



universität  
wien

# MASTERARBEIT

Titel der Masterarbeit

„Die Fragmentations-Koagulationsgleichung“

Verfasser

Georg Lochmann Bakk.rer.nat

angestrebter akademischer Grad

Master of Science (MSc)

Wien, 2012

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 066 861

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Masterstudium Astronomie UG2002

Betreuerin / Betreuer:

Ao. Univ.-Prof. Dr. Ernst Dorfi



## Abstract

This thesis deals with the formation of planetesimals in protoplanetary disks. The main obstacle that has been treated by several authors is the so called "meter-size barrier". This threshold on the one hand originates from a fast radial drift of meter-size particles. On the other hand, very large relative velocities between these objects and the whole ensemble lead to fragmentation. First we construct a model of a protoplanetary disk based on observational data from Andrews et al. (2009). Then we perform numerical simulations to follow the growth of dustpebbles within this disk. The results show that the standard model of a protoplanetary disk is unsuitable for building larger rocks. However, with slightly different parameters it seems possible. The disk has to be colder with a power law according to  $T \sim r^{-0.6}$  and less turbulent  $\alpha = 10^{-5}$ . In addition the fragmentation velocity has been raised from 1 to 5 m/s. Under these circumstances the mean particle size in the inner regions ( $r < 5$  AU) grows to some meters in size and therefore trespasses the aforementioned barrier.

## Zusammenfassung

Diese Arbeit stellt ein Programm zur numerischen Lösung der Planetenentstehung vor. Das größte Problem bei der Entwicklung von Planetesimalen stellt die so genannte "meter-size barrier" dar. Diese Grenze basiert auf hohen radialen Geschwindigkeiten von metergroßen Körpern und auf einer verstärkten Fragmentation durch sehr große Relativgeschwindigkeiten zwischen diesen Teilchen und dem restlichen Ensemble. Das verwendete Standardmodell der protoplanetaren Scheibe beruht auf Beobachtungsdaten von Andrews et al. (2009). Basierend auf der numerischen Lösung der Fragmentations-Koagulationsgleichung wurde die Entwicklung von Staubkörnern mitverfolgt. Die Ergebnisse zeigen, dass das Standardmodell einer protoplanetaren Scheibe nicht geeignet ist, größere Staubteilchen zu bilden. Betrachtet man hingegen eine Scheibe mit einem Temperaturverlauf gemäß  $T \sim r^{-0.6}$ , die weniger turbulent  $\alpha = 10^{-5}$  ist und eine Fragmentationsgeschwindigkeit von 5 m/s, dann scheint es möglich, dass aus dem Staub Planetesimale hervorgehen. Die Staubkörner wachsen in den inneren Regionen der protoplanetaren Scheibe ( $r < 5$  AU) bis zu einigen Metern an und überwinden damit die zuvor beschriebene Wachstumsgrenze.

# Danksagung

Folgenden Personen bin ich zu Dank verpflichtet:

Diese Arbeit entstand auf Anregung und unter der Leitung von Ernst Dorf. Bei ihm möchte ich mich an dieser Stelle für die Unterstützung, Gesprächsbereitschaft und Motivation bedanken.

Auch möchte ich mich im Besonderen bei meinen Eltern bedanken, die mich nicht nur finanziell, sondern auch moralisch sehr unterstützt haben und mir bei vielen Formulierungen und auch bei der Korrektur der Diplomarbeit sehr hilfreich zur Seite standen.

Außerdem danke ich meinen Mitstudenten und Freunden Florian Ragossnig und Daniel Steiner, die sich nicht gescheut haben, Kritik zu üben und Verbesserungsvorschläge einzubringen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>IV</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Anfangsmodell der protoplanetaren Scheibe</b>	<b>2</b>
2.1. Vertikale Struktur der Scheibe . . . . .	6
2.2. Zusammenfassung . . . . .	11
<b>3. Die Fragmentations-Koagulationsgleichung</b>	<b>14</b>
3.1. Herleitung der Fragmentations-Koagulationsgleichung . . . . .	15
3.2. Analytische Lösungen der Koagulationsgleichung . . . . .	20
3.2.1. Konstanter Kern, $C_{m_1, m_2} = 1$ . . . . .	21
3.2.2. Linearer Kern, $C_{m_1, m_2} = \frac{m_1 + m_2}{2}$ . . . . .	22
3.2.3. Zusammenfassung der Lösungen . . . . .	22
3.3. Analytische Lösung der Fragmentationsgleichung . . . . .	24
3.4. Erweiterung der Erhaltungsgleichung auf ein zeitabhängiges Volumen . .	25
3.5. Vertikale Integration . . . . .	27
<b>4. Physikalischer Kern und Relativgeschwindigkeiten</b>	<b>31</b>
4.1. Brown'sche Bewegung . . . . .	32
4.2. Vertikale Ablagerung . . . . .	33
4.3. Radiale Geschwindigkeit . . . . .	34
<b>5. Diskretisierung und Algorithmen</b>	<b>35</b>
5.1. Logarithmische Massenskala . . . . .	35
5.2. Radiale Skala . . . . .	38
5.3. Zeitschritt und Limitierung . . . . .	40

5.4. Diskretisierung der Fragmentations-Koagulationsgleichung . . . . .	42
5.4.1. Diskrete Form der Koagulation . . . . .	42
5.4.2. Diskrete Form der Fragmentation . . . . .	48
5.4.3. Diskrete Form der Kombination aus Fragmentation und Koagulation	57
5.4.4. Diskrete Form der Advektion . . . . .	64
5.5. Modellberechnung . . . . .	66
<b>6. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>70</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>72</b>
<b>Anhang A. Varianten der Fragmentations- Koagulationsgleichung</b>	<b>76</b>
A.1. Perfekte Koagulation . . . . .	76
A.2. Reine Fragmentation . . . . .	80
<b>Anhang B. Fragmentationsgleichung mit konst. Kern und gleichmäßiger Aufspaltung</b>	<b>82</b>
<b>Anhang C. Vertikale Integration der Erhaltungsgleichung</b>	<b>84</b>

# Tabellenverzeichnis

2.1. Sternparameter, aus Andrews et al. (2009) . . . . .	11
3.1. Analytische Lösungen zur Problemstellung der perfekten Koagulation . . . . .	23
5.1. Parameter der katastrophalen Grenzenergie, aus Benz & Asphaug (1999) . . . . .	51
5.2. Parameter der Verteilungsfunktion nach einer Fragmentation, aus Paszun & Dominik (2009) . . . . .	54

# Abbildungsverzeichnis

2.1. Säulendichte in der protostellaren Wolke des Sonnensystems, aus Weidenschilling (1977) . . . . .	3
2.2. Säulendichte und Temperatur in protostellaren Wolken, aus Andrews & Williams (2007) . . . . .	3
2.3. Schnitt durch die Gas- und Staubscheibe . . . . .	13
3.1. Darstellung des beobachteten Volumens durch Hohlzylinder . . . . .	28
5.1. Klasseneinteilung zur Massendiskretisierung . . . . .	36
5.2. Zuordnungsarten der aus einem Stoß resultierenden Körper . . . . .	38
5.3. Relative Fehler bei Koagulation und einem konstanten Kern . . . . .	45
5.4. Zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion bei Koagulation und einem konstanten Kern . . . . .	45
5.5. Relative Fehler bei Koagulation und einem linearen Kern . . . . .	47
5.6. Zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion bei Koagulation und einem linearen Kern . . . . .	47
5.7. Katastrophale Grenzenergie . . . . .	52
5.8. Relative Fehler bei Fragmentation und einem konstanten Kern . . . . .	55
5.9. Anzahldichte in den Massenbins nach der Integrationszeit bei gleichmäßiger Aufspaltung und einem konstanten Kern . . . . .	55
5.10. Relativgeschwindigkeit durch Brown'sche Bewegung . . . . .	59
5.11. Zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion bei Koagulation und Fragmentation mit Brown'scher Bewegung . . . . .	59
5.12. Entwicklung der Säulendichte durch Brown'sche Bewegung und vertikaler Ablagerung . . . . .	61
5.13. Radiale Geschwindigkeiten der verschiedenen Teilchen . . . . .	62
5.14. Entwicklung der Säulendichte mit allen Geschwindigkeiten . . . . .	63
5.15. Mittlere radiale Geschwindigkeiten des Ensembles . . . . .	65
5.16. Position des radialen Maximums der Verteilungsfunktion . . . . .	65

5.17. Entwicklung der Staubscheibe nach dem Basismodell . . . . .	67
5.18. Entwicklung der Staubscheibe nach dem Planetesimal-Modell .	69
6.1. Mittlere Teilchenradien der Modelle aus Kapitel 5.5 . . . . .	71
C.1. Schnitt durch einen Hohlzylinder . . . . .	85



# 1. Einleitung

Eine wichtige Fragestellung der Wissenschaft befasst sich mit dem Thema Planeten. Wie und wo können sie entstehen? Was sind die Grundvoraussetzungen, damit aus Staubteilchen rund um die Sonne größere Himmelskörper hervorgehen können? Die Beantwortung dieser und vieler anderer Fragen haben sich Wissenschaftler seit jeher als Ziel gesteckt. Marquis de Laplace (1798) verfasste eines der ersten Traktate. In seiner Arbeit stellt er Überlegungen an, wie sich das Sonnensystem aus der gasförmigen Atmosphäre der Sonne entwickelt haben könnte. Seine Ansichten teilen viele andere Forscher. Die meist benutzte Hypothese beruht darauf, dass die noch junge Sonne eine Scheibe aus einem Gas-Staubgemisch besitzt. Aus dieser Scheibe formen sich durch verschiedenste physikalische Phänomene die Planeten. Es gibt mehrere teils konkurrierende Vorstellungen zur Entwicklung. In meiner Arbeit findet das "core-accretion-model" von Safronov (1972) Verwendung. Zuerst lagert sich der Staub langsam in der Mittelebene ab. Währenddessen kollidieren Kleinstteilchen und bleiben aneinander haften. Im weiteren Verlauf wandert der Staub ins Zentrum und es treten Stöße durch Turbulenzen und radiale Relativgeschwindigkeiten auf. Einzelne Staubkörner wachsen dabei schneller als andere und weisen am Ende eine große Masse (etwa eine Marsmasse) auf. Diese beginnen aus ihrer Umgebung zuerst die kleineren Objekte und dann das Gas zu akkretieren. Dieses Schema weist ein großes Problem auf. Erreichen die Planetesimale eine Größe von wenigen Metern, dann führen Kollisionen zu einer Zerstörung der Teilchen. Zudem ist die radiale Geschwindigkeit dieser Teilchen am größten. Meine Arbeit befasst sich mit einer Parameterstudie, um diese Grenze, die so genannte "meter-size barrier", zu überwinden. Im nächsten Kapitel beginne ich, die Staubscheibe zu erstellen. Das dritte Kapitel befasst sich mit der Herleitung der Koagulationsgleichung, einigen analytischen Lösungen, der Erweiterung auf ein variables Volumen und der Vereinfachung durch eine vertikale Integration. Das vierte Kapitel bespricht die Kollisionsraten und die Relativgeschwindigkeiten zwischen den Körpern. Im fünften Kapitel werden die Fragmentations-Koagulationsgleichungen diskretisiert und getestet und zuletzt ein Gesamtmodell berechnet. Das letzte Kapitel gibt eine Zusammenfassung und einen Ausblick.

## 2. Anfangsmodell der protoplanetaren Scheibe

Um die Entwicklung der Staubteilchen in einer protoplanetaren Scheibe mitzuverfolgen, muss man zuerst ein Anfangsmodell erstellen. Ich folge in meiner Arbeit den Artikeln von Brauer et al. (2008) und Andrews et al. (2009) und betrachte eine sehr dünne Scheibe ( $z \ll r$ ), die aus einem Staub-Gasgemisch besteht. Der einfachste Ansatz für ein Modell einer zirkumstellaren Scheibe beschreibt der "Minimum Mass Solar Nebula" (MMSN). Bei dieser protoplanetaren Struktur, die unter anderem in Weidenschilling (1977) entwickelt wurde, geht man grundsätzlich davon aus, dass alle höheren Elemente, die in den Planeten des Sonnensystems vorhanden sind, zuerst in der protoplanetaren Scheibe enthalten waren. Zudem nimmt man an, dass das Verhältnis zwischen den Elementen in der protoplanetaren Scheibe gleich ist der chemischen Zusammensetzung der Sonne. Weidenschilling (1977) verwendet die Häufigkeit von Eisen in den einzelnen Planeten und erhöht deren Masse mit Wasserstoff und Helium, bis die solare Zusammensetzung erreicht ist. Daraus ergibt sich eine minimale Gesamtmasse der protoplanetaren Wolke von  $M_{disk} = 0.01 - 0.1$  Sonnenmassen. Daraufhin verteilt man die Masse der Planeten auf aneinander grenzende Kreisringe, wobei der innere und äußere Rand sowie der Asteroidengürtel zwischen Mars und Jupiter zu beachten sind. Die Abbildung 2.1 zeigt die radiale Verteilung der Masse, wiedergegeben durch die Säulendichte  $\Sigma$ . Sie folgt laut Weidenschilling (1977) dieser Funktionalität:

$$\Sigma \propto r^{-\delta} \quad \text{mit} \quad \delta = 1.5 . \quad (2.1)$$

Die größten Abweichungen von Formel 2.1 ergeben sich für Merkur und den Asteroidengürtel zwischen Mars und Jupiter. Beobachtungen (z.B. Andrews et al. (2009)  $M_{disk} = 0.005 - 0.14 M_{\odot}$  oder Andrews & Williams (2007)  $M_{disk} \sim 0.06 M_{\odot}$ ) bestätigen den Massenbereich des MMSN-Modells. Die Resultate suggerieren aber, dass die Verteilung der Masse einer anderen Gleichung folgt. Dazu findet man im linken Bild in Abbildung 2.2 drei Linien. Diese geben verschiedene Säulendichten an, die Strichpunktli-

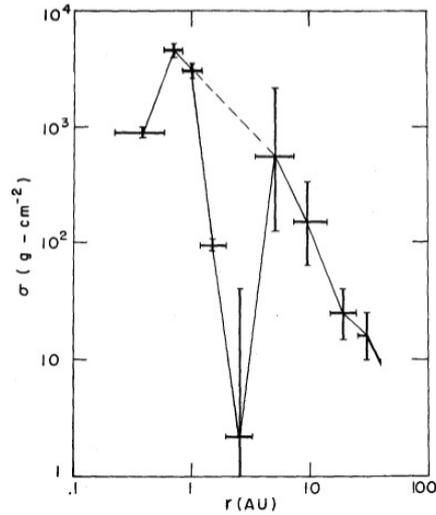


Abbildung 2.1.: **Säulendichte in der protostellaren Wolke des Sonnensystems, aus Weidenschilling (1977)**

Die Abbildung zeigt die logarithmisch aufgetragene Säulendichte gegenüber dem radialen Abstand. Die horizontalen Balken stellen die Breite der Zellen, auf denen die Planeten verteilt werden, und die vertikalen die Fehler in der chemischen Zusammensetzung der Planeten dar.

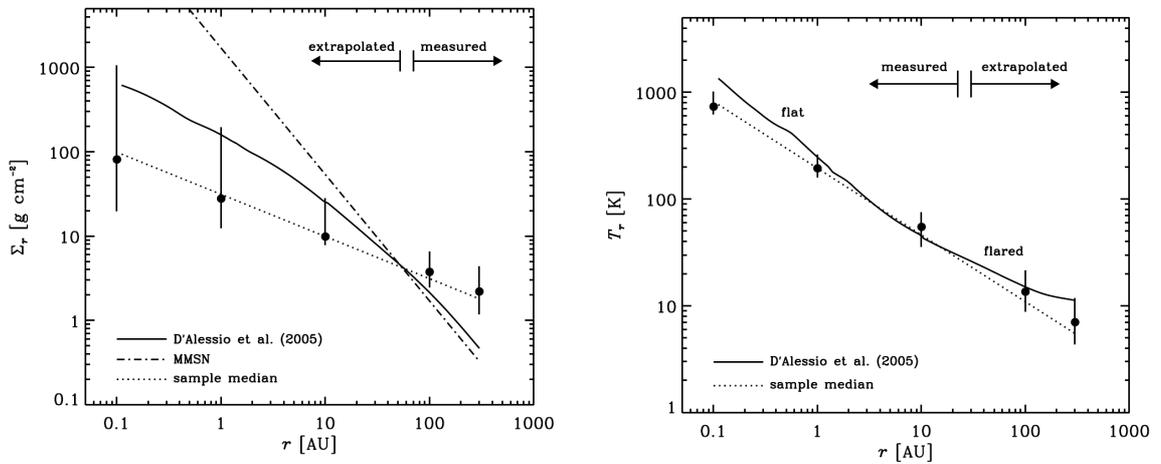


Abbildung 2.2.: **Säulendichte und Temperatur in protostellaren Wolken, aus Andrews & Williams (2007)**

Das linke Bild zeigt die Säulendichten des MMSN-Modells (Strichpunkt), eines verbesserten Modells (durchgezogen) und der Messungen (gepunktet). In der rechten Abbildung ist der mittlere Temperaturverlauf in den Wolken für das verbesserte Modell und die Messungen aufgetragen.

nie entsteht durch das MMSN-Modell, die durchgezogene durch ein detaillierteres Modell und die punktierte Linie aus den Messungen. Man erkennt, dass die Säulendichte des MMSN-Modells im Zentrum stark überschätzt wird. Der wesentliche Unterschied zwischen den Modellen und den Beobachtungen liegt aber darin, dass bei den gemittelten Messwerten der Verlauf der Säulendichte zu größeren Radien hin nicht so stark abnimmt. Dem Exponenten geben Andrews & Williams (2007) einen Wert von  $\delta \sim 0.5$ , weisen in ihrer Arbeit aber darauf hin, dass die Steigung im Potenzgesetz der Säulendichte zu klein ist. Neuere Beobachtungen, wie in Andrews et al. (2009) beschrieben, verwenden für die Säulendichte ein Potenzgesetz für kleine Radien und einen exponentiellen Abfall für große Radien:

$$\Sigma(r) \propto \left(\frac{r}{R_c}\right)^{-\delta} \exp\left[-\left(\frac{r}{R_c}\right)^{2-\delta}\right]. \quad (2.2)$$

$R_c$  beschreibt hierbei einen charakteristischen Radius, der zwischen 20 – 200 AU liegt. Andrews et al. (2009) finden einen Medianwert des Exponenten von  $\delta = 0.9$  mit einer Bandbreite von 0.4 bis 1. Dieser Ansatz stimmt besser mit selbstähnlichen Lösungen von viskosen Scheiben und der damit festgelegten Massenakkretion überein. Die Auflösung in ihren Beobachtungen ist schon so gut, dass sie in einigen Scheiben eine "cavity" im inneren Bereich finden. Diese leergeräumten Ringe deuten darauf hin, dass in diesen Scheiben schon eine Art Planetenentstehung stattfindet. Ich beschränke mich aber auf Scheiben, die keinen solchen Bereich besitzen. Integriert man die Säulendichte über Kreisinge, dann kann man die Normierungskonstante zur Gleichung 2.2 bestimmen:

$$2\pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} \Sigma_{ges}(r) r dr = 2\pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} (\Sigma_g(r) + \Sigma_d(r)) r dr = M_{disk}. \quad (2.3)$$

Ich verwende die Annahme, dass sich die Gas- und die Staubsäulendichte durch die gleiche Funktion beschreiben lässt. Ich verwende ein Standard-Gas-zu-Staub-Verhältnis von 100. Daraus ergibt sich:

$$2\pi A_d \int_{r_{in}}^{r_{out}} 101 \left(\frac{r}{R_c}\right)^{-\delta} \exp\left[-\left(\frac{r}{R_c}\right)^{2-\delta}\right] r dr = M_{disk}. \quad (2.4)$$

$A_d$  bezeichnet die Normierungskonstante der Staubsäulendichte. Die Integration kann man unter der Annahme, dass  $\delta \neq 2$  ist, durchführen. Formt man noch auf  $A_d$  um, geht

$$A_d = \frac{(2-\delta) M_{disk}}{2\pi 101 R_c^2} \left[ \exp\left(-\left(\frac{r_{in}}{R_c}\right)^{2-\delta}\right) - \exp\left(-\left(\frac{r_{out}}{R_c}\right)^{2-\delta}\right) \right]^{-1} \quad (2.5)$$

aus der Gleichung 2.4 hervor. Der innere Radius  $r_{in}$  ist laut Andrews et al. (2009) und Brauer et al. (2008) stark mit den Sternparametern verbunden. Eine sehr einfache Approximation

$$r_{in} = \sqrt{\alpha_{irr}} R_{\star} \left( \frac{T_{\star}}{T_{Sub}} \right)^2 \quad (2.6)$$

zieht den Sternradius  $R_{\star}$ , die Sterntemperatur  $T_{\star}$  und die Sublimationstemperatur  $T_{Sub}$  heran.  $\alpha_{irr}$  bezeichnet dabei den Winkel, unter dem die Scheibe angestrahlt wird. Ab einer Temperatur  $T_{Sub}$  von 1500 K zerstört die Strahlung den Staub, somit kann man die Scheibe dort abbrechen. Integration der spezifischen Säulendichte  $\tilde{\Sigma}_d$  liefert:

$$\Sigma_d(r) = \int_0^{\infty} \tilde{\Sigma}_d(r, m) m dm . \quad (2.7)$$

Ich wähle gleich wie Brauer et al. (2008) als Anfangsbedingung für die Säulendichte des Staubs in den einzelnen Massen  $\tilde{\Sigma}_d$  eine gleichmäßig auf den Bereich  $[0.5 \mu\text{m}, 0.8 \mu\text{m}]$  verteilten Wert. Für eine Staubteilchendichte von  $\rho_d = 1.6 \text{ g cm}^{-3}$  entspricht das einem Massenbereich von ca.  $[8.3 \times 10^{-13} \text{ g}, 3.4 \times 10^{-12} \text{ g}]$ . Daraus ergibt sich:

$$\tilde{\Sigma}_d(r, m) = \frac{2 \Sigma_d(r)}{(3.4 \times 10^{-12} \text{ g})^2 - (8.3 \times 10^{-13} \text{ g})^2} \Theta'(m) \quad (2.8)$$

mit

$$\Theta'(m) = \begin{cases} 1, & 8.3 \times 10^{-13} \text{ g} \leq m \leq 3.4 \times 10^{-12} \text{ g} \\ 0, & \text{sonst} . \end{cases} \quad (2.9)$$

Der charakteristische Radius  $R_c$  hat eine sehr große Bandbreite. Ich orientiere mich bei der Wahl des Parameters nach den Messungen von Andrews et al. (2009), die in der Tabelle 2.1 angegeben sind. Wie zuvor gezeigt, ist für die Staubteilchen die Temperatur eine sehr wichtige Variable, einerseits führt eine hohe Temperatur zur Zerstörung der Staubteilchen, andererseits steuert sie durch Brown'sche Bewegung die Koagulation von sehr kleinen Teilchen. Brauer et al. (2008) bestimmen den Temperaturverlauf einer zirkumstellaren Scheibe, die isotherm in vertikaler Richtung ist, mit dieser Funktion:

$$T(r) = \alpha_{irr}^{1/4} \left( \frac{r}{R_{\star}} \right)^{-1/2} T_{\star} . \quad (2.10)$$

Ich verwende für den Bestrahlungswinkel den Standardwert  $\alpha_{irr} = 0.05 \text{ rad}$ . Die Annahme, dass die Temperatur in vertikaler Richtung gleich bleibt, beruht darauf, dass die zirkumstellare Scheibe dünn ist und dadurch die Temperatur von der Sternstrahlung

dominiert wird. Die Resultate zum Temperaturverlauf von Andrews & Williams (2007), wie sie in Abbildung 2.2 (rechtes Bild) aufgetragen sind, ergeben einen leicht größeren Exponenten

$$T \propto r^{-0.62}. \quad (2.11)$$

Andrews & Williams (2007) sind aber der Meinung, dass ihr Ansatz der Temperaturstruktur zu einfach ist. Vergleicht man die Messungen mit einem Modell, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, erkennt man, dass die Temperaturen am inneren und am äußeren Rand sehr große Unterschiede aufweisen. Darum verwende ich die Gleichung 2.10. Damit sind die grundsätzlichen Parameter des Anfangsmodells bestimmt.

## 2.1. Vertikale Struktur der Scheibe

Wie in Armitage (2010) oder Brauer et al. (2008) angeführt, weisen verschieden große Teilchen unterschiedliche Ablagerungsgeschwindigkeiten auf. Durch die Ablagerung des Staubs in der Mittelebene kommt es also zu Kollisionen und dementsprechend zu Koagulation oder Fragmentation. Deshalb kann man die vertikale Struktur der Gas- und der Staubscheibe nicht vernachlässigen. Die Dichte des Gases in einer sehr dünnen Scheibe ( $z \ll r$ ) kann man durch die Säulendichte  $\Sigma_g$  und das Gleichgewicht zwischen dem Druckgradienten und der Gravitationskraft finden. Hierbei muss man zudem annehmen, dass die Masse der Scheibe so gering ist, dass man ihre Eigengravitation vernachlässigen kann. Laut Armitage (2010) ist diese Bedingung für eine Scheibenmasse von  $M_{disk} = 0.01 M_\odot$  erfüllt. Die vertikale Gravitationskraft lässt sich durch die Annahme einer dünnen Scheibe auf diese Gleichung vereinfachen:

$$g_z = \frac{G M_\star}{r^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (2.12)$$

In einer isothermen Struktur kann man den Druck durch die Schallgeschwindigkeit  $c_s$  ausdrücken. Das hydrostatische Gleichgewicht resultiert in:

$$\frac{dP}{dz} = c_s^2 \frac{d\rho_{gas}}{dz} = -\rho_{gas} g_z. \quad (2.13)$$

Wenn man die beiden Gleichungen zusammenfügt, integriert und die Kepler'sche Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_K$  verwendet, ergibt sich:

$$\rho_{gas}(r, z) = \frac{\Sigma_g(r)}{\sqrt{2\pi} H_g(r)} \exp\left(-\frac{z^2}{2 H_g(r)^2}\right). \quad (2.14)$$

$H_g = c_s/\Omega_K$  bezeichnet dabei die Skalenhöhe des Druckes. Die isotherme Schallgeschwindigkeit  $c_s$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_K$  bestimmt man über diese Gleichungen:

$$c_s(r) = \sqrt{\frac{k_B T(r)}{\mu m_P}} \quad (2.15)$$

und

$$\Omega_K(r) = \sqrt{\frac{G M_\star}{r^3}}. \quad (2.16)$$

Die Parameter sind die Boltzmann-Konstante  $k_B$ , das mittlere molekulare Gewicht  $\mu = 2.3$  für eine Mischung aus Wasserstoff und Helium, die Masse eines Protons  $m_P$  und die Gravitationskonstante  $G$ .

Die vertikale Ausdehnung der Staubscheibe wird neben der Ablagerung durch die Gravitation von einem weiteren Prozess, der "turbulenten" Diffusion, beherrscht. In einer zirkumstellaren Scheibe treten Turbulenzen auf, die den Staub mitreißen und in größere vertikale Abstände zur Mittelebene transportieren. Diese turbulenten Strömungen hindern den Staub daran, sich in der Mittelebene abzusetzen und beeinflussen demzufolge auch das Wachstum der Staubkörner. Man kann sich das so vorstellen: Gibt es starke Turbulenzen, dann wird es für den Staub schwieriger in der Mittelebene eine dünne Scheibe zu bilden. Daraus folgt, dass die Kollisionswahrscheinlichkeit und demnach auch die Koagulation oder Fragmentation sinkt. Dieses sehr wichtige Phänomen führt zu mehreren Relativgeschwindigkeiten, auf die ich im Kapitel 4 genauer eingehen werde. Für die Beschreibung der Turbulenz folge ich Armitage (2010), Brauer et al. (2008) und Brauer (2008) und verwende das  $\alpha$ -Modell von Shakura & Sunyaev (1973). Dabei geht man davon aus, dass die Turbulenz wie eine Art "effektive" oder "turbulente" Viskosität auf sehr großen Skalen wirkt. Zudem betrachtet man die Turbulenzen als Wirbel. Man unterscheidet zwei wesentliche Arten, große Turbulenzwirbel, die sich langsam bewegen und kleine Wirbel, die schnell rotieren. Die Wirkung der Wirbel ist die, dass sie Drehimpuls  $\mathbf{L} \sim \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  übertragen. Da man an einer sehr groben Abschätzung interessiert ist, kann man die naheliegendsten Größen-skalen die Schallgeschwindigkeit  $c_s$  und die Skalenhöhe  $H_g$  verwenden. Für kleine Wirbel überwiegt die Geschwindigkeitskomponente, also sind sie klar mit der Schallgeschwindigkeit verknüpft. Große Wirbel dominieren jedoch die großen Skalen, dementsprechend skaliert der Impuls im Wesentlichen mit der Druckskalenhöhe. Die Effizienz des Drehimpulstransportes durch die verschiedenen Turbulenzen gibt man aber mit dem so genannten  $\alpha$ -Koeffizient an. Unter Zuhilfenahme von  $\alpha$  kann man einen allgemeinen Ausdruck für den Drehimpulstransport eines beliebig

großen Wirbels definieren:

$$L \propto \alpha^q c_s \times \alpha^{1-q} H_g . \quad (2.17)$$

Mit dem Parameter  $q$  bestimmt man, welche Turbulenzart in der zirkumstellaren Scheibe auftritt.  $q = 0$  entspricht den größten und  $q = 1$  den kleinsten Wirbeln. Welche Wirbel am häufigsten vorkommen, ist noch nicht bekannt. Die turbulente Strömung bewirkt einen Drehimpulstransport, den man als Diffusion beschreiben kann. Den Diffusionskoeffizienten in der Gaskomponente  $D_g = L_0 V_0$  kann man ebenfalls als Produkt einer Längenskala  $L_0$  und einer Geschwindigkeitsskala  $V_0$  auffassen. Über die gleiche Abschätzung von Größenordnungen folgt:

$$D_g = \alpha c_s H_g . \quad (2.18)$$

Somit hat man den Zusammenhang zwischen den Turbulenzen und der Diffusion gefunden. Aus der Gleichung 2.18 erkennt man, dass es für den Diffusionskoeffizienten an sich keine Rolle spielt, welche Turbulenz auftritt. Wie später gezeigt wird, macht es für die Staubteilchen doch einen großen Unterschied. Die Energie, die ein solcher Wirbel inne hat, dissipiert über Reibungen in einer gewissen Zeitskala  $\tau_{ed}$ . Man geht davon aus, dass dies innerhalb der Zeit passiert, die ein Wirbel braucht, um sich einmal zu drehen. Die Periode der Turbulenz

$$\tau_{ed} = \frac{L_0}{V_0} = \frac{\alpha^{1-q} H_g}{\alpha^q c_s} = \alpha^{1-2q} \frac{1}{\Omega_K} \quad (2.19)$$

hängt wiederum von der Größe  $H_g$  und der Geschwindigkeit  $c_s$  bzw. der Kepler'schen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_K$  ab. Diese Zeitskala  $\tau_{ed}$  spielt eine große Rolle, da sie im Wesentlichen beschreibt, wie viel Drehimpuls in welchem Zeitraum auf den Staub übertragen werden könnte. Wie aus Brauer (2008) hervorgeht, liegt der Wert des Exponenten im Bereich von ca. 1/2 bis 1. Ich verwende einen Wert von  $q = 1/2$ .

Als nächstes betrachte ich die Kopplung des Staubs mit dem Gas. Dazu benutze ich die Beschreibung in Brauer (2008). Ein Teilchen, das sich in einem ruhenden Gas bewegt, verliert innerhalb einer gewissen Zeit  $\tau_s$  einen signifikanten Teil seines Impulses. Diese Bremszeit  $\tau_s$  hängt ab vom Verhältnis zwischen dem Impuls der Körper und der Reibung zwischen dem Staub und dem Gas. Sind die Teilchen kleiner als die mittlere freie Weglänge im Gemisch, dann kann man das Epstein-Gesetz anwenden. Sind die Teilchen hingegen größer, muss man unter den verschiedenen Stokes-Regimes wählen. Die unterschiedlichen Reibungsgesetze sind in Birnstiel et al. (2010) angegeben. Ich betrachte nur Teilchen, die kleiner sind als die mittlere freie Weglänge und dementsprechend die

Epstein-Reibung

$$F_E = \frac{4}{3} \rho_{gas} c_s \sigma_m v_s . \quad (2.20)$$

$\rho_{gas}$  beschreibt die Gasdichte,  $\sigma_m = \pi r_d^2$  den Wirkungsquerschnitt eines Teilchens mit Masse  $m$ , bzw. mit dem Radius  $r_d$ , und  $v_s$  die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Gas und den Teilchen. Die Bremszeit schreibt sich in diesem Fall zu:

$$\tau_s = \frac{m v_s}{F_E} = \frac{\rho_d r_d}{\rho_{gas} c_s} . \quad (2.21)$$

Die Gleichung 2.21 zeigt, dass die Bremszeit bei großer Reibung klein ist. Es gibt also zwei Parameter, die angeben, wie die Staubteilchen beeinflusst werden. Mit der Periode der Wirbel  $\tau_{ed}$  charakterisiert man, wie viel Energie zur Verfügung steht und die Bremszeit  $\tau_s$  kennzeichnet, wie effektiv man diese Energie an den Staub abgibt. Diese beiden Parameter verknüpft man durch die Stokes-Zahl

$$St = \frac{\tau_s}{\tau_{ed}} = \tau_s \Omega_K \alpha^{2q-1} \Rightarrow St = \frac{\rho_d r_d}{\rho_{gas} H_g} . \quad (2.22)$$

Diese Zahl ist abhängig vom Ort im Raum und der Größe des Teilchens  $r_d$ . Die Teilchen bewegen sich mit der Gasscheibe bei  $St \ll 1$  und sind vom Gas entkoppelt, wenn  $St \gg 1$  ist.

