



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Verschränkung und Separabilität von Qubit- und
Qutritsystemen im magischen Simplex

Verfasser

Heidi Maria Waldner

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im Jänner 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 411

Studienrichtung lt. Studienblatt: Physik

Betreuer: Univ. Doz. Dr. Beatrix C. Hiesmayr

Danksagung

Mein tiefster Dank gilt meiner Betreuerin Beatrix C. Hiesmayr für ihre Anleitung und Unterstützung über Jahre. Danken möchte ich auch den Mitgliedern unserer Arbeitsgruppe, die durch hilfreiche Diskussionen und Anregungen zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Danken möchte ich auch meiner Familie für die Betreuung meiner Kinder und die allgemeine Unterstützung, insbesondere danke ich meinem Mann Christoph-Danke, dass du immer für mich da bist.

Ich widme diese Arbeit meinen Kindern Maximilian und Sebastian, danke für die zahllosen Stunden von Freude und Ausgelassenheit.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
Danksagung	2
1 Einleitung	9
2 Grundlagen	11
2.1 Mathematische Grundlagen	11
2.2 Bipartite Qubits	13
2.3 Bipartite Qutrits	14
2.4 Verschränkung	16
2.4.1 Spinbeispiele	17
2.5 Geometrie von separablen Zuständen	18
2.6 Verschränkungsmaße	19
2.6.1 Allgemeine Bellungleichungen	20
2.6.2 Entanglement of Formation	23
2.6.3 Concurrence	25
2.6.4 Entanglement Cost und Entanglement of Distillation	26
2.6.5 Beispiel	27
3 Geometrie von bipartiten Qudits	29
3.1 Geometrie von bipartiten Qubits	29
3.2 Geometrie von bipartiten Qutrits	30
3.3 Geometrie von bipartiten Qudits	32

INHALTSVERZEICHNIS

3.4	Symmetrien und Äquivalenzen innerhalb von $\mathcal{W}$	32
3.5	Die Geometrie von verschränkten Zuständen	35
3.6	Partielle Transposition von bipartiten Qutrits	38
3.7	Entanglement Witness	40
4	Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qubits	43
4.1	Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qubits mit vier orthogonalen Bellzuständen	43
4.2	Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qubits mit drei orthogonalen Bellzuständen	45
5	Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qutrits mit vier orthogonalen Bellzuständen	49
5.1	Erster Schnitt	50
5.2	Zweiter Schnitt	51
5.3	Dritter Schnitt	52
6	Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qutrits mit fünf orthogonalen Bellzuständen	55
6.1	Erster Schnitt	57
6.2	Zweiter Schnitt	58
6.3	Dritter Schnitt	59
6.4	Vierter Schnitt	60
6.5	Fünfter Schnitt	61
6.6	Sechster Schnitt	62
7	Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qutrits mit sechs orthogonalen Bellzuständen	65
7.1	Erster Schnitt	66
7.2	Zweiter Schnitt	67
8	Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qutrits mit acht orthogonalen Bellzuständen	69
8.1	Erster Schnitt	71
8.2	Zweiter Schnitt	72
8.3	Dritter Schnitt	73

INHALTSVERZEICHNIS

Literaturverzeichnis	75
Curriculum vitae	78
Zusammenfassung / Abstract	79

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel 1

Einleitung

In der Quanteninformation betrachten wir zusammengesetzte Systeme, die in der Summe ihrer Teile mehr sind als in der Betrachtung der einzelnen Teile, die sogenannte Verschränkung. In dieser Diplomarbeit untersuche ich auf geometrischem Weg verschränkte und separable Hyperflächen innerhalb des Simplex, mit Hilfe verschiedener Schnitte mit unterschiedlicher Anzahl und Gewichtung von Belltypischen Zuständen in drei und acht Dimensionen. Nun müssen wir herausfinden, wann ein Zustand verschränkt ist und wann er nicht verschränkt ist, d.h. wann er separabel ist. Diese Charakterisierung ist nicht einfach und es gibt verschiedene Wege um die Separabilität zu untersuchen.

Anfangs geben wir einen Überblick über benötigte mathematische und quanteninformatische Grundlagen. Wir beschäftigen uns mit der Frage, was Verschränkung ist, welche Kriterien existieren um sie zu detektieren, welche Verschränkungsmaße uns zur Verfügung stehen, wie zum Beispiel die Entanglement of Formation, die Concurrence, die Entanglement Cost und die Entanglement of Distillation. Außerdem betrachten wir den Entanglement witness. Wir benützen Tangentialfunktionale auf der Menge der separablen Zustände als Entanglement Witness um eine allgemeine Bellungleichung zu definieren. Die Operatoren sind Vektoren im Hilbertraum H_S mit Hilbert-Schmidt Norm. Wir werden sehen, dass die Euklidische Distanz der verschränkten Zustände zu den separablen Zuständen gleich ist, wie die maximale Verletzung der allgemeinen Bellungleichung mit dem Tangentialfunktional als Entanglement Witness.

Geometrische Methoden zur Untersuchungen des sogenannten magischen Simplex $\mathcal{W}$ sind mächtige Werkzeuge zum Studium der Separabilität. In Kapitel drei werden die im weiteren benötigten geometrische Begriffe und Techniken eingeführt. Beginnend mit dem magischen Simplex als 8-dimensionaler Euklidischer Raum, betrachten wir anschließend dem klassischen Phasenraum und dessen affine Transformationen. Die für die Verschränktheit bzw. Separabilität entscheidenden Teilmengen von $\mathcal{W}$ sind das Umhüllende Polytop bzw. das Kern Polytop. Zustände ausserhalb

des Umhüllenden Polytop sind stets verschränkt, die innerhalb des Kern Polytops stets separabel. Nach der Beschreibung beider Polytope folgt eine Reparametrisierung des Kern Polytops als Darstellung via Linearkombinationen von Projektionsoperatoren. Auf dieser Darstellung beruht das Mathematica-Programm mit dessen Hilfe die Graphiken der folgenden Kapitel erstellt wurden. Das Peres Kriterium zur Begrenzung der Separabilität benötigt den Begriff der partiellen Transposition. Dies wird ebenfalls behandelt. Zuletzt gehen wir noch kurz auf die Menge der Entanglement Witness ein. Die Teilmenge der tangentiellen Witness liefert die genaue Grenze von SEP. Die Berechnung aller tangentiellen Witness lässt sich auf (leider aufwendige) Eigenwertberechnungen einer 3×3 - Matrix M_ϕ herunterbrechen.

Die nächsten Kapitel widmen wir der Betrachtung und konkreten Berechnung aller Schnitte durch den Simplex für bipartite Qubits und biparte Qutrits mit einer unterschiedlichen Anzahl von Belltypischen Zuständen, die wir gleichgewichten oder auch unterschiedlich gewichten, wobei wir durch die hohe Symmetrie Wege finden sie zu dezimieren. Das Ergebnis aufgrund der Berechnung ist schließlich für bipartite Qubits mit vier orthogonalen Bellzuständen nach Betrachtung der Phasenraumtransformationen ein Schnitt, der alle möglichen Schnitte in dieser Dimension und der Anzahl der Belltypischen Zustände repräsentiert. Für Bipartite Qubits mit drei orthogonalen Bellzuständen findet man ebenso einen Schnitt. Bei Betrachtung von bipartiten Qutrits mit vier orthogonalen Belltypischen Zuständen detektieren wir drei unterschiedliche Schnitte.

In Kapitel sechs untersuchen wir bipartite Qutrits mit fünf orthogonalen Belltypischen Zuständen, wobei wir die Anzahl der möglichen Schnitten auf zwei Äquivalenzklassen zu je drei Schnitten reduzieren können. Danach beleuchten wir bipartite Qutrits mit sechs orthogonalen Bellzuständen, wobei wir lediglich zwei verschiedene Schnitte finden. Im letzte Kapitel untersuchen wir bipartite Qutrits mit acht orthogonalen Bellzuständen, wobei wir die möglichen 70 Schnitte auf schlußendlich drei reduzieren können.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel wiederholen wir die in der Diplomarbeit benötigten mathematischen und quanteninformatischen Grundlagen (siehe auch Ref. [19],[20]).

2.1 Mathematische Grundlagen

Wir betrachten einen endlichdimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ auf dem ein Skalarprodukt definiert ist.

$$\langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger \cdot B) \quad (2.1)$$

welches die Norm

$$\| A \| = \sqrt{\langle A|A \rangle} \quad (2.2)$$

induziert.

Wir benützen die Dirac-Schreibweise. Das bedeutet wir verwenden für den Zustandsvektor ψ im Hilbertraum die ket-Schreibweise $|\psi\rangle$ und für die duale Abbildung verwenden wir die Bra-Schreibweise $\langle\psi|$.

Das Qubit ist das quantenmechanische Gegenstück zum klassischen Bit, aber es besteht ein großer Unterschied zwischen den Beiden. Ein klassischer Bit kann die Werte 0 und 1 annehmen, während ein Qubit eine unendliche Menge von Information in der Superposition von $|0\rangle$ und $|1\rangle$ speichern kann.

Der Zustand eines Qubits wird mit Hilfe eines Zustandvektors $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ beschrieben.

Sie werden aus einer komplexen Superposition der Werte 0 und 1 gebildet

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (2.3)$$

mit der Normierung $|a|^2 + |b|^2 = 1$ und der Orthonormalbasis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Die Observablen A sind hermitesche Matrizen und die Zustände w sind Dichtematrizen. $\mathcal{H}_S = \mathbb{R}^{N^2}$ mit Skalarprodukt

$$\langle w|A\rangle = \text{Tr } wA \quad (2.4)$$

und Norm $\|A\|_2 = (\text{Tr } A^2)^{1/2}$.

Wir führen nun einen isotropischen Zustand $\rho_\alpha^{(d)}$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}^d \otimes \mathcal{H}^d$ ein (siehe Ref. [16], [20], [21])

$$\rho_\alpha^{(d)} = \alpha |\phi_+^d\rangle\langle\phi_+^d| + \frac{1-\alpha}{d^2} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \alpha \in \mathbb{R}, -\frac{1}{d^2-1} \leq \alpha \leq 1. \quad (2.5)$$

Hier ist d die Dimension des Hilbertraumes $\mathcal{H}^d \otimes \mathcal{H}^d$, α ist durch die Positivität des Zustandes bestimmt.

Der Zustand $|\phi_+^d\rangle$ ist maximal verschränkt und gegeben durch

$$|\phi_+^d\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle \otimes |i\rangle, \quad (2.6)$$

wo $\{|i\rangle\}$ eine Basis in $\mathcal{H}^d$ ist.

Der Zustand wird isotrop genannt, weil er unter jeder $U \otimes U^*$ Transformation invariant ist (U ist der unitäre Operator und U^* ist sein komplex konjugiertes.)

$$(U \otimes U^*) \rho_\alpha^{(d)} (U \otimes U^*)^\dagger = \rho_\alpha. \quad (2.7)$$

Der isotropische Zustand (2.5) hat die folgenden Eigenschaften:

$$-\frac{1}{d^2-1} \leq \alpha \leq \frac{1}{d+1} \Rightarrow \rho_\alpha^{(d)} \text{ separabel}, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{d+1} < \alpha \leq 1 \Rightarrow \rho_\alpha^{(d)} \text{ verschränkt}.$$

Jeder Qubitzustand ω aus $\mathcal{H}^2$ kann in die Paulimatrizen

$$\omega = \frac{1}{2} (\mathbb{I}_2 + n_i \sigma^i) \quad (2.9)$$

mit den Blochvektorkomponenten $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ und $\sum_{i=1}^3 n_i^2 = |\vec{n}|^2$ zerlegt werden. Für $|\vec{n}|^2 < 1$ ist der Zustand gemischt, das ist gleichbedeutend mit $\text{Tr} \omega^2 < 1$ und für $|\vec{n}|^2 = 1$ ist der Zustand rein, was bedeutet, dass $\text{Tr} \omega^2 = 1$ ist.

Zustände die man im 3×3 -dimensionalen findet, werden Qutrits genannt. Die Beschreibung der Qutrits ist ähnlich dem der Qubits. Ein Qutritzustand ω aus $\mathcal{H}^3$ kann in der Matrixbasis $\{\mathbb{I}, \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^8\}$ mit einer passenden Menge $\{n_i\}$

$$\omega = \frac{1}{3}(\mathbb{I}_2 + \sqrt{3}n_i\lambda^i), \quad (2.10)$$

und mit den Blochvektorkomponenten $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ und $\sum_{i=1}^3 n_i^2 = |\vec{n}|^2$ ausgedrückt werden. Der Faktor $\sqrt{3}$ ist für eine passende Normierung notwendig und die λ^i sind die acht Gellmannmatrizen (siehe unten). Dies kann man beliebig in höheren Dimensionen verallgemeinern zu sogenannten Qudits (siehe auch [4], [8], [15],[16]).

2.2 Bipartite Qubits

Wir betrachten zwei Quantensysteme A und B mit den dazugehörigen Hilberträumen $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$. Um ein zusammengesetztes Quantensystem zu erhalten, bildet man einfach das Tensorprodukt ihrer Hilberträume.

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (2.11)$$

Die Dimension des Produktraumes ist einfach das Produkt der einzelnen Räume

$$\dim(\mathcal{H}_{AB}) = \dim(\mathcal{H}_A) \cdot \dim(\mathcal{H}_B) \quad (2.12)$$

Im Allgemeinen werden die Operationen auf den Teilräumen $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$ den fiktiven Personen Alice und Bob zugeordnet.

Der einfachste Fall von zusammengesetzten Systemen ist der 2×2 -dimensionale Fall, sogenannte bipartite Qubits. Diese Quantensysteme bestehen aus 2 linear unabhängigen Zuständen auf dem Hilbertraum.

Um ein 2-Qubit System zu beschreiben, benötigen wir einen 4-dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_{AB} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ mit der Orthonormalbasis

$$|0^A\rangle \otimes |0^B\rangle, |0^A\rangle \otimes |1^B\rangle, |1^A\rangle \otimes |0^B\rangle, |1^A\rangle \otimes |1^B\rangle.$$

Zur Vereinfachung lassen wir die Indizes A und B und auch das Tensorprodukt $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ weg.

Wie oben schon beschrieben benötigen wir die Paulimatrizen um einen Quantenzustand zu beschreiben (siehe auch Ref. [27]):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ bilden zusammen mit der Einheitsmatrix eine komplette Basis innerhalb des Hilbertraumes (siehe auch Ref. [22], [24]).

Mit (2.9) können wir jede Dichtematrix eines Zweiqubitzustandes ρ auf $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$ in einer Basis von 4×4 Matrizen schreiben. Man bildet das Tensorprodukt der Einheitsmatrix $\mathbb{I}$ mit den Paulimatrizen σ^i

$$\rho = \frac{1}{4}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + a_i \sigma^i \otimes \mathbb{I} + b_i \mathbb{I} \otimes \sigma^i + c_{ij} \sigma^i \otimes \sigma^j) \quad (2.14)$$

mit $a_i, b_i, c_{ij} \in \mathbb{R}$.

Ein Produktzustand $\omega \otimes \rho$ hat die Form

$$\omega \otimes \rho = \frac{1}{4}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + n_i \sigma^i \otimes \mathbb{I} + m_i \mathbb{I} \otimes \sigma^i + n_i m_j \sigma^i \otimes \sigma^j) \quad (2.15)$$

mit $n_i, m_i \in \mathbb{R}, |\vec{n}| \leq 1, |\vec{m}| \leq 1$.

Jeder separable Zustand kann als Konvexkombination von Gleichung (2.15) geschrieben werden:

$$\rho_{sep} = \sum_k p_k \frac{1}{4}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + n_i^k \sigma^i \otimes \mathbb{I} + m_i^k \mathbb{I} \otimes \sigma^i + n_i^k m_j^k \sigma^i \otimes \sigma^j) \quad (2.16)$$

mit $n_i^k, m_i^k \in \mathbb{R}, |\vec{n}^k| \leq 1, |\vec{m}^k| \leq 1$.

Eine Basis in $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$ ist die Bellbasis, welche aus vier orthonormalen maximal verschränkten reinen Zuständen (siehe (2.6)) besteht, die die Bellzustände genannt werden

$$\begin{aligned} |\Psi \pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle), \\ |\Phi \pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle). \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.3 Bipartite Qutrits

Wie vorher schon beschrieben brauchen wir Gellmanmatrizen, da sie eine mögliche Basis für 3×3 -dimensionale hermitesche Matrizen bilden:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sie haben die Eigenschaften $\text{Tr} \lambda^i = 0$ und $\text{Tr} \lambda^i \lambda^j = 2\delta^{ij}$. Mit (2.11) kann ein Zweiqutritzustand auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}^3 \otimes \mathcal{H}^3$ in einer Basis von 9×9 Matrizen beschrieben werden, welche aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}$ und den acht Gellmannmatrizen λ^i bestehen

$$\rho = \frac{1}{9}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + a_i \lambda^i \otimes \mathbb{I} + b_i \mathbb{I} \otimes \lambda^i + c_{ij} \lambda^i \otimes \lambda^j), \text{ mit } a_i, b_i, c_{ij} \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

Aufgrund der selben Argumentation wie für Qubits kann jeder separable Zweiqutritzustand als konvexe Kombination von Produktzuständen

$$\rho_{sep} = \sum_k p_k \frac{1}{9}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sqrt{3} n_i^k \lambda^i \otimes \mathbb{I} + \sqrt{3} m_i^k \mathbb{I} \otimes \lambda^i + 3 n_i^k m_j^k \lambda^i \otimes \lambda^j) \quad (2.20)$$

geschrieben werden.

