteilen zu können, ist es von großem Vorteil auch psychologische Überlegungen anzustellen. Es existieren zahlreiche empirische Untersuchungen, die sich mit der Entwicklung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffs bei Heranwachsenden auseinandergesetzt haben.

„Generell kann vorweg gesagt werden, dass das schulfähige Kind in der Lage ist, Zufallsgeschehen zu erkennen und zu beobachten, und dass in der Primarstufe und Sekundarstufe I Stochastik mit Erfolg unterrichtet werden kann." (Kütting 1994, S. 77.)

„Der Mensch besitzt auf Grund seiner Alltagserfahrung eine große Zahl von Intuitionen, die es ihm erlauben, auf Umweltsituationen adäquat zu reagieren.[…] Wie sich diese Intuitionen im Bereich der Stochastik mit wachsendem Lebensalter (4 bis 12 Jahre) entwickeln, wurde in einer Reihe empirischer Untersuchungen erforscht[1]. Sie haben in Ergänzung zu den ersten Ansätzen durch Piaget ergeben, dass die Entwicklung im Rahmen gewisser endogen bedingter Grenzen durch gezielte Umweltanregungen gefördert werden kann. In manchen Fällen sind solche Anregungen zur Vermeidung von später schwer korrigierbaren Fehlintuitionen unerlässlich. Das lässt das Einsetzen des Stochastikunterrichts schon auf der Primarstufe ratsam erscheinen." (Riemer 1985, S.51f)

[1] Z.B.: Piaget, J.; Inhelder, B.: La genèse de l´idée de hasard chez l´enfant. Paris 1974 (siehe Kapitel 2.1)

2.1 Die Entwicklung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Jean Piaget und Bärbel Inhelder haben sich in ihrem Buch mit dem Titel *„La genèse de l´idée de hasard chez l´enfant"*[2] (Paris 1974) mit Versuchen zur Entwicklung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffs bei Kindern im Alter von vier bis zwölf Jahren befasst. Piaget stützt sich in diesen Untersuchungen auf die von ihm entwickelte Einteilung der Phasen der geistigen Entwicklung des Menschen. Besonders interessant sind in diesem Fall:

- (die sensomotorische Phase; ca. 0-2 Jahre)
- die präoperationale Phase; ca. 2-7 Jahre (Stadium I)
- die Phase der konkreten Operationen; ca. 7-12 Jahre (Stadium II)
- die Phase der formalen Operationen; ab 11/12 Jahre (Stadium III)

Diese Phasen dürfen nicht als ausnahmslos gültige Schranken für jedes Kind angesehen werden, da die geistige Entwicklung bei jedem Menschen unterschiedlich schnell verläuft. Allerdings werden diese Phasen im Laufe der geistigen Entwicklung in dieser Abfolge durchlaufen.

Ein Kind kann sich in der Phase der konkreten Operationen, im Unterschied zur präoperationalen Phase, auch schon in Gedanken mit konkreten Gegenständen beschäftigen. Allerdings sind Kinder in diesem Stadium noch nicht in der Lage über reine Hypothesen nachzudenken, sondern können ihre Schlüsse nur aus tatsächlichen Beobachtungen ziehen. Im Stadium III ist es Kindern möglich mit (mathematischen) Symbolen umzugehen und beispielsweise Überlegungen konkreter Art anzustellen.

Piaget und Inhelder führten ihre Versuche mit Hilfe einer Interviewtechnik durch. Den Kindern wurden die Versuche ausschließlich verbal erklärt und sie wurden dann dazu angehalten, Äußerungen über den von ihnen erwarteten Versuchsausgang zu machen.

Hauptkritikpunkt an diesen Untersuchungen ist, dass bei Gesprächen zwischen den Versuchspersonen und den Versuchsleitern Missverständnisse nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Weiters erfolgte keine genaue statistische Auswertung der gewonnenen Ergebnisse.

[2] Piaget, J.; Inhelder, B.: La genèse de l´idée de hasard chez l´enfant. Paris 1974
Zitiert nach: Kütting 1994, S. 87

Zusammengefasst liefern diese Untersuchungen folgende Erkenntnisse: (Kütting 1994, S.87)

- Den Unterschied zwischen zufälligen und nicht zufälligen Ereignissen können Kinder erst ab einem Alter von etwa sieben Jahren erkennen.
- Die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist sowohl an die des Zufallsbegriffs als auch des Proportionalitätsbegriffs und die Entwicklung der kombinatorischen Operationen gebunden.

Nach Piaget und Inhelder ist dieser Prozess erst bei Kindern im Stadium III, also ab dem elften Lebensjahr, voll ausgeprägt.

Um diese Ergebnisse noch zu veranschaulichen, soll an dieser Stelle ein Versuch näher beschrieben werden.

Der Perlenversuch[3]

In eine rechteckige Schachtel werden jeweils vier rote und vier weiße Perlen, getrennt durch eine kurze Seitenwand, gegeben. Durch eine Kippvorrichtung rollen die Perlen an die gegenüberliegende Wand der Schachtel und zurück. Die Aufgabe der befragten Kinder war es, die Wege der Perlen bei einer oder mehrerer Kippbewegungen vorauszusagen und aufzuzeichnen.

Stadium I: Die Kinder sind nicht in der Lage das Zufallsexperiment als solches zu erkennen und sind daher der Meinung, dass die Trennung nach Farben erhalten bleibt und jede Kugel einen bestimmten Weg zurücklegt. Sie erwarten nach dem Kippen eine Rückkehr der Kugeln in ihre Ausgangslage.

Stadium II: Die Annahme der Kinder in diesem Stadium ist, dass es Mischungen einzelner Kugeln gibt, jedoch werden noch keine Aussagen über die Gesamtzahl der Möglichkeiten gemacht. Die Möglichkeit, dass eine Kugel an ihren Ausgangsplatz zurückkehrt wird als schwierig, aber nicht unmöglich eingeschätzt.

---

[3] Piaget, J.; Inhelder, B.: La genèse de l´idée de hasard chez l´enfant. Paris 1974
Zitiert nach: Kütting 1994, S. 87

Stadium III: Kinder ab dem elften bzw. zwölften Lebensjahr sind in der Lage zu erkennen, dass sich die Kugeln bei mehreren aufeinanderfolgenden Kippbewegungen der Schachtel immer stärker vermischen. Die Autoren nehmen sogar an, dass sich bereits in diesem Stadium ein Verständnis für das empirische Gesetz der großen Zahlen entwickelt.

„Dieser Zufallsversuch macht deutlich, dass die Kinder bis zum Alter von etwa sieben Jahren noch nicht zwischen „möglich" und „notwendig" unterscheiden. Die zum Verständnis des Zufallsbegriffs hilfreiche Kenntnis annähernd irreversibler Mischungen (wegen der Vielzahl der Möglichkeiten) ist noch nicht vorhanden." (Kütting 1994, S. 88)

Ein weiterer sehr interessanter Versuch von Piaget und Inhelder besteht aus zwei Teilen: In einem Sack befinden sich gleich viele rote und blaue Kugeln. Es werden Stichproben gezogen und die Versuchspersonen sollen eine Prognose abgeben, welche Farbe als nächste gezogen wird. (Leider wird in der Beschreibung des Versuchsaufbaus nicht deutlich erklärt, ob die Kinder wissen, dass sich in dem Sack gleich viele rote und blaue Kugeln befinden. Weiters fehlen Informationen darüber, wie groß die gezogene Stichprobe war und ob das Ziehen mit oder ohne Zurücklegen erfolgte.)

Anschließend wird der Sack (unbemerkt von den Versuchspersonen) durch einen Sack mit ausschließlich blauen Kugeln ersetzt und der Versuch wiederholt. Folgende Ergebnisse wurden dabei beobachtet: (Weissenbök 1993, S. 17 ff)

Stadium I: Kinder in diesem Stadium sind davon überzeugt, dass es möglich ist richtige Prognosen zu treffen. Auch wenn sie selbst oft Schwierigkeiten haben eine Voraussage zu tätigen, so sind sie doch allgemein von der Vorhersehbarkeit überzeugt.

Einige Versuchspersonen sind der Meinung, dass auf eine Farbe immer die andere folgen muss („Alternation"). Andere Kinder sind überzeugt, dass die gleiche Farbe wieder gezogen wird („Konstanz"). Außerdem wird auch angenommen, dass einige Kinder einfach ihre bevorzugte Farbe voraussagen („subjektiv-egozentrische Kriterien"). Nach dem Vertauschen der Säckchen sind die Versuchspersonen wenig erstaunt, dass nur noch blaue Kugeln gezogen werden. Ihrer Meinung nach müssen dann eben bei der nächsten Versuchsdurchführung mehr rote Kugeln gezogen werden. Diese Aussage weist darauf hin, dass die Kinder darüber informiert wurden, dass sich im ersten Säckchen gleich viele blaue und rote Kugeln befanden.

Stadium II: In diesem Stadium entwickelt sich langsam die Vorstellung von zufälligen Einzelereignissen.

Zwar sind die Kinder immer noch geneigt der Farbe, die schon länger nicht gezogen wurde den Vorzug zu geben, haben jedoch ein Gefühl dafür entwickelt, dass sich keine sicheren Voraussagen tätigen lassen. Nachdem die Säckchen ausgetauscht werden, bemerken die Versuchspersonen schnell, dass sich im Versuchsaufbau etwas geändert haben muss.

Stadium III: In diesem Stadium sind die befragten Kinder in der Lage zu erkennen, dass die Verteilung mit zunehmender Versuchsdurchführung regelmäßiger wird.

Aufgrund der Gesprächsprotokolle schließen Piaget und Inhelder darauf, dass Kinder Zufallsphänomene und eine Zufallsidee bereits im Alter von etwa sieben Jahren entwickeln. Außerdem lassen die Versuchsergebnisse erkennen, dass Kinder bereits in der präoperationalen Phase eine erste Intuition von Zufall besitzen. Diese Annahme wurde durch Änderung der Untersuchungsmethoden auch belegt. Die Untersuchungen von Piaget und Inhelder waren Ausgangspunkt zahlreicher weiterer Forschungen.

Wie bereits erwähnt, liegt der Hauptkritikpunkt an Piagets und Inhelders Versuchen an der Verwendung der Interviewtechnik, da für diese Methode sprachliche Fähigkeiten der Kinder unbedingt notwendig sind. Außerdem könnten die Versuchsergebnisse dadurch verfälscht werden, dass die Versuchspersonen ihrer persönlich präferierten Farbe den Vorzug geben.

2.2 Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff

Im Buch „Glück und Risiko“ der beiden Autoren John Cohen und Mark Hansel wird der „subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff“ untersucht, den die Autoren als *„den Ausdruck für den Grad unserer Ungewissheit“* definieren. (Cohen/Hansel 1961, S. 14)
Besonderes Augenmerk wird dabei auf folgende Aspekte gelegt (Cohen/Hansel 1961, S. 14):

- Die Untersuchung der psychischen Antriebskräfte, durch die die subjektive Wahrscheinlichkeit bestimmt wird.
- Die Erforschung der Grundsätze, nach denen wir eine Wahl treffen, Voraussagen tätigen und Risiken eingehen.
- Die typischen Veränderungen in der Ausübung dieser Tätigkeiten im Verlauf der menschlichen Lebensentwicklung.

Unabhängige Ereignisse – ein Versuch

Cohen und Hansel befassten sich mit der Schwierigkeit, die viele (erwachsene) Menschen in Bezug auf unabhängige Ereignisse haben: eine Voraussage für einen unabhängigen Vorfall zu treffen. In einem Versuch wurden 93 Kinder im Alter von zehn bis elf Jahren beobachtet.

In einem Gefäß befanden sich nur blaue und gelbe Kugeln mit für die Versuchspersonen unbekanntem Mischungsverhältnis. Nacheinander wurden drei Kugeln gezogen und den Versuchspersonen gezeigt. Die Farbe der vierten Kugel musste dann von den Kindern erraten werden.

Von den herausgegriffenen Kugeln waren immer zwei von einer Farbe („vorherrschende Farbe") und die dritte Kugel von der anderen Farbe („nichtvorherrschende Farbe"). Bei jeder Farbenfolge (bgg, gbb, gbg, bgb, ggb, bbg) durften die Versuchspersonen zweimal raten.

Die Ergebnisse dieses Versuchs zeigten unter anderem Folgendes:
(Cohen/Hansel 1961, S. 22 f)

- Bei 68% der Voraussagen für die vierte Kugel wurde die nichtvorherrschende Farbe gewählt.
- Die nichtvorherrschende Farbe wurde vor allem dann gewählt, wenn ihr Auftreten schon länger zurücklag. (z.B. wurde am häufigsten „gelb" bei der Kombination gbb gewählt)

Cohen und Hansel schlossen aus den Voraussagen für die Farbe der vierten Kugel, dass sich Kinder von einem gewissen *„Gleichgewichts- oder Ausgleichsgrundsatz leiten lassen"*. (Cohen/Hansel 1961, S.23)

Das Ergebnis wurde so gedeutet, dass die Farbvoraussagen für die vierte Kugel abhängig von den vorher gezogenen Farben getroffen werden.

Eine weitere Erkenntnis, die durch diesen Versuchsaufbau gewonnen wurde, ist, dass von den zehn- bis elfjährigen Versuchspersonen angenommen wird, dass die Anzahl der blauen und gelben Kugeln im Gefäß gleich ist, wenn kein Mischungsverhältnis angegeben wird. Dieses Ergebnis zeigte sich in ähnlichen Versuchen auch bei Kindern im Alter von zwölf und dreizehn bzw. vierzehn und fünfzehn Jahren.

Allerdings sinkt die Tendenz die nichtvorherrschende Farbe zu prognostizieren mit zunehmendem Alter. Einen Erklärungsversuch dafür liefern Cohen und Hansel aber nicht. (Cohen/Hansel 1961, S. 110ff)

Wurde das Herausnehmen von Kugeln aus einem Gefäß durch realitätsbezogene Ereignisse ersetzt, zeigten sich die beinahe gleichen Ergebnisse. In diesem Fall wurde den Kindern die Frage nach der Gewinnermannschaft einer Ruderregatta gestellt. Der nichtvorherrschende Wettbewerber, der die Regatta länger nicht gewonnen hatte, wurde von 62% der Befragten als Sieger vorausgesagt. (Cohen/Hansel 1961, S. 24)

In einem weiteren Versuch wurde die Entwicklung des Unabhängigkeitsbegriffs bei SchülerInnen zwischen zwölf und fünfzehn Jahren untersucht.

Dabei wurde eine Münze achtmal geworfen. Jeder der acht Würfe hatte den Versuchsausgang „Zahl".

15 % der jüngeren und 27% der älteren Kinder dieser Versuchsgruppe meinten: *„Entweder die Zahlenseite oder die Wappenseite wird oben liegen."* (Cohen/Hansel 1961, S. 31)

Diese Aussage legt nahe, dass die Ereignisse von den SchülerInnen bereits als voneinander unabhängig angesehen werden. Auch die verschiedenen Begründungen der Versuchspersonen für ihre Voraussagen helfen zu verstehen, warum nicht immer das nichtvorherrschende Ereignis gewählt wurde. Darunter wurde zum Beispiel häufig genannt, dass der bisherige Verlierer beim Münzwurf nun auch einmal gewinnen soll oder umgekehrt, dass sich das bisherige Ergebnis fortsetzen wird. Eine Erklärung dafür war unter anderem, dass ein Münzwerfer eventuell geschickter im Werfen sei.

Weitere Erklärungen der Kinder waren auch „Glück", „Beharrlichkeit", „das Gesetz der Reihe" oder auch eventuelle magische Einflüsse („Zauberei").

Bei jenen Versuchsteilnehmern, die an Unabhängigkeit glauben, wird als Begründung vor allem die Unmöglichkeit der Vorausbestimmung genannt. Einige sind aber auch der Meinung, dass der Ablauf zwar im Vorhinein festgelegt ist, dieser aber nicht vorausgesagt werden kann.

Zusammengefasst zeigen die Versuchsergebnisse, dass Kinder erst im Alter von 12 bis fünfzehn Jahren ein Verständnis für den Begriff „unabhängiges Ereignis" entwickeln.

Die jüngeren Versuchsteilnehmer neigten überwiegend dazu den nichtvorherrschenden Ausgang eines Experiments zu begünstigen.

Auch an den Untersuchungen von Cohen und Hansel muss Kritik geübt werden, da manche Ergebnisse (z.B. bbb, ggg) durch den Versuchsaufbau nicht berücksichtigt werden. Dadurch sind die Versuchspersonen in ihren Voraussagen eingeschränkt.

Weiters können die Ereignisse von den Kindern nicht als „gleich wahrscheinlich" eingestuft werden, da sie sich für eine Farbe, entweder Gelb oder Blau, entscheiden müssen.

Kapitel III

Stochastik in der Sekundarstufe I

3.1 Gründe für die (frühe) Behandlung von Stochastik im Unterricht

„Stochastik im Unterricht der Sekundarstufe I bietet viele Anlässe für verschiedene Schüleraktivitäten – Messen, Schätzen, Entscheiden, Experimentieren und Daten-sammeln, Vergleichen und Argumentieren." (Harten 1984, S.1)

Durch ihren starken Anwendungsbezug bietet die Stochastik eine große Vielfalt an Möglichkeiten im Mathematikunterricht. Die folgende Auflistung nennt einige wichtige allgemeine Gründe für die Behandlung der Stochastik (primär) im Unterricht der Sekundarstufe I. (Kütting 1994, S. 21ff)

3.1.1 Anwendbares Wissen

Der Begriff „Zufall" spielt in unserem Leben eine wichtige Rolle. Aufgabe der Schule ist es, zum Verständnis zufallsbedingter Erscheinungen beizutragen. Im Mathematikunterricht geht es dabei um die Vermittlung anwendbaren Wissens und die Anwendung auf reale Situationen.

Im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsrechnung werden aus den Bereichen Glücksspiel und Lotterie immer wieder Beispiele verwendet. Eine klassische Aufgabenstellung ist beispielsweise die Berechnung der Gewinnchancen beim Lotto 6 aus 45. Auch einfache Würfelspiele sind in der Erfahrungswelt von Kindern und Jugendlichen schon bekannt. Hier könnten im Unterricht Spielregeln hinterfragt werden. Bei vielen Brettspielen darf beim Würfeln einer „6" ein zweites Mal gewürfelt werden. Diese Regel eignet sich gut dazu eine Diskussion zu eröffnen, da sie den Eindruck vermittelt, eine „6" würde beim Würfeln besonders selten auftreten.

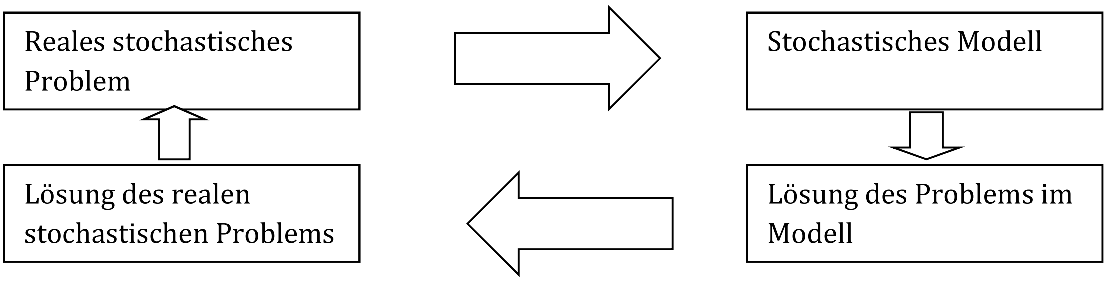
Einen weiteren Themenschwerpunkt im Unterricht sollten auch Prognosen aufgrund statistischer Daten darstellen. Die SchülerInnen sollten dabei unterstützt werden, selbstständig Urteile über Schaubilder und Diagramme fällen zu können. Dabei ist es unbedingt nötig auf das weit verbreitete „Lügen mit Statistik" einzugehen und eingehend zu besprechen.

Weitere realitätsbezogene Themengebiete, die aber eher in der Sekundarstufe II an Bedeutung gewinnen, sind Qualitätskontrollen mit Hilfe von Stichproben, Testung medizinischer Präparate, Testverfahren in der Psychologie oder auch die Simulation chemischer und physikalischer Prozesse.

Ein weiterer Punkt ist für den Unterricht von wesentlicher Bedeutung: Die SchülerInnen sind mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Lage Zufallsgeschehen des täglichen Lebens zu objektivieren und zu vergleichen. Dies ist beispielsweise bei Glücksspielen („Wie groß ist meine Chance auf einen Lottogewinn?"), bei Wettervorhersagen („Die Chance, dass es morgen regnet beträgt 40%.") oder auch bei medizinischen Testverfahren (siehe Kapitel „Bayesian Reasoning") von großer Bedeutung.

3.1.2 Prozess der Mathematisierung/Modellbildung

Die Stochastik eignet sich hervorragend dazu den Prozess der Mathematisierung und Modellbildung zu vermitteln. Zufallsbestimmte Situationen im Alltag können mit Hilfe von Modellen mathematisch beschrieben, erfassbar und somit berechenbar gemacht werden. Probleme der Realität können als mathematische Fragestellung formuliert und gelöst werden. Einen wichtigen Schritt stellt dabei die Interpretation der mathematischen Lösung für die Lösung des realen Problems dar.



Als theoretisches Gegenstück zum Zufallsexperiment wird also ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell erstellt, das eine Beschreibung des gegebenen Sachverhalts erleichtert.

SchülerInnen sollen dann gegebenenfalls in der Lage sein hinter anderen Zufallsproblemen und -experimenten die gleiche Struktur zu erkennen.

Besonders bequem, wenn auch nicht besonders einfallsreich, lassen sich Zufallsphänomene anhand von Urnenmodellen erkennen, da jedes Zufallsexperiment mit endlich vielen Elementarereignissen (mit rationalen Zahlen als Wahrscheinlichkeiten) gedanklich durch ein Urnenmodell ersetzt werden kann.

3.1.3 Substantielle mathematische Erkenntnisse

Die Behandlung der Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik ist notwendig um die Denkfähigkeit im Mathematikunterricht zu vervollständigen. Durch den Einsatz geeigneter Beispiele kann die Kreativität der SchülerInnen zur selbstständigen Entdeckung verschiedener Lösungswege gefördert werden. Auch das Erkennen isomorpher Probleme und ihrer Lösungen ist ein wichtiger Aspekt. Zusätzlich können im Rahmen des Statistikunterrichts auch Fähigkeiten zum Sammeln und angemessenen Darstellen von Datenmaterial vermittelt werden. Weitere wertvolle Fähigkeiten, die vermittelt werden können, sind:

- Argumentations- und Kommunikationsfähigkeit
- Lösungsfindung durch Vereinfachung
- Lösungsfindung durch Simulation (z.B. mit Hilfe von Urnenmodellen, Tabellenkalkulation in EXCEL)
- Behandlung von Aufgabenstellungen mit unrealistischen Einkleidungen
- Kritische Auseinandersetzung mit Aussagen beschreibender Statistik

3.1.4 Die intrinsische Motivation

Seitens der SchülerInnen wird im Unterricht häufig die Frage nach Sinn und Anwendbarkeit des gerade behandelten Stoffgebiets aufgeworfen. Im Fall der Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt es viele Aufgabenstellungen, die durch ihren Realitätsbezug bei den Lernenden eine intrinsische Motivation bewirken können.

Die Stochastik bietet viele Möglichkeiten Alltagserfahrungen der SchülerInnen aufzugreifen und in verschiedenen Aufgabenstellungen zu behandeln.

Beispielsweise können zufallsbehaftete Erscheinungen aus den Bereichen Sport, Freizeit, Verkehr oder Schule im Rahmen des Mathematikunterrichts besprochen werden.

Dabei ist es von großer Bedeutung möglichst realistische und im besten Fall von den SchülerInnen selbst erhobene Daten zu verwenden.

Auch mit Hilfe von Simulationen (z.B. Urnen- oder Würfelexperimenten) ist es möglich, die SchülerInnen durch selbstständiges Mitarbeiten aktiv am Unterricht teilnehmen zu lassen. Insbesondere für die Motivation jüngerer SchülerInnen sind Experimente mit Würfeln oder Münzen sicherlich von Vorteil.

3.1.5 Beziehung zu anderen Gebieten der Mathematik

Der Stochastikunterricht eignet sich hervorragend zur Vertiefung und Anwendung der Themengebiete Bruch- und Prozentrechnung.

Da sowohl der Begriff der relativen Häufigkeit $h_n(A) = \frac{Anzahl\ der\ Versuche\ mit\ dem\ Ergebnis\ A}{Gesamtzahl\ n\ der\ durchgeführten\ Versuche}$ als auch die klassische Laplace-Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{Anzahl\ g(A)\ der\ für\ A\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ m\ der\ möglichen\ Fälle\ (gleichwahrscheinlich)}$ eines Ereignisses A durch einen Bruch beschrieben werden, kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Trainieren der Rechenfähigkeit mit Brüchen dienen.

Auch die interessante Entwicklung der Stochastik im Lauf der Geschichte eignet sich dazu den Mathematikunterricht lebendig zu gestalten. In der Oberstufe ist auch eine philosophische Beschäftigung mit dem Thema denkbar.

3.1.6 Beschreibende Statistik in der Sekundarstufe I

Auch für die Integration der beschreibenden Statistik in der frühen Sekundarstufe I gibt es viele Argumente. Da diese aber im Lehrplan der AHS-Unterstufe in Österreich ohnehin bereits ihren Platz gefunden hat, soll an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen werden.
Den SchülerInnen kann durch die Beschäftigung mit diesem Thema geholfen werden, verschiedenste Sachverhalte im Alltag zu verstehen und kritisch zu betrachten. Die Lernenden sind beispielsweise besser in der Lage Graphiken zu deuten, selbst anzulegen und vor allem Manipulationen an statistischen Daten einfacher zu erkennen.

Die beschreibende Statistik kann auch großen Wert für die Allgemeinbildung der SchülerInnen haben. Sie sind gezwungen sich mit umgangssprachlichen Ausdrücken (ungefähr, fast, mindestens, praktisch nie, wahrscheinlich, etc.) auseinanderzusetzen und sind dadurch im besten Fall in der Lage, den Kern einer Aussage herauszufiltern und (sprachlich richtig) zu präzisieren.

Die SchülerInnen lernen zu erkennen ob mit Extrem- oder Durchschnittswerten, Stichproben oder einer Gesamterhebung gearbeitet wurde.

Winter geht sogar so weit, dass er dem Stochastikunterricht *„eine neue Chance für das Mathematiklernen überhaupt"* (Winter 1981, S. 285) zuspricht. Durch den besonderen Realitätsbezug, den offeneren Fragestellungen und die vielfältigen Bezüge zu anderen Disziplinen könnten bisher weniger erfolgreiche SchülerInnen ein neues Selbstbild entwickeln.

3.1.7 Weitere Gründe

Die Frage, warum es sinnvoll ist schon im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I mit den Themen Wahrscheinlichkeit und Statistik zu beginnen, könnte man folgendermaßen beantworten: (vgl. Panknin 1972, S. 9 ff)

Erstens gibt es im Lehrplan der Oberstufe viele zu erarbeitende Themengebiete, die eine intensive Behandlung der Stochastik kaum zulassen.

Außerdem haben die SchülerInnen zu diesem Zeitpunkt eine Altersstufe erreicht, in der sie den grundlegenden Aufgabenstellungen der Wahrscheinlichkeit und Statistik nur noch wenig Interesse entgegenbringen. Panknin nennt an dieser Stelle als Beispiel das Werfen von Münzen oder Würfeln. Dies ist bereits in einer viel früheren Altersstufe möglich und die Ergebnisse können von den Lernenden problemlos in Tabellenform aufgenommen oder graphisch dargestellt werden.

Ein weiteres Argument, das für eine frühere Behandlung des Themas „Wahrscheinlichkeit" im Mathematikunterricht spricht ist, dass viele Menschen kein Gymnasium oder eine andere höher bildende Schule besuchen und diesem Teil der Bevölkerung somit die Möglichkeit genommen wird Vorstellungen und Kompetenzen in diesem Themenbereich auszubilden. Beispiele wie in den unten angeführten PISA-Aufgaben sollten ohne Schwierigkeiten gelöst werden können.

Vielen Erwachsenen, die sich mit den Themen Wahrscheinlichkeit und Statistik in ihrer Schulbildung nicht beschäftigt haben, fehlt beispielsweise das Werkzeug mit statistischen Daten umzugehen. Dies ist insofern problematisch, als mit Datenmaterial und dessen Darstellung schon viel Schindluder getrieben wurde und auch weiterhin wird.

„Bedenkt man jedoch, dass sowohl Wahrscheinlichkeitsrechnung als auch Statistik in Alltag, Wirtschaft und Wissenschaften einen ständig breiter werdenden Raum einnehmen, so muss es die Aufgabe einer allgemeinbildenden Schule sein, jedem Schüler zumindest elementare Kenntnisse aus diesen Gebieten zu vermitteln." (Panknin 1972, S.9)

Insbesondere geben Aufgaben aus der Stochastik die Möglichkeit Verknüpfungen zur einfachen Mengenlehre, graphischen Darstellungen sowie zur Bruchrechnung herzustellen.

SchülerInnen, die bereits in der Sekundarstufe I elementare Kenntnisse aus diesem Gebiet erwerben, sind eher in der Lage in alltäglichen Situationen zutreffende Aussagen über zufällige Ereignisse zu tätigen.

Panknin betont dabei, dass es sehr wichtig sei, den Lernenden ausreichend Zeit zur selbstständigen Durchführung und Auswertung von Versuchen zur Verfügung zu stellen.

Es sei für den Unterricht außerdem ungünstig, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik als ein geschlossenes Themengebiet einzuführen. Sinnvoller wäre es einzelne Aufgabenstellungen immer wieder in den Unterricht einfließen zu lassen.

3.1.8 PISA[4]

„Was das Ziel von PISA betrifft, so sei erwähnt, dass dieses darin besteht, objektive sowie essentielle Bildungsindikatoren zu erheben. Jene Ergebnisse, welche sich aus dieser äußerst wichtigen und zudem angesehenen Studie ergeben, dienen den einzelnen Teilnehmerstaaten als wertvolle Basis, um die richtigen schulpolitischen Entscheidungen treffen zu können. Zudem soll damit die Effektivität des jeweiligen Bildungssystems der Staaten nicht nur richtig eingeschätzt, sondern vor allem profund kontrolliert werden."[5]

Ein weiterer, nicht zu vernachlässigender, Grund das Thema „Wahrscheinlichkeit" bereits in der Sekundarstufe I zu behandeln sind die PISA-Testungen.[6] Diese Tests werden zurzeit in 32 teilnehmenden Staaten in einem 3-Jahres-Zyklus mit wechselnden Schwerpunkten durchgeführt.

---

[4] PISA „Programme for International Student Assessment"
[5] www.pisa-austria.at (Zugriff am 02.02.2012)
[6] www.bifie.at/pisa

Im Jahr 2009 lag der Schwerpunkt auf dem Thema „Lesekompetenz", im Frühjahr 2012 auf dem Thema „Mathematik" und „Problemlösekompetenz" und im Jahr 2015 wird das Hauptaugenmerk auf dem Thema „Naturwissenschaften" liegen. Getestet werden SchülerInnen am Ende ihrer Pflichtschulzeit, also etwa im Alter von 15/16 Jahren. In Österreich werden dabei etwa 5000 SchülerInnen in etwa 200 Schulen befragt.

Durchgeführt wird der PISA-Test an den Schulen von externen, eigens geschulten TestleiterInnen. Es werden sogenannte „Testhefte" ausgeteilt, die von den Jugendlichen in zwei Stunden bearbeitet werden müssen. Die Fragen aus den Bereichen Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften sind teilweise als Multiple-Choice-Aufgaben, teilweise aber auch als offene Fragen gestellt, bei denen die SchülerInnen selbstständig eine Antwort formulieren müssen. Zusätzlich gibt es im Anschluss an den Test noch einen Fragebogen zu wichtigen, die Leistung beeinflussenden Faktoren wie Geschlecht, Beruf und Ausbildung der Eltern, Geburtsland, Muttersprache und auch Einstellung und Motivation der SchülerInnen. Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt anonym.

In den veröffentlichten Beispielen[7] finden sich einige Aufgaben aus dem Bereich der Statistik.

Frage: PHYSIKTESTS

An Manuelas Schule führt der Physiklehrer Tests durch, bei denen 100 Punkte zu erreichen sind. Manuela hat bei ihren ersten vier Physiktests durchschnittlich 60 Punkte erreicht. Beim fünften Test erreichte sie 80 Punkte.

Was ist Manuelas Punktedurchschnitt in Physik nach allen fünf Tests?

Durchschnitt: ....

[7] https://www.bifie.at/node/264

Frage: MÜLL

Als Hausaufgabe zum Thema Umwelt sammelten Schüler/innen Informationen über die Dauer des natürlichen Abbaus von verschiedenen Müllarten, die Leute wegwerfen:

Müllart	**Dauer des natürlichen Abbaus**
Bananenschalen	1–3 Jahre
Orangenschalen	1–3 Jahre
Kartonschachteln	0,5 Jahre
Kaugummi	20–25 Jahre
Zeitungen	Wenige Tage
Styroporbecher	Über 100 Jahre

Ein Schüler hat vor, diese Ergebnisse in einem Balkendiagramm darzustellen.
Gib **eine** Begründung an, warum ein Balkendiagramm zur Darstellung dieser Daten ungeeignet ist.

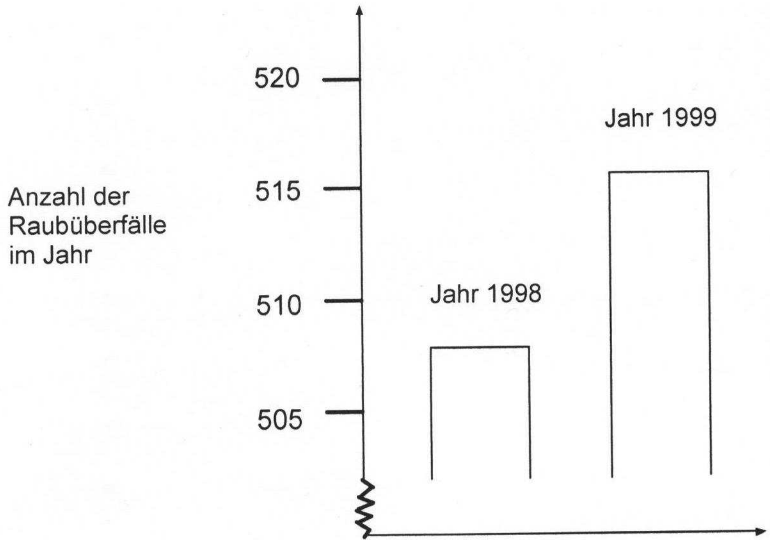
Interessant ist folgende Frage, die einen kritischen Umgang der SchülerInnen mit der Darstellung von Daten verlangt.

Bei der Bewertung des Beispiels wurde auch eine teilweise richtige Lösung belohnt, wenn beispielsweise angegeben wurde, dass die Interpretation des Diagramms nicht vernünftig ist, Detailangaben dazu jedoch in der Erklärung fehlten.

Frage: RAUBÜBERFÄLLE

Ein Fernsehreporter zeigte folgende Grafik und sagte:

„Der Graph zeigt, dass die Anzahl der Raubüberfälle von 1998 bis 1999 stark zugenommen hat."



Hältst du die Aussage des Reporters für eine vernünftige Interpretation des Diagramms? Begründe deine Antwort!

Zum Thema „Wahrscheinlichkeit" finden sich allerdings ebenfalls Beispiele in den veröffentlichten PISA-Aufgaben. Diese Aufgaben und die Aufgaben aus den Bereichen der Statistik und Kombinatorik werden unter dem Begriff „Unsicherheit" zusammengefasst.

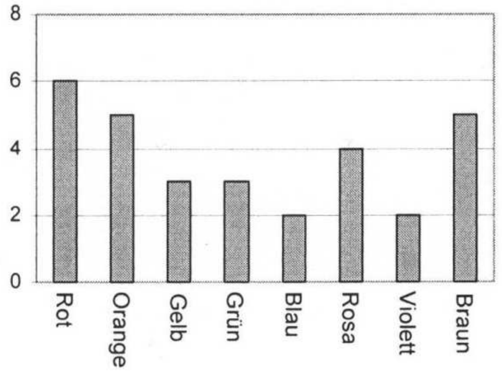
Bei folgendem Beispiel ist es klar, dass SchülerInnen, die mit dem Begriff „Wahrscheinlichkeit" im Unterricht noch nicht vertraut gemacht wurden, Probleme haben die Aufgabenstellung zu lösen. Schwierigkeiten werden auftreten, weil SchülerInnen nicht wissen, dass die Gesamtzahl der Zuckerl, die Anzahl der roten Zuckerl und schließlich der „Anteil der roten Zuckerl an der Gesamtzahl" ermittelt werden muss.

Der Begriff „Wahrscheinlichkeit" ist nicht bekannt und kann weder mit der Bruchrechnung, noch den in der Lösung angegebenen Prozentangaben in Verbindung gebracht werden.

Bei der Bewertung dieses Beispiels kann ganz klar nur die Antwort B als richtig anerkannt werden.

Frage: BUNTE ZUCKERL

Roberts Mutter lässt ihn ein Zuckerl aus einem Sackerl nehmen. Er kann die Zuckerl nicht sehen. Die Anzahl der Zuckerl jeder Farbe in dem Sackerl wird in der folgenden Grafik dargestellt.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Robert ein rotes Zuckerl erwischt?

A 10%
B 20%
C 25%
D 50%

Auch folgende Aufgabenstellung ist für SchülerInnen ohne Erfahrungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vermutlich schwierig zu lösen.

Frage: ERDBEBEN

Ein Dokumentarfilm über Erdbeben und darüber, wie oft Erdbeben auftreten, wurde gesendet. Er enthielt eine Diskussion über die Vorhersagbarkeit von Erdbeben.
Ein Geologe erklärte: „In den nächsten zwanzig Jahren liegt die Wahrscheinlichkeit, dass in Zedstadt ein Erdbeben auftritt, bei zwei zu drei.“

Welche der folgenden Aussagen gibt die Bedeutung *der Aussage des Geologen* am besten wieder?

A $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13{,}3$, deshalb wird es in 13 bis 14 Jahren von jetzt an gerechnet in Zedstadt ein Erdbeben geben.

B $\frac{2}{3}$ ist mehr als $\frac{1}{2}$, deshalb kann man sicher sein, dass es in Zedstadt irgendwann während der nächsten 20 Jahre ein Erdbeben geben wird.

C Die Wahrscheinlichkeit, dass es in Zedstadt irgendwann während der nächsten 20 Jahre ein Erdbeben geben wird, ist höher als die Wahrscheinlichkeit für kein Erdbeben.

D Man kann nicht sagen, was passieren wird, weil niemand sicher sein kann, wann ein Erdbeben auftritt.

Folgende Frage ist für SchülerInnen vermutlich auch ohne spezielle stochastische Erfahrungen zu lösen. Erfahrungen in der „elementaren Kombinatorik“ sind allerdings von großem Vorteil.

Frage: AUSWAHL

In einer Pizzeria kann man eine Basispizza mit zwei Belägen bekommen: Käse und Tomaten. Man kann sich auch seine eigene Pizza mit **zusätzlichen** Belägen zusammenstellen. Man kann aus vier verschiedenen zusätzlichen Belägen wählen: Oliven, Schinken, Pilze und Salami.

Richard möchte eine Pizza mit zwei verschiedenen **zusätzlichen** Belägen bestellen.

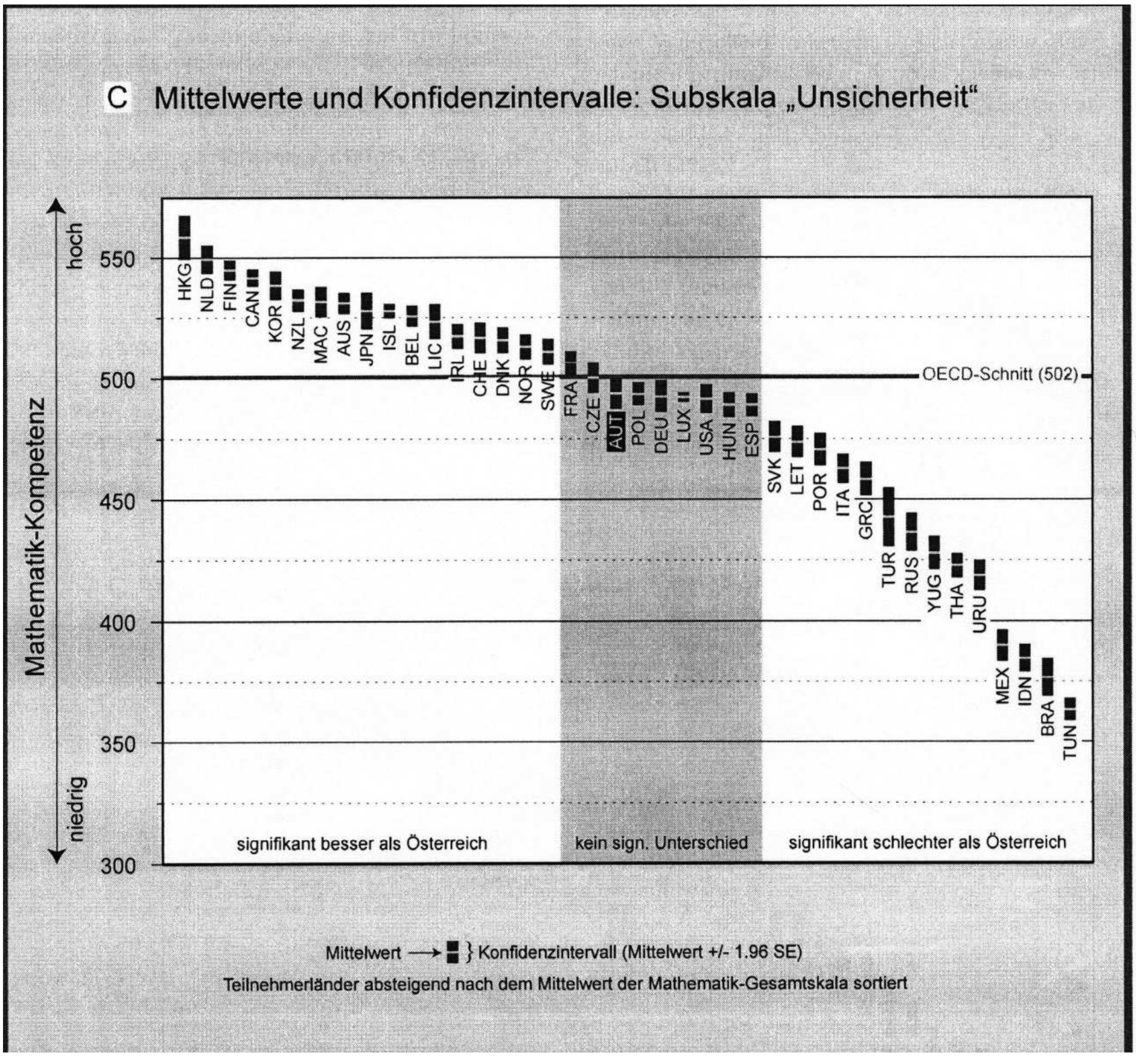
Zwischen wie vielen verschiedenen Kombinationen kann Richard wählen?

Antwort: .... Kombinationen.

Die Ergebnisse zu den PISA-Tests 2003[8] zeigen, dass Österreich in der Skala „Unsicherheit“ (Analyse und Darstellung von Daten, Wahrscheinlichkeiten, Unsicherheiten und Schlussfolgerungen) mit 494 Punkten unter dem OECD[9]-Schnitt liegt.

[8] http://diepresse.com/layout/diepresse/mediadb/Bildungsstudien/2004-12-04_pisa-2003-nationaler-bericht.pdf

[9] OECD „Organisation for Economic Cooperation and Development“



Fazit

Wenn es um das Lösen stochastischer Aufgaben geht, haben SchülerInnen in Österreich einen großen Nachteil bei den PISA-Tests. Zwar ist die beschreibende Statistik im österreichischen Lehrplan der AHS-Unterstufe vorgesehen, der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ wird laut Lehrplan jedoch erst in der sechsten Klasse eingeführt. Bei der Auswahl der PISA-Aufgaben wird keine Rücksicht auf die Lehrpläne der einzelnen Länder genommen. Somit ist es für österreichische SchülerInnen nicht möglich Beispiele wie das weiter oben beschriebene („Bunte Zuckerl“) zu lösen. Der normative Charakter der PISA-Aufgaben könnte in diesem speziellen Fall sogar positive Auswirkungen auf die Gestaltung des Lehrplans in Österreich haben.

3.2 Stochastik im Lehrplan – ein Vergleich zwischen Deutschland und Österreich

„In Deutschland umfasst die Sekundarstufe die Schulstufen 5 bis 13 (im verkürzten Bildungsgang 12), also je nach Bundesland bei einem Einschulalter von 5–7 Jahren und einer Schulpflicht von 10–12 Jahren in der Regel die Schüler der Altersstufen 9–19 Jahre. Die Schulen gliedern sich relativ konsequent in Sekundarstufe I (ISCED[10] 2, Ende der Schulpflicht) und Sekundarstufe II (Oberstufe, ISCED 3).

In Österreich entsprechen die Schulstufen 5 bis 12 der Sekundarstufe, das sind die 11–19-jährigen Regelschüler, man spricht von Unterstufe (Stufen 5–8, ISCED 2) und Oberstufe (Stufen 9–12, ISCED 3), wobei die Unterrichtspflicht nach Ende der 9 Schulstufe absolviert ist, sodass es eine spezielle einjährige Schule (Polytechnische Schule) in ISCED-3B gibt, die die Unterrichtspflicht abschließt, wenn man keine weiterführende Schule besucht.“ [11]

Im Folgenden sollen die Lehrpläne für Gymnasien in Österreich und Deutschland im Überblick verglichen werden. Im Unterschied zu Österreich existiert jedoch in Deutschland kein für alle Bundesländer einheitlicher Lehrplan.
Die Lehrpläne der einzelnen Bundesländer unterscheiden sich jedoch im Wesentlichen wenig voneinander. An dieser Stelle wurden zum Vergleich mit dem österreichischen Lehrplan die Lehrpläne der Bundesländer Bayern, Niedersachsen, Baden-Württemberg und Nordrhein-Westfalen heran gezogen.

Die Auswahl dieser Bundesländer erfolgte aufgrund der geographischen Nähe zu Österreich (Bayern), der Größe des Bundeslandes (Nordrhein-Westfalen) beziehungsweise der im dritten Kapitel verwendeten Schulbücher (alle vier Bundesländer).

Anforderungen in den Lehrplänen, die sich mit dem Thema „Wahrscheinlichkeit“ beschäftigen, sind fett gekennzeichnet.

[10] ISCED „International Standard Classification of Education“: entwickelt von der UNESCO zur Klassifizierung und Charakterisierung von Schultypen und Schulsystemen um internationale Vergleiche zu ermöglichen
[11] http://de.wikipedia.org/wiki/Sekundärer_Bildungsbereich (Zugriff 10.07.2011)

3.2.1 Der österreichische Lehrplan Mathematik AHS

5. und 6. Schulstufe

Im österreichischen Lehrplan Mathematik Unterstufe[12] findet sich bereits in der ersten Klasse der Punkt „Arbeiten mit Modellen, Statistik". Die SchülerInnen sollen in der Lage sein Tabellen und graphische Darstellungen zum Erfassen von Daten verwenden zu können. Im Lehrplan der zweiten Klasse wird dieses Themengebiet erweitert.

Des Weiteren sollen das Ermitteln relativer Häufigkeiten und das Erstellen, Verstehen und kritische Betrachten von graphischen Darstellungen sowie Manipulationsmöglichkeiten am Ende der sechsten Schulstufe beherrscht werden.

7. und 8. Schulstufe

Auch im österreichischen Lehrplan der dritten und vierten Klasse ist das Arbeiten mit Modellen und Statistik im Kernstoff enthalten. Am Ende der achten Schulstufe sollen die SchülerInnen in der Lage sein, Datenmengen auch mit Hilfe von statistischen Kennzahlen (Mittelwert, Median, Modus, relative Häufigkeit,…) zu beschreiben und darzustellen.

9. bis 12. Schulstufe

Im Lehrstoff der fünften Klasse findet sich im österreichischen Lehrplan für Mathematik kein Zusammenhang mit den Themen „Wahrscheinlichkeit und Statistik". Der Begriff „Stochastik" taucht erstmals im Lehrplan der sechsten Klasse (10. Schulstufe) auf. Folgende Themengebiete bilden den Kernstoff[13]:

[12] http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf
[13] http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf

- Beschreibende Statistik
- **Der Begriff Zufallsversuch; Beschreiben von Ereignissen durch Mengen**
- **Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten, relative Anteile, subjektives Vertrauen**
- **Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten; Additions- und Multiplikationsregel; bedingte Wahrscheinlichkeit**

Als möglicher Erweiterungsstoff wird auf den *Satz von Bayes* verwiesen. In der siebten Klasse (11. Schulstufe) sollen laut Lehrplan folgende Stoffgebiete erarbeitet werden:

- **diskrete Zufallsvariable, diskrete Verteilung**
- **Zusammenhang relative Häufigkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsverteilung,**
- Mittelwert und **Erwartungswert**, sowie **Varianz** und empirische Varianz,
- **diskrete Verteilungen (besonders Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen**

Der Lehrstoff der achten Klasse (12. Schulstufe) beinhaltet laut Lehrplan folgende Punkte:

- **Stetige Zufallsvariable und stetige Verteilung**
- **Arbeiten mit der Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen**
- **Statistische Hypothesentests und Konfidenzintervalle kennen und interpretieren**

3.2.2 Der Lehrplan Mathematik für AHS in Deutschland (am Beispiel Bayern, Niedersachsen, Baden-Württemberg und Nordrhein-Westfalen)[14]

5. und 6. Schulstufe

Im Lehrplan der Bundesländer Nordrhein-Westfalen, Baden-Württemberg und Niedersachsen werden Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8 und 9 beziehungsweise Anforderungen am Ende der Sekundarstufe I formuliert.

Bereits im Lehrplan der sechsten Schulstufe finden sich im Freistaat Bayern folgende Stoffgebiete, die im Mathematikunterricht behandelt werden sollen:

- Interpretation von Diagrammen, manipulative Darstellung in Diagrammen
- **Relative Häufigkeit**
- **Auswertung von Zufallsexperimenten**

Die SchülerInnen lernen relative Häufigkeiten – dargestellt als Bruch, Dezimalzahl oder Prozentsatz – als Mittel zur Bewertung einzelner Ergebnisse und als sinnvollen Schätzwert zur Vorhersage von Gewinnchancen zu nutzen.

Die Ziele, die am Ende der Jahrgangsstufe 6 von den SchülerInnen in Nordrhein-Westfalen und Niedersachsen erreicht werden sollen, decken sich Großteils mit den Anforderungen in Bayern. Lediglich das Berechnen des arithmetischen Mittels und des Medians werden in den Kompetenzerwartungen noch zusätzlich angegeben. Im Gegensatz dazu beschränken sich die geforderten Kompetenzen im Bundesland Baden-Württemberg noch auf das Sammeln, Ordnen und Darstellen von Daten.

---

14 http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26172
http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gym_mathe_nib.pdf
http://www.bildung-staerkt-menschen.de/service/downloads/Bildungsstandards/Gym/Gym_M_bs.pdf
http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf

7. und 8. Schulstufe

In der siebten und achten Schulstufe sind zusammengefasst folgende, die Stochastik betreffende, Stoffgebiete in den Lehrplänen vorgesehen:

- Daten aus Zufallsexperimenten oder statistischen Erhebungen graphisch und rechnerisch auswerten; Planung und Durchführung von Erhebungen; Tabellenkalkulation
- Häufigkeiten und Verteilungen
- **Laplace-Experimente (Ergebnis, Ergebnisraum, Ereignis)**
- **Ein- und zweistufige Zufallsexperimente**
- **Baumdiagramme (Ermitteln von Laplace-Wahrscheinlichkeiten), Pfadregeln**
- Spannweite, Quartile

Unter einstufigen Zufallsexperimenten versteht man Experimente, die nur einmal durchgeführt werden. Dazu zählen beispielsweise das einmalige Werfen eines Würfels oder einer Münze. Da diese Experimente wenig Aussagekraft besitzen, sind mehrstufige Zufallsexperimente (z.B. mehrmaliges Würfeln mit einem Würfel) für den Unterricht von wesentlich größerer Bedeutung.

In den Kompetenzerwartungen in NRW für das Ende der Jahrgangsstufe 8 findet sich noch das Themengebiet „Boxplots". Boxplots sind Diagramme, in denen verschiedene Lage- und Streuungsmaße dargestellt werden.

Beispiel (Eichler/Vogel 2009, S. 37)

Der *Boxplot* benutzt folgende fünf Werte zur grafischen Darstellung von Lage und Streuung: Minimum, 1. Quartil, Median, 3. Quartil und Maximum (vgl. Kap. 2.5). Er besteht aus:

- einer Skala, die parallel zur Hauptachse des Boxplots verläuft
- einem Rechteck (*Box*), dessen Länge vom unteren Quartil zum oberen Quartil reicht. Die Rechteckbreite wird meist nach rein ästhetischen Gesichtspunkten gewählt.
- je einem Querstrich auf der Höhe des Medians, des Minimums und des Maximums (vgl. Abb. 2.17)

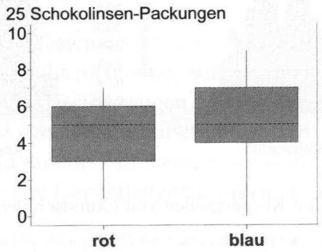


Abbildung 2.17: Boxplot-Vergleich zu der Verteilung der Anzahlen roter und blauer Schokolinsen in 25 Tüten

Interessant ist auch eine Anforderung, die in den Kompetenzerwartungen in Baden-Württemberg am Ende der Schulstufe 8 formuliert ist. Unter der Leitidee „Daten und Zufall" ist die Anforderung *„den Begriff „Wahrscheinlichkeit" verstehen"* zu finden.

9. und 10. Schulstufe

In der neunten Schulstufe enthält der Bildungsplan des Bundeslandes Bayern eine Vertiefung des Themas „elementare zusammengesetzte Zufallsexperimente, Pfadregel und ihre Anwendung".

Im Rahmen der zehnten Schulstufe sind laut Lehrplan die Themenschwerpunkte „Vierfeldertafel", „komplexere Zufallsversuche" und im Zusammenhang damit der Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit" vorgesehen.

In den Kompetenzerwartungen des Bundeslandes NRW für das Ende der Jahrgangsstufe 9 liegt der Schwerpunkt dagegen auf der Analyse und Kritik graphischer statistischer Darstellungen. Weiters sollen die SchülerInnen Wahrscheinlichkeiten zur Beurteilung von „Chancen und Risiken" und zur Schätzung von Häufigkeiten nutzen können.