Der nächste Schritt besteht darin, die Staubscheibe abzuschätzen. Ich folge Armitage (2010), Birnstiel et al. (2010) und Brauer et al. (2008) und betrachte das Gleichgewicht zwischen gravitativer Ablagerung, Reibung und "turbulenter" Diffusion. Die Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{r}, m)$  der Staubteilchen pro Einheitsvolumen und Massenintervall für die jeweiligen Massen hat damit die gleiche Funktionalität wie die Gasdichte  $\rho_{gas}$ :

$$f(r, z, m) = \frac{\tilde{\Sigma}_d(r, m)}{\sqrt{2\pi} H_d(r, m)} \exp\left(-\frac{z^2}{2 H_d(r, m)^2}\right) . \quad (2.23)$$

$H_d$  bezeichnet dabei die Skalenhöhe der Staubscheibe, die sich aus dem Gleichgewicht der drei betrachteten Phänomene bestimmt. Die Diffusion des Staubs beruht darauf, dass die Turbulenzwirbel in der Gasscheibe relativ rasch die Staubkörner umverteilen. Dieser Umstand hat zur Folge, dass die Stokes-Zahl klein sein muss. Die Stokes-Zahl ist wiederum mit der Dichte des Gases verbunden und diese nimmt in vertikaler Richtung sehr schnell ab. Das heißt, dass die "turbulente" Diffusion lediglich in der Nähe der Mittelebene eine Rolle spielt. Man kann dementsprechend, wie Birnstiel et al. (2010)

vorzeigen, die Stokes-Zahl, bzw. die Effektivität der Turbulenzen, über  $z \ll H_g$  zu

$$St(r, z, m) = \frac{\rho_d r_d \sqrt{2\pi} H_g}{\Sigma_g H_g} \exp\left(\frac{z^2}{2H_g^2}\right) \approx \frac{\rho_d r_d \sqrt{2\pi}}{\Sigma_g(r)} = St(r, m) \quad (2.24)$$

approximieren. Die nächste Frage, die sich stellt, ist, wie schnell die Staubkörner von den höheren Scheibenschichten nach unten fallen. Dullemond & Dominik (2004) folgend, setzt man ein Gleichgewicht zwischen der Reibungskraft, die das Gas auf den Staub ausübt,  $|F_{fric}|$  (Epstein-Regime) und der Gravitationskraft  $|F_{grav}|$  an. Verwendet man die Gleichung 2.22, ergibt sich:

$$|F_{fric}| = |F_{grav}| \Rightarrow m \frac{|v_s|}{\tau_s} = m \Omega_K^2 |z| \Rightarrow v_s = -z \Omega_K \min\left(St, \frac{1}{2}\right). \quad (2.25)$$

Zudem beschränkt man die Ablagerungsgeschwindigkeit  $v_s$ . Das Limit stellt die auf die vertikale Richtung projizierte halbe Keplergeschwindigkeit dar. Im letzten Schritt sucht man den Abstand von der Mittelebene  $H_d$ , bei dem sich die Ablagerung durch Gravitation und Reibung und die Turbulenzen die Waage halten. Wie in Birnstiel et al. (2010) durchgeführt, setzt man die Ablagerungszeitskala  $\tau_{settle} = z/|v_s|$  und die Diffusionszeitskala  $\tau_{diff} = z^2/D_d$  am Punkt  $H_d$  gleich. Es folgt:

$$\tau_{settle} = \tau_{diff} \Rightarrow H_d = \frac{D_d}{H_d \Omega_K \min(St, 1/2)}. \quad (2.26)$$

Hierbei habe ich schon die Gleichungen 2.25 bei  $z = H_d$  benutzt. Laut Birnstiel et al. (2010) hängt der Diffusionskoeffizient des Staubs  $D_d$  mit dem Diffusionskoeffizienten des Gases  $D_g$  über die Stokes-Zahl zusammen:

$$D_d = \frac{D_g}{1 + St^2}. \quad (2.27)$$

Fügt man in Gleichung 2.26 noch die Gleichungen 2.27, 2.18 und die Approximation 2.24 ein, resultiert:

$$\begin{aligned} H_d^2 &= \frac{\alpha c_s H_g}{\Omega_K \min(St, 1/2) (1 + St^2)} \\ \Rightarrow \left(\frac{H_d(r, m)}{H_g(r)}\right)^2 &= \min\left(1, \frac{\alpha}{\min(St(r, m), 1/2) (1 + St(r, m)^2)}\right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Name	Spektraltyp	$T_{\text{eff}}$ [K]	$R_{\star}$ [ $R_{\odot}$ ]	$M_{\star}$ [ $M_{\odot}$ ]	$R_c$ [AU]
AS 205	K 5	4250	3.7	1.0	46
GSS 39	M 0	3850	2.3	0.6	198
AS 209	K 5	4250	2.3	0.9	126
DoAr 25	K 5	4250	1.7	1.0	80
WaOph 6	K 6	4205	3.2	0.9	153
VSSG 1	M 0	3850	3.1	0.6	33

Tabelle 2.1.: **Sternparameter, aus Andrews et al. (2009)**

In der Tabelle sind Eigenschaften von Sternen im Ophiuchus Sternentstehungsgebiet angegeben. Die erste Spalte gibt den Namen, die zweite den Spektraltyp, die dritte die effektive Temperatur, die vierte den Sternradius in Sonnenradien, die fünfte die Masse des Sterns in Sonnenmassen und die letzte den charakteristischen Radius in AU wieder. Alle Angaben sind ohne Fehlerbereich, da sie nur zur Veranschaulichung verwendet werden.

Die Skalenhöhe der Staubscheibe  $H_d$  kann nicht größer werden wie die Druckskalenhöhe des Gases  $H_g$ . Diese Bedingung führe ich, wie in Birnstiel et al. (2010), durch die Minimumfunktion ein. Brauer (2008) äußert Bedenken gegenüber den getroffenen Annahmen, da man die Dynamik von Körpern auf Keplerbahnen in turbulenten Regionen nicht durch eine Diffusion beschreiben sollte. Zudem ist die vertikale Ausdehnung des Staubs nicht gezwungenermaßen Gauß-verteilt.

## 2.2. Zusammenfassung

Zuerst ist zu bemerken, dass die Struktur und Temperatur der Gasscheibe über den ganzen Beobachtungszeitraum erhalten bleibt. Ich treffe diese Annahme, da man sonst die Hydrodynamik der Gasscheibe mitrechnen müsste. Für das Anfangsmodell sind gewisse Parameter zu wählen, darunter fallen die Eigenschaften des Sterns (Masse des Sterns  $M_{\star}$ , Temperatur  $T_{\star}$ , Radius  $R_{\star}$  und charakteristischer Radius  $R_c$ ) und die Eigenschaften der Scheibe (Masse der Scheibe  $M_{\text{disk}}$ , Exponent der Säulendichte  $\delta$ , Maß an Turbulenz  $\alpha$  und der äußere Radius  $r_{\text{out}}$ ). Die Sternparameter sind die eines T Tauri Sterns, wie sie auch Brauer et al. (2008) verwendet:  $M_{\star} = 0.5 M_{\odot}$ ,  $T_{\star} = 4000$  K,  $R_{\star} = 2.5 R_{\odot}$ . Den charakteristischen Radius  $R_c$  wähle ich, angelehnt an die Tabelle 2.1, zu  $R_c = 100$  AU. Die Masse der Scheibe  $M_{\text{disk}} = 0.01 M_{\odot}$  ist in allen Fällen dem MMSN-Modell nachem-

pfunden. Den Exponenten in der Säulendichteverteilung entnehme ich den Beobachtungen von Andrews et al. (2009) und setze ihn auf den gemessenen Medianwert von  $\delta = 0.9$ . Johansen & Klahr (2005) haben sich intensiv mit der Diffusion vom Staub durch Magnetorotationsinstabilitäten befasst und erhalten ein Maß an Turbulenz in der Größenordnung von  $\alpha = 10^{-3}$ . Diesen Wert benutze ich in meinem Modell. Der äußere Radius der Scheibe soll, gleich wie in Brauer et al. (2008),  $r_{out} = 150$  AU sein. Die Dichte der Staubteilchen ist, wie in Birnstiel et al. (2010),  $\rho_d = 1.6 \text{ g cm}^{-3}$ . Dies entspricht einem Teilchen, das aus 10 % Silikaten, 30 % Kohlenstoff und 60 % Eis besteht. Bevor die Scheibe erstellt wird, muss man noch den inneren Radius über die Formel 2.6, in diesem Fall ist  $r_{in}$  ca. 0.02 AU, berechnen. Daraufhin bestimmt man die Säulendichte

$$\Sigma_{g/d}(r) = A_{g/d} \left( \frac{r}{R_c} \right)^{-\delta} \exp \left[ - \left( \frac{r}{R_c} \right)^{2-\delta} \right], \quad (2.29)$$

wobei sich die Normierungskonstante  $A_d$  aus Gleichung 2.5 ergibt. Die Normierungskonstante des Gases  $A_g$  hat die gleiche Form, nur, dass man im Nenner statt 101 1.01 verwenden muss. Der Temperaturverlauf folgt aus Gleichung 2.10 und die Säulendichte für jede einzelne Masse  $\tilde{\Sigma}_d$  aus Gleichung 2.8. Daraufhin kann man sowohl die Schallgeschwindigkeit (Gleichung 2.15) und die Kepler'sche Winkelgeschwindigkeit (Gleichung 2.16), sowie die daraus resultierende Skalenhöhe der Gasscheibe  $H_g$  berechnen. Über die Skalenhöhe  $H_g$ , die Säulendichte  $\Sigma_g$  und die Gleichung 2.14 bestimme ich die Verteilung der Dichte in der Gasscheibe. Im nächsten Schritt lässt sich durch die Dichte der Staubkörner  $\rho_d$ , den Radius der Staubkörner  $r_d$ , die Säulendichte des Gases  $\Sigma_g$ , die Skalenhöhe des Gases  $H_g$  und die Gleichung 2.24 die Stokes-Zahl ermitteln. Die Stokes-Zahl  $St$  und das Turbulenzmaß  $\alpha$  erlauben es, mit der Gleichung 2.28 die Skalenhöhe der Staubscheibe  $H_d$  zu berechnen. Im letzten Schritt bestimmt man mit Gleichung 2.23 die Verteilung der einzelnen Staubsichten pro Massenintervall in der Staubscheibe  $f(\mathbf{r}, m)$ . Die Abbildungen in 2.3 zeigen sowohl die Gasscheibe, dargestellt durch die Dichte des Gases  $\rho_{gas}$ , wie auch die Staubscheibe, charakterisiert über die Gesamtteilchendichte  $N_{staub}$  der Staubkörner. Die Teilchendichte  $N_{staub}$  ist im Zentrum der Mittelebene mit einem Wert von ca. 1670 Teilchen pro Kubikzentimeter relativ groß, aber noch gering genug, damit die getroffenen Annahmen gültig sind.

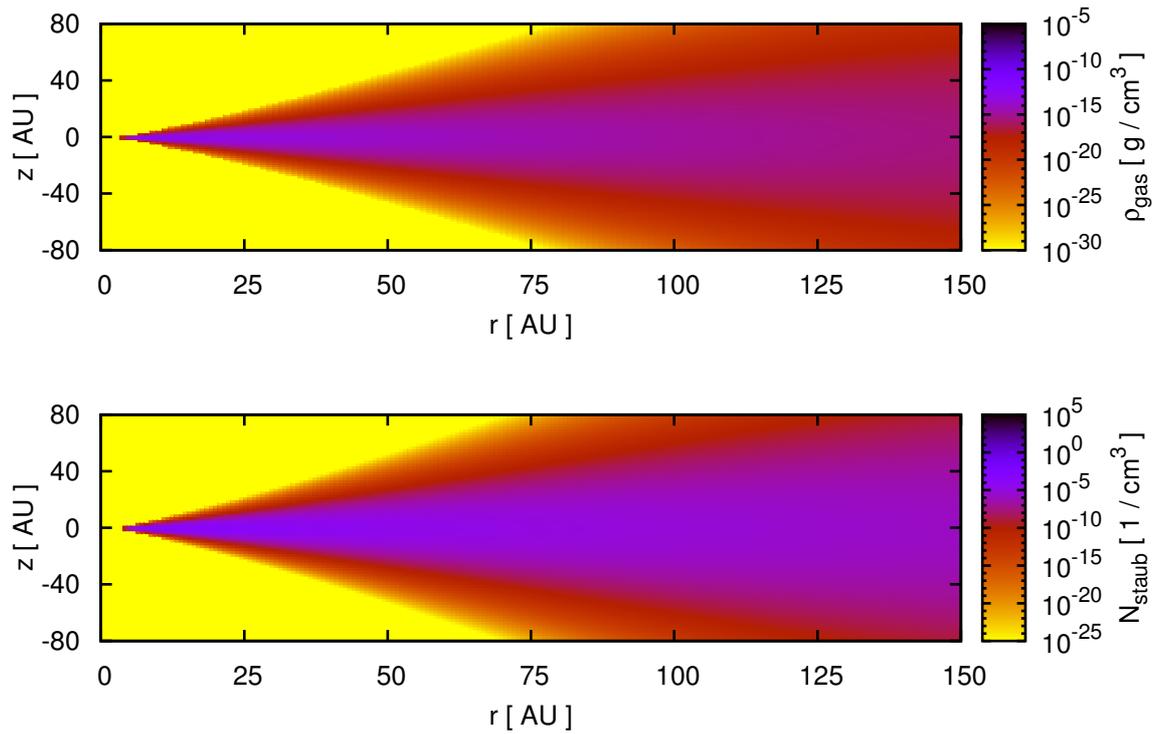


Abbildung 2.3.: **Schnitt durch die Gas- und Staubscheibe**

Die Bilder zeigen einen Schnitt durch die protoplanetare Scheibe des betrachteten T Tauri Sterns. Die obere Grafik gibt die Dichte des Gases  $\rho_{gas}$  in Einheiten von  $g/cm^3$  und die untere die Teilchendichte des Staubs  $N_{staub}$  in Einheiten von  $1/cm^3$  wieder.

# 3. Die Fragmentations- Koagulationsgleichung

Die Staubscheibe in einer protoplanetaren Wolke besteht aus einem Ensemble aus verschiedensten Teilchengrößen. Diese Staubkörner wechselwirken miteinander, z.B. durch Van-der-Waals-Kräfte oder bei größeren Objekten durch Gravitation. In der Regel führt diese Wechselwirkung dazu, dass Teilchen zusammenstoßen und verschmelzen oder zerbrechen. Die Entwicklung solcher Ensembles kann durch die Boltzmann-Gleichung beschrieben werden. Die Berechnung der Boltzmann-Gleichung selbst ist, von einem numerischen Standpunkt aus gesehen, aufwendig. Darum beschränke ich mich in meiner Arbeit auf das 0-te Moment, bzw. die Kontinuitätsgleichung. In der Fachliteratur bezeichnet man diese Erhaltungsgleichung auch als Fragmentations-Koagulationsgleichung, auf die im Kapitel 3.1 genauer eingegangen wird. Zudem wende ich die folgenden Annahmen an:

- Man betrachtet das System in Zylinderkoordinaten  $\mathbf{r} = (r, \varphi, z)$  mit einer Symmetrie um die  $z$ -Achse. Das heißt, alle Ableitungen in die  $\varphi$ -Richtung sind Null und alle Variablen sind von  $\varphi$  unabhängig. Um die Problemstellung auf eine 2-dimensionale Differentialgleichung zu reduzieren, schlagen Birnstiel et al. (2010) und Brauer (2008) eine vertikale Integration vor. Letztendlich bleiben die beiden Variablen, der Radius in der Scheibe  $r$  und die Masse der Teilchen  $m$  übrig.
- Die Teilchen sowie auch deren Koagulate sind kugelförmig. Dies vereinfacht das System enorm, ist aber im Allgemeinen nicht richtig, da der Staub in protoplanetaren Scheiben eher aus länglichen Monomeren oder "fluffy particles" besteht. Paszun & Dominik (2009) oder Dominik & Tielens (1997) zeigen, wie man mit solchen Teilchen umgeht.
- Die Teilchen weisen alle die gleiche Dichte auf und bestehen aus dem selben Material. Diese Annahme ist bei sehr kleinen Partikeln vertretbar, aber für wachsende

Objekte nicht mehr. Dabei müsste man die chemische Zusammensetzung und den Füllfaktor miteinbeziehen, siehe dazu Ormel et al. (2009).

- Die Anzahldichte der Teilchen muss so klein sein, dass Mehrfachstöße vernachlässigbar sind.
- Die Körper bewegen sich auf Kreisbahnen. Erweitert man die Orbitale auf Keplerbahnen, dann verändern sich die Stoßwahrscheinlichkeiten, wie in Inaba et al. (2001) oder Greenzweig & Lissauer (1992) beschrieben.
- Die protoplanetare Scheibe befindet sich im thermodynamischen Gleichgewicht. Ihr Zustand lässt sich somit durch makroskopische Eigenschaften beschreiben.
- Die Gasscheibe beeinflusst die Staubpartikel. Im Gegenzug nimmt die Staubscheibe aber keinen Einfluss auf das Gas. Die gegenseitige Wechselwirkung ist momentan eines der größten Forschungsziele, siehe Ormel et al. (2011), Vasjunin et al. (2011) oder Birnstiel et al. (2010), und wird in meiner Arbeit nur teilweise behandelt.

### 3.1. Herleitung der Fragmentations-Koagulationsgleichung

Die Grundlage für meine Herleitung der Fragmentations-Koagulationsgleichung basiert auf Tanaka et al. (1996). Zu Beginn vernachlässige ich noch die radialen und vertikalen Flüsse und betrachte nur die Massenabhängigkeit der Variablen. Bei einer Kollision von Teilchen treten verschiedene physikalische Prozesse auf. Teilchen können verschmelzen oder der Aufprall ist so stark, dass sie zerstört und in viele kleinere Körper zerlegt werden. Im Allgemeinen bezeichnet man diese Prozesse als Koagulation (Wachstum) und Fragmentation (Zerstörung). Ein Stoß verursacht in einem statistischen Sinne eine Veränderung in der Massenverteilung. Die Massenerhaltung bzw. Kontinuitätsgleichung beschreibt dabei die Entwicklung des Systems

$$\frac{\partial mf(m)}{\partial t} + \frac{\partial F(m)}{\partial m} = 0, \quad (3.1)$$

wobei  $f(m)$  die Verteilungsfunktion der Teilchen pro Einheitsvolumen und Massenintervall und  $F(m)$  der Massenfluss über der Masse  $m$  ist. Der Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion  $f(m)$  und der mittleren Dichte des Staubes  $\rho$  in einem Volumenele-

ment ist gegeben durch:

$$\rho = \int_0^{\infty} m f(m) dm . \quad (3.2)$$

Um die Gleichung 3.1 lösen zu können, muss man einen Ausdruck für den Massenfluss finden, der im Allgemeinen proportional zur Kollisionsfrequenz zwischen den verschiedenen Teilchen sowie dem Ausgang einer Kollision ist.

Die Kollisionsfrequenz  $\nu_{m_1, m_2}$  zwischen zwei Körpern mit den jeweiligen Massen  $m_1 \sim m_1 + dm_1$  bzw.  $m_2 \sim m_2 + dm_2$  ergibt sich aus der Kollisionsrate  $C_{m_1, m_2}$  und der Verteilungsfunktion  $f(m)$  als

$$\nu_{m_1, m_2} = C_{m_1, m_2} f(m_1) dm_1 f(m_2) dm_2 . \quad (3.3)$$

Die Kollisionsrate  $C_{m_1, m_2}$  beschreibt die Häufigkeit von Kollisionen zwischen Körpern mit der Masse  $m_1$  und  $m_2$ . Im einfachsten Fall hat sie diese Form:

$$C_{m_1, m_2} = \sigma_{m_1, m_2} v_{m_1, m_2}^{rel} . \quad (3.4)$$

Hierbei ist  $\sigma_{m_1, m_2}$  der Wirkungsquerschnitt und  $v_{m_1, m_2}^{rel}$  die Relativgeschwindigkeit zwischen den Körpern mit Massen  $m_1$  und  $m_2$ .

Kennzeichnend für den Ausgang einer Kollision, das heißt, für die Massenverteilung der Fragmente nach einer Kollision, ist die kumulative Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}(m, m_1, m_2)$ . Diese Funktion beschreibt die Anzahl der Körper, die bei dem Stoß vom Zielobjekt  $m_1$  mit dem Projektil  $m_2$  ausgeworfen werden und eine kleinere Masse wie  $m$  besitzen. Anders ausgedrückt ist  $(\partial \mathcal{F}(m, m_1, m_2) / \partial m) dm$  die Anzahl der Fragmente mit Massen im Intervall  $[m, m + dm]$ . Betrachtet man nur die Fragmentation, dann führt ein Zusammenstoß des Zielobjektes  $m_1$  mit einem Projektil  $m_2$  zu einer Zerstörung von  $m_1$ . Diese Umverteilung der Massen  $S_{frag}(m, m_1, m_2)$  über  $m(\leq m_1)$  ist proportional zur kumulativen Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}(m, m_1, m_2)$  und zur Masse des Zielobjektes  $m_1$

$$S_{frag}(m, m_1, m_2) = -m_1 \mathcal{F}(m, m_1, m_2) \quad \text{für } m \leq m_1 . \quad (3.5)$$

Erweitert man die Problemstellung mit der Koagulation, dann befinden sich die "verschmolzenen" Körper in einem Massenintervall von  $0 < m \leq m_1 + m_2$ . Die kumulative Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}(m, m_1, m_2)$  beschreibt wieder die Verteilung der Fragmente. Sie muss aber mit einer Gesetzmäßigkeit für Massen  $m > m_1$  erweitert werden.  $(\partial \mathcal{F}(m, m_1, m_2) / \partial m) dm$  gibt den Anteil der Masse wieder, der vom Zielobjekt  $m_1$  kommt und in einem verschmolzenen Objekt der Masse  $m + dm$  enthalten ist. Daraus

ergibt sich eine Umverteilung der Massen  $S_{koag}(m, m_1, m_2)$  über  $m(\geq m_1)$  in der Form

$$S_{koag}(m, m_1, m_2) = m_1 (1 - \mathcal{F}(m, m_1, m_2)) \quad \text{für } m \geq m_1. \quad (3.6)$$

Der Massenfluss  $F(m)$  für eine Kombination aus Zielobjekten mit Massen  $m_1$  und Projektilen mit Massen  $m_2$  resultiert aus der Summe von  $S_{koag}$  und  $S_{frag}$ , aus den Gleichungen 3.5 bzw. 3.6, multipliziert mit  $\nu_{m_1, m_2}$  aus Gleichung 3.3. Den Gesamtfluss  $F(m)$  über  $m$  erhält man, indem man über alle Paare aus Zielen und Projektilen

$$\begin{aligned} F(m) = & - \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 m_1 \mathcal{F}(m, m_1, m_2) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \\ & + \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 m_1 (1 - \mathcal{F}(m, m_1, m_2)) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

integriert. Wie schon besprochen, beschreibt der erste Term auf der rechten Seite den Massenfluss durch Fragmentation und der zweite Term den Massenfluss durch Koagulation. Die kumulative Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}(m, m_1, m_2)$  ist so definiert, dass sie die zwei kollidierenden Körper separat betrachtet. Diese Funktion beschreibt nur die Verteilung der Fragmente des Zielobjektes. Daher zählt man durch die Doppelintegrale jede Kollision nur einmal.

Eine einfache kumulative Verteilungsfunktion charakterisiert den Prozess der perfekten Koagulation. Dabei verschmelzen die beiden Kollisionspartner und es entsteht ein Teilchen mit der Masse  $m_1 + m_2$ . Die kumulative Verteilungsfunktion hat also diese Form:

$$\mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2) = \begin{cases} 1, & m > m_1 + m_2 \\ 0, & m \leq m_1 + m_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

Setzt man dies in die Gleichung 3.7 ein und formt um, dann spielt lediglich der zweite Term in der Gleichung eine Rolle. Um die Koagulationsgleichung zu erhalten, setzt man den Fluss in Formel 3.1 ein und führt die Ableitung nach  $m$  durch. Da sich mit der Zeit nur die Verteilungsfunktionen der Körper  $f(m)$ , aber nicht die Einheitsmassen  $m$  ändern, ergibt sich folgende Kontinuitäts- bzw. Koagulationsgleichung:

$$\frac{\partial f(m)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^m dm_1 C_{m_1, m-m_1} f(m_1) f(m-m_1) - \int_0^\infty dm_2 C_{m, m_2} f(m) f(m_2). \quad (3.9)$$

Eine andere Form der kumulativen Verteilungsfunktion beschreibt den Fall der reinen Fragmentation. In den letzten Jahrzehnten hat es sehr viele Ansätze für die Funktiona-

lität dieser Verteilung gegeben, siehe z.B. Kobayashi et al. (2010), Paszun & Dominik (2009) oder Wetherill & Stewart (1993). Durch ihre starke Abhängigkeit von der Energie, Masse und Dichte der kollidierenden Körper sind experimentell gefundene Potenzgesetze zu einfach. Besonders schwierig stellt sich die Nachbildung von selbst-gravitierenden Körpern dar. Eine Zusammenfassung der Experimente findet sich in Benz & Asphaug (1999). Ich verwende die kumulative Verteilungsfunktion, wie sie in Kobayashi & Tanaka (2010) definiert ist. Dabei schlägt bei einem Stoß ein Projektil eine gewisse Masse  $m_{ej}$  aus dem Zielobjekt heraus. Dieses ausgeworfene Material wird dann über ein Potenzgesetz auf den Massenbereich  $m \leq m_{lf}$  aufgeteilt.  $m_{lf}$  bezeichnet die Masse des größten Körpers bzw. Fragmentes in der Menge der ausgeworfenen Partikel. Im Kapitel 5.4.2 findet man die Gesetzmäßigkeiten zu diesen Variablen. Die kumulative Verteilungsfunktion besteht demzufolge aus zwei Komponenten. Die erste charakterisiert den Rest des Zielobjektes  $\mathcal{F}^{rem}(m, m_1, m_2)$  und die zweite  $\mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2)$  die Verteilung des ausgeworfenen Materials. Die kumulativen Verteilungsfunktionen schreiben sich zu

$$m_1 \mathcal{F}^{rem}(m, m_1, m_2) = \begin{cases} m_1 - m_{ej}, & m \geq m_1 - m_{ej} \\ 0, & m < m_1 - m_{ej} \end{cases} \quad (3.10)$$

und

$$m_1 \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2) = \begin{cases} m_{ej}, & m \geq m_{lf} \\ m_{ej} \left( \frac{m}{m_{lf}} \right)^{2-q}, & m < m_{lf}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Der Parameter  $q$  ist ebenfalls im Kapitel 5.4.2 definiert. Die kumulativen Verteilungsfunktionen setzt man wieder in Gleichung 3.7 ein. Nach einigen Umformungen erhält man die Fragmentationsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(m)}{\partial t} &= \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{m_1 - m_{ej}}{m} C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \delta(m - m_1 + m_{ej}) \\ &+ \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{1}{m} C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial}{\partial m} (m_1 \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2)) \\ &- \int_0^\infty dm_2 C_{m, m_2} f(m) f(m_2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Herleitungen zur Koagulations- (Gleichung 3.9) bzw. zur Fragmentationsgleichung (Gleichung 3.12) befinden sich im Anhang A.

Betrachtet man eine protoplanetare Scheibe oder andere physikalische Situationen, bei

denen Koagulation und Fragmentation gleichermaßen auftreten, dann muss man beide Phänomene in die Gleichung 3.7 miteinbeziehen. Man könnte die kumulative Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}(m, m_1, m_2)$  an die Problemstellung anpassen, wie in Kobayashi et al. (2010) durchgeführt, oder man kombiniert die beiden Extreme, perfekte Koagulation und reine Fragmentation. Birnstiel et al. (2010) und Brauer et al. (2008) koppeln die beiden Gleichungen 3.9 und 3.12 durch eine Treppenfunktion, die abhängig ist von der Relativgeschwindigkeit  $v_{m_1, m_2}^{rel}$  zwischen den zwei kollidierenden Teilchen  $m_1$  und  $m_2$  und einer konstanten Grenzgeschwindigkeit  $v^f$ . Kombiniert man die beiden Extremfälle, dann hat die kumulative Verteilungsfunktion diese Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{pK+f}(m, m_1, m_2) &= \mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2) [1 - \Theta(v_{m_1, m_2}^{rel} - v^f)] \\ &+ \mathcal{F}^f(m, m_1, m_2) \Theta(v_{m_1, m_2}^{rel} - v^f). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ersetzt man die kumulative Verteilungsfunktion der reinen Fragmentation mit denen aus Gleichung 3.10 und 3.11, folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{pK+f}(m, m_1, m_2) &= \mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2) [1 - \Theta(v_{m_1, m_2}^{rel} - v^f)] \\ &+ [\mathcal{F}^{rem}(m, m_1, m_2) + \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2)] \Theta(v_{m_1, m_2}^{rel} - v^f). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Führt man die gleichen Umformungen, wie im Anhang A dargestellt, durch, ergeben sich die Gleichungen 3.9 und 3.12, die mit der Stufenfunktion verbunden sind:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{d}{dm} \mathcal{F}^{pK+f}(m) &= \int_0^\infty dm_2 C_{m, m_2} f(m) f(m_2) \\ &- \frac{1}{2} \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) [1 - \Theta(v_{m_1, m_2}^{rel} - v^f)] \\ &\times \frac{m_1 + m_2}{m} \frac{\partial}{\partial m} (\mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)) \\ &- \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \Theta(v_{m_1, m_2}^{rel} - v^f) \\ &\times \left[ \frac{m_1 - m_{ej}}{m} \frac{\partial \Theta(m - m_1 + m_{ej})}{\partial m} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} (m_1 \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2)) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Bei der Herleitung muss man annehmen, dass die Relativgeschwindigkeit in den beiden Variablen  $m_1$  und  $m_2$  symmetrisch ist. Daraus ergibt sich die Bedingung, dass die

Funktionalität der Relativgeschwindigkeit aus der Summe oder dem Produkt der beiden Massen bestehen muss. Auffallend bei der Kombination der perfekten Koagulation und reinen Fragmentation ist, dass nur die Gewinnterme von der Stufenfunktion abhängig sind, der Verlustterm hingegen nicht. Damit kann ich den Gewinnterm durch Koagulation ( $v_{m_1, m_2}^{rel} \leq v^f$ ) und den Gewinnterm durch Fragmentation ( $v_{m_1, m_2}^{rel} > v^f$ ) separat testen.

### 3.2. Analytische Lösungen der Koagulationsgleichung

Die Koagulationsgleichung (Gleichung 3.9) ist eine Integro-Differentialgleichung, die nur in wenigen Fällen analytisch lösbar ist. Im Allgemeinen hängt die Lösbarkeit vom Kern ab. In physikalischen Fragestellungen entspricht der Kern der Kollisionsrate, wie in Gleichung 3.4 definiert. Für solche Kerne gibt es keine analytischen Lösungen und die Entwicklung eines Ensembles kann lediglich durch numerische Rechnungen beschrieben werden. Analytische Lösungen gibt es z.B. für den konstanten, linearen und multiplikativen Kern. In meiner Abhandlung finden die ersten beiden Kerne Verwendung. Ich verweise auf Wattis (2006) bzw. Davies et al. (1999) für eine genauere Herleitung der analytischen Lösungen. In diesen Ableitungen beobachtet man die Entwicklung von "clusters", die Koagulationsgleichung 3.16 gewinnt man aus dem Massenwirkungsprinzip, bzw. der diskreten Form von Gleichung 3.9

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{m_1=1}^{m-1} C_{m_1, m-m_1} f_{m_1} f_{m-m_1} - \sum_{m_2=1}^{\infty} C_{m, m_2} f_m f_{m_2} . \quad (3.16)$$

Zudem definiert man eine erzeugende Funktion der Teilchendichte  $n(z, t)$

$$n(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) e^{-mz} . \quad (3.17)$$

$f_m(t)$  ist definiert wie zuvor, als Verteilungsfunktion pro Volumen und Masse. Im diskreten Fall gilt für die Gesamtanzahldichte  $N_0(t) = n(0, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t)$  bzw. für die Dichte in einem Einheitsvolumen  $\rho = N_1(t) = -n_z(0, t) = \sum_{m=1}^{\infty} m f_m(t)$ . Über

$$N_i(t) = (-1)^i \left. \frac{\partial^i}{\partial z^i} n(z, t) \right|_{z=0} \quad (3.18)$$

kann man die höheren Momente der erzeugenden Funktion finden. Die erzeugende Funktion  $n(z, t)$  transformiert das System aus gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen in eine partielle Differentialgleichung. Man geht außerdem von einer monodispersen Anfangsverteilung aus. Das System besteht also nur aus Monomeren, deren Masse normiert ist:

$$f_1(t) = 1, \quad f_m(t) = 0 \quad \text{für } m > 1. \quad (3.19)$$

Unter diesen Annahmen kann nun ein Kern gewählt und damit eine analytischen Lösung für die Verteilungsfunktion  $f_m(t)$  gefunden werden. Weitere Vergleichsgrößen für Tests der numerischen Rechnungen sind die Gesamtanzahldichte, bzw. die Dichte, sowie das zweite Moment der erzeugenden Funktion.