Sie können für beliebig höhere Dimensionen verallgemeinert werden.

Eine weitere nützliche Basis für 3×3 -dimensionale Matrizen ist die Weyloperatortorbasis (siehe auch Ref. [22]).

Definition:

$$W_{k,l}|s\rangle = \omega^{k(s-l)}|s-l\rangle \quad (2.21)$$

mit $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Die Indizes k und l laufen von 0 bis 2.

Sie gehorchen den Weylrelationen:

$$\begin{aligned} W_{j,l} W_{k,m} &= \omega^{kl} W_{j+k, l+m} \\ W_{k,l}^\dagger &= W_{k,l}^{-1} = \omega^{kl} W_{-k, -l} \\ W_{0,0} &= \mathbb{I} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Für 2×2 -dimensionale Matrizen reduziert sich diese Basis auf die Paulimatrizen. Die Weyloperatoren kann man auch für höhere Dimensionen verwenden. In unserem Fall sehen sie explizit so aus:

$$W_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$W_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}, \quad W_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_{2,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}, \quad W_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4 Verschränkung

Albert Einstein, Boris Podolski und Nathan Rosen formulierten 1935 den EPR-Effekt, nach dem Quantenverschränkung zur Verletzung des klassischen Prinzips des lokalen Realismus führen würde, was von Einstein in einem berühmten Zitat als spukhafte Fernwirkung bezeichnet wurde. Angeregt durch die kurz zuvor erschienene Arbeit von Albert Einstein, Boris Podolski und Nathan Rosen (EPR) zu den Grundlagen der Quantenmechanik (Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon), prägte Schrödinger 1935 den Begriff der Verschränkung. Das Beispiel der Katze sollte zeigen, wie eine mikroskopische quantenmechanische Superposition prinzipiell auf ein makroskopisches Objekt übertragen werden kann, indem die Zustände der beiden Objekte miteinander verschränkt werden (siehe auch Ref. [26], [29], [30], [31]).

Betrachten wir einen beliebigen Zustand $|\psi^{AB}\rangle \in \mathcal{H}^{AB}$ und wählen wir die Basis $|l^A\rangle$ von $\mathcal{H}^A$ und $|k^B\rangle$ von $\mathcal{H}^B$, so kann jeder Zustand von $\mathcal{H}^{AB}$ in der folgenden Form geschrieben werden

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{l,k} c_{l,k} |l^A\rangle \otimes |k^B\rangle \quad (2.24)$$

mit $c_{l,k} \in \mathbb{C}$ und der Normierung $\sum_{l,k} c_{l,k}^* c_{l,k} = 1$.

Ein bipartiter reiner Zustand $|\psi\rangle$ wird separabel genannt, dann und nur dann wenn es als ein einzelnes Tensorprodukt von Zuständen in den Teilsystemen A und B geschrieben werden kann:

$$|\psi^{AB}\rangle = |\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle \quad (2.25)$$

Alle anderen Zustände sind nicht separabel und werden verschränkt genannt (siehe Ref. [32]).

Ein separabler Zustand kann nur klassische Korrelationen beinhalten, wohingegen verschränkte Zustände EPR-Korrelationen beinhalten können. Ein Produktzustand

bleibt separabel unter lokalen Operationen und klassischer Kommunikation und ein Zustand ist dann und nur dann separabel, wenn er in der Form

$$\rho^{A,B} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (2.26)$$

mit $p_i \geq 0$ und $\sum p_i = 1$ geschrieben werden kann.

Die lineare Abbildung

$$\Lambda : A_1 \rightarrow A_2$$

bildet Operatoren vom Raum A_1 in den Raum A_2 ab. Λ wird positiv genannt, wenn positive Operatoren in positive Operatoren abgebildet werden,

$$\Lambda(A) \geq 0 \quad (2.27)$$

$$\forall A \geq 0.$$

Eine positive Abbildung Λ wird komplett positiv genannt, wenn die Abbildung

$$\Lambda \otimes \mathbb{I}_d : A_1 \otimes M_d \rightarrow A_2 \otimes M_d \quad (2.28)$$

immer noch eine positive Abbildung für alle $d = 2, 3, 4, \dots$; ist. $\mathbb{I}_d$ ist die Einheitsmatrix vom Matrizenraum M_d von allen $d \times d$ Matrizen (siehe auch Referenz [12], [33], [34]).

2.4.1 Spinbeispiele

Die folgenden Beispiele können in Referenz [7] nachgelesen werden. Beispiel 1: Gegeben sei ein Spin $\frac{1}{2}$.

Allgemein kann man eine Observable als

$$A = \alpha \mathbb{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.29)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ schreiben, weil jede komplexe 2×2 Matrix z.B. in Paulimatrizen und der Einheit zerlegt werden kann. A ist eine Dichtematrix genau dann, wenn $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\|\vec{a}\| \leq \frac{1}{2}$.

A ist ein reiner Zustand genau dann, wenn $\|\vec{a}\| = \frac{1}{2}$ oder $A^2 = A$. Wenn der Zustand gleich

$$w = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{w} \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.30)$$

ist, ist der Erwartungswert von A gleich

$$\langle w|A \rangle = \alpha + \vec{a} \cdot \vec{w} \quad (2.31)$$

Wir betrachten den Hilbertraum $H = H_A \otimes H_B$. Die Menge S der separablen Zustände ρ_A^i, ρ_B^j ist definiert durch:

$$S = \{\rho = \sum_{i,j} c_{ij} \rho_A^i \otimes \rho_B^j | 0 \leq c_{ij} \leq 1, \sum_{i,j} c_{ij} = 1\} \quad (2.32)$$

Beispiel 2: Gegeben seien 2 Spins $\vec{\sigma}_A$ und $\vec{\sigma}_B$ (Alice und Bob).

Die Observable A kann mit Hilfe der Paulimatrizen folgendermaßen geschrieben werden:

$$A = \alpha \mathbb{I} + a_i \sigma_A^i \otimes \mathbb{I}_B + b_i \mathbb{I}_A \otimes \sigma_B^i + c_{ij} \sigma_A^i \otimes \sigma_B^j \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{4} \|A\|_2^2 = \alpha^2 + \sum_i (a_i^2 + b_i^2) + \sum_{i,j} c_{ij}^2 \quad (2.34)$$

c_{ij} kann diagonalisiert werden mit 2 unabhängigen orthogonalen Transformationen auf σ_A^i und σ_B^j .

A ist nach (2.27) Dichtematrix wenn $\alpha = \frac{1}{4}$ und die Operatornorm $\|A\|_\infty$ von $\|A - \frac{1}{4} \mathbb{I}\|_\infty \leq \frac{1}{4}$. Weil $\|A\|_2 \geq \|A\|_\infty$ genügt das wenn

$$\sum_i (a_i^2 + b_i^2) + \sum_{i,j} c_{ij}^2 \leq \frac{1}{16}. \quad (2.35)$$

Für reine Zustände $\|A\|_2 = \|A\|_\infty$ und $\|\rho\|_2 = 1$ ist es notwendig und hinreichend für Reinheit. Ein reiner separabler Zustand hat die Form

$$\rho = \frac{1}{4} (\mathbb{I} + n_i \sigma_A^i \otimes \mathbb{I}_B + m_i \mathbb{I}_A \otimes \sigma_B^i + n_i m_j \sigma_A^i \otimes \sigma_B^j)$$

mit $\vec{n}^2 = \vec{m}^2 = 1$.

Erwartungswert von A :

$$\langle \rho | A \rangle = \alpha + \vec{n} \cdot \vec{a} + \vec{m} \cdot \vec{b} + n_i m_j c_{ij}. \quad (2.36)$$

2.5 Geometrie von separablen Zuständen

Wie sieht die geometrische Struktur der Menge S von separablen Zuständen aus? Eigenschaften von S nach Ref. [3]:

- 1) Die Dimensionen von S und S^c sind $N^2 - 1$, d.h. sie liegen dicht im Raum.
- 2) Reine separable Zustände liegen auf der Grenze ∂S und eine Konvexkombination von 2 reinen separablen Zuständen liegen wieder auf ∂S . Klarerweise liegt die

Konvexkombination von 2 reinen Zuständen (für $N > 2$) auf der Grenze vom Zustandsraum, weil es in jeder Umgebung kein positives Funktional gibt. Hier haben wir in jeder Umgebung verschränkte Zustände.

3) Wenn eine Mischung $\rho = \sum_{i=1,\dots,n} \mu_i \rho_i$ auf ∂S liegt, dann gibt es eine Fläche, z.B. $\bar{\rho} = \sum_{i=1,\dots,n} \bar{\mu}_i \rho_i$ und $\in S$ für alle $\bar{\mu}_i \geq 0, \sum_{i=1,\dots,n} \bar{\mu}_i = 1$.

Wenn ∂S einen n -dimensionalen flachen Teil hat, so sind die Mischungen von n reinen Zuständen $\in \partial S$. Punkt drei sagt aus, dass die Umkehrung auch stimmt, d.h. die Dekomposition der ρ_i s spannen eine Fläche auf.

4) Wenn $H_A = H_B (= \mathbb{C}^{\sqrt{N}})$ dann folgt daraus, dass die ∂S mindestens eine n -dimensionale Fläche hat.

5) S ist invariant unter $T_A \otimes \mathbb{I}_B$ mit T_A ist die positive Abbildung $B(H_A) \rightarrow B(H_A)$.

Das Tensorprodukt von 2 positiven Abbildungen ist nicht notwendigerweise positiv, außer man verwendet separable Zustände.

2.6 Verschränkungsmaße

Das Entropiemaß ist geeignet um reine Zustände auf dem endlichdimensionalen Hilbertraum zu berechnen. Genauer ist es die von Neumannentropie der reduzierten Dichtematrizen (siehe auch Ref. [28]). Es gibt eine Vielzahl von unterschiedlichen Maßen, um die Verschränkung von Zuständen zu detektieren. Sie unterscheiden sich in der Annahme und der Anzahl der Eigenschaften. Wie wichtig sind die einzelnen Eigenschaften?

- Die Menge der Verschränkung in einem Quantenzustand darf nicht unter LOCC ansteigen, da auch verschränkte Zustände nicht von lokalen Operationen und klassischer Kommunikation erzeugt werden können.

Monotonie unter LOCC:

$$E(\rho) \geq E(\Lambda_{LOCC}(\rho))$$

- Ein Maß soll für separable Zustände keine Verschränkung ergeben.

$$\rho \text{ ist separabel} \Leftrightarrow E(\rho) = 0$$

Diese zwei Axiome sind essentiell und notwendig für ein Verschränkungsmaß, darüberhinaus gibt es noch einige nützliche Eigenschaften die zu verlangen Sinn macht.

- Eine nützliche Eigenschaft ist die Normiertheit:

$$0 \leq E(\rho) \leq \log d,$$

wobei d die Dimension des Hilbertraumes ist. In den meisten Fällen, in denen wir

einen endlichen Hilbertraum betrachten, ist $0 \leq E(\rho) \leq 1$.

- Jedes Verschränkungsmaß soll kontinuierlich auf dem Hilbertraum der Zustände sein, so dass für eine kleine Änderung der Zustände nur eine kleine Änderung des Wertes der Verschränkung stattfindet.

Kontinuität:

$$\|\rho_1 - \rho_2\| \rightarrow 0 \Rightarrow E(\rho_1) - E(\rho_2) \rightarrow 0$$

- Die Verschränkung von jeder Konvexkombination von 2 Zuständen soll nicht größer werden als die konvexe Summe von den einzelnen Verschränkungen.

Konvexität:

$$E(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2) \leq \lambda E(\rho_1) + (1-\lambda)E(\rho_2) \text{ für } 0 < \lambda < 1.$$

Das bedeutet, dass unter Mischung die Verschränkung weniger wird und dass maximal verschränkte Zustände rein sein müssen.

- Wenn man zwei Zustände getrennt betrachtet, sollen sie immer die gleiche Verschränkung haben, wie wenn man sie zusammen betrachtet.

Additivität:

$$E(\rho_1 \otimes \rho_2) = E(\rho_1) + E(\rho_2)$$

- Unitäre Operationen können als Basiswechsel angesehen werden, d.h. es ist eine sinnvolle Forderung, dass die Verschränkung nicht von der Wahl der Basis abhängen soll. Der Zustandsraum zerlegt sich in Äquivalenzklassen von Zuständen mit der gleichen Verschränkung. Alle reinen separablen Zustände sind in der gleichen Äquivalenzklasse.

Invarianz unter lokalen unitären Operationen:

$$E(\rho) = E(U_1 \otimes U_2 \rho U_1^\dagger \otimes U_2^\dagger)$$

- Ein Maß soll seinen maximalen Wert für maximal verschränkte Zustände ergeben und nur für maximal verschränkte Zustände.

ρ ist maximal verschränkt $\Leftrightarrow E(\rho) = \max E(\omega)$, wenn das Maximum über alle Zustände ω genommen wird.

Nun gibt es Verschränkungsmaße, die einige der Eigenschaften erfüllen, und andere nicht. Deshalb haben wir eine Vielzahl von Verschränkungsmaßen. Weiterführende Betrachtungen findet man in Referenz [5] und [6].

2.6.1 Allgemeine Bellungleichungen

Verschränkte Zustände können zu einer Verletzung der Bellungleichungen führen (siehe Ref. [7], [37]). Bellungleichungen müssen für alle lokal realistischen Theorien

erfüllt sein, daher kann eine Verletzung ein Hinweis darauf sein, dass die Quantenmechanik nicht lokal realistisch ist (siehe auch Ref. [25]). Wir haben schon die Entropie als Verschränkungsmaß kennengelernt und wollen nun als Maß für Separabilität die Hilbert-Schmidt Distanz von Operatoren betrachten. Der interessierte Leser findet auch Interessantes in Referenz [3], [4] und [10]. Wir besprechen die Bellungleichungen in dem Sinn, in dem sie in der Ref. [7] benannt worden sind. Im Allgemeinen sind sie anders definiert (siehe Ref. [5], [6], [10]). Wir betrachten die Hilbert-Schmidt Distanz D eines Zustandes zu der Menge der separablen Zustände. Wir wollen zeigen, dass wenn $w \in B(H_A \otimes H_B)$ Entanglement Witness ist, die maximale Verletzung B der zugehörigen allgemeinen Bellungleichung numerisch gleich der Distanz D ist.

Wir führen ein neues Verschränkungsmaß D ein. Die Hilbert-Schmidt Distanz $D(w)$ ist die Distanz von einem Zustand w zu einem Zustand aus der Menge S der separablen Zustände

$$D(w) = \min_{\rho \in S} \|\rho - w\|_2. \quad (2.37)$$

Dann folgt

$$\|\rho - w\|_2^2 = \text{Tr}(\rho^2 + w^2 - 2\sqrt{\rho}w\sqrt{\rho}) \quad (2.38)$$

$$\leq \text{Tr}(\rho^2 + w^2) \leq 2 \quad (2.39)$$

oder

$$0 \leq D(w) \leq \sqrt{2} \quad (2.40)$$

Diese Bellungleichung ist gegeben von der Observablen $A \not\geq 0$ für die gilt:

$$\langle \rho | A \rangle \geq 0 \quad (2.41)$$

$$\forall \rho \in S.$$

Außerdem $\exists w$, so daß,

$$\langle w | A \rangle < 0 \quad (2.42)$$

für einige $w \in S^c$.

Diese Elemente $A \in A_w$ heißen Entanglement Witness. Der Operator $A \in A_t$ wird ein Tangentialfunktional, wenn $\exists \rho_0 \in S$, so daß

$$\langle \rho_0 | A \rangle = 0. \quad (2.43)$$

Weil S ein konvexer Unterraum vom Zustandsraum ist, existieren die Tangentialfunktionale immer. Auch die Menge S wird von den Tangentialfunktionalen charakterisiert. Die ρ_0 mit $\langle \rho_0 | A \rangle = 0$ für einige $A \in A_t$ sind die Grenzen ∂S von S .

Die allgemeine Bellungleichung ist durch einen verschränkten Zustand w verletzt und wir bekommen die folgende Ungleichung für einige $A \in A_w$:

$$\langle \rho | A \rangle > \langle w | A \rangle \quad (2.44)$$

für alle $\rho \in S$. Betrachten wir nun die maximale Verletzung der allgemeinen Bellungleichung

$$B(w) = \max_{\|A-\alpha\|_2 \leq 1} \{ \min_{\rho \in S} \langle \rho | A \rangle - \langle w | A \rangle \}. \quad (2.45)$$

Resultat:

Satz:

1) Die maximale Verletzung der allgemeinen Bellungleichung ist gleich der Distanz von w zu der Menge S ,

$$B(w) = D(w)$$

für alle w .