Zusammengefasst sind die Anforderungen, die das Bundesland Nordrhein-Westfalen für das Ende der Sekundarstufe I vorgibt, die folgenden:

- statistische Erhebungen planen, Säulen- und Kreisdiagramme, Boxplots; Darstellungen kritisch bewerten
- relative Häufigkeiten, Mittelwerte, Streumaße und deren Interpretation
- **Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Laplace-Regel, Baumdiagrammen, Pfadregeln; Häufigkeiten zum Schätzen von Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeiten zur Vorhersage von Häufigkeiten nutzen**

In den Bundesländern Baden-Württemberg und Niedersachsen werden folgende Themengebiete in der 9. bzw. 10. Schulstufe behandelt:

- Datenpaare grafisch darstellen, Regressionen mit Hilfe des Taschenrechners durchführen und die Ergebnisse für Prognosen nutzen
- **Kenntnisse über zweistufige Zufallsexperimente nutzen um statistische Aussagen mit Hilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln zu interpretieren**

- **Erwartungswert einer Zufallsvariablen verstehen und berechnen (Baden-Württemberg)**
- **Unabhängigkeit von Ereignissen**
- **Binomialverteilung**

11. und 12. Schulstufe

In der elften und zwölften Schulstufe folgt im Bundesland Bayern eine intensive Auseinandersetzung mit den folgenden Themenschwerpunkten:

- Axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit
- Verknüpfte Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten
- Bernoulli-Experiment
- Binomialkoeffizient, Binomialverteilung
- Anwendung der Binomialverteilung (insbesondere einseitiger Signifikanztest)
- Approximative Eigenschaften der Binomialverteilung (Näherung, Erwartungswert und Varianz der Normalverteilung)

3.2.3 Gemeinsamkeiten und Unterschiede

Folgende Tabelle soll einen Überblick über die Unterschiede in den Lehrplänen in Österreich und Deutschland[15] geben.

[15] in den Bundesländern Bayern, Baden-Württemberg, Niedersachsen und Nordrhein-Westfalen

Schulstufe	Österreich	Deutschland
5	- Tabellen und graphische Darstellungen zum Erfassen von Daten	- Ur- und Strichlisten - Häufigkeitstabellen; Säulen- und Kreisdiagramme - Interpretation von Diagrammen
6	- Ermitteln relativer Häufigkeiten - Kritisches Betrachten graphischer Darstellungen; Manipulationsmöglichkeiten	- Arithmetisches Mittel; Zentralwert - **Auswertung von Zufallsexperimenten** - Bestimmen relativer Häufigkeiten
7	- Untersuchen und Darstellen von Datenmengen	- Analyse von statistischen Darstellungen - Spannweite, Quartile - **Daten aus Zufallsexperimenten und statistischen Erhebungen auswerten**
8	- Datenmengen mit Hilfe statistischer Kennzahlen (Mittelwert, Median, Modus, relative Häufigkeit,…)darstellen können	- **Häufigkeiten und Verteilungen** - **Laplace-Experimente** - **Ein- und zweistufige Zufallsexperimente** - **Baumdiagramme; Pfadregeln**
9(10)	- Beschreibende Statistik - **Zufallsversuch; Beschreiben von Ereignissen durch Mengen** - **Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten** - **Additions- und Multiplikationsregel; bedingte Wahrscheinlichkeit**	- **Vierfeldertafel** - **Komplexere Zufallsexperimente** - **Bedingte Wahrscheinlichkeit; Unabhängigkeit von Ereignissen** - **Binomialverteilung**

Sowohl in Deutschland als auch in Österreich werden SchülerInnen im Mathematikunterricht bereits ab der fünften und sechsten Schulstufe mit Grundbegriffen der beschreibenden Statistik bekannt gemacht.

Während laut österreichischem Lehrplan jedoch lediglich das Erfassen von Daten aus Tabellen und graphischen Darstellungen verlangt wird, werden SchülerInnen in einigen Bundesländern Deutschlands bereits mit den Begriffen *arithmetisches Mittel*, *Zentralwert* und vor allem dem Begriff *Wahrscheinlichkeit* (bei einstufigen Zufallsexperimenten) konfrontiert. Im Vergleich zum österreichischen Lehrplan für Mathematik, in dem eine erste Begegnung mit dem Begriff *Wahrscheinlichkeit* erst in der 10. Schulstufe vorgesehen ist, werden deutsche SchülerInnen also sehr früh mit diesem Begriff vertraut gemacht.

An dieser Stelle ist jedoch zu erwähnen, dass Begriffe wie das *arithmetische Mittel* oder der *Zentralwert* in österreichischen Schulbüchern für die fünfte und sechste Schulstufe zu finden sind. Lediglich in den Lehrplänen werden diese nicht explizit angegeben.

Der österreichische Lehrplan sieht vor, dass SchülerInnen am Ende der achten Schulstufe in der Lage sein sollen, Datenmengen mit Hilfe statistischer Kennzahlen (Mittelwert, Median, Modus, relative Häufigkeit,…) zu beschreiben und darzustellen. Im Gegensatz dazu sind in deutschen Lehrplänen zusätzlich Häufigkeiten und Verteilungen, Laplace-Experimente, zweistufige Zufallsexperimente, Pfadregeln und Baumdiagramme vorgesehen. Diese Themengebiete sind im österreichischen Lehrplan erst viel später, ab der zehnten Schulstufe (sechste Klasse), vorgesehen.

Im folgenden Kapitel werden nun Möglichkeiten vorgestellt, die Themen *Wahrscheinlichkeit und Statistik* bereits im Mathematikunterricht der (frühen) Sekundarstufe I einzuführen und zu bearbeiten.

Kapitel IV
Möglichkeiten und Risiken der Einführung der Stochastik in der Sekundarstufe I

4.1 Einige didaktische Ansätze

4.1.1 Ideen für einen möglichen Einstieg

Um die SchülerInnen auf den Stochastikunterricht einzustimmen, gibt es viele Möglichkeiten. Einige Fragestellungen dazu stellte Professor Wilfried Herget im Buch *„Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I"* vor. Die Aufgaben setzen keine Vorkenntnisse voraus und können helfen, eine erste Intuition zum Thema zu entwickeln.

„Eine Würfelentscheidung: Daniela und ihr jüngerer Bruder Jörg streiten sich häufig darum, wer von ihnen den Müll runtertragen muss. Deshalb schlägt Daniela Jörg vor, einen Würfel entscheiden zu lassen: „Du darfst dreimal würfeln. Ist eine Sechs dabei, trage ich den Müll runter, sonst machst du das." Jörg erscheint die Sache fair. Probiert es zu zweit aus und überlegt, was ihr von Danielas Vorschlag haltet." (Herget 2001, S.128)

(Vgl. dazu Kapitel 4.2.1, Aufgabe 1, S. 73)

Diese Aufgabe beinhaltet einige wichtige Erkenntnisse. Die SchülerInnen müssen sich Gedanken machen, was der Begriff *fair* in diesem Zusammenhang bedeutet und wie groß die *Wahrscheinlichkeit* ist, überhaupt eine „6" zu würfeln, ohne den Begriff Wahrscheinlichkeit explizit verwenden zu müssen. Wurde die Bruchrechnung bereits durchgenommen, sollte die Vorstellung *„eine von sechs Flächen* $=\frac{1}{6}$*"* in den Köpfen der SchülerInnen bereits verankert sein. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung eignet sich natürlich gut dazu, diese Grundvorstellung über Brüche zu wiederholen und zu vertiefen. Weiters müssen sich die SchülerInnen darüber klar sein, dass beim ersten Mal und/oder beim zweiten Mal und/oder beim dritten Mal eine „6" auftreten kann. Vermutlich *„erscheint Jörg die Sache fair"*, da er eine falsche Vorstellung hat:

Wahrscheinlichkeit eine „6" zu würfeln $=\frac{1}{6}$, und da er drei Mal würfeln darf $3\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, also sind die Chancen zu gewinnen für Daniela und Jörg gleich.

Beim Überprüfen durch selbstständiges Würfeln werden die SchülerInnen (hoffentlich) erkennen, dass an dieser Rechnung etwas nicht stimmen kann.

Mit Hilfe eines Baumdiagramms kann man diesen Sachverhalt schnell klären, allerdings sind dazu schon Kenntnisse über die Pfadregeln notwendig. Eine weitere Möglichkeit, die allerdings sehr zeitaufwändig ist, wäre die für Jörg günstigen Möglichkeiten zu zählen ((6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) (1,6)…). Es ist nicht zu erwarten, dass die SchülerInnen bei dieser Aufgabenstellung die Wahrscheinlichkeit berechnen können. Viel wichtiger ist, dass verschiedene Schätzungen gefunden und auch begründet werden. Eine wichtige Erkenntnis beim Beschäftigen mit dieser Aufgabe könnte sein, dass es in der Stochastik oft notwendig ist, seiner ersten Intuition zu misstrauen.

„6+6=2 . 6? : Sonja und Daniel wollen würfeln. Wer die höhere Augensumme würfelt, gewinnt. Sonja hat zwei Würfel, Daniel nur einen. Deshalb schlägt Sonja vor, dass sie ihre beiden Würfel wirft und Daniel seinen, er aber dafür seine Augenzahl verdoppeln darf.
Sie spielen eine ganze Weile. Wer gewinnt wohl die meisten Spiele? Probiere mit deinem Nachbarn und überlege!“
(Herget 2001, S.130)

Bei dieser Aufgabe könnte man die SchülerInnen dazu animieren eine Tabelle mit den absoluten Häufigkeiten der gewürfelten Augensummen anzulegen (vgl. Beispiel Kapitel 4.1.1.2). Die relativen Häufigkeiten können ermittelt werden, wenn sich die SchülerInnen über die Anzahl der Möglichkeiten (mit zwei bzw. mit einem Würfel) bewusst werden. Es stellt sich natürlich schnell heraus, dass es für Daniel nicht möglich ist ungerade Zahlen zu würfeln. Wichtiger als eine konkrete Antwort zu finden, wer hier wohl die meisten Spiele gewinnt ist, sich Gedanken zu machen wie man zu dieser Lösung kommen könnte. Die SchülerInnen könnten alle möglichen Würfe von Sonja und Daniel aufzählen und schließlich vergleichen, wer in welchen Fällen gewinnt. In welchen Fällen geht das Spiel unentschieden aus?

Sonja {1,2,3,4,5,6} {1,2,3,4,5,6}

(1,1) (1,2) (1,3) (1,2) (1,5) (1,6)

(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)

…

= 36 Möglichkeiten

Daniel {1,2,3,4,5,6}

= 6 Möglichkeiten

Augensumme	Sonja	Daniel
2	(1,1) $= \frac{1}{36}$	(1) $= \frac{1}{6}$
3	(1,2) (2,1)$= \frac{2}{36}$	-
4	(1,3) (3,1) (2,2))$= \frac{3}{36}$	(2) $= \frac{1}{6}$
5	(2,3) (3,2) (4,1) (1,4))$= \frac{4}{36}$	-
6	(1,5) (5,1) (3,3) (2,4) (4,2))$= \frac{5}{36}$	(3) $= \frac{1}{6}$
7	…	…
8		
9		
10		
11		
12	…	…

Besonders interessant sind die Fälle, in denen Sonja eine ungerade Zahl wirft. Würfelt sie beispielsweise eine „5“$(= \frac{4}{36})$, so gewinnt sie nur dann, wenn Daniel eine „1“ oder eine „2“ wirft. Bei dieser Aufgabe sind wiederum Vorerfahrungen aus der Bruchrechnung unerlässlich.

Ein weiteres interessantes Buch, das viele Vorschläge für den Unterricht liefert und für Lehrende zusätzlich eine übersichtliche Zusammenfassung über den Stoff der Sekundarstufe I und II gibt ist *„Stochastik – Hinweise zum Unterricht“* von Dr. Gerhard Richter. Einige ausgewählte Unterrichtsvorschläge (Beispiele) sollen hier vorgestellt werden. Diese Beispiele sind leicht verständlich und gut im Unterricht zu integrieren. Außerdem legt der Autor merklich großen Wert darauf durch selbstständiges Erarbeiten anschaulicher Beispiele bei den SchülerInnen intuitive Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zu induzieren. Positiv zu vermerken ist auch, dass der Autor sogar passende Vorschläge für Hausaufgaben liefert und damit ein recht vollständiges Unterrichtskonzept liefert. Ein Kritikpunkt ist jedoch, dass es im Schulalltag wohl kaum möglich ist dem Stoffplan des Autors lückenlos zu folgen, da die einzelnen Unterrichtssequenzen doch sehr viel Zeit in Anspruch nehmen.

4.1.1.1 Zufallsexperiment, Ergebnismenge (vgl. Richter 1994, S.33f)

Diese Lerneinheit setzt keine gefestigte Vorstellung zu den Begriffen „Zufall“ oder „zufälliges Ereignis“ voraus. Die SchülerInnen sollen in einem offenen Gespräch in der Klasse ihre Vorstellung von „Zufall“ nennen.

Mit Hilfe (der Beschreibung) von Zufallsexperimenten wie zum Beispiel das Werfen einer Münze oder das Würfeln mit einem (idealen) Würfel sollen die SchülerInnen erklären, wo bei diesen Aktivitäten der Zufall steckt. An dieser Stelle kann auch noch zwischen gleichwahrscheinlichen (Würfel) und nicht gleichwahrscheinlichen Versuchsausgängen unterschieden werden. Beispielsweise kann zu nicht gleichwahrscheinlichen Versuchsausgängen der Anfangsbuchstabe einer Seite im Lesebuch (oder einem beliebigen anderen Buch) ermittelt werden. Die SchülerInnen sollen im Anschluss unter Anleitung zusammenfassen, welche Eigenschaften den Zufall bzw. zufällige Ereignisse charakterisieren. Bei dieser Einführung ist es wichtig darauf zu achten, dass die Ergebnismenge vollständig ist, das heißt, dass eins der Ergebnisse aus dieser Ergebnismenge garantiert auftritt.

Weiters müssen bei den Zufallsexperimenten die Angabe der Versuchsanordnung, die Beobachtungsgröße und die Ereignismenge immer klar formuliert werden.

4.1.1.2 Statistische Erhebung, Häufigkeit (vgl. Richter 1994, S.35f)

Ziel dieser Aufgabe ist es, dass die SchülerInnen in der Lage sind, mittels Strichlisten und Tabellen die Häufigkeiten einzelner Ergebnisse eines Zufallsexperiments zu bestimmen und dazugehörige Häufigkeitsdiagramme zu erstellen. Folgendes Beispiel kann zu diesem Zweck betrachtet werden.

Um die SchülerInnen aktiv in den Unterricht miteinzubeziehen bietet es sich an, Urlisten mit der Körper- oder Schuhgröße der ganzen Klasse zu erstellen. Nimmt man die Schuhgrößen der SchülerInnen als Beispiel, könnte etwa folgende Urliste entstehen.

39	39	41	42	40	
41	40	40	41	39	
39	41	38	38	41	Urliste
43	41	41	39	42	
38	42	40	39	41	

Die Aufgabe der SchülerInnen ist es nun eine Strichliste zu erstellen, die folgendermaßen aussehen könnte. Sollte die Kennzeichnung der „Fünfergruppen“ nicht geläufig sein, muss der/die LehrerIn vor der Erstellung der Strichliste eingehen.

38 |||

39 ~~||||~~ |

40 ||||

41 ~~||||~~ |||

42 |||

43 |

Im Anschluss an das Erstellen der Strichliste können sowohl der Begriff der „absoluten“ als auch der „relativen Häufigkeit“ eingeführt werden. Die Einführung der relativen Häufigkeit ist hier nur dann sinnvoll, wenn die SchülerInnen bereits Vorerfahrungen aus der Bruch- bzw. Dezimalrechnung mitbringen. Die Darstellung und Berechnung der absoluten bzw. relativen Häufigkeiten erfolgt dann in Form einer Häufigkeitstabelle.

Schuhgröße g	Absolute Häufigkeit H(g)	Relative Häufigkeit h(g)
38	3	3/25 = 0,12
39	6	6/25 = 0,24
40	4	4/25 = 0,16
41	8	8/25 = 0,32
42	3	3/25 = 0,12
43	1	1/25 = 0,04
Summe:	25	1,00

Nachdem der Begriff „relative Häufigkeit“ hinreichend geklärt wurde empfiehlt der Autor *„auf die umgangssprachlich übliche Angabe der relativen Häufigkeit in Prozent einzugehen […] Durch die Angabe der prozentualen Häufigkeit (bzw. relativen Häufigkeit) wird der Vergleich von Ergebnissen bei Zufallsexperimenten hinsichtlich der Chance des Auftretens ermöglicht.“* (Richter 1994, S.37)

4.1.1.3 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit (vgl. Richter 1994, S.38ff)

Der Autor sieht als Vorteil, dass die SchülerInnen sich schon intensiv mit relativen Häufigkeiten beschäftigt haben und somit *„bei den Schülern auf natürliche Weise diese Größe als Maß für die Chance (=Wahrscheinlichkeit) des Eintretens eines Ergebnisses angesehen wird.“* (Richter 1994, S.38)

Ziel ist es, dass die SchülerInnen bemerken, dass sich die relative Häufigkeit bei langen Versuchsreihen stabilisiert und in der Lage sind, sinnvolle Schätzungen für Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von relativen Häufigkeiten abzugeben.

Ideal wäre ein im Deutschunterricht gerade behandeltes Lesestück oder ein anderer längerer Text, den die gesamte Klasse bearbeitet. Es werden mehrere (mindestens fünf) Gruppen von SchülerInnen gebildet. Jede Gruppe erhält einen gleichlangen Textabschnitt mit 300 (oder mehr) Buchstaben. Die dazugehörige Häufigkeitstabelle sollte folgendermaßen gestaltet werden.

Buchstabe	**Strichliste**	**Häufigkeit**	
		absolut	**relativ**
a			
b			
…			
y			
z			
	Anzahl	~300	1

Es bietet sich an den Schülerinnen das Zählen der Buchstaben als Hausaufgabe zu überlassen, da dies viel Zeit in Anspruch nimmt. Zusätzlich sollen folgende Fragen beantwortet werden.

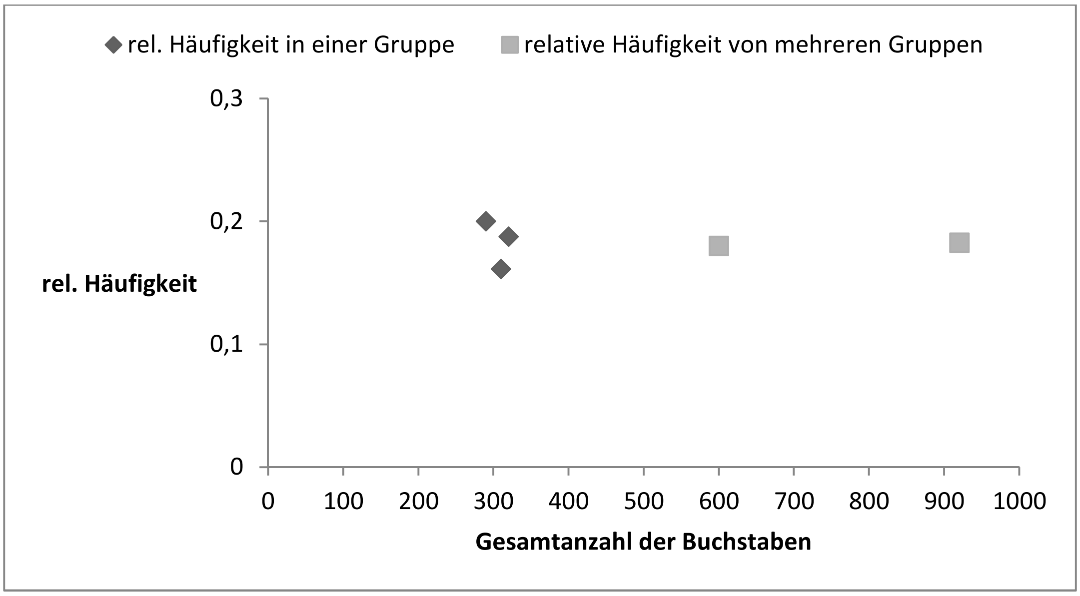
- Welcher Buchstabe kommt am häufigsten vor?
- Welche drei Buchstaben kommen am häufigsten vor?
- Gibt es Buchstaben, die im Text überhaupt nicht vorkamen?

Im Anschluss daran können durch den/die LehrerIn zusätzliche Tabellen erstellt werden, die die Stabilisierung der relativen Häufigkeit demonstrieren.

Für den Buchstaben „e“

Gruppe (1)	Abs. Häufigkeit (2)	Anzahl Buchstaben (3)	Relat. Häufigkeit (4) =(2):(3)	Summenhäufigkeiten absolut (5)	Gesamtanzahl (6)	relativ (7) =(5):(6)
I	58	290	0,2000	58	290	0,2000
II	50	310	0,1613	108	600	0,1800
III	60	320	0,1875	168	920	0,1826
…						

Will man die in dieser Tabelle gefundenen relativen Häufigkeiten noch weiter verdeutlichen, kann man sie in ein Koordinatensystem eintragen. Diese Vorgehensweise kann dann auch noch mit anderen Buchstaben fortgeführt werden.



Diese Abbildung soll den SchülerInnen klar machen, dass sich die relativen Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen stabilisieren und nur wenig um einen festen Wert schwanken.

Danach kann eine Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs über die relative Häufigkeit erfolgen, wobei Richter es als sinnvoll erachtet *„die relative Häufigkeit $h(e_i)$ als Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeit $P(e_i)$ zu nehmen."* (Richter 1994, S.42)

4.1.1.4 Laplace-Wahrscheinlichkeiten (vgl. Richter 1994, S.44ff)

Ziel dieser Lerneinheit ist es, dass die SchülerInnen bei einem Zufallsexperiment mit endlich vielen Ergebnissen sagen können, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt und im gegebenen Fall Wahrscheinlichkeiten für Ergebnisse bei Laplace-Experimenten zu bestimmen.

Nachdem diese Begriffe (mit Hilfe von Münzwurf/Würfelexperimenten etc.) eingeführt wurden, können sie an folgenden (oder ähnlichen) Fragestellungen gefestigt werden.

„In einer Urne befinden sich 4 Kugeln mit den Nummern 1, 2, 3 und 4. Es wird eine Kugel auf gut Glück ausgewählt.

Liegt ein Laplace-Experiment vor? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel mit der Nummer 2 gezogen wird?

In einer Urne befinden sich nun 4 blaue, 5 grüne und 6 rote Kugeln. Beim Herausnehmen einer Kugel achten wir nur auf die Farbe, so dass $S = \{bl, gn, rt\}$ die Ergebnismenge ist.

Liegt in diesem Fall ein Laplace-Experiment vor?" (Richter 1994, S46)

Weitere Beispiele, die Klarheit im Zusammenhang mit Laplace-Wahrscheinlichkeiten bringen, da sie leicht als gleichwahrscheinlich oder eben nicht erkannt werden können, sind zum Beispiel das Ziehen einer Karte aus einem Skatspiel, Werfen zweier Würfel und Feststellung der Augensumme oder die zufällige Auswahl einer Person und Ermitteln des Wochentags ihres Geburtstags

4.1.1.5 Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten (vgl. Richter 1994, S.47ff)

In dieser Lerneinheit sollen die SchülerInnen lernen zwischen Ergebnissen und Ereignissen zu unterscheiden und Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse (mit klassischer und statistischer Methode) zu ermitteln.

Richter schlägt dazu folgende Aufgaben vor.

„Folgende Ereignisse werden beim Werfen eines idealen Würfels betrachtet:

$A_1 = \{1, 3, 5\}, A_2 = \{2, 4, 6\}, A_3 = \{4, 5, 6\}, A_4 = \{2, 3\}, A_5 = \{1,5\}$

a) *Drücke diese Ergebnisse verbal aus.*
b) *Welche Ereignisse sind eingetreten, wenn beim Würfeln eine 5 (1; 3) gefallen ist?*
c) *Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ereignisse?"* (Richter 1994, S.49)

„Aus einer Urne mit 100 gleichartigen, von 1 bis 100 nummerierten Kugeln wird eine Kugel rein zufällig gezogen.

a) *Gib folgende Ereignisse als Mengen an:*

A = „die Zahl ist durch 8 teilbar"	*(|A|=12)*
B = „die Zahl ist durch 15 teilbar"	*(|B|=6)*
C = „die Zahl ist durch 8 und durch 9 teilbar"	*(|C|=1)*
D = „die Zahl ist durch 9 und durch 15 teilbar"	*(|D|=2)*
E = „die Zahl ist durch 12 und durch 15 teilbar"	*(|E|=1)*
F = „die Zahl ist durch 12 und durch 17 teilbar"	*(|F|=0)*

b) *Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für A-F?*
Hierzu sei nur angemerkt, dass diese Aufgabe u.a. die Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen verlangt. Ereignis F ist wegen M=0 interessant." (Richter 1994, S.50)

4.1.1.6 Baumdiagramme, mehrstufige Zufallsexperimente (vgl. Richter 1994, S.52ff)

Da die Herleitung der Pfadregeln zu diesem Zeitpunkt noch nicht erfolgt ist, schlägt Richter vor mit zweistufigen Zufallsexperimenten zu beginnen.

„Zwei gleichartige Erzeugnisse werden nacheinander geprüft. Bei jedem Erzeugnis wird kontrolliert ob es einwandfrei (e) oder nur brauchbar (b) oder Ausschuss (a) ist. Eine weitere Unterteilung wird nicht vorgenommen.

a) *Gib ein Baumdiagramm zum vorliegenden Zufallsexperiment an sowie die dazugehörige Ergebnismenge S. (Hilfestellung: zweistufiges Zufallsexperiment; je Stufe 3 Ergebnisse)*
b) *Welche Ergebnisse bilden das Ereignis B = „unter den 2 Erzeugnissen befindet sich kein Ausschussteil"?*
(B = {bb, eb, be, ee})

c) Kennzeichne die Pfade, die denjenigen Ergebnissen von B entsprechen!

d) Kann man von der Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse in diesem Beispiel ausgehen?
(nein, denn die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss sollte wesentlich kleiner sein als die Wahrscheinlichkeiten für die beiden anderen Ergebnisse. Diese Aufgabe kann an dieser Stelle nur gefühlsmäßig behandelt werden, da die Multiplikationsregel für Pfade noch nicht bekannt ist!)" (Richter 1994, S.54)

4.1.2 Spiele im Stochastikunterricht

„Jedenfalls ist es verführerisch, gerade für den Stochastikunterricht, die motivationale Urkraft des Spiels auszunützen, denn Experimente, die die Stabilisierung von relativen Häufigkeiten zeigen sollen, sind, wie schon erwähnt, sehr langwierig und manchmal ermüdend für die Kinder. Eingekleidet in ein Spiel halten sie dagegen die Aufmerksamkeit der Kinder bedeutend länger wach." (Heitele 1976, S.292)

Die Aussage zur *Urkraft des Spiels* ist sicher richtig, allerdings gibt es heutzutage die Möglichkeit die Stabilisierung relativer Häufigkeiten mit Hilfe eines Computers zu simulieren und damit eine rasche Ermüdung der SchülerInnen (zum Beispiel durch lange Wurfserien beim Würfeln) zu vermeiden.

Heitele hält es für das Thema Stochastik für wichtig, zwischen Glücksspielen und strategischen Spielen zu unterscheiden (vgl. Heitele 1976, S.292). An reinen Glücksspielen etwa könnte das Prinzip der großen Zahlen gut veranschaulicht werden. Reine Glücksspiele unterscheiden sich von strategischen Spielen, bei denen die SpielerInnen durch objektives Abschätzen ihrer Chancen – trotz der Zufälligkeit des Spielverlaufs – ihre Gewinnchancen erhöhen können. Die Grenzen sind allerdings fließend.

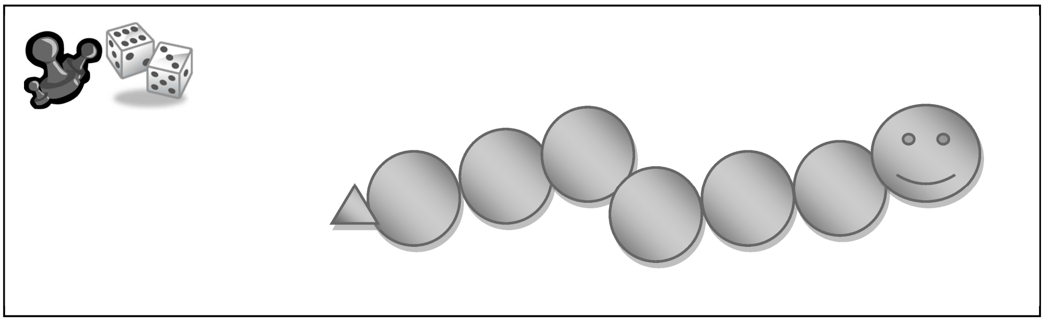
In der Literatur gibt es eine ganze Reihe von Spielvorschlägen für den Stochastikunterricht.[16] Interessant wären auch Erfahrungsberichte von Lehrkräften zu diesen Spielen, damit Lehrende die Möglichkeit erhalten, sich auf das mögliche Verhalten der SchülerInnen einzustellen.

[16] Vgl. z.B. Heitele 1976, Eichler/Vogel 2009, Mayerhofer,M. 2008, …

Das Wurmspiel – Ein Beispiel (vgl. Mayerhofer 2008, S. 34ff)

Das „Wurmspiel" ist für den Beginn des Wahrscheinlichkeitsunterrichts gut geeignet und kann eventuell schon in der Volksschule (Grundschule) ausprobiert werden.

Das Spiel wird jeweils zu zweit gespielt. Dafür werden zwei Spielfiguren, zwei Würfel und ein Spielfeld (siehe Abbildung unten) benötigt. Es wird abwechselnd mit beiden Würfeln gewürfelt. SchülerIn 1 darf ein Feld nach vor rücken, wenn die Würfelsumme 6 angezeigt wird, SchülerIn 2 bei der Würfelsumme 9. Gewonnen hat, wer zuerst ankommt.



Vor Beginn des Spiels wäre es wichtig zu klären, ob die Figur nur dann ein Feld vorrücken darf wenn man selbst die richtige Augenzahl gewürfelt hat oder ob es egal ist wer die Summe erwürfelt hat. Am besten einigt man sich für die ganze Klasse auf eine Möglichkeit, um keine Verständnisschwierigkeiten aufkommen zu lassen.

Nachdem die SchülerInnen das Spiel gespielt haben, gilt es zu klären, ob das Spiel auch wirklich „fair" ist, das heißt, ob es für jede/n MitspielerIn gleich wahrscheinlich ist zu gewinnen.

Die SchülerInnen sollen im Zuge ihrer Diskussion unbedingt auch Gründe für ihre Behauptungen angeben und im nächsten Schritt selbst Regeln für ein möglichst (un)faires Spiel finden. Ziel dieser Aufgabe ist, dass die SchülerInnen erkennen können ob ein Spiel fair ist und auch eine Begründung für ihre Argumentation liefern können. Als Hilfestellung sollte anschließend im Klassenverband (an der Tafel) eine Tabelle erstellt werden, die die verschiedenen Möglichkeiten eine bestimmte Augensumme zu werfen aufzeigt. Mit Hilfe dieser Tabelle ist es einfacher „faire" Spielregeln aufzustellen und zusätzlich wird aufgezeigt, dass es vernünftig ist die verschiedenen Fälle systematisch abzuzählen. Diese Erkenntnis kann sich zu einem späteren Zeitpunkt (beim Thema Kombinatorik) als hilfreich erweisen.

4.1.3 „Bayesian Reasoning“ – das Bayesianische Denken

Im Zuge der Beschäftigung mit dem Thema „Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe I“ bin ich auf ein sehr interessantes Buch von Christoph Wassner gestoßen. Dieser liefert ansprechende Ideen den „Satz von Bayes“ und dazugehörige Anwendungen bereits zu einem früheren Zeitpunkt im Unterricht – genauer gesagt bereits in der Sekundarstufe I – zu behandeln. Dies ist sehr wohl möglich, da die wichtigsten Voraussetzungen (mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln) im Lehrplan der Sekundarstufe I vorgesehen sind. Das Erlernen des „Bayesianischen Denkens“ ist vor allem deshalb relevant, da viele alltagsbezogene Fragestellungen behandelt werden können. Die klassische Problematik des positiven AIDS-Tests etwa wird auch in diesem Buch herangezogen. Der Autor vermeidet allerdings die für SchülerInnen dieser Altersstufen noch schwierig zu verstehenden Begriffe „Spezifität“ oder „Sensitivität“ eines Tests. Sogar das „Testen von Hypothesen“, das als Entscheidungshilfe im Alltag von großer Bedeutung sein kann, bereitet Wassner bereits für die Sekundarstufe I auf (siehe Kapitel 4.1.3.3: „Bayesianischer Ansatz“, S.47).

„Das Bayesianische Denken, wie ich anschließend genauer ausführen werde, halte ich dabei als Fokus für schuldidaktische Untersuchungen im Fach Stochastik für besonders relevant. […] In diesem Sinne möchte ich auch Argumente dafür liefern, dass eine Betonung und vor allem Vorverlegung dieser Inhalte in allen Stochastikcurricula sinnvoll ist.“ (Wassner 2004, S.5)

Der Autor ist der Überzeugung, dass für einen mündigen Menschen das Erlernen eines verantwortungsvollen Umgangs mit Unsicherheit unverzichtbar ist. Im Zuge dessen stellt Wassner mathematikdidaktische Überlegungen (zu den Lehrplänen) an.

4.1.3.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit und der „Satz von Bayes“ in der Sekundarstufe I

In den Lehrplänen der Sekundarstufe I sind der Begriff „Bedingte Wahrscheinlichkeit“ und die Anwendung des „Satzes von Bayes“ kaum vorgesehen. SchülerInnen in Deutschland haben mit diesen Begriffen allenfalls im Zuge von mehrstufigen Zufallsexperimenten und dem Anwenden der Pfadregeln zu tun.

In den Lehrplänen deutscher Bundesländer für die Sekundarstufe II wird der Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“ im Allgemeinen behandelt.

Für Wassner unverständlich wird der „Satz von Bayes" jedoch häufig nur im Rahmen von Leistungskursplänen erarbeitet, nicht aber im Grundkursplan.

„Diese wohl sehr willkürliche Abgrenzung ist umso unverständlicher, da gerade dieser Themenbereich viele interessante Anwendungs- und Alltagsbezüge eröffnet." (Wassner 2004, S.49)

Über mehrstufige Zufallsexperimente, die in den deutschen Lehrplänen der Sekundarstufe I vorgesehen sind, könnte ein inhaltlicher Zugang zu bedingter Wahrscheinlichkeit und dem „Satz von Bayes" geschaffen werden.

4.1.3.2 Verschiedene Zugänge zur bedingten Wahrscheinlichkeit und dem „Satz von Bayes" (Wassner 2004, S. 52 ff)

Die Beschäftigung mit Aufgabenstellungen aus dem Themenfeld „bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes" wird traditionell in deutschen Schulbüchern erst ab der Sekundarstufe II verlangt. Meist wurde darin die bedingte Wahrscheinlichkeit über Häufigkeitsbetrachtungen definiert und der „Satz von Bayes" formal hergeleitet. Zur Veranschaulichung wurden Mengen- und Baumdiagramme und unter Umständen auch Flächendiagramme verwendet.

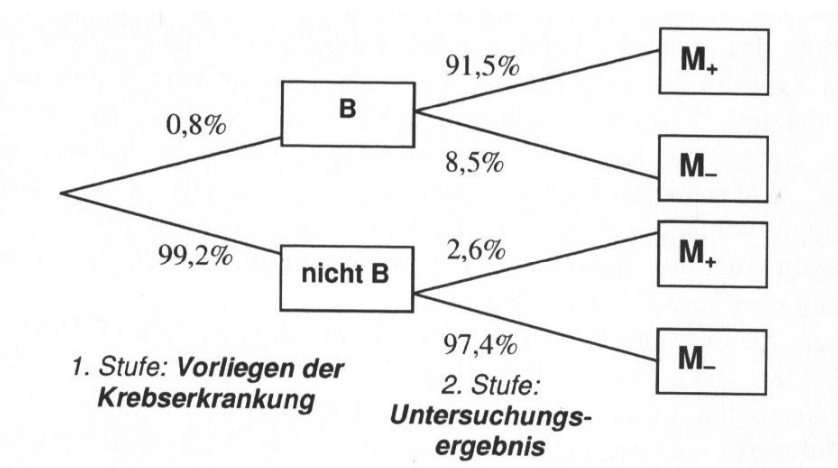
Ein bekanntes Anwendungsbeispiel:

„ Bei Frauen ab 40 Jahren werden Routineuntersuchungen auf Brustkrebs durchgeführt. Das Untersuchungsverfahren ist die sogenannte „Mammografie". Aus der Literatur ist folgendes bekannt: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau der Altersgruppe zwischen 40 und 50 Jahren Brustkrebs (B) hat, beträgt 0,8%. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Krankheit mit einer Mammographie erkannt wird (M_+), wenn sie vorliegt, beträgt 91,5%. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mammografie fälschlicherweise auf Brustkrebs hinweist, obwohl die Krankheit gar nicht vorliegt, beträgt 2,6%.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau dieser Altersgruppe tatsächlich Brustkrebs hat, wenn sie einen positiven Mammografiebefund erhalten hat?" (Wassner 2004, S. 53)

Als Mindestvoraussetzung, um diese Problemstellung bearbeiten zu können, müssen die SchülerInnen in der Lage sein, mehrstufige Zufallsexperimente mittels Baumdiagramm modellieren zu können. Dieses Beispiel könnte daher sehr wohl bereits in der Sekundarstufe I gelöst werden. Eventuell würde sich für die Sekundarstufe I vielleicht ein positiv besetzter Inhalt der Aufgabenstellung anbieten.

Mit folgendem Baumdiagramm kann die Aufgabe gelöst werden:



(Abb.: Baumdiagramm I, S.54)

Über die Pfadmultiplikationsregel kann zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit für den obersten Pfad wie folgt ausgerechnet werden: $0{,}008 \cdot 0{,}915 \; = \; 0{,}0073 \; = 0{,}73\%$

Um die Ergebnisse richtig interpretieren zu können ist es für die SchülerInnen sehr wichtig, die Wahrscheinlichkeiten Ereignissen zuordnen zu können. Im Fall des obersten Pfades muss die erste Wahrscheinlichkeit als jene für Brustkrebs, die zweite Wahrscheinlichkeit als jene für eine positive Mammografie, wenn Brustkrebs vorliegt, erkannt werden. Insgesamt steht dieser Pfad also für „Brustkrebs und positive Mammografie“. Wassner schlägt an dieser Stelle vor in der Sekundarstufe I den dahinterliegenden Multiplikationssatz ($P(B \cap M_+) = P(B) \cdot P(M_+|B)$) nicht anzusprechen und bei umgangssprachlichen Formulierungen zu bleiben:

„Die erste Wahrscheinlichkeit (0,8%) ist die für Brustkrebs. Die zweite Wahrscheinlichkeit (91,5%) ist die für eine positive Mammographie, wenn Brustkrebs vorliegt. Da die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multipliziert werden, erhalten wir für das Ergebnis „Brustkrebs und positive Mammographie“: $0{,}008 \cdot 0{,}915 = 0{,}0073 = 0{,}73\%$“

Wassner schlägt vor den Multiplikationssatz zusätzlich über den Rückgriff auf Häufigkeiten zu erklären: *„Stelle Dir vor man wiederholt diesen Untersuchungsprozess 100 000mal, dann wäre bei (ungefähr) 0,8% davon, also* $100\,000 \cdot 0{,}008 = 800$ *Frauen Brustkrebs festgestellt worden. […] Nach Kürzen der Grundgesamtheit bleibt die Multiplikation der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten* $0{,}008 \cdot 0{,}915$ *als Lösung.“* (Wassner 2004, S. 54)

Zusätzlich zu dieser eher traditionellen Zugangsweise könnte man noch mit anderen Darstellungsmitteln, wie beispielsweise Vierfeldertafeln und umgekehrten Baumdiagrammen arbeiten. Dieser Zugang wird auch in der Schulbuchreihe „Elemente der Mathematik“[17] umgesetzt.

Zunächst sollen die SchülerInnen Daten aus dem Aufgabentext in ein Baumdiagramm übertragen und anschließend eine Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten erstellen.

		Vorliegen der Krebserkrankung		gesamt
		ja **(B)**	nein **(nicht B)**	
Untersuchungs-ergebnis	auffällig **(M_+)**	*118*	*412*	*530*
	ohne Befund **(M_-)**	*11*	*15207*	*15218*
gesamt		*129*	*15619*	*15748*

Tab.II.1a: Darstellung des Diagnosebeispiels in einer Vierfeldertafel (absolute Häufigkeiten)

(Abb.: Tabelle I, S.56)

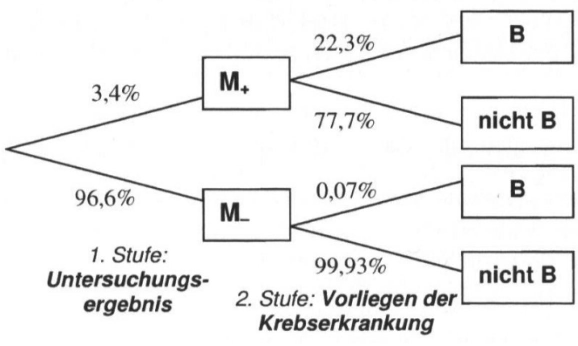
Im Anschluss daran soll eine weitere Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten erstellt werden.

		Vorliegen der Krebserkrankung		gesamt
		ja **(B)**	nein **(nicht B)**	
Untersuchungs-ergebnis	auffällig **(M_+)**	*0,75%*	*2,62%*	*3,37%*
	ohne Befund **(M_-)**	*0,07%*	*96,56%*	*96,63%*
gesamt		*0,82%*	*99,18%*	*100%*

Tab.II.1b: Darstellung des Diagnosebeispiels in einer Vierfeldertafel (mit relativen Häufigkeiten)

(Abb.: Tabelle II, S.56)

Mit Hilfe dieser Vierfeldertafel ist es nun die Aufgabe der SchülerInnen beide Baumdiagramme zu erstellen. Das „normale“ Baumdiagramm (siehe Abb. „Baumdiagramm I“ oben) und das „umgekehrte“ Baumdiagramm (gerundete Werte!):



(Abb.: Baumdiagramm II,S.57)

[17] Griesel, H., Postel H.: Elemente der Mathematik. 8. Schuljahr. Hannover 1994, S. 124ff

Laut Wassner eignen sich gerade umgekehrte Baumdiagramme dazu eine Umkehrung der Sichtweise und somit die Wirkungsweise der Bayesformel zu demonstrieren. Im umgekehrten Baumdiagramm ist Bedingung, was im „normalen“ Baumdiagramm bedingtes Ereignis war.

Allerdings kritisiert der Autor den Schritt über die Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten, die seiner Meinung nach eine unnötige Verkomplizierung des Sachverhalts darstellt.

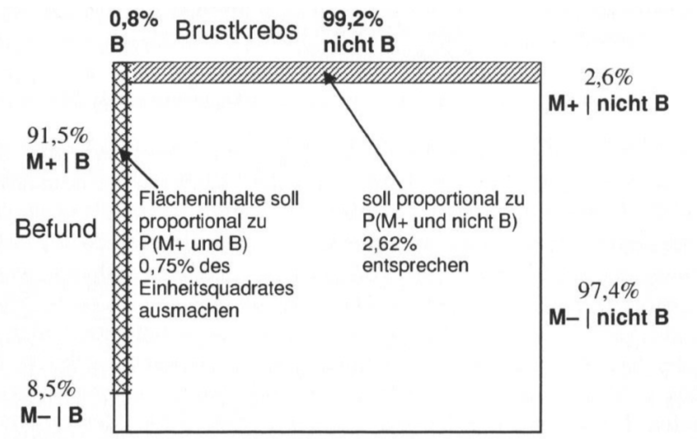
Es sei nicht davon auszugehen, dass den SchülerInnen klar ist, warum nicht nur mit absoluten, sondern auch mit relativen Häufigkeiten Quotienten zu bilden sind.

$$\frac{118}{15748} = 0{,}75\% \quad \frac{11}{15748} = 0{,}07\% \quad \frac{412}{15748} = 2{,}62\% \quad \frac{15207}{15748} = 96{,}56\%$$

P(B | M+) ist der Quotient von P(B und M+)=118=0,75% und P(M+)=530=3,37%

$$P(B|M+) = \frac{118}{530} = \frac{0{,}75\%}{3{,}37\%} = 22{,}3\%$$

Eine weitere Möglichkeit das Diagnosebeispiel darzustellen sind Flächendiagramme („Unit-Squares“), in denen Wahrscheinlichkeiten als proportionale Flächen in einem Rechteck visualisiert werden. Oben genanntes Beispiel könnte folgendermaßen in einem Einheitsquadrat visualisiert werden, dessen Flächeninhalt 1 einen Wahrscheinlichkeitsraum **Ω** repräsentiert.



(Abb.: Flächendiagramm,S.58)

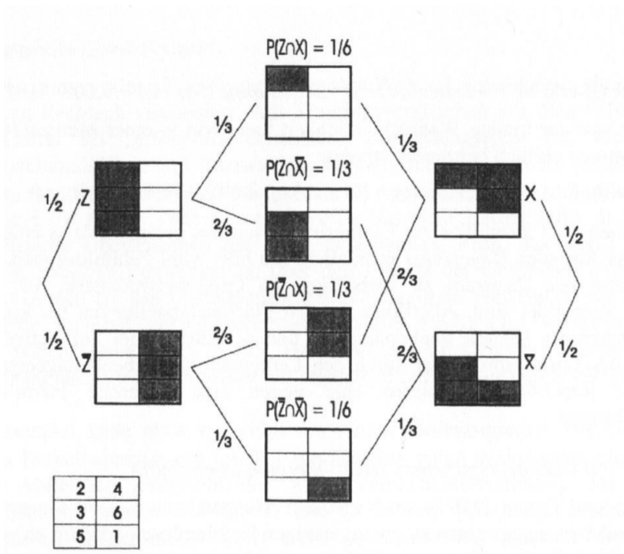
Durch die Proportionalität von Flächen und Wahrscheinlichkeit kann somit eine Veranschaulichung der Produktregel erreicht werden.

Flächeninhalt (B und M_+) = Seitenlänge B · Seitenlänge (M_+ | B) = 0,008 · 0,918 = 0,0075

Der Autor bezeichnet das Einheitsquadrat als gute Möglichkeit zur Einführung der Bayesregel, da eine visualisierte Begründung ermöglicht wird. Allerdings gibt Wassner auch zu bedenken, dass diese Darstellung bei komplizierteren Strukturen und Daten schnell unübersichtlich wird.

Als dritte Möglichkeit können Baum-Mengen-Diagramme verwendet werden. Dabei werden Venn-Diagramme und Baumdiagramme in einer einzigen Darstellung verbunden. Die stochastischen Beziehungen, die in Mengendiagrammen nur unzureichend oder gar nicht veranschaulicht werden können, können mit Hilfe von Baumdiagrammen beschrieben werden.

Auch diese Darstellungsmöglichkeit der Baum-Mengen-Darstellung kann wie Flächendiagramme aber nur bei einfach strukturierten Beispielen eingesetzt werden. Folgende Darstellung zeigt ein Würfelexperiment im Baumdiagramm mit integrierter Mengendarstellung. (X: „Die geworfene Zahl ist gerade“; Z: „Die geworfene Zahl ist eine Primzahl“)



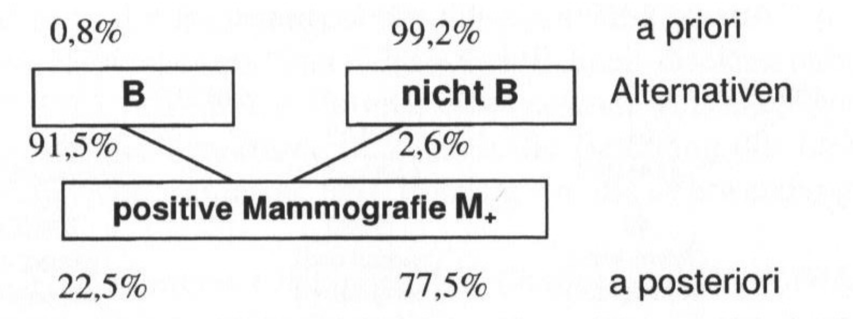
(Abb.: Baum-/Mengendiagramm,S.60)

4.1.3.3 Bayesianischer Ansatz

Wassner kommt in seinem Buch auch noch auf das Thema „Testen von Hypothesen“ zu sprechen, das mit Hilfe der iterierten Anwendung der Bayesschen Regel bereits in der Sekundarstufe I möglich ist. Das Abwägen und Entscheiden zwischen zwei Hypothesen kommt bei dieser Methode mit der Pfadregel aus. In der Schulbuchreihe „mathenetz“[18] wird der Bayesianische Zugang durch „Lernen aus Erfahrung“ beispielsweise schon entwickelt.

18 Siehe Kapitel „Stochastik“
In: Cukrowicz J., Theilenberg J., Zimmermann B.: Mathe Netz 9 Gymnasium. Ausgabe N. Braunschweig 2008, S. 109 ff

Um oben genanntes Diagnosebeispiel lösen zu können, sollen zwei alternative Hypothesen („Brustkrebs“ oder „kein Brustkrebs“) abgewogen werden. Folgende Darstellung zeigt ein „Bayes-Diagramm“, in dem *„nur die Änderung der A-priori-Wahrscheinlichkeiten durch das tatsächlich beobachtete Indiz betrachtet wird“* (Wassner 2004, S.61)



(Abb.: Bayes-Diagramm,S.61)

Die Regel von Bayes kann aus dem Diagramm abgeleitet werden und somit gilt:

Pfad „Brustkrebs“: $0{,}008 \cdot 0{,}915 = 0{,}0075$

Pfad „kein Brustkrebs“: $0{,}992 \cdot 0{,}026 = 0{,}0258$

$$P(B|M_{+}) = \frac{0{,}0075}{0{,}0075 + 0{,}0258} = 22{,}5\%$$

Der Vorteil dieses Diagrammes liegt laut Wassner darin, dass es nur Daten beinhaltet, die für eine konkrete Fragestellung von Bedeutung sind. Ob damit aber eine Herleitung der Regel ausreichend begründet und für SchülerInnen einfacher zu verstehen ist, sei fraglich. (Wassner 2004, S. 62)

Wassner sieht im Stochastikunterricht und insbesondere auch im Satz von Bayes vielfältige Möglichkeiten einen Realitätsbezug für die SchülerInnen zu schaffen. (Wassner 2004, S.66)

- Schätzen, Überschlagen, intuitives Erfassen von Größenordnungen,
- Übersetzen von Sachproblemen in einfache mathematische Modelle,
- Interpretation und Erstellung von grafischen Darstellungen,
- Mathematik als Kommunikations- und Argumentationsmittel,
- Umgang mit statistischen Daten und Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen in realen Zusammenhängen,
- Verständiger Einsatz technischer Hilfsmittel (z.B. Computer)

4.1.3.4 Entwurf der Unterrichtsreihe „Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit“(Wassner 2004, S.101ff)

In seinem Buch stellt Wassner einen vollständigen Entwurf einer Unterrichtsreihe zum Thema „Bedingte Wahrscheinlichkeit und Bayesanwendungen“ vor, in der realitätsbezogene und schülerrelevante Elemente zentral seien.

Auf Grundlage des Lehrplans von Nordrhein-Westfalen wurde eine Unterrichtsreihe mit dem Titel *„Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit“* erarbeitet[19]. Das Ziel dieser Unterrichtsreihe ist *„eine realitätsbezogene Erarbeitung des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit und das Bewerten und beurteilen von Anwendungsproblemen zum Themenkreis Bayesregel durch Verwendung von Häufigkeitsdarstellungen“* (Wassner 2004, S.103).

Als Voraussetzungen für die Erarbeitung dieses Themenkreises werden Vorwissen zum Thema mehrstufige Zufallsexperimente (mit Hilfe von Baumdiagrammen und Pfadregeln) und eine grundlegende Interpretation des Begriffs Wahrscheinlichkeit genannt.

Die SchülerInnen sollen Situationen modellieren können, ohne dass dabei die Bayesregel formal hergeleitet oder auch nur benannt wird. Dabei wurde großer Wert darauf gelegt authentische, kontextbeleuchtende Texte zu erstellen, die als Anstoß für Diskussionen und eigene Ideen geben können. Der zeitliche Umfang wurde mit etwa 15 Schulstunden angegeben[20].

Folgende Tabelle gibt einen Überblick über die erstellten Unterrichtsmaterialien. Die Arbeitsblätter sind in ihrer Reihenfolge teilweise vertauschbar.

---

[19] Arbeitsgruppe an der Universität Kassel unter der Leitung von Rolf Biehler und dem Mathematiklehrer Stefan Schweynoch

[20] An dieser Stelle soll ein Überblick über die Unterrichtsreihe und die gewonnenen Erkenntnisse gegeben werden. Alle notwendigen Arbeitsmaterialien sind bei Wassner 2004 im Anhang B zu finden und mit didaktischen Kommentaren und Lösungen versehen. Ein Auszug dieser Arbeitsmaterialien ist im Anhang I dieser Diplomarbeit zu finden.

ARBEITSBLATT	Titel	Hauptinhalt
AB 1	Wie sicher ist der AIDS-Test?	(Intuitive) Problemlösung
AB 2	Das AIDS-Testverfahren im Detail	Ergebnisvertiefung
AB 3	Mögliche Folgen von positiven Testergebnissen	Kontextvertiefung
AB 4	Einfluss der Basisrate	Vertiefung und Erweiterung der Modellierung
AB 5	Das AIDS-Testproblem aus anderer Sicht	
ÜBERBLICK 1	Wahrscheinlichkeitsbegriffe	Verallgemeinerung, Zusammenfassung, Begriffsvertiefung, Übung
AB 6	Übungen zum Überblick 1	
AB 7	Mordfall	Anwendung zu Urteilen mit Indizien (führt zu Überblick 2)
ÜBERBLICK 2	Wahrscheinlichkeiten neu bewerten	Verallgemeinerung, Zusammenfassung, Begriffsvertiefung, Übung
AB 8	Übungen zum Überblick 2	
AB 9 (+Zusatzmaterial)	Schwangerschafts- und Vaterschaftstest	Anwendung (mit Kontextvertiefung)
AB 10 (+Zusatzmaterial)	Mammografie	Anwendung (mit Kontextvertiefung)
AB 11 (+Zusatzmaterial)	BSE-Krise	Anwendung (mit Kontextvertiefung)
AB 12 (+Zusatzmaterial)	Drogen im Straßenverkehr	Anwendung (mit Kontextvertiefung)
AB 13	Übungsaufgaben 1	Übung
AB 14	Übungsaufgaben 2	Übung (erweiterte Modellierung)

Zu Beginn der Unterrichtsreihe soll folgende Fragestellung in den Raum gestellt werden: „Wie sicher ist ein AIDS-Test?“. Wassner weist darauf hin, dass diese Fragestellung geeignet sei das Interesse der (in etwa 15-jährigen) SchülerInnen zu erwecken, sie zum Mitdenken anzuregen und ein Einstieg mit einem Würfel- oder Urnenexperiment in dieser Altersstufe ungleich schwieriger sei. (Wassner 2004, S.105)

AB 1: Wie sicher ist der AIDS-Test?

Wie sicher ist der AIDS-Test ?