### 3.2.1. Konstanter Kern, $C_{m_1, m_2} = 1$

Der normierte konstante Kern hat die Gestalt  $C_{m_1, m_2} = 1$ . Setzt man ihn und die erzeugende Funktion 3.17 in die diskrete Koagulationsgleichung 3.16 ein, dann ergibt sich diese Gleichung:

$$\frac{\partial n(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}n(z, t)^2 - n(0, t)n(z, t). \quad (3.20)$$

Um fortfahren zu können, benötigt man eine Funktion für die Gesamteilchendichte  $N_0(t) = n(0, t)$ . Setzt man in Gleichung 3.20  $z = 0$ , dann ergibt sich eine Differentialgleichung erster Ordnung für  $N_0(t)$  in der Form  $\dot{N}_0(t) = -1/2 N_0^2(t)$ . Mit den davor definierten Anfangsbedingungen 3.19 folgt

$$N_0(t) = \frac{2}{t+2}. \quad (3.21)$$

Die Verteilungsfunktion  $f_m(t)$  entwickelt sich auf diese Weise:

$$f_m(t) = \frac{4}{(t+2)^2} \left( \frac{t}{t+2} \right)^{m-1}. \quad (3.22)$$

Die Dichte ist  $N_1(t) = 1$ . Dadurch bleibt die Gesamtmasse erhalten. Für das nächsthöhere Moment ergibt sich  $N_2(t) = 1 + t$ .

### 3.2.2. Linearer Kern, $C_{m_1, m_2} = \frac{m_1 + m_2}{2}$

Verwendet man wieder die erzeugende Funktion  $n(z, t)$  und einen linearen Kern der Gestalt  $C_{m_1, m_2} = (m_1 + m_2)/2$ , dann erhält man eine partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial n(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}n(z, t) \frac{\partial n(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2}N_0(t) \frac{\partial n(z, t)}{\partial z} - \frac{1}{2}N_1(t) n(z, t). \quad (3.23)$$

Nun sind  $N_0(t)$  und  $N_1(t)$  die unbekanntenen Funktionen. Setzt man in 3.23  $z = 0$ , dann folgt die erste Gleichung  $\dot{N}_0(t) = -1/2 N_0(t) N_1(t)$ . Die zeitliche Entwicklung von  $N_1(t)$  ergibt sich, indem man 3.23 nach  $z$  ableitet und wiederum  $z = 0$  einfügt. Der resultierende Ausdruck  $\dot{N}_1(t) = 0$  besagt, dass die Dichte erhalten bleibt. Mithilfe der Anfangsbedingung folgt  $N_1(t) = 1$ . Damit kann die Gleichung für  $N_0(t)$  bestimmt werden. Das nächste Moment erhalte ich durch Einsetzen von  $z = 0$  in die zweite Ableitung von Gleichung 3.23. Die resultierenden Funktionen bzw. Lösungen von  $N_0(t)$  und  $N_2(t)$  haben diese Form:

$$\dot{N}_0(t) = -\frac{1}{2}N_0(t) \quad \Longrightarrow \quad N_0(t) = e^{-t/2} \quad (3.24)$$

$$\dot{N}_2(t) = N_2(t) \quad \Longrightarrow \quad N_2(t) = e^t \quad (3.25)$$

Mit diesem Wissen kann ein Ausdruck für die Verteilungsfunktion  $f_m(t)$  gefunden werden:

$$f_m(t) = \frac{1}{m!} m^{m-1} e^{-t/2} (1 - e^{-t/2})^{m-1} \exp(-m(1 - e^{-t/2})). \quad (3.26)$$

### 3.2.3. Zusammenfassung der Lösungen

Die Lösungen der Koagulationsgleichung für verschiedene Kerne sind in der Tabelle 3.1 wiedergegeben. Für die anfängliche Verteilungsfunktion  $f_m(0)$  gilt, dass sie  $N_1(0) = 1$  erfüllen muss. Wie aus Binglin (1987) hervorgeht, kann man die Funktionen der Momente so erweitern, dass sie eine beliebige Anfangsbedingung  $N_0(0)$  bzw.  $N_2(0)$  aufweisen können. Die Herleitung zu den Gleichungen sind ähnlich wie in den vorigen Kapiteln gezeigt. Die erweiterten Gleichungen für  $N_0(t)$  und  $N_2(t)$  sind ebenfalls in der Tabelle 3.1 angeführt. In einem numerischen Sinne entsteht durch die Funktion 3.26 ein Problem bei sehr großen Massen, deshalb nutzt man die Gleichung 3.27, wie auch in Ohtsuki et al.

Kern	Verteilungsfunktion	Momente
$C_{m_1, m_2} = 1$	$f_m(t) = \frac{4}{(t+2)^2} \left( \frac{t}{t+2} \right)^{m-1}$	$N_0(t) = \frac{2 N_0(0)}{N_0(0) t + 2}$ $N_1(t) = 1$ $N_2(t) = t + N_2(0)$
$C_{m_1, m_2} = \frac{m_1 + m_2}{2}$	$f_m(t) = \frac{m^{m-1}}{m!} e^{-t/2} (1 - e^{-t/2})^{m-1}$ $\exp(-m (1 - e^{-t/2}))$	$N_0(t) = N_0(0) e^{-t/2}$ $N_1(t) = 1$ $N_2(t) = N_2(0) e^t$

Tabelle 3.1.: **Analytische Lösungen zur Problemstellung der perfekten Koagulation**

In der ersten Spalte der Tabelle findet man die beiden Kerne, in der zweiten die zugehörigen Verteilungsfunktionen und in der dritten Spalte die jeweiligen Momente zu den Kernen. Die Entwicklung der Verteilungsfunktionen bzw. der Momente ergibt sich unter den Anfangsbedingungen  $N_1(0) = 1$  und  $N_0(0), N_2(0)$  beliebig.

(1990) oder Wetherill (1990) angegeben.

$$f_m(t) = \frac{N_0(0) e^{-\tau}}{m (1 - e^{-\tau})^{1/2}} \exp \left[ -\frac{m}{\bar{m}_0} (2 - e^{-\tau}) \right] I_1(x), \quad (3.27)$$

$$x = 2 \frac{m}{\bar{m}_0} (1 - e^{-\tau})^{1/2},$$

hierbei beschreibt  $N_0(0)$  die Anfangszahl der gesamten Körper,  $\bar{m}_0$  die mittlere Masse zu Beginn,  $I_1(x)$  die modifizierte Bessel-Funktion der ersten Art und  $\tau$  die Einheitszeit.  $\tau$  ergibt sich in diesem Fall aus  $\tau = 1/2 N_1(0)$ , mit  $N_1(0)$  als Anfangsdichte im Volumen. Zur weiteren Vereinfachung zerlegt man die Funktion 3.27 in zwei Teile:

$$f_m(t) = \begin{cases} \frac{N_0(0) \exp \left[ -\tau - \frac{m}{\bar{m}_0} (2 - e^{-\tau}) \right] \frac{x}{2}}{m (1 - e^{-\tau})^{1/2}}, & x < \sqrt{2} \\ \frac{N_0(0) e^{-y}}{\sqrt{2 \pi x m} (1 - e^{-\tau})^{1/2}} \left( 1 - \frac{3}{8x} - \frac{15}{128 x^2} \right), & x \geq \sqrt{2} \end{cases} \quad (3.28)$$

mit

$$y = \tau + \frac{m}{\bar{m}_0} \left[ 2 - e^{-\tau} - 2(1 - e^{-\tau})^{1/2} \right]. \quad (3.29)$$

Mit dieser Beschreibung der Verteilungsfunktion  $f_m(t)$  hat sich auch die Anfangsbedingung geändert. Sie ist gegeben durch eine exponentielle Verteilung

$$f_m(0) = \frac{N_0(0)}{\bar{m}_0} e^{-\frac{m}{\bar{m}_0}}. \quad (3.30)$$

Die Entwicklung der Momente berechnet sich trotzdem durch die gleichen Funktionen wie in der Tabelle 3.1 angegeben.

### 3.3. Analytische Lösung der Fragmentationsgleichung

In der Fachliteratur (Kumar et al. (2009), Kostoglou & Karabelas (2002)) wird Fragmentation meist durch eine andere Gleichung dargestellt. Die Entwicklung der Verteilungsfunktion

$$\frac{\partial f(m)}{\partial t} = \int_m^\infty dm_1 p(m, m_1) b(m_1) f(m_1) - b(m) f(m) \quad (3.31)$$

ist dabei abhängig von der Bruchrate eines Teilchens  $b(m)$  und der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p(m, m_1)$ , dass ein Objekt mit der Masse  $m$  aus einem Körper mit der Masse  $m_1$  entsteht. Von der Gleichung 3.31 sind schon viele analytische Lösungen bekannt, siehe Kumar et al. (2009) oder Ziff & McGrady (1985). Die verschiedenen Lösungen könnte man als numerische Tests verwenden. Man erkennt aber, dass die Gleichung 3.31 wesentliche Unterschiede zur Gleichung 3.12 aufweist. In der Formel 3.12 ist der Massenzuwachs von beiden Verteilungsfunktionen  $f(m_1)$  und  $f(m_2)$  abhängig und die ausgeworfene Materie wird über ein weites Spektrum an Objekten verteilt. Darum schlage ich vor, die Gleichung 3.12 in vereinfachter Form als numerischen Test zu verwenden. Die leichter zu lösende Variante beschreibt die Entwicklung von Teilchen, die sich bei jedem Stoß halbieren. Dieses Phänomen bezeichne ich als gleichmäßige Aufspaltung und führe mit der speziellen kumulativen Verteilungsfunktion

$$\mathcal{F}^{gA}(m, m_1, m_2) = \begin{cases} 1, & m > m_1/2 \\ 0, & m \leq m_1/2 \end{cases} \quad (3.32)$$

die Umformungen, wie im Anhang A beschrieben, durch. Die Fragmentationsgleichung erhält diese Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(m)}{\partial t} &= \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{m_1}{m} C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial \Theta(m - \frac{m_1}{2})}{\partial m} \\ &- \int_0^\infty dm_2 C_{m, m_2} f(m) f(m_2). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Wie in Anhang B hergeleitet, ergeben sich die Entwicklungen der Momente  $N_i(t)$  der Verteilungsfunktion  $f(m)$  bei einem konstanten Kern  $C_{m_1, m_2} = 1$  als:

$$\begin{aligned} N_0(t) &= \frac{N_0(0)}{1 - N_0(0) t}. \\ N_i(t) &= N_i(0) [1 - N_0(0) t]^\xi, \quad \xi = 1 - 2^{1-i} \quad \text{für } i > 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aus der Lösung zum 0-ten Moment kann man die Eigenschaft des Systems ablesen, dass bei einer Zeit von

$$T = \frac{1}{N_0(0)} \quad (3.35)$$

die Gleichung divergiert. Die Aussage ist also die, dass es nach einer gewissen Zeit  $T$  unendlich viele Teilchen mit Masse  $m = 0$  gibt.

### 3.4. Erweiterung der Erhaltungsgleichung auf ein zeitabhängiges Volumen

Die Gleichung 3.1 ist lediglich für ein konstantes Einheitsvolumen und unter der Annahme, dass weder radiale noch vertikale Flüsse auftreten, gültig. Die Variablen sind aber im Allgemeinen vom Ort  $\mathbf{r}$ , bzw. vom radialen und vertikalen Punkt, in dem sie sich befinden, abhängig. Man bedenke nur die Relativgeschwindigkeit durch die verschiedenen Bahngeschwindigkeiten in einer planetaren Scheibe. Darum beobachte ich die Entwicklung des Ensembles in einem zeitlich variablen Volumen. Der Ausgangspunkt ist so wie in vielen anderen Problemfällen die Massenerhaltung innerhalb des betrachteten Volumens

$$D_t M = D_t \int_{V(t)} dV \rho(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.36)$$

Hierbei sind das Volumen  $V$ , die Oberfläche und die Dichte  $\rho(\mathbf{r})$  von der Zeit abhängig. Man sollte auch im Hinterkopf behalten, dass die Dichte laut Gleichung 3.2 eine Funktion der Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{r}, m)$  ist. Benützt man nun das Reynolds'sche Transporttheorem, ergibt sich

$$\int_{V(t)} dV \frac{d}{dt} \rho(\mathbf{r}) + \int_{O(t)} dA (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_A) \rho(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.37)$$

Der zweite Term beschreibt den Massenfluss, der aus der Oberfläche  $O$  des Volumens  $V$  mit einer Transportgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  herausfließt. Stellt man die Dichte durch die Verteilungsfunktion dar, folgt:

$$\int_{V(t)} dV \left[ \frac{d}{dt} \int_0^\infty dm m f(\mathbf{r}, m) \right] + \int_{O(t)} dA \left[ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_A) \int_0^\infty dm m f(\mathbf{r}, m) \right] = 0. \quad (3.38)$$

Hierbei kann man im ersten Term das Integral mit der zeitlichen Ableitung vertauschen. Die totale Ableitung des Terms  $m f(\mathbf{r}, m)$  nach der Zeit ist gleich der partiellen Ableitung nach der Zeit und des Gradienten vom Massenfluss im Massenraum, wie in Gleichung 3.1 beschrieben. Es folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{V(t)} dV \int_0^\infty dm \left[ \frac{\partial}{\partial t} (m f(\mathbf{r}, m)) + \nabla_m F(\mathbf{r}, m) \right] \\ & + \int_{O(t)} dA \left[ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_A) \int_0^\infty dm m f(\mathbf{r}, m) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Nun kann man die Integrale über die Massen der Körper mit den Integralen über die Volumen bzw. Oberflächen vertauschen. Wenn das Integral einer Funktion Null ist, dann muss auch die Funktion selber für beliebige Massen  $m$  Null sein:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dm \left\{ \int_{V(t)} dV \left[ \frac{\partial}{\partial t} (m f(\mathbf{r}, m)) + \nabla_m F(\mathbf{r}, m) \right] + \int_{O(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_A) m f(\mathbf{r}, m)] \right\} = 0 \\ \Rightarrow & \int_{V(t)} dV \left[ \frac{\partial}{\partial t} (m f(\mathbf{r}, m)) + \nabla_m F(\mathbf{r}, m) \right] + \int_{O(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_A) m f(\mathbf{r}, m)] = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Hierbei ist die Masse  $m$  nicht von der Zeit abhängig und größer Null. Gleichung 3.40 durch die Masse  $m$  dividiert resultiert in einem Ausdruck für eine Koagulation oder Fragmentation in einem variablen Volumen

$$\int_{V(t)} dV \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{r}, m)) + \frac{\nabla_m F(\mathbf{r}, m)}{m} \right] + \int_{O(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_A) f(\mathbf{r}, m)] = 0. \quad (3.41)$$

Der maßgebliche Faktor ist wiederum, wie sich der Gradient des Massenflusses verhält. Betrachtet man z.B. die perfekte Koagulation, dann werden die selben Integrale, wie in der Funktion 3.9 angegeben, eingesetzt.

### 3.5. Vertikale Integration

Die protoplanetare Scheibe teile ich in einzelne infinitesimal dünne Hohlzylinder auf. Zieht man einen dieser Zylinder heraus, wie in Abbildung 3.1 veranschaulicht, und betrachtet die Massenerhaltung, wie im Kapitel 3.4, dann schreibt sich die Gleichung 3.41 um in:

$$\begin{aligned}
& \int_{V(t)} dV \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{r}, m)) + \frac{\nabla_m F(\mathbf{r}, m)}{m} \right] \\
& + \int_{O_{Grund,o}(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z) f(\mathbf{r}, m)] - \int_{O_{Grund,u}(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z) f(\mathbf{r}, m)] \\
& + \int_{O_{Mantel,a}(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) f(\mathbf{r}, m)] - \int_{O_{Mantel,i}(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) f(\mathbf{r}, m)] = 0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$O_{Grund,o/u}$  bezeichnet die obere bzw. untere Grundfläche,  $O_{Mantel,i/a}$  die innere bzw. äußere Mantelfläche des Hohlzylinders. Das negative Vorzeichen für den Fluss am inneren Mantel und an der unteren Grundfläche rührt daher, dass der Fluss immer aus der Fläche hinaus zeigt. Damit habe ich dem Volumen eine Form aufgezwungen und kann die Flächen in Zylinderkoordinaten ausdrücken:

$$O_{Grund,o/u} : \quad dA = r \, dr \, d\varphi. \tag{3.43}$$

$$O_{Mantel,i/a} : \quad dA = r \, d\varphi \, dz. \tag{3.44}$$

Das Skalarprodukt zwischen der Geschwindigkeit und den Einheitsvektoren führt zu den jeweiligen projizierten Geschwindigkeiten. Wie im Kapitel 2 dargestellt, folge ich den Arbeiten von Birnstiel et al. (2010) bzw. der Approximation in Armitage (2010) und nehme an, dass die vertikale Struktur durch ein Gleichgewicht zwischen Ablagerung und "turbulenter" Diffusion gegeben ist. Die Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{r}, m)$  erhält dadurch in  $z$ -Richtung die Form einer Gauß-Verteilung. Da ich die Gasscheibe als zeitlich konstant betrachte, ändert sich diese Glockenkurve nicht. Wenn man die Höhe der Hohlzylinder gegen unendlich gehen lässt, ist man in der Lage, die Integration in  $z$ -Richtung für die letzten zwei Terme durchzuführen. Es lässt sich zudem zeigen, dass der Fluss über

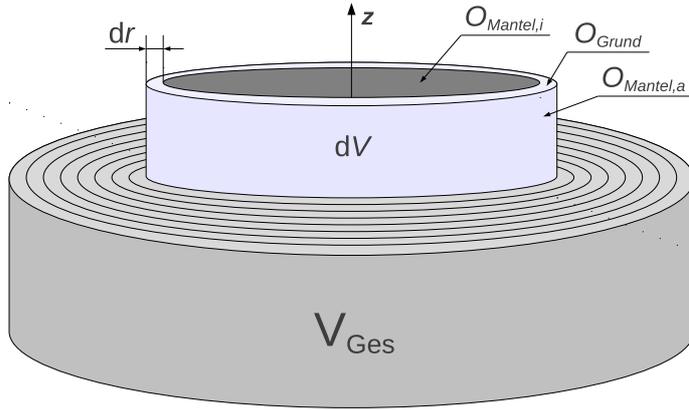


Abbildung 3.1.: **Darstellung des beobachteten Volumens durch Hohlzylinder**

In der Grafik findet man das gesamte beobachtete Volumen und die Einteilung in Hohlzylinder. Ein Volumenelement  $dV$  mit der Breite  $dr$  wurde herausgezogen und die verschiedenen Oberflächen  $O_{Grund}$  und  $O_{Mantel,i/a}$  gekennzeichnet.

den Grundflächen im Unendlichen Null ist. Das heißt, man kann das zweite und dritte Integral streichen. Der nächste Punkt betrifft die Ableitung des Massenflusses nach der Masse. Sie ist abhängig vom Quadrat der Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{r}, m)$  bezüglich der Massen der Stoßpartner  $m_1$  und  $m_2$ . Man kann wieder die Glockenkurve einsetzen, muss aber beachten, dass die Integration in  $z$ -Richtung nicht ausführbar ist, weil der Kern bzw. die Verteilung der Objekte nach einer Fragmentation vom Betrag der Geschwindigkeit abhängt. Ich bezeichne also den in die vertikale Richtung integrierten Massenfluss als  $\tilde{F}(r, m)$ . Aus Gleichung 3.42 folgt:

$$\int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \tilde{\Sigma}_d(\tilde{r}, m) \right) + \frac{\nabla_m \tilde{F}(\tilde{r}, m)}{m} \right] \quad (3.45)$$

$$+(r + dr) v_{rad}(r + dr) \tilde{\Sigma}_d(r + dr, m) - r v_{rad}(r) \tilde{\Sigma}_d(r, m) = 0 .$$

$\tilde{\Sigma}_d$  kennzeichnet die Säulendichte und  $v_{rad}(r)$  die radiale Geschwindigkeit des Staubs. Die Herleitung zu der Gleichung 3.45 findet sich in Anhang C.

Nun gehe ich auf den vertikal integrierten Massenfluss  $\tilde{F}$  genauer ein. Die Gleichung 3.7 kann man so weit umformen, dass man die beiden Integrale vor die einzelnen Terme ziehen kann. Zudem kann man durch die vertikale Integration die beiden Verteilungs-

funktionen abtrennen. Die Ableitung des Massenflusses erhält diese Form:

$$\frac{\nabla_m \tilde{F}(r, m)}{m} = \int_0^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \tilde{\Sigma}_d(r, m_1) \tilde{\Sigma}_d(r, m_2) \Lambda(r, m, m_1, m_2). \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(r, m, m_1, m_2) &= \int_{-\infty}^\infty dz \frac{\tilde{C}_{r,z,m,m_1,m_2}}{2\pi H_d(r, m_1) H_d(r, m_2)} \\ &\times \exp \left[ -\frac{z^2}{2} \left( \frac{1}{H_d(r, m_1)^2} + \frac{1}{H_d(r, m_2)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

beinhaltet die Integration und die Exponentialfunktionen, die zu den jeweiligen Säulendichten gehören.  $\tilde{C}$  steht für die Kombination des Kerns mit der Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion und hat für eine allgemeine kumulative Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}$  diese Funktionalität:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{r,z,m,m_1,m_2} &= \frac{C_{r,z,m_1,m_2} m_1}{m} \\ \frac{\partial}{\partial m} &\left\{ \Theta(m - m_1) [1 - \mathcal{F}(m, m_1, m_2)] - [1 - \Theta(m - m_1)] \mathcal{F}(m, m_1, m_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Setzt man die jeweiligen kumulativen Verteilungsfunktionen ein, erhält man die selben Terme wie in Kapitel 3.1 angegeben. Die vertikale Integration des Massenflusses kann nicht durchgeführt werden, da sowohl die Kollisionsrate  $C$  und im Allgemeinen auch die kumulative Verteilungsfunktion vom Abstand von der Mittelebene abhängt. Das führt dazu, dass man diese Integration auch numerisch durchführen muss. Zu Gute kommt mir dabei, dass durch die Annahme einer zeitlich konstanten Gasscheibe sowohl die Relativgeschwindigkeiten als auch die Staubscheibe und die kumulativen Verteilungsfunktionen gleich bleiben. Demzufolge bestimmt man  $\Lambda$  vor allen anderen Berechnungen.

Bei den Advektionstermen (zweiter und dritter Term auf der linken Seite von Gleichung 3.45) habe ich im Kapitel 3.4 eine Transportgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Materials im Volumen eingeführt. Diese ist als Geschwindigkeit des gesamten Ensembles aus verschiedenen Teilchen zu verstehen. Wäre sie ebenfalls von der Masse abhängig, könnte man sie nicht in das Massenintegral ziehen (Gleichung 3.39 auf 3.40). Die radiale Geschwindigkeit des Ensembles setze ich gleich einer mittleren Transportgeschwindigkeit der Staubteilchen. Man trennt dadurch die radialen Geschwindigkeiten, die für den Transport zuständig sind, von denen, die in der Fragmentation/Koagulation auftreten. Man kann das auch so verstehen, dass man lokal die radialen Relativgeschwindigkeiten der einzelnen Teilchen

betrachtet, global aber einen gemeinsamen Fluss. Um den unterschiedlichen Transport der einzelnen Teilchengrößen besser darzustellen, verwenden Birnstiel et al. (2010) und Brauer et al. (2008) für beide Phänomene die gleichen Geschwindigkeiten, lösen dafür aber zwei verschiedene Erhaltungsgleichungen. Ich bleibe mit der Erhaltungsgleichung 3.36 konsistent und verwende den Mittelwert  $v_{rad}(r)$  aus der radialen Geschwindigkeit (Gleichung 4.10).

Die zeitliche Entwicklung des Systems folgt aus der Integration der Erhaltungsgleichung vom Zeitpunkt  $t$  auf  $t + dt$ :

$$\int_t^{t+dt} d\tilde{t} \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \tilde{\Sigma}_d(\tilde{r}, m) \right) + \frac{\nabla_m \tilde{F}(\tilde{r}, m)}{m} \right] \\ + \int_t^{t+dt} d\tilde{t} \left[ (r + dr) v_{rad}(r + dr) \tilde{\Sigma}_d(r + dr, m) - r v_{rad}(r) \tilde{\Sigma}_d(r, m) \right] = 0. \quad (3.49)$$

Ein wichtiger Aspekt, der im Kapitel 5.2 Verwendung findet, ist der, dass man diese Gleichung in zwei gekoppelte Differentialgleichungen umwandeln kann. Die ersten beiden Terme bestimmen das Verhalten der Scheibe in Bezug auf Kollisionen zwischen Teilchen. Die letzten beiden Terme beschreiben die Advektion. Ich teile die Gleichungen also in die Fragmentations-Koagulationsgleichung und in die Strömungsgleichung auf:

$$\int_t^{t+dt} d\tilde{t} \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \tilde{\Sigma}_d(\tilde{r}, m) \right) + \frac{\nabla_m \tilde{F}(\tilde{r}, m)}{m} \right] = 0 \quad (3.50)$$

bzw.

$$\int_t^{t+dt} d\tilde{t} \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f(\tilde{r}, m)) + \frac{\nabla_m F(\tilde{r}, m)}{m} \right] = 0 \quad (3.51)$$

für ein Einheitsvolumen im ruhenden System. Die Strömungsgleichung erhält diese Form:

$$\int_t^{t+dt} d\tilde{t} \left\{ \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \frac{\partial}{\partial t} \left( \tilde{\Sigma}_d(\tilde{r}, m) \right) \right. \\ \left. + \left[ (r + dr) v_{rad}(r + dr) \tilde{\Sigma}_d(r + dr, m) - r v_{rad}(r) \tilde{\Sigma}_d(r, m) \right] \right\} = 0. \quad (3.52)$$

## 4. Physikalischer Kern und Relativgeschwindigkeiten

Der Kern der Fragmentations-Koagulationsgleichung beschreibt, wie schon im Kapitel 3.1 angeführt, die Kollisionsrate zwischen den Teilchen mit der Masse  $m_1$  und denen mit Masse  $m_2$ . Betrachtet man ein Einheitsvolumen, das mit verschiedenen Teilchen mit einer willkürlichen Geschwindigkeit befüllt ist, dann gibt es zwei wesentliche Parameter, die diese Rate bestimmen. Die Wahrscheinlichkeit eines Stoßes nimmt augenscheinlich zu, wenn sich die Teilchen schneller zueinander bewegen und wenn die Teilchen groß sind. Damit kann man statistisch gesehen die Kollisionsrate

$$C_{r,z,m_1,m_2} = \sigma_{m_1,m_2} v_{r,z,m_1,m_2}^{rel} \quad (4.1)$$

ähnlich der Formel 3.4 aus Kapitel 3.1 definieren. Die erste Variable, die darin vorkommt, ist der geometrische Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{m_1,m_2}$ . Er ergibt sich wie folgt:

$$\sigma_{m_1,m_2} = \pi (r_{d;1} + r_{d;2})^2 = \pi \left[ \left( \frac{3 m_1}{4 \pi \rho_d} \right)^{1/3} + \left( \frac{3 m_2}{4 \pi \rho_d} \right)^{1/3} \right]^2. \quad (4.2)$$

$r_d$  bezeichnet dabei den Radius eines Teilchens und  $\rho_d$  die Dichte des Teilchens. Die Gleichung 4.2 ist lediglich für kleine Teilchen gültig. Betrachtet man Körper mit einigen Kilometern Durchmesser, dann vergrößert sich der Einfluss des Objektes durch die Eigengravitation. Die gravitative Fokussierung

$$\sigma'_{r,z,m_1,m_2} = \sigma_{m_1,m_2} \left[ 1 + \left( \frac{v_{esc}}{v_{r,z,m_1,m_2}^{rel}} \right)^2 \right] \quad (4.3)$$

hängt ab vom Verhältnis zwischen der Entweichgeschwindigkeit aus dem gemeinsamen Potential und der Relativgeschwindigkeit. Ich beobachte in meiner Arbeit lediglich kleine Teilchen, darum kann ich die gravitative Fokussierung vernachlässigen und verwende den geometrischen Wirkungsquerschnitt nach der Gleichung 4.2. Auf die Relativgeschwindig-

keit  $v^{rel}$  wirken sehr viele Prozesse ein. Birnstiel et al. (2010) benutzen die Brown'sche Bewegung, die radialen, vertikalen und azimuthalen Relativgeschwindigkeiten sowie turbulente Bewegungen. Brauer et al. (2008) ziehen alle außer die azimuthalen Geschwindigkeiten heran. In meiner Arbeit verwende ich drei Relativgeschwindigkeiten (Brown'sche Bewegung  $v_{Br}$ , vertikale Ablagerung  $v_s$  und radiale Geschwindigkeit  $v_{rad}$ ). Die gesamte Relativgeschwindigkeit, die im Kern (Gleichung 4.1) vorkommt, folgt aus der Summe der Betragsquadrate:

$$v_{r,z,m_1,m_2}^{rel} = \left[ \left( v_{Br}^{rel}(r, m_1, m_2) \right)^2 + \left( v_s^{rel}(r, z, m_1, m_2) \right)^2 + \left( v_{rad}^{rel}(r, m_1, m_2) \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.4)$$

In den folgenden Unterkapiteln gehe ich auf die Relativgeschwindigkeiten genauer ein.

## 4.1. Brown'sche Bewegung

Die Brown'sche Bewegung beschreibt den willkürlichen Weg, den Gasteilchen eines idealen Gases durchlaufen. Die Geschwindigkeitsverteilung dieser Gasteilchen kann man durch die Maxwell-Boltzmann Verteilung beschreiben. Die kleinsten Staubteilchen kann man als eine Art aufgelöste Substanz im Gas verstehen und dementsprechend annehmen, dass sie sich wie ein ideales Gas verhalten. Diese neue "Gaskomponente" ist zudem im thermischen Gleichgewicht mit der Gasscheibe und weist somit die gleiche Temperatur, die von der Sternstrahlung herrührt, auf. Die mittlere Geschwindigkeit  $v_{Br}$  einer Teilchenklasse mit einer gewissen Masse  $m_1$  ist gegeben durch:

$$v_{Br} = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m_1}}. \quad (4.5)$$

Die Relativgeschwindigkeit  $v_{Br}^{rel}$  zwischen zwei Teilchenklassen mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  resultiert also in:

$$v_{Br}^{rel}(r, m_1, m_2) = \sqrt{\frac{8 k_B T(r) (m_1 + m_2)}{\pi m_1 m_2}}. \quad (4.6)$$

Grundsätzlich gilt diese Gleichung ausschließlich für ein ideales Gas, da ich aber sehr dünne Medien betrachte, kann ich diese Relativgeschwindigkeit als Approximation anwenden. Je größer die Teilchen sind, um so schlechter stimmt die Annäherung, da die Geschwindigkeit aber nur für sehr kleine Teilchen eine Rolle spielt, kann man ausnahmslos bei Gleichung 4.6 bleiben. Wie auch Brauer (2008) in seiner Arbeit schreibt, gibt es praktisch keine Koagulation durch Brown'sche Bewegung von Teilchen, die größer sind

wie einige Mikrometer. Zudem zeigt er auf, dass Ergebnisse von anderen numerischen Rechnungen darauf hinweisen, dass durch Brown'sche Bewegung eher "fluffy particles" als kugelförmige Objekte entstehen. Dieser Umstand wird in meiner Arbeit ebenfalls vernachlässigt, Ansätze für die Integration von nicht-sphärischen Körpern liefern unter anderem Paszun & Dominik (2009).