2) Das Minimum von D erhält man für einige ρ_0 und das Maximum von B für

$$A_{\max} = \frac{\rho_0 - w - \langle \rho_0 | \rho_0 - w \rangle \mathbb{I}}{\| \rho_0 - w \|_2}$$

für $A_{\max} \in A_t$.

3) Für $B = D$ erhält man das folgende zweiseitige Variationsprinzip

$$\min_{\rho \in S} \langle \rho - w | \frac{\rho' - w}{\| \rho' - w \|_2} \rangle \leq B(w) \leq \| \rho' - w \|_2$$

für alle $\rho' \in S$.

Bemerkung:

Wir benützen die geometrischen Eigenschaften der Euklidischen Distanz in H_S . Wir betrachten einen Spin $\frac{1}{2}$, wo die Menge der separablen Zustände S durch S_Z ersetzt wird.

$$S_Z = \{ \rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \lambda \sigma_z), | \lambda | \leq 1 \} \quad (2.46)$$

und

$$w = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{w} \cdot \vec{\sigma}), \| w \|_2 \leq 1 \quad (2.47)$$

wird als verschränkter Zustand betrachtet, wenn w_x oder $w_y \neq 0$.

Die Observable A mit $\| A \|_2 = 1$ ist von der Form

$$A = \frac{\alpha \mathbb{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{2}(\alpha^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.48)$$

und $a = \|\vec{a}\|, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$.

Für die Hilbert-Schmidt Distanz D , unser Verschränkungsmaß, berechnen wir

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \|\rho - w\|_2^2 &= \min_{\lambda} \frac{1}{4} \|\lambda \sigma_z - \vec{w} \vec{\sigma}\|_2^2 \\ &= \min_{\lambda} \frac{1}{2} ((\lambda - w_z)^2 + w_x^2 + w_y^2) \\ &= \frac{1}{2} (w_x^2 + w_y^2) \end{aligned}$$

für $\lambda = w_z$

$$\Rightarrow D(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_x^2 + w_y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Andererseits, finden wir für die maximale Verletzung der allgemeinen Bellungleichung

$$\begin{aligned} B(w) &= \max_{\vec{a}, \alpha} \left\{ \min_{\lambda} \frac{1}{2} \langle \lambda \sigma_z - \vec{w} \vec{\sigma} \mid \frac{\alpha \mathbb{I} + \vec{a} \vec{\sigma}}{\sqrt{2}(\alpha^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \rangle \right\} \\ &= \max_{\vec{a}, \alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|a_z| + \vec{w} \vec{a}}{(\alpha^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} (w_x^2 + w_y^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Hier ist die Observable

$$A_{\max} = - \frac{w_x \sigma_x + w_y \sigma_y}{\sqrt{2} (w_x^2 + w_y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

das Tangentialfunktional für alle $\rho \in S_Z, \partial S_Z = S_Z$. Die maximale Verletzung der allgemeinen Bellungleichung erhalten wir für $\min_{\rho \in S} : \frac{1}{2}(1 - \sigma_z)$ wenn $a_Z > 0$ und nicht für $\frac{1}{2}(1 + w_z \sigma_z)$ wie im Fall von $D(w)$. Das bedeutet, dass man für D nicht notwendigerweise das $\min_{\rho}$ für einen reinen Zustand erhält. Aber für B erhält man das Maximum. Folglich ist die Gleichung $B = D$ nicht trivial, weil die Extrema auf nichtzusammenhängenden Mengen betrachtet werden. Daraus folgt, dass das *minmax* größer sein kann als das *maxmin*.

2.6.2 Entanglement of Formation

Historisch gesehen waren Entanglement of Formation und Entanglement of Distillation die ersten Verschränkungsmaße.

Für allgemeine Zustände (rein und gemischt) kann man das Entropiemaß verallgemeinern zum Entanglement of Formation (siehe auch Ref. [38]). Man beginnt mit einem Maß für reine Zustände und dehnt sie mit Hilfe der Convex Roof auf gemischte Zustände aus:

$$E(\rho) = \inf \sum_i p_i E(\psi_i) \quad (2.49)$$

wobei $\sum_i p_i = 1$ und $p_i \geq 0$. Das Infimum wird über alle Ensembles $\{p_i, \psi_i\}$ genommen mit den Zerlegungen $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Das Maß E ist gleich dem Durchschnitt vom optimalen Ensemble, falls es existiert. Das erste Maß, dass auf diese Art gebildet wurde, war die Entanglement of Formation. Ein anderes Beispiel ist die Schmidtzahl.

1. Die Entanglement of Formation für einen reinen Zustand ρ_{rein} ist das Entropiemaß:

$$E_F(\rho_{rein}) = E_{vN}(\rho_{rein}) \quad (2.50)$$

2. Wir haben ein Ensemble von reinen Zuständen $\epsilon := \{p_i, \rho_{rein}^i\}$. Die p_i sind die Wahrscheinlichkeiten für die Zustände ρ_{rein}^i im Ensemble vorzukommen. Die Entanglement of Formation dieses Ensembles ist:

$$E_F(\epsilon) = \sum_i p_i E_F(\rho_{rein}^i) = \sum_i p_i E_{vN}(\rho_{rein}^i) \quad (2.51)$$

3. Die Entanglement of Formation von einem gemischten Zustand ρ ist das Minimum der Entanglement of Formation von allen möglichen Ensembles ϵ bezüglich ρ

$$E_F(\rho) = \min_{\epsilon} E_F(\epsilon) \quad (2.52)$$

Die Entanglement of Formation erfüllt alle gewünschten Eigenschaften bis auf die Additivität, die noch nicht gezeigt werden konnte.

Es ist schwierig Entanglement of Formation zu berechnen, weil es im Allgemeinen unmöglich ist, alle möglichen Ensembles von reinen Zuständen zu bestimmen, die den gemischten Zustand realisieren. Das heißt es gibt unendlich viele Zerlegungen von einem allgemein gemischten Zustand in ein Ensemble von reinen Zuständen. Man muss das Infimum über alle möglichen Zerlegungen nehmen. Das ist schwierig, gemessen an der Zahl.

Dazu machen wir ein Beispiel:

Wir betrachten einen gemischten Zustand ρ . Er sei ein maximal gemischter 2-Qubit Zustand $\rho = \frac{1}{2}1$. Er kann auf die folgenden 2 Arten präpariert werden.

1. Durch eine gleiche Mischung von 4 orthogonalen Produktzuständen. Die Entanglement of Formation ist in diesem Fall $E_F = 0$.

2. Durch eine gleichmäßigen Mischung der 4 Bellzustände. Alle Bellzustände haben das Entropiemaß 1 und treten mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ auf, daraus folgt $E_F = 1$.

2.6.3 Concurrence

Für den Fall von 2 Qubits kann man explizit mit Hilfe der neu eingeführten Funktion der Concurrence (siehe auch Ref. [39]) die Entanglement of Formation berechnen.

Für die 2-Qubit Zustände existiert somit eine operationale Methode um sie zu berechnen. Die Concurrence kann man auch selber als Maß betrachten.

Zuerst wollen wir eine Definitionen machen:

Definition: Die Spinflip-Operation gehorcht folgender Relation:

$$|\psi\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y |\psi\rangle^* \quad (2.53)$$

Die Definition heißt Spinflip, weil der Spin von $|0\rangle$ nach $|1\rangle$ flipt und vice versa: $\sigma_y|0\rangle = i|1\rangle$, $\sigma_y|1\rangle = -i|0\rangle$.

Die Spinflipoperation einer 2-Qubit Dichtematrix ρ ist von der Form

$$\rho \rightarrow \tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (2.54)$$

Satz:

Die Entanglement of Formation eines 2-Qubit Zustandes ρ ist eine Funktion der Concurrence C ,

$$E_F(\rho) = E_F(C(\rho)) = H\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \quad (2.55)$$

H ist die Shannonentropie $H(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$

Satz:

Die Concurrence C eines 2-Qubit Zustandes $|\psi\rangle$ ist

$$C(|\psi\rangle) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle| \quad (2.56)$$

Für einen allgemeinen 2-Qubit Zustand ρ ist

$$C(\rho) = \max\{0, \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4\}, \quad (2.57)$$

wo die μ_i die Wurzeln der Eigenwerte der Matrix $\rho \cdot \tilde{\rho}$ in absteigender Reihenfolge sind.

Die Concurrence kann zu höheren Dimensionen verallgemeinert werden.

$$C = \min_{\{p_i, |\psi\rangle\}} \sum_i \max_{\{u_i, V_i\}} |\langle \psi_i | (U_i \otimes V_i)^T S (U_i \otimes V_i) | \psi_i \rangle| \quad (2.58)$$

Das Minimum wird über alle Ensembles $\{p_i, |\psi\rangle\}$ die ρ realisieren genommen, und das Maximum wird über alle $U_i \in SU(d_1)$ und $V_i \in SU(d_2)$ genommen. Die zwei Subsysteme haben die Dimensionen $d_{1,2}$. Das S ist eine verallgemeinerte Form des Spinflip-Operators ($\sigma_y \otimes \sigma_y$) vom $2 \otimes 2$ -dimensionalen Fall.

$$S = (\sigma_y \oplus 0_{d_1-2}) \otimes (\sigma_y \oplus 0_{d_2-2}) \quad (2.59)$$

In den Referenzen [11], [12], [13] und [14] findet man gute Lower bounds.

2.6.4 Entanglement Cost und Entanglement of Distillation

Die Entanglement Cost $E_C(\rho)$ ist folgendermaßen definiert:

$$E_C(\rho) = \inf_{\{LOCC\}} \lim_{n_{\rho} \rightarrow \infty} \frac{m_{\rho}^{in}}{n_{\rho}^{out}} \quad (2.60)$$

Diese Formel beschreibt wie viele Kopien m^{in} von maximal verschränkten 2-Qubit-Zuständen $|\phi^+\rangle$ gebraucht werden um den Zustand ρ nur durch Anwendung von LOCC zu preparieren. Es kann gezeigt werden, dass die Entanglement Cost mit der Entanglement of Formation folgenderweise zusammenhängt:

$$E_C(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E_F(\rho^{\otimes n}) \quad (2.61)$$

$(\rho^{\otimes n})$ bedeutet das n -fache Tensorprodukt von ρ mit sich selbst.

Die Entanglement of Formation, die Concurrence und die Entanglement Cost reduzieren sich auf die Entropie of Entanglement für reine Zustände.

Alternativ kann man Verschränkungsmaße auch durch die Anzahl m^{out} von maximal verschränkten Zuständen $|\phi^+\rangle$ definieren, die durch LOCC destilliert werden können. Durch sogenannte Protokolle werden sie vom originalen Zustand ρ destilliert und bilden so die Entanglement of Distillation $E_D(\rho)$

$$E_D(\rho) = \sup_{\{LOCC\}} \lim_{n_{\rho} \rightarrow \infty} \frac{m_{\rho}^{out}}{n_{\rho}^{in}} \quad (2.62)$$

Ein Zustand kann nicht mehr Verschränkung beinhalten als man braucht um ihn herzustellen, noch kann er weniger Verschränkung beinhalten als man destillieren kann.

$$E_D \leq E \leq E_F \quad (2.63)$$

2.6.5 Beispiel

Wir wollen die Entanglement of Formation und die Concurrence für Werner Zustände ρ_α von 2 Qubits berechnen. Um die Concurrence berechnen zu können, müssen wir zuerst den spinflipped Werner-Zustand $\tilde{\rho}_\alpha$ berechnen. Dazu brauchen wir die Paulimatrizen (siehe (2.13))

Die Wernerzustände in Matrizenform sehen folgendermaßen aus:

$$\rho_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\alpha}{4} & \frac{-\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\alpha}{4} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen zuerst $(\sigma_y \otimes \sigma_y)$. So bekommen wir:

$$(\sigma_y \otimes \sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit der Gleichung für eine 2-Qubit Spinflipoperation (siehe (2.47)) erhalten wir:

$$\tilde{\rho}_\alpha = \rho_\alpha$$

Nun müssen wir die Wurzel aus den Eigenwerten von $\rho \cdot \tilde{\rho}$ berechnen:

$$R = \sqrt{\rho \cdot \tilde{\rho}} = \rho_\alpha$$

Die μ_i sind die Eigenwerte der Matrix R . Hier sind sie nichts anderes als die Eigenwerte von den Wernerzuständen.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1-\alpha}{4}, \lambda_4 = \frac{1+3\alpha}{4}$$

$$\lambda_4 \geq \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$$

Dann ist

$$\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{3\alpha - 1}{2}$$

So haben wir für die Concurrence:

$$C(\rho_\alpha) = 0$$

mit

$$-\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$$

Daraus folgt Separabilität. Für den restlichen Bereich von α ergibt die Concurrence:

$$C(\rho_\alpha) = \frac{3\alpha - 1}{2}$$

mit

$$\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$$

Für die Entanglement of Formation erhalten wir:

$$E_F(\rho_\alpha) = \frac{1}{4}((\sqrt{3 + 6p - 9p^2} - 2) \log_2 \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3 + 6p - 9p^2}) - \\ (2 - \sqrt{3 + 6p - 9p^2}) \log_2 \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3 + 6p - 9p^2}))$$

Wir sehen dass die Concurrence eine wesentlich einfachere Form hat als die Entanglement of Formation. Die Resultate kann man auch mit den Separabilitätskriterien überprüfen, wie zum Beispiel mit dem PPT-Kriterium.

Kapitel 3

Geometrie von bipartiten Qudits

3.1 Geometrie von bipartiten Qubits

Im Fall von einem System von zwei Qubits ist das PPT Kriterium notwendig und hinreichend um die Separabilität zu bestimmen. Deshalb ist es einfach herauszufinden, ob ein Zustand separabel ist (und somit undistillable), oder ob er verschränkt ist (somit auch distillable, da es in diesem Fall kein Bound Entanglement gibt). Siehe auch Ref. [1], [2], [5]. Wie in (2.14) können wir die Dichtematrix eines Zweiqubitsystems schreiben als

$$\rho = \frac{1}{4}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + a_i \sigma^i \otimes \mathbb{I} + b_i \mathbb{I} \otimes \sigma^i + c_{ij} \sigma^i \otimes \sigma^j) \quad (3.1)$$

Ein einzelner Qubitzustand kann durch einen Blochvektor ausgedrückt werden, d.h. der Zustand ist ein Punkt auf der dreidimensionalen Blochkugel. Jeder Produktzustand von zwei Qubits kann durch zwei eindeutige Blochvektoren ausgedrückt werden, z.B. $c_{ij} = a_i b_j$, die einen sechsdimensionalen Unterraum des 15-dimensionalen Zustandsraum aufspannen (Alle Produktzustände von zwei Qubits sind Punkte auf einer sechsdimensionalen Kugel.). Da der ganze 15-dimensionale Zustandsraum schwer vorstellbar ist, werden oft niedrigdimensionalere Schnitte betrachtet. Ein interessanter Schnitt ist der magische Simplex. Er ist ein Unterraum, der von vier orthogonalen maximal verschränkten Zuständen (z.B. die Bellzustände siehe (2.17)) aufgespannt wird. All diese Zustände haben maximal gemischte Unterräume, da die lokalen Komponenten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Blochvektordarstellung (3.1) gleich Null sind. Da die Matrix c_{ij} nicht diagonalisiert werden kann, haben die Zustände die Form

$$\rho = \frac{1}{4}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + c_i \sigma^i \otimes \sigma^i), \quad (3.2)$$

wo c_i die Elemente der Diagonalmatrix c_{ij} sind.

Die vier Bellzustände formen die Spitzen des magischen Simplex, welches die Form eines Tetraeders hat. Die Menge aller Matrizen, die dem PPT-Kriterium genügen,

formen einen anderen Tetraeder, welcher nicht komplett ausgefüllt ist mit Zuständen (Da es Matrizen gibt, die nicht positiv semidefinit sind, aber nach der partieller Transposition positiv semidefinit werden.). Die Überschneidung dieser zweier Tetraeder formt die Menge aller separablen Zustände, welches die Form eines Oktaeders hat. Der magische Simplex ist also ein Tetraeder, der ein Oktaeder einschließt. Die Spitzen des Tetraeders sind die maximal verschränkten Bellzustände (welche die einzig reinen Zustände im Simplex sind), und das Oktaeder wird durch die separablen Zustände gebildet. Der maximal gemischte Zustand liegt im Mittelpunkt des Oktaeders (siehe auch (3.23)).