Der sogenannte AIDS-Test ist einer der zuverlässigsten Tests, die jemals entwickelt wurden. Er wird eingesetzt, um eine Infektion mit HIV festzustellen(*). Wegen der hohen Gefahr der Verbreitung der tödlichen HIV-Infektion war sogar lange Zeit in der Diskussion, ob nicht die gesamte Bevölkerung zum AIDS-Test gezwungen werden soll.

Der AIDS-Test ist aber nicht perfekt. Wenn jemand HIV-infiziert ist, soll der Test positiv sein. Zu 99,9% fällt er dann auch positiv aus. Andererseits wenn jemand nicht HIV-infiziert ist, soll der Test natürlich negativ sein. Zu 99,7% fällt er dann tatsächlich negativ aus.

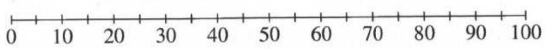
Nehmen wir mal an, dass für alle Menschen in NRW ein AIDS-Test durchgeführt werden soll. Laut Schätzung des Robert-Koch-Instituts sind bundesweit 0,05% der Bevölkerung HIV-infiziert, die Quote kann auch für NRW angenommen werden. Die Bevölkerungsstatistik sagt, dass in NRW 18.000.000 Menschen leben.

(*) Im Sprachgebrauch hat sich AIDS-Test eingebürgert. AIDS bezeichnet eigentlich die Krankheit, die man bekommen kann, wenn man mit HIV infiziert ist. HIV kommt vom engl. „human immunodeficiency virus" = „Immunschwäche-Virus beim Menschen".

1. Stell Dir vor, eine beliebige Person aus NRW bekommt mitgeteilt, dass ihr Test positiv ist. Wie sicher kann sie sein, dass sie tatsächlich HIV-infiziert ist?

   Schätzung: Wahrscheinlichkeit für HIV-Infektion, wenn der Test positiv ist: ______%

   Schätzungen der gesamten Klasse eintragen:



2. Was kann passieren, wenn ein HIV-Infizierter getestet wird? Was, wenn ein nicht HIV-Infizierter getestet wird? Schreibe alle Möglichkeiten auf! Welche würdest du als „Fehler des Tests" bezeichnen und wo lag der Test richtig?
3. Verteile die Bevölkerung von NRW auf die vier Möglichkeiten. Wie viele Personen sind es jeweils?
4. Stelle die Häufigkeiten in einem Baumdiagramm dar.
5. Versuche mit Hilfe der Häufigkeiten aus dem Baumdiagramm die in Aufgabe 1 geschätzte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.
6. Warum ist es trotzdem sinnvoll, einen AIDS-Test durchzuführen?

(Arbeitsblatt 1,S.185)

Als Einstieg dient ein Informationstext (siehe AB 1), der die SchülerInnen zu einer Diskussion über den Inhalt anregen soll. Im Anschluss daran ist es die Aufgabe der SchülerInnen eine Schätzung abzugeben (siehe Frage 1). In diesem Schritt muss bereits eine wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellung formuliert werden. („Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion, wenn der Test positiv ist?") Die im Arbeitsblatt folgenden Schlüsselfragen sollen dazu dienen zu einer Modellierung in Form eines Häufigkeitsbaums hinzuführen. Dies sollte gemeinsam an der Tafel oder am Overheadprojektor geschehen. Obwohl es unrealistisch ist, dass alle BewohnerInnen Nordrhein-Westfalens am Test teilnehmen, wird dies dennoch angenommen, um die schwierige Schätzung der Basisrate (vorerst noch) auszuklammern. Ziel ist es, dass die SchülerInnen erkennen, dass vier mögliche Testergebnisse („richtig-positiv", „falsch-positiv", „richtig-negativ" und „falsch-negativ") auftreten können. Im Anschluss soll versucht werden die Wahrscheinlichkeit für einen „richtig-positiven" Test zu bestimmen.

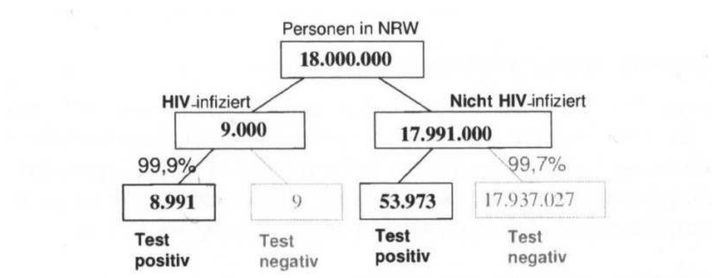
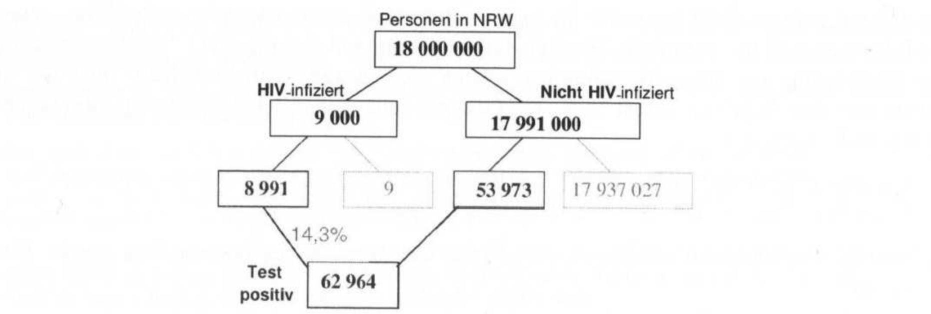


Abb.IV.1a: Modellierung des AIDS-Test Problems im Häufigkeitsbaum (Häufigkeitsbaum 1,S.107)



Lösung: „Die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion bei positivem Test" = „Der Anteil der HIV-Fälle unter allen positiv Getesteten" = 8 991 / 62 964 = 14,3%

Abb.IV.1b: Wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung des AIDS-Test Problems mit dem Häufigkeitsbaum

(Häufigkeitsbaum 2,S.108)

Wassner geht davon aus, dass das Ergebnis „14,3%" bei den SchülerInnen eine neue Motivation bewirkt, da es mit den vorangegangenen Schätzungen und somit der Intuition der SchülerInnen nicht in Einklang steht. Das verblüffende Ergebnis würde eine wichtige Voraussetzung für vernünftiges Denken, insbesondere über den Bezug Welt (Realität) – Mathematik (Modell), schaffen, so Wassner. (Wassner 2004, S.108)

Das Thema Modellbildung, sowie die Interpretation und der Vergleich der mathematischen Lösung mit der realen Welt werden in den Arbeitsblättern 2, 4 und 5 ausführlich behandelt. Das oben erhaltene Ergebnis liefert gute Gründe über diverse Fragestellungen (z.B. *„Warum wird der Test überhaupt durchgeführt, wenn er so „schlecht" ist?"*, AB2) nachzudenken. Im Arbeitsblatt 4 wird der Einfluss der Basisrate auf das Ergebnis behandelt. Ausgehend von Daten zu den verschiedenen „HIV-Risikogruppen" sollen die SchülerInnen selbstständig erkennen, dass sich der Vorhersagewert eines Tests ändert.

Die Bearbeitung des Arbeitsblatts 3 soll den SchülerInnen die Möglichkeit eröffnen, sich auch über den außermathematischen Kontext des Themas „AIDS" zu informieren.

Da ein positives Testergebnis großen Einfluss auf einen Menschen und dessen Umwelt hat, kann eine Diskussion über die zentrale Bedeutung stochastischen Denkens in wichtigen Lebensfragen angeregt werden. Die Arbeitsblätter 9 bis 12 bieten ebenfalls Gelegenheit einer intensiven Beschäftigung mit Situationen aus realistischen Anwendungskontexten. Besonders interessant sind zusätzliche Informationstexte, die sich mit dem Kontext der Aufgaben näher auseinandersetzen. Zum Arbeitsblatt 9 gibt es beispielsweise ein Zusatzblatt, das die SchülerInnen genauer über Schwangerschafts- bzw. Vaterschaftstest informiert.

Die beiden „Überblicke" sollen dazu dienen den SchülerInnen das bisher Gelernte zusammengefasst und formalisiert zu präsentieren und Begriffe einzuführen. Dazu passend wurden Übungsaufgaben (siehe Arbeitsblätter 6 und 8) erstellt.

Eine Unterrichtsstudie[21]

Auf Grundlage dieser Unterrichtsreihe wurden in Nordrhein-Westfalen 144 SchülerInnen (fünf 9. Klassen Gymnasium) von ihren MathematiklehrerInnen unterrichtet. Es wurden sechs Wochen à drei Schulstunden dafür zur Verfügung gestellt. Zusätzlich wurde in diesem Zeitraum eine außerschulische Sexualberatung initiiert. In der letzten Schulstunde gab es eine für alle fünf Klassen einheitliche Klassenarbeit[22]. Nach 14 Wochen wurde mit Hilfe eines Kompetenztests die Nachhaltigkeit der Lernerfolge überprüft. Die SchülerInnen erreichten bei diesem Test insgesamt durchschnittlich 68% der maximalen Testleistung. Wassner betont, dass *„insgesamt hohe Modellierungskompetenzen erreicht wurden und überwiegend korrekte Lösungsstrategien eingesetzt wurden"*. (Wassner 2004, S. 129)

91% der 125 SchülerInnen, die am Kompetenztest teilnahmen, verwendeten ausschließlich die im Unterricht entwickelten Häufigkeitsbäume. Nur zwei SchülerInnen hatten große Probleme ein korrektes Modell aufzustellen. Das Aufstellen von Lösungstermen führte unter den SchülerInnen zu größeren Schwierigkeiten als das Erstellen eines Modells. Bei 41 von 125 SchülerInnen waren allerdings ausschließlich korrekte Lösungsstrategien zu finden.

Wassner stellte allerdings fest, dass bei einigen SchülerInnen jegliche Kompetenzen zur Wahrscheinlichkeits- bzw. Prozentrechnung fehlten. Diese sind für einen erfolgreichen Abschluss der Unterrichtsreihe und nachhaltigen Lernerfolg natürlich von größter Bedeutung.

In einem nach Beenden der Unterrichtsreihe ausgeteilten Fragebogen gaben 70% der SchülerInnen an, dass ihr Sachinteresse höher als sonst im Mathematikunterricht war.

---

[21] Wassner 2004, S.112 ff

[22] Kopie der Klassenarbeit siehe Anhang I

Allerdings gaben auch 10% der befragten SchülerInnen eine generelle Ablehnung des Themas Wahrscheinlichkeitsrechnung an. Ein Teil des Fragebogens enthielt Fragen zu den Modellierungs- und Darstellungsformen. *„Wenn die Schüler sich selbst bewerten, sehen 96% das Ziel der verständigen Umgangs mit Häufigkeitsbäumen als erreicht an und ca. 90% das Modellieren von Problemstellungen in Häufigkeitsbäumen. 89% beurteilen Häufigkeitsbäume als für sie hilfreich für die Problemlösung, auch aufgrund der Förderung der Anschauung durch Häufigkeiten. Generelle positive Anreize durch die Verwendung von Häufigkeitsbäumen sind sehr deutlich geäußert worden."* (Wassner 2004, S. 136)

Der letzte Teil des Fragebogens bot den SchülerInnen die Gelegenheit sich offen über den Unterricht in den vergangenen Wochen zu äußern. Positiv bewerteten viele TeilnehmerInnen der Unterrichtsreihe den Realitätsbezug der Aufgabenstellungen. Allerdings wurden einige Themen im Nachhinein als zu heikel für 9. Klassen eingestuft. Bei einigen SchülerInnen führte die doch recht ausführliche Beschäftigung mit den Problemstellungen zu einer sinkenden Motivation. Im Allgemeinen wurde der Unterricht jedoch als interessanter und abwechslungsreicher als sonst bewertet.

Zusammengefasst kommt Wassner zu der Überzeugung, dass das *„Bayesianische Denken und damit zusammenhängende Themen einen sehr geeigneten Inhalt für den Stochastikunterricht der Sekundarstufe I darstellen"*. (Wassner 2004, S.163)

Außerdem sei es mit Hilfe eines realitätsbezogenen Zugangs gut möglich einen großen und stabilen Lernerfolg zu erzielen. Fast alle SchülerInnen haben während der Unterrichtsreihe Modellierungskompetenzen, auch anspruchsvoller Situationen, erworben. Anstatt schematischem Lösungsfinden wurde selbstständiges, argumentatives Denken angeregt.

„Die sehr häufig vertretene Meinung, dass Themen zur „Anwendung der Bayesregel" selbst für leistungsstärkere Schüler schwer zu erarbeiten sind, ist durch Leistungsbefunde und Lehrer- bzw. Schülerbewertungen gegenteilig zu beurteilen: Die Inhalte sind auch für Schüler mit geringeren algebraischen Fähigkeiten sehr geeignet und es ist vergleichsweise wenig Vorwissen nötig." (Wassner 2004, S.164)

4.2 Schulbücher in Deutschland – eine Analyse

In diesem Kapitel sollen anhand deutscher Schulbücher für Mathematik (vorwiegend für die 6.-9. Schulstufe) Möglichkeiten aufgezeigt werden die Wahrscheinlichkeitsrechnung einzuführen. Es soll ein Eindruck über die unterschiedlichen Zugangsweisen entstehen indem die interessantesten Beispiele und Texte aus den Büchern vorgestellt und mit einem didaktischen Kommentar ergänzt werden.

4.2.1 Elemente der Mathematik 7/8 (Ausgabe Niedersachsen)

Das Schulbuch *Elemente der Mathematik* ist ein etwas älteres Lehrbuch aus dem Jahr 1994 für das Bundesland Niedersachsen. Der aktuelle Lehrplan für dieses Bundesland verlangt Kenntnisse über absolute und relative Häufigkeiten bereits am Ende der sechsten Schulstufe. In dieser Schulbuchreihe wird dieses Thema erst im Band 7 eingeführt. Es wurden knapp zwanzig Seiten den Themen *absolute und relative Häufigkeit* sowie *Zufallsversuche und Wahrscheinlichkeit* gewidmet. Da das Schulbuch in dieser Version nicht mehr aktuell ist, wird die Beschreibung an dieser Stelle knapp gehalten.

Zu Beginn wird ein Beispiel inklusive der vollständigen Lösung vorgestellt. Im Anschluss daran finden sich allgemeine Informationen zum Thema und zum vorangestellten Beispiel. Besonders wichtige allgemeine Informationen sind in pink umrandeten Kästen zusammengefasst. Anschließend werden weiterführende Aufgaben, die noch im Zusammenhang mit dem ersten Beispiel stehen, beziehungsweise weitere Übungsaufgaben zur Verfügung gestellt. Dieser Aufbau wird in jedem (Unter-)Kapitel des Schulbuches verwendet.

Auffällig am Aufbau in diesem Schulbuch ist, dass mit dem Berechnen von relativen Häufigkeiten begonnen wird. Im anschließenden Kapitel werden absolute aus relativen Häufigkeiten berechnet.

Folgendes Beispiel eröffnet das Kapitel *Berechnen von relativen Häufigkeiten:*

Aufgabe 1 (Elemente der Mathematik 7 1994, S. 200f.)

7.1.1 Berechnen von relativen Häufigkeiten

Aufgabe 1

Zu Beginn des Schuljahres werden in den Schulen statistische Daten erfasst; die Klassenlehrer müssen Listen ausfüllen und Fragen an die Schülerinnen und Schüler stellen. Bei einer solchen statistischen Erhebung wurde auch danach gefragt, wie die Kinder zur Schule kommen.

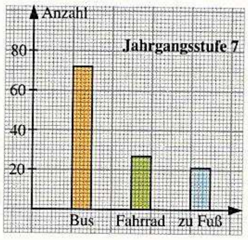
	Jahrgangsstufe 7	*Jahrgangsstufe 8*
Bus	72	77
Fahrrad	27	21
zu Fuß	21	42

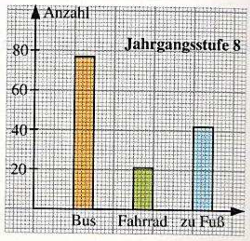
a) Vergleiche die Häufigkeiten in den beiden Jahrgangsstufen. Stelle dazu die Daten einer Stufe jeweils in einem Säulen- und in einem Kreisdiagramm dar.

b) Warum sind die beiden folgenden Aussagen richtig?
(1) In Stufe 8 fahren mehr Kinder mit dem Bus zur Schule als in Stufe 7.
(2) In Stufe 7 fahren *relativ* mehr Kinder mit dem Bus zu Schule als in Stufe 8.

Lösung

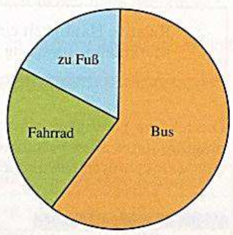
a) Wir tragen im Säulendiagramm die absoluten Häufigkeiten ab.



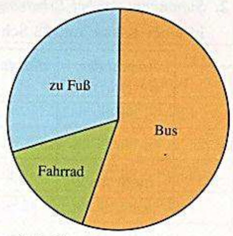


Um Kreisdiagramme zeichnen zu können, müssen wir erst die Anteile der einzelnen Schülergruppen an der Gesamtheit der Schüler der betreffenden Jahrgangsstufe bestimmen.
Beispiel: 120 ist die Gesamtzahl der Schüler in Jahrgangsstufe 7.
Zur absoluten Häufigkeit 72 (Anzahl der Schüler, die mit dem Bus kommen) gehört die relative Häufigkeit (der Anteil) $\frac{72}{120}$; wegen $\frac{72}{120} = \frac{6}{10} = \frac{60}{100}$ sind das 60%.
Der zugehörige Anteil des Vollwinkels (360°) im Kreisdiagramm beträgt 60% von 360°, das sind 216°.
Man kann dies direkt aus den vorgegebenen Daten ausrechnen:
$(\frac{72}{120}$ von $360°) = \frac{72 \cdot 360°}{120} = 72 \cdot 3° = 216°$;
oder in zwei Schritten aus den vorher berechneten Prozentsätzen:
$\frac{72}{120} = \frac{6}{10} = 0{,}6$; 60% von $360° = 0{,}6 \cdot 360° = 216°$

Jahrgangsstufe 7	*Bus*	*Fahrrad*	*zu Fuß*	*gesamt*
Anzahl (absolute Häufigkeit)	72	27	21	120
Anteil (relative Häufigkeit)	$\frac{72}{120} = 60\%$	$\frac{27}{120} = 22{,}5\%$	$\frac{21}{120} = 17{,}5\%$	100%
Mittelpunktswinkel	216°	81°	63°	360°



Jahrgangsstufe 8	*Bus*	*Fahrrad*	*zu Fuß*	*gesamt*
Anzahl (absolute Häufigkeit)	77	21	42	140
Anteil (relative Häufigkeit)	$\frac{77}{140} = 55\%$	$\frac{21}{140} = 15\%$	$\frac{42}{140} = 30\%$	100%
Mittelpunktswinkel	198°	54°	108°	360°



b) (1) In Jahrgangsstufe 8 kommen 77 Kinder mit dem Bus zur Schule. Diese Anzahl (absolute Häufigkeit) ist größer als die von Jahrgangsstufe 7, in der nur 72 mit dem Bus fahren.
(2) Der Anteil (die relative Häufigkeit) der Schülerinnen und Schüler, die mit dem Bus zur Schule kommen, beträgt in der Jahrgangsstufe 8 nur 55% gegenüber 60% in Jahrgangsstufe 7.

Die Aufgabe setzt voraus, dass die SchülerInnen mit dem Erstellen von Säulendiagrammen bereits vertraut sind. Für das Erstellen eines Kreisdiagramms werden noch zusätzliche Hilfestellungen angeboten. Die Lösung des Beispiels ist übersichtlich und verständlich präsentiert, allerdings sind die in den Punkten a) und b) gestellten Fragen etwas unklar formuliert, da es sich bei diesen Häufigkeiten zum Großteil um absolute Häufigkeiten handelt. Weiters wäre es wünschenswert, dass dieses oder ein ähnliches Beispiel mit von den SchülerInnen selbst erfassten Daten gelöst wird. In den weiterführenden Aufgaben werden weitere Merkmalsausprägungen (Anzahl der Geschwister, Taschengeld, …) betrachtet. Diese Daten können von der Klasse ohne große Schwierigkeiten selbst erhoben werden. Vorsicht ist bei Merkmalen wie zum Beispiel dem Körpergewicht der SchülerInnen geboten, da dies für manche sicher ein unangenehmes Thema darstellt.

Im Anschluss an das einführende Beispiel werden allgemeine Informationen zu Merkmalsausprägungen, zur Beziehung zwischen absoluter und relativer Häufigkeit gegeben und zur Summenprobe gegeben.

Positiv zu vermerken ist, dass in den weiterführenden Beispielen auch Begründungsaufgaben zu finden sind.

Aufgabe 3 (Elemente der Mathematik 7 1994, S.203)

3. *Erhebungen mit sich überschneidenden Merkmalsausprägungen*

Eine Gruppe von Schülern wurde nach ihrer Freizeitgestaltung gefragt. Berechne die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ausprägungen.
Woran liegt es, dass die Summe der relativen Häufigkeiten weit über 1 (über 100%) liegt?

Freizeitgestaltung	*absolute Häufigkeit*
Lesen	9
Fußball	6
Reiten	4
Fernsehen	16
Tennis	5

Im Beispiel 7 dieses Kapitels wird sogar eine Strichliste mit absoluten Häufigkeiten (Würfeln mit einem Würfel) vorgegeben. Daraus sollen die relativen Häufigkeiten, mit denen die einzelnen Ausprägungen des Merkmals Augenzahl auftreten, berechnet werden. An dieser Stelle wäre es wirklich sinnvoll die SchülerInnen selbst Würfeln und eine entsprechende Strichliste erstellen zu lassen. Dieses Vorgehen kann ohne großen Aufwand zu einem wachsenden Verständnis der Gleichverteilung beitragen. Generell ist die Auswahl der Übungsbeispiele in diesem Kapitel nicht besonders kreativ: Anhand von vorgegebenen Daten sollen relative Häufigkeiten berechnet werden. In manchen Aufgaben wird zusätzlich ein Säulen- oder Kreisdiagramm verlangt.

Im Kapitel *Berechnen von absoluten Häufigkeiten aus relativen Häufigkeiten – Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit* wird wiederum eine Aufgabe mit Lösung (Zuschauer einer Fernsehsendung) als Einstieg verwendet. Die anschließende Information, die den SchülerInnen angeboten wird, wirkt etwas unübersichtlich und ist in dieser Form nicht unbedingt notwendig.

Information (Elemente der Mathematik 7 1994, S.206)

Information

(1) Anteil in der Stichprobe

Bei statistischen Erhebungen wählt man einige hundert oder einige tausend Personen aus der Bevölkerung aus und befragt diese Menschen stellvertretend (**repräsentativ**) für die gesamte Bevölkerung (*Gesamtheit*). Die relative Häufigkeit in dieser so genannten **Stichprobe aus der Gesamtheit** wird dann meistens veröffentlicht.
Aus dem **Anteil** (der relativen Häufigkeit) in der Stichprobe kann man erschließen, wie viele Personen in der Stichprobe tatsächlich eine bestimmte Antwort gegeben haben.

Gesamtzahl der Befragten *in der Stichprobe* $\xrightarrow{\cdot \text{ Anteil in der Stichprobe}}$ Anzahl der Befragten mit bestimmter Antwort

(2) Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit

Wenn man keine besseren Erkenntnisse hat als die aus einer Stichprobe, schätzt man, dass die Verhältnisse in der Gesamtheit etwa genauso sind wie in der Stichprobe. Man schätzt also z. B., dass in der Gesamtheit aller Fernsehzuschauer der Anteil der Zuschauer zu einer bestimmten Sendung auch 18 % beträgt (vgl. Aufgabe 1 b).
Dieses Vorgehen nennt man *Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit*.

Anzahl aller Personen *in der Gesamtheit* $\xrightarrow{\cdot \text{ Anteil in der Stichprobe}}$ Anzahl aller Personen mit einer bestimmten Eigenschaft

Die meisten der angebotenen Übungsaufgaben funktionieren nach demselben Prinzip wie das vollständig durchgerechnete Einführungsbeispiel.

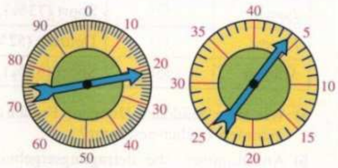
Das zweite Teilkapitel *Zufallsversuche und Wahrscheinlichkeit* beginnt ebenfalls mit einem komplett gelösten Beispiel.

Aufgabe 1 (Elemente der Mathematik 7 1994, S.208)

7.2.1 Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 1

Sandra und Gabi haben zwei Glücksräder, mit denen sie Gewinne auslosen.
Auf Sandras Rad sind die Zahlen von 0 bis 99 notiert. Es gewinnen alle Zahlen, die zwei gleiche Ziffern enthalten.
Auf Gabis Rad sind die Zahlen 1 bis 40 notiert. Es gewinnen alle Zahlen, die durch 7 teilbar sind.
Auf welchem Rad würdest du spielen?



Lösung

Bei Sandra gewinnt man, wenn eine der Zahlen 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 erscheint, also bei 9 von 100 möglichen Feldern, das sind $\frac{9}{100}$ bzw. 9% der möglichen Felder.

Bei Gabi gewinnt man, wenn der Zeiger auf einer der fünf Zahlen 7, 14, 21, 28, 35 stehen bleibt. Man gewinnt also bei 5 von 40 Feldern, das sind $\frac{5}{40}$ (= 0,125) bzw. 12,5% der möglichen Felder.

Da die Gewinnchancen bei Gabis Glücksrad größer sind als bei Sandras Rad, wird man an diesem Glücksrad spielen.

Information

(1) Zufallsversuch, Ergebnis, Ergebnismenge

Das Drehen eines Glücksrads ist ein **Zufallsversuch:** Man kann nicht vorhersagen, welches **Ergebnis** auftritt; dieses hängt vom *Zufall* ab.
Wenn wir Zufallsversuche beschreiben, verwenden wir folgende Begriffe und Sprechweisen:
Beim Zufallsversuch *Drehen von Gabis Glücksrad* können die Ergebnisse 1, 2, 3, 4, …, 39, 40 auftreten.
Die Menge aller Ergebnisse des Zufallsversuchs S = {1; 2; 3; …; 39; 40} heißt **Ergebnismenge des Zufallsversuchs.**
Weitere *Beispiele*:
Würfeln: S = {Augenzahl 1; Augenzahl 2; …; Augenzahl 6} oder kurz S = {1; 2; 3; 4; 5; 6}
Münzwurf: S = {Wappen; Zahl} oder kurz: S = {W; Z}

(2) Ereignis

In Aufgabe 1 interessierte uns der Gewinnfall, das **Ereignis** *Gewinn an Gabis Glücksrad.* Wir beschreiben ein solches Ereignis durch die Menge der zugehörigen Ergebnisse:
E = {7; 14; 21; 28; 35}
Wenn eines der Ergebnisse von E vorliegt, dann sagen wir: Das *Ereignis* E ist *eingetreten.*
Ereignisse werden durch Eigenschaften (Bedingungen) beschrieben.
Weiteres *Beispiel*:
Zufallsversuch: *Würfeln*
Ereignis E: *Die Augenzahl ist ungerade*, also E = {1; 3; 5}

Diese Aufgabe und auch die folgenden Informationen zu Zufallsversuchen, (unmöglichen und sicheren) Ereignissen sowie Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen sind übersichtlich und verständlich präsentiert. Durch die Tatsache, dass alle dargebotenen Informationen mit dem Einführungsbeispiel verknüpft oder durch passende Beispiele belegt sind, wird ein verständlicher Einstieg in das Thema Wahrscheinlichkeit geboten. Anlass für eine kleine Kritik geben wiederum die Übungsaufgaben, die keinerlei Abwechslung bei den Aufgabenstellungen bieten. Ausnahmen bilden die Beispiele 4 und 5, die im Unterschied zu den anderen Beispielen nicht auf das bloße Berechnen von Wahrscheinlichkeiten abzielen, jedoch in ihrer Formulierung etwas klarer sein müssten:

Aufgaben 4/5 (Elemente der Mathematik 7 1994,S.210)

4) Betrachte folgende Vorgänge. Warum kann man sie als Zufallsversuche bezeichnen? (Was ist an ihnen zufällig?)

(1) Werfen eines Reißnagels (2) Geburt eines Kindes (3) Prüfen einer Glühlampe

Gib zu jedem Zufallsversuch die Ergebnismenge an. Kannst du Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ergebnisse angeben?

***5)** Gib für jeden Zufallsversuch die Ergebnismenge an. Entscheide, ob die Ergebnisse die gleiche Chance des Eintreffens haben. Werfen*

(1) eines Kronenkorkens; (2) einer Filmschachtel; (3) einer Streichholzschachtel.

Im anschließenden Unterkapitel *Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeiten* wird folgendes Einführungsbeispiel angeboten.

Aufgabe 1 (Elemente der Mathematik 7 1994,S.211)

Aufgabe 1

a) Eine Münze wird geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass „Wappen" auftritt?

b) Eine Münze wird 300-mal geworfen. Nach je 20 Würfen notiert man die Häufigkeit, mit der „Wappen" aufgetreten ist:

Anzahl der Würfe	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300
Anzahl der Wappen	13	24	29	38	48	57	69	82	92	100	110	121	134	142	152

Berechne jeweils die relative Häufigkeit für das Auftreten von „Wappen". Lege eine Tabelle an. Notiere darin jeweils die *Anzahl der Würfe* und die *relative Häufigkeit, mit der „Wappen"* auftritt.
Zeichne einen Graphen der Zuordnung *Anzahl der Würfe → relative Häufigkeit von Wappen.* Was fällt auf? Vergleiche mit der in a) berechneten Wahrscheinlichkeit.

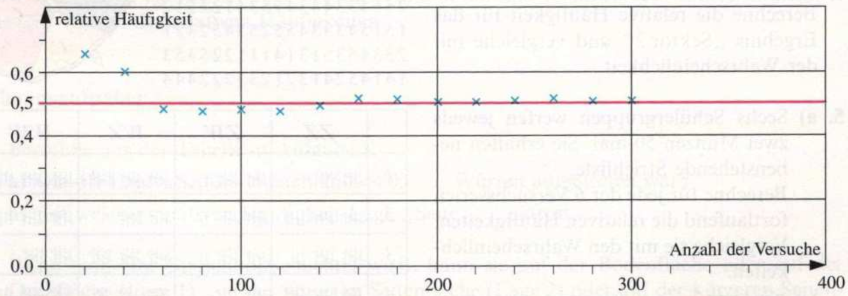
Lösung

a) Bei einer Münze gibt es zwei mögliche Ergebnisse: „Wappen" und „Zahl".
Es gibt keinen Grund, warum eine von beiden Möglichkeiten eine größere Wahrscheinlichkeit haben soll als die andere.
Die Wahrscheinlichkeit von „Wappen" beträgt also $\frac{1}{2}$.

b) Wir bestimmen die relativen Häufigkeiten, indem wir die jeweilige Anzahl von „Wappen" durch die jeweilige Anzahl der Würfe dividieren.

Anzahl der Würfe	*relative Häufigkeit*
20	0,650
40	0,600
60	0,483
80	0,475
100	0,480
120	0,475
140	0,493
160	0,513

Anzahl der Würfe	*relative Häufigkeit*
180	0,511
200	0,500
220	0,500
240	0,504
260	0,515
280	0,507
300	0,507



Du erkennst: Bei wachsender Anzahl der Versuche liegen die relativen Häufigkeiten von „Wappen" in der Nähe von 0,5; dies entspricht der Wahrscheinlichkeit von „Wappen". Bei einer langen Versuchsserie unterscheidet sich also die *relative Häufigkeit* von „Wappen" kaum von der *Wahrscheinlichkeit* von „Wappen".

Anhand dieser Aufgabe ist es für die SchülerInnen relativ einfach nachzuvollziehen, dass sich bei einer langen Versuchsserie die relativen Häufigkeiten der Wahrscheinlichkeit annähern. Im folgenden Informationstext werden die SchülerInnen darauf aufmerksam gemacht, dass es für Zufallsversuche aber typisch ist, dass die Ergebnisse nicht regelmäßig auftreten und es immer wieder „Ausreißer" geben kann. In den anschließenden Übungsaufgaben wird dann auch eigenständiges Würfeln und das Erstellen einer Strichliste gefordert. Die SchülerInnen sollen dabei feststellen, wie oft die Augenzahl „6" unter 300 Würfen auftritt.

Sollte im Unterricht genug Zeit für diese Aufgabe sein, ist diese vermutlich gewinnbringender als die Einführungsaufgabe, da die SchülerInnen keine vorgegebenen Häufigkeiten annehmen müssen.

Im Kapitel *Schätzen von Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten* werden Zufallsversuche behandelt, bei denen man nicht davon ausgehen kann, dass jedes der möglichen Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt. Konkret wird dies am Werfen von Reißnägeln im Einführungsbeispiel eingeführt. In einer Übungsaufgabe sollen die SchülerInnen eine Streichholzschachtel 250-mal werfen und notieren, wie oft die verschiedenen Lagen auftreten. Danach sollen Wahrscheinlichkeiten aus den relativen Häufigkeiten abgeschätzt werden. Hier stellt sich wiederum die Frage, ob im Unterricht genug Zeit bleibt diese Versuche wirklich selbst durchzuführen und ob sich dieser Aufwand auch lohnt. Es ist auch anzunehmen, dass die SchülerInnen das Interesse verlieren, wenn sie (wiederholt) 300-mal Würfeln bzw. 250-mal eine Streichholzschachtel werfen sollen. In anderen, einige Jahre später erschienenen, Schulbüchern wird die Simulation mit Hilfe eines Computers vorgeschlagen, die diesem Problem gut entgegenwirken kann.

Das letzte Kapitel zum Thema Wahrscheinlichkeit *Simulation von Zufallsversuchen* ist als Ergänzungsstoff gekennzeichnet. Die SchülerInnen werden darauf hingewiesen, dass manche Zufallsversuche sehr oft simuliert werden müssen um wenigstens näherungsweise herauszufinden, wie groß die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist.

Im Band 8 dieser Schulbuchreihe erfolgt ein Ausbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit den Themen Pfadregeln, Ziehen (mit und ohne Zurücklegen) und einführende Beispiele zur Binomialverteilung. Zur Einführung in das Thema *Baumdiagramme* werden die bereits aus dem Band 7 bekannten Glücksräder verwendet.

Relativ anspruchsvoll erscheint die Aufgabe 4, vor allem, da mit Vierfeldertafeln bis zu diesem Zeitpunkt noch nicht gearbeitet wurde.

Aufgabe 4 (Elemente der Mathematik 8 1994, S.225)

4. *Deutung der Daten einer Vierfeldertafel als zweistufiger Zufallsversuch*

In einer Klassenstatistik ist angegeben, wie viele Schülerinnen und Schüler mit dem Bus zur Schule kommen. Die Ergebnisse sind in einer *Vierfeldertafel* (siehe rote Unterlegung rechts) notiert.

Eine Person aus der Klasse wird ausgelost.

		Geschlecht		
		männlich	*weiblich*	*gesamt*
Bus	*ja*	6	8	14
	nein	9	4	13
	gesamt	15	12	27

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich
(1) um einen Jungen handelt;
(2) um eine Person handelt, die mit dem Bus fährt;
(3) um ein Mädchen handelt, das nicht mit dem Bus fährt?

b) Die Daten aus der Klassenstatistik lassen sich auch in Form eines Baumdiagramms darstellen. Zeichne ein solches Baumdiagramm (1. Stufe: Geschlecht, 2. Stufe: Verkehrsmittel). Notiere die Wahrscheinlichkeiten auf den Verzweigungen des Baumdiagramms.

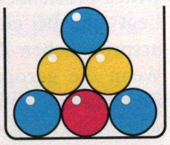
Im anschließenden Kapitel *Pfadregeln* werden zuerst die Multiplikations- dann die Additionsregel behandelt. Diese werden wiederum an Glücksrädern und dem dazugehörigen Baumdiagramm ausführlich erklärt. Zahlreiche Übungsbeispiele, die leider wieder nur Würfeln, Münzwürfe und Glücksräder behandeln, sollen die Kenntnisse der SchülerInnen festigen.

Die Aufgabe 1 im Kapitel *Urnenmodell – Ziehen mit und ohne Zurücklegen* ist sehr umfangreich. Vor allem die Aufgabe im Punkt c) ist hier positiv zu erwähnen, da sie zum besseren Verständnis des Zusammenhangs dient. Die Formulierung „mit bzw. ohne Zurücklegen“ wird noch nicht ausdrücklich vermerkt, sondern erst in den nachfolgenden Informationen erklärt. Hier wird jedoch darauf hingewiesen, dass es wichtig ist anzugeben, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.

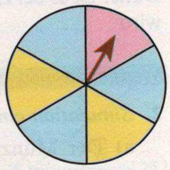
Aufgabe 1 (Elemente der Mathematik 8 1994, S.235)

Aufgabe 1

a) In einem Gefäß sind 6 gleichartige Kugeln: 1 rote, 2 gelbe und 3 blaue Kugeln. Nacheinander zieht man zweimal je eine Kugel. Man gewinnt, wenn die beiden gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn?



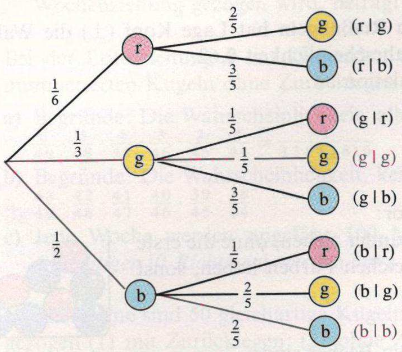
b) Das abgebildete Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimme (auch hier) die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *Zweimal dieselbe Farbe*. Kann man den Zufallsversuch aus a) mit dem Glücksrad simulieren? Beschreibe die Unterschiede zu a).



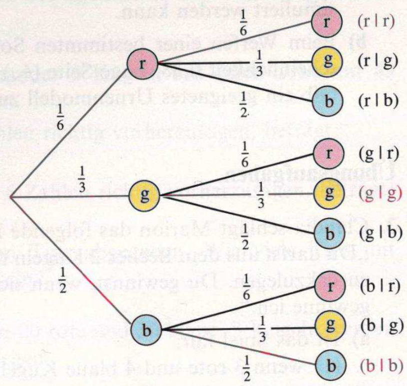
c) Kann man (umgekehrt) das zweifache Drehen des Glücksrades aus b) durch eine geeignete Ziehung mit den Kugeln aus a) simulieren?

Lösung

a)



b)



Aus dem Baumdiagramm lesen wir ab: Zum Ereignis E *Zweimal dieselbe Farbe* gehören die Pfade (g|g) und (b|b). Die Wahrscheinlichkeit ist

$P(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$

$= \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15} \approx 27\,\%$

Zum Ereignis E *Zweimal dieselbe Farbe* gehört außer den Pfaden (g|g) und (b|b) auch der Pfad (r|r), der beim Zufallsversuch in a) nicht möglich war:

$P(E) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \approx 39\,\%$

Der Zufallsversuch aus a) kann also nicht mit dem Glücksrad aus b) simuliert werden.

c) Bei jeder Drehung des Glücksrades hat man gleiche Ausgangsbedingungen: *rot* wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$, *gelb* mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, *blau* mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ kommen. Damit diese Voraussetzungen auch beim Zufallsversuch *Ziehen aus einem Gefäß mit 1 roten, 2 gelben und 3 blauen Kugeln* erfüllt sind, muss eine Kugel nach der Ziehung wieder zurückgelegt werden können. Das zweifache Drehen des Glücksrades kann durch das Ziehen mit den Kugeln aus a) simuliert werden.

In den Übungsaufgaben finden sich auch anspruchsvollere Begründungsaufgaben, zum Beispiel zum Thema „Lotto 6 aus 49".

Aufgabe 6 (Elemente der Mathematik 8 1994, S.237)

6. Bei der Lottoziehung *6 aus 49* werden nacheinander 6 Kugeln aus einer Urne mit 49 nummerierten Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) Begründe: Die Wahrscheinlichkeit, alle 6 Zahlen richtig vorherzusagen, beträgt:
$\frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{1}{13\,983\,816}$

b) Begründe: Die Wahrscheinlichkeit, keine der 6 Zahlen richtig vorherzusagen, beträgt:
$\frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48} \cdot \frac{41}{47} \cdot \frac{40}{46} \cdot \frac{39}{45} \cdot \frac{38}{44}$

c) Jede Woche werden ungefähr 100 Millionen Tips abgegeben. Wie viele Tips mit *6 Richtigen* [*0 Richtigen*] werden etwa dabei sein?

Für das Kapitel *Warten auf den ersten Erfolg* wird die klassische Mensch-ärgere-dich-nicht-Aufgabe herangezogen, bei der ermittelt werden soll, wie groß die Wahrscheinlichkeit beim ersten (zweiten, dritten, ...) Wurf eine Sechs zu Würfeln, ist. Interessant ist dabei vor allem folgende Fragestellung:

„Jens hat fünfmal hintereinander keine Sechs gewürfelt. Wachsen jetzt seine Chancen beim sechsten Wurf?“ (Elemente der Mathematik 8 1994, S.238)

Relativ anspruchsvoll erscheint die weiterführende Aufgabe zum Einführungsbeispiel.

Aufgabe 2 (Elemente der Mathematik 8 1994, S.238)

Weiterführende Aufgabe

2. *Erfolg spätestens in der k-ten Runde*
Ein Würfel wird mehrfach geworfen. Das Werfen einer Sechs soll Erfolg bedeuten. Erläutere, wie die angegebenen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden und ergänze die Tabelle für k = 6 und k = 7.

k	*Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg spätestens in der k-ten Runde*
1	$\frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$
2	$\frac{11}{36} \approx 30{,}6\,\%$
3	$\frac{91}{216} \approx 42{,}1\,\%$
4	$\frac{671}{1296} \approx 51{,}8\,\%$
5	$\frac{4651}{7776} \approx 59{,}8\,\%$

Schön formuliert ist in den anschließenden Informationen die Erkenntnis *„Warten auf den ersten Erfolg – Der Zufall hat kein Gedächtnis“*. Es wird noch einmal darauf hingewiesen, dass die Wahrscheinlichkeit für „spätestens beim 8. Wurf fällt eine Sechs“ und die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ für Augenzahl Sechs nicht verwechselt werden dürfen.

Im letzten Kapitel *Binomialverteilung und Binomische Formeln,* das nicht als Ergänzungsstoff gekennzeichnet ist, wird die Binomialverteilung mit Hilfe der Aufgabe 1 eingeführt. Die Einführung in die Binomialverteilung ist im aktuellen Lehrplan Niedersachsen für die 9. bzw. 10. Schulstufe vorgesehen.

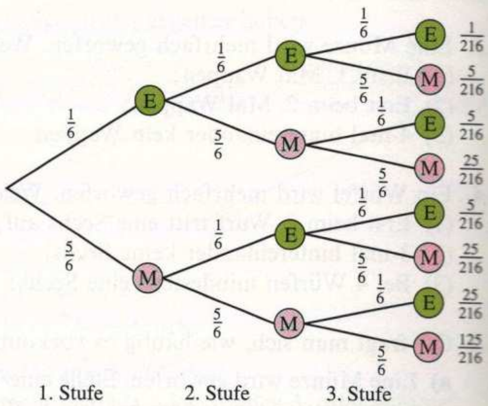
Aufgabe 1 (Elemente der Mathematik 8 1994, S.240)

Aufgabe 1

Ein Würfel wird dreimal geworfen. Wir interessieren uns nur dafür, wie oft Augenzahl 6 fällt (*Erfolg*). Zeichne ein möglichst einfaches Baumdiagramm und bestimme die Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2, 3 Erfolge.

Lösung

Dreifaches Würfeln ist ein 3-stufiger Zufallsversuch, bei dem auf jeder Stufe ein Erfolg (Augenzahl 6) mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ eintritt, ein Misserfolg (Augenzahl 1, 2, 3, 4 oder 5) mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$.
Die Pfade EMM, MEM und MME haben jeweils die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$; die Produkte der Wahrscheinlichkeiten stimmen bis auf die Reihenfolge der Faktoren überein. Entsprechendes gilt für die Pfade EEM, EME und MEE.



Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind:

Anzahl der Erfolge	*zugehörige Pfade*	*Wahrscheinlichkeit*
0 Erfolge	MMM	$1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$
1 Erfolg	EMM, MEM, MME	$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$
2 Erfolge	EEM, EME, MEE	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$
3 Erfolge	EEE	$1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

Die anschließende *Information* ist sehr anspruchsvoll und zudem nicht besonders verständlich dargeboten.

Information (Elemente der Mathematik 8 1994, S.241)

Information

(1) Binomialverteilung und binomische Formeln

Wahrscheinlichkeitsberechnungen zu Zufallsversuchen, bei denen man nur die Ergebnisse *Erfolg* bzw. *Misserfolg* beachtet, sind besonders einfach. Tritt ein Erfolg mit Wahrscheinlichkeit p und ein Misserfolg entsprechend mit Wahrscheinlichkeit q (= 1 − p) auf, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis 0, 1, 2, ... Erfolge beim:

zweistufigen Zufallsversuch

Anzahl der Erfolge	*Wahrschein-lichkeit*
0	$\mathbf{1}\,q^2$
1	$\mathbf{2}\,p\,q$
2	$\mathbf{1}\,p^2$

dreistufigen Zufallsversuch

Anzahl der Erfolge	*Wahrschein-lichkeit*
0	$\mathbf{1}\,q^3$
1	$\mathbf{3}\,p\,q^2$
2	$\mathbf{3}\,p^2\,q$
3	$\mathbf{1}\,p^3$

vierstufigen Zufallsversuch

Anzahl der Erfolge	*Wahrschein-lichkeit*
0	$\mathbf{1}\,q^4$
1	$\mathbf{4}\,p\,q^3$
2	$\mathbf{6}\,p^2\,q^2$
3	$\mathbf{4}\,p^3\,q$
4	$\mathbf{1}\,p^4$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ereignisse beträgt beim

– zweistufigen Zufallsversuch:
$\mathbf{1}p^2 + \mathbf{2}pq + \mathbf{1}q^2$, also nach der 1. binomischen Formel $(p + q)^2$;

– dreistufigen Zufallsversuch:
$\mathbf{1}p^3 + \mathbf{3}p^2 + \mathbf{3}pq^2 + \mathbf{1}q^3$, also nach der binomischen Formel $(p + q)^3$;

– vierstufigen Zufallsversuch:
$\mathbf{1}p^4 + \mathbf{4}p^3q + \mathbf{6}p^2q^2 + \mathbf{4}pq^3 + \mathbf{1}q^4$, also nach der binomischen Formel $(p + q)^4$.

Wegen dieses engen Zusammenhangs mit den binomischen Formeln (siehe Seite 75) heißt eine Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten für 0, 1, 2, ... Erfolge auch **Binomialverteilung.**

(2) PASCAL'sches Dreieck

Vielleicht kommen dir die fett gedruckten Zahlen in der Tabelle und in den binomischen Termen bekannt vor. Man kann sie im nebenstehenden PASCAL'schen Dreieck ablesen (vergleiche auch Seite 75).

1	0. Zeile
1 1	1. Zeile
1 2 1	2. Zeile
1 3 3 1	3. Zeile
1 4 6 4 1	4. Zeile
1 5 10 10 5 1	5. Zeile

Die Nummerierung der Zeilen beginnt bei 0, weil dies dem Zusammenhang mit den binomischen Formeln entspricht. Die nächste Zeile berechnet man so:

– An den Anfang und das Ende der Zeile setzt man eine Eins, ansonsten
– addiert man zwei benachbarte Zahlen und schreibt die Summe in die nächste Zeile,

also: 1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Für die Tabellen (zwei-, drei-, vierstufiger Zufallsversuch) fehlt jegliche Erklärung. Außerdem wäre es erwähnenswert, dass die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten immer 1 ergibt. Auch der Zusammenhang mit dem Pascal´schen Dreieck wird nur unzureichend erklärt und ist für SchülerInnen wohl kaum verständlich. Es ist unklar, warum an dieser Stelle versucht wird die Binomialverteilung einzuführen, da der Binomialkoeffizient noch völlig außer Acht gelassen werden muss. Es ist vorstellbar, dass diese unübersichtliche Aufbereitung des Stoffs eher verunsichert als dass sie es schafft bei den SchülerInnen eine erste Vorstellung zur Binomialverteilung zu entwickeln. Positiv anzumerken ist in diesem Kapitel die Auswahl der Übungsaufgaben, die viele Textbeispiele mit verschiedenen Anwendungsgebieten enthält. Unter anderem findet sich auch eine Übungsaufgabe zum GALTON-Brett, das sich besser zur Einführung in das Thema eignen würde.

Fazit

Trotz der Tatsache, dass dieses Schulbuch schon 1994 erschienen ist, ist es optisch recht ansprechend gestaltet und nicht überladen. Auffällig am Aufbau des Stoffes ist, dass hier mit relativen Häufigkeiten begonnen wird. Eine „natürlichere“ Vorgehensweise wäre, von absoluten auf relative Häufigkeiten überzuleiten. Dies wird in diesem Buch jedoch nicht besonders deutlich hervorgehoben. Ein weiterer Kritikpunkt ist, dass oft nur von „Häufigkeiten“ die Rede ist. Ob es sich dabei um absolute oder relative Häufigkeiten handelt müssen die SchülerInnen offensichtlich selbst herausfinden.

Der Aufbau der Kapitel ist immer gleich: Einführendes (vollständig gelöstes) Beispiel, weiterführende Aufgaben, allgemeine Information und schließlich Übungsaufgaben. Die einführenden Aufgaben sind nur teilweise verständlich und gut gewählt. Eventuell sollte das Besprechen dieser Aufgaben auch im Klassenverband erfolgen, da SchülerInnen vorgerechnete Beispiele oft nicht besonders aufmerksam bearbeiten. Positiv an den Informationstexten ist, dass sie immer einen deutlichen Bezug zum Einstiegsbeispiel aufweisen. Leider sind einige dieser Texte jedoch sehr verwirrend formuliert und somit nicht besonders hilfreich. Die Auswahl der Übungsaufgaben ist leider etwas eintönig. Es werden sehr viele Aufgaben zu Würfeln oder Münzwürfen gestellt, bei denen die SchülerInnen die Versuchsdurchführung selbst übernehmen sollen. Eine Streichholzschachtel 250-mal zu werfen ist wohl auch für SchülerInnen dieser Altersstufe nicht besonders interessant. Dagegen gibt es einige Begründungsaufgaben, die für das Verständnis sicher hilfreich sein können.

Die Erklärung des Zusammenhangs zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten ist recht übersichtlich und verständlich erklärt. Mit Hilfe einer Tabelle und eines Diagramms wird der Sachverhalt adäquat dargestellt. Positiv zu bemerken ist auch, dass die SchülerInnen explizit darauf hingewiesen werden, dass die relativen Häufigkeiten schwanken und es immer wieder „Ausreißer“ geben kann. Meiner Meinung nach zu anspruchsvoll ist die Aufgabe 2 („Erfolg spätestens in der k-ten Runde“). Hier ist es für SchülerInnen nicht gut nachvollziehbar, wie die Ergebnisse in der Tabelle zustande gekommen sind. Eine Darstellung anhand eines Baumdiagramms wäre sicher verständlicher. Im Anschluss daran könnte man dann diese Tabelle mit der Formulierung „Erfolg spätestens in der k-ten Runde“ erstellen.

Die Einführung der Binomialverteilung im Band 8 halte ich für vollkommen misslungen. Die vorhandenen Erklärungen sind kaum oder gar nicht verständlich. Auch der Zusammenhang mit dem Galton-Brett wird nicht deutlich und ich bin der Meinung, dass diese „Einführung“ die SchülerInnen mehr verwirrt, als das sie dadurch eine erste Vorstellung zur Binomialverteilung entwickeln könnten.

4.2.2 Mathe Netz (Ausgabe Niedersachsen)

In der Schulbuchreihe *Mathe Netz* (Ausgabe Niedersachsen) wird das Thema Wahrscheinlichkeit ausführlich im Band 7 behandelt. Die Einführung der Wahrscheinlichkeit mit Hilfe von relativen Häufigkeiten erfolgt in Band 6 dieser Schulbuchreihe.

Im Kapitel *Prognosen* im Band 6 wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung erstmals eingeführt. Unter dem Titel *Der Blick in die Zukunft – Zufall und Vorhersage* werden drei Einstiegsbeispiele (Wahlen, Wetter, Würfelspiel) angeboten.

Einstiegsbeispiele 2 und 3 (Mathe Netz 6 2005, S.93)

E2 a) Das Radio meldet: „Die Niederschlagswahrscheinlichkeit für Niedersachsen beträgt für den heutigen Nachmittag 70%." Was bedeutet das?
b) Der Deutsche Wetterdienst in Hamburg gibt für den Begriff Niederschlagswahrscheinlichkeit die folgenden Hinweise:

Vorhersage	Niederschlagswahrscheinlichkeit p
trocken	0%
überwiegend niederschlagsfrei nur noch vereinzelt leichte Schauer	$10\% \le p \le 20\%$
einzelne Schauer	$30\% \le p \le 40\%$
zeitweise Regen oder Schauer	$50\% \le p \le 70\%$
ergiebige Niederschläge regnerisch, wiederholt Schauer	$80\% \le p \le 100\%$

Was fällt dir auf? Was bedeuten die Prozentzahlen?

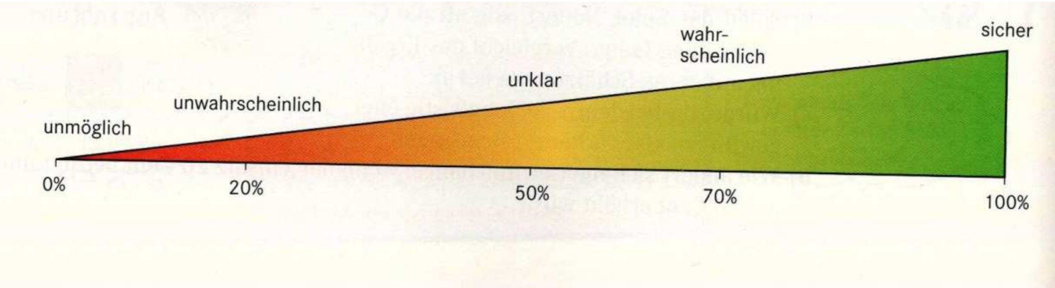
E3 Bei einem Schulfest wird ein Würfelspiel angeboten. Ein normaler Spielwürfel wird einmal geworfen.
a) Wie sind deine Chancen eine der Gewinnzahlen zu werfen?
b) Spielt das Spiel. Notiert, wie oft die Gewinnzahlen fallen. Vergleicht das Ergebnis mit euren Schätzungen bei a).
c) Würdet ihr bei dem Spiel langfristig eher gewinnen oder verlieren? Begründet.
d) Wie ändert sich die Gewinnchance, wenn der Einsatz 20 Cent beträgt und die Auszahlung auf 50 Cent erhöht wird?