## 4.2. Vertikale Ablagerung

Wie schon im Kapitel 2 festgestellt, ergibt sich die Ablagerungsgeschwindigkeit  $v_s$  (Gleichung 2.25) einer Teilchenklasse mit einer gewissen Masse  $m_1$  aus dem Gleichgewicht zwischen der Reibungskraft  $|F_{fric}|$ , die das Gas auf den Staub ausübt, und der Gravitationskraft  $|F_{grav}|$ . Dabei gibt es verschiedene Punkte, über die ich zuvor hinweg gesehen habe. Ein wichtiger Aspekt ist der, dass die Staubteilchen im Gegensatz zum Gas keinen vertikalen Druckgradienten verspüren. Wie auch Dullemond & Dominik (2004) anführen, muss man für die Epstein-Reibung annehmen, dass die Staubteilchen kleiner sind als die mittlere freie Weglänge des Gases. Sind die Staubkörner größer, dann müsste man die verschiedenen anderen Regimes anwenden. Im Gegensatz dazu gilt aber auch, dass sehr große Teilchen weniger vom Gas gestört werden und dementsprechend sollten sie sich auf Keplerbahnen mit einer gewissen Inklination zur Scheibenebene bewegen. Die Schranke der Ablagerungsgeschwindigkeit kann man auf diese Weise verstehen. Ähnlich wie in Birnstiel et al. (2010) vernachlässige ich dabei die anderen Reibungsarten und setze die maximale vertikale Geschwindigkeit auf die Hälfte der vertikalen Bahngeschwindigkeit eines größeren Körpers. Die Bahngeschwindigkeit  $\mathbf{v}_K = \Omega_K \mathbf{r}$  auf die vertikale projiziert resultiert in  $v_{K,z} = \Omega_K z$ . Die Ergebnisse in Dullemond & Dominik (2004) zeigen zudem, dass die Ablagerung bei großen Höhen 3000-mal schneller von statten geht als in der Mittelebene. Dementsprechend muss man auch bei einem hohen Abstand von der Mittelebene, bzw. bei Orten, in denen die Gasdichte gering wird, davon ausgehen, dass sehr kleine Teilchen eher entlang von Keplerbahnen in die Mittelebene wandern. Man könnte daher, wie in Brauer et al. (2008) durchgeführt, die gesamte projizierte Bahngeschwindigkeit als Grenzwert von sehr großen Stokes-Zahlen sehen. Ich bleibe aber bei der Definition von Birnstiel et al. (2010). Die Relativgeschwindigkeit durch Ablagerung  $v_s^{rel}$  zwischen zwei Teilchenklassen mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  in einer Höhe  $z$  über der Mittelebene weist diese Funktionalität auf:

$$v_s^{rel}(r, z, m_1, m_2) = z \Omega_K(r) \left| \min \left( St(r, m_1), \frac{1}{2} \right) - \min \left( St(r, m_2), \frac{1}{2} \right) \right|. \quad (4.7)$$

### 4.3. Radiale Geschwindigkeit

Radiale Relativgeschwindigkeiten treten deshalb auf, weil die Staubteilchen verschieden schnell nach innen wandern. Dieses Phänomen basiert auf dem grundsätzlichen Unterschied zwischen Gas und Staub. Nach Brauer et al. (2008) ergeben sich zwei wesentliche radiale Geschwindigkeiten. Die erste beruht darauf, dass der Gasanteil der Scheibe einen radialen Druckgradienten verspürt und sich daher mit einer Geschwindigkeit, die kleiner als die radiale Keplergeschwindigkeit ist, bewegt. Der Staub nimmt hingegen diesen Gradienten nicht wahr und weist die Keplergeschwindigkeit auf. Das Gas bewirkt nun einen Gegenwind, der dem Staubanteil Drehimpuls entzieht und ihn nach innen wandern lässt. Hier kommt die Effizienz der Impulsübertragung ins Spiel. Diese ist, nach Gleichung 2.24, von der Größe der Staubkörner abhängig. Die radiale Geschwindigkeit eines Teilchens mit der Masse  $m$  ergibt sich durch:

$$v_{wind} = -\frac{1}{St + \frac{1}{St}} \frac{c_s^2}{V_k} \left( \frac{3}{2} + \frac{\xi}{2} + \delta \right) \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{1}{2}. \quad (4.8)$$

$\xi$  bezeichnet den Exponenten des Temperaturverlaufs und hat nach Kapitel 2 einen fixen Wert von 0.5. Die zweite Relativgeschwindigkeit entsteht durch den Umstand, dass die Gasscheibe viskos ist. In der Gasscheibe wird der Drehimpuls durch viskose Spannungen nach außen getragen. Das Gas wandert also nach innen. Kleinere Staubkörner nehmen durch ihre starke Kopplung zum Gas an dieser Bewegung teil. Der daraus entstehenden Geschwindigkeit geben Brauer et al. (2008) mit einem Temperaturverlauf nach Gleichung 2.10 diese Funktionalität:

$$v_{visc} = -\frac{3\alpha}{1 + St^2} \frac{c_s^2}{V_k} \left( \frac{3}{2} - \delta \right). \quad (4.9)$$

Kombiniert man die beiden Geschwindigkeiten  $v_{wind}$  und  $v_{visc}$ , ergibt sich die gesamte radiale Geschwindigkeit:

$$v_{rad}(r, m) = -\frac{c_s^2(r)}{V_k(r)} \left[ \frac{3\alpha}{1 + St^2(r, m)} \left( \frac{3}{2} - \delta \right) + \frac{1}{St(r, m) + \frac{1}{St(r, m)}} \left( \frac{7}{4} + \delta \right) \right]. \quad (4.10)$$

Die Relativgeschwindigkeiten zwischen zwei Teilchenklassen  $m_1$  und  $m_2$  kann man über diese Gleichung berechnen:

$$v_{rad}^{rel}(r, m_1, m_2) = |v_{rad}(r, m_1) - v_{rad}(r, m_2)|. \quad (4.11)$$

## 5. Diskretisierung und Algorithmen

Wie im Kapitel 3.5 gezeigt, muss man die Erhaltungsgleichung 3.45 auf ein radiales Gitter und ein Massengitter abbilden. Zudem entnimmt man daraus, dass man den Kern über die vertikale Achse integrieren muss. Die vertikale Ausdehnung des betrachteten Volumens sollte dabei unendlich sein. Numerisch reicht es aber aus, die Integration so weit durchzuführen bis die beiden Exponentialfunktionen in Gleichung 3.47 sehr klein werden. Man könnte also vorschlagen, die größte Skalenhöhe als Grenze einzuführen. Dadurch ergibt sich aber das Problem, dass man bei kleinen Radien die Scheibe sehr schlecht auflöst und folglich die vertikale Ablagerung nicht erfasst. Durch die Annahme einer Glockenkurve folgt aber, dass die Integration über ca.  $3 H_g$  hinaus keinen großen Einfluss mehr nimmt. Diese Kenntnis benutze ich, indem ich für jeden Radius einen separaten Integrationsbereich  $[-3 H_g(r), 3 H_g(r)]$  einführe. Das beobachtete Volumen weist dann die Form der Gasscheibe auf. Innerhalb der verschiedenen großen Hohlzylinder verteile ich die  $z$ -Achse in 101 äquidistante Gitterplätze. Der nächste Schritt besteht darin, das Massengitter zu charakterisieren. Danach gehe ich genauer auf das radiale Gitter ein und am Ende diskretisiere ich die Gleichungen auf den drei Achsen.

### 5.1. Logarithmische Massenskala

Im Kapitel 3.1 habe ich schon festgestellt, dass die protoplanetare Scheibe ein sehr großes Ensemble an Teilchen von  $\mu\text{m}$ - bis zu  $\text{km}$ -großen Körpern beinhaltet. All diese verschiedenen Objekte können sich in der protoplanetaren Scheibe treffen. Somit gibt es für jedes Stoßpaar eine Kollisionswahrscheinlichkeit. Möchte man die Entwicklung des Systems durch ein Programm berechnen, dann kann man nicht jeden möglichen Stoß mit-einbeziehen. Stattdessen drückt man die Kollisionen ähnlich großer Teilchen, bzw. die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens, durch ihren Mittelwert aus. Das kann man auch so verstehen, dass man die kontinuierliche Skala der Größen in Intervalle einteilt und nur die mittleren Teilchenradien für alle Berechnungen verwendet. Diese neue Skala wird als Gitter bezeichnet und die Mittelwerte als Gitterplätze. In den Gleichungen 3.9

und 3.12 ist die Masse die Variable in den Integralen, deshalb geht man von einer Größenskala in ein Massengitter über. Da die Massen proportional zu den Kuben der Radien sind, ist die Spannweite des Massenbereichs um einiges größer. Die kleinsten Teilchen haben eine Masse von  $\sim 10^{-14}$  g, die größten hingegen eine Masse von  $\sim 10^{16}$  g. Die Bandbreite des Massenbereichs überspannt also 30 Größenordnungen. Verwendet man hierbei ein linear verteiltes Gitter, dann ergeben sich einige Probleme. Bei sehr kleinen Intervallen überschreitet man den Speicherplatz eines Computers und erhält ein sehr zeitintensives Programm. Wählt man hingegen ein breites Intervall, dann verliert man an Genauigkeit, bzw. die Verteilungsfunktion wird unzureichend aufgelöst. Eine Lösung dieses Problems findet man in der Verteilungsfunktion selbst. In einer protoplanetaren Scheibe kann man davon ausgehen, dass ein wesentlich größerer Anteil an sehr kleinen Teilchen vorhanden ist und dementsprechend dieser Massenbereich gut aufgelöst werden muss. Größere Massen sind hingegen eher selten und spielen eine kleinere Rolle in der Gesamtentwicklung des Systems. Man kann also die Intervallgrenzen zu größeren Massen hin verbreitern. Ich verwende dafür die Einteilung durch eine logarithmische Skala, wie auch Brauer (2008), Majerowicz (1987) oder Pullmann (2003).

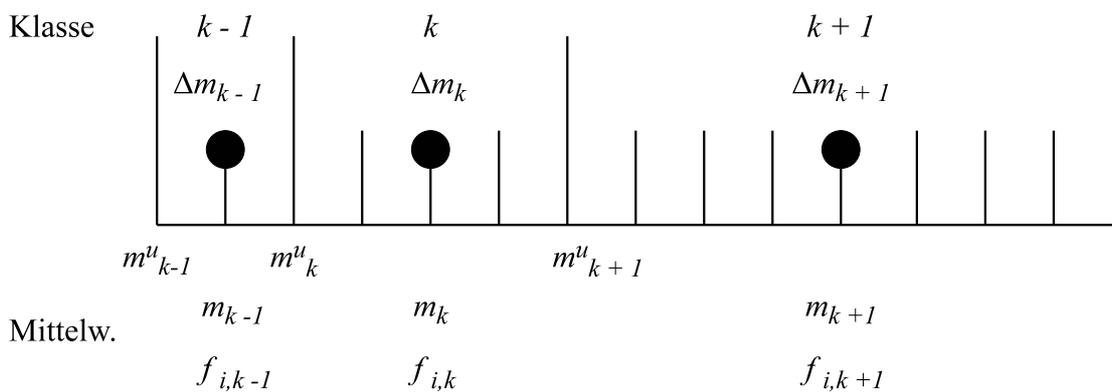


Abbildung 5.1.: **Klasseneinteilung zur Massendiskretisierung**

Die Grafik zeigt die Klassen mit den jeweiligen Binbreiten  $\Delta m$  und den unteren Grenzen  $m^u$ . Die Mittelwerte sind auf den Stützpunkten in der Mitte eines jeden Bins definiert und als Punkte dargestellt.

Zu Beginn betrachtet man eine diskrete lineare Einteilung der Massen. Basierend darauf fasst man eine gewisse Anzahl an Gitterplätzen zu verschiedenen großen Gruppen oder Klassen zusammen. Wie in Pullmann (2003) dargestellt, überdecken somit endlich viele Klassen, so genannte Bins, den gesamten Massenbereich. In der Mitte eines jeden Bins

wird der Mittelwert für die verschiedenen physikalischen Größen, z.B. Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{r}, m)$  oder die mittlere Masse der Objekte in dem Bin, festgelegt. Verwendet man zudem die Größe und die untere Grenze der Bins, ist jede Klasse definiert. Wie zuvor schon besprochen besteht eine protoplanetare Scheibe größtenteils aus sehr kleinen Teilchen. Dementsprechend sollte man für diese Bereiche eine bessere Auflösung ("region of interest") wählen. Die logarithmische Skala weist genau diese Eigenschaft auf, sie grenzt kleine Massen enger ein und vereinigt größere Massen in breiteren Bins. Abbildung 5.1 stellt die Charakterisierung der Klassen durch die untere Grenze  $m_k^u$ , die Größe des Bins  $\Delta m_k$  und den Massenmittelwert  $m_k$  dar. Die Ausdrücke für die einzelnen Parameter erhalten bei einem Logarithmus zur Basis  $b$  diese Gestalt:

$$\begin{aligned}
 m_k^u &= b^k - 1, \\
 m_k &= \frac{m_{k+1}^u + m_k^u}{2} = \frac{b+1}{2} b^k - 1, \\
 \Delta m_k &= m_{k+1}^u - m_k^u = (b-1) b^k.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Der große Vorteil der logarithmischen Skala liegt darin, dass man den gesamten Massenbereich mit  $\sim 200$  Gitterplätzen abdecken kann. Der Nachteil in dieser Einteilung lässt sich durch die Koagulation erläutern: Wenn zwei Körper mit Masse  $m_i$  und  $m_j$  zu einem Körper mit Masse  $m_i + m_j$  koagulieren, dann muss diese Masse nicht gezwungenermaßen auf einen Gitterplatz fallen. Um dieses Problem zu lösen betrachtet man die Gewinnrate  $\dot{G}_k$  des  $k$ -ten Bins. Diese Rate beschreibt den zeitlichen Zuwachs an Teilchen mit der Masse  $m_k$ . Aus der rechten Seite der Gleichung 3.9 ergeben sich die Gewinnterme  $G_{i,j}$  eines Objektes mit der Masse  $m_i + m_j$ . Das erste Verfahren zur Problemlösung verwendet die Bingrenzen. Fällt ein Teilchen mit der Masse  $m_i + m_j$  in das Intervall  $(m_k^u, m_{k+1}^u)$ , dann zählt man den Gewinnterm einfach zur Gewinnrate des Körpers mit der Masse  $m_k$  dazu. Liegt die Masse  $m_i + m_j$  hingegen auf einer Bingrenze, dann teilt man den Gewinnterm gleichmäßig zwischen den beiden angrenzenden Bins auf. Diese Methode verwendet Majerowicz (1987) und mit einer Erweiterung Lee (2000). Ein anderes Verfahren verteilt den Zuwachs prozentual auf die anliegenden Gitterplätze. Betrachtet man die Gewinnrate an Teilchen im  $k$ -ten Bin, dann kommen alle Körper in Frage, die in das Intervall  $[m_{k-1}, m_{k+1})$  fallen. Wie in Abbildung 5.2 dargestellt, folgt die Zuweisung der resultierenden Körper aus dem Verhältnis der Mittelwerte.

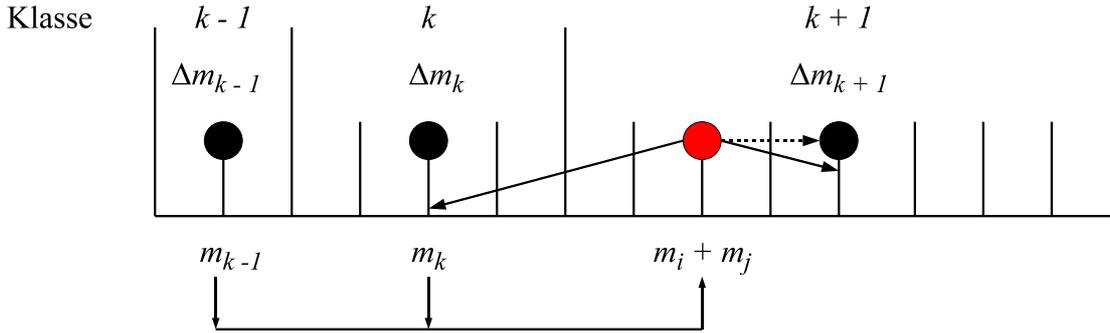


Abbildung 5.2.: **Zuordnungsart der aus einem Stoß resultierenden Körper**  
 Einteilung des Objektes, das aus einem Zusammenstoß der Teilchen  $m_i$  und  $m_j$  resultiert. Die durchgezogene Linie zeigt die Aufteilung anhand der Mittelwerte der beteiligten Klassen  $k$  und  $k + 1$ . Die gestrichelte Linie beschreibt die Aufteilung über die Untergrenzen der Bins.

Die Gewinnrate des  $k$ -ten Bins resultiert aus den Gewinntermen innerhalb der Intervalle  $[m_{k-1}, m_k)$  bzw.  $[m_k, m_{k+1})$ . Im ersten Fall gilt:

$$\dot{G}_k = G_{i,j} \frac{m_i + m_j - m_{k-1}}{m_k - m_{k-1}}. \quad (5.2)$$

Analog folgt für das Intervall  $[m_k, m_{k+1})$ :

$$\dot{G}_k = G_{i,j} \frac{m_{k+1} - m_i - m_j}{m_{k+1} - m_k}. \quad (5.3)$$

Ähnliche Prozeduren finden sich in Brauer (2008) oder Pullmann (2003).

## 5.2. Radiale Skala

Die Auflösung der Verteilungsfunktion in radialer Richtung ist im betrachteten System, protoplanetare Scheibe unter den Annahmen aus den Kapiteln 2 und 3.1, weniger bedeutend. Der Fluss der Materie über das radiale Gitter wird alleine von den Advektionstermen der Gleichung 3.45 bestimmt. Die Diskretisierung dieser Terme führe ich mithilfe der Finiten-Volumen-Methode durch. Grundsätzlich geht man bei dieser Methode davon aus, dass man das beobachtete Gebiet in Kontrollvolumen mit der Größe  $\Delta r$  einteilen kann. Innerhalb dieser Kontrollvolumen ändern sich die verwendeten Variablen (Säulendichte und Relativgeschwindigkeit) nicht. Dementsprechend definiert man, ähnlich wie im Unterkapitel 5.1, die Variablen in der Mitte einer jeden Zelle. Der Unterschied zur

Finiten-Differenzen-Methode besteht darin, dass man die Flüsse anders handhabt. Diese liegen offensichtlich an den Rändern der Kontrollvolumen, bei denen die Säulendichten u.s.w. nicht bekannt sind. Ein Weg, die Variablen dort zu bestimmen, führt über das "upwind scheme". Dabei geht man davon aus, dass die Lösung sich wie eine Welle ausbreitet und von einer Zelle in die nächste fließt. Den Betrag des Flusses über die Oberfläche wählt man also über die mittlere radiale Geschwindigkeit  $v^{rad}$  aus. Aus dem Kapitel 4 erkennt man, dass diese Geschwindigkeit in allen Fällen negativ ist. Dadurch fließt das Material immer von größeren Radien zu kleineren. Für den Fluss am unteren Rand heißt das, dass er durch die Variablen innerhalb des Kontrollvolumens charakterisiert ist. Der Fluss am oberen Rand ist durch die Variablen in der darauf folgenden Zelle gekennzeichnet. Nun führe ich ein äquidistantes Gitter mit  $N_r = 50$  Gitterplätzen, auf dem die Variablen definiert sind, ein.

$$\Delta r = \frac{r_{out} - r_{in}}{N_r - 1}, \quad (5.4)$$

$$r_{l+1} = r_l + \Delta r .$$

Des Weiteren soll  $l$  der radiale Index der Variablen sein. Damit ich die Oberflächen richtig berechne, definiere ich zudem ein äquidistantes Gitter mit  $N_r = 51$  Gitterplätzen, das um die Hälfte zurück verschoben ist. Dieses Gitter soll das Intervall  $[r_{in}, r_{out}]$  (aus dem Kapitel 2) überspannen. Den Index des versetzten Gitters bezeichne ich mit  $l \pm 1/2$ . Nun kann ich die Gleichungen 3.51 und 3.52 auf der radialen Achse abbilden. Benutzt man zudem einen diskreten Zeitschritt  $\Delta t$ , folgt:

$$\int_t^{t+\Delta t} d\tilde{t} \int_r^{r+\Delta r} d\tilde{r} \tilde{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (f(\tilde{r}, m)) + \frac{\nabla_m F(\tilde{r}, m)}{m} \right] = 0 \quad (5.5)$$

sowie

$$\int_t^{t+\Delta t} d\tilde{t} \left\{ \int_r^{r+\Delta r} d\tilde{r} \tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( \tilde{\Sigma}_d(\tilde{r}, m) \right) + \left[ (r + \Delta r) v_{rad}(r + \Delta r) \tilde{\Sigma}_d(r + \Delta r, m) - r v_{rad}(r) \tilde{\Sigma}_d(r, m) \right] \right\} = 0 . \quad (5.6)$$

Im nächsten Schritt nehme ich an, dass sich das Volumen innerhalb des Zeitschritts  $\Delta t$  nicht ändert. Damit kann man die Integration über den Radius mit der Integration über der Zeit vertauschen. Für die Gleichung 5.5 bedeutet das, dass die Integration über den

Radius entfällt und die Funktion weist diese Form auf:

$$\int_t^{t+\Delta t} d\tilde{t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f_{l,k}) + \frac{(\nabla_m F)_{l,k}}{m_k} \right] = 0. \quad (5.7)$$

Für die Strömungsgleichung 5.6 nehme ich zudem an, dass sich die Flüsse innerhalb des Zeitraums  $t$  bis  $t + \Delta t$  nicht ändern. Damit kann ich die Integration über den Radius durchführen:

$$\int_t^{t+\Delta t} d\tilde{t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\Sigma}_{l,k}) + \frac{2}{r_{l+1/2}^2 - r_{l-1/2}^2} \left( r_{l+1/2} v_{l+1}^{rad} \tilde{\Sigma}_{l+1,k} - r_{l-1/2} v_l^{rad} \tilde{\Sigma}_{l,k} \right) \right] = 0. \quad (5.8)$$

Hierbei habe ich schon durch das Resultat aus der Integration dividiert. Die beiden Differentialgleichungen kann man numerisch gesehen nacheinander berechnen. Dadurch habe ich die Möglichkeit, den radialen Transport separat zu testen. Wie die zeitlichen Ableitungen in diskreter Form aussehen, folgt im nächsten Unterkapitel 5.3.

### 5.3. Zeitschritt und Limitierung

Wie im vorigen Unterkapitel 5.2 angeführt, teile ich die Erhaltungsgleichung 3.45 in einen Fragmentations-Koagulationsschritt und einen Advektionsschritt ein. Diese Entwicklungsschritte sind mit unterschiedlichen Flüssen verbunden (siehe Gleichung 5.7 und 5.8).

Die zeitliche Ableitung zur Koagulation bzw. Fragmentation diskretisiere ich durch ein explizites Euler-Verfahren erster Ordnung:

$$\int_t^{t+\Delta t} d\tilde{t} \left[ \frac{f_{l,k}^{(s+1)} - f_{l,k}^{(s)}}{\Delta t} + \frac{(\nabla_m F)_{l,k}^{(s)}}{m_k} \right] = 0 \Rightarrow f_{l,k}^{(s+1)} = f_{l,k}^{(s)} - \Delta t \frac{(\nabla_m F)_{l,k}^{(s)}}{m_k}. \quad (5.9)$$

Hierbei bezeichnet  $f_{l,k}^{(s+1)}$  den Wert der Verteilungsfunktion der  $k$ -ten Klasse am  $l$ -ten radialen Punkt zum neuen Zeitpunkt  $t + \Delta t$  und  $f_{l,k}^{(s)}$  den Wert am alten. Da die einzelnen Variablen nicht mehr von der Zeit abhängen, wurde die Integration über die Zeit ausgeführt. Durch das explizite Verfahren ergibt sich ein Problem bei großen Zeitschritten. Damit die Masse erhalten bleibt, muss in Gleichung 5.9 garantiert sein, dass nach dem Zeitschritt die Verteilungsfunktion immer noch positiv ist. Das heißt, der Zeitschritt muss limitiert werden. Wie in Völker (2003) angegeben, kann für den Koagulations- bzw.

Fragmentationsschritt die Limitierung durch diese Funktionalität erfolgen:

$$\Delta t_{pK+f} = 0.7 \min(\partial t_{l,k}) \quad (5.10)$$

mit

$$\partial t_{l,k} = \begin{cases} \left| \frac{f_{l,k}}{\dot{f}_{l,k}} \right|, & \dot{f}_{l,k} < 0 \\ \infty, & \dot{f}_{l,k} = 0 \\ 10^3 \left| \frac{f_{l,k}}{\dot{f}_{l,k}} \right|, & \dot{f}_{l,k} > 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

In allen Fällen nehme ich zudem an, dass  $f_{l,k}$  größer sein muss als ein Minimalwert, da der minimale Zeitschritt sonst Null wird.

Beim Advektionsschritt bezeichne ich den Gesamtfluss als  $F_{l,k}^{rad}$  und er soll die letzten beiden Terme von Gleichung 5.8 widerspiegeln. Die Variable, die sich zeitlich entwickelt, ist die Säulendichte. Um die zeitliche Ableitung diskret darzustellen, wende ich wiederum ein explizites Euler-Verfahren erster Ordnung an. Es gilt:

$$\int_t^{t+\Delta t} d\tilde{t} \frac{\tilde{\Sigma}_{l,k}^{(s+1)} - \tilde{\Sigma}_{l,k}^{(s)}}{\Delta t} = - \frac{2 \Delta t F_{l,k}^{s;rad}}{r_{l+1/2}^2 - r_{l-1/2}^2} \Rightarrow \tilde{\Sigma}_{l,k}^{(s+1)} = \tilde{\Sigma}_{l,k}^{(s)} - \frac{2 \Delta t F_{l,k}^{s;rad}}{r_{l+1/2}^2 - r_{l-1/2}^2}. \quad (5.12)$$

Nach Courant et al. (1928), muss bei Advektionsgleichungen der Zeitschritt der CFL-Bedingung genügen. Diese Bedingung fordert, dass die Entwicklungsgeschwindigkeit des Systems schneller ist wie die Summe aus der lokalen Geschwindigkeit des Mediums und der Schallgeschwindigkeit. Mit einem Sicherheitsparameter von 0.7, folgt:

$$\Delta t_{adv} = 0.7 \min \left( \frac{\Delta r}{|v_l^{rad}| + c_s} \right). \quad (5.13)$$

Diese Limitierung muss man durch die Annahmen im Kapitel 2 nur zu Beginn berechnen. Die beiden Zeitschritte füge ich durch die Minimum-Funktion zusammen:

$$\Delta t = \min(\Delta t_{pK+f}, \Delta t_{adv}). \quad (5.14)$$

Welche Form die Flussterme in diskreter Weise haben, folgt in den nächsten Unterkapiteln. Um die Gleichungen zu verkürzen, benutze ich in diesen Kapiteln  $\dot{f}$  bzw.  $\tilde{\Sigma}$ . Dabei soll die zeitliche Diskretisierung nach den Gleichungen 5.9 und 5.12 aber schon enthalten sein.

## 5.4. Diskretisierung der Fragmentations-Koagulationsgleichung

Wie im Kapitel 3.1 beschrieben, teste ich die Fragmentations-Koagulationsgleichung, indem ich zuerst die beiden Extremfälle perfekte Koagulation ( $v_{m_1, m_2}^{rel} \leq v^f$ ) und reine Fragmentation ( $v_{m_1, m_2}^{rel} > v^f$ ) diskretisiere. Die analytischen Lösungen zu diesen Testfällen sind lediglich in einem ruhenden Medium gültig, darum betrachte ich Materie, die weder in radialer noch in vertikaler Richtung fließt. Somit vereinfacht sich das Problem und man kann die radialen und vertikalen Abhängigkeiten vernachlässigen. Aus dem Kapitel 4 geht hervor, dass die Relativgeschwindigkeit im Allgemeinen ebenfalls vom Ort  $\mathbf{r}$  im Raum abhängt. Diesen Umstand muss man im Kern über die kumulativen Verteilungsfunktionen und bei der Treppenfunktion in Gleichung 3.14 beachten. Die Treppenfunktion bestimmt, welche der beiden Fälle: "perfekte Koagulation" und "reine Fragmentation" auftritt. Diese Auswahl ist abhängig von einer Grenzgeschwindigkeit, die man Fragmentationsgeschwindigkeit  $v^f$  nennt. Birnstiel et al. (2010) setzen sie auf einen Wert von  $v^f = 1 \text{ m s}^{-1}$ . Brauer et al. (2008) variieren  $v^f$  zwischen  $1 - 30 \text{ m s}^{-1}$ , um den Einfluss der Fragmentationsgeschwindigkeit auf die Resultate zu überprüfen. Ich verwende eine Fragmentationsgeschwindigkeit von  $1 \text{ m s}^{-1}$ . Im Anschluss an die beiden Extremfälle findet man die kombinierte Variante und die vollständige diskrete Schreibweise.

### 5.4.1. Diskrete Form der Koagulation

Die Diskretisierung der Fragmentations-Koagulationsgleichung mit perfekter Koagulation baut auf dieser Gleichung auf (Die Herleitung dazu findet man im Anhang A):

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{d}{dm} \mathcal{F}^{pK}(m) &= \int_0^\infty dm_2 C_{m, m_2} f(m) f(m_2) \\ &- \frac{1}{2} \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{m_1 + m_2}{m} C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial}{\partial m} (\mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Geht man von der kontinuierlichen Betrachtungsweise in die diskrete über, dann stellt man die Integrale durch Summen dar. Ich wähle dafür die Riemann-Summen. Die Diskretisierung über die Simpsonregel ist im Allgemeinen besser, aber wie aus Majerowicz (1987) hervorgeht, erzielt die genauere Berechnung der Integrale keinen großen Genauigkeitsgewinn sondern führt zu einem langsameren Programm. Die Integrale entsprechen

also Summen über den Bins, bzw. den darin definierten Mittelwerten und Bandbreiten (Gleichungen 5.1). Die Ableitungen stellt man durch Differenzen dar. Der betrachtete Massenbereich ist eingeteilt in  $1 \dots (N + 1)$ -Klassen. Der Term auf der linken Seite in Gleichung 5.15 ist durch die Gleichung 3.1 mit der Änderungsrate  $\dot{f}_k^{pK}$  im  $k$ -ten Massenbin verknüpft. Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung 5.15 bezeichnet die Verlustrate, der zweite die Gewinnrate im  $k$ -ten Massenbin. In diskreter Schreibweise wird aus Gleichung 5.15

$$\begin{aligned} \dot{f}_k^{pK} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N+1} \Delta m_i \Delta m_j \frac{m_i + m_j}{m_k} C_{i,j} f_i f_j \frac{\Delta \mathcal{F}^{pK}(m_k, m_i, m_j)}{\Delta m_k} \\ &- \sum_{i=1}^{N+1} \Delta m_i C_{k,i} f_k f_i. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Wenn man die Menge der mittleren Massen genauer betrachtet, dann fällt auf, dass es keine infinitesimalen Teilchen mehr gibt, sondern man beginnt mit einem Monomer, sozusagen einem Grundbaustein. Das führt wiederum dazu, dass man in der  $j$ -Summe des Gewinnterms nicht alle Teilchen durchwandern muss. Das schwerste Objekt  $m_j$ , das mit dem kleinsten  $m_i$  zusammenstoßen kann, um innerhalb des Intervalls  $[m_k, m_{k+1})$  zu sein, ist der  $k$ -te Körper. Somit setzt man die obere Grenze der  $j$ -Summe auf  $k$ . Ein numerisches Problem liegt in der oberen Schranke des Massenbereichs. Aus den Koagulationsprozessen sollte keine Masse entstehen, die größer ist als die obere Grenze des Massenintervalls. Ein weiteres Problem kann durch die Multiplikation bzw. Division mit den verschiedenen  $\Delta m_k$  entstehen. Um dies zu umgehen, fasst man die Verteilungsfunktionen  $f_k$  mit den  $\Delta m_k$  zu mittleren Teilchenanzahldichten in den Massenbins  $n_k$  zusammen. Eine ähnliche Vorgangsweise findet sich in Brauer (2008) und Majerowicz (1987). Die Gleichung 5.16 multipliziert mit  $\Delta m_k$  vereinfacht sich damit zu

$$\dot{n}_k^{pK} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{m_i + m_j}{m_k} C_{i,j} n_i n_j \alpha_{k,i,j} - \sum_{i=1}^{N+1} C_{k,i} n_k n_i. \quad (5.17)$$

$\alpha_{k,i,j}$  steht dabei für  $\Delta \mathcal{F}^{pK}(m_k, m_i, m_j)$ . Die Genauigkeit des Verfahrens hängt stark davon ab, wie man die Differenz der kumulativen Verteilungsfunktion behandelt. In Kapitel 5.1 wurden zwei Einteilungsmöglichkeiten vorgestellt. Die beiden Varianten kennzeichne

ich mit

$$\alpha_{k,i,j}^{(1)} = \begin{cases} 1, & m_k^u < m_i + m_j < m_{k+1}^u \\ \frac{1}{2}, & m_k^u = m_i + m_j \quad \text{oder} \quad m_{k+1}^u = m_i + m_j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.18)$$

und

$$\alpha_{k,i,j}^{(2)} = \begin{cases} \frac{m_i + m_j - m_{k-1}}{m_k - m_{k-1}}, & m_{k-1} \leq m_i + m_j < m_k \quad \text{und} \quad k > 1 \\ \frac{m_{k+1} - m_i - m_j}{m_{k+1} - m_k}, & m_k \leq m_i + m_j < m_{k+1} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.19)$$

In der Einteilung  $\alpha_{k,i,j}^{(2)}$  muss man beachten, dass es weder eine 0-te noch eine  $(N+2)$ -te Klasse gibt. Im ersten Fall erweitere ich die Gleichung mit einer Bedingung:  $k > 1$  im Intervall  $[m_{k-1}, m_k)$ . An der oberen Massengrenze führt die Koagulation des größten Teilchens  $m_{N+1}$  zu Massen, die größer sind als das betrachtete Intervall. Damit man mit dem Einteilungsverfahren konsistent ist, muss man diese Teilchen miteinbeziehen und eine Masse  $m_{N+2}$  einfügen. Vergleicht man die numerischen Rechnungen mit den analytischen aus Kapitel 3.2, dann erkennt man, dass das zweite Verfahren besser für physikalische Fragestellungen geeignet ist (Abbildungen 5.3 - 5.6). Bei der Gegenüberstellung zieht man die Erhaltungseigenschaft des nullten  $N_0(t)$  und des zweiten Moments  $N_2(t)$  sowie die Verteilungsfunktion  $f(m)$  zu verschiedenen Zeitpunkten heran. Die Herleitung der Koagulationsgleichung basiert auf der Erhaltung der Masse, also bleibt das erste Moment  $N_1(t)$  konstant und man kann daraus keine relevante Aussage ableiten. Die Basis der logarithmischen Einteilung ist in allen Fällen  $b = 1.06$ , damit ergibt sich die kleinste mittlere Masse zu  $m_{min} = 0.03$ . Die Anfangsbedingungen für den konstanten Kern sind gegeben durch  $N_0(0) = 33.33$  und  $\rho = N_1(0) = 1$ . Die Einheitszeit  $\tau$  berechnet sich aus  $\rho/m_{min}$ . Aus den Abbildungen in 5.3 geht hervor, dass in beiden Fällen die numerische Lösung mit  $\alpha_{k,i,j}^{(2)}$  besser ist. Besonders auffallend ist, dass die Entwicklung von  $N_2(t)$  am numerischen Limit bei  $10^{-16}$  liegt. Das Verfahren mit  $\alpha_{k,i,j}^{(2)}$  stellt somit das zweite Moment perfekt dar. Im Gegensatz dazu, weist die Methode mit  $\alpha_{k,i,j}^{(1)}$  einen relativen Fehler von  $10^{-4}$  auf. Die Entwicklung der Gesamteilchendichte wird von beiden in etwa gleich gut wiedergegeben.