3.2 Geometrie von bipartiten Qutrits

Wir wollen nun den Simplex $\mathcal{W}$ für bipartite Qutrits konstruieren (siehe Referenz [1], [2],[9],[13]). Dazu nehmen wir einen maximal verschränkten reinen Zustand $\Omega_{0,0}$, einen sogenannten Bell-Zustand. Da wir Qutrits betrachten, wählen wir die Basis $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$

$$\Omega_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{s=0}^2 |s\rangle \otimes |s\rangle \quad (3.3)$$

Wir betrachten den ersten Unterraum als Alices Subsystem, wo auch unsere Transformationen stattfinden. Darauf wenden wir die Weyloperatoren (wie in (2.23)) an, während der zweite Unterraum, Bobs Seite, unverändert bleibt. Um den kompletten Simplex zu erzeugen, brauchen wir nun die Weyloperatoren (wie in (3.10)), die wir auf den gewählten Bellzustand anwenden. Mit ihnen erzeugen wir die anderen 8 dazu orthogonalen Bellzustände

$$\Omega_{k,l} = W_{k,l} \otimes \mathbb{I}_3 \Omega_{0,0} \quad (3.4)$$

Die Indizes k und l laufen von 0 bis 2, wobei l die RaumKoordinate ist und wir den Index k als "quantisierten Impuls" ansehen können. So bekommen wir einen diskreten klassischen Phasenraum, der uns bei Symmetrieüberlegungen gute Dienste leistet. Jedem Punkt in diesem Phasenraum können wir einen Projektionsoperator $P_{k,l} = |\Omega_{k,l}\rangle\langle\Omega_{k,l}|$ zuordnen. Wir bekommen damit die neun Bellprojektoren, die wir benötigen um den Simplex zu erzeugen

$$\mathcal{W} = \left\{ \sum_{k,l} c_{k,l} P_{k,l} \mid c_{k,l} \geq 0, \sum_{k,l} c_{k,l} = 1 \right\}. \quad (3.5)$$

Diese $P_{k,l}$ sind reine Zustände, die sich in den Ecken des Simplex befinden. Sie sind die Dichtematrizen für die Belltypischen Zustände. Nun da wir alle neun Ecken unseres Simplex erzeugt haben, fehlt uns noch der innere Raum. Um nun den ganzen Raum ausfüllen zu können, mischen wir die reinen Zustände und bekommen unser komplettes magisches Simplex.

Das Simplex ist eine 8-dimensionale Hyperfläche, die in den 9-dimensionalen Euklidischen Raum eingebettet ist,

$$\{A = \sum_{k,l} a_{k,l} P_{k,l} \mid a_{k,l} \in \mathbb{R}\} \quad (3.6)$$

auf welchem die Distanz zwischen A und B durch

$$d(A, B) = \sqrt{\text{Tr}(A - B)^2}$$

definiert ist. Der Ursprung dieses Euklidischen Raums soll in $A = \frac{1}{d^2} \mathbb{I}_d$ liegen. Diese Festlegung induziert eine Hilbert-Schmidt Norm

$$d(A, \mathbb{I}) = \sqrt{A^2}.$$

Das Innere Produkt ist wie folgt definiert

$$\text{Tr}(AB) = \sum a_{k,l} b_{k,l}. \quad (3.7)$$

Die geometrische Symmetrie des Simplex ist wesentlich höher als die zugrundeliegende Symmetrie des Euklidischen Raumes. Die Symmetrie des Euklidischen Raumes findet sich auch im klassischen Phasenraum wieder.

Wir sehen uns nun an, wie die Menge der Zustände in $\mathcal{W}$ eingebettet sind. Es gibt nur lokal maximal gemischte Zustände in $\mathcal{W}$. Es gilt für Qutrits auch folgendes:

1. Es gibt lokal maximal gemischte Zustände, die nicht mit maximal verschränkten reinen Zuständen, den Belltypischen Zuständen, definiert in (2.17), diagonalisiert werden können.
2. Sogar wenn solch ein maximal gemischter Zustand in die orthogonalen Belltypischen Zustände (3.3) zerlegbar ist, muss er nicht äquivalent zu irgendeinem von den Zuständen in $\mathcal{W}$.
3. Es gibt maximal neun wechselseitig orthogonale Bellzustände, welche kein Äquivalent zu $\mathcal{W}$ bilden.

Satz *Jedes Paar von wechselseitig orthogonalen Bellzuständen kann in eine Version von $\mathcal{W}$ eingebettet werden. So ein Paar fixiert einen bestimmten dritten Bellzustand und mit einem vierten Zustand, der orthogonal zu den ersten drei ist, sind alle Elemente bekannt um $\mathcal{W}$ zu fixieren.*

Den Beweis für diesen Satz findet man in Ref [1].

3.3 Geometrie von bipartiten Qudits

Für bipartite Qudits (siehe auch Referenz[11]) wird der magische Simplex auf folgende Weise konstruiert:

Die Projektionsoperatoren $P_{i,j}$ des magischen Simplex sind maximal verschränkt in d Dimensionen

$$|\Phi^+\rangle := \sum_{i=0}^{d-1} |ii\rangle, P_{0,0} := |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| \quad (3.8)$$

$$P_{k,l} = \mathbb{I}_d \otimes W_{k,l} P_{0,0} \mathbb{I}_d \otimes W_{k,l}^\dagger \quad (3.9)$$

mit den Weyloperatoren definiert durch

Definition:

$$W_{k,l}|s\rangle = \omega^{k(s-l)}|s-l\rangle \quad (3.10)$$

mit $\omega = e^{\frac{2\pi i}{d}}$.

Der magische Simplex ist nun die konvexe Kombination aller Spitzen $P_{k,l}$ (3.8):

$$\mathcal{W} = \left\{ \sum_{k,l=0}^{d-1} c_{k,l} P_{k,l} \mid c_{k,l} \geq 0, \sum_{k,l=0}^{d-1} c_{k,l} = 1 \right\} \quad (3.11)$$

3.4 Symmetrien und Äquivalenzen innerhalb von $\mathcal{W}$

Wir betrachten lineare Operationen, die $\mathcal{W}$ auf sich selbst abbilden, und die Separabilität innerhalb von $\mathcal{W}$ nicht verändern. Solche Operationen werden von lokalen (anti-)unitären Transformationen des Hilbertraums $\mathcal{H}^A$ induziert. Eine solche Transformation von $\mathcal{W}$ kann man als Transformation des diskreten klassischen Phasenraums auffassen. Die Symmetriegruppe ist endlich und sie besteht aus unitären und/oder anti-unitären Operatoren.

Wie man sich aus Abbildung 3.1 leicht überlegen kann, gibt es genau zwölf verschiedene Linien im Phasenraum. Man erhält sie in Form von vier Bündeln von je drei parallelen Linien, indem man jede der Linien aus Abbildung 3.1 um einen und um zwei Phasenraumpunkte parallel verschiebt.

Dazu geht man wie folgt vor: Für jeden linearen Operator A , der auf Alice Seite wirkt, existiert ein Operator $\tilde{A}$, der auf Bobs Seite wirkt, sodass

$$A \otimes \mathbb{I} |\Omega_{0,0}\rangle = \mathbb{I} \otimes \tilde{A} |\Omega_{0,0}\rangle. \quad (3.12)$$

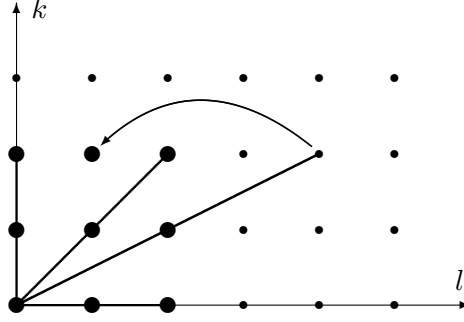


Abbildung 3.1: Der diskrete klassische Phasenraum. Von einem beliebigen Punkt (z.B. $P_{0,0}$) aus gibt es vier mögliche Richtungen eine Linie zu zeichnen und dazu Parallel jeweils zwei Linien. Insgesamt also 12.

Wenn man die Weyloperatoren auf Alices Seite anwendet, bekommt man die Phasenraumtranslation

$$\mathcal{T}_{m,n} : \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k + m \\ l + n \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Es gibt noch mehr lokal unitäre Transformationen, die $\mathcal{W}$ auf sich selbst abbilden, wie zum Beispiel $U_R \otimes U_R^*$ mit

$$U_R : |s\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_t \omega^{-st} |t\rangle. \quad (3.14)$$

Diese Transformation bewirkt eine Vierteldrehung des Phasenraums gegen den Uhrzeigersinn

$$\mathcal{R} : \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Als nächstes betrachten wir $U_V \otimes U_V^*$ mit

$$U_V : |s\rangle \mapsto \sum_{s=0}^2 \omega^{-s(s+2)/2} |s\rangle. \quad (3.16)$$

Dies führt zu einer vertikalen Scherung im Phasenraum

$$\mathcal{V} : \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k + l \\ l \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Wenn man die beiden vorhergehenden Transformationen kombiniert, erhält man die horizontale Scherung

$$\mathcal{H} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{V}^{-1}\mathcal{R} : \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k \\ l+k \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Nun wollen wir eine anti-unitäre Transformation des Hilbertraumes betrachten, die einen Austausch von Alice und Bob's Seite bewirkt

$$\mathcal{S} : \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -k \\ l \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Da sie auch symmetrisch sind in Kombination mit anderen Transformationen, ergibt uns das eine neue Art von Reflexion, wie zum Beispiel die horizontale Reflexion

$$\mathcal{R}\mathcal{S}\mathcal{R}^{-1} : \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k \\ -l \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

und die diagonale Reflexion

$$\mathcal{R}\mathcal{S} : \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

All diese Transformationen sind lineare oder affine Abbildungen im Phasenraum. Die Phasenraumlinien werden wieder auf Linien abgebildet, wenn man die Indizes modulo drei nimmt.

Satz *Die Gruppe der symmetrischen Transformationen von $\mathcal{W}$ ist gleich der Gruppe der affinen Transformationen des quasi-klassischen Phasenraums, welches durch die Indizes*

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j \\ r \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

geformt wird, wo $mq - pn \neq 0$ ist und alle Kalkulationen mit Modulo drei genommen werden. Für $mq - pn = 1$ ist die Transformation des Hilbertraumes unitär und für $mq - pn = -1$ ist sie antiunitär.

Den Beweis findet man in Ref. [1].

Die Gruppenstruktur der zusammengesetzten Transformationen kann in Matrixnotation beschrieben werden als:

$$\begin{pmatrix} k \\ l \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m & n & j \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Jede Linie des diskreten Phasenraums kann in jede andere Linie transformiert werden und in diesem Sinne sind sie äquivalent.

Satz *Für die Menge der Teilmengen von Phasenraumpunkten gilt folgendes: Es gibt genau eine Äquivalenzklasse von einzelnen Punkten, eine von Paaren, eine von Triplen und zwei von Quadrupeln. Für die Komplementärmengen gilt die Umkehrung: Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen von fünfelementigen Teilmengen, eine von sechs-, eine von sieben- und eine von achtelementigen Teilmengen.*

Den Beweis hierzu kann man in Ref. [1] nachlesen.

3.5 Die Geometrie von verschränkten Zuständen

Um die Separabilität im Simplex genauer zu analysieren, betrachten wir eine innere und eine äußere Begrenzung der Separabilität.

Weil $\Omega_{k,l}$ eine Orthonormalbasis formt, liegt im Zentrum von $\mathcal{W}$ der maximal gemischte separable Zustand mit der Dichtematrix

$$\omega = \frac{1}{9} \sum_{k,l} P_{k,l} = \frac{1}{9} \mathbb{I}. \quad (3.24)$$

Wie in Abschnitt 3.4 gezeigt gibt es genau zwölf Linien im Phasenraum. Es gilt nun der folgende

Satz. *Die zwölf am äussersten gelegenen separablen Zustände in $\mathcal{W}$ haben die Dichtematrizen*

$$\rho = \frac{1}{3} \sum_{(k,l) \in \text{Linie}} P_{k,l}. \quad (3.25)$$

Alle separablen Zustände von $\mathcal{W}$ werden von den folgenden neun Paaren von Hyperflächen umschlossen:

$$B_{p,q} = \{(c_{k,l}) \mid c_{p,q} = \frac{1}{3}\} \quad (3.26)$$

und

$$A_{p,q} = \{(c_{k,l}) \mid c_{p,q} = 0\}. \quad (3.27)$$

Sie definieren das **Umhüllende Polytop** auf folgende Weise

$$\text{EP} = \left\{ \sum_{k,l} c_{k,l} P_{k,l} \mid \frac{1}{3} \geq c_{k,l} \geq 0, \sum c_{k,l} = 1 \right\}. \quad (3.28)$$

Es hat neun Ecken wie das Simplex $\mathcal{W}$ und auch sonst dieselbe geometrische Struktur.

Für spätere Anwendungen empfiehlt es sich die zwölf Linien von Gleichung 3.25 im Phasenraum durchzunummerieren. Die im folgenden festgelegte Nummerierung behalten wir stets bei. Die Reihenfolge der Numerierung spielt für die davon abgeleiteten Ergebnisse keine Rolle. Eine Dichtematrix von der Form $\rho = \frac{1}{3} \sum_{(k,l) \in \text{Linie}} P_{k,l}$ zur Linie j wird mit ρ_j abgekürzt.

j	Linie
1	$\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$
2	$\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$
3	$\{(2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$
4	$\{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$
5	$\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$
6	$\{(0, 2), (1, 2), (2, 2)\}$
7	$\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$
8	$\{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$
9	$\{(0, 0), (1, 2), (2, 1)\}$
10	$\{(1, 0), (2, 2), (0, 1)\}$
11	$\{(0, 2), (1, 0), (2, 1)\}$
12	$\{(1, 2), (2, 0), (0, 1)\}$

Jede konvexe Kombination dieser am äussersten gelegenen separablen Zustände ρ_j ist wieder separabel. All diese konvexen Kombinationen zusammen bilden das **Kern Polytop**, welches definiert ist als

$$\text{KP} = \{\rho = \sum_{j=1}^{12} \gamma_j \rho_j \mid \gamma_j \geq 0, \sum_j \gamma_j = 1\}. \quad (3.29)$$

Die Frage nach der Separabilität ist also innerhalb des Kern Polytops beantwortet. Die Koeffizienten γ_j zu einem gegebenen $\rho = \sum_{j=1}^{12} \gamma_j \rho_j$ sind nicht eindeutig bestimmt, da $\{\rho_j, j = 1, \dots, 12\}$ linear abhängig ist.

Möchte man ein $\rho \in \text{KP}$ in die Darstellung $\rho = \sum_{k,l} c_{k,l} P_{k,l}$ bringen so muß man das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$D\gamma = c$$

lösen. Hierbei ist

$$D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{0,2} \\ c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{2,0} \\ c_{2,1} \\ c_{2,2} \end{pmatrix}$$

und $\gamma = {}^t(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{12})$.

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist bekanntlich $\gamma = \gamma' + v$, $v \in \ker(D)$, wobei γ' eine beliebige spezielle Lösung $D\gamma' = c$ ist. Es genügt also eine spezielle Lösung γ' und den Kern der linearen Abbildung D zu kennen. Eine kurze Rechnung ergibt für $\gamma' = {}^t(\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{12})$.

$$\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \gamma'_3 \\ \gamma'_4 \\ \gamma'_5 \\ \gamma'_6 \\ \gamma'_7 \\ \gamma'_8 \\ \gamma'_9 \\ \gamma'_{10} \\ \gamma'_{11} \\ \gamma'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_{0,1} + c_{0,2} - c_{1,1} + c_{1,2} - c_{2,1} + c_{2,2} \\ -c_{0,0} + c_{0,1} + c_{1,0} + 2c_{1,2} - c_{2,1} + c_{2,2} \\ -c_{0,0} + c_{0,1} - c_{1,1} + c_{1,2} + c_{2,0} + 2c_{2,2} \\ c_{0,0} - c_{0,2} + c_{1,0} - c_{1,2} + c_{2,0} - c_{2,2} \\ c_{0,1} - c_{0,2} + c_{1,1} - c_{1,2} + c_{2,1} - c_{2,2} \\ 0 \\ c_{0,0} - c_{0,1} + c_{1,1} - c_{1,2} - c_{2,0} + c_{2,2} \\ -c_{0,1} + c_{0,2} - c_{1,0} + c_{1,1} + c_{2,0} - c_{2,2} \\ c_{0,0} - c_{0,1} - c_{1,0} + c_{1,2} + c_{2,1} - c_{2,2} \\ 0 \\ -c_{0,1} + c_{0,2} + c_{1,0} - c_{1,2} - c_{2,0} + c_{2,1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

und

$$\ker(D) = \left\{ a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir können nun das gesamte Kern Polytop KP mit Hilfe der $c_{k,l}$ beschreiben. Dazu beachte man zunächst, das per Definition $\gamma_j \geq 0$, für alle $j = 1, \dots, 12$. Aus der

Darstellung $\gamma = \gamma' + v$ folgt dann nach obiger Rechnung, das

$$\begin{aligned}
 \gamma'_1 &\geq a_1 + a_2 + a_3 \\
 \gamma'_2 &\geq a_1 + a_2 + a_3 \\
 \gamma'_3 &\geq a_1 + a_2 + a_3 \\
 a_3 &\geq -\gamma'_4 \\
 a_3 &\geq -\gamma'_5 \\
 a_3 &\geq 0 \\
 a_1 &\geq -\gamma'_7 \\
 a_2 &\geq -\gamma'_8 \\
 a_2 &\geq -\gamma'_9 \\
 a_2 &\geq 0 \\
 a_1 &\geq -\gamma'_{11} \\
 a_1 &\geq 0
 \end{aligned}$$

wobei $\gamma'_i, i = 1, \dots, 12$ die Koeffizienten von γ' , wie in 3.30 berechnet, bezeichnen. Es ist aber $\rho = \sum_{k,l} c_{k,l} P_{k,l} \in \mathcal{W}$ genau dann in KP, wenn die $c_{k,l}$ all diese Ungleichungen erfüllen. Es folgt daher die für spätere Anwendungen sehr nützliche

Proposition *Das Kern Polytop ist gegeben durch*

$$\text{KP} = \left\{ \sum_{k,l} c_{k,l} P_{k,l} \left| \begin{array}{l} \min\{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\} \geq \max\{0, -\gamma'_7, -\gamma'_{11}\} \\ \phantom{\min\{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\} \geq} + \max\{0, -\gamma'_8, -\gamma'_9\} \\ \phantom{\min\{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\} \geq} + \max\{0, -\gamma'_4, -\gamma'_5\} \end{array} \right. \right\}. \quad (3.31)$$

3.6 Partielle Transposition von bipartiten Qutrits

Wir schreiben die Dichtematrizen in der Produktvektorbasis

$$|s-l, s\rangle = |s-l\rangle \otimes |s\rangle \quad (3.32)$$

und ordnen sie in Gruppen von drei an, abhängig von l . Danach ordnen wir innerhalb der Gruppen abhängig von s die Elemente an. Demnach kann der Hilbertraum als eine direkte Summe

$$\mathbb{C}_{l=0}^3 \oplus \mathbb{C}_{l=1}^3 \oplus \mathbb{C}_{l=2}^3 \quad (3.33)$$

angeschrieben werden.