Das Einstiegsbeispiel 2 führt den Begriff *Wahrscheinlichkeit* auf eine recht natürliche Weise ein. Die Formulierung im Punkt a) ist für SchülerInnen aus dem Kontext verständlich und regt zu einer Diskussion über die genaue Bedeutung der Aussage an. Das Beispiel 3 kann selbstständig durchgeführt werden und bietet eine gute Einstiegsmöglichkeit in das Thema. Die SchülerInnen müssen sich überlegen wie ihre Chancen sind eine „3" oder eine „6" zu würfeln. Hier wird sofort deutlich, dass die Chance für beide Augenzahlen gleich groß $\left(\frac{1}{6}\right)$ ist. Dadurch wird der Fehlvorstellung vieler SchülerInnen, dass eine „6" schwieriger zu würfeln sei als die anderen Zahlen, entgegengewirkt.

Da das Würfeln mit einem Würfel aber im Laufe der Beispiele einige Male verlangt wird, bietet es sich an, an dieser Stelle eines der beiden anderen, ebenfalls interessanten, Beispiele auszuwählen.

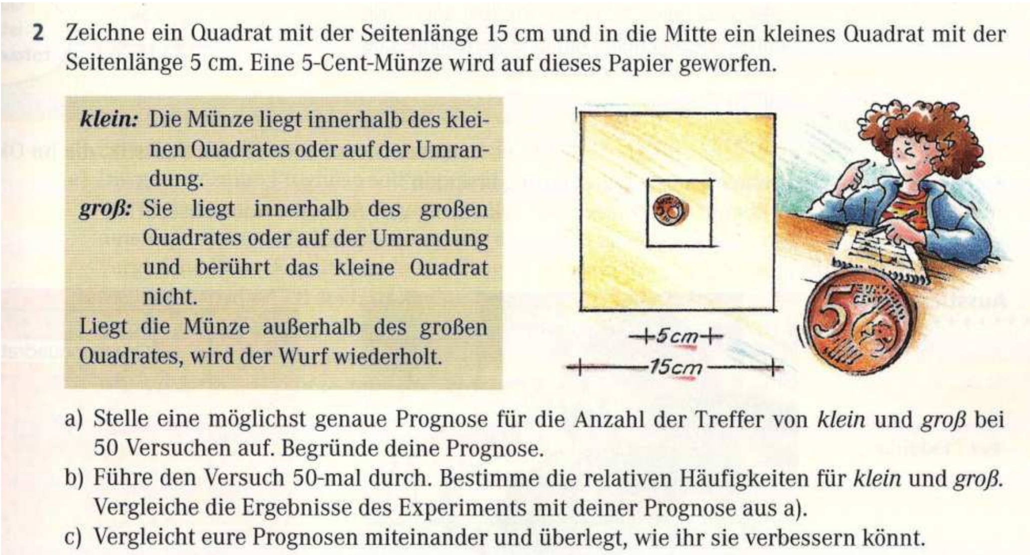
Im anschließend zusammengefassten *Grundwissen* werden die Begriffe *Zufall, Zufallsexperimente, Prognose* und *Wahrscheinlichkeit* erklärt und anhand von Beispielen veranschaulicht. Außergewöhnlich ist die folgende Darstellung, die umgangssprachlich häufig verwendete Ausdrücke mit Hilfe von Prozentwerten angibt.

Grundwissen (Mathe Netz 6 2005, S.94)



In den Übungsaufgaben werden unter anderem auch Spiele vorgeschlagen, die im Unterricht leicht durchzuführen sind. Folgendes Spiel ist dazu geeignet einen Zusammenhang mit einem anderen Thema des Mathematikunterrichts herzustellen. Um eine Prognose zu erstellen wäre es für die SchülerInnen natürlich hilfreich, wenn sie auf die Idee kämen, mit den Flächeninhalten der Quadrate zu arbeiten. Im Punkt b) wird außerdem die selbstständige Durchführung des Versuchs verlangt, die bei 50 Würfen noch nicht zu langwierig wird. Allerdings könnte man die SchülerInnen noch zusätzlich dazu anregen ihre Ergebnisse „zusammenzulegen" um eine umfangreichere Versuchsserie zu erhalten. Eventuell sollte die Versuchsdurchführung noch konkreter abgeklärt werden um Vergleiche zu ermöglichen. (Von wo aus wird die Münze geworfen? Im Stehen/Sitzen?...)

Übungsaufgabe 2 (Mathe Netz 6 2005, S.95)



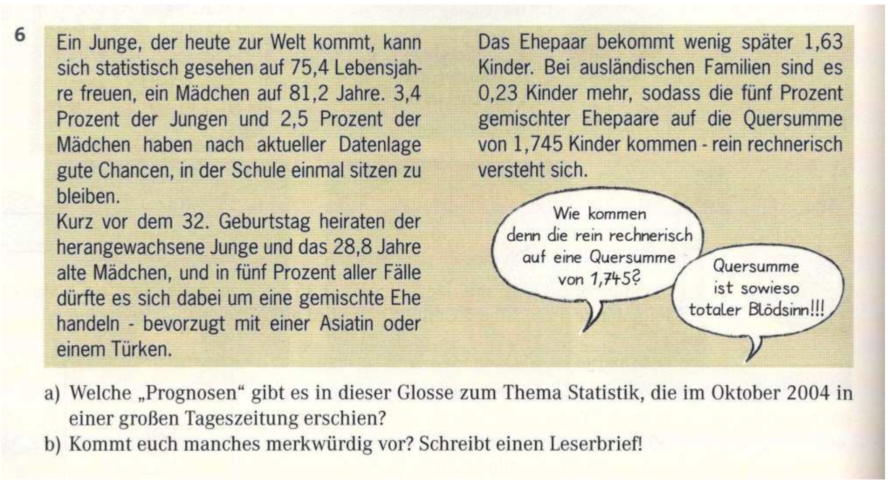
2 Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 15 cm und in die Mitte ein kleines Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm. Eine 5-Cent-Münze wird auf dieses Papier geworfen.

klein: Die Münze liegt innerhalb des kleinen Quadrates oder auf der Umrandung.
groß: Sie liegt innerhalb des großen Quadrates oder auf der Umrandung und berührt das kleine Quadrat nicht.
Liegt die Münze außerhalb des großen Quadrates, wird der Wurf wiederholt.

a) Stelle eine möglichst genaue Prognose für die Anzahl der Treffer von *klein* und *groß* bei 50 Versuchen auf. Begründe deine Prognose.
b) Führe den Versuch 50-mal durch. Bestimme die relativen Häufigkeiten für *klein* und *groß*. Vergleiche die Ergebnisse des Experiments mit deiner Prognose aus a).
c) Vergleicht eure Prognosen miteinander und überlegt, wie ihr sie verbessern könnt.

Eine weitere außergewöhnliche Aufgabe, die den SchülerInnen auch ein gewisses Maß an Kritikfähigkeit abverlangt, ist folgende.

Übungsaufgabe 6 (Mathe Netz 6 2005, S.96)



6 Ein Junge, der heute zur Welt kommt, kann sich statistisch gesehen auf 75,4 Lebensjahre freuen, ein Mädchen auf 81,2 Jahre. 3,4 Prozent der Jungen und 2,5 Prozent der Mädchen haben nach aktueller Datenlage gute Chancen, in der Schule einmal sitzen zu bleiben.
Kurz vor dem 32. Geburtstag heiraten der herangewachsene Junge und das 28,8 Jahre alte Mädchen, und in fünf Prozent aller Fälle dürfte es sich dabei um eine gemischte Ehe handeln - bevorzugt mit einer Asiatin oder einem Türken.
Das Ehepaar bekommt wenig später 1,63 Kinder. Bei ausländischen Familien sind es 0,23 Kinder mehr, sodass die fünf Prozent gemischter Ehepaare auf die Quersumme von 1,745 Kinder kommen - rein rechnerisch versteht sich.

a) Welche „Prognosen" gibt es in dieser Glosse zum Thema Statistik, die im Oktober 2004 in einer großen Tageszeitung erschien?
b) Kommt euch manches merkwürdig vor? Schreibt einen Leserbrief!

Dieser Text liefert viele Anregungen sich über die Sinnhaftigkeit der Aussagen zu unterhalten und zu überlegen, wie der Autor des Artikels zu seinen Zahlen kommt. Eine weitere Möglichkeit wäre, die SchülerInnen selbstständig Daten (Internet/Statistik Austria etc.) zu den beschriebenen „Prognosen" erheben zu lassen und (im Klassenverband) zu versuchen, diese Prognosen vernünftig zu formulieren.

Im folgenden Kapitel *Zufall in Zahlen beschreiben – Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit* wird folgendes Einstiegsbeispiel vorgeschlagen, das zielführend, jedoch auch sehr zeitaufwändig erscheint.

Einstiegsbeispiel 2 (Mathe Netz 6 2005, S.97)

E2 Der Drehverschluss einer Limonadenflasche soll als Spielwürfel für das Spiel „Schieber" verwendet werden. Spielregeln für zwei Personen:

Spieler A hat zehn Spielmarken;	Spieler B erhält nur fünf Spielmarken.
Lage $\cup$ (Deckelöffnung oben):	A muss eine Marke in den Pott abgeben.
Lage $\cap$ (Deckelöffnung unten):	B muss eine Marke in den Pott abgeben.
Lage $\subset$ (Seitenlage):	Beide Spieler müssen die Hälfte ihrer Marken in den Pott abgeben (bei ungerader Anzahl abrunden).

Verloren hat, wer als erster keine Spielmarken mehr besitzt.

a) Sarah möchte vor dem Spiel wissen, wie groß die Gewinnchancen von Spieler A sind. Deshalb stellt sie eine Prognose auf:

Lage	$\cup$	$\cap$	$\subset$
Wahrscheinlichkeit	80%	15%	5%

Überprüft diese Prognose, indem ihr zu zweit jeweils 100 Versuche durchführt.
Notiert eure Daten in Form einer Tabelle. Könnt ihr euch Sarahs Prognose anschließen?

b) Sammelt die Daten von allen Gruppen an der Tafel und wertet sie gemeinsam aus.
Erstellt eine neue Prognose und vergleicht sie mit den vorherigen.

c) Die Klasse 6c hat insgesamt 1428 Würfe durchgeführt. Unterstützt ihre Tabelle die Prognose von Sarah?

Lage	$\subset$	$\cap$	$\cup$
Anzahl	12	221	1195

Obwohl der Begriff *relative Häufigkeit* bereits im *Grundwissen* des ersten Kapitels auftaucht, wird erst an dieser Stelle erklärt, wie relative Häufigkeiten berechnet werden. Praktisch ist, dass dafür das Einstiegsbeispiel 2 herangezogen wird. Anhand des Werfens eines Flaschenverschlusses sollen Prognosen erstellt, überprüft und schließlich durch immer längere Versuchsserien verbessert werden. Das Ergebnis der Würfe wird auch in einem Diagramm dargestellt.

Diagramm (Mathe Netz 6 2005, S.99)

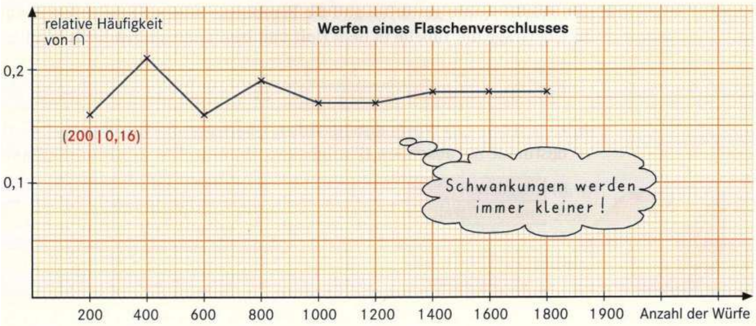


Tabelle und Diagramm zeigen:

Mit steigender Wurfanzahl stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten.

Die letzten Zahlen geben jeweils eine ganz gute Prognose ab.

Dritte Prognose	Lage	∪	∩	⊂
	Prozentangaben	81 %	18 %	1 %

Durch noch längere Versuchsserien könnte man diese Prognose weiter verbessern.
Irgendwann muss man aber mit dem erreichten Resultat zufrieden sein.

Die **bestmögliche Prognose für die relative Häufigkeit** eines Ergebnisses wählt man als **Wahrscheinlichkeit** für dieses Ergebnis.

Bei der Formulierung *„Irgendwann muss man aber mit dem erreichten Resultat zufrieden sein"* könnte es passieren, dass die SchülerInnen konkret wissen möchten, wann denn dieser Zeitpunkt erreicht ist. Dies steht ein wenig im Widerspruch zum darauf folgenden Satz, dass man die *„bestmögliche Prognose"* als Wahrscheinlichkeit wählen soll. Abgesehen davon ist die Zugangsweise übersichtlich und verständlich dargeboten. In den folgenden Übungen werden verschiedene Aufgaben zu Münzwürfen und Würfeln (mit einem Quaderwürfel) angeboten, in denen meist relative Häufigkeiten bestimmt und in ein Diagramm eingetragen werden sollen. Zusätzlich findet sich auch ein Beispiel, für das ein Tabellenkalkulationsprogramm verwendet werden kann. Für die SchülerInnen sicher spannend ist folgendes Beispiel, da sie selbst Botschaften verschlüsseln und kreativ werden können. Die Bearbeitung bedeutet jedoch einen großen zeitlichen Aufwand und man muss abwägen, ob der Lernertrag dafür oder dagegen spricht.

Ausstieg 1 (Mathe Netz 6 2005, S.102)

Ausstiege

A1

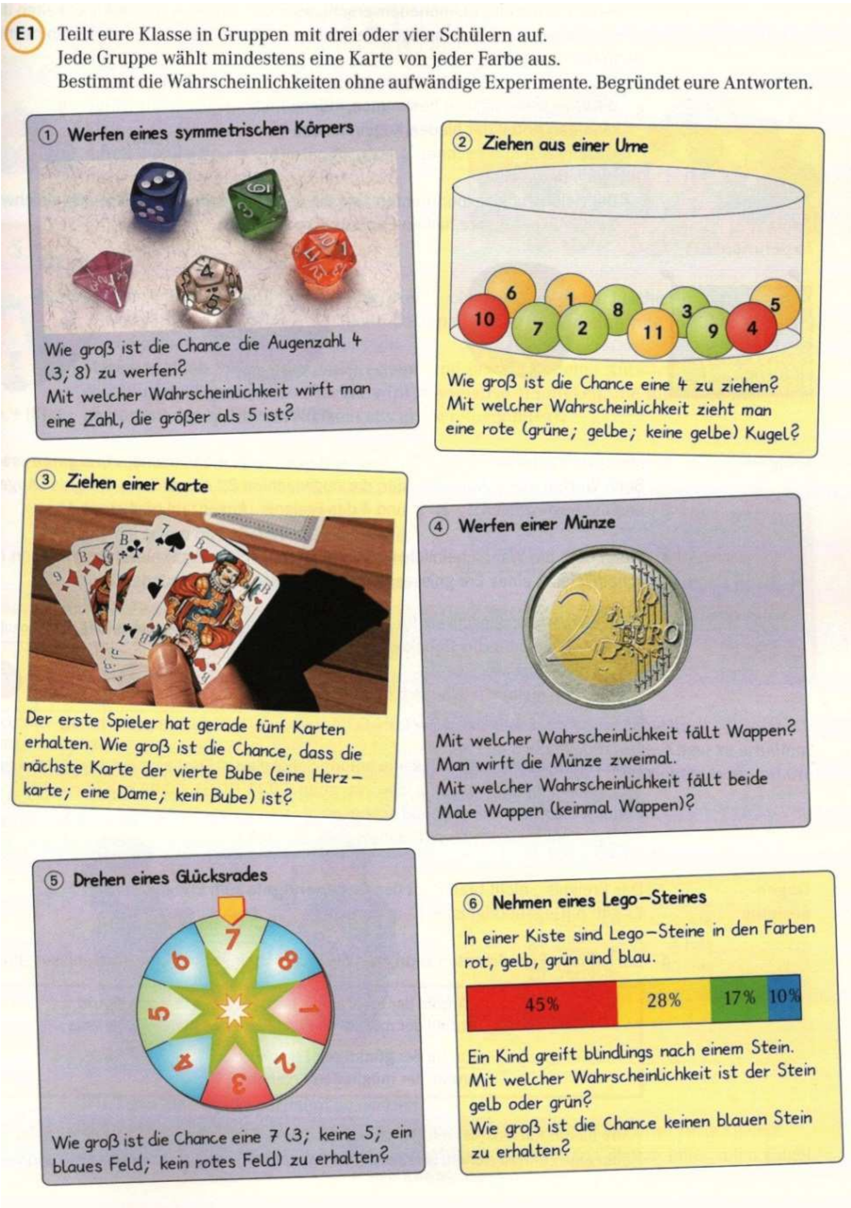
SENXABEIZAIQIOEHEWDNABQAIBVECRKNYDNEOPQOCWIVCWGGEAIEOPRKIZAI
NKAHANIXAOAPVPCWIVCWGGEAIIAEIAEIRKIQIXAQCOWHAICWGGEANI
XARKAGFANPAOZKNBDKANPIEYDPWQBZAHAEIZNEICGEICSEZANOPWIZ
VQGAEOPAIQIZZWOGAXAIEOPIEYDPAEIBWYDBQANZEANKAHEOYDAI
GACEKIWANAZEAWGOXAOWPVQICEIZAIXABAOPECPAIGWCANIXWXWKNQH
WMQWNEQHGWQZWIQHQIZFGAEIXKIQHGEACAI

Bei der Codierung ist jeder Buchstabe des Alphabets (ohne den Buchstaben J) um eine feste Anzahl von Stellen verschoben worden. Schon Julius Caesar (100–44 v.Chr.) benutzte diese nach ihm benannte Verschlüsselung.
Um den Code zu knacken kannst du in folgender Weise vorgehen:
Du bestimmst, mit welchen relativen Häufigkeiten die einzelnen Buchstaben im Geheimtext vorkommen und zeichnest ein Säulendiagramm. Dann vergleichst du dein Ergebnis mit der Buchstabenhäufigkeit der deutschen Sprache.

a) Entschlüssele den Text. Dabei können verschiebbare Alphabetstreifen helfen.
b) Verschlüssele selbst Texte und lass sie von deinen Mitschülern entschlüsseln.

Im Kapitel *Dem Zufall auf der Spur – Berechnung von Wahrscheinlichkeiten* werden die SchülerInnen zum selbstständigen Experimentieren animiert.

Einstiegsbeispiel 1 (Mathe Netz 6 2005, S.103)



E1 Teilt eure Klasse in Gruppen mit drei oder vier Schülern auf.
Jede Gruppe wählt mindestens eine Karte von jeder Farbe aus.
Bestimmt die Wahrscheinlichkeiten ohne aufwändige Experimente. Begründet eure Antworten.

① Werfen eines symmetrischen Körpers

Wie groß ist die Chance die Augenzahl 4 (3; 8) zu werfen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man eine Zahl, die größer als 5 ist?

② Ziehen aus einer Urne

Wie groß ist die Chance eine 4 zu ziehen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man eine rote (grüne; gelbe; keine gelbe) Kugel?

③ Ziehen einer Karte

Der erste Spieler hat gerade fünf Karten erhalten. Wie groß ist die Chance, dass die nächste Karte der vierte Bube (eine Herz-karte; eine Dame; kein Bube) ist?

④ Werfen einer Münze

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt Wappen?
Man wirft die Münze zweimal.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt beide Male Wappen (keinmal Wappen)?

⑤ Drehen eines Glücksrades

Wie groß ist die Chance eine 7 (3; keine 5; ein blaues Feld; kein rotes Feld) zu erhalten?

⑥ Nehmen eines Lego-Steines

In einer Kiste sind Lego-Steine in den Farben rot, gelb, grün und blau.

45% 28% 17% 10%

Ein Kind greift blindlings nach einem Stein.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Stein gelb oder grün?
Wie groß ist die Chance keinen blauen Stein zu erhalten?

Bei allen Aufgaben sind Vorkenntnisse in der Bruchrechnung, insbesondere der „von-Bedeutung“ (3 von 4 = $\frac{3}{4}$) unerlässlich. Diese und ähnliche Aufgaben eignen sich dadurch aber natürlich auch zur Wiederholung und Vertiefung des Themas. Leider ist in der Aufgabenstellung nicht genauer angegeben, in welcher Form die Wahrscheinlichkeiten angegeben werden sollen. Es bietet sich an die Aufgabenstellung dahingehend umzuformulieren, dass die SchülerInnen ihre Ergebnisse in Bruch-, Dezimal- und Prozentangaben angeben sollen. Der Zusammenhang würde sich an diesen Beispielen gut erklären lassen.

Die Aufgabe 6 *„Nehmen eines Lego-Steines“* könnte man dazu auch noch umformulieren und den Prozentstreifen mit absoluten Zahlen und Brüchen angeben lassen. Es wäre dann natürlich wichtig, dass sich die einzelnen Gruppen ihre Ergebnisse auch gegenseitig präsentieren, damit alle SchülerInnen auf dem gleichen Wissensstand sind.

Im *Grundwissen* werden Laplace-Experimente sowie die Begriffe *Ergebnis*, *Ereignis* und *Gegenereignis* erklärt. Es wird darauf hingewiesen, dass es verschiedene Methoden gibt Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen:

- mit Hilfe langer Versuchsreihen
- durch Auszählen
- durch Berechnung (Laplace-Experimente; $\frac{"günstige"}{"mögliche"}$)

In diesem Kapitel gibt es zahlreiche, teilweise recht anspruchsvolle, Übungsaufgaben. Unter anderem wird bereits die allgemein bekannte *Verdopplungsstrategie* behandelt. Hier ist natürlich wichtig, dass geklärt wird, wie das Roulettespiel überhaupt funktioniert. Dies kann bei SchülerInnen dieser Altersstufe mit Sicherheit nicht vorausgesetzt werden.

Übungsbeispiel 9 (Mathe Netz 6 2005, S.106)

9 Zocker-Paul verrät seinem Kumpel Kugel-Fred eine „todsichere Strategie“ beim Roulettespiel. Er setzt jedes Mal auf Rot.
Bei Gewinn erhält er das Doppelte seines Einsatzes ausbezahlt. Bei Verlust verdoppelt er seinen Einsatz jeweils.
a) Wieso bezeichnet Zocker-Paul seine Strategie als „todsicher“?
b) Welche Schwierigkeiten gibt es bei dieser Strategie?

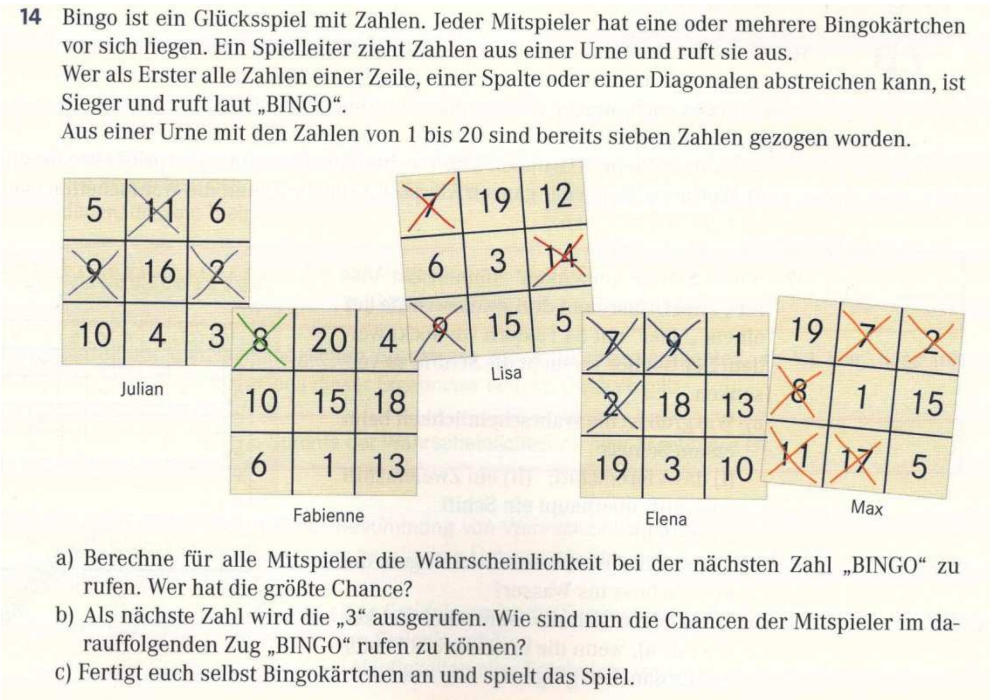
Einige Beispiele sind auch als „harte Nuss“ gekennzeichnet und fordern kreative Lösungsansätze seitens der SchülerInnen. Hilfreich ist außerdem, dass sich bei diesen Beispielen in vielen Fällen die ganze Klasse beteiligen kann.

Übungsbeispiel 20 (Mathe Netz 6 2005, S.110)

20 An einer Treibjagd auf Niederwild sind sieben Jäger beteiligt. Die Treiber scheuchen eine Entenfamilie auf. Schnatternd erheben sich zehn Enten in die Lüfte. Jeder Jäger schießt auf eine Ente und trifft auch.
a) Schätze, wie viele Enten getroffen sind.
b) Wie kannst du die Entenjagd simulieren? Führe mindestens 100 Simulationen durch.
c) Tragt die Ergebnisse der ganzen Klasse zusammen. Gebt Wahrscheinlichkeiten an, mit der keine, eine, ..., sieben Enten getroffen werden.

In den *Vermischten Übungen* gibt es Aufgaben, deren Lösungen vollständig im hinteren Teil des Buches zu finden sind. Die meisten Übungen enthalten Münzwürfe, Reißzwecke, Urnen, Würfel oder Glücksräder. Folgende Übung hingegen beschäftigt sich mit einem anderen Glücksspiel und kann von den SchülerInnen wiederum selbst gespielt werden. Die SchülerInnen müssen erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit für alle noch übriggebliebenen Zahlen gezogen zu werden gleich groß ist. Danach müssen sie erkennen, wie viele Möglichkeiten die einzelnen SpielerInnen haben, bei der nächsten Zahl eine Zeile, Spalte oder Diagonale durchzustreichen.

Bingo (Mathe Netz 6 2005, S.113)



14 Bingo ist ein Glücksspiel mit Zahlen. Jeder Mitspieler hat eine oder mehrere Bingokärtchen vor sich liegen. Ein Spielleiter zieht Zahlen aus einer Urne und ruft sie aus.
Wer als Erster alle Zahlen einer Zeile, einer Spalte oder einer Diagonalen abstreichen kann, ist Sieger und ruft laut „BINGO".
Aus einer Urne mit den Zahlen von 1 bis 20 sind bereits sieben Zahlen gezogen worden.

Julian

5	~~11~~	6
~~9~~	16	~~2~~
10	4	3

Fabienne

~~8~~	20	4
10	15	18
6	1	13

Lisa

~~7~~	19	12
6	3	~~14~~
~~9~~	15	5

Elena

~~7~~	~~9~~	1
~~2~~	18	13
19	3	10

Max

19	~~7~~	~~2~~
~~8~~	1	15
~~11~~	~~17~~	5

a) Berechne für alle Mitspieler die Wahrscheinlichkeit bei der nächsten Zahl „BINGO" zu rufen. Wer hat die größte Chance?
b) Als nächste Zahl wird die „3" ausgerufen. Wie sind nun die Chancen der Mitspieler im darauffolgenden Zug „BINGO" rufen zu können?
c) Fertigt euch selbst Bingokärtchen an und spielt das Spiel.

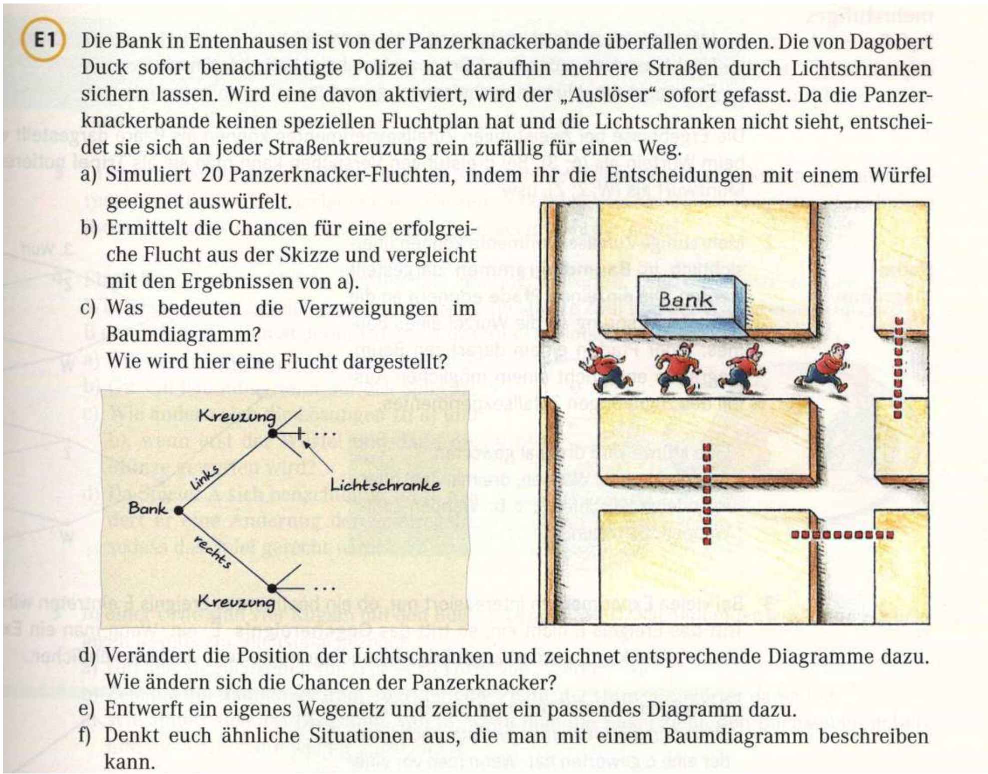
In diesem Buch wird genau erklärt, wie man Zufallszahlen mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms erstellen oder Simulationen (Münzwurf, Würfeln) durchführen kann. Dazu gibt es genaue Anleitungen und Abbildungen. Dies ist für einige Beispiele von großem Vorteil, da die SchülerInnen dann nicht gezwungen sind, lange Wurfserien selbst durchzuführen. Am Ende des Kapitels werden zwei Seiten als *Zusammenfassung* betitelt, in der lediglich noch einmal die Informationen aus dem *Grundwissen* in verkürzter Form zusammengestellt sind.

Die letzte Seite des Kapitels *Prognosen* enthält eine Projektarbeit zum Thema *Geheime Botschaften – Verbergen und Verschlüsseln*, die für die SchülerInnen mit Sicherheit spannend wäre, mit dem Thema Wahrscheinlichkeit allerdings keinen näheren Zusammenhang mehr hat.

Unter dem Titel *Dem Zufall auf der Spur* werden in Band 7 die Themen mehrstufige Zufallsexperimente, Produkt- und Summenregel und „der zu erwartende Gewinn“ erarbeitet.

Das erste Kapitel *Mehrstufige Zufallsexperimente* wird mit Hilfe von zwei Einstiegsbeispielen eingeführt. Bereits das erste Beispiel fällt dadurch positiv auf, dass es sich nicht um ein klassisches Würfel- oder Münzwurfexperiment handelt.

Einstieg 1 (Mathe Netz 7 2006, S.105)



E1 Die Bank in Entenhausen ist von der Panzerknackerbande überfallen worden. Die von Dagobert Duck sofort benachrichtigte Polizei hat daraufhin mehrere Straßen durch Lichtschranken sichern lassen. Wird eine davon aktiviert, wird der „Auslöser“ sofort gefasst. Da die Panzerknackerbande keinen speziellen Fluchtplan hat und die Lichtschranken nicht sieht, entscheidet sie sich an jeder Straßenkreuzung rein zufällig für einen Weg.

a) Simuliert 20 Panzerknacker-Fluchten, indem ihr die Entscheidungen mit einem Würfel geeignet auswürfelt.

b) Ermittelt die Chancen für eine erfolgreiche Flucht aus der Skizze und vergleicht mit den Ergebnissen von a).

c) Was bedeuten die Verzweigungen im Baumdiagramm? Wie wird hier eine Flucht dargestellt?

d) Verändert die Position der Lichtschranken und zeichnet entsprechende Diagramme dazu. Wie ändern sich die Chancen der Panzerknacker?

e) Entwerft ein eigenes Wegenetz und zeichnet ein passendes Diagramm dazu.

f) Denkt euch ähnliche Situationen aus, die man mit einem Baumdiagramm beschreiben kann.

Der Zugang zum Thema mehrstufige Zufallsexperimente und Baumdiagramme ist hier recht untypisch aufgebaut, dadurch aber interessant. Zuerst entsteht der Eindruck die Aufgabenstellungen im obigen Einstiegsbeispiel würden einige Vorkenntnisse der SchülerInnen voraussetzen. Das Erstellen von Baumdiagrammen wird beispielsweise erst in den Informationen nach den beiden Einstiegsbeispielen erklärt. Die Abbildungen im Beispiel 1 vereinfachen dies allerdings und schaffen einen recht anschaulichen, natürlichen Zugang zum Thema Baumdiagramme.

Beim zweiten Einstiegsbeispiel soll abgeschätzt werden, wie häufig ein Pasch (also zwei gleiche Augenzahlen) auftritt, wenn zwei Würfel 50-mal geworfen werden. Die SchülerInnen müssen ihre Schätzung begründen und den Versuch anschließend selbst durchführen. Interessant ist auch folgende Aufgabenstellung, da sie zum besseren Verständnis der Darstellung mit Hilfe eines Baumdiagramms helfen kann und zusätzlich die Kreativität der Lernenden fordert:

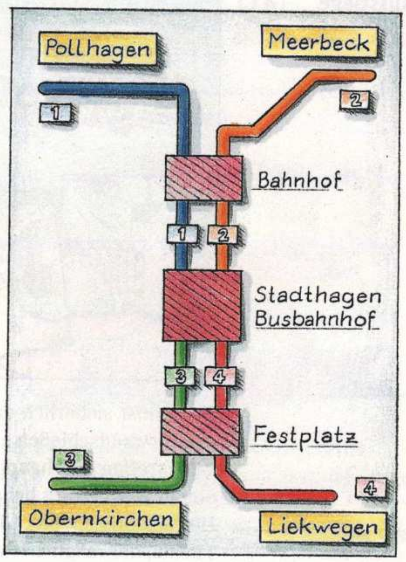
„Baumdiagramme werden häufig als Modelle für das Darstellen von Entscheidungsmöglichkeiten in mehreren Stufen benutzt. Gib Beispiele für derartige Entscheidungsprobleme an und zeichne passende Baumdiagramme.“ (Mathe Netz 7 2006, S.105)

Im Anschluss an diese beiden Einstiegsbeispiele werden allgemeine Informationen unter dem Titel *Grundwissen* zusammengefasst. Es werden mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme und das Gegenereignis an Beispielen erklärt. Außerdem folgt ein Hinweis, dass mehrere, gleichzeitig durchgeführte Einzelversuche auch als mehrstufige Zufallsexperimente gedeutet werden können. Da die Informationen übersichtlich und klar formuliert sind, ist es für SchülerInnen sicher möglich, mit dieser eher knappen Einführung klarzukommen. Im Anschluss folgen Übungsbeispiele, die sowohl klassische Würfel- und Urnenversuche, gleichzeitig aber auch völlig andere Aufgabenstellungen enthalten.

Übung 6 (Mathe Netz 7 2006, S.107)

6 Vom Busbahnhof in Stadthagen fahren vier Buslinien ab. Die Busse nach Pollhagen und Meerbeck fahren über die Haltestelle Bahnhof, die anderen über den Festplatz.
Am Tage fahren 60 Busse vom Busbahnhof ab, 20 davon über den Bahnhof, jeweils die Hälfte davon nach Pollhagen und Meerbeck. Von denen, die über den Festplatz fahren, fahren 25% nach Obernkirchen, die restlichen nach Liekwegen.

a) Stelle den Buslinienplan in einem Baumdiagramm dar. Notiere an den Pfaden die jeweilige Anzahl der Busse.
b) Jens hat sich etwas verspätet und erreicht den Busbahnhof in letzter Minute. Da er nicht mehr fragen kann, in welche Richtung der Bus fährt, wählt er einfach den Nächstbesten. Wie groß ist seine Chance, in den Bus nach Obernkirchen einzusteigen?



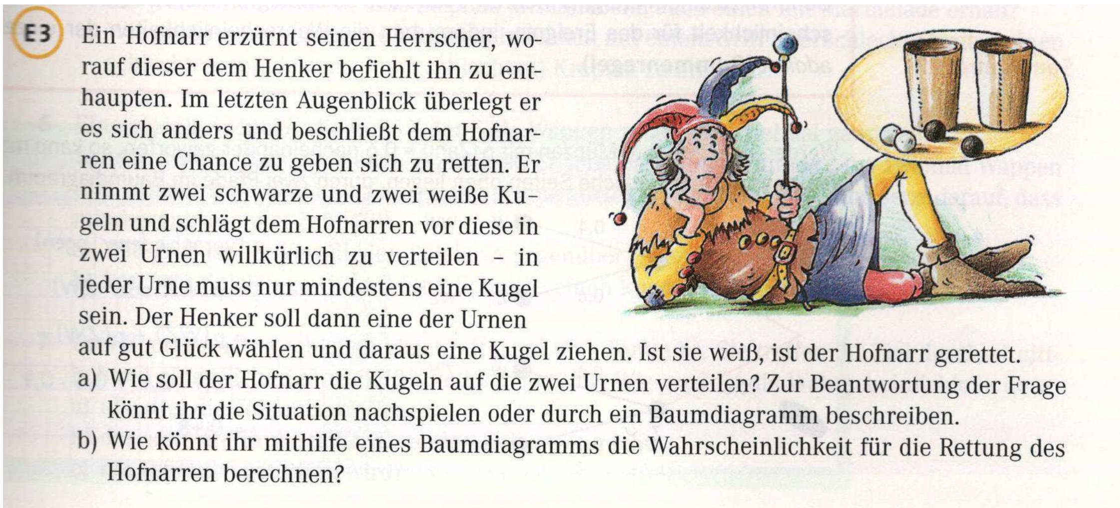
Auch diese Übung bietet eine recht natürliche Anwendungsmöglichkeit von Baumdiagrammen. Zusätzlich wird auch die Prozentrechnung in die Aufgabenstellung integriert. Diese Aufgabe stellt, wenn auch stark vereinfacht, eine Situation aus der realen Welt dar. Es wäre wichtig, dass die SchülerInnen erkennen, dass Situationen aus ihrem täglichen Leben mit Hilfe von Baumdiagrammen beschrieben werden können und dies nicht nur bei Münz- oder Würfelexperimenten der Fall ist.

Jedes Kapitel endet mit einer Aufgabe unter dem Titel *Ausstieg* (siehe Beispiel **Ausstieg 1** oben). Dies ist eine wirklich spannende Idee für alle, die das Thema besonders interessiert.

Es werden Begebenheiten aus der Geschichte der Mathematik oder literarische Bearbeitungen von mathematischen Inhalten angeboten.

Im Kapitel *Der Weg zum Ziel – Produkt- und Summenregel* werden drei Einstiegsbeispiele angeboten, davon eines zum Thema Glücksrad. Die Aufgaben sind anspruchsvoll und sollten nach Möglichkeit in Partnerarbeit gelöst werden.

Einstieg 3 (Mathe Netz 7 2006, S.109)



E3 Ein Hofnarr erzürnt seinen Herrscher, worauf dieser dem Henker befiehlt ihn zu enthaupten. Im letzten Augenblick überlegt er es sich anders und beschließt dem Hofnarren eine Chance zu geben sich zu retten. Er nimmt zwei schwarze und zwei weiße Kugeln und schlägt dem Hofnarren vor diese in zwei Urnen willkürlich zu verteilen – in jeder Urne muss nur mindestens eine Kugel sein. Der Henker soll dann eine der Urnen auf gut Glück wählen und daraus eine Kugel ziehen. Ist sie weiß, ist der Hofnarr gerettet.

a) Wie soll der Hofnarr die Kugeln auf die zwei Urnen verteilen? Zur Beantwortung der Frage könnt ihr die Situation nachspielen oder durch ein Baumdiagramm beschreiben.

b) Wie könnt ihr mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit für die Rettung des Hofnarren berechnen?

Vor allem die Aufgabe b) dieses Beispiels dürfte für die SchülerInnen anspruchsvoll sein, da wiederum erst im Anschluss anhand von Beispielen die wichtigsten Informationen zu Produkt- und Summenregel präsentiert werden.

Die Übungen dieses Kapitels sind wiederum sehr zahlreich, abwechslungsreich und (vor allem im Vergleich zu den entsprechenden Aufgaben des Schulbuchs *Elemente der Mathematik 7*) sehr gehaltvoll.

Beispiel(Mathe Netz 7 2006, S.111)

„Drei Sportschützen schießen gleichzeitig auf eine Tontaube. Sie treffen ihr Ziel durchschnittlich mit einer Sicherheit von 70%, 60% bzw. 35%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle drei die Tontaube treffen; b) der erste die Taube trifft, die anderen dagegen nicht; c) die Tontaube getroffen wird?“

Dieses und ähnliche Beispiele sollen dazu dienen, die Kenntnisse betreffend der Summen- und Produktregel zu vertiefen.

Mit Hilfe von Baumdiagrammen sind diese Beispiele für die SchülerInnen gut lösbar. Besonders spannend ist in diesem Kapitel das Beispiel Ausstieg 1, da es einen Bezug zur realen Welt schafft und vermutlich nur unter Anleitung der Lehrkraft zu bearbeiten ist.

Ausstieg 1 (Mathe Netz 7 2006, S.114)

A1

Fast jedes Jahr im Winter tritt eine Grippewelle auf. Viele Ärzte raten zu einer Schutzimpfung. Leider kann diese Impfung eine mögliche Ansteckung nicht völlig unterdrücken.
Man hat bei einem bestimmten Impfserum festgestellt, dass es zu 90% wirkt. Aufgrund einer Presseveröffentlichung über eine nahende Grippewelle haben sich 70% der über Sechzigjährigen (Anteil an der Gesamtbevölkerung: 25%) und 50% der restlichen Bevölkerung impfen lassen.

a) Eine Schutzimpfung kostet 55 Euro, eine Grippebehandlung 120 Euro.
Mit welchen Kosten muss man bei einer Grippewelle für 1000 Personen rechnen, wenn jede zweite Person angesteckt wird?
b) Haltet ihr die Annahmen, die bei a) gemacht werden, für realistisch?

An dieser Stelle müssen viele verschiedene Dinge beachtet werden. Mit einem einfachen Baumdiagramm ist die Aufgabe nicht mehr zu lösen. Zuerst müssen die SchülerInnen berechnen, wie viele Leute sich tatsächlich impfen lassen. Weiters ist zu beachten, dass das Impfserum nicht bei allen Personen wirkt. Die Fragestellung im Punkt b) sollte dazu genutzt werden diesen Aspekt zu besprechen und weitere „Unsicherheitsfaktoren“ in dieser Rechnung zu diskutieren.

Im Kapitel *Erwartungsvoll – Der zu erwartende Gewinn* werden wiederum drei Einstiegsbeispiele, eine knappe Zusammenfassung unter dem Titel „Grundwissen“ und viele Übungsaufgaben angeboten. Das erste Einstiegsbeispiel besteht nur aus einem Comic und enthält keine explizit angeführten Arbeitsanweisungen. Die SchülerInnen müssen also selbst überlegen, was für sie zu tun ist.

Einstieg 1 (Mathe Netz 7 2006, S.115)

Grundwissen 1 (Mathe Netz 7 2006, S.116)

Grundwissen

1

Gewinn	50 ct	1 €	2 €
Abs. Häufigkeit	15	25	10

Bei einem Spiel mit drei verschiedenen Gewinnstufen hat sich bei einer Serie von 50 Spielen die nebenstehende Tabelle ergeben.

Den mittleren Gewinn pro Spiel kann man auf zwei Arten berechnen:

1) $\frac{15 \cdot 0{,}5\,€ + 25 \cdot 1\,€ + 10 \cdot 2\,€}{50} = 1{,}05\,€$

2) $\frac{15}{50} \cdot 0{,}5\,€ + \frac{25}{50} \cdot 1\,€ + \frac{10}{50} \cdot 2\,€ = 1{,}05\,€$

In der linken Formel wird mit den absoluten Häufigkeiten gerechnet, in der rechten Formel werden jeweils die relativen Häufigkeiten mit den zugehörigen Gewinnen multipliziert.

2 Will man bereits vor dem Spiel wissen, wie die Chancen sind, kann man den Gewinn berechnen, den man theoretisch erwarten kann. Dazu verwendet man in der rechten Formel Wahrscheinlichkeiten statt der relativen Häufigkeiten.

Gewinn = Auszahlung minus Einsatz

Beim Roulette gewinnt man, wenn die Zahl, auf die die Kugel fällt, unter denen ist, auf die man gesetzt hat. Setzt man z. B. 10 € auf Rot und es kommt eine rote Zahl, erhält man 20 € ausgezahlt, man hat also 10 € gewonnen.

Ausfall	Rot	nicht Rot
Gewinn pro Spiel	10	−10
p (Gewinn)	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$
Gewinn · p (Gewinn)	$10 \cdot \frac{18}{37}$	$-10 \cdot \frac{19}{37}$

Zu erwartender Gewinn:

$E = \frac{18}{37} \cdot 10 + \frac{19}{37} \cdot (-10) = -\frac{10}{37}$

Mit Rot gewinnt man in 18 und verliert in 19 von 37 möglichen Fällen (incl. der grünen 0).
Auf lange Sicht verliert man also pro Spiel $\frac{10}{37}$ Euro.

Diese Erklärung wäre beim oben genannten Übungsbeispiel 9 eine große Hilfe gewesen. Implizit wird hier auch noch einmal auf den Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten hingewiesen. Der Begriff *Erwartungswert* wird mit Hilfe eines Satzes eingeführt. Im Anschluss an die oben genannte Erklärung anhand von Beispielen ist diese Definition für die SchülerInnen sicher verständlich und für den Mathematikunterricht (in dieser Schulstufe) ausreichend.

„Den ***Erwartungswert*** *für den Gewinn berechnet man, indem man die Gewinne bei den einzelnen möglichen Spielergebnissen mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert und alle diese Produkte anschließend addiert. Ein Glücksspiel, bei dem der Erwartungswert für den Gewinn gleich 0 ist, heißt* ***fair****."* (Mathe Netz 7 2006, S.116)

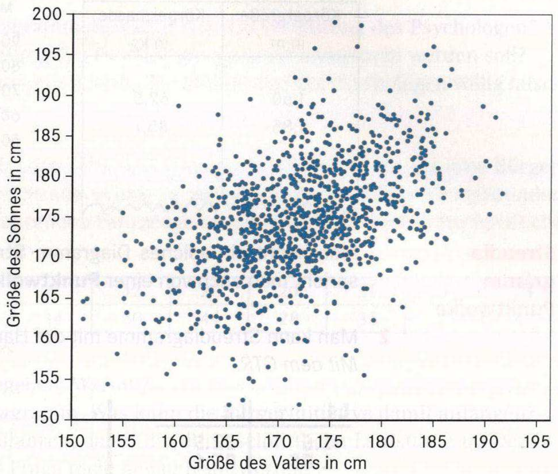
Es folgen Übungsbeispiele und das Kapitel *Vermischte Übungen*, wobei für die ersten sieben Aufgaben eine vollständige Lösung im hinteren Teil des Buches enthalten ist. Manche Beispiele sind als Partner- oder Gruppenarbeit, bzw. mit einer Nuss für besonders knifflige Aufgaben gekennzeichnet. Die Auswahl der Beispiele ist wiederum sehr abwechslungsreich und die Anzahl an Übungsaufgaben groß. Am Ende des Kapitels *Dem Zufall auf der Spur* gibt es noch eine komplette Zusammenfassung des Gelernten, sowie eine Projektarbeit, die inhaltlich über das Thema des Kapitels hinausgeht.

Im Band 8 der Schulbuchreihe *Mathe Netz* werden im Kapitel *Stochastik* die Themen Streudiagramme und Regression behandelt. Der Aufbau der einzelnen Unterkapitel erfolgt wieder nach schon bekanntem Schema: Einstiegsaufgaben, Grundwissen, Übungsaufgaben und Ausstiegsaufgabe.

Einstieg 1 (Mathe Netz 8 2007, S.117)

E1 Wie groß wirst du einmal werden? Vor längerer Zeit hat man in Großbritannien die Körpergröße von jungen Männern und die Körpergröße ihrer Väter ermittelt.

a) Wie groß ist der Sohn des kleinsten Vaters / des größten Vaters?
b) Wie groß ist etwa der Median bei den Vätern / bei den Söhnen?
c) Manche Väter sind 1,60 m groß. Wie groß sind die kleinsten / die größten Söhne dieser Väter? Wie groß ist etwa der Median dieser Söhne?
d) Manche Söhne sind 1,60 m groß. Was kann man über die Größe ihrer Väter sagen?
e) Hilft das Diagramm, die Ausgangsfrage für Jungen zu beantworten?



Quelle: Dep. of Statistics, Berkeley, USA

Interessant ist bei den drei angebotenen Einstiegsaufgaben zum Thema *Streudiagramme*, dass darauf geachtet wurde, dass weder Mädchen noch Burschen vernachlässigt werden. Im ersten Beispiel werden der Zusammenhang von Körpergrößen von Vätern und Söhnen behandelt, im dritten Beispiel der Zusammenhang von Körper- und Schuhgröße bei Frauen. Schön ist auch, dass im dritten Beispiel Körper- und Schuhgrößen der Schülerinnen ermittelt werden sollen und diese somit aktiv in den Unterricht einbezogen werden. In den allgemeinen Informationen wird auch erklärt, wie man ein Streudiagramm mit Hilfe des Taschenrechners oder Tabellenkalkulation erzeugen kann. Die Übung 9 in den Übungsaufgaben lässt eine sehr offene Fragestellung zu.

Übung 9 (Mathe Netz 8 2007, S.122)

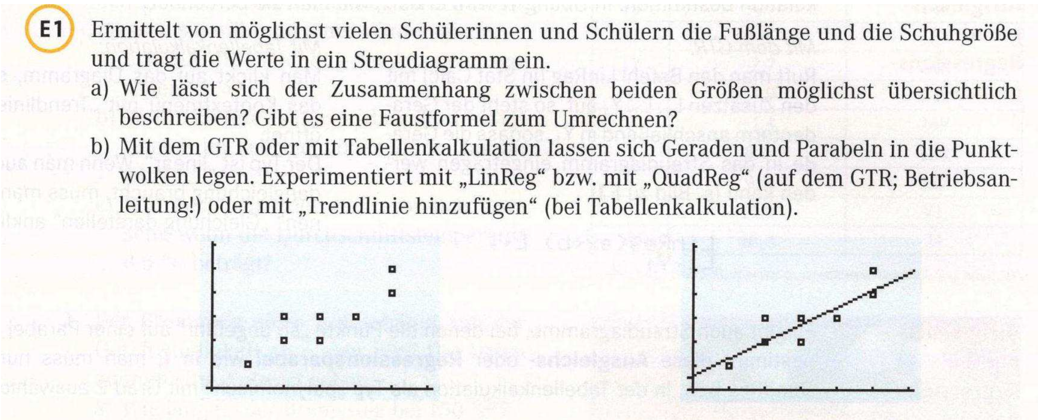
9 **Es ist doch der Klapperstorch, der die Kinder bringt!**
Hier ist der Beweis:
In Oldenburg wurde im letzten Jahrhundert die Anzahl der Störche ermittelt. Für den gleichen Zeitraum hat das Geburtsregister der Stadt die Anzahlen der neugeborenen Kinder angegeben.

Jahr	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936
Anzahl der Störche	135	140	170	185	240	250	250
Anzahl der Geburten (in 1000)	55	55	65	68	69	71	75

Im Zusammenhang mit diesem Beispiel kann ein Streudiagramm erstellt und eine Diskussion über den erbrachten „Beweis“ gestartet werden.

In den Einstiegsaufgaben zum Kapitel *Mit Augenmaß – Regression* müssen Werte teilweise selbst ermittelt und der Taschenrechner bzw. Computer benutzt werden. Im zweiten Einstiegsbeispiel wird außerdem ein Zusammenhang mit der Physik hergestellt (Zusammenhang zwischen Spannung U und Stromstärke I).

Einstieg 1 (Mathe Netz 8 2007, S.123)



E1 Ermittelt von möglichst vielen Schülerinnen und Schülern die Fußlänge und die Schuhgröße und tragt die Werte in ein Streudiagramm ein.

a) Wie lässt sich der Zusammenhang zwischen beiden Größen möglichst übersichtlich beschreiben? Gibt es eine Faustformel zum Umrechnen?

b) Mit dem GTR oder mit Tabellenkalkulation lassen sich Geraden und Parabeln in die Punktwolken legen. Experimentiert mit „LinReg“ bzw. mit „QuadReg“ (auf dem GTR; Betriebsanleitung!) oder mit „Trendlinie hinzufügen“ (bei Tabellenkalkulation).

Positiv an diesem Einstiegsbeispiel ist, dass die SchülerInnen aktiv miteinbezogen werden und außerdem eine Anregung zur Arbeit mit dem Computer/Taschenrechner gegeben ist. Weiters werden die SchülerInnen aufgefordert eine einfache „Formel“ für den Zusammenhang aufzustellen. Diese Aufgabenstellung führt bereitet gut auf die folgende Zusammenfassung vor.

Das *Grundwissen* enthält Informationen zu Ausgleichs- bzw. Regressionsgerade (Ausgleichs-oder Regressionsparabel) und eventuellen Messfehlern. Zusätzlich wird beschrieben, wie man mit Hilfe des Taschenrechners (oder Tabellenkalkulation) diese Regressionsgerade bestimmen kann. Die zahlreichen Übungsaufgaben sind durchgehend interessant und viele davon in Gruppenarbeit zu bearbeiten.

Übung 6 (Mathe Netz 8 2007, S.125)

6 Besorgt euch alle acht Euromünzen (von 1 Cent bis 2 Euro).

a) Bestimmt zu jeder Münze die Masse und den Durchmesser.

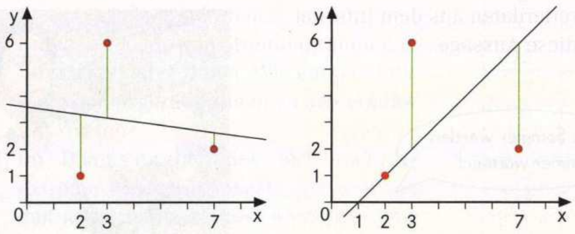
b) Welchen Zusammenhang zwischen Masse und Durchmesser könnt ihr ermitteln?

Um die Masse der Münzen zu bestimmen ist es wohl sinnvoller im Internet zur recherchieren als eine Waage zu bemühen. Nachdem sich die SchülerInnen über den Zusammenhang klar geworden sind bietet es sich auch an, die Gründe für die Unterschiede zu erklären (Material).

Wie man eine Regressionsgerade berechnet, wird in Beispiel 17 erklärt. Diese Erklärung setzt allerdings sichere Vorkenntnisse der SchülerInnen in Bezug auf Geradengleichungen voraus.

Übung 17 (Mathe Netz 8 2007, S.128)

17



„Die Ausgleichsgerade ist dadurch bestimmt, dass die Summe der grünen Differenzen null ergibt", meint Rieke. „Aber es gibt viele Geraden mit dieser Eigenschaft", antwortet Nele und erläutert das mit den Datenpunkten (2 | 1), (3 | 6) und (7 | 2).