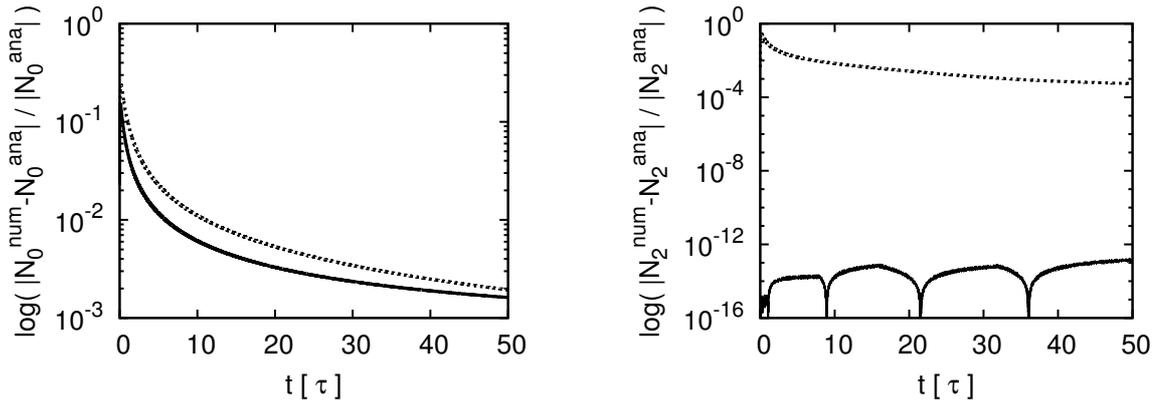


Abbildung 5.3.: **Relative Fehler bei Koagulation und einem konstanten Kern**  
 Die beiden Abbildungen zeigen die Entwicklung des relativen Fehlers gegenüber der Zeit bei einem konstanten Kern. Links ist der Fehler in der Gesamteilchendichte  $N_0(t)$  und rechts die Abweichung im zweiten Moment  $N_2(t)$  aufgetragen. Die gestrichelte Linie steht für die Berechnung mit  $\alpha_{k,i,j}^{(1)}$  und die durchgezogene für die mit  $\alpha_{k,i,j}^{(2)}$ .

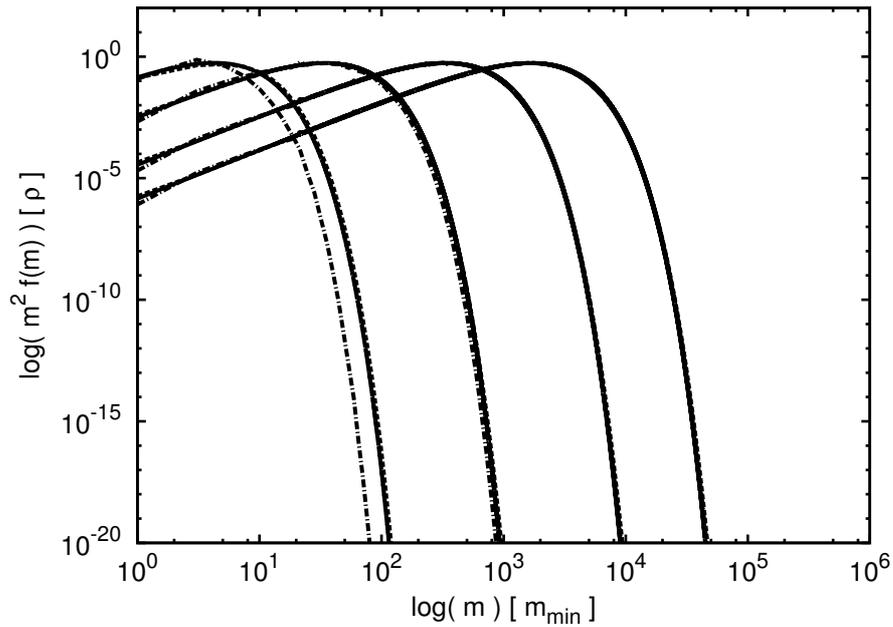


Abbildung 5.4.: **Zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion bei Koagulation und einem konstanten Kern**  
 Dargestellt ist die Funktion  $m^2 f(m)$  gegenüber der Masse zu den Zeiten  $t = 0.1\tau, 1\tau, 10\tau$  und  $50\tau$ . Die durchgezogene Linie entspricht der analytischen Lösung, die Strichpunkt- und die gestrichelte Linie den numerischen Lösungen mit  $\alpha_{k,i,j}^{(1)}$  bzw.  $\alpha_{k,i,j}^{(2)}$ .

In Abbildung 5.4 erkennt man, dass die numerische Lösung mit  $\alpha_{k,i,j}^{(1)}$  sich langsamer entwickelt wie die analytische Lösung. Durch die logarithmische Skala fällt dies bei späteren Zeiten nicht mehr auf. Aus den Ergebnissen bei einer Zeit von  $t = 0.1\tau$  kann man ablesen, dass die erste Variante die Verteilung nicht glatt wiedergibt, sondern es treten Oszillationen auf. Die numerische Lösung mit  $\alpha_{k,i,j}^{(2)}$  stellt die Verteilungsfunktion  $f(m)$  sehr gut dar. Die Anfangsbedingung für den linearen Kern ist durch eine Exponentialfunktion, wie in der Formel 3.30 gezeigt, gegeben. Die verwendeten Parameter sind  $N_0(0) = 1$  und  $\overline{m}_0 = 1$ . Die Anfangsdichte  $N_1(0)$  folgt aus der Diskretisierung der Gleichung 3.2:

$$\rho = N_1(0) = \sum_{k=1}^{N+1} f_k m_k \Delta m_k = \sum_{k=1}^{N+1} n_k m_k . \quad (5.20)$$

Die Einheitszeit  $\tau$  berechnet sich wie in Kapitel 3.2 beschrieben. Aus den Abbildungen 5.5 geht hervor, dass für den linearen Kern die Gesamtteilchendichte  $N_0(t)$  und das zweite Moment  $N_2(t)$  von beiden Varianten nicht perfekt wiedergegeben werden. Der relative Fehler bleibt für  $N_0(t)$  im Bereich von  $10^{-3}$ . Das Verfahren mit  $\alpha_{k,i,j}^{(2)}$  stellt die Entwicklung des zweiten Moments wieder wesentlich besser dar, der Fehler bleibt hierbei unter  $10^{-3}$ . Die Methode mit  $\alpha_{k,i,j}^{(1)}$  weist am Ende sogar schon einen relativen Fehler von 0.1 auf. In Abbildung 5.6 erkennt man, dass sich die numerische Lösung mit  $\alpha_{k,i,j}^{(1)}$  wiederum langsamer fortpflanzt als die analytische Lösung. Zudem zeigt sich bei der numerischen Lösung mit  $\alpha_{k,i,j}^{(2)}$  der so genannte "artificial runaway growth", wie in Ohtsuki et al. (1990) und Wetherill (1990) beschrieben.

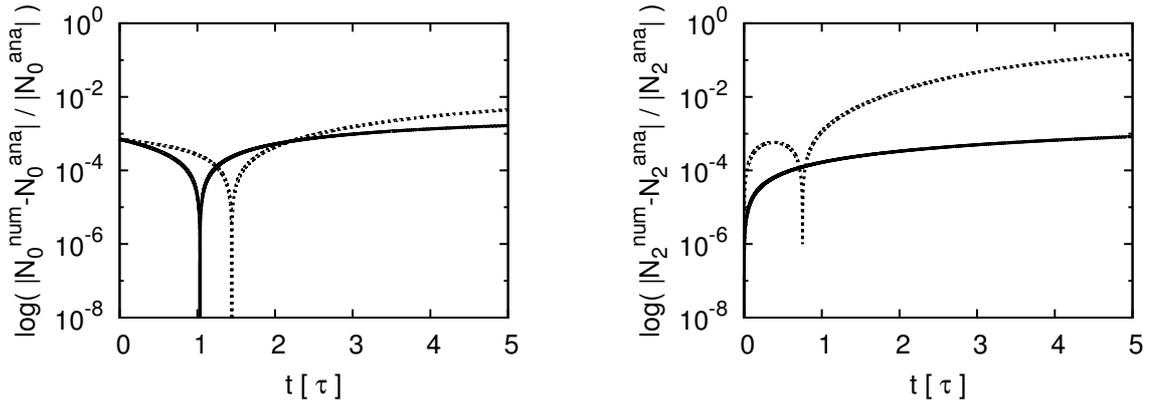


Abbildung 5.5.: **Relative Fehler bei Koagulation und einem linearen Kern**

Die beiden Abbildungen zeigen die Entwicklung des relativen Fehlers gegenüber der Zeit bei einem linearen Kern. Links ist der Fehler in der Gesamtteilchendichte  $N_0(t)$  und rechts die Abweichung im zweiten Moment  $N_2(t)$  aufgetragen. Die gestrichelte Linie steht für die Berechnung mit  $\alpha_{k,i,j}^{(1)}$  und die durchgezogene für die mit  $\alpha_{k,i,j}^{(2)}$ .

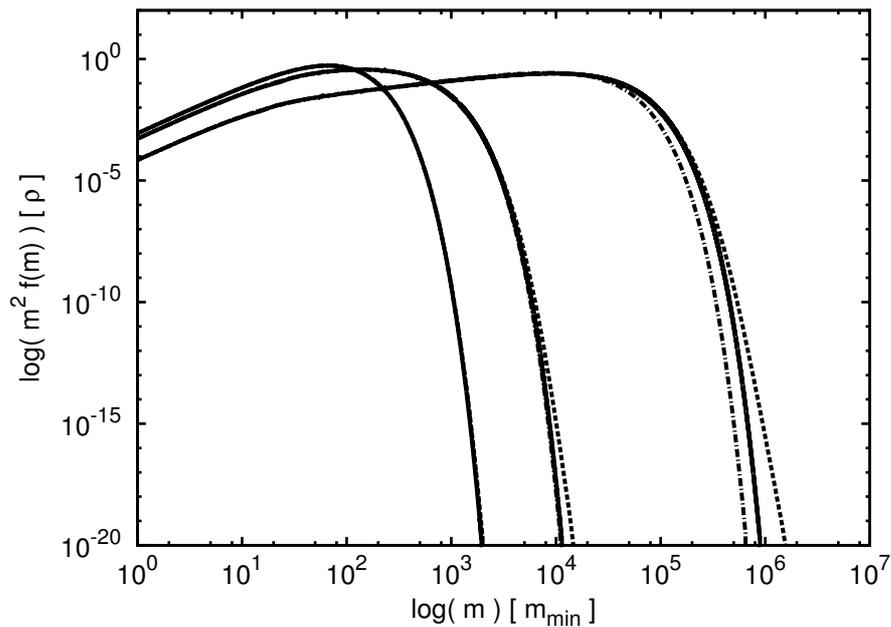


Abbildung 5.6.: **Zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion bei Koagulation und einem linearen Kern**

Dargestellt ist die Funktion  $m^2 f(m)$  gegenüber der Masse zu den Zeiten  $t = 0.01 \tau, 1 \tau$  und  $5 \tau$ . Die durchgezogene Linie entspricht der analytischen Lösung, die Strichpunkt- und die gestrichelte Linie den numerischen Lösungen mit  $\alpha_{k,i,j}^{(1)}$  bzw.  $\alpha_{k,i,j}^{(2)}$ .

## 5.4.2. Diskrete Form der Fragmentation

Die Diskretisierung der Fragmentations-Koagulationsgleichung mit reiner Fragmentation baut auf dieser Gleichung auf (Die Herleitung dazu findet man im Anhang A):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \frac{d}{dm} F^f(m) &= \int_0^\infty dm_2 C_{m,m_2} f(m) f(m_2) \\
&- \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{m_1 - m_{ej}}{m} C_{m_1,m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial \Theta(m - m_1 + m_{ej})}{\partial m} \\
&- \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{1}{m} C_{m_1,m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial}{\partial m} (m_1 \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2)) .
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Mit der Gleichung 3.1 sowie den gleichen Umformungen wie im vorigen Unterkapitel 5.4.1 beschrieben, ergibt sich die diskrete Form zu

$$\begin{aligned}
\dot{f}_k^f &= \sum_{i=k}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \Delta m_i \Delta m_j \frac{m_i - m_{ej}}{m_k} C_{i,j} f_i f_j \frac{\Delta \Theta(m_k - m_i + m_{ej})}{\Delta m_k} \\
&+ \sum_{i=k}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \Delta m_i \Delta m_j \frac{1}{m_k} C_{i,j} f_i f_j \frac{\Delta(m_i \mathcal{F}^{ej}(m_k, m_i, m_j))}{\Delta m_k} \\
&- \sum_{i=1}^{N+1} \Delta m_i C_{k,i} f_k f_i .
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Benützt man die mittlere Teilchendichte  $n_k$  in den Massenbins, erhält die Gleichung diese Form:

$$\begin{aligned}
\dot{n}_k^f &= \sum_{i=k}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m_i - m_{ej}}{m_k} C_{i,j} n_i n_j \Delta \Theta(m_k - m_i + m_{ej}) \\
&+ \sum_{i=k}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{m_k} C_{i,j} n_i n_j \Delta(m_i \mathcal{F}^{ej}(m_k, m_i, m_j)) - \sum_{i=1}^{N+1} C_{k,i} n_k n_i .
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Die erste Doppelsumme auf der rechten Seite dieser Gleichung beschreibt den Zuwachs durch den Überrest des Zielobjektes.  $m_{ej}$  charakterisiert, wie schon im Kapitel 3.1 angeführt, die Masse, die vom Zielobjekt herausgeschlagen wird. Die Aufteilung auf die verschiedenen Massenbins entspricht dem des vorigen Unterkapitels 5.4.1. Ein wesentlicher Unterschied zwischen Koagulation und Fragmentation liegt darin, dass beim Wachstum

nur Objekte entstehen können, die eine größere Masse aufweisen als das kleinste Mittelmaß. Bei der Fragmentation kann sich hingegen ohne weiteres ein leichteres Teilchen bilden. Diesen Umstand muss man in  $\alpha'_{k,i,j}$  miteinbeziehen. Ist  $m_i - m_{ej} < m_1$ , wird das Teilchen einfach zum 1-ten Bin dazu gezählt.  $\alpha'_{k,i,j}$  erweitere ich zu:

$$\alpha'_{k,i,j} = \begin{cases} 1, & m_i - m_{ej} < m_1 \\ \frac{m_i - m_{ej} - m_{k-1}}{m_k - m_{k-1}}, & m_{k-1} \leq m_i - m_{ej} < m_k \quad \text{und} \quad k > 1 \\ \frac{m_{k+1} - m_i + m_{ej}}{m_{k+1} - m_k}, & m_k \leq m_i - m_{ej} < m_{k+1} \\ 0, & \text{sonst .} \end{cases} \quad (5.24)$$

Die zweite Doppelsumme in Formel 5.23 charakterisiert den Zuwachs an Teilchen durch das ausgeworfene Material. Die Differenz aus der kumulativen Verteilungsfunktion (Gleichung 3.11) lässt sich im Gitter durch die Bingrenzen approximieren. Der Zuwachs im  $k$ -ten Bin nach einem Stoß von Teilchen der  $i$ -ten mit denen der  $j$ -ten Klasse berechnet sich demnach aus der Differenz der unteren und oberen Grenze. Ist die Masse des größten Fragmentes in der Menge der ausgeworfenen Teilchen  $m_{lf}$  größer als die obere Grenze des Bins  $m_{k+1}^u \leq m_{lf}$ , gilt:

$$\Delta(m_i \mathcal{F}^{ej}(m_k, m_i, m_j)) = m_{ej} \left( \left( \frac{m_{k+1}^u}{m_{lf}} \right)^{2-q} - \left( \frac{m_k^u}{m_{lf}} \right)^{2-q} \right). \quad (5.25)$$

Den Parameter  $q$  definiere ich im Verlauf dieses Kapitels. Die Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion ist ab  $m = m_{lf}$  gleich Null. Das bedeutet, dass die exponentielle Verteilung des ausgeworfenen Materials nach der Masse des größten Fragments  $m_{lf}$  abbricht. Wie zuvor gibt es im Allgemeinen aber keinen Gitterplatz mit genau dieser Masse. Die Differenz aus der kumulativen Verteilungsfunktion muss an diesen Umstand angepasst werden. Ist  $m_k^u < m_{lf}$  und  $m_{k+1}^u > m_{lf}$ , fällt nur mehr der Anteil an Teilchen in den  $k$ -ten Bin, der innerhalb vom Intervall  $[m_k^u, m_{lf}]$  liegt. Setzt man diese beiden Werte als obere und unteren Grenze ein, folgt:

$$\begin{aligned} \Delta(m_i \mathcal{F}^{ej}(m_k, m_i, m_j)) = \\ m_{ej} \left( \left( \frac{m_{lf}}{m_{lf}} \right)^{2-q} - \left( \frac{m_k^u}{m_{lf}} \right)^{2-q} \right) = m_{ej} \left( 1 - \left( \frac{m_k^u}{m_{lf}} \right)^{2-q} \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ich führe eine neue Variable  $\beta_{k,i,j}$  ein, die die Differenz der kumulativen Verteilungsfunktion folgendermaßen wiedergibt:

$$\beta_{k,i,j} = \begin{cases} \left(\frac{m_{k+1}^u}{m_{lf}}\right)^{2-q} - \left(\frac{m_k^u}{m_{lf}}\right)^{2-q}, & m_{k+1}^u \leq m_{lf} \\ 1 - \left(\frac{m_k^u}{m_{lf}}\right)^{2-q}, & m_k^u < m_{lf} < m_{k+1}^u \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.27)$$

Unter Verwendung von  $\beta_{k,i,j}$  kann man  $m_{ej}$  als Variable aus der Differenz herausziehen. Die Gleichung 5.23 schreibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} \dot{n}_k^f = & \sum_{i=k}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m_i - m_{ej}}{m_k} C_{i,j} n_i n_j \alpha'_{k,i,j} + \sum_{i=k}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m_{ej}}{m_k} C_{i,j} n_i n_j \beta_{k,i,j} \\ & - \sum_{i=1}^{N+1} C_{k,i} n_k n_i. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Nun definiere ich die beiden Variablen  $m_{ej}$  und  $m_{lf}$ . Nach Kobayashi & Tanaka (2010) hängt die gesamte Masse  $m_{ej}$ , die man aus dem Zielobjekt gewinnt, von einer normierten Kollisionsenergie  $\phi$  sowie der Masse des Ziels  $m_1$  ab:

$$m_{ej} = \frac{\phi}{1 + \phi} m_1. \quad (5.29)$$

In anderen Artikeln wird für die ausgeworfene Materie keine glatte Funktion verwendet, siehe Inaba et al. (2003) oder Wetherill & Stewart (1993). Kobayashi & Tanaka (2010) argumentieren aber so, dass Laborversuche (Housen et al. (1991)) sowie numerische Modelle (Benz & Asphaug (1999)) keinen Sprung zwischen katastrophaler und erosiver Kollision zeigen. Zudem sind sie der Meinung, dass sich durch die Gleichung 5.29 das Phänomen "cratering" besser beschreiben lässt. Die normierte Kollisionsenergie ist gegeben durch

$$\phi(m_1, m_2) = \frac{E_{kol}}{m_1 Q_D^*} = \frac{(v_{m_1, m_2}^{rel})^2}{2 Q_D^*} \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.30)$$

$$E_{kol} = \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_{m_1, m_2}^{rel})^2 \quad (5.31)$$

Material	$v_{impact}$ [km/s]	$Q_{0s}$ [erg/g]	$\beta_s$	$Q_{0g}$ [erg cm <sup>3</sup> /g <sup>2</sup> ]	$\beta_g$
Basalt	5	$9.0 \times 10^7$	-0.36	0.5	1.36
Basalt	3	$3.5 \times 10^7$	-0.36	0.3	1.36
Eis	3	$1.6 \times 10^7$	-0.39	1.2	1.26
Eis	0.5	$7.0 \times 10^7$	-0.45	2.1	1.19

Tabelle 5.1.: **Parameter der katastrophalen Grenzenergie, aus Benz & Asphaug (1999)**

Die erste Spalte zeigt die beiden verwendeten Materialien Basalt und Eis, die zweite die Geschwindigkeit der kollidierenden Teilchen beim Aufprall und die letzten vier Spalten die Parameter zur Berechnung der katastrophale Grenzenergie.

ist dabei die Kollisionsenergie, die sich aus der Relativgeschwindigkeit  $v_{m_1, m_2}^{rel}$  und der reduzierten Masse berechnet.  $Q_D^*$  beschreibt die spezifische Grenzenergie der katastrophalen Kollision, Benz & Asphaug (1999) definieren sie auf folgende Weise:

- Das Zielobjekt wird in ein Spektrum an Teilchen zerschlagen, wobei der größte Körper genau die halbe Masse des anfänglichen Objektes besitzt.
- Die übertragene Energie ist so groß, dass die Teilchen das gravitative Feld des ursprünglichen Objektes verlassen können.

$Q_D^*$  soll im Weiteren als katastrophale Grenzenergie bezeichnet werden und hat nach Kobayashi et al. (2010) diese Funktionalität:

$$Q_D^* = Q_{0s} \left( \frac{r_d}{1 \text{ cm}} \right)^{\beta_s} + Q_{0g} \rho_d \left( \frac{r_d}{1 \text{ cm}} \right)^{\beta_g} + C_{gg} \frac{2Gm}{r_d}. \quad (5.32)$$

$\rho_d$  kennzeichnet die Dichte des Zielobjektes in Einheiten von g cm<sup>-3</sup>. Benz & Asphaug (1999) geben die Konstanten  $Q_{0s}$ ,  $\beta_s$ ,  $Q_{0g}$  und  $\beta_g$  für verschiedene Materialien tabellarisch (Tabelle 5.1) vor. Benz & Asphaug (1999) führen an, dass man getrennt für beide Materialien zwischen den verschiedenen Einschlaggeschwindigkeiten interpolieren sollte. Da in meiner Arbeit aber nur ein Element mit einer gewissen Dichte  $\rho_d$  vorkommt und die Werte der einzelnen Parameter gering variieren, verwende ich die Mittelwerte aus den gegebenen Daten der Tabelle 5.1. Die gemittelten Konstanten sind dann  $Q_{0s} = 5.275 \times 10^7$  erg/g,  $\beta_s = -0.395$ ,  $Q_{0g} = 1.025$  erg cm<sup>3</sup>/g<sup>2</sup> und  $\beta_g = 1.2925$ . Den letzten Parameter wähle ich wie Kobayashi et al. (2010) zu  $C_{gg} = 10$ .

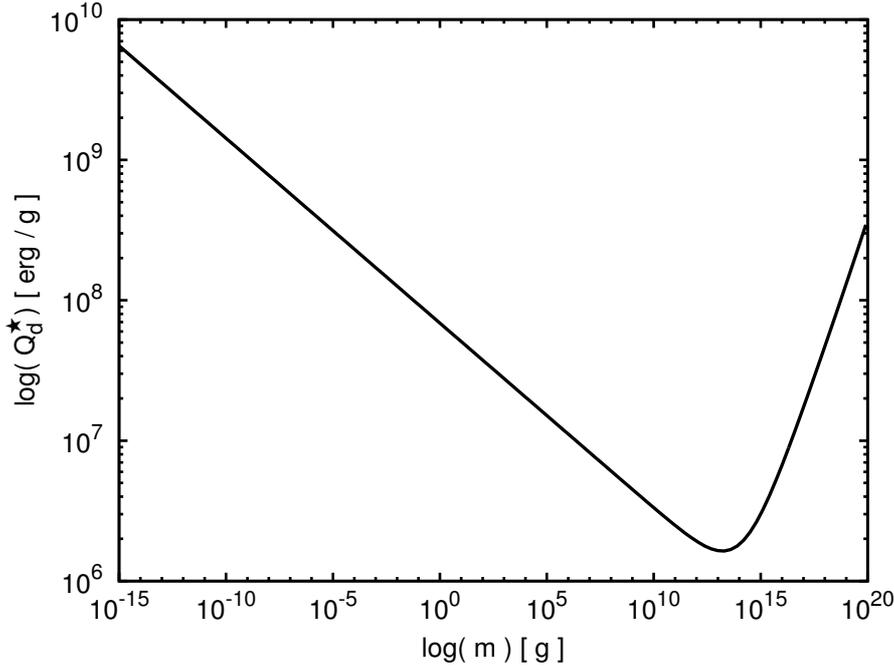


Abbildung 5.7.: **Katastrophale Grenzenergie**

Die Grafik zeigt die katastrophale Grenzenergie, für eine Dichte der Teilchen von  $\rho_d = 1.8 \text{ g cm}^{-3}$ , gegenüber der Masse. Die Ordinate ist in Einheiten von  $\text{erg/g}$  und die Abszisse in  $\text{g}$ . Die beiden Variablen sind logarithmisch aufgetragen.

Die Abbildung 5.7 zeigt die katastrophale Grenzenergie bei einer Dichte des Staubs von  $\rho_d = 1.8 \text{ g cm}^{-3}$  im gebräuchlichen Massenintervall  $[10^{-15} \text{ g}, 10^{20} \text{ g}]$ . Die Funktionalität 5.32 ist grundsätzlich für Teilchen größer als  $1 \text{ cm}$  definiert. Ich gehe davon aus, dass die Gleichung auch noch für  $\mu\text{m}$ -große Teilchen gültig ist.

Nach Kobayashi & Tanaka (2010) ist die Variable  $m_{lf}$  ebenfalls von der normierten Kollisionsenergie  $\phi$  und dem Gewicht des Zielobjektes  $m_1$  abhängig.

$$m_{lf} = \frac{\epsilon}{1 + \phi} m_{ej} = \frac{\epsilon \phi}{(1 + \phi)^2} m_1 . \quad (5.33)$$

$\epsilon$  ist ein Sicherheitsparameter, mit dem man garantiert, dass das größte ausgeworfene Teilchen kleiner ist als die gesamte freigewordene Masse  $m_{ej}$ . Diesen Parameter muss man einführen, da es bei sehr kleinem  $\phi$  dazu kommen könnte, dass nur ein Teilchen ausgeworfen wird und demnach die Verteilung durch ein Potenzgesetz nicht stimmt. Es gibt auch andere Ansätze, um die Masse des größten Fragmentes  $m_{lf}$  zu berechnen. Wie Stewart & Leinhardt (2009) oder Benz & Asphaug (1999) angeben, kann man die Masse

des größten Fragmentes über eine lineare Funktion

$$\frac{m_{lf}}{m_1 + m_2} = -0.5 \left( \frac{Q_R}{Q_{RD}^*} - 1 \right) + 0.5 \quad (5.34)$$

einer normierten Kollisionsenergie

$$Q_R = 0.5 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_{m_1, m_2}^{rel})^2}{m_1 + m_2} \quad (5.35)$$

ermitteln. Da diese Autoren aber keine Angabe über die gesamte ausgeworfene Masse geben, bleibe ich mit Kobayashi & Tanaka (2010) konform und benutze die Formeln 5.29 und 5.33.

Wie die ausgeworfene Materie verteilt ist, wählt man über den Parameter  $q$  aus der Gleichung 3.11. Den beiden Größen  $\epsilon$  und  $q$  legen Kobayashi & Tanaka (2010) Bedingungen auf. Der Exponent des Potenzgesetzes zur Fragmentverteilung liegt im Bereich von  $1 < q < 2$ . Wie vorhin besprochen, muss man die Konstante  $\epsilon < 1$  so wählen, dass die Masse des größten Fragmentes kleiner ist als die gesamte ausgeworfene Materie. Die beiden Parameter könnte man aber auch aus Tabellen, wie in Paszun & Dominik (2009) angegeben, entnehmen. Sie bestimmen die aus einem Stoß resultierende Verteilung durch ein Potenzgesetz und einer Gauß-Verteilung

$$f(m) = \xi_1 m^{q'-2} + \frac{\xi_2}{\sqrt{2\pi} \sigma_G m^2} \exp \frac{-(m - M_G)^2}{2 \sigma_G^2}. \quad (5.36)$$

$\xi_1$ ,  $\xi_2$  sind Normierungsfaktoren,  $q'$  bezeichnet den Exponenten des Potenzgesetzes,  $M_G$  die mittlere Masse und  $\sigma_G$  die Breite der Gauß-Kurve. Die von mir gewählte Funktion besteht ebenfalls aus zwei Komponenten, einem Potenzgesetz, Ableitung von Gleichung 3.11, und einer  $\delta$ -Funktion, Ableitung von Gleichung 3.10. Die Ansätze sind sehr ähnlich und unterscheiden sich in der Gauß-Verteilung und dem Umstand, dass die Verteilung der Fragmente bei Paszun & Dominik (2009) um einiges steiler ist. Die Masse des Zielobjektes nach dem Stoß stimmt ebenfalls mit der Masse der mittleren Masse der Gauß-Verteilung  $M_G$  überein. Die Tabelle 5.2 gibt die von Paszun & Dominik (2009) gefundenen Werte für einen Füllfaktor  $\phi_\sigma^{ini} = 0.155$  wieder. Da das molekulardynamische Modell aber keine Gravitation beinhaltet und lediglich für ein  $m_2/m_1$ -Quotienten von 3 Größenordnungen ausgelegt ist, bleibe ich bei der freien Wahl der beiden Konstanten und bestimme  $q = 1.9$  und  $\epsilon = 0.5$ .

$\mathbf{E}/(\mathbf{N} \mathbf{E}_{br})$	$\mathbf{q}'$	$\mathbf{M}_G/(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)$	$\sigma_G/(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)$
$2.29 \times 10^{-1}$	0.12	0.620	0.164
$9.15 \times 10^{-1}$	-0.28	0.436	0.107
$3.66 \times 10^0$	-0.49	0.426	0.065
$8.24 \times 10^0$	-0.81	0.418	0.066
$1.46 \times 10^1$	-0.89	0.428	0.062

Tabelle 5.2.: **Parameter der Verteilungsfunktion nach einer Fragmentation, aus Paszun & Dominik (2009)**

In der ersten Spalte erkennt man die Kollisionsenergie, normiert auf die Teilchenanzahl im Zielobjekt  $\mathbf{N}$  multipliziert mit der Bruchenergie  $E_{br}$ . Die zweite Spalte zeigt den Exponenten des Potenzgesetzes der Verteilung der Fragmente und die letzten beiden die Masse und die Breite der Gauß-Verteilung.

Wie im Kapitel 3.3 vorgeschlagen verwende ich eine vereinfachte Form der Gleichung 5.28, um die numerischen Fehler abzuschätzen und die Güte der Einteilung  $\alpha'_{k,i,j}$  zu überprüfen. Um die Resultate aus der Fragmentation mit der analytische Lösung vergleichen zu können, muss man die Gleichung 3.33 diskretisieren:

$$\dot{n}_k^{gA} = \sum_{i=k}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m_i}{m_k} C_{i,j} n_i n_j \alpha'_{k,i,j} - \sum_{i=1}^{N+1} C_{k,i} n_k n_i . \quad (5.37)$$

Die Aufteilung der Bruchstücke geschieht wieder mit  $\alpha'_{k,i,j}$ , wobei aber  $m_{ej} = m_1/2$  fix gehalten wird. Vergleicht man die numerischen Rechnungen mit den analytischen Lösungen der Momente, dann erkennt man, dass der Algorithmus bis zu einem gewissen Zeitpunkt die Momente sehr gut wiedergibt (Abbildungen 5.8). Herangezogen werden die Entwicklungen des nullten  $N_0(t)$  und zweiten Momentes  $N_2(t)$ . Die Basis der logarithmischen Einteilung ist dabei  $b = 2$ . Diese Basis gibt die Entwicklung des Systems bei gleichmäßiger Aufspaltung am besten wieder, da jede Fragmentation genau auf den Mittelwert einer Klasse fällt. Die kleinste mittlere Masse berechnet sich dann zu  $m_{min} = 0.5$ . Am Zeitpunkt Null soll die ganze Masse im größten Teilchen konzentriert sein. Die weiteren Anfangsbedingung sind  $N_0(0) = 1$  und  $N_2(0) = m_{N+1}^2$ . Die Einheitszeit  $\tau = 1/N_0(0)$  resultiert aus Gleichung 3.35. Wie im Kapitel 3.3 dargestellt, besitzt die Fragmentation mit gleichmäßiger Aufspaltung und konstantem Kern bei genau der Einheitszeit eine Singularität. Die maximale Integrationszeit bestimme ich deshalb zu  $t_{max} = 0.9\tau$ .