Die Projektoren

$$P_{k,l} = \frac{1}{3} \sum_{s,t} \omega^{k(s-t)} |s-l, s\rangle \langle t-l, t| \quad (3.34)$$

mischen die Unterräume nicht. Eine allgemeine Matrix von $\mathcal{W}$ wird in die direkten Summen

$$\rho = \sum_{k,l} c_{k,l} P_{k,l} = \left(\sum_k c_{k,0} P_k \right) \oplus \left(\sum_k c_{k,1} P_k \right) \oplus \left(\sum_k c_{k,2} P_k \right) \quad (3.35)$$

aufgespalten mit den 3×3 Matrizen

$$P_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \omega^* & \omega \\ \omega & 1 & \omega^* \\ \omega^* & \omega & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^* \\ \omega^* & 1 & \omega \\ \omega & \omega^* & 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Partielle Transposition ist die lineare Abbildung von

$$|s-l, s\rangle\langle t-l, t| \mapsto |t-l, s\rangle\langle s-l, t| = |m-s, s\rangle\langle m-t, t| \quad (3.37)$$

mit

$$m = s + t - l.$$

Nun haben wir eine neue Anordnung der Basisvektoren $|m-s, s\rangle$, abhängig von m und damit auch eine neue Aufteilung des Hilbertraumes in

$$\mathbb{C}_{m=0}^3 \oplus \mathbb{C}_{m=1}^3 \oplus \mathbb{C}_{m=2}^3 \quad (3.38)$$

Das allgemeinste Element von $\mathcal{W}$ ist

$$\rho = A_{l=0} \oplus A_{l=1} \oplus A_{l=2} \quad (3.39)$$

mit

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} d & a^* & a \\ a & d & a^* \\ a^* & a & d \end{pmatrix} \quad d_l = \sum_k c_{k,l}, \quad a_l = \sum_k \omega^k c_{k,l}. \quad (3.40)$$

Partielle Transposition bildet eine Matrix ρ ab nach

$$B \oplus B \oplus B, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} d_0 & a_2 & a_1^* \\ a_2^* & d_1 & a_0 \\ a_1 & a_0^* & d_2 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

mit drei mal der gleichen Matrix B . Um die Positivität unter partieller Transposition zu berechnen reicht es lediglich die Positivität der Matrix B in dieser Dimension anzugeben.

Nun können wir mit Hilfe des Peres Kriteriums (siehe Ref. [17]) die Separabilität betrachten: Das Kriterium sagt aus, dass für die Separabilität, die Positivität unter partieller Transposition eine notwendige Bedingung ist. Hingegen impliziert die Nicht-Positivität unter Partieller Transposition Verschränkung.

PPT ist für Qutrits nicht hinreichend um Separabilität zu garantieren, da "bound Entanglement" auftreten kann. Um dies zu detektieren brauchen wir neue Methoden um die Separabilität zu untersuchen, wie zum Beispiel den "witness" (siehe Ref. [35], [36]).

3.7 Entanglement Witness

Die Menge der Entanglement Witness EW_ρ ist wie folgt definiert:

$$\{EW_\rho\} = \{K = K^\dagger | \forall \sigma \in SEP : \text{Tr}(\sigma K) \geq 0, \text{Tr}(\rho K) < 0\}. \quad (3.42)$$

Die Menge der separablen Zustände SEP ist eine konvexe Menge und kann komplett durch ihre tangentialen Hyperflächen charakterisiert werden. Die Tangenten selbst sind an der Grenze zu einer größeren Menge von Hyperflächen, die SEP nicht schneiden.

Definition: Ein struktureller Witness SW ist folgendermaßen definiert:

$$SW = \{K = K^\dagger \neq 0 | \forall \sigma \in SEP : \text{Tr}(\sigma K) \geq 0\}. \quad (3.43)$$

Definition: Ein tangentieller Witness TW_ρ ist folgendermaßen definiert:

$$TW_\rho = \{K = K^\dagger \neq 0 | \forall \sigma \in SEP : \text{Tr}(\sigma K) = 0\}. \quad (3.44)$$

Satz: Sei $\mathcal{G}$ eine Untergruppe der Symmetriegruppe von $\mathcal{W}$. Falls $\rho \in \mathcal{W}$, $\mathcal{G}$ -invariant und in dem Rand von SEP ist, dann existiert ein $\mathcal{G}$ -invarianter TW_ρ .

Beweis: Da ρ im Rand von SEP ist, existiert ein tangentieller Witness K zu ρ , d.h. $\text{Tr}(K\rho) = 0$. Die Symmetriegruppe ist endlich und damit auch $\mathcal{G}$. Wir können also die endliche Summe über alle möglichen Bilder von K unter $g \in \mathcal{G}$ bilden, d.h. $K_0 := \sum_{g \in \mathcal{G}} V_g K V_g^{-1}$. K_0 ist per Definition $\mathcal{G}$ -invariant und man sieht sofort das $\text{Tr}(K_0\rho) = \sum_{g \in \mathcal{G}} \text{Tr}(V_g K V_g^{-1} \rho) = \sum_{g \in \mathcal{G}} \underbrace{\text{Tr}(K V_g^{-1} \rho V_g)}_{=\rho} = 0$. $\square$

Satz: Der Operator

$$K = \sum_{k,l} \kappa_{k,l} P_{k,l}$$

ist genau dann ein struktureller Witness, wenn für alle $\phi \in \mathbb{C}^3$, der Operator

$$M_\phi = \sum_{k,l} \kappa_{k,l} W_{k,l} |\phi\rangle \langle \phi| W_{k,l}^{-1}$$

nicht negativ ist. Darüberhinaus ist K genau dann ein tangentieller Witness für ein $\rho \in \mathcal{W}$, wenn ein ϕ mit $\det M_\phi = 0$ existiert.

Bemerkung: Man beachte das M_ϕ ein Operator auf $\mathcal{H}^A$ ist, wohingegen K ein Operator auf $\mathcal{H}^{AB}$ ist!

Da die $W_{k,l}$ hermitische Matrizen sind, folgt aus der Definition von M_ϕ , dass M_ϕ auch hermitisch ist.

Zu einer beliebigen 3×3 -Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ definieren wir

$$m(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Satz. Die Matrix M_ϕ hat genau dann einen verschwindenden Eigenwert und zwei nicht-negative Eigenwerte, wenn folgendes gilt:

1. $\det M_\phi = 0$
2. $\text{Tr} M_\phi \geq 0$
3. $m(M_\phi) \geq 0$.

Beweis: Da M_ϕ hermitisch ist, sind alle Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_3$ des charakteristischen Polynoms $\text{char}_{M_\phi}(t) = \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$ von M_ϕ reell und alle Eigenwerte von M_ϕ ebenfalls. Die Koeffizienten α_i sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= -1 \\ \alpha_2 &= \text{Tr} M_\phi \\ \alpha_1 &= -m(M_\phi) \\ \alpha_0 &= \det M_\phi. \end{aligned}$$

Die Matrix M_ϕ hat also genau dann einen verschwindenden Eigenwert wenn $\det M_\phi = 0$ ist. In diesem Fall sind die verbleibenden Eigenwert durch die Nullstellen des Polynoms $-t^2 + \text{Tr} M_\phi t + m(M_\phi)$ gegeben. Die Vorzeichenregel von Decartes für reelle Polynome beweist den Rest. $\square$

Setzt man $l_j = \kappa_{0,j} + \kappa_{1,j} + \kappa_{2,j}$, $j = 0, 1, 2$
 $m_j = \kappa_{0,j} + w\kappa_{1,j} + w^*\kappa_{2,j}$, $j = 0, 1, 2$ so kann man M_ϕ allgemein explizit ausschreiben als

$$M_\phi = \begin{pmatrix} \phi_0 \phi_0^* l_0 + \phi_1 \phi_1^* l_1 + \phi_2 \phi_2^* l_2 & \phi_0 \phi_1^* m_0^* + \phi_0^* \phi_2 m_2^* + \phi_1 \phi_2^* m_1^* & \phi_0^* \phi_1 m_1 + \phi_0 \phi_2^* m_0 + \phi_1^* \phi_2 m_2 \\ \phi_0^* \phi_1 m_0 + \phi_0 \phi_2^* m_2 + \phi_1^* \phi_2 m_1 & \phi_0 \phi_0^* l_2 + \phi_1 \phi_1^* l_0 + \phi_2 \phi_2^* l_1 & \phi_0 \phi_1^* m_2^* + \phi_0^* \phi_2 m_1^* + \phi_1 \phi_2^* m_0^* \\ \phi_0 \phi_1^* m_1^* + \phi_0^* \phi_2 m_0^* + \phi_1 \phi_2^* m_2^* & \phi_0^* \phi_1 m_2 + \phi_0 \phi_2^* m_1 + \phi_1^* \phi_2 m_0 & \phi_0 \phi_0^* l_1 + \phi_1 \phi_1^* l_2 + \phi_2 \phi_2^* l_0 \end{pmatrix}.$$

Leider ist die Berechnung der Matrix M_ϕ in konkreten Fällen mit einigem Aufwand verbunden, weshalb wir darauf nicht näher eingehen werden. Der interessierte Leser sei auf Referenz [1] verwiesen. Dort wird M_ϕ in speziellen Fällen berechnet.

Kapitel 4

Schnitte durch den magischen Simplex mit bipartiten Qubits

4.1 Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qubits mit vier orthogonalen Bellzuständen

Wir wollen nun den Simplex in konkreten Fällen untersuchen. Wir studieren die Verschränktheit im Falle von zwei orthogonalen Bell Typ Zuständen vermischt mit $\frac{1}{4}\mathbb{I}$. Wir rechnen mit der Dichtematrix, die durch den total gemischten Zustand und zwei gleichgewichtete orthogonale Bellzustände gegeben ist.

Unsere Phasenraumpunkte sind $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Man hat genau sechs Möglichkeiten sie in zweipunktige Teilmengen zu zerlegen. Diese sind

1.1. $\{\{(0, 0)\}, \{(0, 1)\}\}$

1.2. $\{\{(0, 0)\}, \{(1, 0)\}\}$

1.3. $\{\{(0, 0)\}, \{(1, 1)\}\}$

1.4. $\{\{(0, 1)\}, \{(1, 0)\}\}$

1.5. $\{\{(0, 1)\}, \{(1, 1)\}\}$

1.6. $\{\{(1, 0)\}, \{(1, 1)\}\}$

Unter der Aktion der Gruppe der Phasenraumtransformationen verbleibt eine einpunktige Teilmenge.

Deswegen werden wir im folgenden lediglich den Fall

1. $\{\{(0, 0), (0, 1)\}\}$

untersuchen.

Für den Fall $\{(0,0)\}, \{(0,1)\}$ erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1 - \alpha - \beta}{4} \mathbb{I} + \alpha P_{0,0} + \beta P_{0,1}.$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= \frac{1}{4}(1 + 3\alpha - \beta), \\ c_{0,1} &= \frac{1}{4}(1 - \alpha + 3\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{4}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k,l) \neq (0,0), (0,1)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 + 3\alpha - \beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha + 3\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0 \end{aligned}$$

und ist in Form des grünen Dreiecks in Abbildung 4.1 dargestellt. Das blaue Polygon zeigt das umhüllende Polytop. Die Darstellung in Abbildung 4.1 erfolgt durch Umsetzung von Proposition 3.31 mithilfe von Mathematica. Der blauflächige Bereich ist die Region in der ρ PPT ist.

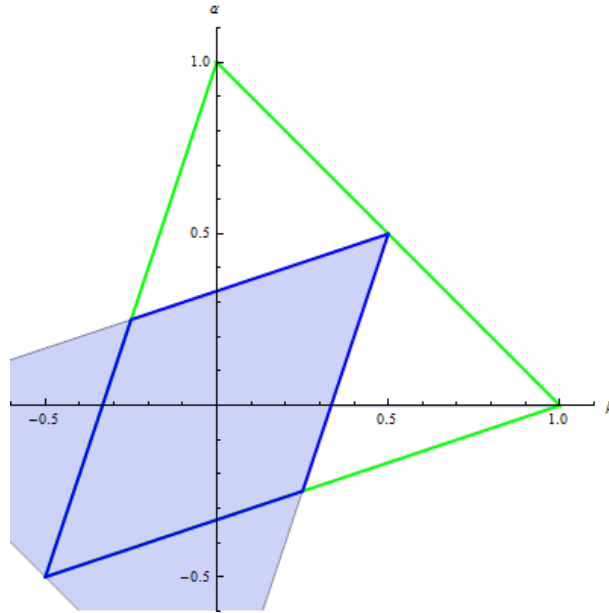


Abbildung 4.1: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{4}\mathbb{I} + \alpha P_{0,0} + \beta P_{0,1}$ dargestellt. Das grüne Dreieck stellt die Positivitätsbedingung dar. Das blaue Polygon zeigt das umhüllende Polytop. Der blaue flächige Bereich ist die Region in der ρ PPT ist.

4.2 Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qubits mit drei orthogonalen Bellzuständen

Nun studieren wir die Verschränktheit im Falle von drei orthogonalen Bell Typ Zuständen vermischt mit $\frac{1}{4}\mathbb{I}$. Wir rechnen mit der Dichtematrix, die durch den total gemischten Zustand und drei orthogonalen Bellzuständen gegeben ist.

Unsere Phasenraumpunkte sind $\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$. Man hat genau zwölf Möglichkeiten sie in eine zweipunktige und eine einpunktige Teilmenge zu zerlegen. Diese sind

- 2.1. $\{(0,0), (0,1)\}, \{(1,0)\}$
- 2.2. $\{(0,0), (0,1)\}, \{(1,1)\}$
- 2.3. $\{(0,0), (1,0)\}, \{(0,1)\}$
- 2.4. $\{(0,0), (1,0)\}, \{(1,1)\}$
- 2.5. $\{(0,0), (1,1)\}, \{(0,1)\}$
- 2.6. $\{(0,0), (1,1)\}, \{(1,0)\}$

- 2.7. $\{\{(0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 0)\}\}$
- 2.8. $\{\{(0, 1), (1, 0)\}, \{(1, 1)\}\}$
- 2.9. $\{\{(1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0)\}\}$
- 2.10. $\{\{(1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1)\}\}$
- 2.11. $\{\{(0, 1), (1, 1)\}, \{(1, 0)\}\}$
- 2.12. $\{\{(0, 1), (1, 1)\}, \{(0, 0)\}\}$

Unter der Aktion der Gruppe der Phasenraumtransformationen verbleibt eine einpunktige und zweipunktige Teilmenge.

Deswegen werden wir im folgenden lediglich den Fall

- 2.1. $\{\{(0, 0), (0, 1)\}, \{(1, 0)\}\}$

untersuchen.