Punkt	„grüne Differenz"	Quadrat
(2 | 1)	$m \cdot 2 + n - 1$	$(m \cdot (2-4) + 3 - 1)^2 = 4 \cdot m^2 - 8 \cdot m + 4$
(3 | 6)		
(7 | 2)		
Summe	$12 \cdot m + 3 \cdot n - 9$	$14 \cdot m^2 + 4 \cdot m + 14$

a) Die Ausgleichsgerade hat die Gleichung $y = m \cdot x + n$. Füllt die mittlere Spalte aus.

b) Bestätigt: Wenn die Summe der „grünen Differenzen" null ergeben soll, muss $n = 3 - 4 \cdot m$ sein.
Wir wissen dann: Die Ausgleichsgerade hat die Gleichung $y = m \cdot (x - 4) + 3$.
Und damit könnte man nun ganz viele von Neles Geraden zeichnen.

c) Die „grünen Differenzen" heben sich durch die verschiedenen Vorzeichen gegenseitig auf. Für die Ausgleichsgerade fordert man zusätzlich, dass die Summe der Quadrate der „grünen Differenzen" möglichst klein sein soll.
Füllt die rechte Spalte der Tabelle aus. Begründet: Die Summe der Quadrate ist minimal für $m = -\frac{1}{7}$. Wie groß ist n?

d) Berechnet auf diese Weise auch die Ausgleichsgerade zu (3 | 1), (5 | −1) und (7 | −3). Wie geht man bei vier Datenpunkten vor? Vergleicht eure Ergebnisse mit dem GTR.

Diese Erklärung wirkt etwas umständlich, ist für die Schule aber kaum einfacher möglich, da die *Methode der kleinsten Quadrate* in ihrem vollen Umfang zu diesem Zeitpunkt im Unterricht noch nicht behandelt werden kann. Im Anschluss an diese Übungsbeispiele gibt es zahlreiche vermischte Übungen (teilweise mit Lösung), eine Zusammenfassung des gesamten Kapitels und eine Projektarbeit zum Thema „Lunge".

Im Band 9 der Schulbuchreihe Mathe Netz ist das Thema Stochastik sehr ausführlich vertreten. Es werden Baumdiagramme und Vierfeldertafeln behandelt. Weiters gibt es ein Kapitel mit dem *Titel Probleme lösen: Durch Probieren und Variieren Denkfehler aufdecken.*

Die beiden Einstiegsbeispiele zum Thema *Irren ist menschlich – Baumdiagramme, Vierfeldertafeln und mehr* sind mit Hilfe von den bereits aus der Schulstufe 7 bekannten Baumdiagrammen zu lösen.

In den anschließenden Informationen wird an einem Beispiel ausführlich erklärt, wie man zwei verschiedene Merkmale (Mädchen/Jungen, mag Fußball/mag Fußball nicht) in Kreisdiagrammen, Doppelbäumen und Vierfeldertafeln darstellen kann. Die Übungsbeispiele enthalten viele verschiedene Themen mit Alltagsbezug und können zum Teil in Partner- oder Gruppenarbeit bearbeitet werden. In den Aufgaben wird immer großer Wert auf Begründungen seitens der SchülerInnen gelegt.

Übung 17 (Mathe Netz 9 2008, S.114)

17 Für das neue Medikament *„Salutan" wird kräftig geworben:*

105 Personen wurden wissenschaftlich getestet! Sie durften Salutan nehmen und wurden mit 100 Personen verglichen, die vor der Entwicklung von Salutan mit ihrer Krankheit zu kämpfen hatten. Die Ergebnisse sind sensationell:
Von den 25 Patienten, die nach einiger Zeit geheilt waren, hatten 80 % Salutan genommen.
Von den armen Patienten, die nicht geheilt werden konnten, hatten 95 kein Salutan genommen.

Was meinst du?

Anhand einer Vierfeldertafel können die SchülerInnen in dieser Übung überprüfen, ob das beworbene Medikament wirklich so wirksam ist, wie in diesem Werbetext suggeriert wird. Im besten Fall wird deutlich, dass es wichtig ist, sich selbst ein Bild über den Sachverhalt zu machen und nicht (immer) dem ersten Eindruck zu vertrauen.

Besonders interessant sind auch Aufgabenstellungen wie in

Übung 24 (Mathe Netz 9 2008, S.115)

„Schreibe einen Aufsatz (halbe DIN-A4-Seite) zum Thema: „Bei seltenen Ereignissen sind die meisten Alarme falsche Alarme." Welche der Übungen passt am besten zu dieser Aussage."

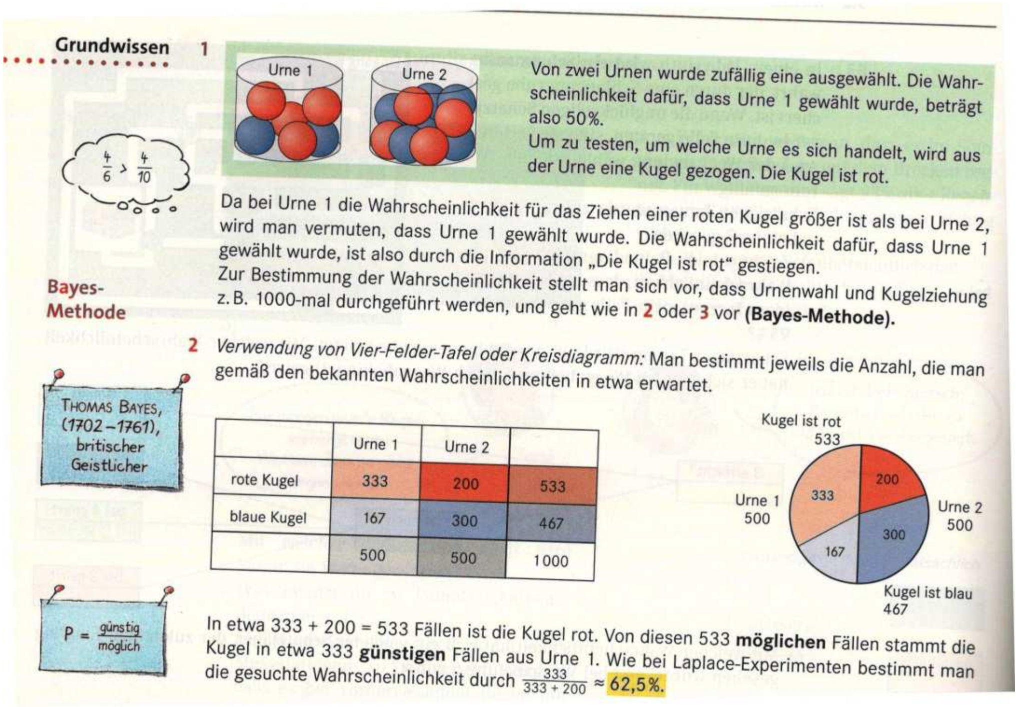
Diese und ähnliche Aufgaben zwingen die SchülerInnen dazu, sich intensiv mit dem Inhalt der jeweiligen Aussage auseinanderzusetzen und dadurch eine Intuition für die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen zu entwickeln.

Das Ausstiegsbeispiel dieses Kapitels behandelt das bekannte *Ziegenproblem*[23], bei dem sich hinter einer Tür ein Auto, hinter zwei anderen Türen eine Ziege befindet. Da diese mathematische Fragestellung allgemein bekannt ist, ist es für die SchülerInnen mit Sicherheit von Vorteil, sich darüber Gedanken zu machen.

[23] Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem;
auch unter dem Namen „Drei-Türen-Problem" bekannt

Im Kapitel *Rückwärts lesen – Baumdiagramme umkehren* werden umgekehrte Baumdiagramme behandelt.

Grundwissen (Mathe Netz 9 2008, S.118)



Grundwissen

1 Von zwei Urnen wurde zufällig eine ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Urne 1 gewählt wurde, beträgt also 50%.
Um zu testen, um welche Urne es sich handelt, wird aus der Urne eine Kugel gezogen. Die Kugel ist rot.

Da bei Urne 1 die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel größer ist als bei Urne 2, wird man vermuten, dass Urne 1 gewählt wurde. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Urne 1 gewählt wurde, ist also durch die Information „Die Kugel ist rot" gestiegen.
Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit stellt man sich vor, dass Urnenwahl und Kugelziehung z.B. 1000-mal durchgeführt werden, und geht wie in 2 oder 3 vor **(Bayes-Methode).**

Bayes-Methode

2 *Verwendung von Vier-Felder-Tafel oder Kreisdiagramm:* Man bestimmt jeweils die Anzahl, die man gemäß den bekannten Wahrscheinlichkeiten in etwa erwartet.

	Urne 1	Urne 2	
rote Kugel	333	200	533
blaue Kugel	167	300	467
	500	500	1000

In etwa 333 + 200 = 533 Fällen ist die Kugel rot. Von diesen 533 **möglichen** Fällen stammt die Kugel in etwa 333 **günstigen** Fällen aus Urne 1. Wie bei Laplace-Experimenten bestimmt man die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch $\frac{333}{333+200} \approx$ **62,5%.**

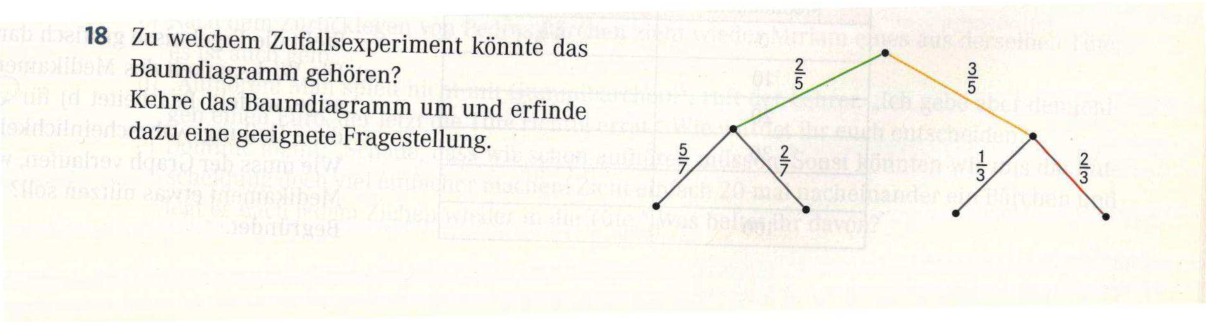
Interessant an diesen Ausführungen ist, dass sowohl die *Bayes-Methode* als auch der Begriff *Laplace-Experiment* auftauchen. Eventuell ein wenig irreführend ist, dass in der Darstellung der beiden Urnen oben die Anzahl der Kugeln in Urne 1 nicht mit der in Urne 2 übereinstimmt. In der Vierfeldertafel ist dies jedoch der Fall und auch die Verhältnisse werden übernommen.

$$\frac{4}{10} = \frac{200}{500} \; und \; \frac{4}{6} \sim \frac{333}{500}$$

Der Satz *„Wie bei Laplace-Experimenten bestimmt man die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch* $\frac{333}{333+200} \approx 62{,}5\%$.*"* impliziert, dass die SchülerInnen zu einem früheren Zeitpunkt schon einmal mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit bekannt gemacht wurden. Dies ist im Band 6 der Fall. Allerdings wurde zwischenzeitlich nicht explizit mit diesem Begriff gearbeitet.

In den folgenden Übungsaufgaben finden sich wieder viele interessant gestaltete, teilweise ungewöhnliche Beispiele.

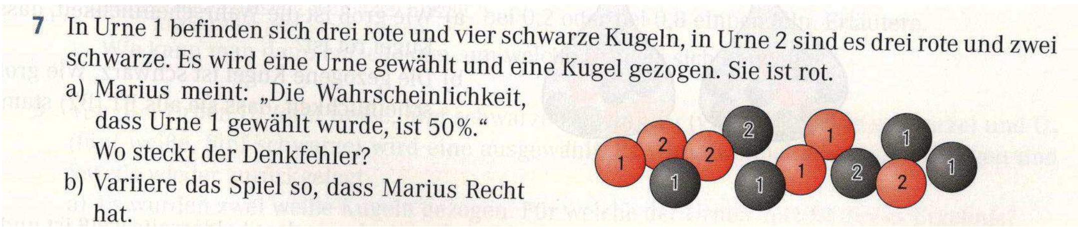
Beispiel 18 (Mathe Netz 9 2008, S.121)



18 Zu welchem Zufallsexperiment könnte das Baumdiagramm gehören?
Kehre das Baumdiagramm um und erfinde dazu eine geeignete Fragestellung.

Das oben genannte *Ziegenproblem* wird im Kapitel *Probleme lösen* wieder aufgenommen. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten das Gefühl oft in die Irre führt. Durch Probieren, Simulieren oder das Variieren einer Aufgabe sollen die Ursachen für häufige Denkfehler behoben werden.

Beispiel 7 (Mathe Netz 9 2008, S.127)



7 In Urne 1 befinden sich drei rote und vier schwarze Kugeln, in Urne 2 sind es drei rote und zwei schwarze. Es wird eine Urne gewählt und eine Kugel gezogen. Sie ist rot.
a) Marius meint: „Die Wahrscheinlichkeit, dass Urne 1 gewählt wurde, ist 50 %.“ Wo steckt der Denkfehler?
b) Variiere das Spiel so, dass Marius Recht hat.

Im Anschluss werden wiederum zahlreiche vermischte Übungen (teilweise mit vollständiger Lösung) angeboten, die den bisher gelernten Stoff vertiefen. Im Anschluss an die Zusammenfassung am Ende des Kapitels *Stochastik* wird eine Projektarbeit zum Thema „Dunkelfeldforschung“ vorgeschlagen. Diese kann auf verschiedene Themen angewendet werden. Die Vorschläge aus dem Buch enthalten beispielsweise Drogenerfahrungen, Mogeln bei Klassenarbeiten, Ladendiebstahl, Gewalt, Fremdenfeindlichkeit und ähnliche heikle Themen. Die Anleitung ist im Anhang II dieser Arbeit zu finden. Natürlich wäre ein solches Projekt für alle Beteiligten sicher interessant, die Durchführung scheitert aber vermutlich am hohen Zeitaufwand.

Fazit

Die Schulbuchreihe Mathe Netz Ausgabe Niedersachsen ist optisch sehr ansprechend und übersichtlich gestaltet. Als Einführung in das Thema werden den SchülerInnen bekannte Ausdrücke zur Wahrscheinlichkeit (unmöglich, sicher, wahrscheinlich,…) und ihre Bedeutung besprochen. Dies ist für die SchülerInnen mit Sicherheit wichtig und wird bleibt in den meisten anderen Schulbüchern unerwähnt.

Der Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten könnte meiner Meinung nach präziser und verständlicher eingeführt werden. (Idee dazu siehe Kapitel 4.3 dieser Arbeit) Die prägnanten Informationen (*Grundwissen*) sind sehr hilfreich, für manche SchülerInnen aber ohne weitere Erklärungen sicher zu wenig ausführlich. Ein positiver Aspekt an diesem Buch ist, dass explizit darauf hingewiesen wird, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Diese Tatsache bleibt in den meisten anderen Schulbüchern unerwähnt.

Die Beispiele sind gut durchdacht, abwechslungsreich und teilweise recht anspruchsvoll. Viele Aufgaben können von den SchülerInnen selbst durchgeführt werden. Großer Wert wird auf die Erklärung von Simulationen und der Erstellung von Zufallszahlen mit Hilfe von Computern (Tabellenkalkulationsprogramm) gelegt. Dies ist auch insofern hilfreich, da vielen langen Wurfserien und damit aufkommender Langeweile entgegengewirkt werden kann.

Im Unterschied zu den anderen in dieser Arbeit vorgestellten Schulbüchern werden in Mathe Netz Band 8 die Themen Streudiagramme und Regression behandelt. Dieses Stoffgebiet liefert einen guten Anlass sich über Aussagen, die beispielsweise in Zeitungen zu finden sind, Gedanken zu machen und ihren Wahrheitsgehalt zu überprüfen. (siehe zum Beispiel **Übung 9 Klapperstorch**)

Ein weiterer positiver Aspekt dieser Schulbuchreihe ist, dass der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und der Bruch- und Prozentrechnung hergestellt wird und in den Übungen immer wieder zur Anwendung kommt (siehe oben: Einstiegsbeispiel 1, Band 6).

Der untypische Zugang zum Thema Baumdiagramme vermittelt den SchülerInnen recht deutlich, dass mit Hilfe dieser Diagramme viele Problemstellungen aus ihrer Alltagswelt behandelt werden können. Dies wird anhand der Auswahl der Aufgaben in diesem Buch viel deutlicher, als in den anderen hier vorgestellten Schulbüchern.

Besonders positiv hervorzuheben sind die Aufgaben *Ausstieg* bzw. die vorgeschlagenen Projektarbeiten, da sie einen Bezug zur Realität schaffen und noch über den behandelten Stoff hinausgehen.

Zusätzlich wird in einigen Aufgaben auch ein Bezug zur Geschichte der Mathematik hergestellt. Am Ende jedes Bandes gibt es eine Lernkontrolle, in der Beispiele zu den behandelten Themen und ihre vollständige Lösung angeboten werden. Zu Beginn jedes Bandes gibt es ein Wiederholungskapitel, in dem die wichtigsten Stoffgebiete des vorangegangenen Bandes noch einmal zusammengefasst sind.

4.2.3 Schnittpunkt (Ausgabe Nordrhein-Westfalen)

In der Schulbuchreihe *Schnittpunkt Ausgabe Nordrhein-Westfalen* wird das Thema Wahrscheinlichkeit intensiv ab Band 7 behandelt. Dies ist konform mit dem aktuellen Lehrplan für das Bundesland, da in den Kompetenzerwartungen für die sechste Schulstufe lediglich das Erheben und Zusammenfassen von Daten, Säulen- und Kreisdiagramme sowie das bestimmen relativer Häufigkeiten, des Medians und des arithmetischen Mittels gefordert werden.

Zu Beginn jedes Bandes gibt es einen kurzen Wiederholungsteil, in dem die Stoffgebiete des vergangenen Schuljahres noch einmal behandelt werden. Der Aufbau der Kapitel ist ähnlich wie in der oben beschriebenen Schulbuchreihe *MatheNetz*. Es werden ein bis drei Einstiegsaufgaben, ein Informationstext mit wichtigem *Merkwissen*, Beispiele, vermischte Aufgaben sowie ein Test unter dem Titel *Rückspiegel* angeboten, der mögliche Aufgaben für eine Klassenarbeit enthält. Außerdem gibt es eine sogenannte *Themenseite*, die LehrerInnen die Möglichkeit gibt, auch anwendungsorientiert zu arbeiten.

Das Kapitel *Wahrscheinlichkeitsrechnung* beginnt im Band 7 mit dem Bestimmen absoluter und relativer Häufigkeiten. Im Einstiegsbeispiel soll festgestellt werden, in welcher Klasse der Anteil der Fußgänger (SchülerInnen, die zu Fuß zur Schule gehen) höher ist. Die notwendigen Daten dazu sind in einer Tabelle vorgegeben. Gleich anschließend folgt ein Merkkasten mit den wichtigsten Informationen zu absoluter und relativer Häufigkeit verbunden mit einem Beispiel samt vollständiger Lösung. In diesem Beispiel wird eher beiläufig erwähnt, dass die relative Häufigkeit oft in Diagrammen dargestellt wird. In den nun folgenden Aufgaben sollen die relative Häufigkeit aus der absoluten und umgekehrt bestimmt werden. Bei einigen Aufgabenstellungen ist ein sicherer Umgang mit Prozentrechnung unbedingt notwendig, da mehr mit Prozentangaben als Brüchen gearbeitet wird. Auch dieses Schulbuch wird an dieser Stelle nicht so ausführlich vorgestellt, da es bereits im Jahr 1994 veröffentlicht wurde und außerdem für die Verwendung in Realschulen erstellt wurde. Einige ausgewählte (Negativ-) Beispiele sind jedoch interessant.

Im zweiten Kapitel *Zufallsversuche* ist die Formulierung im Merkasten etwas kompliziert. Mit Hilfe der angeführten Beispiele können sich die SchülerInnen einfacher ein Bild über die Begriffe *Zufallsversuch* und *Ereignis* machen.

Merkkasten (Schnittpunkt 7 1994, S. 196)


Den **Ausgang** einer Handlung nennt man zufällig, wenn er nicht mit Sicherheit eintritt, also auch nicht vorhersagbar ist. Man spricht dann von einem **Zufallsversuch**.

Ein **Ereignis** beschreibt eine Gemeinsamkeit mehrerer möglicher Ausgänge. So hat zum Beispiel das Ereignis „Die Augensumme zweier Würfel ist 5“ folgende Ausgänge:

Die Formulierung in diesem Merkkasten kann dazu führen, dass die SchülerInnen Fehlvorstellungen zum Begriff *Zufall* entwickeln, da sie suggeriert, dass „mit Sicherheit nicht“ dann wohl auch „zufällig“ wäre. Außerdem kann man die Aussage so verstehen, dass wenn der Ausgang einer Handlung nicht mit Sicherheit eintritt, dieser auch nicht vorhersagbar ist. In den Aufgaben dieses Kapitels werden die SchülerInnen dazu animiert darüber nachzudenken, ob der Ausgang eines Vorgangs zufällig ist oder nicht.

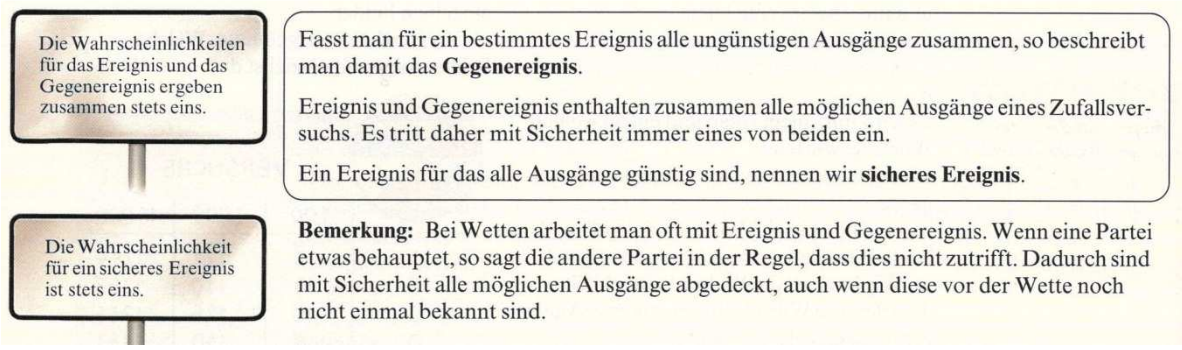
Im folgenden Kapitel *Wahrscheinlichkeit* werden Laplace-Experimente behandelt und die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis als $\frac{\text{Anzahl der für das Ereignis günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$ beschrieben. In einer Bemerkung wird beiläufig erwähnt, dass sich bei einer großen Anzahl von Versuchen die relative Häufigkeit an die Wahrscheinlichkeit annähert. Ein „Beweis“ dieser Behauptung mit Hilfe einer Simulation oder eines konkreten Beispiels, bei dem die SchülerInnen diese Annäherung „erleben“ können, fehlt leider vollkommen. Die folgenden Beispiele enthalten klassische Aufgabenstellungen zu Glücksrädern, Urnen und Würfeln, aber auch Fragestellungen, die auf eine Begründung der Antwort abzielen.

Aufgabe 9 (Schnittpunkt 7 1994, S. 199)

„Beim Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel“ muss man eine 6 würfeln, um die Partie zu beginnen. Jutta überlegt: Es gibt sechs verschiedene Ausgänge. Nur einer davon ist eine 6. Die Chancen eine 6 zu würfeln sind 5 dagegen und 1 dafür, also 5:1. Heiner dagegen behauptet: Die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln beträgt $\frac{1}{6}$ *. Wer hat Recht?“*

Im folgenden Kapitel werden die Begriffe *Gegenereignis* und *sicheres Ereignis* behandelt. Wiederum wird die im Kasten zusammengefasste Erklärung erst durch die unten angeführten Beispiele wirklich klar.

Merkkasten (Schnittpunkt 7 1994, S. 200)



Die Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis und das Gegenereignis ergeben zusammen stets eins.

Die Wahrscheinlichkeit für ein sicheres Ereignis ist stets eins.

Fasst man für ein bestimmtes Ereignis alle ungünstigen Ausgänge zusammen, so beschreibt man damit das **Gegenereignis**.

Ereignis und Gegenereignis enthalten zusammen alle möglichen Ausgänge eines Zufallsversuchs. Es tritt daher mit Sicherheit immer eines von beiden ein.

Ein Ereignis für das alle Ausgänge günstig sind, nennen wir **sicheres Ereignis**.

Bemerkung: Bei Wetten arbeitet man oft mit Ereignis und Gegenereignis. Wenn eine Partei etwas behauptet, so sagt die andere Partei in der Regel, dass dies nicht zutrifft. Dadurch sind mit Sicherheit alle möglichen Ausgänge abgedeckt, auch wenn diese vor der Wette noch nicht einmal bekannt sind.

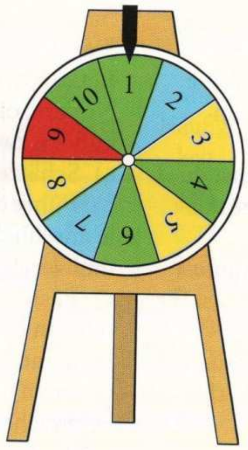
Band 8 der Schulbuchreihe *Schnittpunkt* behandelt fast ausschließlich das Thema *Statistik* und wird daher an dieser Stelle nicht beschrieben.

Am interessantesten im ganzen Kapitel *Statistik* ist die sogenannte *Themenseite*, in der auf das Verfälschen von Tatsachen mit Hilfe von Statistik eingegangen wird.

Im Band 9 dieser Schulbuchreihe soll im Kapitel *Schätzen der Wahrscheinlichkeit* erkannt werden, dass die relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann. Im ersten Beispiel soll jede/r SchülerIn 50 Münzwürfe durchführen und nach je 10 Würfen notieren, wie oft die Münze Zahl zeigt. Anschließend sollen die relativen Häufigkeiten berechnet und mit den MitschülerInnen verglichen werden. Es wird vermerkt, dass der Schätzwert umso besser sein wird, je mehr Versuchsdurchführungen ausgewertet wurden und man eine hohe Anzahl von Versuchen auch durch das Zusammenfassen mehrerer Versuchsreihen erreichen kann. Wichtig ist an dieser Stelle, dass die SchülerInnen genau diesen Punkt verstehen. Im folgenden Beispiel soll ein Reißnagel 200-mal in die Höhe geworfen und die relative Häufigkeit einer „Kopflandung“ ermittelt werden. Es wäre nachvollziehbar, wenn diese Aufgabe von den SchülerInnen als langweilig und nicht besonders motivierend empfunden wird. Im anschließenden Kapitel zur Summenregel erscheinen die Formulierung im Merkkasten und das angebotene Beispiel wiederum etwas umständlich.

Glücksrad (Schnittpunkt 9 1994, S. 144)

Ein Zufallsversuch hat mehrere mögliche **Ausgänge**. Jede beliebige Zusammenfassung von Ausgängen wird als **Ereignis** bezeichnet.



Wenn der Zeiger nach dem Drehen des Glücksrades auf einem grünen Feld stehen bleibt, so ist dies ein Ereignis, das vier mögliche Ausgänge hat (Feld 1, 4, 6 oder 10). Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich offensichtlich jeweils durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Felder. So errechnet sich die Wahrscheinlichkeit für „grün" folgendermaßen:

$W_{grün} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 40\%$.

Das Ereignis „rot" hat nur einen möglichen Ausgang, entsprechend ist seine Wahrscheinlichkeit 10%. Für W_{blau} erhält man 20% und für W_{gelb} 30%.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die **Summe der Wahrscheinlichkeiten** der zugehörigen Ausgänge.

Im Vergleich zu den anderen Schulbüchern wird hier vollständig auf einen Zugang mit Hilfe von Baumdiagrammen verzichtet. Meiner Meinung nach wäre solch eine anschauliche Darstellung aber sicher von Vorteil. Auch die Übungsbeispiele in diesem Kapitel sind teilweise zu unklar oder teilweise sogar falsch formuliert: (vgl. die Formulierung in untenstehender Aufgabe *„Wahrscheinlichkeitswerte für die Blutgruppen"*).

Aufgabe 5 (Schnittpunkt 9 1994, S. 145)

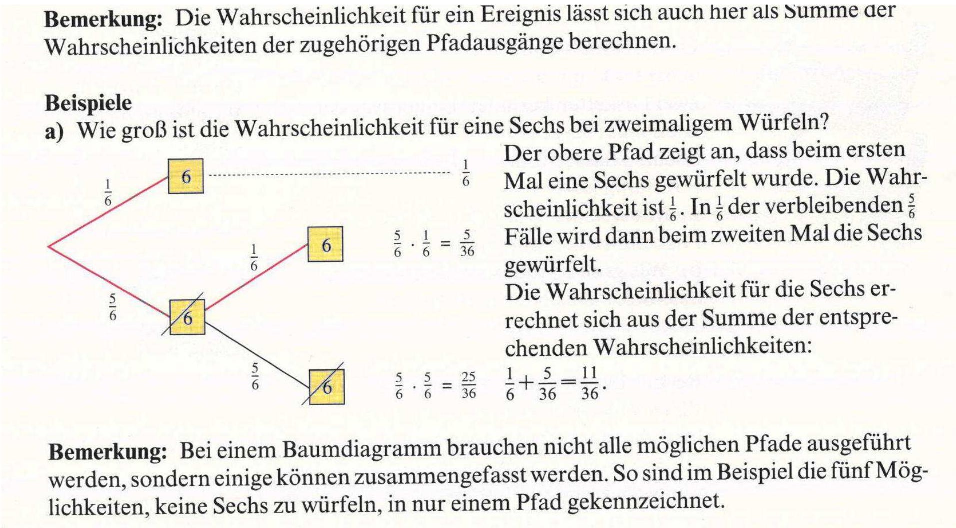
5
In der Tabelle siehst du eine Übersicht über die Verträglichkeit der Blutgruppen bei einer Blutspende. Waagerecht sind die Blutgruppen der Spender, senkrecht die der Empfänger eingetragen.

Blutgruppen der Empfänger	Blutgruppen der Spender			
	A	B	AB	0
0	⊗	⊗	⊗	⊗
AB	–	–	⊗	–
B	–	⊗	⊗	–
A	⊗	–	⊗	–

Die Verteilung der Blutgruppen ist regional verschieden. Rechne mit folgenden Wahrscheinlichkeitswerten für die Blutgruppen:
A: 44%, B: 12%, AB: 6%, 0: 38%.
a) Berechne für jede Blutgruppe die Wahrscheinlichkeit, dass ein unbekannter Spender die geeignete Blutgruppe hat.
b) Berechne für jede Blutgruppe die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Blut für einen Empfänger mit unbekannter Blutgruppe geeignet ist.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen mit unbekannter Blutgruppe sich gegenseitig Blut spenden können?

Erst im folgenden Kapitel *Mehrstufige Zufallsversuche* wird ein Baumdiagramm vorgestellt. Die Pfad- oder Produktregel wird allerdings wiederum eher beiläufig im Merkkasten erwähnt. Das angegebene Beispiel könnte zu mehr Klarheit führen, ist aber nicht besonders attraktiv präsentiert und inhaltlich eher langweilig.

Beispiel (Schnittpunkt 9 1994, S. 147)



Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis lässt sich auch hier als Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfadausgänge berechnen.

Beispiele

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs bei zweimaligem Würfeln?

Der obere Pfad zeigt an, dass beim ersten Mal eine Sechs gewürfelt wurde. Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{6}$. In $\frac{1}{6}$ der verbleibenden $\frac{5}{6}$ Fälle wird dann beim zweiten Mal die Sechs gewürfelt.
Die Wahrscheinlichkeit für die Sechs errechnet sich aus der Summe der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:
$\frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

Bemerkung: Bei einem Baumdiagramm brauchen nicht alle möglichen Pfade ausgeführt werden, sondern einige können zusammengefasst werden. So sind im Beispiel die fünf Möglichkeiten, keine Sechs zu würfeln, in nur einem Pfad gekennzeichnet.

Ziehungen mit und ohne Zurücklegen werden kurz in einem eigenen Kasten erwähnt und mit einigen Beispielen erklärt. Folgende Fragestellung erscheint mir jedoch recht anspruchsvoll:

„Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im Lotto 6 Richtige zu haben? Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden 6 Zahlen in Folge gezogen? Wie viele Jahre müssen im Mittel vergehen, dass dies einmal passiert?“ (Schnittpunkt 9 1994, S. 148)

Fazit

Da diese Schulbuchreihe für Realschulen erstellt wurde, sind die Aufgaben merklich weniger anspruchsvoll und es wird vergleichsweise weniger Stoff bearbeitet. Der Aufbau ist ähnlich dem im oben vorgestellten Schulbuch MatheNetz: Einstiegsaufgaben, Merksätze und anschließend vermischte Aufgaben. Die Informationen in den Merkkästen sind zu unklar formuliert. Sie werden in den meisten Fällen erst durch die darauf folgenden Beispiele verständlicher.

Abgesehen von den Themenseiten, bei denen ein Realitätsbezug hergestellt wird, sind die Aufgaben relativ wenig anwendungsorientiert. Der wichtige Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten wird einfach nicht erklärt. Die Darstellung mittels eines Diagramms fehlt völlig und auch in den Aufgaben, in denen die SchülerInnen Münz- oder Würfelwurfserien durchführen sollen, wird darauf verzichtet die Ergebnisse eventuell zusammenzulegen und den Sachverhalt anschaulich zu erklären.

Auch der Hinweis darauf, dass ein Zusammenhang zur Bruch- bzw. Prozentrechnung besteht und Wahrscheinlichkeiten in verschiedenen Schreibweisen angegeben werden können, wird leider völlig außer Acht gelassen. Ich bin der Meinung, dass es für SchülerInnen daher nicht möglich ist eine angemessene Intuition, die Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend, zu entwickeln.

Manche Übungsaufgaben sind wirklich sehr unklar oder teilweise auch einfach falsch formuliert. (vgl. Aufgabe 5, S. 94 dieser Arbeit)

Ebenfalls sehr schade ist, dass Baumdiagramme erst zu einem relativ späten Zeitpunkt eingeführt werden. Viele Aufgaben würden sich mit Hilfe eines Baumdiagramms anschaulicher lösen lassen, als das in diesem Buch der Fall ist. Zum Thema *mehrstufige Zufallsexperimente* werden dann doch noch Baumdiagramme vorgestellt. Die Additions- und Multiplikationsregeln werden jedoch auch eher beiläufig erwähnt und kaum erklärt.

Die Möglichkeit zur Wiederholung des Stoffs am Anfang jedes Bandes und der sogenannte *Rückspiegel* mit Lösungen, der nach jedem Kapitel gerechnet werden kann, sind hilfreich. Ebenfalls interessant sind die vorgeschlagenen Projekte, die teilweise auch auf ein fächerübergreifendes Arbeiten ausgerichtet wurden.

Natürlich kann man dieses Schulbuch, das für Realschulen erstellt wurde, nicht ganz mit den Schulbüchern für Gymnasien vergleichen. Obwohl der Stoffumfang viel geringer ist, ist der Zugang zum Thema Wahrscheinlichkeit meiner Meinung nach in diesem Schulbuch sehr lückenhaft und für SchülerInnen nicht ausreichend verständlich präsentiert.

4.2.4 Fokus Mathematik (Ausgabe Bayern)

Im Band 6 dieser Schulbuchreihe wird den SchülerInnen erklärt, *„was man unter relativer Häufigkeit versteht, wie man sie darstellt und wie mit ihr Gewinnchancen abgeschätzt werden können.“*

Der Begriff Zufallsexperiment wird folgendermaßen erklärt:

„Da beim beschriebenen Vorgehen die gezogenen Bälle und damit die ermittelten Zahlenpaare, also die ***Ergebnisse****, vom Zufall abhängen, spricht man von einem* ***Zufallsexperiment****.“* (Fokus Mathematik 6 B 2004, S.64)

Diese Erklärung ist ausreichend und durch den Bezug zum vorangegangenen Beispiel auch leicht nachvollziehbar.

Anhand eines Arbeitsauftrages (Ziehen aus einer Lostrommel) und folgender *Zusammenfassung* wird der Begriff *Relative Häufigkeit* eingeführt.

Zusammenfassung (Fokus Mathematik 6 B 2004, S.66)

Zusammenfassung **Relative Häufigkeit**

Vorgänge, die unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar sind und deren Ergebnisse nicht voraussagbar sind, heißen **Zufallsexperimente**. Auch Umfragen können als Zufallsexperimente aufgefasst werden.
Die Anzahl, mit der ein bestimmtes Ergebnis auftritt, heißt **absolute Häufigkeit**. Dividiert man sie durch die Summe der absoluten Häufigkeiten, also durch die Gesamtzahl der Versuche, so erhält man die **relative Häufigkeit**. Die relative Häufigkeit kann auch in Prozent angegeben werden.

30-maliges Würfeln und Notieren der Augenzahl:
1; 4; 5; 2; 5; 6; 3; 5; 1; 4; 2; 6; 4; 1; 3;
3; 5; 6; 6; 2; 1; 4; 2; 5; 1; 2; 4; 5; 2; 5.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit	5	6	3	5	7	4
Relative Häufigkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{2}{15}$

Das **empirische Gesetz der großen Zahlen** besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Ergebnisses mit zunehmender Anzahl der Versuche um einen bestimmten Wert stabilisiert.

Nach dem empirischen Gesetz der großen Zahlen ist zu erwarten, dass sich alle relativen Häufigkeiten in der Tabelle bei einer großen Anzahl von Würfen um den Wert $\frac{1}{6}$ stabilisieren.

Werden zwei verschiedene Ereignisse gleichzeitig betrachtet, ist eine **Vierfeldertafel** hilfreich. Darin können relative oder absolute Häufigkeiten eingetragen werden.

	zwei gleiche Zahlen	zwei versch. Zahlen	gesamt
zwei ungerade Zahlen	12 ≙ 4 %	66 ≙ 22 %	78 ≙ 26 %
eine o. zwei gerade Zahlen	15 ≙ 5 %	207 ≙ 69 %	222 ≙ 74 %
gesamt	27 ≙ 9 %	273 ≙ 91 %	300 ≙ 100 %

Diese *Zusammenfassung* in Verbindung mit dem vorangegangenen Auftrag liefert eine verständliche und umfangreiche Erklärung des Begriffs *Relative Häufigkeit*. In der Formulierung *„relative Häufigkeit eines Ergebnisses stabilisiert sich mit zunehmender Anzahl der Versuche um einen bestimmten Wert“*, wird der Begriff *Wahrscheinlichkeit* noch ausgeklammert. Es folgen Übungsbeispiele, in denen (Baum-)Diagramme und Vierfeldertafeln erstellt werden sollen.

Übung 22 (Fokus Mathematik 6 B 2004, S.71)

22 Ein Würfel wird zweimal geworfen. Die erste Augenzahl ergibt die Zehnerstelle, die zweite Augenzahl die Einerstelle einer zweistelligen Zahl.

a) Wie viele verschiedene Zahlen können so gebildet werden?
b) Wie viele dieser Zahlen sind Primzahlen?
c) Wie viele dieser Zahlen sind durch 4 teilbar?
d) Wie viel Prozent dieser Zahlen sind weder durch 4 teilbar noch Primzahlen?
e) Würfle und bilde so 100 zweistellige Zahlen und vergleiche unter Verwendung einer Vierfeldertafel.

Diese und ähnliche Aufgaben erfüllen zwar ihren Zweck, sind aber wiederum sehr langwierig (und langweilig) in ihrer Durchführung. Es werden in den Übungen auch Fragen wie *„Wie oft ist bei 800-maliger Durchführung zu erwarten, dass genau zweimal Zahl auftritt?“*. An dieser Stelle würde eine Simulation mit dem Computer den Sachverhalt mit Sicherheit noch unterstreichen.

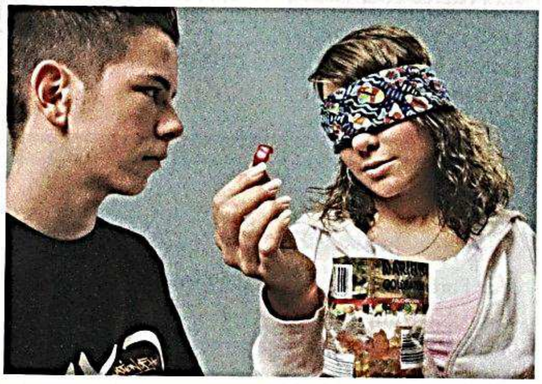
Im Band 7 liegt das Hauptaugenmerk ausschließlich auf der *Beschreibenden Statistik* in Verbindung mit einer Wiederholung und Vertiefung des Prozentrechnens. Daher wird auf diesen Band nicht näher eingegangen.

Im Band 8 werden im Kapitel *Zufall und Wahrscheinlichkeit* zuerst Urnenexperimente erklärt und diese anschließend für Simulationen (Roulette, Würfeln mit einem Würfel) eingesetzt. Dabei wird darauf hingewiesen, dass verschiedene Fälle (mit/ohne Zurücklegen, Reihenfolge wichtig/nicht berücksichtigt) zu unterscheiden sind. Diese außergewöhnliche Zugangsweise (als Einführung Urnenexperimente für Simulationen einzusetzen) wird nur in diesem Schulbuch verwendet. Anschließend werden Aufträge erteilt, in denen das Hauptaugenmerk auf dem Erstellen von Baumdiagrammen liegt. Wie in der Ausgabe für das Bundesland Baden-Württemberg (siehe Kapitel 4.2.5) wird auch hier ein Auftrag dazu genutzt die neuen Begriffe einzuführen.

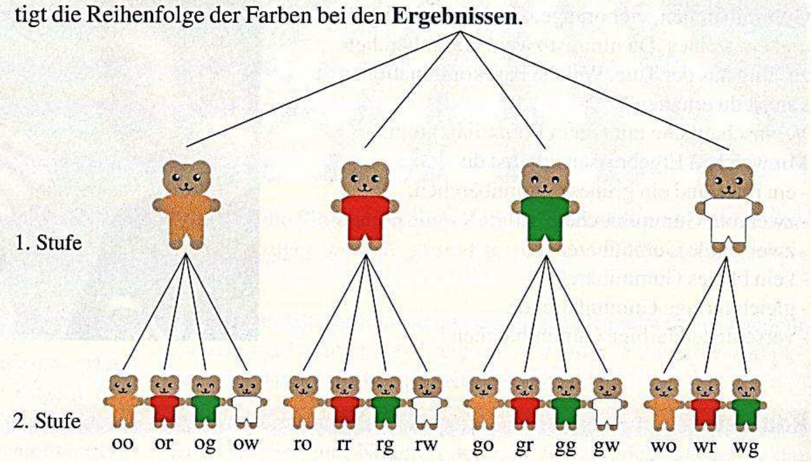
Gummibärchen (Fokus Mathematik 8 B 2006, S.77/78)

Gummibärchen **Auftrag 1**

In einer Tüte befinden sich verschieden farbige Gummibärchen, vier orange, zwei rote, zwei grüne und ein weißes. Du nimmst zwei Gummibärchen zufällig aus der Tüte. Welche Farbkombinationen kannst du erhalten?
Veranschauliche mit einem Baumdiagramm.
Mit welchen Ergebnissen erhältst du
- ein rotes und ein grünes Gummibärchen,
- zwei rote Gummibärchen,
- zwei weiße Gummibärchen,
- kein blaues Gummibärchen,
- gleich farbige Gummibärchen,
- verschieden farbige Gummibärchen?



Das Entnehmen der Gummibärchen kann als zweistufiges Zufallsexperiment (zwei Zufallsexperimente nacheinander) aufgefasst werden, das mit einem Baumdiagramm veranschaulicht werden kann. Zuerst wird ein erstes Gummibärchen gezogen, danach ein zweites. Man spricht vom **Nacheinanderziehen** und berücksichtigt die Reihenfolge der Farben bei den **Ergebnissen**.



Dieses Beispiel erinnert stark an die PISA-Aufgabe im Kapitel 3.1.8 dieser Arbeit („Rote Zuckerl"), die allerdings noch viel weniger Vorwissen voraussetzt. Hier wird wiederum deutlich, dass österreichische SchülerInnen, die den Begriff Wahrscheinlichkeit in dieser Schulstufe noch gar nicht kennengelernt haben, einen gravierenden Nachteil gegenüber den deutschen (bayrischen) SchülerInnen haben. Anhand der Ziehung von Gummibärchen werden die Begriffe *Ergebnisraum, Elemente, Ereignis, Elementarereignis, unmögliches/sicheres Ereignis und Gegenereignis* erklärt. Zusätzlich wird hier auch (im Gegensatz zu den anderen hier vorgestellten Büchern) häufiger mit Hilfe von Mengen gearbeitet.

Zusammenfassung (Fokus Mathematik 8 B 2006, S.79)

Zusammenfassung

Zufallsexperimente

Versuchsausgänge von Zufallsexperimenten heißen **Ergebnisse** ω. Werden alle Ergebnisse zu einer Menge zusammengefasst, erhält man den **Ergebnisraum** Ω. In Ω kommt jedoch kein Ergebnis mehrfach vor.
Baumdiagramme oder systematisches Abzählen helfen bei der Bestimmung von Ω. Teile des Ergebnisraumes (**Teilmengen**) bilden **Ereignisse**. Sie können als Mengen (mit Großbuchstaben) oder in sprachlicher Form angegeben werden.

Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ zu einem Ereignis E enthält genau die Ergebnisse, die nicht im Ereignis E enthalten sind. Ein **Elementarereignis** ist ein Ereignis, das genau ein Element enthält. Ein **unmögliches Ereignis** enthält kein, ein **sicheres Ereignis** enthält alle Ergebnisse.

Lässt sich ein Zufallsexperiment in mehrere Stufen (einfache Zufallsexperimente) zerlegen, so unterscheidet man die Nacheinanderausführung unter Berücksichtigung der Reihenfolge von der gleichzeitigen Ausführung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Nacheinander Werfen zweier Würfel:
Mengendiagramm
Ω

11 12 13 14 15 16 21 22 23 24 25 26
31 32 33 34 35 36 41 42 43 44 45 46
51 52 53 54 55 56 61 62 63 64 65 66

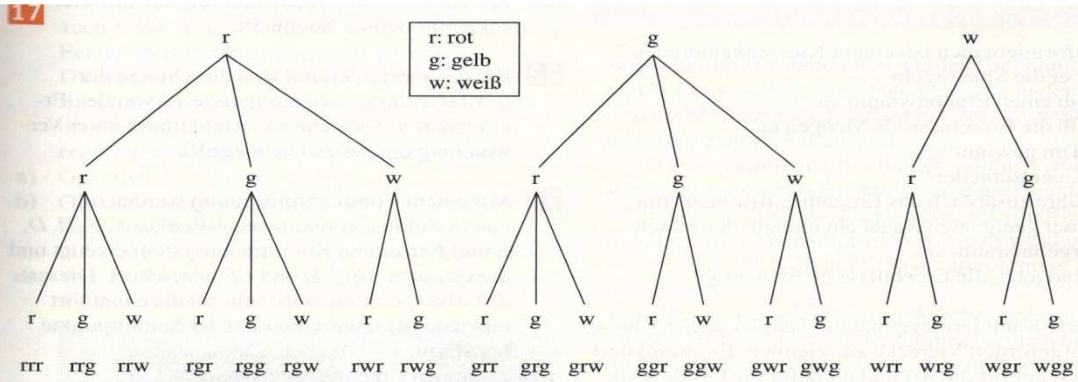
Ermitteln der Augensumme:
$\Omega' = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$
„Gerade Augensumme“ $G = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$
„Ungerade Augensumme“ $U = \{3; 5; 7; 9; 11\}$
„Augenzahl 7“: $\{7\}$
„Augensumme 13“: $\{\ \}$
„Augensumme größer 1“: Ω

Werfen zweier Münzen (W: Wappen, Z: Zahl):
nacheinander: $\Omega = \{WW; WZ; ZW; ZZ\}$
gleichzeitig: $\Omega' = \{WW; WZ; ZZ\}$

Dies kann auf jeden Fall zur besseren Veranschaulichung beitragen und schafft einen Zusammenhang zur Mengenlehre, einem Stoffgebiet, das den SchülerInnen bereits vertrauter ist.

Beispiel 17 (Fokus Mathematik 8 B 2006, S.81)

17



a) Gib für das Baumdiagramm ein Zufallsexperiment an.
b) Gib zwei Formulierungen für ein unmögliches Ereignis an.
c) Gib das Ereignis „Kein rot“ und das Gegenereignis als Mengen an.
d) Gib eine sprachliche Formulierung für das Ereignis {rgg; grg; ggr; ggw; gwg; wgg} und für das Gegenereignis an.
e) Gib das Ereignis „Beim 2. Mal rot“ als Menge an.
f) Gib das Ereignis „Nur beim 2. Mal gelb“ als Menge an.
g) Gib das Ergebnis „Beim 3. Mal weiß“ als Menge an.
h) Gib weitere drei mögliche Ereignisse an.

Dieses Beispiel kann gut zeigen, ob die SchülerInnen die in der Zusammenfassung erklärten Begriffe richtig einsetzen können und fordert sie zusätzlich, da eine passende Aufgabenstellung gefunden werden muss. Interessant ist, dass in diesen Baumdiagrammen noch auf die Beschriftung mit Brüchen verzichtet wird. Bei den Aufgaben der Kategorie *Verknüpfen* werden weitere Themen des Mathematikunterrichts mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung verbunden. Dieser Aspekt fehlt leider in einigen anderen Lehrbüchern. Folgendes Beispiel verbindet die Themen Koordinatensystem und Wahrscheinlichkeit.

Beispiel 23 (Fokus Mathematik 8 B 2006, S.82)

23 Mit einem Computerprogramm werden mit einem Zufallsgenerator sechs Punkte A, B, C, D, E und F in einem Koordinatensystem erzeugt und die Geraden AB, CD und EF gezeichnet. Dieses Zufallsexperiment wird sehr oft durchgeführt und jedes Mal wird die Zahl der Schnittpunkte bestimmt.

a) Gib einen Ergebnisraum an.

b) Gib das Ereignis $\{1\}$ in sprachlicher Form an und zeichne ein Beispiel.

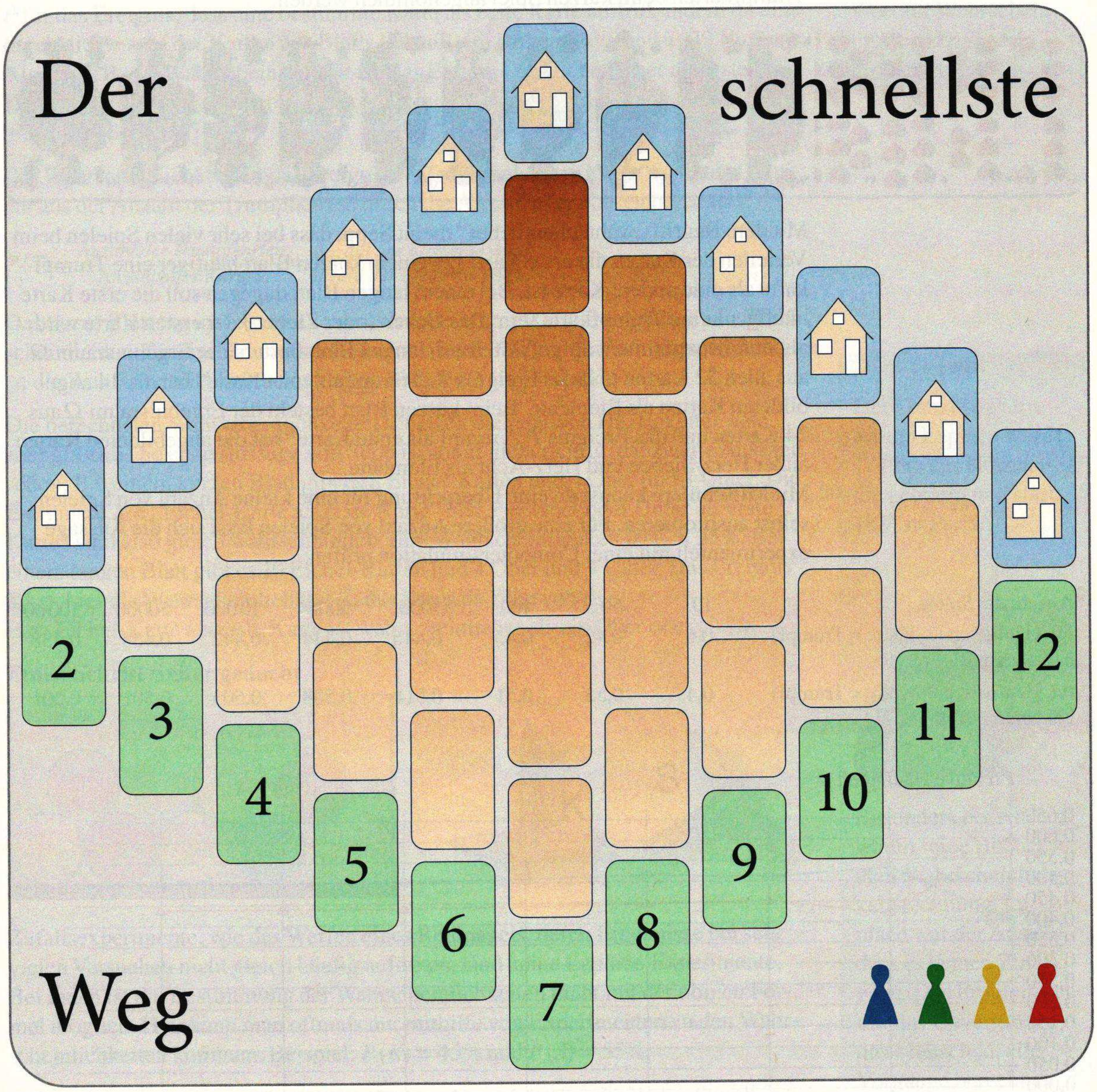
c) Gib für das Ereignis „Zwei Geraden sind parallel" die Anzahl der möglichen Schnittpunkte an und zeichne alle möglichen Fälle.

Im zweiten Kapitel *Wahrscheinlichkeit und Laplace-Experimente* wird zur Einführung ein Spiel vorgeschlagen, das die SchülerInnen problemlos im Buch nachspielen können. Sie sollen herausfinden, ob dieses Spiel fair ist, bzw. die Spielregeln dahingehend verändern, dass alle MitspielerInnen die gleichen Gewinnchancen haben. Diese Aufgabe regt zum eigenständigen Denken und kreativen Problemlösen an. Die SchülerInnen werden schnell erkennen, dass nicht alle Augenzahlen „gleich einfach zu würfeln" sind. Hilfreich wäre bei diesem Auftrag auch, wenn die SchülerInnen eine Tabelle anlegen würden, in der die Möglichkeiten für die einzelnen Augenzahlen aufgelistet werden.