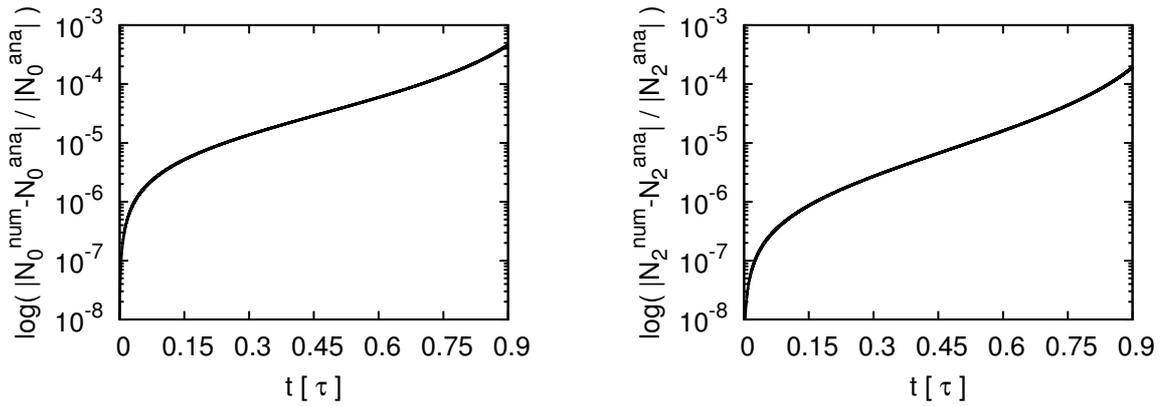


Abbildung 5.8.: **Relative Fehler bei Fragmentation und einem konstanten Kern**  
 Die beiden Abbildungen zeigen die Entwicklung des relativen Fehlers gegenüber der Zeit bei gleichmäßiger Aufspaltung und einem konstanten Kern. Links ist der Fehler in der Gesamteilchendichte  $N_0(t)$  und rechts die Abweichung im zweiten Moment  $N_2(t)$  aufgetragen.

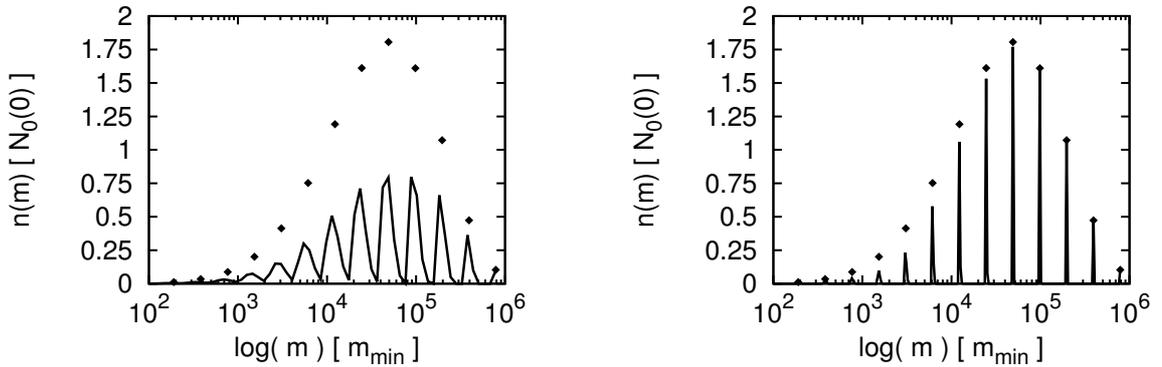


Abbildung 5.9.: **Anzahldichte in den Massenbins nach der Integrationszeit bei gleichmäßiger Aufspaltung und einem konstanten Kern**  
 In den beiden Abbildungen ist die Anzahldichte in den verschiedenen Massenbins  $n(m)$  gegenüber der Masse in einer logarithmischen Skala dargestellt. In beiden Abbildungen wird die Lösung mit einer Basis von  $b = 2$  anhand von Punkten abgebildet. Links ist das Ergebnis mit einer Basis von  $b = 1.1573$  und rechts das numerische Resultat mit einer Basis von  $b = 1.03355$  aufgetragen.

Aus den Abbildungen 5.8 erkennt man, dass der relative Fehler in der Gesamtteilchenanzahl  $N_0(t)$  unter einem Wert von  $10^{-3}$  bleibt. Die Abweichung nimmt anfangs stark zu, zeigt dann einen Anstieg wie eine sehr flache Exponentialfunktion. Um den Zeitpunkt  $t = 0.75 \tau$  wächst der Unterschied zwischen der numerischen und der analytischen Lösung wieder stärker an. Ein ähnliches Bild weist die Entwicklung des zweiten Moments  $N_2(t)$  auf, wobei der relative Fehler ebenfalls unter einem Wert von  $10^{-3}$  bleibt. Wenn man bedenkt, dass bei einer Zeit von  $t = \tau$  eine Singularität in der analytischen Lösung auftritt, dann sind die numerischen Resultate sehr gut. Die größer werdende Abweichung bei  $t = 0.75 \tau$  folgt aus dem selben Grund, denn numerische Rechnungen können eine Singularität nur schlecht auflösen. Die Einteilung des Massengitters über einer Basis von  $b = 2$  stellt im Fall der gleichmäßigen Aufspaltung die beste Einteilungsmöglichkeit dar. Jedes Teilchen, das aus einem Stoß hervorgeht, fällt dabei genau auf einen Gitterplatz. Also ziehe ich diese numerische Rechnung als Vergleichswert heran. In den Abbildungen 5.9 ist das Ergebnis mit einer Basis von  $b = 2$  nach der Integrationszeit  $t = 0.9 \tau$  als Punktmenge dargestellt. In der linken Grafik erkennt man zudem das numerische Resultat unter einer Basis  $b = 1.1573$ , die 4 mal so viele Gitterplätze besitzt. Durch die Einteilung über  $\alpha'_{k,i,j}$  wird die Lösung sehr diffusiv, die Positionen der Massen verschmieren und die Anzahl der Teilchen in den jeweiligen Massenbins verringert sich dadurch fast um die Hälfte. Die Verteilungsfunktion  $f(m)$  wird zudem um so schlechter wiedergegeben, je näher man zu kleinen Massen kommt. Erhalten bleiben die Position des Maximums und die generelle Struktur der Lösung. Diese Basis ist also eher schlecht für die reine Fragmentation mit gleichmäßiger Aufspaltung geeignet. Verwendet man hingegen eine feinere Basis  $b = 1.03355$ , die ca. 16 mal so viele Gitterplätze innehat, dann ähneln sich die Ergebnisse mehr. Die numerische Rechnung ist bei großen Massen noch sehr genau, aber wie zuvor gilt: Je kleiner die Massen, um so diffusiver das Resultat.

### 5.4.3. Diskrete Form der Kombination aus Fragmentation und Koagulation

Die Kombination der beiden Extremfälle "perfekte Koagulation" und "reine Fragmentation" baut auf der Gleichung 3.15 auf. Betrachtet man zuerst ein ruhendes Material, dessen Relativgeschwindigkeit durch willkürliche Bewegungen herrührt, dann kann man die radiale und vertikale Abhängigkeit vernachlässigen. Verwendet man die diskretisierte Form der beiden Extremfälle (Gleichung 5.17 sowie 5.28), dann ergibt sich folgende Erhaltungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 \dot{n}_k^{pK+f} = & - \sum_{i=1}^{N+1} C_{k,i} n_k n_i \\
 & + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C_{i,j} n_i n_j [1 - \Theta(v_{i,j}^{rel} - v^f)] \frac{1}{2} \frac{m_i + m_j}{m_k} \alpha_{k,i,j} \\
 & + \sum_{i=k}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} C_{i,j} n_i n_j \Theta(v_{i,j}^{rel} - v^f) \left[ \frac{m_i - m_{ej}}{m_k} \alpha'_{k,i,j} + \frac{m_{ej}}{m_k} \beta_{k,i,j} \right].
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Führt man im zweiten Term eine Stufenfunktion  $\Theta_{k,i} = \Theta(k - i)$  bezüglich der ersten Summe ein und im dritten Term  $\Theta_{i,k} = \Theta(i - k)$ , dann kann man die erste Summe vor alle Terme ziehen:

$$\begin{aligned}
 \dot{n}_k^{pK+f} = & \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ - C_{k,i} n_k n_i \right. \\
 & + \Theta_{k,i} \left[ \sum_{j=1}^k C_{i,j} n_i n_j [1 - \Theta(v_{i,j}^{rel} - v^f)] \frac{1}{2} \frac{m_i + m_j}{m_k} \alpha_{k,i,j} \right] \\
 & \left. + \Theta_{i,k} \left[ \sum_{j=1}^{N+1} C_{i,j} n_i n_j \Theta(v_{i,j}^{rel} - v^f) \left[ \frac{m_i - m_{ej}}{m_k} \alpha'_{k,i,j} + \frac{m_{ej}}{m_k} \beta_{k,i,j} \right] \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Der wesentliche Faktor in dieser Funktion ist die Relativgeschwindigkeit  $v_{i,j}^{rel}$ . Sie bestimmt, ob die Teilchen wachsen oder zerstört werden und wie die Körper nach einem Fragmentationsprozess verteilt sind. Betrachten wir zuerst nur die Brown'sche Bewegung. Die Relativgeschwindigkeit durch Brown'sche Bewegung (Gleichung 4.6) ist von der Temperatur und den beiden Massen  $m_i$  und  $m_j$  abhängig. Die Temperatur ergibt

sich aus dem Modell, das in Kapitel 2 angegeben ist. Für einen Zentralabstand von 1 AU weist die Scheibe in der Mittelebene des T Tauri Sterns ca. eine Temperatur von 204 K auf. Aus der Abbildung 5.10 erkennt man, dass die Brown'sche Bewegung nur für sehr kleine Massen bzw. kleine Massenverhältnisse eine Rolle spielt. Die höchsten Relativgeschwindigkeiten ergeben sich für Teilchen aus der gleichen Klasse  $m_i = m_j$ . Betrachtet man hingegen ein Massenverhältnis  $m_i \ll m_j$ , dann erhält man kleinere Werte. Die größte Geschwindigkeit  $v_{Br}^{rel} \sim 12 \text{ cm s}^{-1}$  reicht zudem nicht aus, die Fragmentationsgeschwindigkeit  $v^f$  zu überschreiten, dementsprechend sollte keine Fragmentation auftreten. Als Anfangsbedingung für die Verteilungsfunktion verwende ich die Angabe aus Brauer (2008) mit einer Staubteilchendichte von  $\rho_{Staub} = 2.6 \times 10^{-12} \text{ g cm}^{-3}$ . Wie man in Abbildung 5.11 erkennen kann, trifft die Vermutung, dass keine Fragmentation zustande kommt, bis zu einer Zeit von  $t = 10^3 \text{ yr}$  zu. Die erhaltenen Ergebnisse stimmen bis auf die verschiedenen Zeitpunkte mit denen in Brauer (2008) überein. Wie aus seiner Arbeit hervorgeht, ergibt sich ein "artificial runaway", den man daran erkennt, dass die Kurven zu größeren Massen hin nicht so stark abnehmen, wie sie sollten. Den Vergleich mit einer korrekteren Lösung kann man in Brauer (2008) finden. Die einzelnen Kurven zu den verschiedenen Zeitpunkten  $t = 100 \text{ yr}$  und  $1000 \text{ yr}$  zeigen einen Knick bei einem Teilchenradius von  $r_d = 0.8 \mu\text{m}$ , da die Staubdichte  $\rho_{Staub}$  am Anfang innerhalb des Intervalls  $[0.5 \mu\text{m}, 0.8 \mu\text{m}]$  verteilt wurde.

Um die Entwicklung des Systems mit Relativgeschwindigkeiten durch Brown'sche Bewegung und vertikale Ablagerung verfolgen zu können, muss man das Modell erweitern. Ich betrachte nun die in die vertikale Richtung integrierte Erhaltungsgleichung. Die Materie bleibt in radialer Richtung immer noch in Ruhe. Der einfacheren Schreibweise halber benutze ich wieder die mittlere Teilchendichte  $n$ . Der Unterschied liegt darin, dass sie in diesem Fall eine Teilchen-Säulendichte  $\tilde{\Sigma}_d$ , in den Einheiten  $1 / \text{cm}^2$ , darstellt. Der wesentliche Punkt, der dazu kommt, ist, dass man den Kern mit der kumulativen Verteilungsfunktion über die vertikale Richtung integriert. Verwendet man dazu die Variablen  $\Lambda$  und  $\tilde{C}$  aus dem Kapitel 3.5, muss man die Gleichung 5.39 umschreiben. Zieht man die Summen nach vorne, folgt:

$$\dot{n}_k^{pK+f} = \sum_{i=1}^{N_m+1} \sum_{j=1}^{N_m+1} \Lambda_{k,i,j} n_i n_j \quad (5.40)$$

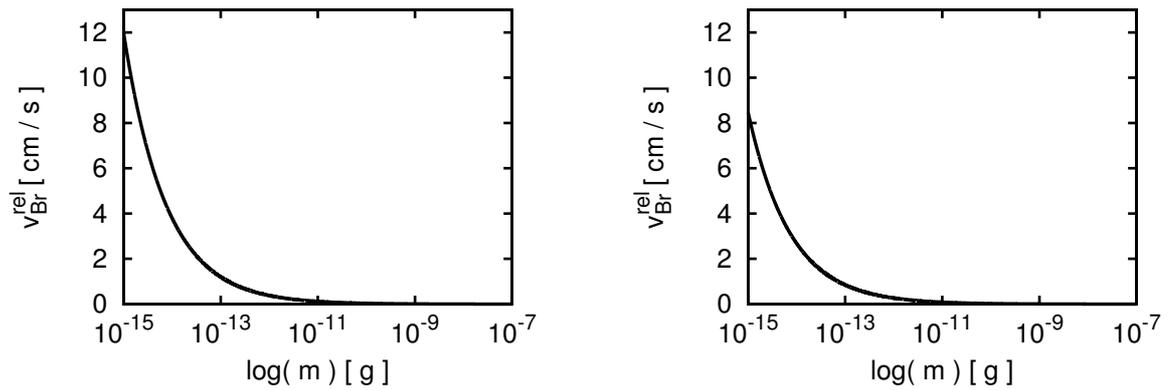


Abbildung 5.10.: **Relativgeschwindigkeit durch Brown'sche Bewegung**

Die Abbildungen zeigen die Relativgeschwindigkeit  $v_{Br}^{rel}$  in Einheiten von  $\text{cm s}^{-1}$  zwischen Objekten einer Teilchenklasse  $m_i = m_j$  (linkes Bild) und dem Fall  $m_i \ll m_j$  (rechtes Bild) gegenüber der logarithmisch aufgetragenen Masse.

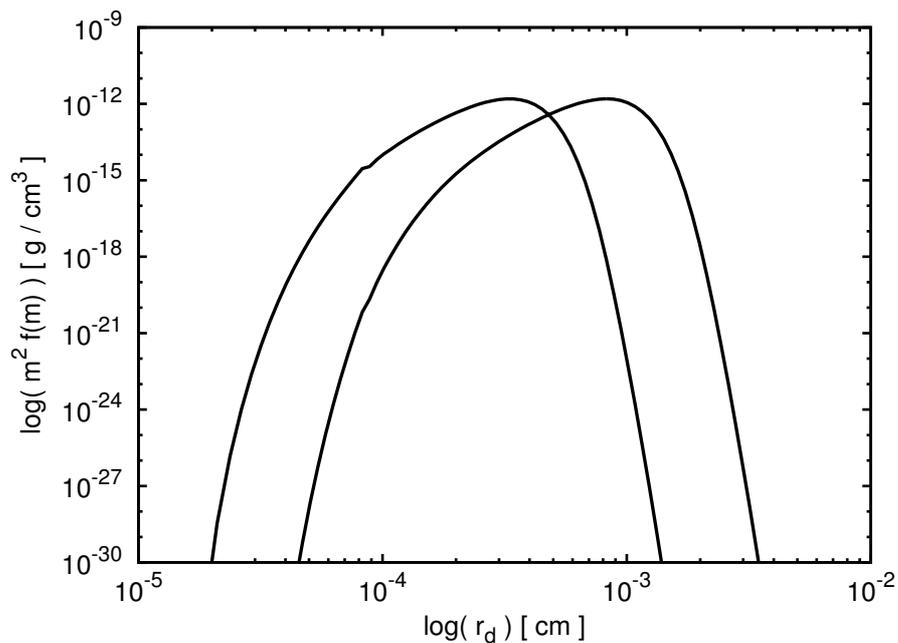


Abbildung 5.11.: **Zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion bei Koagulation und Fragmentation mit Brown'scher Bewegung**

Dargestellt ist die Funktion  $m^2 f(m)$  gegenüber dem Radius der Staubteilchen bei Koagulation und Fragmentation mit der Brown'schen Bewegung als einzige Relativgeschwindigkeit. Die Kurven entsprechen den Zeitpunkten  $t = 100$  und  $1000$  yr.

mit der diskreten Form von Gleichung 3.47

$$\Lambda_{k,i,j} = \sum_{o=1}^{N_z+1} \Delta z_o \frac{\tilde{C}_{o,k,i,j}}{2\pi H_{d;i} H_{d;j}} \exp \left[ -\frac{z_o^2}{2} \left( \frac{1}{H_{d;i}^2} + \frac{1}{H_{d;j}^2} \right) \right]. \quad (5.41)$$

$H_{d;i}$  bezeichnet die in Kapitel 2 vorgestellte Skalenhöhe der Staubscheibe für verschiedene Teilchenklassen  $i$ . Die Anzahl der Gitterplätze gebe ich mit  $N_m$  für die Massen und die für die  $z$ -Achse mit  $N_z$  an.  $\tilde{C}$  berechnet man über diese Gleichung:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{o,k,i,j} = C_{o,i,j} & \left\{ \Theta_{k,i} [1 - \Theta(v_{o,i,j}^{rel} - v^f)] \frac{1}{2} \frac{m_i + m_j}{m_k} \alpha_{k,i,j} \right. \\ & \left. + \Theta_{i,k} \Theta(v_{o,i,j}^{rel} - v^f) \left[ \frac{m_i - m_{ej}}{m_k} \alpha'_{k,i,j} + \frac{m_{ej}}{m_k} \beta_{k,i,j} \right] - \delta_{k,i} \right\}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Hierbei wurde schon die  $z$ -Abhängigkeit der Geschwindigkeit und dementsprechend des Kerns eingeführt. Zu beachten ist, dass eigentlich die ausgeworfene Masse  $m_{ej}$ , die Masse des größten Fragments  $m_{lf}$  und die beiden Funktionen  $\alpha'$  und  $\beta$  (Gleichungen 5.29, 5.33, 5.24 und 5.27) ebenfalls von dem  $z$ -Index abhängen. Den Verlustterm stelle ich durch das Kronecker-Delta in den Indizes  $k$  und  $i$  dar. Die Relativgeschwindigkeiten kombiniert man wie im Kapitel 4 vorgegeben. Der große Vorteil bei dieser Schreibweise ist der, dass man die Funktion  $\Lambda$  nur einmal vor der zeitlichen Entwicklung berechnen muss. Dies folgt aus der Annahme, dass sich die Gas- und Staubscheiben und demzufolge die Relativgeschwindigkeiten nicht ändern. Der Startwert für die Säulendichte der Staubscheibe  $\tilde{\Sigma}$  bei 10 AU berechnet sich aus der Formel 2.8. Die linke Seite der Abbildung 5.12 zeigt die Entwicklung der Säulendichte bei einem Abstand von 10 AU zu den Zeitpunkten  $t = 10^4$ ,  $10^5$  und  $10^6$  yr. Die rechte Seite gibt die selbe Rechnung ohne Fragmentation wieder. Die beiden obersten Bilder veranschaulichen den Umstand, dass nach  $10^4$  Jahren die Fragmentation noch keine Rolle spielt. Der dominierende Prozess ist also immer noch die Koagulation durch Brown'sche Relativbewegungen. Dies ist auch soweit verständlich, da innerhalb dieser Zeit die meisten Teilchen unter  $10^{-3}$  cm liegen und folglich die vertikalen Relativgeschwindigkeiten klein bleiben. Nach einer Zeit von  $10^5$  Jahren hat sich schon einiges verändert. Das Resultat ohne Fragmentation zeigt ein ähnliches Bild, wie man es auch in Brauer et al. (2008) findet. Durch die vertikale Ablagerung weist das Teilchen mit der höchsten Säulendichte schon einen Radius von ca. 3.4 cm auf. Bei der numerischen Lösung mit Fragmentation bremst der zerstörende Effekt das Wachstum der Teilchen schon eindeutig.

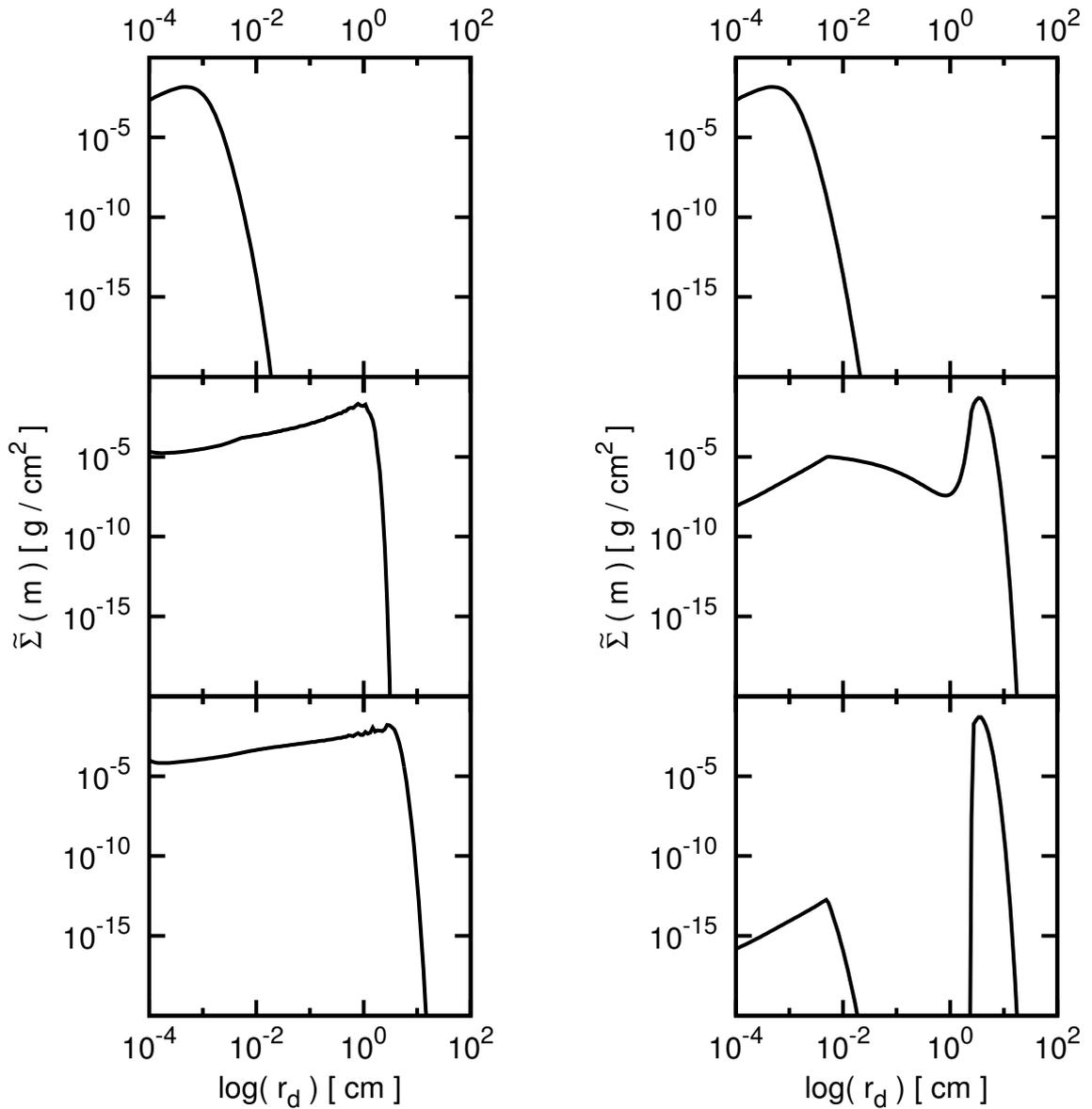


Abbildung 5.12.: **Entwicklung der Säulendichte durch Brown'sche Bewegung und vertikaler Ablagerung**

Die Bilder geben die Säulendichte für die verschiedenen Massen  $\tilde{\Sigma}$  bei 10 AU in den Einheiten  $\text{g} / \text{cm}^2$  gegenüber dem Radius der Teilchen  $r_d$  in cm wieder. Die linke Grafik zeigt die Entwicklung mit Fragmentation zu den Zeitpunkten  $t = 10^4, 10^5$  und  $10^6$  yr. Die rechte Seite illustriert das System zu den selben Zeiten aber ohne Fragmentation.

Die dominierende Teilchengröße liegt erst bei 0.8 cm. Zudem erkennt man, dass man die Bereiche der kleinsten Massen durch die Fragmentation wieder auffüllt. Am Ende der Integrationszeit ( $10^6$  Jahre) liegt die überwiegende Teilchenklasse im System ohne Fragmentation bei 4 cm. Der Massenbereich zwischen  $10^{-2}$  und 1 cm ist leer geräumt und es gibt noch eine sehr geringe Menge an Kleinstteilchen. Das heißt, durch die vertikale Ablagerung wird der Bereich zwischen  $10^{-2}$  und 1 cm sehr schnell durchwandert. Teilchen mit größeren Radien sind schon wieder zu massiv und sie bewegen sich nach Gleichung 4.7 gemeinsam mit der projizierten Keplergeschwindigkeit. Das schnelle Wachstum stoppt und die sehr langsame Brown'sche Bewegung führt die Vergrößerung der Teilchen weiter. Fügt man Fragmentation hinzu, dann liegt das dominierende Teilchen bei 3 cm. Der große Unterschied zwischen den beiden Entwicklungen liegt darin, dass im System mit Fragmentation viel mehr Teilchen enthalten sind, dafür aber weniger in der größten relevanten Teilchenklasse. Brauer et al. (2008) erhalten größere dominierende Teilchen, da sie eine andere vertikale Relativgeschwindigkeit verwenden.

Im nächsten Schritt betrachte ich das selbe Modell mit hinzugefügten radialen Relativgeschwindigkeiten 4.4. Wie im Kapitel 3.5 angegeben, behandelt man die radiale Geschwindigkeit des Transports und der Kollisionswahrscheinlichkeit separat. Die Abbildung 5.13 zeigt die radialen Geschwindigkeiten bei 10 AU. Man kann leicht erkennen, dass für Teilchen, die sich im Intervall  $[0.1 \text{ cm}, 5 \text{ m}]$  befinden, die Geschwindigkeit über der Grenzgeschwindigkeit von 1 m/s liegt. Die Relativgeschwindigkeiten zwischen diesen Teilchen und den anderen sind groß und folglich führen die Kollisionen zu Fragmentation. Man kann also eine weitere Koagulationsgrenze erwarten.

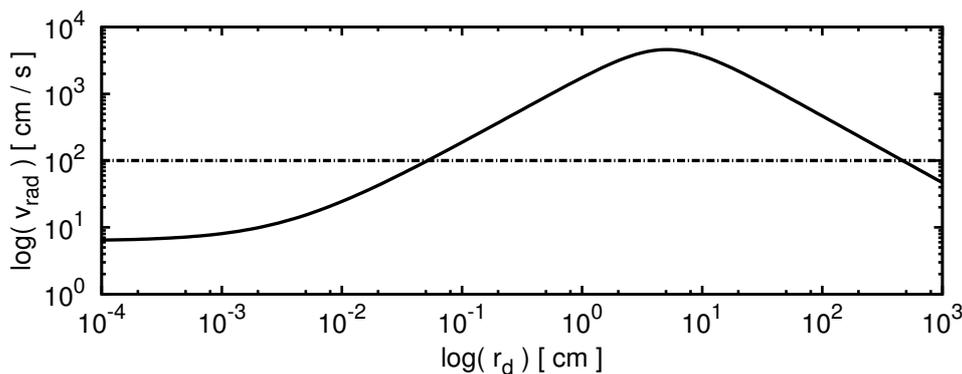


Abbildung 5.13.: **Radiale Geschwindigkeiten der verschiedenen Teilchen**

Angegeben ist die radiale Geschwindigkeit  $v_{rad}$  in cm/s gegenüber dem Radius der Teilchen  $r_d$  in cm. Die gestrichelte Linie charakterisiert die Grenzgeschwindigkeit  $v^f = 100 \text{ cm/s}$

Die Grafiken in Abbildung 5.14 zeigen die Entwicklung des Systems zu verschiedenen Zeitpunkten. An den beiden oberen Bildern erkennt man, dass durch die Hinzunahme der radialen Relativgeschwindigkeiten sich die Verteilungsfunktion noch schneller entwickelt. Schon bei einer Zeit von  $t = 5 \times 10^4$  Jahren ist die dominierende Teilchengröße ca. 2 mm erreicht. Nach  $10^5$  Jahren ist die Verteilungsfunktion kurz vor der Gleichgewichtslösung. Diese Lösung beschreibt den Zustand, in dem sich der Gewinn durch Koagulation und der Verlust durch Fragmentation die Waage halten. Am Ende der Integration bei  $10^6$  Jahren weisen die Teilchen mit der größten Säulendichte eine Größe von ca. 6 mm auf. Damit ist wie erwartet eine weitere Wachstumsgrenze hinzugekommen. Im Vergleich zu Brauer et al. (2008) reicht die Verteilungsfunktion bei meinen Resultaten bis zu größeren Körpern.

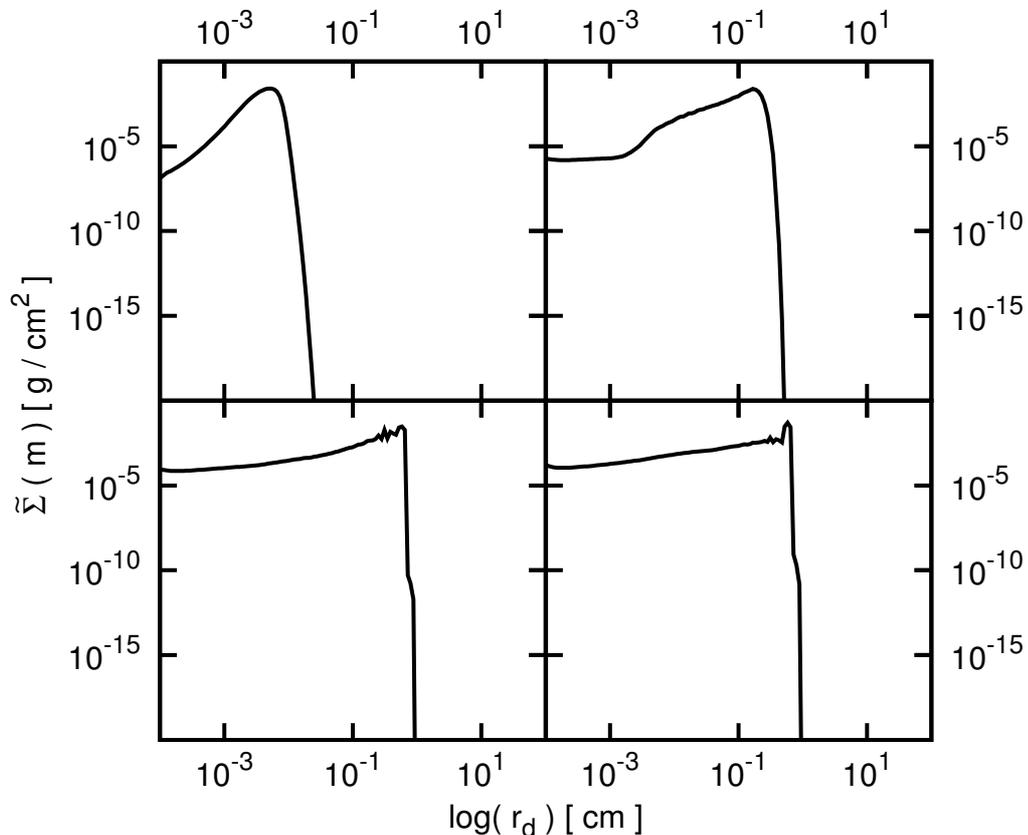


Abbildung 5.14.: **Entwicklung der Säulendichte mit allen Geschwindigkeiten**

Die Bilder geben die Säulendichte für die verschiedenen Massen  $\tilde{\Sigma}$  bei 10 AU in den Einheiten  $\text{g} / \text{cm}^2$  gegenüber dem Radius der Teilchen  $r_d$  in cm wieder. Von links oben nach rechts unten erkennt man das System zu den Zeitpunkten  $t = 2.5 \times 10^4$ ,  $5 \times 10^4$ ,  $10^5$  und  $10^6$  yr.