Für den Fall $\{\{(0, 0), (0, 1)\}, \{(1, 0)\}\}$ erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1 - \alpha - \beta}{4} \mathbb{I} + \frac{\alpha}{2} (P_{0,0} + P_{0,1}) + \beta P_{1,0}.$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,1} = \frac{1}{4}(1 + \alpha - \beta), \\ c_{1,0} &= \frac{1}{4}(1 - \alpha + 3\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{4}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1), (1, 0)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 + \alpha - \beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha + 3\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0 \end{aligned}$$

und ist in Form des grünen Dreiecks in Abbildung 4.2 dargestellt. Das blaue Polygon zeigt das umhüllende Polytop und das Kern Polytop stimmt in dieser Dimension mit dem umhüllenden Polytop überein. Die Darstellung in Abbildung 4.2 erfolgt durch Umsetzung von Proposition 3.31 mithilfe von Mathematica. Der blauflächige Bereich ist die Region in der ρ PPT ist.

Im System von zwei Qubits erhalten wir durch das hinreichende und genügende Kriterium der Positivität unter partieller Transformation die ganze Information über den Bereich der Separabilität, die, wie wir in den Graphiken erkennen können, mit dem Bereich des Umhüllenden Polytops übereinstimmt.

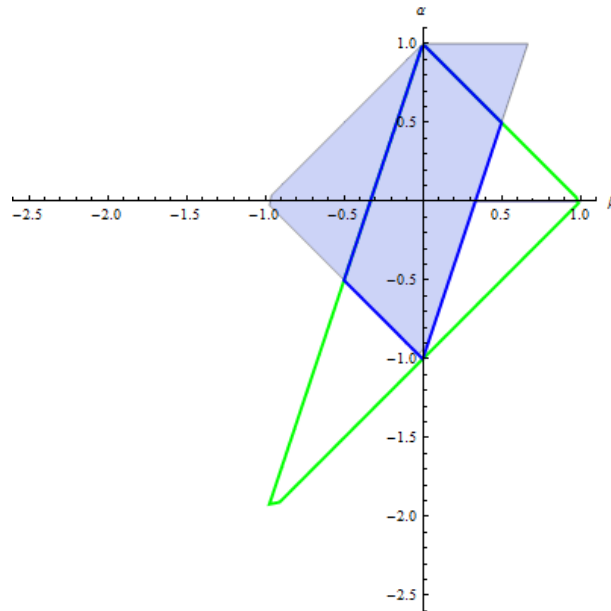


Abbildung 4.2: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{4}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{2}(P_{0,0}+P_{0,1}) + \beta P_{1,0}$ dargestellt. Das grüne Dreieck stellt die Positivitätsbedingung dar. Das blaue Polygon zeigt das umhüllende Polytop. Der blaue flächige Bereich ist die Region in der ρ PPT ist.

Kapitel 5

Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qutrits mit vier orthogonalen Bellzuständen

Wir wollen nun die vorangegangenen Überlegungen dazu nutzen um das Innere von $\mathcal{W}$ in konkreten Fällen zu untersuchen. Genauer studieren wir die Verschränktheit im Falle von vier orthogonalen Bell Typ Zuständen vermischt mit $\frac{1}{9}\mathbb{I}$. Wir rechnen mit der Dichtematrix, die durch den total gemischten Zustand und vier orthogonalen Bellzuständen gegeben ist, wo jeweils zwei Belltypische Zustände gleichgewichtet sind.

Nach dem zweiten Satz von Kapitel 3.1. gibt es genau zwei Äquivalenzklassen von vierpunktigen Teilmengen des Phasenraums.

Diese sind $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ und $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1)\}$. Jede dieser beiden Äquivalenzklassen kann man auf genau drei Möglichkeiten in zwei zweipunktige Teilmengen zerlegen. Genauer sind dies 3 Möglichkeiten im ersten Fall

$$0.1. \quad \{(0, 0), (0, 1)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}$$

$$0.2. \quad \{(0, 0), (1, 1)\}, \{(1, 0), (0, 1)\}$$

$$0.3. \quad \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}$$

$$0.4. \quad \{(0, 0), (0, 1)\}, \{(1, 0), (2, 0)\}$$

$$0.5. \quad \{(0, 0), (1, 0)\}, \{(0, 1), (2, 0)\}$$

$$0.6. \quad \{(0, 0), (2, 0)\}, \{(1, 0), (0, 1)\}$$

und die drei letzten im zweiten Fall. Unter der Aktion der Gruppe der Phasenraumtransformationen verbleiben je zwei inäquivalente zweipunktige Teilmengen. Genauer gesagt, die beiden Mengen

$\{(0,0), (0,1)\}, \{(1,0), (1,1)\}$ und $\{(0,0), (1,0)\}, \{(0,1), (1,1)\}$ sind äquivalent via Spiegelung an der Diagonalen und die beiden Mengen $\{(0,0), (1,0)\}, \{(0,1), (2,0)\}$ und $\{(0,0), (2,0)\}, \{(1,0), (0,1)\}$ sind äquivalent via Spiegelung an der Horizontalen. Die beiden Mengen $\{(0,0), (1,0)\}, \{(0,1), (2,0)\}$ und $\{(0,0), (2,0)\}, \{(1,0), (0,1)\}$ liefern den gleichen Schnitt, lediglich α und β sind vertauscht. Deswegen werden wir im folgenden lediglich die Fälle

$$0.1. \{(0,0), (0,1)\}, \{(1,0), (1,1)\}$$

$$0.2. \{(0,0), (1,1)\}, \{(1,0), (0,1)\}$$

$$0.4. \{(0,0), (0,1)\}, \{(1,0), (2,0)\}$$

untersuchen.

5.1 Erster Schnitt

Für den ersten Fall der ersten Äquivalenzklasse $\{(0,0), (0,1)\}, \{(1,0), (1,1)\}$ erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1 - \alpha - \beta}{9} \mathbb{I} + \frac{\alpha}{2} (P_{0,0} + P_{0,1}) + \frac{\beta}{2} (P_{1,0} + P_{1,1}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,1} = \frac{1}{18}(2 + 7\alpha - 2\beta), \\ c_{1,0} &= c_{1,1} = \frac{1}{18}(2 - 2\alpha + 7\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k,l) \neq (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 2 + 7\alpha - 2\beta &\geq 0, \\ 2 - 2\alpha + 7\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0 \end{aligned}$$

und ist in Form des grünen Dreiecks in Abbildung 5.1 dargestellt. Das blaue (bzw. rote) Polygon zeigt das umhüllende Polytop (bzw. das Kern Polytop). Die Darstellung in Abbildung 5.1 erfolgt durch Umsetzung von Proposition 3.31 mithilfe von Mathematica. Der blauflächige Bereich ist die Region in der ρ PPT ist.

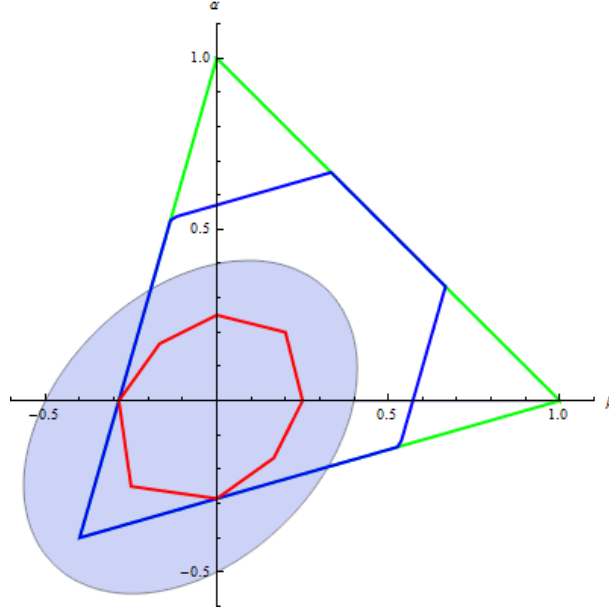


Abbildung 5.1: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{2}(P_{0,0} + P_{0,1}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,0} + P_{1,1})$ dargestellt. Das grüne Dreieck stellt die Positivitätsbedingung dar. Das blaue (bzw. rote) Polygon zeigt das umhüllende Polytop (bzw. das Kern Polytop). Der blauflächige Bereich ist die Region in der ρ PPT ist.

5.2 Zweiter Schnitt

Für den zweiten Fall der ersten Äquivalenzklasse $\{(0,0), (1,1)\}, \{(1,0), (0,1)\}$ erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{2}(P_{0,0} + P_{1,1}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,0} + P_{0,1}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{1,1} = \frac{1}{18}(2 + 7\alpha - 2\beta), \\ c_{1,0} &= c_{0,1} = \frac{1}{18}(2 - 2\alpha + 7\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k,l) \neq (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 2 + 7\alpha - 2\beta &\geq 0, \\ 2 - 2\alpha + 7\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

ρ ist invariant unter Spiegelung an der Diagonalen und unter der Spiegelung an einer zur Diagonalen orthogonalen Linie.

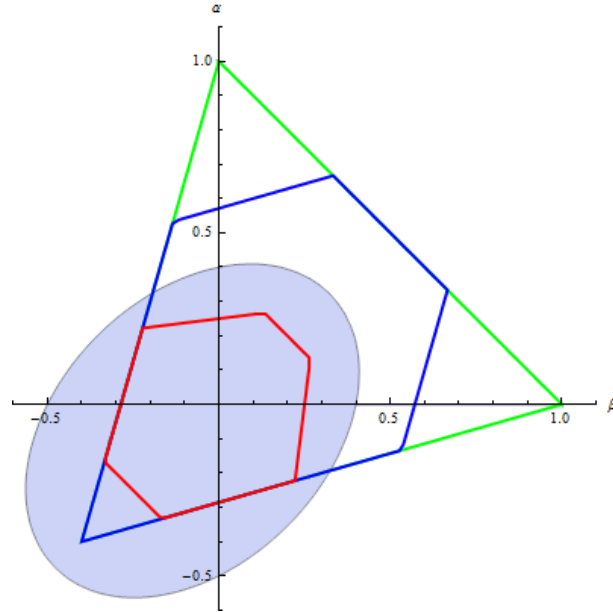


Abbildung 5.2: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{2}(P_{0,0} + P_{1,1}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,0} + P_{0,1})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

5.3 Dritter Schnitt

Für den Fall der zweiten Äquivalenzklasse $\{(0, 0), (0, 1)\}, \{(1, 0), (2, 0)\}$ erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1 - \alpha - \beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{2}(P_{0,0} + P_{0,1}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,0} + P_{2,0}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,1} = \frac{1}{18}(2 + 7\alpha - 2\beta), \\ c_{1,0} &= c_{2,0} = \frac{1}{18}(2 - 2\alpha + 7\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 2 + 7\alpha - 2\beta &\geq 0, \\ 2 - 2\alpha + 7\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

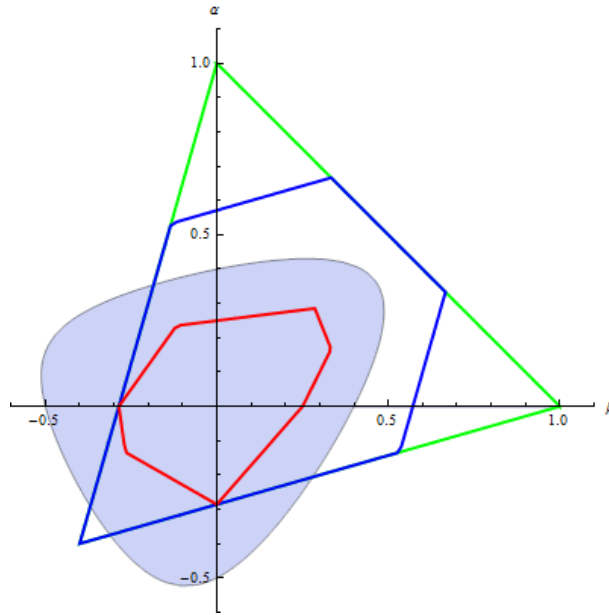


Abbildung 5.3: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{2}(P_{0,0} + P_{0,1}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,0} + P_{2,0})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

Um die Separabilität im System von zwei Qutrits genauer eingrenzen zu können, braucht man das Kern Polytop. Das, wie man in den Graphiken in diesem Kapitel, wie auch in den Folgenden erkennen kann, wesentlich komplizierter in ihrer Gestalt ist und eine gebogene Struktur aufweist.

Kapitel 6

Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qutrits mit fünf orthogonalen Bellzuständen

Wir betrachten neue Schnitte um mehr Erkenntnisse aus $\mathcal{W}$ zu ziehen. Genauer studieren wir die Verschränktheit im Falle von fünf orthogonalen Bell Typ Zuständen vermischt mit $\frac{1}{9}\mathbb{I}$. Wir rechnen mit der Dichtematrix, die durch den total gemischten Zustand und fünf orthogonalen Bellzuständen gegeben ist, wo zwei und drei Belltypische Zustände gleichgewichtet sind.

Nach dem zweiten Satz von Kapitel 3.1. gibt es genau zwei Äquivalenzklassen von fünfpunktigen Teilmengen des Phasenraums.

Diese sind $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2)\}$ und $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (0, 2)\}$. Jede dieser beiden Äquivalenzklassen kann man auf genau zehn Möglichkeiten in zwei- und dreipunktige Teilmengen zerlegen. Genauer sind die Möglichkeiten im ersten Fall die ersten zehn

- 0.1. $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}, \{(1, 1), (0, 2)\}$
- 0.2. $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}, \{(1, 0), (0, 2)\}$
- 0.3. $\{(0, 0), (0, 2), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}$
- 0.4. $\{(0, 0), (0, 2), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 0)\}$
- 0.5. $\{(0, 1), (0, 2), (1, 0)\}, \{(0, 0), (1, 1)\}$
- 0.6. $\{(0, 1), (0, 2), (1, 1)\}, \{(0, 0), (1, 0)\}$
- 0.7. $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (0, 2)\}$
- 0.8. $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0), (0, 2)\}$
- 0.9. $\{(0, 2), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 0), (0, 1)\}$

- 0.10. $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}$
- 0.11. $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}, \{(1, 0), (2, 0)\}$
- 0.12. $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}, \{(0, 1), (0, 2)\}$
- 0.13. $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 2), (2, 0)\}$
- 0.14. $\{(0, 0), (0, 1), (2, 0)\}, \{(0, 2), (1, 0)\}$
- 0.15. $\{(0, 0), (1, 0), (0, 2)\}, \{(0, 1), (2, 0)\}$
- 0.16. $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0)\}, \{(0, 1), (1, 0)\}$
- 0.17. $\{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}, \{(0, 0), (0, 2)\}$
- 0.18. $\{(0, 1), (0, 2), (1, 0)\}, \{(0, 0), (2, 0)\}$
- 0.19. $\{(0, 1), (0, 2), (2, 0)\}, \{(0, 0), (1, 0)\}$
- 0.20. $\{(1, 0), (2, 0), (0, 2)\}, \{(0, 0), (0, 1)\}$

und die letzten zehn im zweiten Fall.

Die ersten Sechs (0.1 bis 0.6) liefern den gleichen Schnitt des magischen Simplex aufgrund ihrer Symmetrie. Die nächsten drei (0.7 bis 0.9) ergeben wieder einen Schnitt. In der zweiten Äquivalenzklasse bekommen wir bei den ersten Zwei (0.11 und 0.12) den gleichen Schnitt. Die darauffolgenden Vier (0.13 bis 0.16) führen zum selben Ergebnis und die letzten Vier (0.17 bis 0.20) ebenso.

Unter der Aktion der Gruppe der Phasenraumtransformationen verbleiben je drei inäquivalente zwei- und dreipunktige Teilmengen. Wir betrachten in der ersten Äquivalenzklasse die folgenden drei

- 0.1 $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}, \{(1, 1), (0, 2)\}$
- 0.7 $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (0, 2)\}$
- 0.10 $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}$
- 0.11 $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}, \{(1, 0), (2, 0)\}$
- 0.13 $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}, \{(0, 2), (2, 0)\}$
- 0.17 $\{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}, \{(0, 0), (0, 2)\}$

und die letzten drei in der zweiten Äquivalenzklasse.

6.1 Erster Schnitt

Für den ersten Fall der ersten Äquivalenzklasse $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}, \{(1, 1), (0, 2)\}$, erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1 - \alpha - \beta}{9} \mathbb{I} + \frac{\alpha}{3} (P_{0,0} + P_{0,1} + P_{1,0}) + \frac{\beta}{2} (P_{1,1} + P_{0,2}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,1} = c_{1,0} = \frac{1}{9}(1 + 2\alpha - \beta), \\ c_{1,1} &= c_{0,2} = \frac{1}{18}(2 - 2\alpha + 7\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 2)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha - \beta &\geq 0, \\ 2 - 2\alpha + 7\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0 \end{aligned}$$

und ist in Form des grünen Dreiecks in Abbildung 6.1 dargestellt. Das blaue Polygon zeigt das umhüllende Polytop. Das Kern Polytop stimmt in dieser Dimension mit dem umhüllenden Polytop überein. Die Darstellung in Abbildung 6.1 erfolgt durch Umsetzung von Proposition 3.31 mithilfe von Mathematica. Der blauflächige Bereich ist die Region in der ρ PPT ist.