Auftrag 4 (Fokus Mathematik 8 B 2006, S.85)

Das Spiel „Der schnellste Weg" — **Auftrag 4**

Das Spiel ist für zwei bis vier Mitspieler. Zu Beginn des Spieles stellt jeder Mitspieler seinen Spielstein auf eines der Startfelder mit den Startzahlen 2 bis 12.



Mehrfachbelegungen sind nicht erlaubt. Dann wird der Reihe nach mit zwei Würfeln gewürfelt. Stimmt die Augensumme mit der Startzahl überein, darf man ein Feld vorrücken und nochmals würfeln. Andernfalls ist der nächste Spieler an der Reihe. Wer mit seinem Spielstein ein Zielfeld erreicht, hat gewonnen.

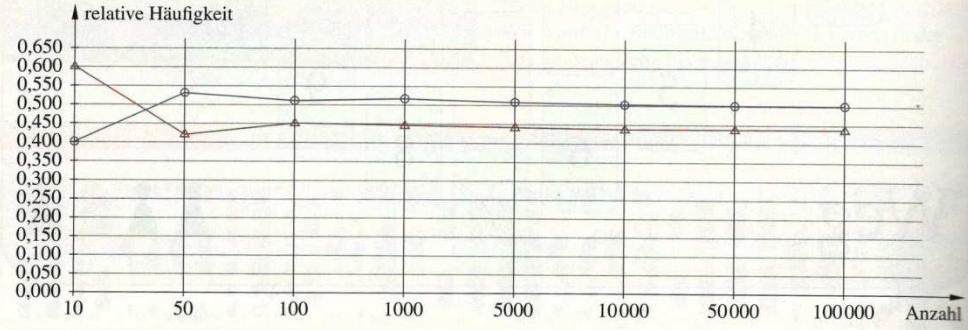
Spielt das Spiel mehrfach, um die folgende Frage zu beantworten: Ist das Spiel fair oder müsste man die Spielregel ändern?
Erfinde selbst neue Spielregeln und prüfe, ob das Spiel dann fair ist.

Info

Ein Spiel ist fair, wenn alle Mitspieler die gleichen Chancen haben zu gewinnen.

Anhand des Kartenspiels *Schafkopf*, das laut Buch in Bayern allgemein bekannt sein dürfte, wird der Begriff *Laplace-Experiment* eingeführt und der Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten erklärt.

Abbildung und Zusammenfassung (Fokus Mathematik 8 B 2006, S.86/S.88)



Beachte

Die Wahrscheinlichkeit sagt nichts über den Einzelfall aus, sondern nur über sehr viele Fälle.

Nach dem Gesetz der großen Zahlen stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten bei sehr vielen Durchführungen von Versuchen. Es zeigt sich, dass die relative Häufigkeit für das Ereignis T „Trumpf als erste Karte" beim kurzen Blatt um den Wert 0,501 stabilisiert, beim langen Blatt um den Wert 0,438.
Sie geben hier an, dass beim kurzen Blatt eine Trumpfkarte als erste Karte zu 50% **erwartet** werden kann, d. h. bei sehr vielen Spielen wird etwa bei der Hälfte der Spiele die erste Karte eine Trumpfkarte sein. Diese Zahlenwerte machen natürlich keine Aussage über ein einzelnes Spiel.

Zusammenfassung

Wahrscheinlichkeit und Laplace-Experimente

Zufallsexperimente, bei denen alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, heißen **Laplace-Experimente**.

Die **Wahrscheinlichkeit** $P(E)$ für ein Ereignis E eines Laplace-Experimente berechnet man so:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } E}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega}$$

Werfen eines Spielwürfels.
$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$\{\omega\}$	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Dann folgt z. B.:
P(„Gerade Augenzahl") $= \frac{3}{6} = 50\%$

Viele Zufallsexperimente haben Ergebnisse, die nicht gleich wahrscheinlich sind. Oft kann man durch Verfeinern des Ergebnisraumes auf gleichwahrscheinliche Ergebnisse kommen und damit Wahrscheinlichkeiten berechnen. Gelingt dies nicht, können nur experimentell ermittelte Werte der relativen Häufigkeiten gemäß dem Gesetz der großen Zahlen als Näherungen für die Wahrscheinlichkeiten dienen.

Werfen eines Spielwürfels, der dreimal die Augenzahl 1, zweimal die Augenzahl 2 und einmal die Augenzahl 3 trägt. $\Omega = \{1; 2; 3\}$
Wählt man die Augenzahlen unterscheidbar (z. B. verschiedene Farbe), erhält man:
$\Omega = \{1; 1; 1; 2; 2; 3\}$
Diese sechs Ergebnisse kann man als gleichwahrscheinlich annehmen.

Dann folgt z. B.: $P(\{2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Die hier verwendeten Formulierungen wirken auf den ersten Blick für die 8. Schulstufe recht anspruchsvoll, die Erklärung anhand des Spielwürfels beschreibt den Sachverhalt hingegen verständlich. Der Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten ist am dafür verwendeten Beispiel und der obigen Darstellung für die SchülerInnen gut nachzuvollziehen.

Positiv zu bemerken ist, dass in diesem Buch großer Wert auf eine korrekte Ausdrucksweise gelegt wird. Der Hinweis, dass in manchen Fällen *„nur experimentell ermittelte Werte der relativen Häufigkeiten gemäß dem Gesetz der großen Zahlen als Näherungen für die Wahrscheinlichkeit dienen"* fehlt leider in einigen Schulbüchern. Es wäre schön, wenn auch noch ein kurzes Beispiel vorhanden wäre, das zeigt, wie man *„durch Verfeinern des Ergebnisraumes auf gleichwahrscheinliche Ergebnisse kommen"* kann. Es folgen zahlreiche Übungsaufgaben, von denen wiederum einige mit anderen mathematischen Themengebieten verbunden sind.

Beispiel 14 (Fokus Mathematik 8 B 2006, S.90)

14 Ein Zufallsgenerator erzeugt dreistellige Quadratzahlen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl

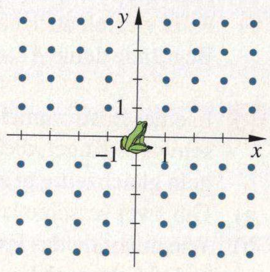
a) 625 ist,
b) kleiner als 200 ist,
c) gerade ist,
d) zwei gleiche Ziffern hat,
e) größer als 400 ist,
f) eine Primzahl ist?

Besonders interessant und fordern ist auch folgendes Beispiel. Es werden verschiedene Themengebiete (Wahrscheinlichkeit, Koordinatensystem, Geradengleichung) integriert und im Punkt d) sollen sich die SchülerInnen zusätzlich eigene Fragestellungen überlegen.

Beispiel 41 (Fokus Mathematik 8 B 2006, S.95)

41 Der Koordinaten-Frosch sitzt im Ursprung eines Koordinatensystems und kann mit jedem Sprung mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder um eine Einheit nach rechts oder nach links oder um eine Einheit nach oben oder nach unten springen.

a) Der Koordinaten-Frosch führt drei Sprünge aus. Wo kann er sich befinden?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er die möglichen Endpositionen?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er auf der Geraden mit der Gleichung $y = -2x + 3$ landet?
d) Überlege dir selbst zwei weitere Fragestellungen und beantworte sie.



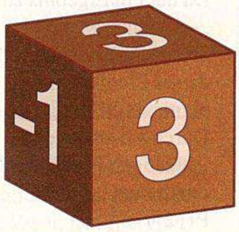
Im Band 9 sollen die SchülerInnen im Kapitel *Zusammengesetzte Zufallsexperimente* lernen den jeweiligen Sachverhalt mit Baumdiagrammen zu veranschaulichen, mit Hilfe der Pfadregeln Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen und aufwändigere Zufallsexperimente zu simulieren. Zu Beginn wird eine ganze Seite dem bereits mehrfach erwähnten *Ziegenproblem* gewidmet.

Anschließend werden Arbeitsaufträge angeboten, in denen Baumdiagramme die jeweilige Situation veranschaulichen sollen. Mit Hilfe eines besonderen Würfels werden die Pfadregeln und die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ausführlich und verständlich erklärt.

Auftrag 2 (Fokus Mathematik 9 B 2007, S.109)

Der besondere Würfel **Auftrag 2**

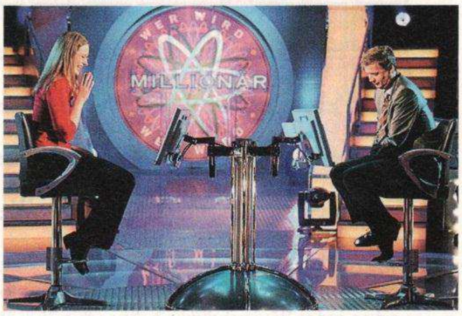
Es gibt für bestimmte Spiele Würfel, deren sechs Seiten nicht wie gewöhnlich mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6 beschriftet sind.
Sophia hat in einer Schachtel einen besonderen Würfel mit den Beschriftungen – 1, 1, 2, 3, 3, 3 und zwei normale Spielwürfel. Sie nimmt zufällig einen Würfel heraus und wirft diesen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine – 1 (eine 2 bzw. eine 3) zu werfen?
Veranschauliche die Situation an einem Baumdiagramm. Trage an den Ästen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.



In den anschließenden Übungsaufgaben, die sowohl zahlreich als auch abwechslungsreich sind, wird das Gelernte sinnvoll angewendet. Es gibt Beispiele mit deutlichem Realitätsbezug sowie Aufgaben in englischer Sprache.

Beispiele 13 und 15 (Fokus Mathematik 9 B 2007, S.115)

13



In einer Fernseh-Spielshow stellt der Moderator einem Kandidaten eine Wissensfrage. Diese erhält vier Antworten zur Auswahl, von denen genau eine richtig ist. Bei richtiger Antwort darf der Kandidat in die nächste Runde, andernfalls scheidet er aus. Ein Kandidat wählt die Antworten durch reines Raten aus.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür,

a) dass der Kandidat in die dritte Runde kommt?
b) dass er genau in der dritten Runde ausscheidet?
c) dass er die zehnte Frage richtig beantwortet?

15 Random experiments wanted

a) Describe a random experiment of two steps and name events A, B and C with $P(A) = \frac{1}{18}$, $P(B) = \frac{2}{9}$ and $P(C) = \frac{1}{3}$.
b) Think about an equivalent problem like in a) and present it to your neighbour. Of course, you must know the solution.

Auch das klassische Multiple-Choice-Problem, das vor allem im Zusammenhang mit der Binomialverteilung oft verwendet wird, wird hier mehrfach bearbeitet.

Beispiel 19 (Fokus Mathematik 9 B 2007, S.116)

19 Ein Wissenstest besteht aus vier Fragen. Dazu sind jeweils drei Auswahlantworten gegeben, von denen stets eine richtig ist. Eine völlig unwissende Testperson kreuzt Auswahlmöglichkeiten rein zufällig an.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ...

a) alle vier Fragen richtig beantwortet sind,
b) genau drei Fragen richtig beantwortet sind,
c) mindestens drei Fragen richtig beantwortet sind,
d) mindestens eine Frage richtig beantwortet ist.

Auf den folgenden beiden Seiten wird erklärt, wie man mit Hilfe von Computern (Tabellenkalkulationsprogrammen) Zufallszahlen erzeugen kann. Dies nimmt relativ viel Zeit in Anspruch. Der Nutzen, den die SchülerInnen von diesem Wissen haben ist allerdings groß, da die Durchführung vieler Zufallsexperimente schnell langweilig werden kann und diese dann mit Hilfe des Computers simuliert werden können.

Im Kapitel *Zufallsexperimente simulieren* wird folgender Auftrag zur Erklärung verwendet.

Auftrag 3 (Fokus Mathematik 9 B 2007, S.121)

Mädchen oder Junge? — **Auftrag 3**

Herr Kehrmann und Herr Baur streiten über ein klassisches Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung:
„Stell dir vor, dass die Familie eines neuen Arbeitskollegen zwei Kinder hat. Ich frage ihn, ob eines seiner Kinder ein Junge ist. Er bejaht diese Frage. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann das andere Kind ein Mädchen?"
Herr Baur meint, die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2}$, da das zweite Kind unabhängig vom anderen ein Junge oder ein Mädchen sein kann. Herr Kehrmann behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit den Wert $\frac{2}{3}$ hat. Die beiden beschließen, das Problem als Zufallsexperiment zu betrachten und mit einfachen Mitteln durchzuspielen, sie wollen also das Experiment simulieren.
Überlege dir ein geeignetes Zufallsexperiment und führe dieses so oft durch, dass du eine glaubwürdige Vermutung über die gesuchte Wahrscheinlichkeit äußern kannst.
Gehe dabei von der Voraussetzung aus, dass Mädchen- und Jungengeburten gleichwahrscheinlich sind. Recherchiere im Internet die derzeit angenommene Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt.

Info

Hilfsmittel zur Simulation von Zufallsexperimenten:

- Tabelle mit Zufallszahlen, S. 118
- Random-Taste am Taschenrechner
- Urne
- Münzwurf
- Würfeln
- Spielkarten

Die Geburt eines Kindes wird an dieser Stelle mit einem Münzwurf simuliert. Sowohl die ausführliche Erklärung dazu als auch die anschließende Zusammenfassung sind verständlich präsentiert und bereiten gut auf die Übungsaufgaben vor. Einige Beispiele sind wiederum recht anspruchsvoll und schaffen einen Zusammenhang mit anderen Gebieten der Naturwissenschaften.

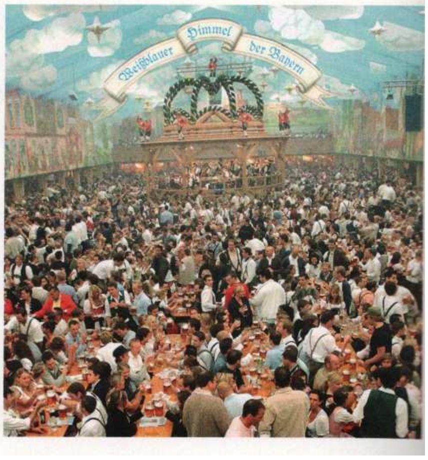
Im Band 10 der Schulbuchreihe sollen sich die SchülerInnen dann mit dem Umgang mit *bedingten Wahrscheinlichkeiten* beschäftigen. Da der Stoff (so wie er in diesem Schulbuch aufgebaut ist) in der Sekundarstufe I kaum vermittelt werden kann, soll an dieser Stelle nur ein kurzer Einblick in das Vorgehen gegeben werden.

Auftrag 1 und Baumdiagramm (Fokus Mathematik 10 B 2008, S.90/92)

Auftrag 1 **Auf der Wiesn**

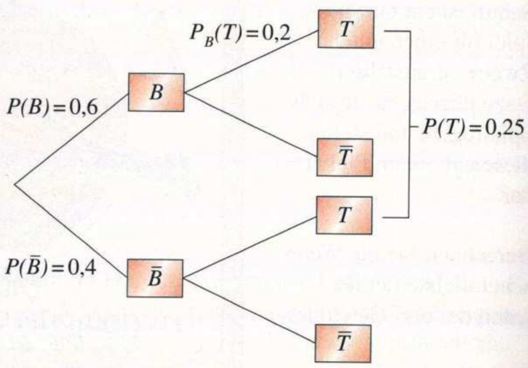
Auf dem Oktoberfest in München sind 60% der Besucher aus Bayern. Eine Stichprobe hat ergeben, dass 25% der Besucher Tracht tragen. Unter den bayerischen Besuchern beträgt der Anteil der Trachtenträger 20%.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Besucher ein bayerischer Trachtenträger?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trägt ein auswärtiger Besucher Tracht?



Mathematiker sprechen in diesem Fall von einer **bedingten Wahrscheinlichkeit**, nämlich der Wahrscheinlichkeit von T („Besucher trägt Tracht") unter der Bedingung B („Besucher kommt aus Bayern") und schreiben dafür kurz $P_B(T)$. Mit dieser Schreibweise gilt: $P_B(T) = 0{,}2$.

Um einen besseren Überblick zu erhalten, ist es günstig, die gegebenen Daten zunächst in ein Baumdiagramm einzutragen.
Bedingte Wahrscheinlichkeiten werden dabei als Wahrscheinlichkeiten **an einen Pfad** in der 2. (oder einer höheren) Stufe des Baums eingetragen.



Als *Aufgabe der Woche* wird das bekannte *Problem der vertauschten Briefe* gestellt. Auch die allseits bekannte Problematik eines (fälschlicherweise) positiven (HIV-)Testergebnisses wird in diesem Kapitel behandelt. In der 10. Schulstufe kann ein vernünftiger Umgang mit diesem schwierigen Thema hoffentlich vorausgesetzt werden.

Auftrag 1 (Fokus Mathematik 10 B 2008, S.100)

Auftrag 1 | **Susans Alptraum**

Info

Ein positives Ergebnis bei einem Krankheitstest bedeutet, dass die Krankheit festgestellt wurde. Ein negatives Ergebnis bedeutet, dass keine Erkrankung festgestellt wurde.

„Mitte der neunziger Jahre wurde im Rahmen einer medizinischen Routineuntersuchung bei Susan, einer 26-jährigen allein erziehenden Mutter, auch überprüft, ob bei ihr eine HIV-Infektion vorliegt. Sie nahm zwar illegale Drogen, spritzte sie aber nicht intravenös. Daher glaubte sie nicht, dass der „AIDS-Test" bei ihr positiv ausfallen könnte. Doch einige Wochen später wurde ihr genau dieses Ergebnis mitgeteilt – was damals fast einem Todesurteil gleichkam. Susan war schockiert und verzweifelt. Das Testergebnis sprach sich herum, und ihre Kollegen vermieden es aus Angst vor Ansteckung sogar, ihr Telefon anzufassen. Schließlich verlor sie ihre Arbeitsstelle. Bald darauf zog sie in ein Heim für HIV-Infizierte. Dort schlief Susan mit einem Mitbewohner – ohne Kondom, denn sie dachte sich: „Wieso soll ich noch aufpassen, wenn ich doch schon infiziert bin?" Aus Sorge um die Gesundheit ihres inzwischen siebenjährigen Sohnes hörte Susan auf, ihn zu küssen, und überlegte auch, ob sie sein Essen beim Zubereiten überhaupt noch anfassen durfte. Die Distanz, die sie zu ihm aufbaute – im festen Glauben, ihn dadurch zu schützen –, belastete sie sehr. Einige Monate später bekam sie eine Bronchitis, und der sie behandelnde Arzt bestand darauf, den HIV-Test zu wiederholen. „Was soll's?", dachte sie sich. Diesmal war das Ergebnis negativ"[1], Susan war gar nicht infiziert!

Erfahrungsgemäß sind ungefähr 0,01 Prozent aller Männer mit HIV infiziert. Wenn einer dieser Männer das Virus in sich trägt, so fällt der Test bei ihm mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9 Prozent positiv aus. Wenn der Betroffene nicht infiziert ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei ihm negativ ausfällt 99,99 Prozent.
Ein Mann erhält ein positives Testergebnis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich infiziert ist?
Wie ändert sich das Ergebnis, wenn bekannt ist, dass der Mann einer Risikogruppe angehört, in der das Risiko einer HIV-Infektion 1 % beträgt?

Fazit

In diesem Schulbuch werden anhand eines vollständig durchgerechneten Arbeitsauftrags die neuen Begriffe eingeführt. Die Beispiele dieser Schulbuchreihe sind (angemessen) anspruchsvoll, abwechslungsreich, anwendungsorientiert und in der Auswahl ähnlich der Aufgaben in der Ausgabe für Baden-Württemberg (siehe Kapitel 4.2.5).
Der gesamte Aufbau der Schulbuchreihe ist klar strukturiert und ermöglicht den SchülerInnen eine recht umfangreiche Vorstellung zum Begriff *Wahrscheinlichkeit* zu entwickeln. Da im Band 6 ein ganzes Kapitel den relativen Häufigkeiten gewidmet ist, können die SchülerInnen profundes Vorwissen erwerben und sind daher in der Lage den Zusammenhang zur Wahrscheinlichkeit (Band 8) relativ leicht nachzuvollziehen.
Für die SchülerInnen irritierend könnte sein, dass die Laplace-Wahrscheinlichkeit und der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff mehr oder weniger "gleichzeitig" eingeführt werden. An dieser Stelle wäre es sicher hilfreich, die SchülerInnen explizit darauf hinzuweisen, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Auch eine Erwähnung des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs wäre an dieser Stelle wünschenswert. Dieser Aspekt des Begriffs Wahrscheinlichkeit bleibt in den deutschen Schulbüchern für die Sekundarstufe I (beinahe) unerwähnt.

Ein wenig schade ist, dass im Band 7 ausschließlich die Beschreibende Statistik behandelt wird und damit ein großer Schnitt entsteht. Wünschenswert wäre auch, dass der Zusammenhang Wahrscheinlichkeit – Bruchrechnung – Prozentrechnung deutlicher hervorgehoben wird. Im Unterschied zu den anderen in dieser Arbeit vorgestellten Schulbüchern wird zusätzlich mit der Mengenschreibweise gearbeitet. Dies ist für die SchülerInnen sicher nicht von Nachteil, da sie den neuen Stoff mit Hilfe von bereits vorhandenen Vorkenntnissen erarbeiten können.

Im Vergleich zu den anderen Schulbüchern gibt es auch Übungsaufgaben, die andere Stoffgebiete (Koordinatensystem, Quadratzahlen, Geraden,…) enthalten und die SchülerInnen dadurch die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung erkennen können. Ebenfalls vorhanden sind Aufgaben in englischer Sprache. Zusätzlich wird in dieser Schulbuchreihe auch Wert auf das Arbeiten mit Hilfe von Computern gelegt, was vor allem bei der Simulation von Zufallsexperimenten sehr hilfreich und zeitsparend sein kann. Ebenfalls positiv zu erwähnen ist, dass auch allgemein bekannte Aufgaben wie das *Ziegenproblem* oder das *Problem der vertauschten Briefe* (teilweise in vereinfachter Form) vorgestellt werden. Am Ende jedes Kapitels steht den SchülerInnen ein kurzer Test mit Lösungen zur Selbstüberprüfung zur Verfügung.

4.2.5 Fokus Mathematik (Ausgabe Baden-Württemberg)

Im Schulbuch Fokus Mathematik (Ausgabe Baden-Württemberg) gibt es einige sehr hilfreiche Angebote, die das Lernen erleichtern sollen. Am Ende jedes Kapitels gibt es ein *Check up* mit einigen Beispielen und vollständiger Lösung dazu. Dies soll den SchülerInnen dabei helfen zu erkennen, ob der Stoff auch wirklich sitzt. Sollten bei einzelnen Beispielen Probleme auftauchen gibt es Hinweise, auf welcher Seite im Buch dazu Hilfe zu finden ist. Zusätzlich wird am Ende jedes Kapitels eine Zusammenfassung des Stoffs angeboten, in der die wichtigsten Begriffe und Merksätze noch einmal zusammengefasst sind. Außerdem haben die SchülerInnen bei vielen Aufgaben im Buch die Möglichkeit, sich mit Hilfe eines Mediencodes auf der Webseite des Cornelsen-Verlages näher zu informieren.

Einen – im Vergleich mit den anderen Schulbüchern – völlig anderen Weg der Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man im Schulbuch *Fokus Mathematik Band 3*. Im Teil *Vernetztes Anwenden* gibt es das Kapitel *Wahrscheinlichkeit – Ein Spaziergang durch Math-Vegas*. Die SchülerInnen werden zu Beginn darauf hingewiesen, dass sie in diesem Abschnitt mathematische Methoden anwenden werden, die sie bereits kennengelernt haben. Die SchülerInnen sollen die beiden Protagonisten Anja und Tim auf ihrem Weg durch Math-Vegas begleiten und dadurch einen ersten Einblick in die Wahrscheinlichkeitsrechnung bekommen.

1. Station Würfelbude

Im ersten Beispiel wird die klassische Frage „Ist ein 6er beim Würfeln schwieriger zu erreichen als die anderen Zahlen?“ gestellt. Die SchülerInnen sollen in Gruppen 100-mal Würfeln und ihre Ergebnisse in einer Strichliste notieren. Anschließend sollen die relativen Häufigkeiten berechnet und die Ergebnisse verglichen werden. Das Berechnen der relativen Häufigkeit wurde schon im vorangegangenen Band behandelt. Eine kurze Erinnerung dazu ist am Seitenrand vermerkt. Die Anzahl der Sechsen der einzelnen Gruppen sollen dann addiert und in einem Diagramm dargestellt werden. Der Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten wird nur durch eine (unvollständige) Tabelle der relativen Häufigkeiten dargestellt. Durch eine Darstellung in einem Diagramm könnte der Zusammenhang an dieser Stelle mit wenig Mehraufwand deutlicher unterstrichen werden. Die Ergebnisse sowie der Zusammenhang mit Bruch- und Prozentrechnung werden in folgendem Text übersichtlich und klar formuliert.

Merktext (Fokus Mathematik 3 BW 2006, S. 202)

Anja und Tim diskutieren ihre Würfelergebnisse. Anja fasst zusammen: „Je mehr Würfe wir nehmen, desto näher liegen die relativen Häufigkeiten der Würfelzahlen beieinander. Das war eigentlich zu erwarten, denn bei einem nicht gezinkten Würfel ist keine Seitenfläche bevorzugt. Da er sechs Seiten hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit für jede Seite und somit auch für jede Zahl folglich $\frac{1}{6}$. “ Tim fährt fort: „In ähnlicher Weise kann ich z. B. die Wahrscheinlichkeit bestimmen, eine gerade Zahl zu werfen. Der Anteil der drei Seiten mit den Zahlen 2, 4 und 6 an der Gesamtzahl der Seiten beträgt $\frac{1}{2}$, demnach ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu werfen, gleich $\frac{1}{2}$. “ Und Anja ergänzt: „Das bedeutet, dass bei häufigem Würfeln ca. 50% aller Würfel eine gerade Zahl zeigen“.

Mit der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird angegeben, welche relative Häufigkeit bei vielen Versuchsdurchführungen für dieses Ereignis zu erwarten ist. Eine Wahrscheinlichkeit kann als Bruch, als Dezimalzahl oder in Prozent angegeben werden.

Dass die Wahrscheinlichkeit als Bruch, Dezimalzahl oder in Prozent angegeben werden kann, ist explizit nur in diesem Buch angegeben. Es wäre wünschenswert, wenn sich dieser Hinweis im Zuge der „Definition“ des Begriffs Wahrscheinlichkeit auch in den anderen Schulbüchern finden würde. Zwar werden in den Übungen natürlich immer wieder Bruch- und Prozentangaben verwendet, ein expliziter Hinweis fehlt jedoch.

Es folgen einige Beispiele zum „Würfeln mit einem Würfel“. Beispiel 7 halte ich dabei für besonders ertragreich, da die SchülerInnen wirklich sehen können, ob sie das bisher Gelernte verstanden haben. An dieser Stelle kommt auch der Gedanke *„Der Zufall hat kein Gedächtnis“* zum Tragen, auf den seitens der Lehrkraft auch noch explizit hingewiesen werden sollte.

Beispiel 7 (Fokus Mathematik 3 BW 2006, S. 203)

7 Bei dieser Aufgabe kannst du überprüfen, wie gut du folgende Aussage verstanden hast: „Die Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer ‚6‘ mit einem Würfel beträgt $\frac{1}{6}$.“

a) Notiere dazu bei den folgenden Antworten, ob sie deiner Meinung nach richtig oder falsch sind.
- Nach jeweils 5 Würfen erscheint eine ‚6‘.
- Innerhalb von sechs Würfen hast du genau einmal eine ‚6‘ geworfen .
- Bei 100 Würfen könnte die ‚6‘ 18-mal dabei sein.
- Wenn du schon 15-mal gewürfelt hast und keine ‚6‘ dabei war, dann ist die Wahrscheinlichkeit ziemlich groß, im nächsten Wurf eine ‚6‘ zu bekommen.
- Beim Würfeln kann es sein, dass du 5-mal hintereinander eine ‚6‘ würfelst.
- Wenn bei sechs Würfen keine ‚6‘ kommt, ist der Würfel „gezinkt“.
- Wenn ich beim Spielen eine ‚6‘ brauche, dann dauert es besonders lange, bis sie kommt.

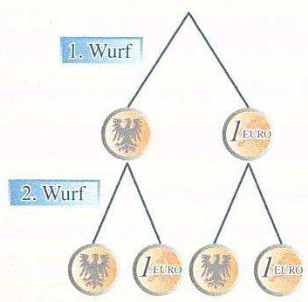
b) Notiere zwei weitere falsche und zwei weitere richtige derartige Aussagen.

Anschließend führt der Weg durch Mathe-Vegas Anja und Tim zur

2. Station Münzbude

Tim stellt fest, dass sich interessante Fragen ergeben, wenn man Münzen mehrmals hintereinander wirft. Im ersten Beispiel dazu sollen die SchülerInnen zwei Münzen 100-mal werfen und die Ergebnisse notieren. Die Frage dazu lautet: „Kommen gleiche Seiten häufiger vor als ungleiche?“. Anja macht in folgendem Text den Vorschlag, ein Baumdiagramm zu zeichnen.

Text (Fokus Mathematik 3 BW 2006, S. 204)



Anja und Tim unterhalten sich über dieses Münzwurfexperiment aus Aufgabe 9. Anja erzählt: „Ich kenne eine anschauliche Methode, wie man derartige Fragen untersuchen kann. Dazu stelle ich mir vor, dass ich die beiden Münzen nicht gleichzeitig, sondern hintereinander werfe. Die beiden Möglichkeiten beim ersten Wurf, Wappen oder Zahl, kurz W bzw. Z, schreibe ich nebeneinander auf. Zu jedem dieser Würfe gibt es beim 2. Wurf wieder die Möglichkeit, Wappen oder Zahl zu werfen, was ich jeweils unter den ersten Würfen notiere. Dann ziehe ich die Verbindungslinien (s. Abb.). Diese Linien werden Äste genannt, das gesamte Diagramm heißt Baumdiagramm.“ Tim ergänzt: „Das sieht tatsächlich wie ein umgedrehter Baum aus. Von der Wurzel aus führt z. B. ein Ast zu Wappen, und von dort aus ein weiterer Ast zu Zahl. Solche Linien werden Pfade genannt.“ Anja meint: „Diese Bezeichnung soll veranschaulichen, dass beim Werfen diese Linie durchlaufen wird.“ Tim zählt ab: „Insgesamt gibt es 4 Pfade, WW, WZ, ZW und ZZ, deren Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{4}$ beträgt. Für das Ereignis „gleiche Seiten“ gibt es zwei Möglichkeiten, ebenso für „ungleiche Seiten“, also betragen die Wahrscheinlichkeiten jeweils $\frac{1}{2}$.

Ein Experiment wie das obige, bei dem mehrere Zufallsexperimente nacheinander durchgeführt werden, heißt **mehrstufiges Zufallsexperiment**. **Baumdiagramme** sind nützlich zum Abzählen von Möglichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten.

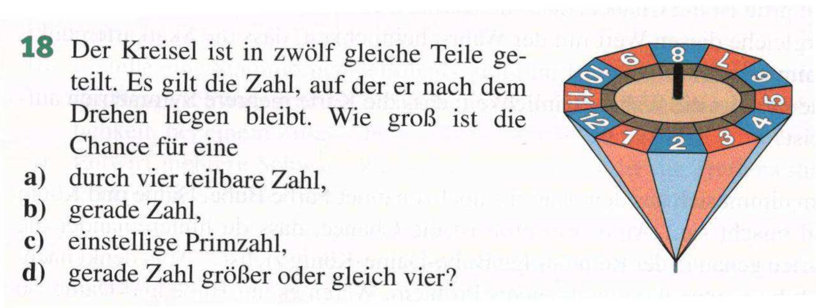
Diese Einführung ist zwar knapp, aber so formuliert, dass sie relativ leicht verständlich ist. Die Abbildung trägt zusätzlich zur besseren Anschaulichkeit bei. Eventuell sollte seitens der Lehrkraft noch ein Hinweis folgen (oder zumindest die Frage aufgeworfen werden), ob es einen Unterschied macht, wenn zwei Münzen gleichzeitig oder hintereinander geworfen werden. Hilfreich wäre auch, wenn im oben dargestellten Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten entlang der Pfade eingezeichnet wären. Im Text steht *„Insgesamt gibt es vier Pfade, […], deren Wahrscheinlichkeit jeweils* $\frac{1}{4}$ *beträgt.“*. Ob diese Erkenntnis ohne Angabe der Wahrscheinlichkeiten so leicht einzusehen ist, ist fraglich. Die Multiplikations- und Additionsregel wurden an dieser Stelle noch nicht eingeführt.

Anschließend entscheiden sich Tim und Anja zurück zur Würfelbude zu gehen, da dort ebenfalls mehrstufige Zufallsexperimente gemacht werden können. (z.B. Wahrscheinlichkeit einen „Pasch“ mit zwei Tetraederwürfeln zu würfeln)

Im Anschluss an einige Übungsbeispiele besuchen Tim und Anja die dritte Station.

3. Station Das runde Zelt

Beispiel 18 (Fokus Mathematik 3 BW 2006, S. 205)



18 Der Kreisel ist in zwölf gleiche Teile geteilt. Es gilt die Zahl, auf der er nach dem Drehen liegen bleibt. Wie groß ist die Chance für eine

a) durch vier teilbare Zahl,
b) gerade Zahl,
c) einstellige Primzahl,
d) gerade Zahl größer oder gleich vier?

Mit Hilfe dieses Beispiels könnte man gut auf gleichwahrscheinliche Ereignisse und im weiteren Verlauf auf die Laplace-Wahrscheinlichkeit eingehen. Von dieser Vorgangsweise wird hier allerdings abgesehen. Im *runden Zelt* gibt es noch einige Aufgaben mit Kreiseln und Glücksrädern. Im anschließenden Kapitel *Kartenhaus* können drei Beispiele bearbeitet werden.

4. Station Kartenhaus

Beispiel 24 (Fokus Mathematik 3 BW 2006, S. 206)

Kartenhaus

24 Du darfst aus einem gemischten Kartenstapel mit 32 Skatkarten eine Karte ziehen. Berechne die Wahrscheinlichkeit,

a) eine rote Karte,
b) eine schwarze Karte mit einer einstelligen Zahl,
c) ein Bild,
d) ein As

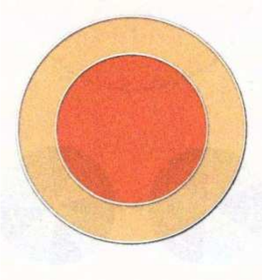
zu ziehen.

Lösungswort: $\frac{3}{8}$ (a); $\frac{3}{16}$ (k); 50% (s); 0,125 (t)

Für dieses Beispiel ist es natürlich unbedingt notwendig die SchülerInnen zu informieren, wie ein Kartendeck mit 32 Skatkarten aufgebaut ist. Dieses Wissen wird in diesem Schulbuch scheinbar vorausgesetzt.

5. Station Schießbude

Folgender Text bereitet die SchülerInnen auf die Schießbude vor:



„Tim stellt fest: „Von da vorne höre ich Schüsse". „Das sind die Zufallsschützen aus der Schießbude" antwortet Anja. „Hier sind keine Schützenkönige am Werk. Die Zielscheibe wird immer getroffen; wo sie getroffen wird ist durch den Zufall bestimmt." Tim zeigt auf eine einfache Zielscheibe. „Schau, der Radius des inneren Kreises beträgt 2 cm, der des äußeren 3 cm. Die Chance den inneren Ring zu treffen, wird bestimmt durch den Anteil, den diese Fläche an der Gesamtfläche der Zielscheibe hat." Anja fährt fort: „Das sind $\frac{4}{9}$. Die Wahrscheinlichkeit, den inneren Ring zu treffen, beträgt $\frac{4}{9}$; für den äußeren Ring ergibt sich damit die Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$." (Fokus Mathematik 3 BW 2006, S. 206f)

Die SchülerInnen sollen dann erläutern, wie Anja wohl auf ihre Ergebnisse kommt. In diesem Zusammenhang wird also die Flächenberechnung eines Kreises vorausgesetzt und in das Beispiel integriert.

Eine weitere, sehr interessante und anspruchsvolle Aufgabe ist das Beispiel 31, das sich ebenfalls mit dem Thema Kreis(zahl) auseinandersetzt.

Beispiel 31 (Fokus Mathematik 3 BW 2006, S. 208)

31 Jeder Besucher von *Math-Vegas* wird zum *pi-Schießen* eingeladen. Auf dem quadratische Blech ist ein Kreis mit 25 cm Durchmesser eingezeichnet. Jeder Besucher darf einen Zufallsschuss auf das Blechquadrat abgeben. Der Anteil der Treffer im Kreis an der Gesamttrefferzahl der Scheibe wird in etwa so groß sein wie der Anteil der Kreisfläche am Quadrat.

a) Berechne das Verhältnis der Kreis- zur Quadratfläche und begründe damit, wieso sich diese Methode dazu eignet, Näherungswerte für π zu bekommen.

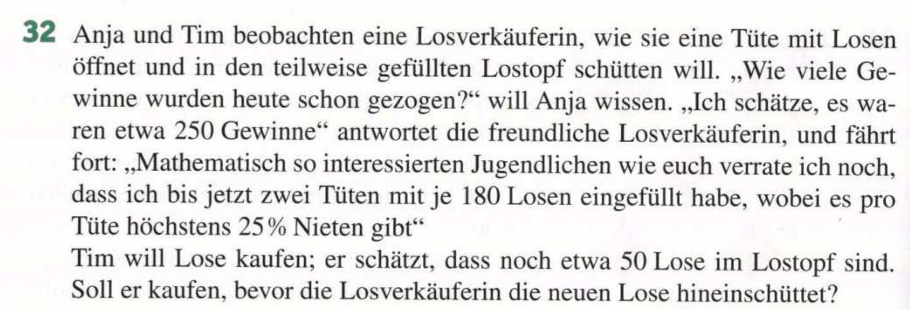
b) Entnimm die Daten aus der abgebildeten Scheibe und bestimme damit einen Näherungswert für π. Beurteile die Qualität dieses Ergebnisses.

Zum Abschluss besuchen Tim und Anja die

6. **Station Losbude**

Dazu wird folgende Aufgabe vorgeschlagen, die recht anspruchsvoll erscheint, mit dem bereits erworbenen Vorwissen aber gut lösbar ist.

Beispiel 32 (Fokus Mathematik 3 BW 2006, S. 208)



32 Anja und Tim beobachten eine Losverkäuferin, wie sie eine Tüte mit Losen öffnet und in den teilweise gefüllten Lostopf schütten will. „Wie viele Gewinne wurden heute schon gezogen?“ will Anja wissen. „Ich schätze, es waren etwa 250 Gewinne“ antwortet die freundliche Losverkäuferin, und fährt fort: „Mathematisch so interessierten Jugendlichen wie euch verrate ich noch, dass ich bis jetzt zwei Tüten mit je 180 Losen eingefüllt habe, wobei es pro Tüte höchstens 25 % Nieten gibt“
Tim will Lose kaufen; er schätzt, dass noch etwa 50 Lose im Lostopf sind. Soll er kaufen, bevor die Losverkäuferin die neuen Lose hineinschüttet?

Dieser Ausflug nach *Math-Vegas* wäre eine Möglichkeit zumindest ein wenig Wahrscheinlichkeitsrechnung bereits in der Sekundarstufe I einzuführen. In einem relativ kurzen Zeitrahmen entsteht so für die SchülerInnen die Möglichkeit einen ersten Eindruck zu gewinnen. Allerdings sollten die Auswahl der Beispiele noch einmal überdacht werden. Dieses Kapitel hinterlässt keinen abgerundeten Eindruck und wirkt etwas lückenhaft. Einige Beispiele würden sich anbieten auf die Laplace´sche Wahrscheinlichkeitsdefinition einzugehen. Davon wird in diesem Band jedoch abgesehen. Der Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten wird meiner Meinung nach zu wenig klar hervorgehoben. Außerdem sind (natürlich themenbedingt) ausschließlich Beispiele diverse Glücksspiele betreffend zu finden. Diese bieten sich natürlich bei der Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeitsrechnung an, andererseits soll bei den SchülerInnen nicht der Eindruck entstehen, dass man mit Wahrscheinlichkeitsrechnung keine anderen Aufgabenstellungen lösen kann. Vorerfahrungen betreffend der Bruch- bzw. Prozentrechnung sollten für diese Lernsequenz schon vorhanden sein. Die Beispiele aus diesem Kapitel eignen sich auch dazu, im Zuge der Wiederholung und Vertiefung der Bruch- und Prozentrechnung verwendet zu werden.

Im Band 4 des Schulbuchs *Fokus Mathematik* ist das Thema Wahrscheinlichkeit sehr ausführlich behandelt. Auf den ersten beiden Seiten (*Über Wahrscheinlichkeit sprechen*) werden die SchülerInnen dazu aufgefordert, zu verschiedenen Aussagen über Wahrscheinlichkeit Stellung zu nehmen. Folgendes Beispiel bietet die Möglichkeit zur Diskussion einer Aussage, die die SchülerInnen aus ihrem Alltag kennen und folglich auch richtig interpretieren können sollten.

Regenwahrscheinlichkeit (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 154)

Anschließend gibt es vier Arbeitsaufträge, von denen eine im Buch sorgfältig aufbereitet wird und die wichtigsten neuen Begriffe und Zusammenhänge enthält. In diesem Fall soll mit einem Legostein gewürfelt und die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Seiten vorher geschätzt werden. An dieser Stelle im Buch gibt es eine Erinnerung für die SchülerInnen, wie relative Häufigkeiten ermittelt werden. Der Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten sollte ebenfalls schon aus Band 3 bekannt sein. Folgende Merksätze werden im Zuge des Arbeitsauftrags erarbeitet.

Merksätze (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 158f)

Die **Wahrscheinlichkeit** eines Ergebnisses ist eine Zahl zwischen 0 und 1. Sie kann in Prozent, als Bruch oder Dezimalzahl angegeben werden.
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Zufallsversuch ergibt 1 bzw. 100 %.
Wahrscheinlichkeiten dienen zur **Vorhersage** relativer Häufigkeiten.
Die Zuordnung, die jedem Ergebnis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung.** Sie wird oft als Tabelle angegeben.

Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn sie bei einem oft durchgeführten Experiment nahe bei den relativen Häufigkeiten liegen.

Empirisches Gesetz der großen Zahlen
Die relativen Häufigkeiten stabilisieren sich mit wachsender Anzahl von Versuchen.

Hier wird wiederum explizit erwähnt, dass Wahrscheinlichkeiten in Prozent, als Brüche oder Dezimalzahlen angegeben werden können. In diesem Buch wird – im Unterschied zu den anderen Schulbüchern – auch schon der Begriff *Wahrscheinlichkeitsverteilung* eingeführt.
„Ähnlich wie bei einer Funktion wird hier jedem Ergebnis eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.“ (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S.158)

In den Übungsbeispielen kommt dieser Begriff dann aber kaum mehr vor. Es wird ausschließlich von „Tabellen“ gesprochen. Somit ist es vorstellbar, dass sich die SchülerInnen den Begriff *Wahrscheinlichkeitsverteilung* nicht einprägen werden.
Die Erklärungen anhand der Ergebnisse des Arbeitsauftrags sind verständlich und ausführlich. Der Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten wird anhand von Tabellen und einem Diagramm noch einmal deutlich gemacht. Im Anschluss kann aus zahlreichen Aufgaben gewählt werden, um das bisher Gelernte zu trainieren und anzuwenden. Unter den Aufgaben werden auch Urnenbeispiele, Simulation und Stichproben (Beispiel 23) eingeführt, ohne explizit erklärt zu werden. Sollen diese Begriffe im weiteren Verlauf des Unterrichts zur Anwendung kommen, sollten diese Beispiele ausgewählt und durch die Lehrkraft unbedingt genauer erklärt werden. Eine Erklärung, wie man mit dem Taschenrechner Zufallszahlen erzeugen kann, können sich die SchülerInnen auch auf der Homepage des Verlags durchlesen.

Beispiel 23 (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 164)

Schon gewusst?
Der Steinkrebs, die kleinste europäische Flusskrebsart, gilt als vom Aussterben bedroht.

164-1

23 Zur Abschätzung der Zahl der Steinkrebse in einem Gewässer kann man folgendermaßen vorgehen: Man fängt Krebse, zählt und markiert sie (z. B. mit einem wasserfesten Stift oder Nagelack) und lässt sie wieder frei. Einige Tage später fängt man wieder Krebse auf dieselbe Weise und bestimmt davon den Anteil der markierten Krebse.

a) Bei einer Zählung fing man 18 Krebse und markierte sie. Unter den 23 Krebsen, die man später fing, waren 2 Markierte zu finden. Schätze damit die vermutliche Anzahl von Krebsen in diesem Gewässer ab.

b) Überlege dir, wie man mit verschiedenfarbigen Kugeln eine derartige Untersuchung simulieren kann.

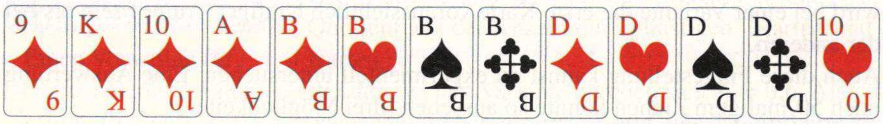
Zu diesem Beispiel können sich die SchülerInnen im Internet zusätzliche Informationen über Steinkrebse durchlesen.

Im nächsten Kapitel *Berechnen von Wahrscheinlichkeiten, Laplace-Experimente* gibt es wiederum Arbeitsaufträge, von denen der erste dazu genutzt wird neue Begriffe einzuführen.

Doppelkopfspiel (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 165)

1 Doppelkopfspiel

Wie bei vielen Kartenspielen gibt es auch beim Doppelkopf mehrere Varianten. Bei der ersten Variante werden aus zwei Skatspielen mit je 32 Karten alle 7er und 8er entfernt, bei der zweiten Variante werden zusätzlich die 9er herausgenommen. Unten siehst du die Trümpfe des Spiels in aufsteigender Reihenfolge. Alle anderen Karten nennt man Fehlfarben. 165-1



Karo 9, Karo König, Karo 10, Karo As, Karo Bube, Herz Bube, Pik Bube, Kreuz Bube, Karo Dame, Herz Dame, Pik Dame, Kreuz Dame, Herz 10

Bei welcher Variante ist es wahrscheinlicher, als erste Karte eines gut gemischten Kartenstapels eine Trumpfkarte zu ziehen?
Besonders wichtige Trumpfkarten sind die Kreuz Damen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die oberste Karte des Stapels keine Kreuz Dame ist?

Dieser Arbeitsauftrag wird im Anschluss dazu verwendet auf das Thema Laplace-Experimente einzugehen. Die anderen beiden Arbeitsaufträge behandeln verschiedene Spielwürfel und das Roulettespiel. Bei der Einführung in dieses Thema würde ich mir für die SchülerInnen eine interessantere Aufgabenstellung wünschen. Es ist sehr schade, dass fast ausschließlich Beispiele aus dem Bereich der Glücksspiele gewählt werden. Natürlich lassen sich anhand dieser Beispiele Laplace-Experimente gut erklären, andererseits bin ich davon überzeugt, dass die eintönige Aufgabenauswahl für die Motivation der SchülerInnen nicht förderlich ist.

Merksätze (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 166f)

Definiton

Laplace-Experimente
Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, werden Laplace-Experimente genannt.

Bei einem Laplace-Experiment mit n verschiedenen Ergebnissen ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis gleich $\frac{1}{n}$.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis, welches aus mehreren Ergebnissen besteht, erhältst du, indem du die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse addierst (Summenregel).

Bei einem Laplace-Experiment berechnet man die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis gemäß

$$p = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}.$$

Ein **Ereignis** ist eine Zusammenfassung von Ergebnissen eines Zufallsversuchs.
Alle Ergebnisse, die nicht zu einem bestimmten Ereignis gehören, bilden das dazugehörende **Gegenereignis**.
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten von Ereignis und Gegenereignis ergibt 1.

Die Einführung der Begriffe erfolgt verständlich und anschaulich. Zusätzlich werden auch Informationen zur Person *Pierre Simon de Laplace* angeboten. Etwas unverständlich ist, warum die Begriffe *Ereignis* und *Ergebnis* erst beschrieben werden, nachdem sie bereits in den anderen Merksätzen verwendet wurden. Wenn sich der Lehrende Zeit nimmt diesen Arbeitsauftrag gemeinsam mit den SchülerInnen zu bearbeiten, ist das sicher eine gute Vorbereitung auf die folgenden Übungsaufgaben. Die SchülerInnen alleine oder in Partner- oder Gruppenarbeit den vollständig erarbeiteten Arbeitsauftrag selbstständig durcharbeiten zu lassen ist meiner Meinung nach wohl weniger zielführend, da „durchgerechnete Beispiele" oft wenig Motivation in den SchülerInnen hervorrufen. In Verbindung mit der ohnehin eher langweiligen Aufgabenstellung wird dieser Aspekt wohl noch zusätzlich verstärkt. Die zahlreichen Übungsaufgaben in diesem Kapitel sind glücklicherweise abwechslungsreicher und fordern die SchülerInnen auch zum Begründen ihrer Aussagen auf.

Beispiel 10 (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 168)

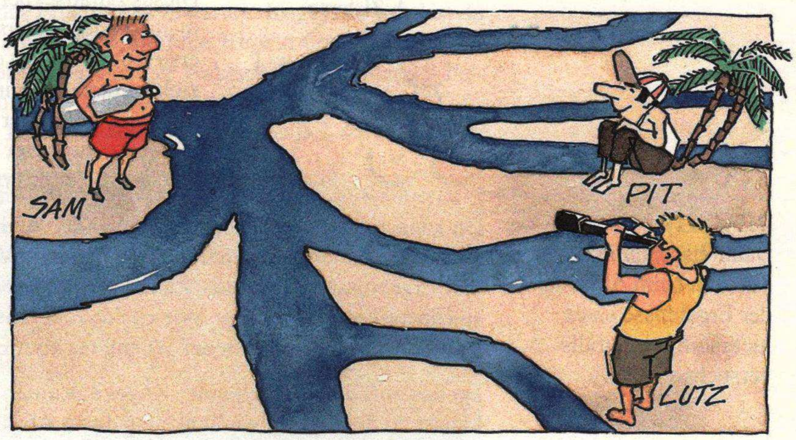
10 Gib alle möglichen Ergebnisse an und entscheide, ob ein Laplace-Experiment vorliegt.
a) Ein Elfmeter wird geschossen.
b) Eine Münze wird geworfen.
c) Ein Dartpfeil wird auf eine Scheibe geworfen.

Im Kapitel *Mehrstufige Zufallsversuche* wird der Arbeitsauftrag 2 *Kugeln ziehen* zur Begriffseinführung herangezogen. Dies ist wiederum etwas schade, da der Arbeitsauftrag 1 *Flaschenpost* eine interessantere Aufgabenstellung und eine Alternative zu den klassischen Urnenbeispielen bietet.

Flaschenpost und Kugeln ziehen (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 171)

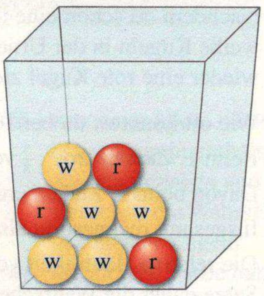
1 Flaschenpost

Sam wohnt auf einer Insel oberhalb des Flussdeltas.
Er will wieder mal eine Flaschenpost verschicken. Leider teilt sich der Fluss mehrfach. Bei jeder Gabelung fließt 60% des Flusswassers nach rechts, 40% fließt nach links.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer seiner beiden Freunde Lutz oder Pit die Post bekommt?



2 Kugeln ziehen

Stell dir vor, du nimmst aus der Urne zufällig eine Kugel heraus und legst sie vor dich hin. Danach nimmst du noch eine weitere Kugel zufällig heraus.
Welche Farbkombinationen sind möglich?
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zwei rote Kugeln bzw. zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden.



Dies ist zu einem großen Teil eine Wiederholung des Stoffes aus Band 3. Lediglich die Pfad- und Summenregel werden an dieser Stelle völlig neu eingeführt. Die angebotenen Aufgaben sind wiederum sehr abwechslungsreich und ganz unterschiedlich anspruchsvoll.

Beispiele 8 und 9 (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 174)

8 Beim Spiel „Schweinerei" gibt es fünf Möglichkeiten, wie ein Schweinchen fallen kann. Nun werden zwei Schweinchen nacheinander je tausendmal geworfen. Wie oft etwa werden die folgenden Ergebnisse auftreten?

a) Haxe-Haxe
b) Suhle-Backe
c) Sau-Schnauze
d) Mindestens einmal Sau

9 Ein Bauteil, das häufig in Fahrzeugen eingesetzt wird, hat eine Ausfallswahrscheinlichkeit von 0,00001 pro Jahr.

a) Interpretiere diese Wahrscheinlichkeit.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Bauteil in einem Jahr in mindestens einem Fahrzeug ausfällt, wenn es in 10000 Fahrzeugen eingesetzt wurde.

Im Beispiel 9 sollte der Begriff „Ausfallwahrscheinlichkeit“ mit den SchülerInnen eventuell noch besprochen werden. Interessant ist auch folgende Aufgabe, bei der sich die SchülerInnen im Internet zusätzlich näher über das Leben des berühmten russischen Schriftstellers F. M. Dostojewski informieren können.

Beispiel 23 (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 177)

23 F. M. Dostojewski schreibt in seinem Roman „Der Spieler“:
„Das Glück heftet sich zum Beispiel an Rot und bleibt bei dieser Farbe zehn-, selbst fünfzehnmal. Ich hatte erst vor zwei Tagen gehört, dass Rot in der vorigen Woche zweiundzwanzigmal hintereinander gekommen sei; beim Roulett weiß sich an dergleichen niemand zu erinnern, und man erzählte es sich mit Erstaunen. Selbstverständlich wenden sich alle Spieler sofort von Rot ab, und zum Beispiel schon nach zehn Malen wagt fast niemand mehr auf diese Farbe zu setzen.“ Nimm dazu Stellung. 177-1

Fazit

Sowohl Band 3, als auch Band 4 dieser Schulbuchreihe sind übersichtlich und optisch ansprechend gestaltet. Meiner Meinung nach ist der Aufbau im Band 3 für SchülerInnen dieser Altersstufe recht ansprechend. In modifizierter Form würde sich diese Idee sicher gut eignen, SchülerInnen der Sekundarstufe I durch einen solchen Exkurs erste Eindrücke zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zu vermitteln. Bei einigen Aufgaben hätte man jedoch die Laplace-Wahrscheinlichkeit gut einführen können. Davon wurde in diesem Buch allerdings abgesehen. Ebenfalls etwas eintönig ist im Band 3 (themenbedingt) die Auswahl der Übungsaufgaben. Allerdings lassen sich diese gut dazu nutzen die Bruch- und Prozentrechnung zu wiederholen oder zu vertiefen. Die Erklärung des Zusammenhangs von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten wird im Band 3 meiner Meinung nach nicht deutlich. Es werden keine Diagramme oder andere Erklärungsmöglichkeiten verwendet. Im Band 4, in dem dieses Thema eigentlich nur mehr wiederholt wird, wird dieser Zusammenhang viel anschaulicher erklärt.