#### 5.4.4. Diskrete Form der Advektion

Die diskrete Form des Staubtransports baut auf der Gleichung 3.52 auf. Wie in Kapitel 5.2 vorgeführt, erhält diese Funktion über die Finite-Volumen-Methode dieses Aussehen:

$$\int_t^{t+\Delta t} d\tilde{t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\Sigma}_{l,k}) + \frac{2}{r_{l+1/2}^2 - r_{l-1/2}^2} \left( r_{l+1/2} v_{l+1}^{rad} \tilde{\Sigma}_{l+1,k} - r_{l-1/2} v_l^{rad} \tilde{\Sigma}_{l,k} \right) \right] = 0. \quad (5.43)$$

Hierbei bezeichnet  $v_l^{rad}$  die gemittelte radiale Geschwindigkeit am  $l$ -ten Gitterplatz, wie in Kapitel 3.5 definiert. Die zeitliche Integration lässt sich unter der Annahme von konstanten Flüssen innerhalb des Zeitschritts durchführen. Multipliziert man zudem die Gleichung wie in den anderen Fällen mit  $\Delta m_k$  und benutzt  $n_{l,k}$  als Teilchenanzahl-Säulendichte der  $k$ -ten Teilchenklasse am  $l$ -ten radialen Gitterplatz, folgt:

$$\dot{n}_{l,k}^{adv} + \frac{2}{r_{l+1/2}^2 - r_{l-1/2}^2} \left( r_{l+1/2} v_{l+1}^{rad} n_{l+1,k} - r_{l-1/2} v_l^{rad} n_{l,k} \right) = 0. \quad (5.44)$$

$\dot{n}^{adv}$  soll wiederum die zeitliche Diskretisierung über das Euler-Verfahren, wie im Unterkapitel 5.3 vorgeführt, darstellen. Um das Gesamtsystem zu verfolgen, muss man noch Randbedingungen einführen. Ich gehe davon aus, dass am äußeren Rand keine Materie mehr in die protoplanetare Scheibe einfällt. Den inneren Rand habe ich im Kapitel 2 an die Stelle gesetzt, wo die Sternstrahlung die Staubscheibe verdampfen lässt. Also gebe ich am inneren und am äußeren Rand Bedingungen vor, die einen Ausfluss kennzeichnen. Um die Strömung der Materie zu testen, betrachte ich nur eine Teilchengröße und vernachlässige das Teilchenwachstum durch Kollisionen. Die Anfangssituation ist die, dass der Staub in den äußersten radialen Punkt bei  $r = 150$  AU eingesetzt wird. In der Abbildung 5.15 findet man die gemittelte radiale Geschwindigkeit  $v_l^{rad}$ . Sie variiert bei größeren radialen Abständen relativ wenig und führt folglich dazu, dass sich die Position des Maximums mit einer Geschwindigkeit von ca.  $1.68 \text{ AU}/10^3 \text{ yr}$  bewegt. Ich betrachte die protoplanetare Scheibe bis zu einem Zeitpunkt von  $6 \times 10^4$  Jahren. Dabei müsste sich das Maximum am Ende bei einem Radius von ca.  $48.4 \text{ AU}$  befinden. Die Abbildung 5.16 zeigt die Position des Maximums innerhalb der gewählten Zeitspanne. Man erkennt, dass sich das Maximum der Verteilungsfunktion vom äußersten Punkt bis auf einen Abstand von ca.  $48.4 \text{ AU}$  vorgearbeitet hat. Das Bild zeigt zudem, dass sich die Welle linear mit der mittleren radialen Geschwindigkeit ausbreitet. Daraus schließe ich, dass sich die radiale Entwicklung des Systems auch für das Gesamtmodell mit Koagulation und Fragmentation richtig verhält.

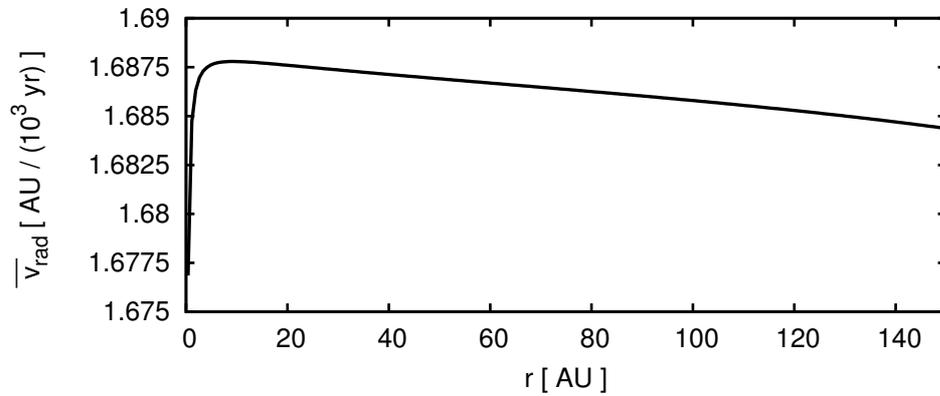


Abbildung 5.15.: **Mittlere radiale Geschwindigkeiten des Ensembles**  
 Angegeben ist die mittlere radiale Geschwindigkeit  $v^{rad}(r)$  in Einheiten von  $\text{AU}/10^3 \text{ yr}$  gegenüber dem Radius in der Scheibe  $r$  in AU

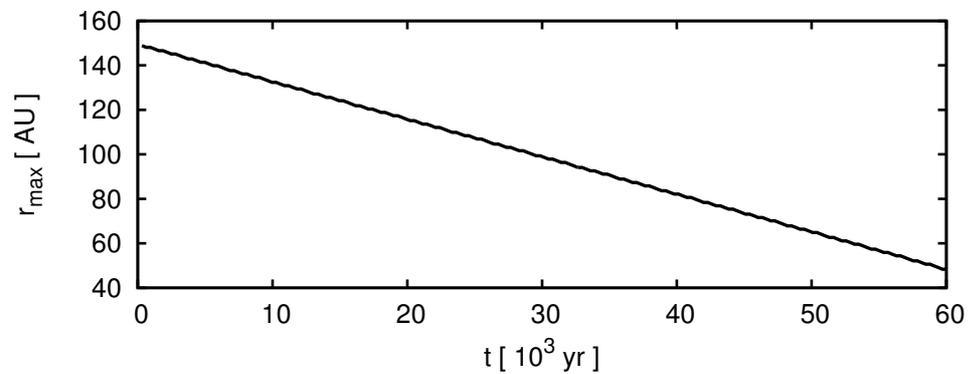


Abbildung 5.16.: **Position des radialen Maximums der Verteilungsfunktion**  
 Die Grafik zeigt die Position des Maximums der Verteilungsfunktion  $r_{\text{max}}$  in AU gegenüber der Zeit  $t$  in  $10^3 \text{ yr}$ .

## 5.5. Modellberechnung

Die Berechnung des Gesamtmodells beinhaltet die Fragmentation-Koagulation unter Verwendung der drei Relativgeschwindigkeiten (Brown'sche Bewegung, vertikale Ablagerung und radiale Relativgeschwindigkeit) und die Strömung des Staubs durch die mittlere radiale Geschwindigkeit der Teilchen. Die protoplanetare Scheibe nach dem Basismodell weist die Eigenschaften, die im Kapitel 2 angegeben sind, auf. Die Anzahl an Gitterplätzen im Massengitter beträgt  $N_m = 120$ , die der  $z$ -Achse  $N_z = 101$ . In radialer Richtung verwende ich  $N_r = 50$  Punkte. Die Abbildung 5.17 zeigt die Entwicklung der Staubscheibe zu den Zeitpunkten  $t = 10^4$ ,  $5 \times 10^4$  und  $10^5$  yr. Durch den radialen Fluss füllen sich die inneren Gebiete mit dem Material aus den äußeren Regionen. Folglich findet die Entwicklung der Teilchengrößen im Zentrum viel schneller statt als im Fall ohne Strömung (Abbildung 5.14). Dies erkennt man auch in der Abbildung 5.17, nach  $10^4$  Jahren sind die Teilchen der Staubscheibe im Zentrum schon bis zur Fragmentationsgrenze von einigen Zentimetern angewachsen. Das Wachstum der Teilchen weiter außen wird durch den radialen Strom hingegen gehemmt. Zu Beginn bildet sich der Staub wie gewohnt aus, aber nach einer Zeit von  $5 \times 10^4$  Jahren ist schon einiges an Staub nach innen geflossen und die dominierende Teilchengröße bei 4.5 AU liegt lediglich bei einigen Millimetern und bei 10 AU bei ca. 0.5 mm. Bei noch größeren Radien ist die Staubscheibe schon fast leer und ein wesentliches Staubwachstum dementsprechend unwahrscheinlich. Der Verlauf der Säulendichte beim innersten betrachteten radialen Punkt  $r = 1.5$  AU weist nun schon die Struktur des Gleichgewichts zwischen Fragmentation und Koagulation auf. Im Gegensatz zu den Abbildungen 5.14 erkennt man ein neues Merkmal. Durch das Auffüllen der innersten Regionen bildet sich eine zweite Teilchengröße mit einer hohen Säulendichte aus. Diese Teilchenklasse scheint ähnlich der Entwicklung der äußeren Scheiben zu kleineren Teilchengrößen zu wandern. Beim letzten beobachteten Zeitpunkt  $10^5$  Jahren ist die Staubscheibe schon sehr auf die innersten Gebiete komprimiert. Die Säulendichte bei 10 AU liegt für alle Teilchen unter einem Wert von  $10^{-6}$  g/cm<sup>2</sup>. Die Säulendichte bei 4.5 AU hat innerhalb der Zeit von  $5 \times 10^4$  bis  $10^5$  Jahren ebenfalls stark abgenommen. Die Säulendichte am inneren Rand verändert sich hingegen kaum. Wie auch Birnstiel et al. (2010) und Brauer et al. (2008) vorführen, kann in einer protostellaren Scheibe, wie sie das Basismodell beschreibt, kein Staubkorn entstehen, welches die Voraussetzungen erfüllt, um sich zu einem Planetesimal weiterzuentwickeln. Hierbei tritt die wesentliche Wachstumsgrenze, die so genannte "meter-size barrier", auf.

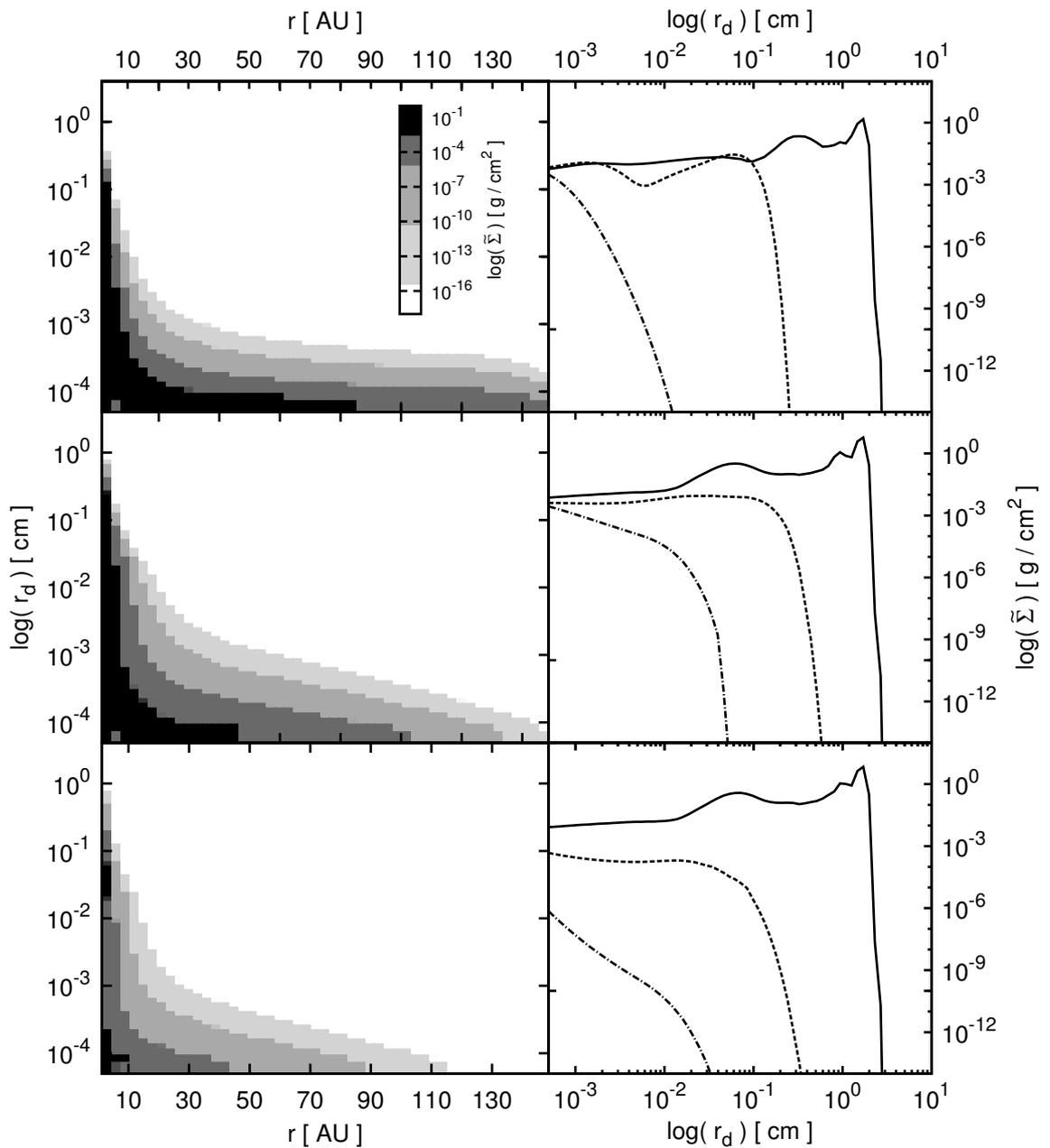


Abbildung 5.17.: **Entwicklung der Staubscheibe nach dem Basismodell**

Die Bilder zeigen die Staubscheibe zu drei verschiedenen Zeitpunkten  $t = 10^4$ ,  $5 \times 10^4$  und  $10^5$  yr. Die linke Reihe gibt die Säulendichte  $\tilde{\Sigma}$  in  $\text{g}/\text{cm}^2$  gegenüber dem Radius der Teilchen  $r_d$  in cm und dem radialen Abstand  $r$  in AU wieder. Die rechte Seite bildet die Säulendichte gegenüber dem Teilchenradius für drei radiale Punkte ( $r = 1.5$  AU durchgezogene,  $4.5$  AU gestrichelte und  $10$  AU Strichpunktlinie) ab.

Sie basiert auf zwei Effekten. Bei einigen Zentimetern ist die Relativgeschwindigkeit zwischen den Teilchen am größten und dementsprechend führen Kollisionen zu Fragmentation. Außerdem gilt, dass die radiale Geschwindigkeit bei Teilchen mit einem Radius von wenigen Metern am größten ist. Das führt dazu, dass sich die Staubscheibe sehr schnell von dieser Teilchenklasse entleert. Das zweite Problem kann durch meinen Algorithmus nicht mitverfolgt werden, da ich eine mittlere radiale Transportgeschwindigkeit verwende. Wie aus Birnstiel et al. (2010) und Brauer et al. (2008) hervorgeht, ist es durch eine Veränderung der Anfangsparameter grundsätzlich möglich, dass der Staub über die Meter-Grenze wächst. Die Scheibe muss dafür erstens kühler sein. Den Temperaturverlauf setze ich demnach auf diese Gesetzmäßigkeit  $T \sim r^{-0.6}$ . Dies führt dazu, dass sich die Schallgeschwindigkeit und auch die radiale Relativgeschwindigkeit verringern. Zweitens muss die protoplanetare Scheibe weniger turbulent sein. Senkt man den Turbulenzparameter auf  $\alpha = 10^{-5}$ , dann reduziert man die Höhe der Staubscheibe und auch die radialen Relativgeschwindigkeiten. Hebt man noch die Fragmentationsgeschwindigkeit  $v^f$  auf 5 m/s an, dann können Teilchen über die Grenze wachsen. Die Abbildung 5.18 zeigt die Entwicklung der Staubscheibe unter diesem Modell zu den Zeitpunkten  $t = 2000, 10^4$  und  $2 \times 10^4$  yr. Nach 2000 Jahren erreicht die innerste Region schon die Teilchengrößen, bei denen Fragmentation eine Rolle spielt. Es fällt zudem auf, dass schon ein sehr geringer Anteil ( $\tilde{\Sigma} = 10^{-12}$  g/cm<sup>2</sup>) einen Radius von einigen Metern aufweist. Nach  $10^4$  Jahren haben die Teilchen in den innersten Regionen ( $r < 4.5$  AU) die Barriere überschritten. Die Säulendichte der Objekte mit einem Radius von einigen Metern ist durch die Koagulation mit den vielen Kleinstteilchen stark angewachsen und weist einen Wert von  $10^{-6}$  g/cm<sup>2</sup> auf. Die Dichte der größten Teilchen im Ensemble ist also innerhalb von 8000 Jahren um 6 Größenordnungen gestiegen. Die größeren Körper in den weiter außen liegenden Gebieten der inneren Region wandern im Verlauf der Zeit nach innen und unterstützen weiterhin das Wachstum im Bereich um den Radius  $r = 1.5$  AU. Diesen Umstand erkennt man auch aus den letzten beiden Grafiken der Abbildung 5.18. Nach  $2 \times 10^4$  Jahren zeigt die Staubverteilung bei  $r = 1.5$  AU eine eindeutige Ansammlung von Körpern mit einer Größe von etwa 1.2 m. Die Säulendichte dieser Teilchenklasse ist in der Zwischenzeit abermals um 3 Größenordnungen auf  $\tilde{\Sigma} = 4 \times 10^{-3}$  g/cm<sup>2</sup> angestiegen. Die Ausdehnung der Region, in der der Staub die "meter-size barrier" überwunden hat, dehnt sich auf  $r = 10.5$  AU aus. Das deutet darauf hin, dass sich der Staub nach längerer Integrationszeit auch in größeren radialen Abständen zu großen Objekten vereinigen kann. Das Planetesimal-Modell macht es folglich möglich, aus einer Staubscheibe, gefüllt mit  $\mu\text{m}$ -großen Teilchen, Planetesimale zu erzeugen.

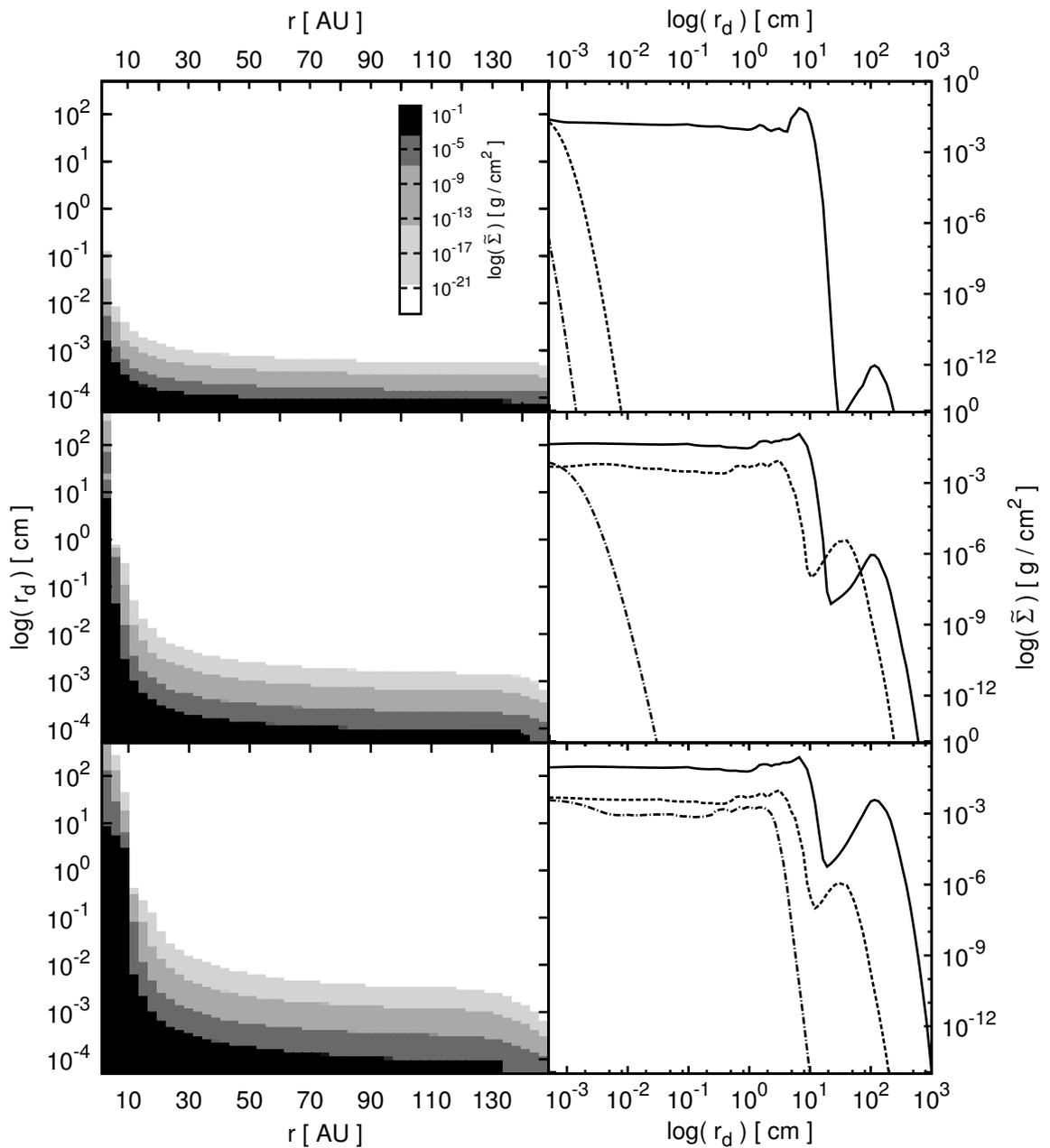


Abbildung 5.18.: **Entwicklung der Staubscheibe nach dem Planetesimal-Modell**

Die Bilder zeigen die Staubscheibe zu drei verschiedenen Zeitpunkten  $t = 2000, 10^4$  und  $2 \times 10^4$  yr. Die linke Reihe gibt die Säulendichte  $\tilde{\Sigma}$  in  $\text{g}/\text{cm}^2$  gegenüber dem Radius der Teilchen  $r_d$  in cm und dem radialen Abstand  $r$  in AU wieder. Die rechte Seite bildet die Säulendichte gegenüber dem Teilchenradius für drei radiale Punkte ( $r = 1.5$  AU durchgezogene,  $4.5$  AU gestrichelte und  $10$  AU Strichpunktlinie) ab.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Der Vergleich zwischen den numerischen Ergebnissen und den analytischen Lösungen zeigt, dass die Resultate gut übereinstimmen. Am besten fällt der Test bei der Koagulation aus. Mit der prozentualen Aufteilung des Gewinns aus einer Kollision berechnet man das erste und zweite Moment der Verteilungsfunktion bei einem konstanten Kern optimal (Abbildung 5.3). Ähnlich wie für die Fragmentation gilt, dass man die Verteilungsfunktion um so schlechter darstellt, je größer man die Bins wählt (Abbildungen 5.6 und 5.9). Zudem kann dies zu einem übermäßigen Wachstum der Körper, dem so genannten "artificial runaway", führen. Trotzdem gehe ich davon aus, dass der Algorithmus auch für physikalische Problemstellungen gültig ist. Im Vergleich zu der Arbeit von Brauer et al. (2008) fällt auf, dass die Resultate leicht größere Teilchen in der protoplanetaren Scheibe prognostizieren (Abbildungen 5.12 und 5.14). In seiner Arbeit liegt die dominierende Teilchengröße nach  $10^6$  Jahren im Bereich von 0.1 – 1 mm, meine Ergebnisse liefern Teilchen mit einem Radius von ca. 6 mm. Aus den Resultaten der Modellberechnungen in Kapitel 5.5 lassen sich die mittleren Radien der Staubkörner  $\bar{r}_d$  an jedem Ort der Scheibe bestimmen. Die Abbildungen 6.1 zeigen diese mittleren Teilchenradien für die zwei Modelle. Das Basismodell ist zu den Zeitpunkten  $t = 10^4$  und  $5 \times 10^4$  yr und das Planetesimal-Modell zu den Zeitpunkten  $t = 2000$ ,  $10^4$  und  $2 \times 10^4$  yr aufgetragen. Der Vergleich zwischen den beiden Modellen zeigt, dass das Planetesimal-Modell nach sehr kurzer Zeit schon ein größeres mittleres Teilchen in den innersten Regionen aufweist. Wie im Kapitel 5.5 beschrieben, wächst dabei ein kleiner Anteil über die Meter-Grenze hinaus. Die wesentlich wahrscheinlicheren Kollisionen mit Kleinstteilchen führen dazu, dass diese Objekte bestehen bleiben und weiter Masse anhäufen. Auffallend ist, dass im Gebiet um den Radius  $r = 1.5$  AU der mittlere Teilchenradius bei 2000 Jahren größer ist wie bei  $10^4$  Jahren. Dies deutet darauf hin, dass die Staubkörner in dieser Phase auf die "meter-size barrier" treffen. Zwischen  $10^4$  und  $2 \times 10^4$  Jahren ist der mittlere Teilchenradius bei  $r = 1.5$  AU um ca. das 5-Fache auf 17.5 cm angewachsen. Somit kann man davon ausgehen, dass das Wachstum weiter anhält. Eine der größten Schwächen dieses Algorithmusses liegt in der Advektion. Wie im Kapitel 4 aufgezeigt, ist die radiale

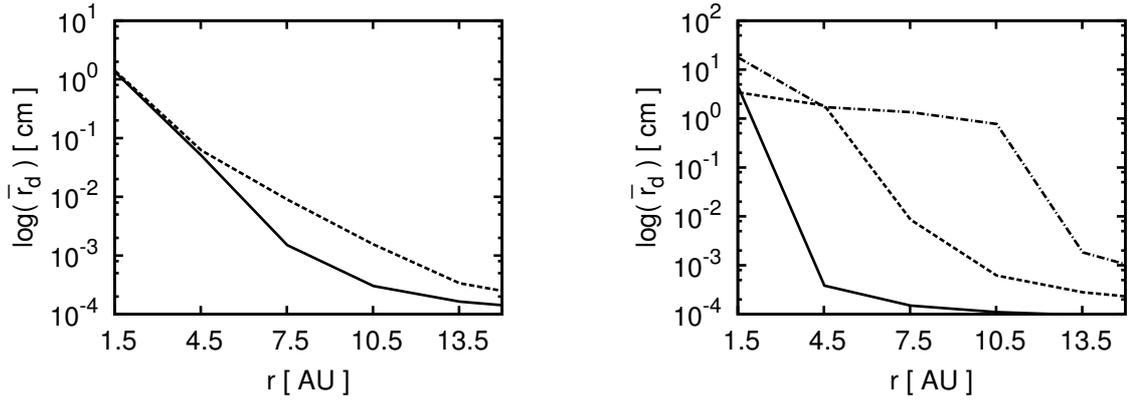


Abbildung 6.1.: **Mittlere Teilchenradien der Modelle aus Kapitel 5.5**

Angegeben sind die mittleren Teilchenradien  $\bar{r}_d$  in der inneren Region der Staubscheiben. Die drei Linien stehen für die Zeitpunkte (links Basismodell: durchgezogene  $t = 10^4$ , gestrichelte  $5 \times 10^4$ ; rechts Planetesimal-Modell: durchgezogene  $t = 2000$ , gestrichelte  $10^4$ , Strichpunktlinie  $2 \times 10^4$  yr).

Geschwindigkeit für verschiedene Teilchenklassen sehr unterschiedlich. Verwendet man hingegen eine mittlere radiale Geschwindigkeit, verliert man diese Information und zudem die zeitliche Wachstumsbedingung der "meter-size barrier". Um dieses Problem zu beseitigen, müsste man die Herleitungen mit der Boltzmann-Gleichung statt der Massenerhaltung durchführen. Der radiale Transport der Staubteilchen ist außerdem stark mit der Entwicklung der Gasscheibe verbunden. Somit muss man die Gasscheibe zusätzlich berechnen. Diskretisiert man den Zeitschritt in impliziter Form, dann ergibt sich ein weiterer wesentlicher Fortschritt. Der Vorteil dabei ist, dass man keiner zeitlichen Limitierung mehr unterliegt und sicher sein kann, dass die Verteilungsfunktion gegen den richtigen Wert konvergiert. Man kann sogar versuchen die Advektions- mit der Fragmentations-Koagulationsgleichung zu kombinieren. Ein Problem stellt dabei die Fragmentation dar, diese hängt nämlich von den Relativgeschwindigkeiten ab. Die Geschwindigkeiten kann man ferner mit denen, die in Birnstiel et al. (2010) angegeben sind, erweitern. Wie aus Birnstiel et al. (2010) hervorgeht, wächst innerhalb der so genannten "snow line" das Gas-zu-Staub-Verhältnis stark an. Das beeinflusst die Staubscheibe und kann ebenfalls in den Algorithmus eingebaut werden. Wie im Kapitel 3.1 angeführt, gibt es viele weitere physikalische Phänomene, die ich nicht betrachte. Eines der wichtigsten davon behandelt den Einfluss der Staubscheibe auf die Gasscheibe durch den Strahlungstransport.

# Literaturverzeichnis

- S. M. Andrews & J. P. Williams. High-resolution submillimeter constraints on circumstellar disk structure. *ApJ*, 659:705–728, 2007.
- S. M. Andrews, D. J. Wilner, A. M. Hughes, Q. Chunhua, & C. P. Dullemond. Protoplanetary disk structure in Ophiuchus. *ApJ*, 700:1502–1523, 2009.
- P. J. Armitage. *Astrophysics of Planet Formation*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- W. Benz & E. Asphaug. Catastrophic disruptions revised. *Icarus*, 142:5–20, 1999.
- L. Binglin. The exact solution of the coagulation equation with kernel  $K_{i,j} = A(i + j) + B$ . *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20:2347–2356, 1987.
- T. Birnstiel, C. P. Dullemond, & F. Brauer. Gas- and dust evolution in protoplanetary disks. *A&A*, 513:A79, 2010.
- F. Brauer. *Dust particle growth in protoplanetary disks*. PhD thesis, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 2008.
- F. Brauer, C. P. Dullemond, & T. Henning. Coagulation, fragmentation and radial motion of solid particles in protoplanetary disks. *A&A*, 480:859–877, 2008.
- R. Courant, K. Friedrichs, & H. Lewy. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.
- S. C. Davies, J. R. King, & J. A. D. Wattis. self-similar behaviour in the coagulation equation. *Journal of Engineering Mathematics*, 36:57–88, 1999.
- C. Dominik & A. G. G. M. Tielens. The physics of dust coagulation and the structure of dust aggregates in space. *ApJ*, 480:647–673, 1997.
- C. P. Dullemond & C. Dominik. The effect of dust settling on the appearance of protoplanetary disks. *A&A*, 421:1075–1086, 2004.

- Y. Greenzweig & J. J. Lissauer. Accretion rates of protoplanets II. Gaussian distribution of planetesimal velocities. *Icarus*, 100:440–463, 1992.
- K. R. Housen, R. M. Schmidt, & K. A. Holsapple. Laboratory simulations of large scale fragmentation events. *Icarus*, 94:180–190, 1991.
- S. Inaba, H. Tanaka, K. Nakazawa, G. W. Wetherill, & E. Kokubo. High-accuracy statistical simulation of planetary accretion II. Comparison with N-Body simulation. *Icarus*, 149:235–250, 2001.
- S. Inaba, G. W. Wetherill, & M. Ikoma. Formation of gas giant planets: core accretion models with fragmentation and planetary envelope. *Icarus*, 166:46–62, 2003.
- A. Johansen & H. Klahr. Dust diffusion in protoplanetary disks by magnetorotational turbulence. *ApJ*, 634:1353–1371, 2005.
- H. Kobayashi & H. Tanaka. Fragmentation model dependence of collision cascade. *Icarus*, 206:735–746, 2010.
- H. Kobayashi, H. Tanaka, A. V. Krivov, & S. Inaba. Planetary growth with collisional fragmentation and gas drag. *Icarus*, 209:836–847, 2010.
- M. Kostoglou & A. J. Karabelas. An assessment of low-order methods for solving the breakage equation. *Powder Technology*, 127:116–127, 2002.
- J. Kumar, G. Warnecke, M. Peglow, & S. Heinrich. Comparison of numerical methods for solving population balance equations incorporating aggregation and breakage. *Powder Technology*, 189:218–229, 2009.
- M. H. Lee. On the validity of the coagulation equation and the nature of runaway growth. *Icarus*, 143:74–86, 2000.
- A. Majerowicz. Numerische Untersuchungen der Koagulation in unimodalen und bimodalen Aerosolen und deren Anwendungen auf das atmosphärische Aerosol. Master’s thesis, Universität Wien, 1987.
- P.-S. Marquis de Laplace. *Exposition du systeme du monde*. V. Courcier, Paris, 1798.
- K. Ohtsuki, Y. Nakagawa, & K. Nakazawa. Artificial acceleration in accumulation fue to coarse mass-coordinate division in numerical simulation. *Icarus*, 83:205–215, 1990.