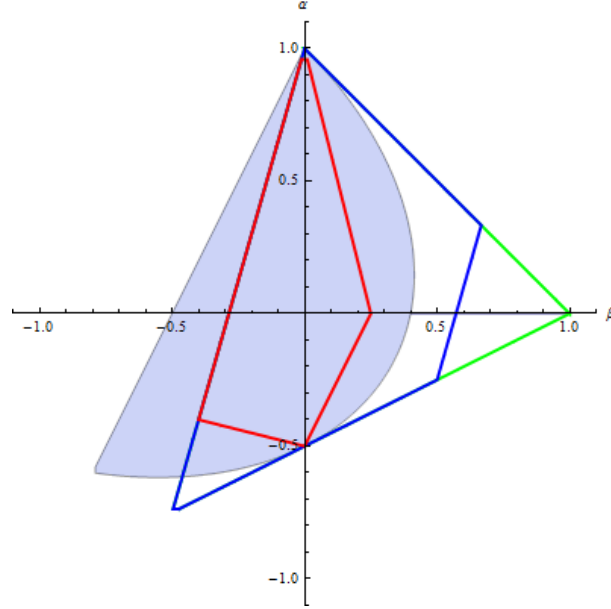


Abbildung 6.1: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{0,2}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,0} + P_{1,1})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

6.2 Zweiter Schnitt

Für den zweiten Fall der ersten Äquivalenzklasse $\{(0,0), (1,0), (1,1)\}, \{(0,1), (0,2)\}$, erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{1,0} + P_{1,1}) + \frac{\beta}{2}(P_{0,1} + P_{0,2}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{1,0} = c_{1,1} = \frac{1}{9}(1 + 2\alpha - \beta), \\ c_{0,1} &= c_{0,2} = \frac{1}{18}(2 - 2\alpha + 7\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k,l) \neq (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha - \beta &\geq 0, \\ 2 - 2\alpha + 7\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

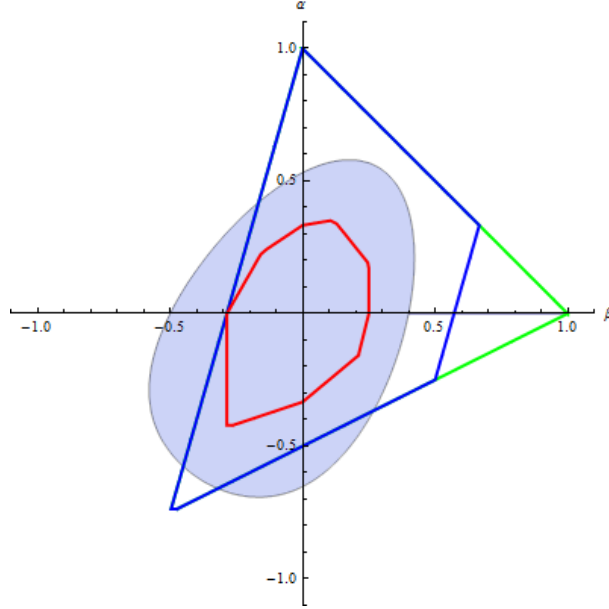


Abbildung 6.2: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{1,0}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,1} + P_{0,2})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

6.3 Dritter Schnitt

Für den dritten Fall der ersten Äquivalenzklasse $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}$, erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{0,2}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,0} + P_{1,1}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,1} = c_{0,2} = \frac{1}{9}(1 + 2\alpha - \beta), \\ c_{1,0} &= c_{1,1} = \frac{1}{18}(2 - 2\alpha + 7\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha - \beta &\geq 0, \\ 2 - 2\alpha + 7\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

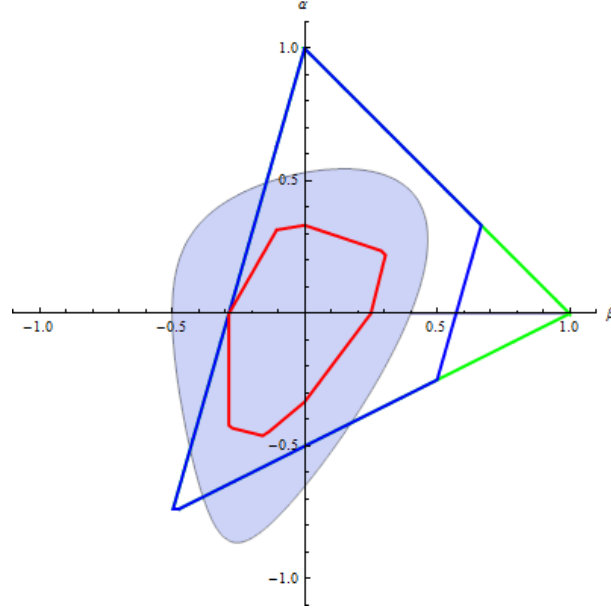


Abbildung 6.3: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{1,0} + P_{1,1}) + \frac{\beta}{2}(P_{0,1} + P_{0,2})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

6.4 Vierter Schnitt

Für den ersten Fall der zweiten Äquivalenzklasse $\{\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}, \{(1, 0), (2, 0)\}\}$, erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1 - \alpha - \beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{0,2}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,0} + P_{2,0}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,1} = c_{0,2} = \frac{1}{9}(1 + 2\alpha - \beta), \\ c_{1,0} &= c_{2,0} = \frac{1}{18}(2 - 2\alpha + 7\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha - \beta &\geq 0, \\ 2 - 2\alpha + 7\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

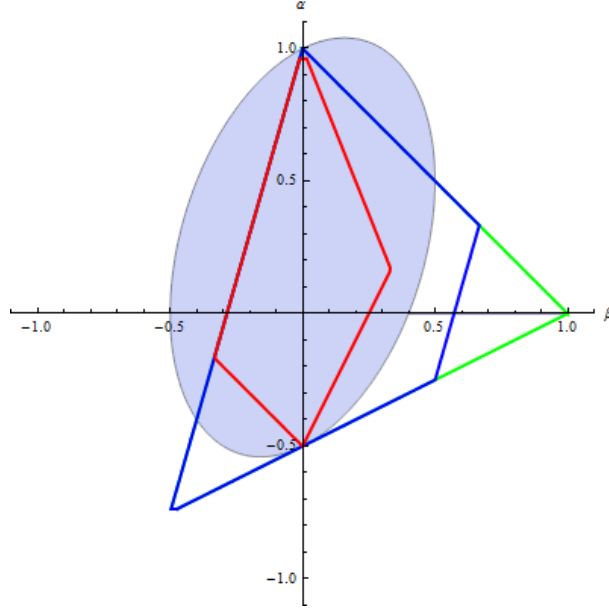


Abbildung 6.4: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{0,2}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,0} + P_{2,0})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

6.5 Fünfter Schnitt

Für den zweiten Fall der zweiten Äquivalenzklasse $\{\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}, \{(0, 2), (2, 0)\}\}$ erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1 - \alpha - \beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{1,0} + P_{0,1}) + \frac{\beta}{2}(P_{0,2} + P_{2,0}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,1} = c_{1,0} = \frac{1}{9}(1 + 2\alpha - \beta), \\ c_{0,2} &= c_{2,0} = \frac{1}{18}(2 - 2\alpha + 7\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha - \beta &\geq 0, \\ 2 - 2\alpha + 7\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

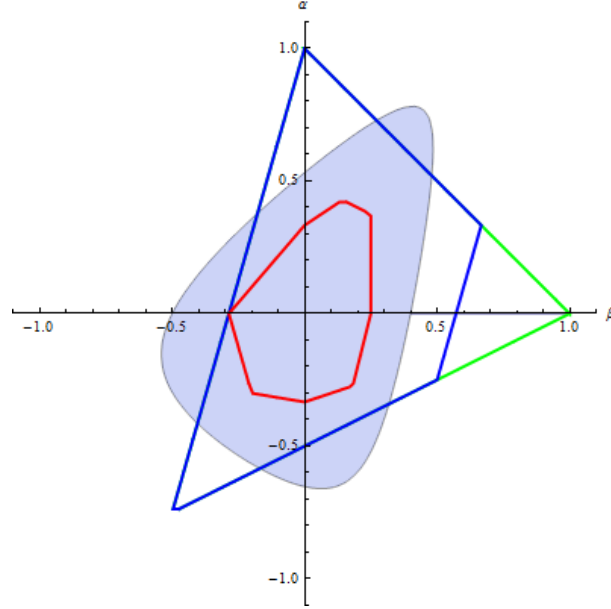


Abbildung 6.5: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{1,0}) + \frac{\beta}{2}(P_{0,2} + P_{2,0})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

6.6 Sechster Schnitt

Für den dritten Fall der zweiten Äquivalenzklasse $\{\{(0, 1), (1, 0), (2, 0)\}, \{(0, 0), (0, 2)\}\}$, erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1 - \alpha - \beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,1} + P_{1,0} + P_{2,0}) + \frac{\beta}{2}(P_{0,0} + P_{0,2}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,1} &= c_{1,0} = c_{2,0} = \frac{1}{9}(1 + 2\alpha - \beta), \\ c_{0,0} &= c_{0,2} = \frac{1}{18}(2 - 2\alpha + 7\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha - \beta &\geq 0, \\ 2 - 2\alpha + 7\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

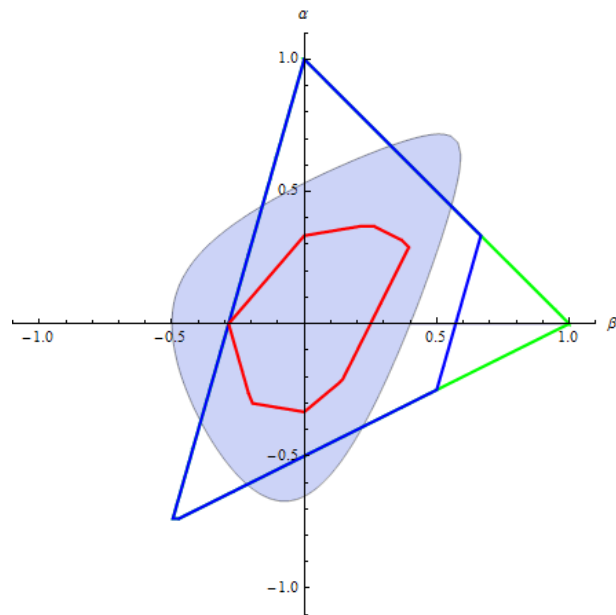


Abbildung 6.6: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,1} + P_{1,0} + P_{2,0}) + \frac{\beta}{2}(P_{0,0} + P_{0,2})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

Kapitel 7

Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qutrits mit sechs orthogonalen Bellzuständen

In diesem Kapitel betrachten wir nun wieder andere Schnitte um das Innere von $\mathcal{W}$ weiter zu beleuchten. Wie sieht die Verschränktheit im Falle von sechs orthogonalen Bell Typ Zuständen vermischt mit $\frac{1}{9}\mathbb{I}$ aus? Wir rechnen mit der Dichtematrix, die durch den total gemischten Zustand und 6 orthogonalen Bellzuständen gegeben ist, wo je drei Belltypische Zustände gleichgewichtet sind.

Nach dem zweiten Satz in Kapitel 3.1 gibt es genau eine Äquivalenzklassen von sechspunktigen Teilmengen des Phasenraums.

Diese ist $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2), (1, 2)\}$. Diese Äquivalenzklasse kann man auf genau zehn Möglichkeiten in zwei dreipunktige Teilmengen zerlegen und zwar

- 0.1. $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}, \{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$
- 0.2. $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}, \{(1, 1), (1, 2), (0, 2)\}$
- 0.3. $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$
- 0.4. $\{(0, 0), (0, 2), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 1), (1, 2)\}$
- 0.5. $\{(0, 0), (0, 2), (1, 2)\}, \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
- 0.6. $\{(0, 0), (1, 0), (1, 2)\}, \{(0, 1), (0, 2), (1, 1)\}$
- 0.7. $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}, \{(1, 0), (0, 2), (1, 2)\}$
- 0.8. $\{(0, 0), (0, 1), (1, 2)\}, \{(0, 2), (1, 0), (1, 1)\}$
- 0.9. $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2)\}, \{(0, 1), (0, 2), (1, 0)\}$
- 0.10. $\{(0, 0), (1, 1), (0, 2)\}, \{(0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$.

Die letzten Neun (0.2 bis 0.10) liefern den gleichen Schnitt des magischen Simplex aufgrund ihrer Symmetrie.

Unter der Aktion der Gruppe der Phasenraumtransformationen verbleiben zwei inäquivalente dreipunktige Teilmengen. Diese sind in der Äquivalenzklasse

$$0.1. \{ \{(0,0), (0,1), (0,2)\}, \{(1,0), (1,1), (1,2)\} \}$$

$$0.2. \{ \{(0,0), (0,1), (1,0)\}, \{(1,1), (1,2), (0,2)\} \}.$$

7.1 Erster Schnitt

Für den ersten Fall der ersten Äquivalenzklasse

$$\{ \{(0,0), (0,1), (0,2)\}, \{(1,0), (1,1), (1,2)\} \}$$

erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1 - \alpha - \beta}{9} \mathbb{I} + \frac{\alpha}{3} (P_{0,0} + P_{0,1} + P_{0,2}) + \frac{\beta}{3} (P_{1,0} + P_{1,1} + P_{1,2}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,1} = c_{0,2} = \frac{1}{9}(1 + 2\alpha - \beta), \\ c_{1,0} &= c_{1,1} = c_{1,2} = \frac{1}{9}(1 - \alpha + 2\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k,l) \neq (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (1,2)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha - \beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha + 2\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0 \end{aligned}$$

und ist in Form des grünen Dreiecks in Abbildung 7.1 dargestellt. Das blaue (bzw. rote) Polygon zeigt das umhüllende Polytop (bzw. das Kern Polytop). Die Darstellung in Abbildung 7.1 erfolgt durch Umsetzung von Proposition 3.31 mithilfe von Mathematica. Der blauflächige Bereich ist die Region in der ρ PPT ist.

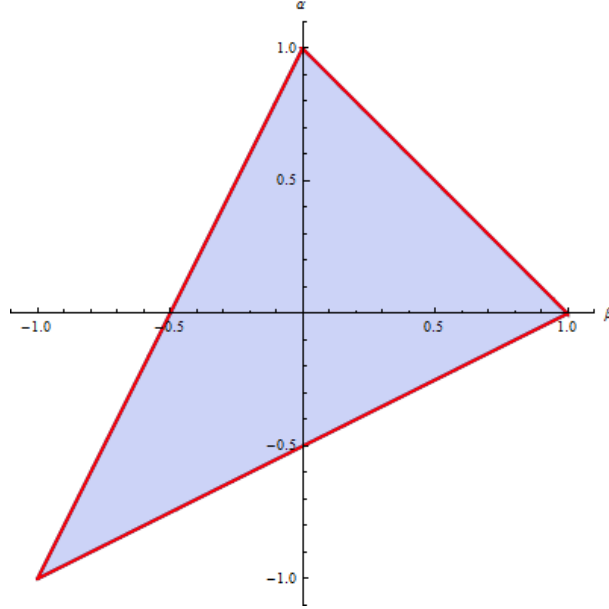


Abbildung 7.1: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{0,2}) + \frac{\beta}{3}(P_{1,0} + P_{1,1})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

7.2 Zweiter Schnitt

Für den zweiten Fall der Äquivalenzklasse

$$\{\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}, \{(1, 1), (1, 2), (0, 2)\}\}$$

erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{1,0}) + \frac{\beta}{3}(P_{1,1} + P_{1,2} + P_{0,2}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{1,0} = c_{0,1} = \frac{1}{9}(1 + 2\alpha - \beta), \\ c_{0,2} &= c_{1,1} = c_{1,2} = \frac{1}{9}(1 - \alpha + 2\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 2)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha - \beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha + 2\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

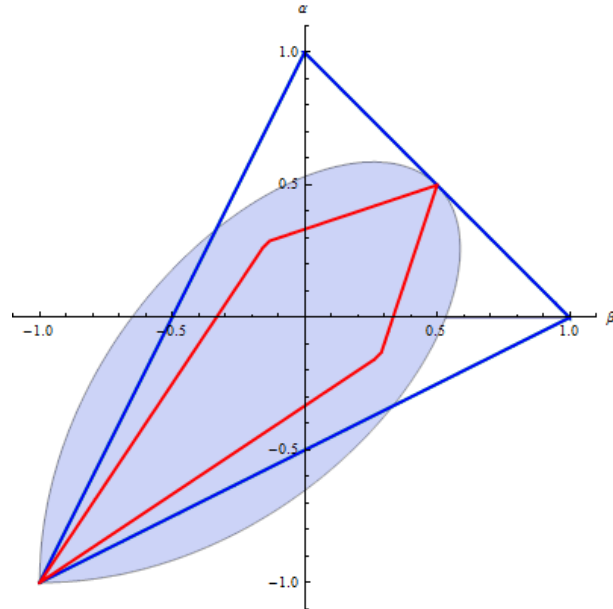


Abbildung 7.2: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{3}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{1,0}) + \frac{\beta}{2}(P_{1,1} + P_{0,2})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

Kapitel 8

Schnitte durch den magischen Simplex von bipartiten Qutrits mit acht orthogonalen Bellzuständen

Im achten Kapitel widmen wir uns einer großen Anzahl von Bell Typ Zuständen um $\mathcal{W}$ und die darin enthaltene Separabilität zu begutachten. Wie sieht die Separabilität im Falle von acht orthogonalen Bell Typ Zuständen vermischt mit $\frac{1}{9}\mathbb{I}$ aus? Wir rechnen mit der Dichtematrix, die durch den total gemischten Zustand und acht orthogonalen Bellzuständen gegeben ist, wo je vier Belltypische Zustände gleichgewichtet sind.