Positiv anzumerken ist, dass in diesen beiden Bänden explizit darauf hingewiesen wird, dass es drei Möglichkeiten gibt Wahrscheinlichkeiten anzugeben: Brüche, Prozente und Dezimalzahlen. In den Übungsaufgaben werden auch alle drei Möglichkeiten verwendet. Dieser Aspekt fehlt in allen anderen Schulbüchern, die in dieser Arbeit vorgestellt werden. Zusätzlich sind Aufgaben zu finden, mit deren Hilfe man auf den Aspekt „Der Zufall hat kein Gedächtnis" näher eingehen könnte (vgl. Beispiel 7, S. 111 dieser Arbeit).

Weiters gibt es Aufgaben, die eine Verbindung zu ganz anderen Themengebieten der Mathematik herstellen (vgl. Beispiel 31 – Näherungswerte für π) und somit für die SchülerInnen wirklich wertvoll sind. Erwähnenswert ist auch, dass die SchülerInnen die Möglichkeit haben, sich auf der Homepage des Verlags mit Hilfe von Codes zusätzliche Informationen zu den Aufgaben zu besorgen. Insbesondere das Erstellen von Zufallszahlen mit Hilfe des Taschenrechners wird im Internet erklärt. Bei einigen ausgewählten Beispielen kann man diese Informationen sicher vernünftig nutzen.

Ein weiterer positiver Aspekt sind die Themenseiten in jedem Kapitel, die eine Verbindung zum Alltag oder der Geschichte der Mathematik herstellen, und somit gut für Referate oder Ähnliches genutzt werden können. Die (ausgearbeiteten) Arbeitsaufträge sind so angelegt, dass daran alle neuen Begriffe des jeweiligen Kapitels gut erklärt werden können. Mein größter Kritikpunkt ist allerdings, dass diese Arbeitsaufträge thematisch nicht ansprechend sind. Da der neue Stoff aber ausschließlich anhand dieser Aufträge erklärt wird, haben die SchülerInnen (und auch die Lehrkraft) keine Möglichkeit eine für sie ansprechendere Aufgabe zu wählen. Besonders die Einführung der Laplace- Wahrscheinlichkeit erfolgt an einem langweiligen Beispiel.

4.2.6 Mathematik-Lehrbücher für die 6. Klasse (10. Schulstufe) in Österreich

Wie bereits mehrfach erwähnt lernen österreichische SchülerInnen den Begriff *Wahrscheinlichkeit* erst in der 10. Schulstufe kennen. In diesem Kapitel werden drei aktuell in Gymnasien verwendete Mathematik-Lehrbücher kurz vorgestellt und Unterschiede zum Vorgehen in den oben beschriebenen Schulbüchern aus Deutschland aufgezeigt.

Dimensionen Mathematik 6

In diesem Schulbuch wird ein großes Kapitel dem Thema *Wahrscheinlichkeit* gewidmet. Zu Beginn werden die Begriffe *Zufallsversuche*, *Ergebnis(-menge)* und *Ereignis* definiert. Die SchülerInnen werden darauf hingewiesen, dass erst im zweiten Kapitel eine Definition des Begriffs *Wahrscheinlichkeit* erfolgt. An dieser Stelle wird die Wahrscheinlichkeit als *„das Maß für die Erwartung, mit der ein Ereignis eintritt"* (Dimensionen Mathematik 6 2010, S.125) bezeichnet und verschiedene Beispiele zu Urnen und Würfeln angeboten.

Im zweiten Abschnitt wird die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe relativer Häufigkeiten eingeführt. Anhand der Definitionen kann man auf den ersten Blick feststellen, dass die Formulierungen viel mehr mathematisches Vorwissen und das Beherrschen der „Sprache der Mathematik" voraussetzen als das in den Schulbüchern für die Sekundarstufe I der Fall ist.

Definition (Dimensionen Mathematik 6 2010, S.129 und 130)

„Wird ein Zufallsexperiment unter den gleichen Bedingungen n-mal wiederholt und tritt dabei ein bestimmtes Ereignis E genau k-mal auf, so nennt man $h_n(E)=\frac{k}{n}$ *die* ***relative Häufigkeit*** *des Ereignisses E."*

„Wird ein Zufallsexperiment unter den gleichen Bedingungen n-mal wiederholt, so ***nähert sich die relative Häufigkeit*** $\boldsymbol{h_n(E)}$ *eines Ereignisses E mit zunehmender Anzahl von Wiederholungen der* ***Wahrscheinlichkeit von E.***

$$P(E)=\lim_{n\to\infty} h_n(E)$$

Diese Formel ist als Definition für die Wahrscheinlichkeit ungenau, daher ist $h_n(E)$ *ein Näherungswert für P(E).*

$$P(E) \approx h_n(E)\text{“}$$

Die letzte Aussage ist verwirrend. Sie sollte den SchülerInnen nicht ohne weitere Erklärung vorgesetzt, wenn nicht sogar ganz weggelassen werden. Der Zusammenhang relative Häufigkeiten-Wahrscheinlichkeiten wird anschließend anhand eines Beispiels und der Darstellung in einem Diagramm anschaulich und verständlich erklärt. Zusätzlich wird darauf hingewiesen, dass die relative Häufigkeit (für große n) ein guter Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit ist und umgekehrt, dass man für große n relative Häufigkeiten erwarten kann, *„die nahe bei der Wahrscheinlichkeit liegen"*.

Der (wichtige) Aspekt, dass man nicht nur Wahrscheinlichkeiten mit relativen Häufigkeiten abschätzen, sondern auch umgekehrt die erwarteten relativen Häufigkeiten mit Wahrscheinlichkeiten „vorhersagen" kann, wird in den Schulbüchern für die Sekundarstufe I in Deutschland völlig außer Acht gelassen.

Im dritten Abschnitt *Wahrscheinlichkeiten als relativer Anteil* folgt eine Einführung der Laplace-Wahrscheinlichkeit mit dem wichtigen Hinweis an die SchülerInnen, dass zuerst genau überlegt werden muss, ob auch wirklich alle Ausgänge gleich wahrscheinlich sind. Die Übungsbeispiele dazu wurden sowohl aus dem Bereich der Glücksspiele, als auch aus anderen Situationen des täglichen Lebens gewählt. Die Beispiele unterscheiden sich eher in ihrer Formulierung als in ihrem Inhalt von den Beispielen für die Sekundarstufe I in den deutschen Schulbüchern.

Aufgabe 492 (Dimensionen Mathematik 6 2010, S.137)

Zwei Prüfer A und B nehmen praktische Fahrprüfungen ab.

	Kandidaten		Kandidatinnen	
	Bestanden	Durchgefallen	Bestanden	Durchgefallen
Prüfer A	10	1	69	10
Prüfer B	23	12	13	12

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (1) für eine Frau, (2) für einen Mann,
a) bei Prüfer A zu bestehen,
b) bei Prüfer B zu bestehen,
c) unabhängig vom Prüfer die praktische Fahrprüfung zu bestehen?
d) Vergleiche die Ergebnisse von a) und b) mit den Ergebnissen von c).
Welcher Widerspruch scheint hier zu bestehen?

Dieser Effekt, der besagt, dass Ergebnisse von Teilgruppen nicht immer auf die Gesamtzahl übertragen werden können, wird **Simpson-Paradoxon**[3] genannt. Er ist unter anderem bei der Interpretation von Daten in der Medizin und den Sozialwissenschaften von Bedeutung.

Würde man in dieser Aufgabe die Wortwahl eventuell ein wenig altersgerechter gestalten, wäre es für SchülerInnen der Sekundarstufe I mit dem entsprechenden Vorwissen sicher zu lösen.

Im (kurzen) Abschnitt 4 Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen wird erklärt, dass in manchen Fällen weder relativer Anteil noch relative Häufigkeit ermittelt werden können.

„Als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E, […], wird der Grad des subjektiven Vertrauens in das Eintreten des Ereignisses genommen. Diese Methode ist jedoch umstritten.“ (Dimensionen Mathematik 6 2010, S.138)

Beispiel 495 (Dimensionen Mathematik 6 2010, S.138)

495 a) Wie wurden folgende Aussagen über Wahrscheinlichkeiten ermittelt?
b) Gebt Beispiele für eine Wahrscheinlichkeit als Grad des subjektiven Vertrauens an.

Über 1700 Physikerinnen und Physiker haben einen Appell gegen die US-Atomwaffenpolitik unterzeichnet.
Der Einsatz einer Atomwaffe für einen Präventivschlag und gegen einen Gegner, der nicht in Besitz von Atomwaffen ist, bedeutet die Überschreitung einer Trennlinie und lässt die bislang klare Unterscheidung zwischen nuklearen und nicht-nuklearen Waffen verschwimmen. Damit erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass auch andere künftig von Atomwaffen Gebrauch machen.
Quelle: http://sandimgetriebe.attac.at/2417.html September 2005

Auch dieser Aspekt der Wahrscheinlichkeit findet in den deutschen Schulbüchern für die Sekundarstufe I keine Erwähnung. Mit entsprechender Formulierung oder anhand eines anschaulichen Beispiels könnte die Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen aber sicher auch schon in der Unterstufe thematisiert werden. Folgende Erklärung könnte man den SchülerInnen auch schon in einer früheren Altersstufe näherbringen.

Erklärung (Dimensionen Mathematik 6 2010, S.138)

Um einen Schätzwert für derartige Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, werden Methoden verwendet, die auf bisherigen Erfahrungen basieren:
– Intuitive Schätzung: „Ich schätze die Gewinnchance des Pferdes auf $\frac{1}{10}$.“
– Analogieschlüsse: „Das Medikament wirkt bei Tieren, also auch bei Menschen.“
– Schätzungen mithilfe statistischer Methoden: Aus einigen Versuchen wird auf die Wahrscheinlichkeit geschlossen.

Anschließend folgen zwei Kapitel zur Multiplikations- und Additionsregel, die anhand von Baumdiagrammen erklärt werden. Diese Zugangsweise unterscheidet sich im Wesentlichen nicht von denen, die in den oben beschriebenen Schulbüchern für die Sekundarstufe I verwendet wurden.

In Abschnitt 7 und 8 werden *Bedingte Wahrscheinlichkeiten* und das *Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten/Der Satz von Bayes* behandelt. Im Zusammenhang damit wird auch die Vierfeldertafel als Hilfsmittel vorgestellt. Ein Vorschlag, wie dieses Thema bereits für die Sekundarstufe I aufbereitet werden kann, ist im Kapitel 4.1.3 dieser Arbeit zu finden.

Mathematik 6

Im Schulbuch Mathematik 6 wird im Kapitel *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik* damit begonnen, Begriffe aus der *Beschreibenden Statistik* zu wiederholen und einige Beispiele zu diesem Thema zu bearbeiten. Die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erfolgt zuerst über den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit. Zu diesem Zweck sollen sich die SchülerInnen Gedanken zu einem Münzwurf mit zwei Münzen machen und anhand einer Vierfeldertafel erkennen, dass es vier mögliche Ereignisse gibt, und nicht, wie es auf den ersten Blick scheint, nur drei. (Kopf und Adler, zweimal Adler, zweimal Kopf) An dieser Stelle folgt auch der wichtige Hinweis, dass Fehler in der Wahrscheinlichkeitsrechnung oft durch falsches Zählen entstehen.

„Bei diesem so genannten frequentistischen oder auch statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff unterstellt man, dass die relative Häufigkeit der bestmögliche Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit ist, und umgekehrt die Wahrscheinlichkeit der bestmögliche Prognosewert für die relative Häufigkeit.“ (Mathematik 6 2010, S.169)

In dieser Beschreibung wird wiederum deutlich gemacht, dass relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten in einer wechselseitigen Beziehung stehen. Interessant ist, dass der Aspekt, dass auch Wahrscheinlichkeit als Prognose für die relative Häufigkeit herangezogen werden kann, nur in den österreichischen Schulbüchern, nicht jedoch in den deutschen explizit erwähnt wird. Das ist schade, da diese Erkenntnis wichtig ist für ein profundes Verständnis der Zusammenhänge. Ebenfalls positiv im Schulbuch Mathematik 6 ist, dass wiederum darauf hingewiesen wird, dass das Symbol **P** bzw. **p** nicht nur zur Kennzeichnung der Wahrscheinlichkeit, sondern auch für den relativen Anteil bzw. den prozentualen Anteil dient. Leider werden die SchülerInnen in diesem Buch nicht dazu animiert den Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten selbst zu erfahren (zum Beispiel durch ein einfaches Experiment). Außerdem wäre auch eine Darstellung in einer Tabelle oder in einem Diagramm wünschenswert.

Ähnlich wie im oben beschriebenen Schulbuch Dimensionen Mathematik 6 folgt auch in diesem Buch der Hinweis, dass es manchmal nicht möglich ist, Wahrscheinlichkeiten über Experimente zu bestimmen. In diesem Fall kommt die Wahrscheinlichkeit als Maß für unser subjektives Vertrauen zur Anwendung. Dieser Aspekt bleibt in den deutschen Schulbüchern für die Sekundarstufe I ebenfalls völlig unerwähnt.

Im zweiten Kapitel *Laplace´sche Zufallsexperimente mengentheoretisch beschreiben* ist besonders interessant, dass hier ein Zugang über Mengen gewählt wurde (ähnlich wie im Schulbuch Fokus Mathematik Ausgabe Bayern, siehe Kapitel 4.2.4).

Definition (Mathematik 6 2010, S.172)

Regel

LAPLACE'sche Wahrscheinlichkeitsregel: Lässt sich ein Ereignis A aus den Versuchsergebnissen ω eines LAPLACE'schen Experiments mit der Ergebnismenge Ω bilden (ist also $A \subseteq \Omega$), so gilt:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Versuchsergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Versuchsergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{g}{m}$$

Bemerkung:
Ist $A = \{\}$, so heißt A **unmögliches Ereignis:** $P(\{\}) = 0$
Ist $A = \Omega$, so heißt A **sicheres Ereignis:** $P(\Omega) = 1$

Beispiel C

Welche Wahrscheinlichkeiten haben die folgenden Ereignisse beim Würfeln? Die Augenzahl ist a gerade, b ≤ 5, c > 5, d negativ, e ein Teiler von 60, f kein Teiler von 60.

Lösung:
a $A = \{2; 4; 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
b $B = \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{6}$
c $C = \{6\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{6}$
d $D = \{\} \Rightarrow P(D) = \frac{0}{6} = 0$ (Das Ereignis D ist unmöglich.)
e $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega \Rightarrow P(E) = \frac{6}{6} = 1$ (Das Ereignis E ist sicher.)
f $F = \{\} \Rightarrow P(F) = \frac{0}{6} = 0$

Mir erscheint diese Zugangsweise sehr verständlich und gut durchdacht. Durch die Beschreibung durch Mengen entsteht eine recht vollständige Vorstellung zu den Begriffen *Ergebnismenge*, *Elementarereignis*, *Gegenereignis* usw.

Im anschließenden Kapitel werden stochastische Vorgänge mit Zufallsgeräten und Zufallszahlen, zum Beispiel mit Hilfe einer Urne, simuliert. In den dazugehörigen Aufgaben finden sich einige interessante Beispiele, von denen manche bereits in der Sekundarstufe I behandelt werden könnten, andere jedoch aufgrund ihrer Formulierung oder der dafür benötigten Vorkenntnisse nicht geeignet sind.

Aufgaben 742 und 751 (Mathematik 6 2010, S.174)

742 Beim Werfen eines Würfels gewinnt der Spieler A, wenn die angegebene Gewinnregel zutrifft, andernfalls der Spieler B. Ist das Spiel fair?
a Der Würfel zeigt eine gerade Augenzahl.
b Die Augenzahl ist größer als 4.
c Es werden mindestens 2, höchstens aber 5 Augen geworfen.
d Es werden mehr als 1, aber weniger als 5 Augen geworfen.

751 ▸▸ Der im TI-59-Taschenrechner eingebaute Pseudo-Zufallszahlen-Generator baute auf folgender Rekursion auf: $x_{i+1} = (24298 \cdot x_i + 99991) \bmod 199017$, wobei der Startwert x_1 größer-gleich 0 und kleiner als 199017 gewählt werden konnte. Berechne die ersten fünf Glieder der Folge $\langle x_n \rangle$ für a $x_1 = 1$, b $x_1 = 10000$!

Im Anschluss werden anhand von Baumdiagrammen das Ziehen (un)geordneter Stichproben mit und ohne Zurücklegen und die Pfadregeln erklärt. Unter diesen Beispielen finden sich wiederum viele, die durchaus bereits für die Sekundarstufe I denkbar wären, andere hingegen gewisse Vorkenntnisse voraussetzen.

Aufgaben 753 und 765 (Mathematik 6 2010, S.177 und 178)

753 Im Zuge einer Werbeaktion für ein Mundwasser wird folgendes Gewinnspiel veranstaltet: In einer Urne liegen vier – bis auf die Beschriftung gleiche – Kugeln: O, D, O, L. Man hat – natürlich „blind" – eine Kugel nach der anderen a ohne, b mit Zurücklegen der gezogenen Kugel zu ziehen. Zieht man auf diese Weise das Wort ODOL, so erhält man eine Flasche Mundwasser gratis. Wie groß ist die Gewinnchance bei einem Spiel?

765 Ein Affe tippt auf den 11 Tasten (10 Ziffern + Komma) des Ziffernblocks eines Computers 20-mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei die Folge der ersten a 20 Zeichen von π ▸▸, b 16 Zeichen von e ▸▸ tippt? (Überlege, welche Voraussetzungen stillschweigend gemacht werden!)

Die Aufgabe 753 ist mit Hilfe eines Baumdiagramms einfach zu lösen. Für die Aufgabe 765 sollten zumindest im Vorhinein die Zahlen π (wird laut österreichischem Lehrplan in der 8. Schulstufe eingeführt) und e näher erläutert werden. Im anschließenden Kapitel *Zählformeln (Kombinatorik)* spielt der Binomialkoeffizient eine große Rolle. Somit ist auch dieses Thema nicht unbedingt für eine frühere Behandlung im Unterricht geeignet. Anschließend werden *bedingte Wahrscheinlichkeiten* und der *Satz von Bayes* behandelt, sowie ein Ausblick auf unendliche Ergebnismengen erarbeitet.

Mathematik verstehen 6

Im Schulbuch Mathematik verstehen 6 werden im ersten Kapitel zum Thema *Wahrscheinlichkeit* Beispiele von Zufallsversuchen genannt. Folgende Definitionen sind dazu im Buch:

„Wenn nichts anderes hinzugesagt wird, verstehen wir unter einer zufälligen Auswahl stets eine Auswahl, bei der alle in Frage kommenden Elemente die gleiche Chance haben, ausgewählt zu werden. Zufällige Auswahl wird stets angenommen, solange kein Grund vorliegt, etwas anderes anzunehmen." (Mathematik verstehen 6 2010, S.234)

„Eine Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für eine Erwartung. In der Mathematik drückt man den Grad der Erwartung durch eine reelle Zahl aus dem Intervall [0; 1] aus." (Mathematik verstehen 6 2010, S.234)

Diese beiden Aussagen sind meiner Meinung nach zu wenig klar formuliert. Insbesondere die erste Aussage ist verwirrend, da hier im Vorhinein Zufallsversuche als *zufällige Auswahl* eines Elements aus einer bestimmten Menge definiert werden. Erst im Anschluss an die zweite obige Aussage werden dann drei Methoden vorgestellt, um zu einem konkreten Zahlenwert, *„der sich als Maß für eine Erwartung eignet“*, zu kommen.

- Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil
- Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen

Bei der Einführung der Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil wird der Begriff *Versuchsausfall* verwendet, der in keinem der anderen beschriebenen Schulbücher zu finden ist. Dies könnte zu Schwierigkeiten führen, wenn SchülerInnen Beispiele aus anderen Büchern oder Arbeitsblättern mit der üblichen Bezeichnung (Ergebnis) lösen sollen. Die Interpretation der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit erfolgt folgendermaßen:

„Ein Zufallsversuch werde n-mal unter den gleichen Bedingungen durchgeführt (n groß). Als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses E kann man (mit einer gewissen Unsicherheit) die relative Häufigkeit von E unter diesen n Versuchen verwenden, dh.:

$P(E) \approx h_n(E)$*“* (Mathematik verstehen 6 2010, S.239)

An dieser Stelle wird nicht darauf eingegangen was die Aussage *„mit einer gewissen Unsicherheit“* bedeuten könnte. Dies wäre für das Verständnis der SchülerInnen aber sicher von Vorteil. Auch auf eine Unterstützung in Form eines Diagramms wird in diesem Schulbuch verzichtet. Im Allgemeinen kann man über die angebotenen Übungsaufgaben in diesem Schulbuch sagen, dass sie sich in ihrem Schwierigkeitsgrad nicht wesentlich von den Aufgaben für die Sekundarstufe I in deutschen Schulbüchern unterscheiden.

Beispiel 13.17 (Mathematik verstehen 6 2010, S.240)

13.17 Legt in eine Schachtel drei Lose, von denen eines ein Gewinnlos und die anderen beiden Nieten sind! Ein Los wird blind gezogen.
Es sei E das Ereignis, dass ein Gewinnlos gezogen wird.
a) Wie groß ist P(E), wenn man den relativen Anteil zugrunde legt?
b) Führt eine Versuchsserie durch! (Jede Schülerin und jeder Schüler soll 20-mal ziehen.) Gilt $h_n(E) \approx P(E)$?

Auch in diesem Schulbuch ist wiederum der Aspekt Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen zu finden.

Beispiel 13.24 (Mathematik verstehen 6 2010, S.242)

13.24 Gib ein weiteres Beispiel für den Fall an, dass eine Wahrscheinlichkeit

1) nicht als relativer Anteil, wohl aber als relative Häufigkeit ermittelt werden kann,

2) weder als relativer Anteil noch als relative Häufigkeit, wohl aber als subjektives Vertrauen ermittelt werden kann!

Das Einführungsbeispiel, das im Kapitel *Wahrscheinlichkeit und Informationsstand – bedingte Wahrscheinlichkeit* zu finden ist, würde sich auch schon für eine Behandlung in der Sekundarstufe I anbieten. Dies trifft auf einige Aufgaben in diesem Kapitel zu, da sie (natürlich mit entsprechendem Vorwissen) nicht allzu kompliziert formuliert sind.

Beispiel 13.23 (Mathematik verstehen 6 2010, S.245)

13.32 Die 628 Beschäftigten einer Firma verteilen sich gemäß nebenstehender Tabelle auf die Gruppen Frauen/Männer bzw. Pendler/Nichtpendler. Eine Person X wird zufällig ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

	Frauen	Männer	Gesamt
Pendler	201	189	390
Nichtpendler	98	140	238
Gesamt	299	329	628

1) X Pendler ist,

2) X Pendler ist, wenn man bereits weiß, dass eine Frau ausgewählt wurde,

3) X ist Pendler ist, wenn man bereits weiß, dass ein Mann ausgewählt wurde!

Lösung: 1) P(X ist Pendler.) $= \frac{390}{628} \approx 0{,}62$

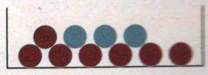
2) P(X ist Pendler, wenn eine Frau ausgewählt wurde.) $= \frac{201}{299} \approx 0{,}67$

3) P(X ist Pendler, wenn ein Mann ausgewählt wurde.) $= \frac{189}{329} \approx 0{,}57$

Erst im Anschluss an das Kapitel *Bedingte Wahrscheinlichkeiten* folgt das *Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten*. Diese Reihenfolge erscheint mir persönlich nicht besonders „natürlich“. Anhand von Baumdiagrammen werden die Multiplikations- und Additionsregel sowie das Ziehen mit und ohne Zurücklegen behandelt. Die Übungsaufgaben in diesem Kapitel sind ebenfalls denen aus den deutschen Schulbüchern für die Sekundarstufe I sehr ähnlich und können meiner Meinung nach problemlos schon in einer früheren Schulstufe besprochen werden.

Beispiel 14.35 (Mathematik verstehen 6 2010, S.257)

14.35 Aus der nebenstehenden Urne werden vier Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, dass dabei zwei rote und zwei blaue Kugeln gezogen werden?



Lösung:

- Das Ereignis E setzt sich aus den folgenden sechs Zugfolgen zusammen: (r, r, b, b), (r, b, r, b), (r, b, b, r), (b, r, r, b), (b, r, b, r), (b, b, r, r)
- Der Zugfolge (r, r, b, b), dh. zuerst zwei rote und dann zwei blaue Kugeln, entspricht der rechts abgebildete Weg.

$$\xrightarrow[\frac{7}{10}]{} r \xrightarrow[\frac{6}{9}]{} r \xrightarrow[\frac{3}{8}]{} b \xrightarrow[\frac{2}{7}]{} b$$

- Überlege selbst, dass auch jeder der fünf weiteren Wege mit zwei roten und zwei blauen Kugeln die gleich große Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$ hat.
- Wir erhalten somit: $P(E) = \underbrace{6}_{\text{Anzahl der Wege}} \cdot \underbrace{\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}}_{\text{Wahrscheinlichkeit eines Wegs}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

In diesem Beispiel wäre die zusätzliche Darstellung anhand eines Baumdiagramms sicher (nicht nur für SchülerInnen der Sekundarstufe I) hilfreich.

Fazit

Allgemein kann man sagen, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung in den deutschen Schulbüchern für die Sekundarstufe I einen wichtigen Platz einnimmt. Dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Vergleich zu anderen Themengebieten der Mathematik nicht benachteiligt wird, kann man bereits an den dafür aufgewendeten Seitenzahlen in den Büchern erkennen. In manchen Büchern kann man auch Bemühungen erkennen das Thema mit anderen Stoffgebieten zu verknüpfen. Meiner Meinung nach kommt jedoch die Betonung auf den Zusammenhang sowohl mit der Bruch- als auch mit der Prozentrechnung ein wenig zu kurz. Lediglich im Schulbuch Fokus Mathematik Ausgabe Baden-Württemberg wird darauf explizit hingewiesen. Viele Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung würden sich allerdings gut zum Wiederholen und Vertiefen dieser Stoffgebiete eignen. Dieser Aspekt fällt in der Behandlung des Themas Wahrscheinlichkeit in der 10. Schulstufe natürlich ohnehin nicht mehr so stark ins Gewicht, da die SchülerInnen zu diesem Zeitpunkt Bruch- und Prozentrechnung bereits verinnerlicht haben sollten.

Positiv ist, dass der Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit in einigen Büchern recht anschaulich und verständlich dargebracht wird. Anlass zur Kritik gibt jedoch der Aspekt, dass dieser Zusammenhang in den deutschen Schulbüchern nur „einseitig" betont wird.

Es wird erklärt, dass man mit relativen Häufigkeiten Wahrscheinlichkeiten abschätzen kann. Der umgekehrte Fall wird jedoch nur in den österreichischen Mathematik-Lehrbüchern für die Oberstufe thematisiert.

Ein weiterer Punkt, der in den österreichischen, jedoch nicht in den deutschen Schulbüchern zu finden war, ist die *Wahrscheinlichkeit als Maß für das subjektive Vertrauen*. Für ein abgerundetes Bild ist dieser Aspekt meiner Meinung nach hilfreich und ich erkenne keinen Grund ihn nicht bereits in der Sekundarstufe I anzusprechen. Die Themengebiete sind grundsätzlich in ähnlicher Reihenfolge aufgebaut und auch die Auswahl der Beispiele unterscheidet sich nicht maßgeblich. Zusammenfassend kann man feststellen, dass sich die Übungsaufgaben in Schulbüchern für die Sekundarstufe I in Deutschland und die 10. Schulstufe in Österreich (wenn überhaupt) durch die komplizierteren Formulierungen und die verstärkte Verwendung der mathematischen Sprache unterscheiden.

4.3 Wichtige Aspekte für einen gelungenen Einstieg

In diesem letzten Kapitel dieser Diplomarbeit möchte ich versuchen einen Einstieg in das Thema *Wahrscheinlichkeit* für die Sekundarstufe I zu skizzieren, der die meiner Meinung nach wichtigsten Aspekte berücksichtigt. Anhand von einigen ausgewählten Beispielen sollen diese Aspekte behandelt werden. Dieser Vorschlag für einen Einstieg erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern soll als Leitidee für die Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung dienen.

An dieser Stelle gilt es einige Punkte aufzugreifen, die meiner Meinung nach für ein profundes (erstes) Verständnis des wichtigen Begriffs *Wahrscheinlichkeit* von großer Bedeutung sind.

4.3.1 Sprechen über die Begriffe Zufall und Wahrscheinlichkeit

Zur Einführung in den Begriff Wahrscheinlichkeit ist es sicher von Vorteil zu Beginn über die Bedeutung der Wörter *Zufall* und *Wahrscheinlichkeit* zu sprechen, da diese im Alltag oft auf andere Weise verstanden werden, als dies im Sinne der Mathematik der Fall ist und im Allgemeinen schwer zu definieren sind.

Dazu bieten sich zum Beispiel folgende Fragestellungen an, die in der Klasse gemeinsam diskutiert werden sollten. Die SchülerInnen sollen dazu angeregt werden für oder wider den Zufall zu argumentieren und zu diskutieren.

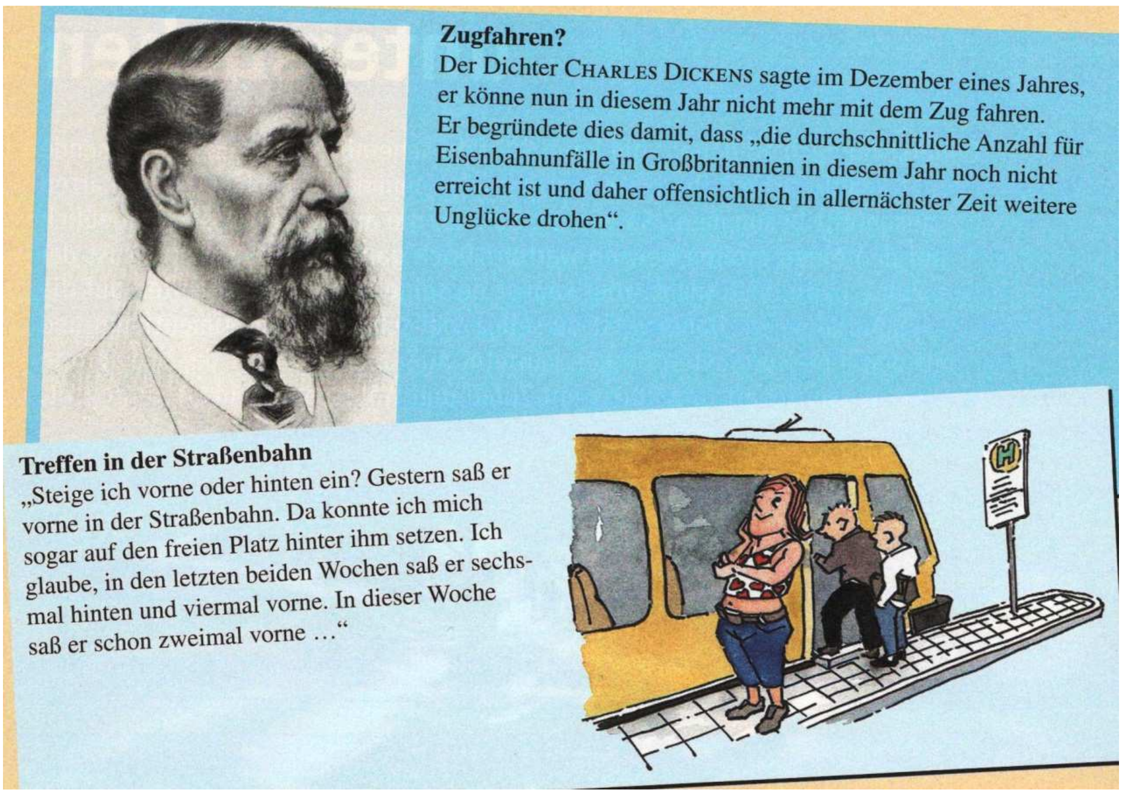
Zufall (Eichler/Vogel 2010, S. 155)

Aufgabe 16: Kreuzt an, ob folgende Ereignisse Eurer Meinung nach Zufall sind oder nicht:

Nr.	Ereignis	Zufall	kein Zufall
1	In Eurer Schule haben über 90 Prozent einen eigenen Computer.		
2	Am 1. April des kommenden Jahres fällt in unserer Stadt Schnee.		
3	Zum Auftakt der nächsten Bundesligasaison verliert der FC Bayern München mit 0 : 5.		
4	An einem Samstag gegen 13 Uhr ist im Ikea in Eurer Nähe eine der Kassen frei.		
5	Der nächste Wurf eines Würfels zeigt eine 5.		
6	Der nächste Wurf einer Münze zeigt ein Wappen.		
7	Ein vom Tisch geschobener Stift fällt auf die Erde.		

Eine weitere Aufgabe, die als Vorbereitung auf das Thema Wahrscheinlichkeit genutzt werden kann, ist die folgende. Sie soll die SchülerInnen dazu anregen zu den verschiedenen Aussagen Stellung zu nehmen und in der Klasse zu diskutieren.

Über Wahrscheinlichkeiten sprechen (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S.154 f)



Fußball
„Nun hat der SC schon dreimal hintereinander gewonnen, da müsste er doch an diesem Wochenende wieder gewinnen."
„Ganz im Gegenteil; nach so vielen Siegen muss doch wieder mal eine Niederlage kommen."

„Der philosophische Streit zum Begriff des Zufalls muss kein Thema des Stochastikunterrichts der Sekundarstufe I sein. Aber über die Art der Vorgänge nachzudenken, die man mit den Methoden der Stochastik untersuchen möchte, ist für Schülerinnen und Schüler sicherlich sinnvoll." (Eichler/Vogel 2010, S. 155)

4.3.2 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

„Die Art und Weise, wie der Wahrscheinlichkeitsbegriff eingeführt wird, ist entscheidend: Ein Unterricht, der von Anfang an auf den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff setzt, läuft Gefahr, das Wahrnehmen von und Denken in Wahrscheinlichkeiten schnell von der erlebten Umwelt abzukoppeln und in der Glücksspielwelt zu isolieren, in der gut gerechnet werden kann. Wir plädieren für eine phänomenologische und genetische Zugangsweise: Die Schülerinnen und Schüler sollen Gelegenheit erhalten, den Wahrscheinlichkeitsbegriff in seinen verschiedenen Facetten kennenzulernen." (Eichler/Vogel 2009, S. 173)

Zusammenhang Relative Häufigkeit – Wahrscheinlichkeit

Um den Begriff Wahrscheinlichkeit einzuführen, bietet sich meiner Meinung nach der Zugang über relative Häufigkeiten an. Dies wird in vielen Schulbüchern auch so gehandhabt. In den beschriebenen deutschen Schulbüchern für die Sekundarstufe I wird jedoch lediglich erklärt, dass es mit Hilfe von relativen Häufigkeiten möglich ist, Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen. Ist dieser Aspekt behandelt worden sollte meiner Meinung nach explizit darauf hingewiesen werden, dass auch der umgekehrte Weg (Prognosen zu relativen Häufigkeiten über bereits bekannte Wahrscheinlichkeiten) möglich ist.

Zum Einstieg in dieses Thema ist es vor allem in der Sekundarstufe I hilfreich, die SchülerInnen diesen Zusammenhang selbst „erleben" und ihre Vermutungen im Vorfeld des Experiments äußern und begründen zu lassen. Anhand eines Würfel- oder Münzwurfexperiments können die SchülerInnen Tabellen zu absoluten und relativen Häufigkeiten erstellen und anschließend ihre Schätzungen über die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse abgeben. Auch die Darstellung der Tatsache, dass sich relative Häufigkeiten bei einer großen Anzahl von Versuchsdurchführungen um einen gewissen Wert stabilisieren, in einem Diagramm, ist für ein Verstehen der SchülerInnen sicher notwendig. Um viele Versuchsergebnisse zu erhalten sollten die Ergebnisse der SchülerInnen zusammengefügt werden.

Zu einem späteren Zeitpunkt kann (und sollte) im Zuge der Behandlung dieses Themas auch die Simulation von Zufallszahlen und -experimenten mit dem Computer thematisiert werden. Auch für SchülerInnen der Sekundarstufe I führen selbstständig durchgeführte, lange Versuchsserien auf Dauer sicher zu Langeweile.

Würfeln (Fokus Mathematik 6 B 2004, S. 63)

Würfle mit einem Würfel 100-mal und notiere jeweils die geworfene Augenzahl. Gib in einer Tabelle an, wie oft jede Augenzahl bei den 100 Würfen aufgetreten ist.
Stelle dein Ergebnis auch in einem Diagramm dar.

Bei einem ersten Spiel gewinnst du, wenn du eine Augenzahl würfelst, die keine Primzahl ist. Bei einem zweiten Spiel gewinnst du, wenn du eine Augenzahl würfelst, die eine gerade Zahl ist.
Wie oft hättest du bei den 100 Würfen jeweils gewonnen?
Vergleiche die Gewinnchancen der beiden Spiele.

Durch diese und ähnliche Experimente sollen Grundvorstellungen in den SchülerInnen entstehen, die über das Beispiel hinausgehen. Entscheidet man sich im Unterricht beispielsweise für das Werfen einer Münze und das Beobachten, ob „Zahl" auftritt, so lassen sich anhand dieses kleinen Experiments viele wichtige Aspekte zeigen. (vgl. Reichel 1992, S. 52 f) Wenn bei etwa 30 SchülerInnen jede/r SchülerIn eine Münze zehn Mal wirft, so hat man schnell relativ aussagekräftige Ergebnisse. Mit Hilfe von entsprechenden Tabellen und Diagrammen kann der Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten deutlich gemacht werden.

Zusammenhang zu Bruch- und Prozentrechnung

Ein sehr wichtiger Aspekt, den zu besprechen sich auch bei dieser Übung sofort anbietet, ist der Zusammenhang zur Bruch- beziehungsweise Prozentrechnung. An dieser Stelle ist es wichtig die SchülerInnen darauf hinzuweisen, dass Wahrscheinlichkeiten sowohl in Form eines Bruchs ($\frac{1}{2}$), einer Dezimalzahl (0,5) oder auch in Prozent (50%) angegeben werden können. Um diesen Aspekt zu betonen sollte man in den Aufgabenstellungen zwischen den drei Schreibweisen variieren und verlangen, die Lösungen auf verschiedene Weise anzugeben.

Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff

„Der klassische Wahrscheinlichkeitsansatz – auch Laplace-Wahrscheinlichkeit genannt – ist ein Ansatz, der auf theoretischen Überlegungen beruht, die vor dem zufälligen Vorgang angestellt werden. Der normale Würfel macht aufgrund seiner symmetrischen Architektur Überlegungen möglich, die zu einem theoretischen Modell führen, dass die Gleichwahrscheinlichkeit der Augenzahlen gemäß dem Prinzip des unzureichenden Grundes postuliert." (Eichler/Vogel 2010, S. 169)

Um den *klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff* vorzustellen bietet es sich an anhand eines klassischen Spielwürfels verschiedene Fragestellungen zu klären:

Wie wahrscheinlich ist es eine „6" zu würfeln? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine gerade/ungerade Zahl, Primzahl, Zahl größer als 4 etc. zu würfeln?

In diesem Zusammenhang können auch die Begriffe *Ereignis*, *Gegenereignis* und *Ergebnis* und die *Summenregel* näher erläutert werden. Von großer Bedeutung ist an dieser Stelle auch die Betonung, dass es sich in diesem Fall um gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge handelt.

Mögliche Definition

„Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind, werden Laplace-Experimente genannt. Bei einem Laplace-Experiment mit n verschiedenen Ergebnissen ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis gleich $\frac{1}{n}$.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis, welches aus mehreren Ergebnissen besteht, erhältst du, indem du die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse addierst (Summenregel).

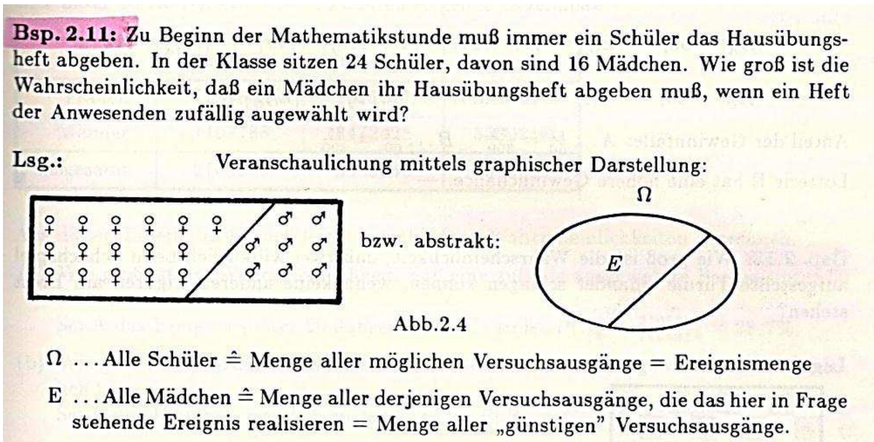
Bei einem Laplace-Experiment berechnet man die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis gemäß

$$p = \frac{Anzahl\ der\ für\ das\ Ereignis\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Ergebnisse}\text{“}$$

(Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 166f)

Insbesondere kann man bei der Behandlung folgender Aufgabenstellung ebenfalls mit der Angabe von Mengen argumentieren und somit auf ein bereits bekanntes Stoffgebiet zurückgreifen.

Hausübungsheft (Reichel 1992, S. 57)



Bsp. 2.11: Zu Beginn der Mathematikstunde muß immer ein Schüler das Hausübungsheft abgeben. In der Klasse sitzen 24 Schüler, davon sind 16 Mädchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mädchen ihr Hausübungsheft abgeben muß, wenn ein Heft der Anwesenden zufällig augewählt wird?

Lsg.: Veranschaulichung mittels graphischer Darstellung:

Abb.2.4

Ω ... Alle Schüler ≙ Menge aller möglichen Versuchsausgänge = Ereignismenge

E ... Alle Mädchen ≙ Menge aller derjenigen Versuchsausgänge, die das hier in Frage stehende Ereignis realisieren = Menge aller „günstigen" Versuchsausgänge.

„Dabei sollte darauf hingewiesen werden, dass das Wort „günstig" hier Bezug nimmt auf das betrachtende Ereignis. Bei der Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit z.B. zählen die Verstorbenen als „günstige" Fälle." (Reichel 1992, S. 57)

Bei diesem und ähnlichen Beispielen bietet es sich an (als Wiederholung) noch einmal auf die „Von-Bedeutung" von Brüchen einzugehen. In diesem Fall: **16 von 24** SchülerInnen sind Mädchen $= \frac{16}{24}$.

Um wiederum den Zusammenhang zur Bruch- und Prozentrechnung zu betonen sollte das Ergebnis folgendermaßen angegeben werden:

$$P(\text{E}) = \frac{\text{Anzahl der "günstigen" Versuchsausgänge}}{\text{Anzahl der "möglichen" Versuchsausgänge}} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{16}{24} = 0,\dot{6} = 66{,}7\%$$

Der subjektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff

Um das Bild, das sich die SchülerInnen bisher zum Thema Wahrscheinlichkeit gemacht haben abzurunden, sollte auch der Begriff der subjektivistischen Wahrscheinlichkeit nicht ganz unerwähnt bleiben. Ein Hinweis darauf, dass es vielfach nicht möglich ist Wahrscheinlichkeiten über Experimente abzuschätzen oder über den relativen Anteil zu ermitteln. In diesen Fällen werden bisherige Erfahrungen einbezogen, um einen Schätzwert für die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten zu erhalten.

„- Intuitive Schätzung: „Ich schätze die Gewinnchance des Pferdes auf $\frac{1}{10}$.

- Analogieschlüsse: „Das Medikament wirkt bei Tieren, also auch bei Menschen.

- Schätzungen mithilfe statistischer Methoden: Aus einigen Versuchen wird auf die Wahrscheinlichkeit geschlossen.“ (Dimensionen Mathematik 6 2010, S. 138)

Im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeit als Maß für das subjektive Vertrauen ist unbedingt darauf hinzuweisen, dass diese Methode sehr umstritten ist. Es bietet sich an die Gründe für dafür im Klassenverband zu diskutieren. Eine Aufgabe zu diesem Thema stellen Eichler und Vogel in ihrem Buch „Leitidee Daten und Zufall“ vor. Die Autoren weisen darauf hin, dass der subjektivistische Ansatz *„theoretischer Natur“* ist und auch das *„Lernen aus Erfahrung“* in diesem Zusammenhang eine wichtige Rolle spielt. *„Das bedeutet, dass eine solche Einschätzung nach dem zufälligen Vorgang revidiert werden kann und zu einer neuen Einschätzung vor einem weiteren Durchgang führt.“* (Eichler/Vogel 2010, S. 169)

Aufgabe und mögliche Argumentationen (Eichler/Vogel 2010, S. 165f)

Aufgabe 18: Eine (oder einer) von Euch übernimmt die Spielleitung. Die Spielleitung wählt *verdeckt* wie in der Abbildung oben einen der beiden Würfel (Quaderwürfel oder normaler Spielwürfel) aus und legt den anderen Würfel für den Rest des Spieles zur Seite.

- Schätzt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Spielleitung den Quaderwürfel und mit welcher Wahrscheinlichkeit den normalen Spielwürfel für das Spiel ausgewählt hat.
- Ihr dürft nun die Spielleitung dazu auffordern, den ausgewählten Würfel einmal zu werfen und Euch die Augenzahl zu nennen. Ändern sich Eure vorab geschätzten Wahrscheinlichkeiten?
- Lasst nun die Spielleitung ein zweites Mal, ein drittes Mal usw. den ausgewählten Würfel werfen. Ab wann könnt Ihr entscheiden, dass die Spielleitung den Quaderwürfel (bzw. den normalen Spielwürfel) ausgewählt hat?

- „Da die Spielleitung sich für den einen oder anderen Würfel entscheiden kann, sind für mich beide Möglichkeiten gleichwahrscheinlich: $P(Q) = P(N) = 0,5$.“
- „Ich glaube, dass die Spielleitung sich eher für den ungewöhnlichen Würfel entschieden hat, also etwa $P(Q) = 0,7; P(N) = 0,3$.“
- „Vielleicht denkt die Spielleitung, dass wir uns für den Quaderwürfel entscheiden und hat deswegen den normalen Spielwürfel ausgewählt: $P(Q) = 0,2; P(N) = 0,8$.“

Diese Aufgabe zu behandeln ist erst nach der Behandlung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit oder im klassischen Sinn (Laplace) sinnvoll.

4.3.3 Wiederholen und Vertiefen der Bruch- und Prozentrechnung

Ist der Begriff *Wahrscheinlichkeit* im Unterricht behandelt worden, werden in den Schulbüchern oft die Additions- und Multiplikationsregeln anhand von Baumdiagrammen eingeführt. Dies ist meiner Meinung nach auch ein wichtiger Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung, da zahlreiche Problemstellungen mit Hilfe von Baumdiagrammen anschaulich gelöst werden können. Ein weiterer Aspekt dieser Diagramme ist, dass sowohl Bruch- als auch Prozentrechnung in diesem Zusammenhang wiederholt und vertieft werden können. Insbesondere das Addieren und Multiplizieren von Brüchen ist Grundvoraussetzung für die Beschäftigung mit Baumdiagrammen und den Pfadregeln. Wurden sowohl die Additions- als auch die Multiplikationsregel im Unterricht behandelt kann man viele Beispiele aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung dazu verwenden, Kenntnisse über das Rechnen mit Brüchen, Dezimalzahlen und Prozenten zu festigen.

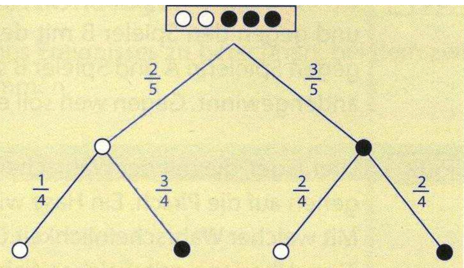
Beispiel Brüche (Dimensionen Mathematik 6 2010, S. 141 und 143)

Beispiel:

Eine Schachtel enthält zwei weiße und drei schwarze Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln herausgenommen und **nicht mehr zurückgelegt.**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Kugel weiß und die zweite Kugel schwarz?

$P(E_1 \wedge E_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = 0,3$



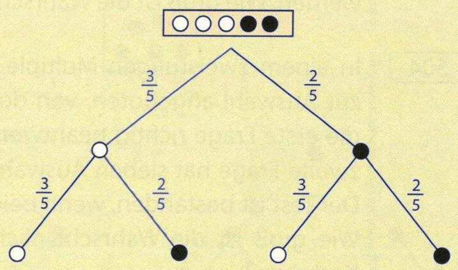
Beachte*:* Die Wahrscheinlichkeiten für die zweite Ziehung ändern sich, da sich die Anzahl der Kugeln ändert.

Beispiel:

Eine Schachtel enthält drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln herausgenommen und **wieder zurückgelegt.**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Kugel weiß und die zweite Kugel schwarz?

$P(E_1 \wedge E_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0,24$

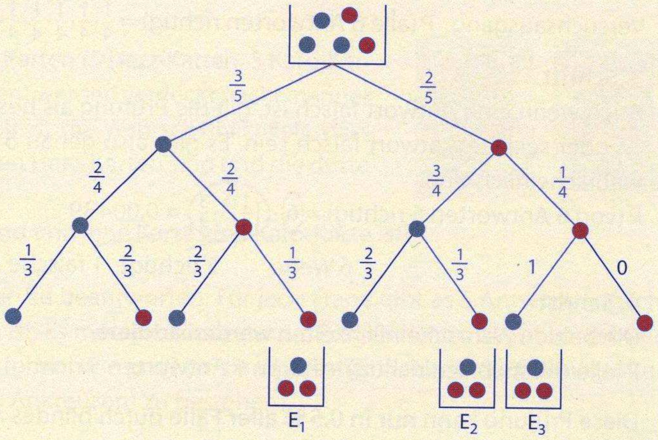


Beachte: Die gezogene Kugel wird vor dem nächsten Zug wieder zurückgelegt. Die Anzahl der Kugeln ändert sich nicht, daher ändern sich auch nicht die Wahrscheinlichkeiten bei der zweiten Ziehung.

Beispiel:

In einer Schachtel befinden sich 3 blaue und 2 rote Kugeln. Nacheinander werden 3 Kugeln blind, **ohne** sie wieder **zurückzulegen**, herausgenommen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass **eine Kugel blau und zwei Kugeln rot** sind.

In dieser Aufgabe kommt es **nicht auf die Reihenfolge** an, d.h. es ist egal, ob die blaue Kugel beim ersten, zweiten oder dritten Griff gezogen wird. Drei Wege des Baumdiagramms entsprechen diesem Ereignis. Die Wahrscheinlichkeiten dieser drei Wege werden **addiert**.



$$\begin{aligned} P(E) &= P(●●●) + P(●●●) + P(●●●) \\ &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) \\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 \\ &= 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 \\ &= \mathbf{0{,}3} \end{aligned}$$

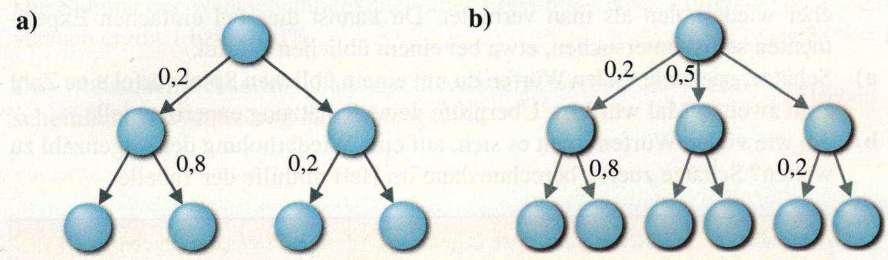
In 30 % aller Fälle zieht man aus dieser Schachtel eine blaue und zwei rote Kugeln.

Diese und ähnliche Beispiele eignen sich hervorragend um das Multiplizieren und Addieren von Brüchen zu wiederholen und zu trainieren. Zusätzlich hat das Beispiel zur Additionsregel den großen Vorteil, dass sowohl Brüche, als auch Dezimalzahlen und Prozente vorkommen. Eventuell muss man (je nach Vorkenntnissen der SchülerInnen) die Wahrscheinlichkeit in anderer Form angeben (zum Beispiel: *P(erste Kugel weiß und zweite Kugel schwarz)* =…etc.).

Natürlich könnte man die Pfade im Baumdiagramm ebenfalls mit Dezimalzahlen oder Prozenten beschriften. $(\frac{3}{3} = 0{,}6 = 60\%)$

Beispiel Dezimalzahlen (Fokus Mathematik 4 BW 2007, S. 177)

21 Übertrage den Baum in dein Heft und ergänze die fehlenden Wahrscheinlichkeiten. Gib ein Experiment an, das durch den Baum beschrieben wird.



Dieses Beispiel zeigt noch einmal, dass Wahrscheinlichkeiten auch mit Hilfe von Dezimalzahlen angegeben werden können. Zusätzlich werden die SchülerInnen dazu angeregt sich selbst ein passendes Zufallsexperiment zu den Baumdiagrammen zu überlegen.

Kapitel V

Anhang

5.1 Zusammenfassung

Zusammenfassend ist ein Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung sicher schon ab der Sekundarstufe I möglich und auch wichtig. Je früher sich Kinder mit diesem Thema auseinandersetzen (müssen), umso einfacher ist es Fehlvorstellungen entgegenzuwirken und richtige, intuitive Grundvorstellungen aufzubauen. Auch wenn der österreichische Lehrplan für die AHS-Unterstufe zurzeit keine Wahrscheinlichkeitsrechnung vorsieht, wäre es wünschenswert, wenn LehrerInnen auf eigene Faust versuchen dieses Thema immer wieder in den Unterricht einzubauen. Dies ist durch den Einbau kurzer Spiele oder im Zusammenhang mit anderen Stoffgebieten immer wieder möglich.

Vor allem im Zuge der Bruch- bzw. der Prozentrechnung könnten kurze Exkurse in die Welt der Wahrscheinlichkeit eingebaut werden. Viele Beispiele aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung eignen sich auch ideal zu Wiederholung und Vertiefung der Bruchrechnung. Auch das Erstellen von Baumdiagrammen kann in vielen Situationen des täglichen Lebens (Glücksspiele etc.) hilfreich sein. Ein weiteres Argument für eine frühe Behandlung von Stochastik im Unterricht ist, dass dieses Thema eine unendliche Fülle an realitätsbezogenen Anwendungen bietet und somit gut an die Lebenswelt der Kinder und Jugendlichen angeknüpft werden kann.

Da viele SchülerInnen nach den Pflichtschuljahren die Schule verlassen, haben sie im schlimmsten Fall in ihrer gesamten Schullaufbahn keine Erfahrungen mit dem wichtigen Begriff *Wahrscheinlichkeit* gemacht. Dies ist auch insofern problematisch, als dass eine wichtige Erkenntnis im Zuge der Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, dass die erste Intuition oft nicht richtig ist und noch einmal überdacht werden muss.

Auch im Hinblick auf internationale Testungen (wie zum Beispiel PISA) oder die im Zuge der Bildungsstandards durchgeführten Tests, wäre es von großer Bedeutung SchülerInnen so früh wie möglich Kenntnisse über zufallsbedingte Situationen zu vermitteln. Wie bereits erwähnt haben österreichische SchülerInnen bei diesen Test einen riesigen Nachteil, da sie mit dem Begriff *Wahrscheinlichkeit* noch nie in Berührung gekommen sind, dieser aber in einigen Testaufgaben enthalten ist (vgl. Kapitel 3.1.8).