- C. W. Ormel, D. Paszun, C. Dominik, & A. G. G. M. Tielens. Dust coagulation and fragmentation in molecular clouds I. How collisions between dust aggregates alter the dust size distribution. *A&A*, 502:845–869, 2009.
- C. W. Ormel, M. Min, A. G. G. M. Tielens, C. Dominik, & D. Paszun. Dust coagulation and fragmentation in molecular clouds II. The opacity of the dust aggregate size distribution. *A&A*, 532:A43, 2011.
- D. Paszun & C. Dominik. Collisional evolution of dust aggregates. From compaction to catastrophic destruction. *A&A*, 507:1023–1040, 2009.
- M. Pullmann. *Multidiffusive Konvektion mit Koagulation und Breakup - Numerische Untersuchungen zur Erweiterung der thermo - diffusiv - sedimentären Konvektion auf veränderliche Partikelgröße*. PhD thesis, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2003.
- V. S. Safronov. *Evolution of the protoplanetary cloud and formation of the earth and the planets*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1972.
- N. I. Shakura & R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24:337–355, 1973.
- S. T. Stewart & Z. M. Leinhardt. Velocity-dependent catastrophic disruption criteria for planetesimals. *ApJ*, 691:L133–L137, 2009.
- H. Tanaka, S. Inaba, & K. Nakazawa. Steady-state size distribution for the self-similar collision cascade. *Icarus*, 123:450–455, 1996.
- A. I. Vasjunin, D. S. Wiebe, T. Birnstiel, S. Zhukovska, T. Henning, & C. P. Dullemond. Impact of Grain Evolution on the Chemical Structure of Protoplanetary Disks. *ApJ*, 727:76, 2011.
- R. Völker. *Staubzerstörung durch interstellare Stoßfronten*. PhD thesis, Bayerische Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2003.
- J. A. D. Wattis. An introduction to mathematical models of coagulation fragmentation process: A Discrete Deterministic Mean-Field Approach. *Physica D*, 222:1–20, 2006.
- S. J. Weidenschilling. The distribution of mass in the planetary system and solar nebula. *Astrophysics and Space Science*, 51:153–158, 1977.

- G. W. Wetherill. Comparison of analytical and physical modeling of planetesimal accumulation. *Icarus*, 88:336–354, 1990.
- G. W. Wetherill & G. R. Stewart. Formation of planetary embryos: Effects of fragmentation, low relative velocity, and independent variation of eccentricity and inclination. *Icarus*, 106:190–209, 1993.
- R. M. Ziff & E. D. McGrady. The kinetics of cluster fragmentation and depolymerisation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 18:3027–3037, 1985.

# Anhang A.

## Varianten der Fragmentations- Koagulationsgleichung

### A.1. Perfekte Koagulation

Im Fall der perfekten Koagulation hat die kumulative Verteilungsfunktion diese spezielle Form:

$$\mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } m > m_1 + m_2 \\ 0 & \text{für } m \leq m_1 + m_2. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Diese Gesetzmäßigkeit setzt man in der Gleichung für den Massenfluss  $F^{pK}(m)$  ein:

$$\begin{aligned} F^{pK}(m) = & - \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 m_1 \mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \\ & + \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 m_1 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Aus den Grenzen des ersten Doppelintegrals liest man ab, dass  $m_1 \geq m$  ist und demzufolge

$$m - m_1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 & m - m_1 \leq 0 \text{ und } m - m_1 > m_2 \\ 0 & m - m_1 \leq 0 \leq m_2. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Das zweite Integral besagt,  $m_2 \geq 0$ , d.h.  $m - m_1$  ist immer kleiner wie  $m_2$  und die kumulative Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)$  ist immer Null. Somit verschwindet das erste Doppelintegral auf der rechten Seite von Gleichung A.2. Die Integration über die Zielobjekte sowie die Projektile ist gleich. Daher resultiert der selbe Massenfluss  $F^{pK}(m)$

aus der Multiplikation der Summe mit 1/2:

$$\begin{aligned}
F^{pK}(m) &= \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 m_1 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) = \\
&\frac{1}{2} \left[ \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 m_1 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \right. \\
&\left. + \int_0^m dm_2 \int_0^\infty dm_1 m_2 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m_2, m_1)) C_{m_2, m_1} f(m_2) f(m_1) \right]. \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

Nach der Gleichung 3.1 muss dieser Ausdruck nach  $m$  abgeleitet und noch durch  $m$  dividiert werden. Für das erste Doppelintegral folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m} \frac{d}{dm} \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 m_1 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) = \\
&\frac{1}{m} \int_0^m dm_1 \frac{\partial}{\partial m} \int_0^\infty dm_2 m_1 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \quad (\text{A.5}) \\
&+ \frac{1}{m} \int_0^\infty dm_2 m (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m, m_2)) C_{m, m_2} f(m) f(m_2).
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Leibnizregel für Parameterintegrale angewendet.

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + f(b(t), t) \frac{\partial}{\partial t} b(t) - f(a(t), t) \frac{\partial}{\partial t} a(t). \quad (\text{A.6})$$

In der Gleichung A.5 kann man im ersten Term auf der rechten Seite die partielle Ableitung mit dem Integral vertauschen. Die einzige Funktion, die noch von  $m$  abhängt, ist die kumulative Verteilungsfunktion, somit kann man alle anderen aus der Ableitung herausziehen. Im zweiten Term kürzen sich zudem die Massen  $m$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m} \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{\partial}{\partial m} [m_1 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2)] \\
&+ \int_0^\infty dm_2 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m, m_2)) C_{m, m_2} f(m) f(m_2) = \\
&\frac{1}{m} \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 m_1 C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial}{\partial m} [(1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2))] \\
&+ \int_0^\infty dm_2 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m, m_2)) C_{m, m_2} f(m) f(m_2). \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

Das selbe ergibt sich auch für das zweite Doppelintegral in Gleichung A.4, allerdings ist dabei  $m_1$  mit  $m_2$  vertauscht. Setzt man alles zusammen und führt noch die Ableitung in Formel A.7 durch, folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \frac{d}{dm} F^{pK}(m) &= \frac{1}{2} \left[ \right. \\
&- \frac{1}{m} \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 m_1 C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial}{\partial m} (\mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)) \\
&+ \int_0^\infty dm_2 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m, m_2)) C_{m, m_2} f(m) f(m_2) \\
&- \frac{1}{m} \int_0^m dm_2 \int_0^\infty dm_1 m_2 C_{m_2, m_1} f(m_2) f(m_1) \frac{\partial}{\partial m} (\mathcal{F}^{pK}(m, m_2, m_1)) \\
&\left. + \int_0^\infty dm_1 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m, m_1)) C_{m, m_1} f(m) f(m_1) \right]. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt verwendet man die Eigenschaften der einzelnen Terme. Die Kollisionsrate  $C_{m_1, m_2}$ , wie sie in Gleichung 3.4 definiert ist, hängt ab vom Wirkungsquerschnitt sowie der Relativgeschwindigkeit zwischen den Körpern. Die Kollisionsrate ist somit symmetrisch in den Argumenten. Die kumulative Verteilungsfunktion (Gleichung A.1) hängt ab von der Summe der beiden Variablen  $m_1$  und  $m_2$ . Damit ist  $\mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)$  symmetrisch in den letzten beiden Argumenten. Durch diese Eigenschaften kann man die Integrale zusammenfassen und es folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \frac{d}{dm} F^{pK}(m) &= \frac{1}{2} \left[ \right. \\
&- \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{m_1 + m_2}{m} C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial}{\partial m} (\mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)) \\
&\left. + 2 \int_0^\infty dm_2 (1 - \mathcal{F}^{pK}(m, m, m_2)) C_{m, m_2} f(m) f(m_2) \right]. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Die partielle Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion nach  $m$  ist gleich der  $\delta$ -Funktion. Sie beschreibt den Zusammenhang, dass die kumulative Verteilungsfunktion bei  $m_1 + m_2$  gleich  $m$  von Null auf Eins springt. Da  $m_2 > 0$  gilt, ist  $\mathcal{F}^{pK}(m, m, m_2)$  im

zweiten Term immer Null und man erhält

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \frac{d}{dm} F^{pK}(m) = & \\
-\frac{1}{2} \int_0^m dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{m_1 + m_2}{m} C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \delta(m - m_1 - m_2) & \quad (\text{A.10}) \\
+ \int_0^\infty dm_2 C_{m, m_2} f(m) f(m_2) . &
\end{aligned}$$

Bei der Integration der  $\delta$ -Funktion ersetzt man jedes  $m_2$  mit  $m - m_1$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \frac{d}{dm} F^{pK}(m) = -\frac{1}{2} \int_0^m dm_1 \frac{m_1 + m - m_1}{m} C_{m_1, m - m_1} f(m_1) f(m - m_1) & \\
+ \int_0^\infty dm_2 C_{m, m_2} f(m) f(m_2) = & \quad (\text{A.11}) \\
-\frac{1}{2} \int_0^m dm_1 C_{m_1, m - m_1} f(m_1) f(m - m_1) + \int_0^\infty dm_2 C_{m, m_2} f(m) f(m_2) . &
\end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt die Koagulation bei perfekter Haftung, wie in Kapitel 3.1 dargestellt.

## A.2. Reine Fragmentation

Im Fall der reinen Fragmentation setzt sich die kumulative Verteilungsfunktion aus zwei Komponenten zusammen:

$$\mathcal{F}^f(m, m_1, m_2) = \mathcal{F}^{rem}(m, m_1, m_2) + \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2). \quad (\text{A.12})$$

$\mathcal{F}^{rem}(m, m_1, m_2)$  und  $\mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2)$  sind auf diese Weise definiert:

$$m_1 \mathcal{F}^{rem}(m, m_1, m_2) = \begin{cases} m_1 - m_{ej}, & m \geq m_1 - m_{ej} \\ 0, & m < m_1 - m_{ej}. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

$$m_1 \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2) = \begin{cases} m_{ej}, & m \geq m_{lf} \\ m_{ej} \left( \frac{m}{m_{lf}} \right)^{2-q}, & m < m_{lf}. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Setzt man diese Funktionalität in Gleichung 3.7 ein, dann erkennt man, dass das erste Doppelintegral immer Null ist.  $m_1 \mathcal{F}^{rem}(m, m_1, m_2)$  ist für alle  $m_1 \leq m$  gleich  $m_1 - m_{ej}$ , da  $0 \leq m - m_1 < -m_{ej}$  einen Widerspruch ergibt.  $m_1 \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2)$  ist in diesem Massenbereich gleich  $m_{ej}$ , da  $m < m_{lf} < \epsilon/4 m_1$  ebenfalls zu einem Widerspruch führt. Daraus lässt sich folgern, dass  $m_1 - m_1 \mathcal{F}^f(m, m_1, m_2) = m_1 - (m_1 - m_{ej}) - m_{ej} = 0$  ist und somit auch das Integral verschwindet. Der Gesamtfluss  $F(m)$  besteht nur aus dem zweiten Doppelintegral, differenziert nach  $m$  und dividiert mit  $m$  ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{d}{dm} F^f(m) &= -\frac{1}{m} \frac{d}{dm} \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \\ & m_1 \mathcal{F}^f(m, m_1, m_2) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Wendet man die Leibnizregel (Formel A.6) an, folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{d}{dm} F^f(m) &= -\frac{1}{m} \left[ - \int_0^\infty dm_2 m \mathcal{F}^f(m, m, m_2) C_{m, m_2} f(m) f(m_2) \right. \\ & \left. + \int_m^\infty dm_1 \frac{\partial}{\partial m} \int_0^\infty dm_2 m_1 \mathcal{F}^f(m, m_1, m_2) C_{m_1, m_2} f(m_1) f(m_2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Betrachtet man abermals die kumulative Verteilungsfunktion (Gleichung A.12), dann erkennt man, dass  $m \mathcal{F}^f(m, m, m_2)$  im ersten Integral immer gleich  $m$  ist.  $m \mathcal{F}^{rem}(m, m, m_2)$

ist gleich  $m - m_{ej}$ , da  $m < m - m_{ej} \Rightarrow 0 < -m_{ej}$  einen Widerspruch ergibt. Des Weiteren ist  $m\mathcal{F}^{ej}(m, m, m_2)$  gleich  $m_{ej}$ , da  $m < m_{lf} \Rightarrow m < \epsilon/4 m$  ebenfalls zu einem Widerspruch führt. Im zweiten Integral hängt lediglich die kumulative Verteilungsfunktion von  $m$  ab, den Rest zieht man vor die partielle Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{d}{dm} F^f(m) &= -\frac{1}{m} \left[ -\int_0^\infty dm_2 m C_{m,m_2} f(m) f(m_2) \right. \\ &\left. + \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 C_{m_1,m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial}{\partial m} (m_1 \mathcal{F}^f(m, m_1, m_2)) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

In das Doppelintegral wird die Gleichung A.12 und die Funktion A.13 eingesetzt, multipliziert man noch die Klammer aus, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{d}{dm} F(m) &= \int_0^\infty dm_2 C_{m,m_2} f(m) f(m_2) \\ &- \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{m_1 - m_{ej}}{m} C_{m_1,m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial \Theta(m - m_1 + m_{ej})}{\partial m} \\ &- \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{1}{m} C_{m_1,m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial}{\partial m} (m_1 \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2)). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Benützt man die Identität, dass die Ableitung der Stufenfunktion die  $\delta$ -Funktion ist, ergibt sich die Änderungsrate der Fragmentations-Koagulationsgleichung bei reiner Fragmentation, wie in Kapitel 3.1 angegeben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{d}{dm} F^f(m) &= \int_0^\infty dm_2 C_{m,m_2} f(m) f(m_2) \\ &- \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{m_1 - m_{ej}}{m} C_{m_1,m_2} f(m_1) f(m_2) \delta(m - m_1 + m_{ej}) \\ &- \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{1}{m} C_{m_1,m_2} f(m_1) f(m_2) \frac{\partial}{\partial m} (m_1 \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2)). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Wie in Tanaka et al. (1996) beschrieben, kann die untere Grenze des ersten Integrals im Doppelintegral beibehalten werden.

## Anhang B.

# Fragmentationsgleichung mit konst. Kern und gleichmäßiger Aufspaltung

Wie in Kapitel 3.3 beschrieben, gestaltet sich die Fragmentationsgleichung mit gleichmäßiger Aufspaltung nach der Funktion 3.33. Setzt man den konstanten Kern  $C_{m_1, m_2} = 1$  ein und leitet die  $\Theta$ -Funktion ab, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(m)}{\partial t} &= \int_m^\infty dm_1 \int_0^\infty dm_2 \frac{m_1}{m} f(m_1) f(m_2) \delta\left(m - \frac{m_1}{2}\right) \\ &- \int_0^\infty dm_2 f(m) f(m_2). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Führt man eine Koordinatentransformation  $m' = m_1/2 \Rightarrow 2 dm' = dm_1$  im ersten Integral durch, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(m)}{\partial t} &= 2 \int_{m/2}^\infty dm' \int_0^\infty dm_2 \frac{2m'}{m} f(2m') f(m_2) \delta(m - m') \\ &- \int_0^\infty dm_2 f(m) f(m_2). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Nun kann man die Integration über  $m'$  durchführen und jedes  $m'$  mit  $m$  ersetzen:

$$\frac{\partial f(m)}{\partial t} = 4 \int_0^\infty dm_2 f(2m) f(m_2) - \int_0^\infty dm_2 f(m) f(m_2). \quad (\text{B.3})$$

Die Gleichung kann man weiter umformen auf:

$$\frac{\partial f(m)}{\partial t} = [4 f(2m) - f(m)] \int_0^\infty dm_2 f(m_2). \quad (\text{B.4})$$

Den letzten Term kann man als 0-tes Moment ausmachen und es resultiert die Ausgangsgleichung für die Herleitung der Entwicklung der Momente:

$$\frac{\partial f(m)}{\partial t} = [4 f(2m) - f(m)] N_0(t). \quad (\text{B.5})$$

Die verschiedenen Momente  $N_i(t)$  erhält man durch die Multiplikation mit dem jeweiligen  $m^i$  und der darauffolgenden Integration über  $m$

$$\frac{\partial N_i(t)}{\partial t} = \left[ 4 \int_0^\infty dm m^i f(2m) - N_i(t) \right] N_0(t). \quad (\text{B.6})$$

Führt man wieder eine Koordinatentransformation  $m' = 2m \Rightarrow 1/2 dm' = dm$  durch, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i(t)}{\partial t} &= \left[ \frac{2}{2^i} \int_0^\infty dm' (m')^i f(m') - N_i(t) \right] N_0(t) = [2^{1-i} N_i(t) - N_i(t)] N_0(t) \\ \Rightarrow \frac{\partial N_i(t)}{\partial t} &= [2^{1-i} - 1] N_i(t) N_0(t). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Die Gleichung B.7 gilt für alle  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Um für alle  $i > 0$  eine Lösung zu finden, muss man zuerst die Entwicklung des 0-ten Moments

$$\frac{\partial N_0(t)}{\partial t} = N_0(t)^2 \quad (\text{B.8})$$

bestimmen. Durch Trennung der Variablen und der Anfangsbedingung  $N_0(0)$  ergibt sich:

$$N_0(t) = \frac{1}{\frac{1}{N_0(0)} - t} = \frac{N_0(0)}{1 - N_0(0)t}. \quad (\text{B.9})$$

Setzt man die Lösung in die Gleichung B.7 ein, dann kann man die höheren Momente  $i > 0$  bestimmen:

$$\frac{\partial N_i(t)}{\partial t} = [2^{1-i} - 1] N_i(t) \frac{N_0(0)}{1 - N_0(0)t}. \quad (\text{B.10})$$

Es können wieder die Variablen getrennt werden.

$$N_i(t) = N_i(0) [1 - N_0(0)t]^{1-2^{1-i}} \quad (\text{B.11})$$

sind dann die Lösungen der höheren Momente mit den jeweiligen Anfangsbedingungen  $N_i(0)$ .

# Anhang C.

## Vertikale Integration der Erhaltungsgleichung

Wie in Kapitel 3.5 angesprochen, kann man das beobachtete Volumen, in dem die protoplanetare Scheibe eingebettet ist, durch Hohlzylinder darstellen. Die Gleichung 3.41 schreibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} & \int_{V(t)} dV \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{r}, m)) + \frac{\nabla_m F(\mathbf{r}, m)}{m} \right] \\ & + \int_{O_{Grund,o}(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z) f(\mathbf{r}, m)] - \int_{O_{Grund,u}(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z) f(\mathbf{r}, m)] \\ & + \int_{O_{Mantel,a}(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) f(\mathbf{r}, m)] - \int_{O_{Mantel,i}(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) f(\mathbf{r}, m)] = 0. \end{aligned} \quad (C.1)$$

Das negative Vorzeichen bei den Flüssen über der unteren Grundfläche und der inneren Mantelfläche kommt daher, da man immer Flüsse beobachtet, die aus dem Volumen hinaustreten. Abbildung C.1 zeigt eine schematische Darstellung der Flüsse durch den Schnitt eines Hohlzylinders. Das Volumen  $dV = r dr d\varphi dz$  und die jeweiligen Flächenelemente zur Grundfläche  $dA = r dr d\varphi$  und zur Mantelfläche  $dA = r d\varphi dz$  lassen sich in Zylinderkoordinaten schreiben und in Gleichung C.1 einsetzen. Betrachtet man zuerst das Integral über der Manteloberfläche, folgt:

$$\begin{aligned} \int_{O_{Mantel}(t)} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r) f(\mathbf{r}, m)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi r [v_r f(\mathbf{r}, m)] = \\ & 2\pi r \int_{-\infty}^{\infty} dz [v_r f(r, z, m)]. \end{aligned} \quad (C.2)$$

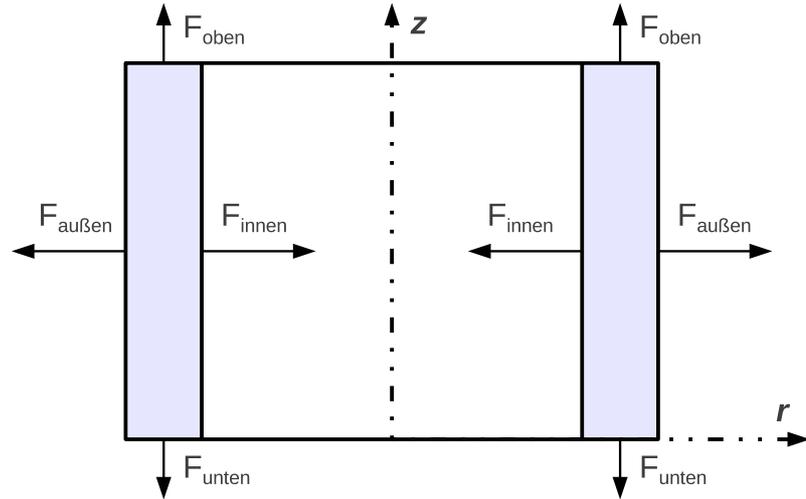


Abbildung C.1.: **Schnitt durch einen Hohlzylinder**

Aufgetragen sind die Flüsse, die vom inneren Mantel nach innen und vom äußeren Mantel nach außen zeigen, sowie die Flüsse, die nach oben und nach unten gerichtet sind.

Dabei habe ich schon einiges verwendet:

- Das Skalarprodukt des radialen Einheitsvektors mit der Geschwindigkeit ist die radiale Geschwindigkeit.
- Durch die Zylindersymmetrie kann man das Integral über dem Winkel berechnen.
- Man nimmt an, dass die Hohlzylinder unendlich hoch sind:  $\lim_{\tilde{z} \rightarrow \infty} \int_{-\tilde{z}}^{\tilde{z}} dz$ .

Berücksichtigt man nun, wie in Kapitel 2 beschrieben, dass die Verteilungsfunktion in vertikaler Richtung durch ein Gleichgewicht zwischen Ablagerung und "turbulenter" Diffusion gegeben ist, gleicht die Verteilungsfunktion  $f(r, z, m)$  in vertikaler Richtung einer Glockenkurve. Diese Funktionalität gibt die Gleichung 2.23 wieder. Eingesetzt in Gleichung C.2 ergibt:

$$2 \pi r \int_{-\infty}^{\infty} dz [v_r f(r, z, m)] = 2 \pi r v_r \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\tilde{\Sigma}_d(r, m)}{\sqrt{2 \pi} H_d(r, m)} \exp\left(-\frac{z^2}{2 H_d(r, m)^2}\right). \quad (\text{C.3})$$

Über eine Koordinatentransformation  $u = z/(\sqrt{\pi} H_d)$  kommt man auf ein Gauß-Integral. Unter den Grenzen  $\pm\infty$  bestimmt sich das Integral zu  $\sqrt{\pi}$  und es folgt:

$$2 \pi r \int_{-\infty}^{\infty} dz [v_r f(r, z, m)] = 2 \pi r v_r \tilde{\Sigma}_d(r, m). \quad (\text{C.4})$$

$\tilde{\Sigma}_d$  beschreibt die Säulendichte einer bestimmten Staubklasse. Ich gehe nun zu den Grundflächen über und setze das Flächenelement ein:

$$\int_{O_{Grund(t)}} dA [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z) f(\mathbf{r}, m)] = 2 \pi \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} [v_z f(\mathbf{r}, m)] . \quad (\text{C.5})$$

Hierbei habe ich wieder die Identität benutzt, dass das Skalarprodukt zwischen dem Einheitsvektor in  $z$ -Richtung mit der Geschwindigkeit die vertikale Komponente der Geschwindigkeit liefert. Das vertikale Element ist die Ablagerungsgeschwindigkeit. Wie im Kapitel 4.2 dargestellt, gilt laut Gleichung 4.7, dass  $v_z$  proportional zu  $z$  ist. Setzt man eine Glockenkurve für die Verteilungsfunktion an und lässt die Höhe der Zylinder gegen Unendlich gehen, folgt:

$$2 \pi \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} [v_z f(\mathbf{r}, m)] \propto \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{H_d(\tilde{r}, m) \exp\left(\frac{z^2}{2H_d(\tilde{r}, m)^2}\right)} . \quad (\text{C.6})$$

Wie im Kapitel 2 definiert, ist die Staubskalenhöhe  $H_d$  durch die Gasskalenhöhe  $H_g$  begrenzt. Im Limes  $z$  gegen Unendlich kann man diese Größe also vernachlässigen. Unter Anwendung der Regel von de L'Hospital stellt sich heraus, dass die Gleichung C.6 Null ist:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{H_d(\tilde{r}, m) \exp\left(\frac{z^2}{2H_d(\tilde{r}, m)^2}\right)} \sim \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\exp(z^2/2)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z \exp(z^2)} = 0 . \quad (\text{C.7})$$

Unter diesen Umständen fließt keine Materie über die Grundflächen der Hohlzylinder und man kann diese beiden Terme in der Gleichung C.1 streichen. Man kann das auch so verstehen, dass im Unendlichen keine Materie mehr existiert, die irgendwohin fließen könnte. Beim ersten Term in der Gleichung C.1 setze ich das Volumenelement ein:

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} dV \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{r}, m)) + \frac{\nabla_m F(\mathbf{r}, m)}{m} \right] = \\ 2 \pi \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{r}, m)) + \frac{\nabla_m F(\mathbf{r}, m)}{m} \right] . \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Anfangs betrachte ich nur die zeitliche Ableitung der Verteilungsfunktion. Damit man die vertikale Integration durchführen kann, muss man annehmen, dass die Staubskalenhöhe konstant bleibt. Über die Gleichungen 2.28 und 2.24 führt das dazu, dass die Gasscheibe zeitlich konstant bleiben muss. Vernachlässigt man die zeitliche Änderung der Gasscheibe

kann man den ersten Term umschreiben zu:

$$\begin{aligned}
& 2 \pi \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial}{\partial t} (f(\tilde{r}, z, m)) = \\
& 2 \pi \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \frac{\partial}{\partial t} \left( \tilde{\Sigma}_d(\tilde{r}, m) \right) \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\sqrt{2 \pi} H_d(\tilde{r}, m)} \exp \left( -\frac{z^2}{2 H_d(\tilde{r}, m)^2} \right).
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Das Integral über  $z$  ist 1 und die Gleichung vereinfacht sich auf die zeitliche Ableitung der Säulendichte einer gewissen Staubklasse. Den Term mit der Ableitung des Massenflusses kann man nach Formel 3.15 durch zwei Integrale über die Projektile  $m_2$  und die Zielobjekte  $m_1$  schreiben.

$$\begin{aligned}
& 2 \pi \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\nabla_m F(\mathbf{r}, m)}{m} = \\
& 2 \pi \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dm_1 \int_0^{\infty} dm_2 \tilde{C}_{\tilde{r}, z, m, m_1, m_2} f(\tilde{r}, z, m_1) f(\tilde{r}, z, m_2).
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Hierbei habe ich die Funktion 3.15 umgeschrieben damit ich die einzelnen Integrale der Gleichung 3.15 zu zwei zusammenfassen kann.  $\tilde{C}$  beinhaltet dann alle Faktoren, die nicht mit den Verteilungsfunktionen zusammenhängen. Setzt man die Funktionalität 2.23 ein und zieht die beiden Gauß-Verteilungen zusammen, folgt:

$$\begin{aligned}
& 2 \pi \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dm_1 \int_0^{\infty} dm_2 \tilde{C}_{\tilde{r}, z, m, m_1, m_2} f(\tilde{r}, z, m_1) f(\tilde{r}, z, m_2) = \\
& 2 \pi \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \int_0^{\infty} dm_1 \int_0^{\infty} dm_2 \tilde{\Sigma}_d(\tilde{r}, m_1) \tilde{\Sigma}_d(\tilde{r}, m_2) \Lambda(\tilde{r}, m, m_1, m_2)
\end{aligned} \tag{C.11}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Lambda(r, m, m_1, m_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\tilde{C}_{r, z, m, m_1, m_2}}{2 \pi H_d(r, m_1) H_d(r, m_2)} \\
&\times \exp \left[ -\frac{z^2}{2} \left( \frac{1}{H_d(r, m_1)^2} + \frac{1}{H_d(r, m_2)^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$\tilde{C}$  kennzeichnet den physikalischen Kern, wie er in Kapitel 4 definiert ist und beinhaltet sowohl die Relativgeschwindigkeiten wie auch den Wirkungsquerschnitt und die Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion. Die Variable hat im Fall von perfekter

Koagulation und reiner Fragmentation diese Gestalt:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{r,z,m,m_1,m_2} &= C_{r,z,m_1,m_2} \left\{ \delta(m - m_1) - \frac{1}{2} \Theta(m - m_1) \right. \\
&\times [1 - \Theta(v_{r,z,m_1,m_2}^{rel} - v^f)] \frac{m_1 + m_2}{m} \frac{\partial}{\partial m} (\mathcal{F}^{pK}(m, m_1, m_2)) \\
&- \Theta(m_1 - m) \Theta(v_{r,z,m_1,m_2}^{rel} - v^f) \\
&\times \left. \left[ \frac{m_1 - m_{ej}}{m} \frac{\partial \Theta(m - m_1 + m_{ej})}{\partial m} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} (m_1 \mathcal{F}^{ej}(m, m_1, m_2)) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Schreibt man die Gleichung C.11 als eine Ableitung nach der Masse eines Massenflusses  $\tilde{F}$ , der über  $z$  integriert wurde, ergibt sich für den ersten Term der Gleichung C.1:

$$\begin{aligned}
\int_{V(t)} dV \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f(\mathbf{r}, m)) + \frac{\nabla_m F(\mathbf{r}, m)}{m} \right] &= \\
2 \pi \int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\Sigma}_d(\tilde{r}, m)) + \frac{\nabla_m \tilde{F}(\tilde{r}, m)}{m} \right].
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Führt man alle drei Terme, die von der Funktion C.1 übrig bleiben, zusammen (Formel C.4 für die beiden Mäntel und Gleichung C.14) und dividiert durch  $2 \pi$ , erhält man diese Form der Erhaltungsgleichung:

$$\begin{aligned}
\int_r^{r+dr} d\tilde{r} \tilde{r} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\Sigma}_d(\tilde{r}, m)) + \frac{\nabla_m \tilde{F}(\tilde{r}, m)}{m} \right] \\
+(r + dr) v_{r+dr} \tilde{\Sigma}_d(r + dr, m) - r v_r \tilde{\Sigma}_d(r, m) = 0.
\end{aligned} \tag{C.15}$$



# Georg Lochmann

Lorenzerweg 13  
39011 Lana (Italien)  
☎ +43 650 243 3541  
✉ georg@lochisoft.com  
16.05.1985



## Studium

- 10/2010– **Masterstudium der Astronomie, Universität Wien.**
- 08/2010 **Bakkalaureat der Naturwissenschaften mit Auszeichnung**
- 03/2007– **Bakkalaureatstudium der Astronomie, Universität Wien.**  
08/2010
- 10/2005– **Studium der Physik, Universität Innsbruck.**  
01/2006

## Berufspraxis

- 03/2012– **Tutor, Universität Wien.**
- 06/2012 Titel der Lehrveranstaltungen:
  - Praktikum aus numerischer Astronomie
  - Astrophysik II
- 10/2011– **Tutor, Universität Wien.**
- 01/2012 Titel der Lehrveranstaltungen:
  - Astrophysik I
- 03/2010– **Tutor, Universität Wien.**
- 06/2010 Titel der Lehrveranstaltungen:
  - Praktikum aus numerischer Astronomie
- 02/2006– **Maschinenbauingenieur, Ambra KG, Lana.**
- 02/2007 Schwerpunkte:
  - Entwurf und Konstruktion von Erntemaschinen für den Obstbau
  - Bestandsmanagement

## Sonstige Tätigkeiten

- 06/2011–  
08/2011 **Praktikum**, *Institut für Naturgefahren*, Innsbruck.  
Schwerpunkte:
  - Erstellen einer Datenbank
  - Risikomanagement von lawinengefährdeten Gebieten
- 08/2010 **Nachhilfelehrer für Mathematik**, Nachhilfeeinrichtung Pegasus,  
Bozen
- 07/2009 **Praktikum**, Institut für Astronomie, Wien.  
Schwerpunkte:
  - Chaotische Systeme
  - Programmierung der Grafikkarte

## Schulbildung

- 1999–2005 **Maschinenbauingenieur**, *Gewerbeoberschule "Max Valier"*,  
*Fachrichtung Maschinenbau*, Bozen.

## Sprachkenntnisse

- Deutsch **Muttersprache**  
Italienisch **Fließend**  
Englisch **Sehr gute Kenntnisse**

## Computerkenntnisse

- C, C++ und Fortran hervorragende Programmierkenntnisse  
gnuplot sehr gute Kenntnisse in der Darstellung von Daten

## Interessen

- Fußball aktives Mitglied einer Amateurm Mannschaft  
Reisen

Wien, 03.09.2012