Ein weiteres Argument für eine Behandlung des Themas Wahrscheinlichkeit bereits in der Sekundarstufe I ist, dass der österreichische Lehrplan der Oberstufe zeitlich keine intensive Auseinandersetzung mit diesem Thema zulässt. Es wäre daher von großem Vorteil wenn in der Oberstufe bereits auf grundlegende Vorkenntnisse zurückgegriffen werden könnte Außerdem ist es für SchülerInnen der Sekundarstufe I sicher interessanter Würfel- oder Münzwurfexperimente selbstständig durchzuführen, als für SchülerInnen der Oberstufe. Aus eigener Erfahrung kann ich bestätigen, dass ich im Mathematikunterricht in der Schule keine profunden Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung erwerben konnte und im Zuge des Mathematikstudiums das Gefühl hatte dieses Thema betreffend „bei Null zu beginnen".

5.2 Abstract

In der vorliegenden Arbeit werden Vor- und Nachteile der Behandlung des Themas „Wahrscheinlichkeit“ ab der 6. bzw. 7. Schulstufe beleuchtet. Im ersten Teil wird auf psychologische Aspekte der Entwicklung der Begriffe „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ bei Kindern und Jugendlichen eingegangen. Empirische Untersuchungen dienen als Grundlage für die folgenden, fachdidaktischen Überlegungen. Im Anschluss werden verschiedene Gründe aufgeführt, die für eine frühe Behandlung des Themas „Wahrscheinlichkeit“ im Mathematikunterricht sprechen. Dazu werden auch einige PISA-Aufgaben besprochen.

Im anschließenden Kapitel werden sowohl der Lehrplan in Österreich als auch in Deutschland untersucht und verglichen. Konkret dienen die Lehrpläne der Bundesländer Bayern, Niedersachsen, Baden-Württemberg und Nordrhein-Westfalen als Vergleich, da es in der Bundesrepublik Deutschland keinen einheitlichen Lehrplan gibt.

Im folgenden Kapitel werden einige didaktische Ansätze für einen möglichen Einstieg vorgestellt. Unter anderem wird auf einen Unterrichtsvorschlag zum Thema „Bayesian Reasoning“ für die Sekundarstufe I näher eingegangen.

Im Zuge einer Analyse verschiedener deutscher Mathematik-Schulbücher für die Sekundarstufe I wird auf Vor- und Nachteile verschiedener Zugangsweisen eingegangen und die angebotenen Aufgaben und Beispiele kritisch betrachtet. Im Anschluss folgt ein Vergleich mit der Vorgehensweise in österreichischen Schulbüchern für die 10. Schulstufe. Zusätzlich dienen die Aufgaben in den verschiedenen Schulbüchern teilweise auch als Anregung für das letzte Kapitel der vorliegenden Arbeit. In diesem werden anhand von konkreten Beispielen wichtige Aspekte für einen (gelungenen) frühen Einstieg in das Thema „Wahrscheinlichkeit“ genannt.

5.3 Literaturverzeichnis

Cohen J., Hansel M.: Glück und Risiko. Die Lehre von der subjektiven Wahrscheinlichkeit. Frankfurt 1961

Eichler A., Vogel M.: Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. Wiesbaden 2009

Harten, G.: Steinbring, H.: Stochastik in der Sekundarstufe I. Band 8. Köln 1984

Heitele, D.: Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe. Dortmund 1976

Herget, W.: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin 2001

Kütting, H.: Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe und Sekundarstufe I: Positive Ansätze und mögliche Gefahren. In: Stochastik im Schulunterricht. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik Band 3. Wien 1981

Kütting, H.: Didaktik der Stochastik. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Band 23. Mannheim; Leipzig; Wien; Zürich 1994

Laplace, P.: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Leipzig 1932

Mayerhofer, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung in der AHS Unterstufe. (Diplomarbeit)Wien 2008

Panknin, M.: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik für die Klassen 1-6. Bochum 1972

Piaget, J., Inhelder, B.: La genèse de l´idée de hasard chez l´enfant. Paris 1974

Reichel, H.C. (Hrsg.): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 1. Mathematik für Schule und Praxis. 3. Auflage Wien 1992

Richter, G.: Stochastik – Methodische und fachliche Hinweise für den Unterricht. Stuttgart 1994

Riemer, W.: Neue Ideen zur Stochastik. Mannheim; Wien; Zürich 1985

Stochastik im Schulunterricht: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik Band 3; Wien 1981

Wassner, C.: Förderung Bayesianischen Denkens. Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen. Hildesheim, Berlin 2004

Weissenbök, B.: Intuitive Vorstellungen zu stochastischen Inhalten und deren Altersentwicklung (Diplomarbeit). Wien 1993

Winter, H.: Zur beschreibenden Statistik in der Sekundarstufe I (10-16jährige Schüler der allgemeinbildenden Schulen). Rechtfertigungsgründe und Möglichkeiten der Integration in den Mathematikunterricht. In: Stochastik im Schulunterricht. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik Band 3. Wien 1981

Schulbücher Deutschland

Elemente der Mathematik (Niedersachsen)

Griesel H., Postel H.: Elemente der Mathematik. 7. Schuljahr. Hannover 1994

Griesel H., Postel H.: Elemente der Mathematik. 8. Schuljahr. Hannover 1994

Fokus Mathematik (Baden-Württemberg)

Esper N., Lütticken R., Schornstein J., Uhl C.: Fokus Mathematik Band 3. Gymnasium Baden-Württemberg. Berlin 2006

Lütticken R., Uhl C.: Fokus Mathematik Band 4. Gymnasium Baden-Württemberg. Berlin 2007

Fokus Mathematik (Bayern)

Brunnermeier A., Herz A., Kammermeyer F., Kilian H., Kurz K., Sauer J., Schmähling R., Zechel J.: Fokus Mathematik Band 6. Gymnasium Bayern. Berlin 2004

Freytag C., Härtinger R., Herz A., Kammermeyer F., Kurz K., Sauermann B., Sinzinger M., Zechel J.: Fokus Mathematik Band 7. Gymnasium Bayern. Berlin 2005

Freytag C., Härtinger R., Herz A., Kammermeyer F., Kilian H., Kurz K., Sauermann B., Schmitt B., Sinzinger M., Wagner A., Zebhauser E., Zebhauser M., Zechel J.: Fokus Mathematik Band 8. Gymnasium Bayern. Berlin 2006

Freytag C., Gräupner C., Herz A., Kammermeyer F., Kilian H., Kurz K., Sauermann B., Schmähling R., Schmitt B., Sinzinger M., Zebhauser E., Zebhauser M.: Fokus Mathematik Band 9. Gymnasium Bayern. Berlin 2007

Freytag C., Herz A., Kammermeyer F., Kurz K., Peteranderl M., Schmähling R., Schmitt B., Sinzinger M., Zebhauser E., Zebhauser M.: Fokus Mathematik Band 10. Gymnasium Bayern. Berlin 2008

MatheNetz (Niedersachsen)

Cukrowicz J., Theilenberg J., Zimmermann B.: Mathe Netz 6 Gymnasium. Ausgabe N. Braunschweig 2005

Cukrowicz J., Theilenberg J., Zimmermann B.: Mathe Netz 7 Gymnasium. Ausgabe N. Braunschweig 2006

Cukrowicz J., Theilenberg J., Zimmermann B.: Mathe Netz 8 Gymnasium. Ausgabe N. Braunschweig 2007

Cukrowicz J., Theilenberg J., Zimmermann B.: Mathe Netz 9 Gymnasium. Ausgabe N. Braunschweig 2008

Schnittpunkt (Nordrhein-Westfalen)

Maroska R., Olpp A., Stöckle C., Wellstein H.: Schnittpunkt 7. Mathematik für Realschulen Nordrhein-Westfalen. Stuttgart 1994

Maroska R., Olpp A., Stöckle C., Wellstein H.: Schnittpunkt 8. Mathematik für Realschulen Nordrhein-Westfalen. Stuttgart 1994

Maroska R., Olpp A., Stöckle C., Wellstein H.: Schnittpunkt 9. Mathematik für Realschulen Nordrhein-Westfalen. Stuttgart 1991

Schulbücher Österreich

Dimensionen

Bleier, G., Lindenberg, J., Lindner, A., Stepancik, E.: Dimensionen Mathematik 6. Wien 2010

Mathematik

Götz, S., Reichel, H.-C., Müller, R., Hanisch, G.: Mathematik 6. Wien 2010

Mathematik verstehen

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B., Ulovec, A.: Mathematik verstehen 6. Wien 2010

Internet

www.wikipedia.at

Österreichischer Lehrplan Mathematik AHS-Unterstufe:
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf

Österreichischer Lehrplan Mathematik AHS-Oberstufe:
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf

Lehrplan Bayern Mathematik Gymnasium:
http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26172

Lehrplan Niedersachsen Mathematik Gymnasium:
http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gym_mathe_nib.pdf

Lehrplan Baden-Württemberg Mathematik Gymnasium:
http://www.bildung-staerkt-menschen.de/service/downloads/Bildungsstandards/Gym/Gym_M_bs.pdf

Lehrplan Nordrhein-Westfalen Mathematik Gymnasium Sekundarstufe I:
http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf

Anhang I

Ausschnitte aus der Unterrichtsreihe „Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit":

Wassner, C.: Förderung Bayesianischen Denkens. Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen. Hildesheim, Berlin 2004. S.182-223

Anhang II

Projektarbeit zum Thema „Dunkelfeldforschung"

Cukrowicz J., Theilenberg J., Zimmermann B.: Mathe Netz 9 Gymnasium. Ausgabe N. Braunschweig 2008. S. 136

5.4 Curriculum Vitae

Steger Sabine

Wohnort:	Buchholzerstraße 34/2, 4400 Steyr
Mobil:	+43/650/8608184
E-Mail:	sab.steger@yahoo.de
Geburtstag- und Ort:	18.04.1987, Steyr
Familienstand:	ledig

Schule und Ausbildung

2006 – 2012	Studium Lehramt Mathematik und Russisch, Universität Wien
	Diplomstudium Slawistik, Universität Wien
29. Februar 2012	Abschluss Bachelor of Arts
2005 – 2006	Studium der Internationalen Betriebswirtschaft, Wirtschaftsuniversität Wien
1997-2005	Gymnasium Werndlpark Steyr, OÖ
22. Juni 2005	Matura mit ausgezeichnetem Erfolg bestanden
1993-1997	Volksschule Kürnberg, NÖ

Berufliche Tätigkeiten

September 2008 – laufend	Honorarlehrkraft beim BFI Steyr, Produktionsschule, Gaswerkgasse 9, 4400 Steyr
März 2009 – Juni 2010	Schülerhilfe Steyr, Pachergasse 1, 4400 Steyr
April 2011 – laufend	BMW Motorenwerk Steyr, Hinterbergstraße 2, 4400 Steyr

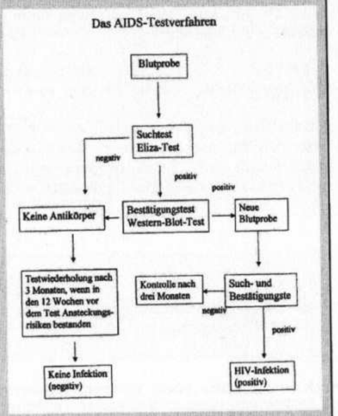
5.5 Anhang I

Unterrichtsreihe „Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit“

AB 2: Das AIDS-Testverfahren im Detail

Das AIDS-Testverfahren und Risiken in der heutigen Praxis

Ein HIV-Test umfasst heutzutage normalerweise mehrere Schritte: Zuerst wird ein Test namens ELISA (steht für engl. *enzyme-linked immunoabsorbent assay*) durchgeführt. Mit diesem Test lassen sich im Blut Antikörper gegen HIV feststellen. Ursprünglich diente er dazu, Blutspenden routinemäßig zu überprüfen. Eine möglichst hohe Rate positiver Testergebnisse bei einer vorliegenden HIV-Infektion war deshalb wichtig, auch wenn dies eine relativ höhere Rate falsch-positiver Ergebnisse mit sich brachte. Fällt ELISA negativ aus, wird der betroffenen Person mitgeteilt, dass sie keine HIV-Infektion hat. Wenn aber ELISA positiv ist, folgt zur Sicherheit ein sog. Western-Blot-Test, der teurer und langwieriger als der ELISA-Test ist. Fällt auch der Western-Blot-Test positiv aus, dann wird der betroffenen Person meist mitgeteilt, dass sie HIV-positiv ist. Meist wird jedoch eine zweite, separat entnommene Blutprobe nochmal dem Testverfahren unterzogen, bevor eine HIV-Infektion als sicher angenommen wird. Die Testwiederholung nach 3 Monaten wird gemacht, da sich HIV erst 4-8 Wochen nach der Ansteckung nachweisen lässt.



Fragen zum Text:

Was passiert, wenn eine Person beim ersten Mal positiv getestet wurde?

Was passiert, wenn eine Person beim ersten Mal negativ getestet wurde?

Warum ist bei negativem Ergebnis eine Kontrolluntersuchung nach 3 Monaten vorgesehen?

Aufgaben

Der Test in unserem Beispiel war ein ELISA-Test. Wir hatten 62964 positive Testfälle, aber nur 8991 HIV-Infektionen. Die positiven Testfälle sollen mit einem Western-Blot-Test überprüft werden. Seine Werte sind etwas anders: Bei einem HIV-Infizierten ist er zu 99,8% positiv. Wenn einer nicht HIV-infiziert ist, ist er zu 99,9% negativ.

1. Erstelle ein Baumdiagramm zum Western-Blot-Test.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person HIV-infiziert, wenn auch der Western-Blot-Test positiv ist.
3. Ist das Ergebnis jetzt sicher genug? Was passiert nun weiter, wenn auch der Western-Blot-Test ein positives Ergebnis hatte?

AB 3: AIDS-Test positiv und dann ?

AUS FORSCHUNG UND PRAX IS
(von Prof. Dr.Gigerenzer, Max-Planck-Institut Berlin)

Die Fehleinschätzungen sind keine Überraschung. Es gibt einige Untersuchungen darüber, dass auch „Experten“ oft falsch liegen:
Es wurden 20 professionelle AIDS-Berater (14 Ärzte und 6 Sozialarbeiter) befragt. Ein Student ließ bei sich 20mal einen HIV-Test machen und fragte genau die obige Frage nach dem positiven Vorhersagewert. Das Ergebnis war erschreckend.
10 der Berater behaupteten fälschlich, dass bei einem Mann, der keiner Risikogruppe angehört, eine Infektion völlig (also zu 100%) sicher ist, wenn der HIV-Test positiv ausfällt. 5 weitere Berater erklärten, diese Wahrscheinlichkeit liege bei 99,9% oder darüber. 2 weitere Berater vermieden es erfolgreich, diese Frage zu beantworten. Nur 3 Berater schätzten, dass die Wahrscheinlichkeit unter 99,9% liegt, gaben aber sämtlich einen Wert über 90 Prozent an.

Selbstmord nach positivem AIDS-Test !
Bei der AIDS-Konferenz 1987 berichtete Lawton Chiles, der ehemalige Senator von Florida, dass von 22 Blutspendern in Florida, denen ein positives Resultat eines ELISA-Tests mitgeteilt wurde, sieben Selbstmord begangen hätten. Damals wurde schon nach einem Test das Ergebnis mitgeteilt. Heute ist das Verfahren glücklicherweise geändert.

Chicago Tribune
vom 5. März 1993
Leserbriefe an Dr. Ann Landers

Falscher HIV-Test beschert 18-monatige Hölle
Liebe Ann Landers,
im März 1991 suchte ich ein Zentrum für anonyme HIV-Tests auf. Nach zwei Wochen erfuhr ich, dass mein Test positiv ausgefallen war. Ich war am Boden zerstört: erst 20 Jahre alt und schon zum Tode verurteilt. In meiner Verzweiflung überlegte ich, wie ich am besten Selbstmord begehen könnte. Ermutigt von Verwandten und Freunden, entschied ich mich dann aber, zu kämpfen. Meine Ärzte in Dallas sagten mir, in Kalifornien würden HIV-Patienten am besten betreut. Also packte ich meine Sachen und zog nach Westen. Ich brauchte drei Monate, um einen Arzt zu finden, zu dem ich Vertrauen hatte. Vor der Behandlung bestand er aber auf weiteren Tests. Stellen Sie sich vor, wie erschüttert ich war, als die neuen Ergebnisse negativ waren. Der Arzt ließ erneut testen - wieder eindeutig negativ.
Ich bin so dankbar, dass ich gesund bin, aber die 18 Monate, in denen ich glaubte, das Virus in mir zu tragen, haben mein Leben grundlegend verändert. Ich bitte alle Ärzte inständig, noch vorsichtiger und sorgfältiger zu sein. Und Ihren Lesern möchte ich sagen: Lassen Sie das Ergebnis auf jeden Fall überprüfen und holen Sie mindestens ein zweites Gutachten ein, um sicherzugehen. Ich werde mich weiterhin alle sechs Monate auf HIV testen lassen, aber ich werde mich nicht mehr so schnell erschrecken lassen.
David aus Dallas

Frage zu den Texten:

Warum wurde wohl der Gedanke eines Pflicht-AIDS-Tests in Deutschland verworfen?

AB 4: Einfluss der Basisrate

Aus dem HIV/AIDS-Bericht II/2002, Robert-Koch-Institut Berlin
HIV-Infektionen sind bei manchen Bevölkerungsgruppen deutlich häufiger als bei anderen, man spricht von unterschiedlichen **Basisraten**. Z.B. bei homosexuellen Männern, Drogenabhängigen, die ihren „Stoff" intravenös spritzen, heterosexuellen Partnern von Abhängigen, außerdem Blutern oder Kindern HIV-infizierter Frauen (sog. Risikogruppen) sind die HIV-Basisraten viel höher als bei anderen Bevölkerungsgruppen.
Nach Schätzung gibt es in Berlin 7500 intravenös Drogenabhängige (IVDA), davon sind 848(*) HIV-infiziert.
(*) *Stand 7/2002*

Aufgaben

Nehmen wir an, bei einer Person aus Berlin wird ein ELISA-AIDS-Test gemacht. Es stellt sich heraus, dass die Person regelmäßig Heroin intravenös spritzt.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein IVDA aus Berlin HIV-infiziert, wenn der ELISA-Test (Werte aus AB1) positiv war?
2. Erkläre, warum diese Wahrscheinlichkeit viel höher ist als bei der Gesamtbevölkerung von NRW.
3. Fülle die abgebildete Tabelle mit Hilfe der Daten aus Text 6 soweit wie möglich aus.

	Gesamt	HIV-infiziert	Nicht HIV-infiziert
Gesamt			
TEST positiv			
TEST negativ			

4. Versuche nun die restlichen Felder auszufüllen, wenn ein ELISA-Test gemacht wurde.
5. Kannst du auch das Baumdiagramm so ergänzen, dass alle Daten aus der Tabelle enthalten sind?
6. Berechne mit Hilfe der Tabelle die Wahrscheinlichkeit für positive Testergebnisse.
7. Berechne mit Hilfe der Tabelle (bzw. dem Baum) die Wahrscheinlichkeit einer HIV-Infektion, wenn der ELISA-Test negativ war.
8. Weitere Situationen zum Üben:

a) *Männer / Frauen*
Gibt es auch einen Unterschied, ob ich als Mann oder Frau einen AIDS-Test machen lasse?
Es gibt in NRW etwa 8 750 000 Männer und 9 250 000 Frauen. Nach einer aktuellen Schätzung des Robert-Koch-Institutes beträgt die Basisrate für HIV in Deutschland bei Männern 0,075% und bei Frauen 0,025%.

b) *Berlin / Thüringen*
In Berlin leben etwa 3 400 000 Menschen, in Thüringen 2 400 000. Die Basisrate für HIV in Berlin wird auf 0,2%, in Thüringen aber auf nur 0,0017% geschätzt. Vergleiche auch mit den Ergebnissen aus NRW.

9. In einer Stadt mit 100 000 Einwohnern ist die Basisrate für eine HIV-Infektion nicht bekannt. Es soll der Zusammenhang zwischen der Basisrate und der A-posteriori - Wahrscheinlichkeit einer HIV-Infektion, wenn der ELISA-Test positiv war, untersucht werden. Zeichne einen Funktionsgraph, der diese Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Basisrate zwischen 0% und 1% darstellt.

AB 5: Das AIDS-Test Problem aus umgekehrter Sicht

VERBESSERTER AIDS-TEST von NOVOPHARMA ?

Der Konzern **NOVOPHARMA** behauptet einen besseren AIDS-Test entwickelt zu haben (als den bewährten *ELISA*-Test). 1 000 000 Proben von Versuchspersonen wurden untersucht. Der neue Test war bei 1998 Proben positiv, sonst negativ. Die Proben durchliefen anschließend das bekannte Testverfahren (*ELISA* + *Western-Blot* + weitere Tests), so dass man genau weiß, welche tatsächlich HIV-infiziert waren und welche nicht. Von den positiv Getesteten waren wirklich 999 HIV-infiziert, von den negativ Getesteten waren wirklich 998 001 nicht HIV-infiziert.

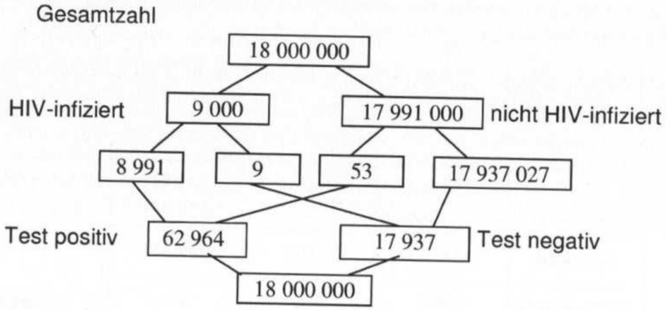
Aufgaben

Wie gut ist der Test von *NOVOPHARMA* wirklich?

1. Zeichne eine Tabelle und fülle sie mit den neuen Werten aus.
2. Zeichne ein Baumdiagramm und fülle es mit den neuen Werten aus.
3. Berechne die neuen Testwerte:
   a) Die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Test, wenn tatsächlich HIV-Infektion vorliegt (richtig positiv)
   b) Die Wahrscheinlichkeit für einen negativen Test, wenn keine HIV-Infektion vorliegt (richtig negativ)
4. Sollte man den neuen Test gegenüber dem alten ELISA-Test bevorzugen? (Begründung)
5. Berechne und unterscheide vom Ergebnis aus 3a):
   a) Die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion, wenn der Test positiv war.
   b) Die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion <u>und</u> einen positiven Test.

ÜBERBLICK 1: Wahrscheinlichkeitsbegriffe

Das AIDS-Test Beispiel für NRW:



Wir haben gesehen, dass es ganz unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten gibt. Wir unterscheiden:

1. Einzelwahrscheinlichkeit

Wir kennen schon die Einzelwahrscheinlichkeit. Sie gilt **nur für ein Merkmal.** z.B. „HIV-infiziert". Das trifft im Beispiel in 9 000 von 18 000 000 Fällen zu.

Man schreibt: $P(\text{HIV-infiziert}) = \frac{\text{Anzahl der Fälle, die das Merkmal erfüllen}}{\text{Gesamtzahl}} = \frac{9000}{18000000} = 0{,}05\%$

oder z.B. „Test positiv": $P(\text{Test positiv}) = \frac{62964}{18000000} = 0{,}3498\%$

2. UND-Wahrscheinlichkeit

Bei der UND-Wahrscheinlichkeit müssen **zwei Merkmale gleichzeitig** zutreffen: z.B. „HIV-infiziert" **und** „Test positiv". Das trifft in 8 991 von 18 000 000 Fällen zu.

Man schreibt: P(HIV-infiziert und Test positiv) =

$= \frac{\text{Anzahl der Fälle, die beide Merkmale erfüllen}}{\text{Gesamtzahl}} = \frac{8991}{18000000} = 0{,}04995\%$

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit bezieht sich nicht auf die Gesamtzahl, sondern nur auf die Fälle, die eine bestimmte Bedingung bereits erfüllen: z.B. „Test positiv" **unter der Bedingung** „HIV-infiziert". Das trifft für 8 991 von 9 000 Personen zu.

Man schreibt:

$P(\underbrace{\text{Test positiv}}_{\boxed{\text{Merkmal}}} \mid \underbrace{\text{HIV-infiziert}}_{\boxed{\text{Bedingung}}}) = \frac{\text{Anzahl der Fälle, die Merkmal und Bedingung erfüllen}}{\text{Anzahl der Fälle, die die Bedingung erfüllen}} = \frac{8991}{9000} = 99{,}9\%$

Man liest: Die Wahrscheinlichkeit für „Test positiv" <u>unter der Bedingung</u> „HIV-infiziert" oder <u>wenn</u> „HIV-infiziert".

Beachte! P(HIV-infiziert | Test positiv) unterscheidet sich von P(Test positiv | HIV-infiziert).

$P(\text{HIV-infiziert} \mid \text{Test posit}) = \frac{8991}{62964} \approx 14{,}28\%$

AB 6: Übungsaufgaben zum ÜBERBLICK 1

1.

a) Benenne (in der Kurzschreibweise) und berechne alle Einzelwahrscheinlichkeiten für das AIDS-Test Beispiel.

b) Benenne und berechne alle UND-Wahrscheinlichkeiten für das AIDS-Test Beispiel.

c) Benenne und berechne alle bedingten Wahrscheinlichkeiten für das AIDS-Test Beispiel.

d) Ordne den Wahrscheinlichkeiten vor dem Test die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten nach positivem und negativem Test zu und erläutere jeweils, welchen „Informationsgewinn" das Testergebnis brachte.

2.[2]

Ein Test zur Diagnose der Krankheit „Xelophantitis" (XELO) ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% positiv, wenn man an XELO erkrankt ist. Wenn man nicht an XELO erkrankt ist, fällt das Testergebnis mit 94%iger Wahrscheinlichkeit negativ aus. Vor der Teilnahme an einem Test bei einer routinemäßigen Untersuchung hat man mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1% XELO.

a) Übersetze die Wahrscheinlichkeitswerte aus dem Aufgabentext in einen Baum oder eine Tabelle mit Häufigkeitswerten und fülle sie komplett aus.

b) Welche Art von Wahrscheinlichkeit ist es jeweils? Schreibe die Wahrscheinlichkeiten auch in der Kurzform.

c) Benenne und berechne alle möglichen weiteren Wahrscheinlichkeitswerte für das XELO-Test Beispiel.

d) Bestimme zu den Wahrscheinlichkeiten **vor** dem Test die jeweils zugehörigen Wahrscheinlichkeiten **nach positivem** bzw. **negativem** Test und erläutere jeweils, welchen „Informationsgewinn" das Testergebnis brachte.

AB 7: Mordfall

AKTENZEICHEN XY-(ungelöst):

An einem Sommerabend im Juni 1999 ging nahe Wuppertal die 37-jährige Frau C.S. im Wald spazieren. Die Frau wurde von einem vermummten Fremden angegriffen, der sie mit einer Pistole bedrohte und versuchte, sie zu vergewaltigen. Als sie sich wehrte, schoss der Mann kaltblütig auf die Frau und floh. Die Frau überlebte.

Drei Tage später wurde von der Polizei der 25-jährige Schornsteinfeger G.K. festgenommen, der zugab, öfter in dem Waldstück gewesen zu sein, jedoch angeblich nicht zur Tatzeit. Das Opfer war bei einer Gegenüberstellung völlig unsicher, ob der Schornsteinfeger der Täter sein könnte, v.a. natürlich wegen der Vermummung und der Geschwindigkeit des Angriffes.

Dennoch wird schließlich der Schornsteinfeger des versuchten Mordes und der versuchten Vergewaltigung angeklagt. Die Anklage stützt sich vor allem auf ein Indiz, nämlich das Blut des Täters, dass sich unter den Fingernägeln der Frau befunden hatte und dessen Blutgruppe der des Schornsteinfegers entsprach. Ein Sachverständiger sagte aus, dass nur etwa 4% der Deutschen diese seltene Blutgruppe hätten. Er folgerte, dass eine zufällige Übereinstimmung der Blutgruppe nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% auftritt und dass deshalb der Schornsteinfeger mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% der Täter sein muss.

Aufgaben

1. Du sollst die Verteidigung des Angeklagten übernehmen. Die Frage ist: Ist die Überlegung des Sachverständigen richtig? Wenn nicht, schätze einen anderen Wert.
2. Veranschauliche den Fall mit einem Baumdiagramm oder einer Tabelle und gehe von 10000 möglichen Tätern aus. Gib nun eine Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Schornsteinfeger der Täter ist.
3. Dass genau 10 000 Männer die Tat begangen haben könnten, ist natürlich lediglich eine Schätzung. Wenn es ein weiteres Indiz gäbe (z.B. der Täter hatte blaue Augen), müsste natürlich die Menge der potenziellen Täter entsprechend verkleinert werden. Was passiert mit dem Ergebnis, wenn die Menge der möglichen Täter kleiner wird?

Info: Indizien vor Gericht
Die Annahme eines bestimmten Bevölkerungsteils als Grundmenge bleibt immer eine Schätzung. Indem man die Grundmenge verkleinert oder vergrößert, kann man eine obere und eine untere Grenze für die Wahrscheinlichkeit für die Täterschaft angeben. Die Angabe eines konkreten Bevölkerungsteils und die Zerlegung in Häufigkeiten liefern eine vernünftige Abschätzung und vermeiden Trugschlüsse wie die des Sachverständigen im Mordfall von Wuppertal.

4. a) Überlege eine vernünftige untere und obere Grenze für die Grundmenge der möglichen Täter (Begründung).
   b) Gib jeweils die Wahrscheinlichkeit vor der Bestimmung der Blutgruppe an, dass der Angeklagte der Täter ist.
   c) Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Angeklagte der Täter ist, wenn die Blutgruppe übereinstimmt.
   d) Überlege, welchen Informationsgewinn das Indiz „Übereinstimmung der Blutgruppe" jeweils bringt.

AB 8: Übungsaufgaben zum ÜBERBLICK 2

1.
a) Überlege, wann im AIDS-Test Beispiel Wahrscheinlichkeiten neu bewertet wurden.
b) Was waren jeweils die Hypothesen und die möglichen Indizien?
c) Wann brachten die Neubewertungen keine ausreichende Sicherheit und was wurde dann getan?

Löse die folgenden Probleme mit den gelernten Methoden (Baum oder Tabelle mit Häufigkeiten). Formuliere jeweils Hypothese und Indiz und gib A-priori - und A-posteriori Wahrscheinlichkeit an.

2.
30% aller Teilnehmer einer Konferenz sind Amerikaner. Laut einer repräsentativen Umfrage trinken 20% aller Amerikaner regelmäßig zum Frühstück Tomatensaft. Nur 2% der Nichtamerikaner trinken regelmäßig zum Frühstück Tomatensaft. Du siehst einen Konferenzteilnehmer Tomatensaft trinken.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Amerikaner ist?

3.
In einer amerikanischen Stadt gibt es zwei Taxiunternehmen, das eine hat nur grüne Taxis, die Taxis des anderen Unternehmens sind alle blau. Nachdem ein Taxi nachts einen Unfall verursachte und der Fahrer anschließend Fahrerflucht beging, kommt es zu einer Gerichtsverhandlung. Es gibt einen Zeugen, der das davonfahrende Taxi als blau identifizierte. Das Gericht untersucht nun die Fähigkeit des Zeugens, die Farbe eines Taxis bei Nacht richtig zu erkennen. Dazu geht ein Gerichtsdiener mit dem Zeugen an den Ort, von dem aus der Zeuge den Unfall beobachtet hat und lässt ihn die Farbe der zufällig vorbeifahrenden Taxis identifizieren.
Dabei ergibt sich folgendes:

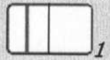
- 15% der vorbeifahrenden Taxis waren blau.
- Wenn ein vorbeifahrendes Taxi blau ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge es als blau identifiziert, 80%.
- Wenn ein vorbeifahrendes Taxi grün ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge es als blau identifiziert, 20%.

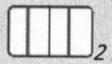
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein vorbeifahrendes Taxi blau ist, wenn der Zeuge es als blau identifiziert?

4.
Rauchsensoren eines bestimmten Typs bieten einen einigermaßen zuverlässigen Schutz, indem sie rechtzeitig bei Ausbrechen eines Brandes Alarm melden.
In 5 % aller Brandfälle gibt die Anlage allerdings keinen Alarm. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms beträgt 1% pro Tag. In der Fabrikationshalle, in der der Sensor installiert ist, beträgt das tägliche Brandrisiko 10%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in der Halle brennt, wenn der Alarm losgeht?

AB 9: Schwangerschafts- und Vaterschaftstest

Schwanger oder nicht? Besonders einfach kann dies mit dem **expect®**-Schwangerschaftstest festgestellt werden, der mit 99% Sicherheit am Tag nach Ausbleiben der Menstruation feststellt, ob Sie schwanger sind oder nicht.


1 rote Linie: Nicht schwanger !


2 rote Linien: Schwanger !

Aufgaben

1. Was könnte die Sicherheitsangabe im Werbetext bedeuten? Warum ist sie ungenau?

2. Realistischerweise stehen bei solchen Tests Wahrscheinlichkeiten für **richtig positive** und **richtig negative** Ergebnisse zur Verfügung. Nehmen wir für beide Wahrscheinlichkeiten 99% an. Schätzungen gehen davon aus, dass nur 100 von 1000 Frauen, die einen Schwangerschaftstest machen, tatsächlich schwanger sind.
   a) Gib die A-priori -Wahrscheinlichkeit für Schwangerschaft an.
   b) Schätze die A-posteriori -Wahrscheinlichkeiten für „Schwanger, wenn der Test positiv ist“ und für „Nicht schwanger, wenn der Test negativ ist“
   c) Zeichne eine Darstellung mit Häufigkeiten.
   d) Berechne die A-posteriori -Wahrscheinlichkeiten.

Aus dem Internet:

Sie wollen wissen, wer der Vater ist? Der Vaterschaftstest ist ein aktuelles und ebenso brisantes Thema. Die Berichte über Vaterschaftsklagen häufen sich derzeit in den Medien. Das verwundert nicht, da nach Meinung der Sachverständigen ca. 10 Prozent aller Kinder von einem anderen Mann als dem Vermuteten abstammen. Damit Sie sicher sein können, bieten wir Ihnen den DNA-Test **papacheck®** mit einer Ergebnissicherheit von über 99,99% an. Sollte der Test negativ ausfallen, ist eine Vaterschaft ausgeschlossen. Darauf können sie sich 100-prozentig verlassen! Der lässt sich einfach von zu Hause aus durchführen, ohne Arztbesuch und ohne Blutentnahme. Der Test kann allein aus den Speichelproben von Kind und möglichem Vater durchgeführt werden.

Im Einsatz des Tests hat sich gezeigt, dass er zu 99,99% positiv ist, wenn eine Vaterschaft vorliegt (Die Probe von Kind und dem möglichen Vater stimmen überein). Er ist zu 0,001% negativ (keine Übereinstimmung), wenn keine Vaterschaft vorliegt.

3. Überprüfe auch die Angaben zur Sicherheit des Vaterschaftstests „papacheck“!
   (gehe von 1.000.000 Untersuchungen aus)

AB 10: Mammografie

MEDIZINISCHE RUNDSCHAU

Brustkrebs ist die häufigste Krebsart bei Frauen. Frauen wird eine routinemäßige Brustkrebs-Vorsorgeuntersuchung ab 35 Jahren empfohlen, um eine eventuelle Krebserkrankung frühzeitig zu erkennen und behandeln zu können. Zunächst wird dabei eine sogenannte „Mammografie“ durchgeführt. Bei der Mammografie wird ein „Bild“ von der Brust gemacht, es ist also kein operativer Eingriff nötig.
Aus der langjährigen Erfahrung weiß man: Wenn eine Frau Brustkrebs hat, liefert die Mammografie mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,6% ein positives Ergebnis. Das Ergebnis der Mammografie ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% negativ, wenn kein Brustkrebs vorliegt. Bei 1 Million Frauen aus Deutschland, die jährlich routinemäßig an einer Vorsorgeuntersuchung für Brustkrebs teilnehmen, kommen tatsächlich im Durchschnitt 1500 Fälle von Brustkrebs vor.

Aufgaben:

1. a) Zeichne eine geeignete Darstellung mit Häufigkeiten zu diesem Sachverhalt.
   b) Schätze die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten nach positivem und negativem Testergebnis.
   c) Nenne die Fälle, bei denen die Mammografie falsche Ergebnisse liefert. Wieviele sind es jeweils?
   d) Diskutiere kurz mögliche Folgen der Fehler bei der Mammografie.
2. a) Schreibe Wahrscheinlichkeiten aus dem Text abgekürzt in der gelernten Schreibweise. Welche Arten von Wahrscheinlichkeiten sind es jeweils?
   b) Gib P(Brustkrebs) für eine durchschnittliche Frau aus Deutschland, die routinemäßig zur Vorsorgeuntersuchung geht, an. Wie nennt man diese Wahrscheinlichkeit?
   b) Gib auch P(nicht Brustkrebs **und** positive Mammografie) an.
3. a) Berechne mithilfe der Darstellung die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zur Vorsorgeuntersuchung geht, Brustkrebs hat, wenn die Mammografie
   b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zur Vorsorgeuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, wenn die Mammografie ein negatives Ergebnis liefert.
4. Diskutiere kurz den Aussagewert einer Mammografie im Hinblick auf die Ergebnisse aus Aufgabe 3. Betrachte dazu die Situation vor und nach der Mammografie.

AB 11: BSE-Krise

Der Landwirt vom 24.11.2002

Auch 2 Jahre nach dem ersten (offiziellen) Fall von Rinderwahnsinn ist die BSE-Krise in Deutschland noch nicht beendet. Seither wurden in Deutschland 5,5 Millionen Rinder getestet. Dabei wurden bislang 232 BSE-Erkrankungen festgestellt. Es gebe „keinerlei Grund für eine Entwarnung", sagte Verbraucher-Ministerin Renate Künast (Grüne) jetzt in Berlin. Der Rindfleisch-Konsum liegt aber heute wieder auf dem vorherigen Niveau. Zur Verbesserung des Schutzes der Verbraucher wurden BSE-Schnelltests eingeführt. Ziel der Ministerin ist es, dass in Deutschland nur noch BSE-getestetes Fleisch verkauft wird. Für den Verbraucher stellt sich nun die Frage, wie zuverlässig die verwendeten Schnelltests sind, und welche Aussagekraft die Bezeichnung „BSE-getestet" hat.

Welche BSE-Tests gibt es? Wie funktionieren sie?

Derzeit verfügbare Schnelltests beruhen auf der Messung der Konzentration von krankhaften Prionen im Gehirn oder Rückenmark des Rindes. Da Gehirn und Rückenmark aber lebenswichtig sind, kann man den Schnelltest nur bei toten Rindern durchführen. Der Forschung ist es in den 2 Jahren aber noch nicht gelungen, einen Bluttest einzuführen, mit dem bereits am lebenden Tier sowie am Fleisch BSE nachgewiesen werden kann. Die Ungenauigkeit der Schnelltests erfordert derzeit noch, dass man Proben von Gewebe nimmt, das stark mit Prionen belastet ist, also aus dem Gehirn oder dem Rückenmark.

Wie sicher ist der Schnelltest?

Nach Angaben des Ministeriums für Umwelt und Naturschutz, Landwirtschaft und Verbraucherschutz in Nordrhein-Westfalen sind sog. Schnelltests (z.B. der Schweizer Firma Prionics) die beste existierende Möglichkeit. Fällt der Test positiv aus, so wird das Ergebnis mit Hilfe aufwendigerer Testverfahren bestätigt, und es ist sicher, dass das betreffende Rind BSE-infiziert ist. Fällt der Test negativ aus, dann lag die Konzentration der krankhaften Prionen unterhalb der Detektionsgrenze des Tests. Letzteres ist allerdings keine Garantie, dass das betreffende Rind nicht infiziert ist: "Es gibt keinen biochemischen Test, der eine 100-prozentige Sicherheit bietet", kommentiert Dr. Bruno Oesch, einer der Gründer von Prionics. In der derzeitigen Praxis werden allerdings negative Ergebnisse des Schnelltests ohne weitere Bestätigungstests akzeptiert.

Aufgaben

1. Zeiche ein Baumdiagramm oder eine Tabelle zum Problem der Sicherheit des BSE-Tests und trage die verfügbaren aktuellen Zahlen zu BSE-Tests in Deutschland ein (ausgehend von 5.500.000 getesteten Rindern). Formuliere mögliche Hypothesen und Indizien, A-priori – und A-posteriori Wahrscheinlichkeiten.

2. Welcher „Testfehler" ist im Sinne des Verbrauchersschutzes schlimmer?

3. Wir haben gelesen, dass es aufgrund der Ungenauigkeit des Tests vorkommen kann, dass der Test negativ bleibt und trotzdem das Rind BSE-infiziert ist.
   a) Schreibe in das entsprechende Feld des Baumes bzw. der Tabelle eine selbstgewählte Zahl von Fällen (z.B. 10) ein.
   b) Gib für diese Zahl die Wahrscheinlichkeit für die „Sicherheit" des Testes an, wenn er negativ ausging. (kurz: P(Nicht BSE-infiziert | Test negativ)
   c) Untersuche, wie sich diese Fälle auf die Trefferwahrscheinlichkeit auswirken, dass der Test positiv wird, wenn das Rind BSE-infiziert ist (Richtig-positiv-Rate).

AB 12: Drogen im Straßenverkehr

Die Polizei informiert... (vom 29.10.2002)

Es sind immer mehr Autofahrer unterwegs, die unter Drogen stehen. Immer mehr Verkehrsunfälle gehen auf Drogenkonsum des Fahrers zurück. Seit einiger Zeit stehen der Polizei sogenannte Drogenschnelltests zur Verfügung. Die Beamten können nun unmittelbar vor Ort feststellen, ob die Verkehrsteilnehmer unter Einfluss illegaler Betäubungsmittel fahren. Kontrollen werden gezielt zum Beispiel in der Nähe von großen Diskotheken durchgeführt. Denn wenn am Wochenende die Party-Szene feiern geht, sind oft Haschisch und Ecstasy mit im Spiel. Gerade bei den 18 bis 25jährigen. Diese Gruppe haben die Beamten besonders im Visier.

Die neuen Drogenschnelltests

Eine aktuelle Beeinträchtigung durch Drogen lässt sich am besten über einen Bluttest nachweisen. Dieser lässt sich jedoch nicht unmittelbar vor Ort durchführen und verursacht erheblichen Aufwand.
Neue Drogenschnelltests sollen Abhilfe schaffen. Drei verschiedene Methoden wurden entwickelt, um einen Nachweis von Drogenkonsum vor Ort zu ermöglichen:

1. Urintest
2. Speicheltest im Mund
3. Schweißtest auf der Stirn (siehe Bild)

In einer EU-weiten Untersuchung ergab sich für den Nachweis von Cannabis- bzw. Ecstasykonsum mit den verschiedenen Testarten folgendes (*):

Cannabis / Haschisch	Urintest Syva	Speicheltest Oralscreen	Schweißtest Drugwipe
richtig-positive Testergebnisse	97%	25%	nicht tauglich
richtig-negative Testergebnisse	92%	84%	

Ecstasy	Urintest Syva	Speicheltest Oralscreen	Schweißtest Drugwipe
richtig-positive Testergebnisse	100%	90%	98%
richtig-negative Testergebnisse	88%	55%	67%

(*) Daten aus ROSITA-Projekt: "Evaluation of different roadside drug tests"

Aufgaben:

In einer großen Testaktion der Polizei werden Verkehrsteilnehmer an Freitag- und Samstagabenden auf Drogenkonsum getestet. Die oben angegebenen Drogenschnelltests (Urin, Speichel, Schweiß) werden jeweils bei 500 Autofahrern durchgeführt, die bei der Kontrolle den Beamten verdächtig erscheinen. Man kann davon ausgehen, dass in der Praxis von den Polizeibeamten ein Drogentest erst bei gewissen auffälligen Verhaltensanzeichen durchgeführt wird und die Beamten Übung im Erkennen von Verdächtigen haben.
Spätere Blutuntersuchungen zeigten, dass 60% der getesteten Fahrer tatsächlich Cannabis und 40% Ecstasy genommen hatten.

1. Formuliere Hypothesen und Indizien, A-priori – und A-posteriori Wahrscheinlichkeiten.
2. Gib jeweils für Urin- bzw. Speicheltest die Wahrscheinlichkeit an, dass vom Fahrer bei positivem Testergebnis tatsächlich Cannabis konsumiert wurde.
3. Gib auch jeweils die Wahrscheinlichkeit an, dass der Fahrer tatsächlich kein Cannabis konsumiert hat, wenn das Testergebnis negativ war.
4. Bewerte jeweils die Tests auf ihre Tauglichkeit bei Verkehrskontrollen
5. Berechne dieselben Wahrscheinlichkeiten bei Urin-, Speichel- bzw. Schweißtests für Ecstasykonsum.
6. Bewerte auch hier jeweils die Tests auf ihre Tauglichkeit bei Verkehrskontrollen

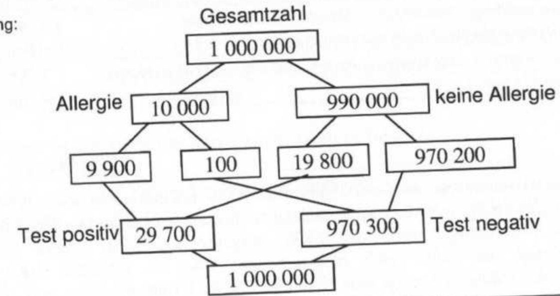
Klassenarbeit

Aufgabe 1 *(27 Pkt.)*

Wenn jemand eine Katzhaarallergie hat, so fällt der entsprechende Test auch zu 99% positiv aus. Umgekehrt erhalten 98% der Personen, die keine Katzenhaarallergie haben, ein negatives Testergebnis. Man vermutet, dass ca. 1% der Bevölkerung allergisch gegen Katzenhaare ist. 1000000 Personen nehmen an einem Allergietest teil.

a) Vervollständige mit Hilfe der gegebenen Daten das abgebildete Doppelbaumdiagramm. Beschrifte alle Felder! (Struktur des Baumes ohne Beschriftung war vorgegeben)

Lösung:



Bewertung	Modellierung (mit Baum): Beschriftung Häufigkeiten berechnen und einsetzen	2 Pkt. 5 Pkt.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Person eine Katzenhaarallergie, wenn der Test positiv ausfällt?

Lösung	P(Allergie | Test positiv) = 9900 / 29700 ≈ 33,3%	3 Pkt.
Bewertung	1P. (Bezeichnung) 1P. 1P.	

c) Berechne P(keine Allergie I Test negativ), P(Test negativ I keine Allergie) und P(keine Allergie und Test negativ).

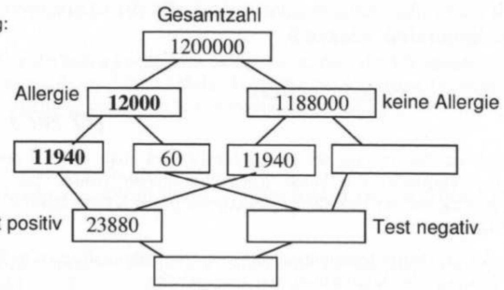
Lösung	P(keine Allergie | Test negativ) = 970200 / 970300 ≈ 99,99% P(Test negativ | Keine Allergie) = 970200 / 990000 ≈ 98% P(Test negativ und keine Allergie) = 970200 / 1000000 ≈ 97,02%	2 Pkt. 2 Pkt. 2 Pkt.
Bewertung	jeweils 1P. 1P.	

d) Berechne eine mögliche A-priori-Wahrscheinlichkeit zu dem Allergietest und eine dazugehörige a-posteriori-Wahrscheinlichkeit.

Lösung	a priori: P(Allergie) = 10000 / 1000000 = 1% a posteriori: P(Allergie |Test positiv) = 9900 / 29700 ≈ 33,3%	3 Pkt. 3 Pkt.
Bewertung	jeweils 1P. (Bezeichnung) 1P. 1P.	

e) Auf Blatt 2 siehst du den Baum eines Testdurchgangs, bei dem 50% der positiv Getesteten auch wirklich Allergiker waren. Wieviel Prozent der Nicht-Allergiker haben ein positives Ergebnis erhalten? (Baum mit den fett gedruckten Werten und Beschriftung war vorgegeben)

Lösung:



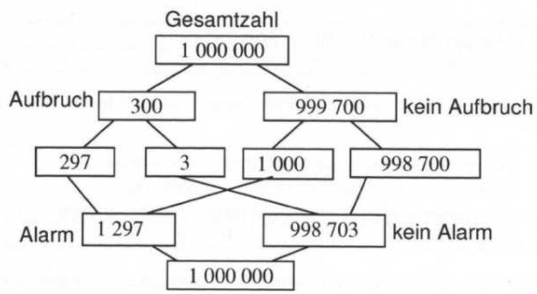
Bewertung	Differenzbildung: Gesamtzahl – Allergie = Keine Allergie Anzahl Test positiv =23880 (=2·11940, da 50%) Anzahl Test pos. und Allergie = Anzahl Test pos. und keine Allergie 11940 / 1188000 ≈ 1%	1 Pkt. 1 Pkt. 1 Pkt. 2 Pkt.

Aufgabe 2 *(21 Pkt.)*

In München liegt die Wahrscheinlichkeit, dass ein abgestellter PKW aufgebrochen wird, bei 0,03%. Wir gehen davon aus, dass alle PKWs mit einer Alarmanlage ausgestattet sind, die laut Hersteller mit 99%iger Wahrscheinlichkeit anschlägt, wenn der PKW aufgebrochen wird. Leider geht die Alarmanlage auch manchmal los, wenn sich niemand am Auto zu schaffen macht. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlalarm beträgt laut Hersteller 0,1%. (Hinweis: Gehe von 1000000 abgestellter PKWs aus)

a) Ein PKW ist in München geparkt und die Alarmanlage aktiviert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde der PKW aufgebrochen, wenn der Alarm ertönt?

Lösung



Bewertung	Modellierung (mit Baum o. Tabelle): Beschriftung Häufigkeiten berechnen und einsetzen P(Aufbruch | Alarm) = 297 / 1297 ≈ 22,9%	2 Pkt. 4 Pkt. 3 Pkt.

b) Wie müssen die Wahrscheinlichkeitsangaben des Herstellers jeweils geändert werden, damit sich der Wert aus a) erhöht? (Begründung, keine Rechnung!)

Lösung	*Die Wahrscheinlichkeit für Fehlalarme muss verringert*	***2 Pkt.***
	oder P(Alarm | Aufbruch) erhöht werden	***2 Pkt.***
Bewertung	*jeweils 2 Pkt.*	

c) Vervollständige die in Berlin erhobene Statistik, für die sehr viele Autos über einen langen Zeitraum beobachtet wurden (Tabelle mit den fett gedruckten Werten und Beschriftung war vorgegeben).

Lösung:

	Gesamt	**Aufbruch**	**kein Aufbruch**
Gesamt	1000000	1000	**999000**
Alarm	1989	**990**	**999**
kein Alarm	998011	**10**	998001

Bewertung	*Modellierung (mit Tabelle): Häufigkeiten berechnen und einsetzen*	***3 Pkt.***

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde in Berlin ein PKW aufgebrochen, wenn der Alarm ertönt?

Lösung	*P(Aufbruch | Alarm) = 990 / 1989 ≈ 49,8%*	
Bewertung	*1P. (Bezeichnung) 1P. 1P.*	***3 Pkt.***

e) Wie groß ist die Aufbruchswahrscheinlichkeit in Berlin?

Lösung	*P(Aufbruch) = 1000 / 1000000 = 0,1%*	
Bewertung	*1P. (Bez.) 1P.*	***2 Pkt.***

Anhang II

Dunkelfeldforschung

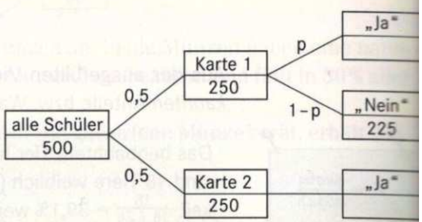
3.6 Dunkelfeldforschung

1 Die SV einer Schule möchte untersuchen, ob Schülerinnen und Schüler bereits Drogenerfahrungen haben. (Andere mögliche Untersuchungsthemen: Mogeln bei Klassenarbeiten; Ladendiebstahl; Gewalt in der Schule; Fremdenfeindlichkeit; Zahnpflege; ...)
Da dies sehr heikle Themen sind, ist zu befürchten, dass eine Reihe der Betroffenen nicht wahrheitsgemäß antworten wird. Dies würde aber die ganze Untersuchung verfälschen. Deshalb wendet man eine sogenannte Dunkelfeldforschung an.

2 Es soll sichergestellt werden, dass aus der Antwort der einzelnen Person kein Rückschluss auf ihren Drogenkonsum möglich ist und sie daher unbesorgt wahrheitsgemäß antworten kann. Dazu bereitet man zehn gleichartige Karten vor. Auf fünf dieser Karten steht die Frage:
„Hast du schon einmal Drogen genommen?“
Auf den anderen fünf Karten steht:
„Antworte mit JA!“
Jede befragte Person schaut sich diese Karten an, mischt sie dann selbst, wählt verdeckt eine Karte aus und beantwortet sie mit „Ja“ oder „Nein“.

Wieso ist bei diesem Vorgehen aus der Antwort der einzelnen Person kein Rückschluss auf ihren Drogenkonsum möglich?
Warum ist es wichtig, dass jeder Befragte das Verfahren vollständig verstanden hat, und wie könnte man das erreichen?

3 Mit den gesammelten Daten kann man nun eine Schätzung für den Anteil p der Drogennehmer an der Schule vornehmen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass bei 500 befragten Personen nicht genau 250 Karte 1 bekommen werden und dass unter diesen der Anteil der Drogennehmer nicht genau p betragen wird.



Bestimmt p, wenn es 225 „Nein“-Antworten gegeben hat. Erläutert, wieso man hier Aussagen über die Gesamtheit der Schüler machen kann, obwohl man nichts über den Einzelnen erfährt.

4 Sammelt selbst praktische oder theoretische Erfahrungen mit diesem Verfahren und veröffentlicht eure Ergebnisse mit genauen Erläuterungen in eurer Schülerzeitung.

Praktisch
Führt an eurer Schule eine derartige Untersuchung durch (dabei sollten mindestens 400 Personen befragt werden!) und wertet sie aus.

Theoretisch
Simuliert das Verfahren mit einem Tabellenkalkulationsprogramm.
Was kann passieren, wenn man zu wenig Leute befragt?

SACHERSCHLIESSUNG
der
Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien

Klassifikation

Aufstellungsort: ☐ HoA ☒ HoD

MSC2010: 97B10 – 97U20 – 97U30 – 97K50 – 00A35

BK: 31.04 – 31.70 – 81.70

Schlagwortketten nach RSWK
Deutschland – Wahrscheinlichkeitsrechnung –
Mathematikunterricht – Schulbuch (2341)

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

06. Jun. 2012
Datum

Unterschrift