Nach dem zweiten Satz in Kapitel 3.1. gibt es genau eine Äquivalenzklassen von achtpunktigen Teilmengen des Phasenraums. Diese sind $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 0), (2, 1)\}$. Sei n eine gerade natürliche Zahl. Bekanntlich gibt es

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \quad (8.1)$$

Möglichkeiten $\frac{n}{2}$ Teilmengen aus einer n -elementigen Menge auszuwählen. Speziell für $n = 8$ gibt es daher

$$\binom{8}{4} = 70 \quad (8.2)$$

Möglichkeiten diese Äquivalenzklasse in Gruppen von vier plus vier anzuordnen. Diese schränken wir jetzt durch Symmetrieüberlegungen weiter ein.

Wir wählen für unsere Bellprojektoren zur Vereinfachung Variablen aus:

i	Bellprojektor
1	$\{(0, 0)\}$
2	$\{(0, 1)\}$
3	$\{(0, 2)\}$
4	$\{(1, 0)\}$
5	$\{(1, 1)\}$
6	$\{(1, 2)\}$
7	$\{(2, 0)\}$
8	$\{(2, 1)\}$

Da $(0, 0)$ stets in der ersten Teilmenge oder in der Komplementärmenge enthalten ist, legen wir es o.B.d.A. in die erste Teilmenge und bekommen so eine verminderte Anzahl von Möglichkeiten. Aus den

$$\binom{n}{n/2} \quad (8.3)$$

Möglichkeiten bleiben uns also nur noch

$$\binom{n-1}{n/2-1} \quad (8.4)$$

Möglichkeiten übrig. D. h. anstatt

$$\binom{8}{4} \quad (8.5)$$

bleiben nur

$$\binom{7}{3} = 35 \quad (8.6)$$

Diese Äquivalenzklasse kann man also auf genau 35 Möglichkeiten in zwei vierpunktige Teilmengen zerlegen und zwar auf folgende Weise

$$1 = i_1, 2 \leq i_2 < i_3 < i_4 \leq 8 \quad (8.7)$$

Unter der Aktion der Gruppe der Phasenraumtransformationen verbleiben genau drei inäquivalente Partitionen in zwei vierpunktige Teilmengen. Diese sind gegeben durch:

$$0.1. \quad \{\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0)\}, \{((1, 1), (1, 2), (2, 0)(2, 1))\}\}$$

$$0.2. \quad \{\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}, \{((0, 2), (1, 2), (2, 0)(2, 1))\}\}$$

$$0.3. \quad \{\{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (2, 0)\}, \{((0, 1), (1, 1), (1, 2)(2, 1))\}\}.$$

8.1 Erster Schnitt

Für den ersten Fall der Äquivalenzklasse

$$\{\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0)\}, \{((1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1))\}\}$$

erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1 - \alpha - \beta}{9} \mathbb{I} + \frac{\alpha}{4} (P_{0,0} + P_{0,1} + P_{0,2} + P_{1,0}) + \frac{\beta}{4} (P_{1,1} + P_{1,2} + P_{2,0} + P_{2,1}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,1} = c_{0,2} = c_{1,0} = \frac{1}{36} (4 + 5\alpha - 4\beta), \\ c_{1,1} &= c_{1,2} = c_{2,0} = c_{2,1} = \frac{1}{36} (4 - 4\alpha + 5\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9} (1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 4 + 5\alpha - 4\beta &\geq 0, \\ 4 - 4\alpha + 5\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0 \end{aligned}$$

und ist in Form des grünen Dreiecks in Abbildung 8.1 dargestellt. Das blaue (bzw. rote) Polygon zeigt das umhüllende Polytop (bzw. das Kern Polytop). Die Darstellung in Abbildung 8.1 erfolgt durch Umsetzung von Proposition 3.31 mithilfe von Mathematica. Der blauflächige Bereich ist die Region in der ρ PPT ist.

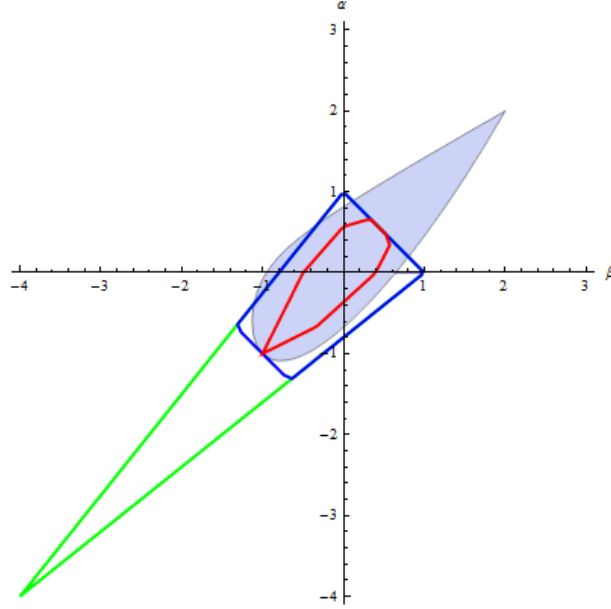


Abbildung 8.1: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{4}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{0,2} + P_{1,0}) + \frac{\beta}{4}(P_{1,1} + P_{1,2} + P_{2,0} + P_{2,1})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

8.2 Zweiter Schnitt

Für den zweiten Fall der Äquivalenzklasse

$$\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}, \{((0,2), (1,2), (2,0)(2,1))\}$$

erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{4}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{1,0} + P_{1,1}) + \frac{\beta}{4}(P_{0,2} + P_{1,2} + P_{2,0} + P_{2,1}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,1} = c_{1,0} = c_{1,1} = \frac{1}{36}(4 + 5\alpha - 4\beta), \\ c_{0,2} &= c_{1,2} = c_{2,0} = c_{2,1} = \frac{1}{36}(4 - 4\alpha + 5\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k,l) \neq (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 4 + 5\alpha - 4\beta &\geq 0, \\ 4 - 4\alpha + 5\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

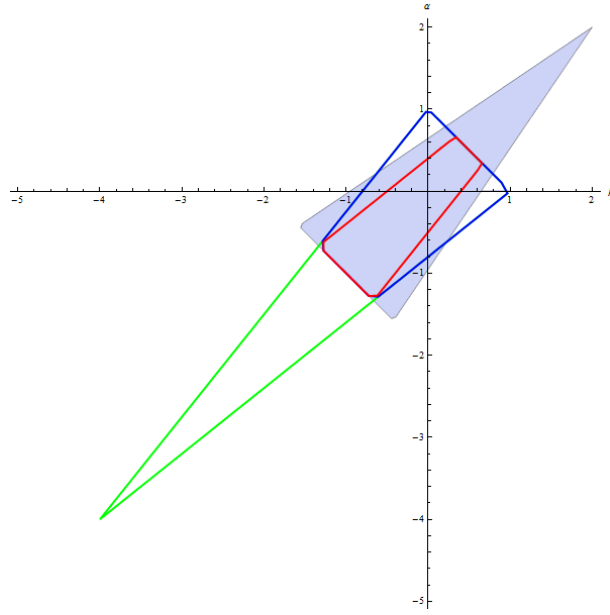


Abbildung 8.2: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{4}(P_{0,0} + P_{0,1} + P_{1,0} + P_{1,1}) + \frac{\beta}{4}(P_{0,2} + P_{1,2} + P_{2,0} + P_{2,1})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

8.3 Dritter Schnitt

Für den dritten Fall der Äquivalenzklasse

$$\{\{(0,0), (0,2), (1,0), (2,0)\}, \{((0,1), (1,1), (1,2), (2,1))\}\}$$

erhält man eine Familie von Dichtematrizen ρ von der Form

$$\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{4}(P_{0,0} + P_{0,2} + P_{1,0} + P_{2,0}) + \frac{\beta}{4}(P_{0,1} + P_{1,1} + P_{1,2} + P_{2,1}).$$

Die Koeffizienten $c_{k,l}$ sind daher durch

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= c_{0,2} = c_{1,0} = c_{2,0} = \frac{1}{36}(4 + 5\alpha - 4\beta), \\ c_{0,1} &= c_{1,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = \frac{1}{36}(4 - 4\alpha + 5\beta), \\ c_{k,l} &= \frac{1}{9}(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

für $(k, l) \neq (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1)$ gegeben.

Die Bedingung $c_{k,l} \geq 0$ ergibt nun

$$\begin{aligned} 4 + 5\alpha - 4\beta &\geq 0, \\ 4 - 4\alpha + 5\beta &\geq 0, \\ 1 - \alpha - \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

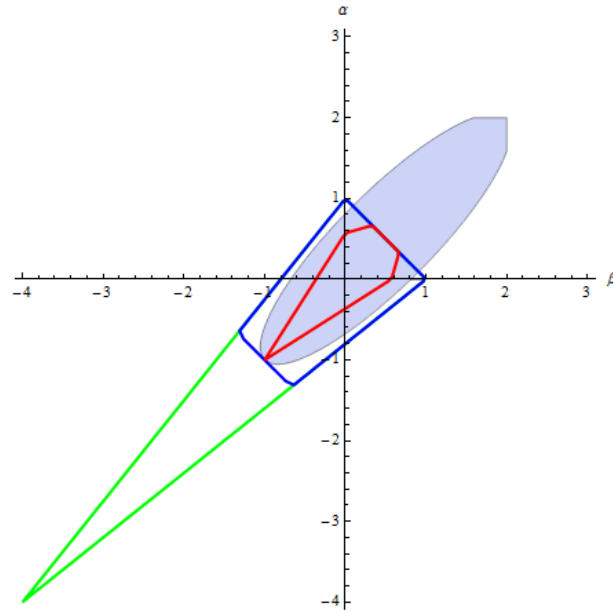


Abbildung 8.3: Hier wird der Raum der Dichtematrizen $\rho = \frac{1-\alpha-\beta}{9}\mathbb{I} + \frac{\alpha}{4}(P_{0,0} + P_{0,2} + P_{1,0} + P_{2,0}) + \frac{\beta}{4}(P_{0,1} + P_{1,1} + P_{1,2} + P_{2,1})$ dargestellt. Die Notation ist wie in Abbildung 5.1.

Weiters könnten uns die Schnitte in höheren Dimensionen, Aufschluß darüber geben, wie wir i. A. für beliebige Dimensionen Vorhersagen über die separablen und verschränkten Regionen innerhalb des Simplex machen könnten.

Literaturverzeichnis

- [1] B. Baumgartner, B. C. Hiesmayr und H. Narnhofer, Phys. Rev. A, 74:032327, 2006, *arXiv : quant - ph/0606083v1*(2006), The state space for two qutrits has a phase space structure in its core
- [2] B. Baumgartner, B. C. Hiesmayr und H. Narnhofer, Phys. Lett. A, 372:2190, *arXiv : quant - ph/0705.1403v2*(2007), The geometry of bipartite qutrits including bound entanglement
- [3] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Rev. Mod. Phys.81:865-942,2009, *arXiv : quant - ph/0702225v2*(2007), Quantum entanglement
- [4] F. Mintert, A. R. R. Carvalho, M. Kus, A. Buchleitner, Physics Reports Volume 415, 4, 2005, 207259 *arXiv : quant - ph/0505162*, Measures and dynamics of entangled states
- [5] Diplomarbeit von A. Gabriel, *arXiv : 1003.3778v1*, Quantum Entanglement and Geometrie
- [6] Diplomarbeit von P. Krammer, *homepage.univie.ac.at/reinhold.bertlmann/pdfs/dipl_diss/Krammer_Diplomarbeit.pdf*, Quantum Entanglement: Detection, Classification and Quantification
- [7] R. A. Bertlmann, H. Narnhofer und Thirring, Phys. Rev. A,66 032319(2002), Geometric picture of entanglement and Bell inequalities
- [8] R. A. Bertlmann, P. Krammer, J. Phys. A: Math.Theor. 41 235303(2008),*arXiv : 0806.1174*, Bloch vectors for qudits
- [9] R. A. Bertlmann, P. Krammer, Phys. Rev. A 78, 014303(2008),*arXiv : 0804.1525*, Bound entanglement in the magic simplex of two-qutrits
- [10] C. Spengler, M. Huber, B. C. Hiesmayr, J. Phys. A: Math. Theor. 44, 065304(2011),*arXiv : 0907.0998*, A geometric comparison of entanglement and quantum nonlocality in discrete systems
- [11] B. C. Hiesmayr, M. Huber, *arXiv : 0906.0238*, Two distinct classes of bound entanglement: PPT-bound and ‘multi-particle’-bound
- [12] J. Bae, M. Tiersch, S. Sauer, F. de Melo, F. Mintert, B. C. Hiesmayr, A. Buchleitner, Phys. Rev. A 80, 022317(2009),*arXiv : 0902.4372*, Detection and typicality of bound entangled states

LITERATURVERZEICHNIS

- [13] B.C. Hiesmayr, F. Hipp, M. Huber, Ph. Krammer, Ch. Spengler, Phys. Rev. A 78, 042327(2008), *arXiv* : 0807.4842, A simplex of bound entangled multipartite qubit states
- [14] B. C. Hiesmayr, W. Löffler, *arXiv* : 1212.5046, Complementarity Reveals Bound Entanglement of Two Twisted Photons
- [15] Dissertation von A. Ableitinger, *homepage.univie.ac.at/reinhold.bertlmann/pdfs/dipl_diss/Ableitinger_D*
- [16] R.Bertlmann, K. Durstberger, B. C. Hiesmayr, P. Krammer, Phys. Rev. A, 72:052331, 2005, *arXiv* : *quant - ph*/0508043, Optimal Entanglement Witnesses for Qubits and Qutrits
- [17] A. Peres, Phys. Rev. Lett. 77, 1413 (1996), Separability Criterion for Density Matrices
- [18] J. Audretsch, Verschränkte Systeme, Die Quantenphysik auf neuen Wegen, WILEY-VCH (2007)
- [19] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, Cambridge University Press, Cambridge 2000, Quantum Computation and Quantum Information
- [20] M. Horodecki, P. Horodecki, Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols, Phys. Rev. A 59 (1999)
- [21] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Mixed-state entanglement and quantum communication, Quantum Information (G. Alber et al., ed.), Springer Tracts in Modern Physics, vol. 173, Springer Verlag Berlin, 2001
- [22] T. Durt, B.-G. Englert, I. Bengtsson, K. Życzkowski, On mutually unbiased bases, Int. J. Quantum Information, 8, 535-640 (2010)
- [23] R. Horodecki, M. Horodecki, Information-theoretic aspects of quantum inseparability of mixed states, Phys. Rev. A 54 (1996)
- [24] C. Spengler, M. Huber, S. Brierley, T. Adaktylos, B. C. Hiesmayr, Phys. Rev. A 86, 022311 (2012), Entanglement detection via mutually unbiased bases
- [25] B. C. Hiesmayr, A. D. Domenico, C. Curceanu, A. Gabriel, M. Huber, J.-A. Larsson, P. Moskal, The European Physical Journal C (EPJ C), Vol. 72, 1856 (2012), Revealing Bell's Nonlocality for Unstable Systems in High Energy Physics
- [26] C. Spengler, M. Huber, A. Gabriel, B. C. Hiesmayr, Quantum Inf. Process. 12, 269 (2013), Examining the dimensionality of genuine multipartite entanglement
- [27] C. Spengler, M. Huber, B. C. Hiesmayr, J. Phys. A: Math. Theor. 43, 385306 (2010), A composite parameterization of unitary groups, density matrices and subspaces
- [28] T. Ichikawa, M. Huber, P. Krammer, B. C. Hiesmayr, Int. J. Quant. Info. 8 (2010) 677, Mixed State Entanglement Measures for Intermediate Separability
- [29] E. Schrödinger, Naturwissenschaften, 23:807, 823, 844, 1935, Die gegenwärtige Situation der Quantenmechanik

- [30] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev., 47:777, 1935, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?
- [31] J. S. Bell, Physics, 1:195, 1964, On the Einstein Podolsky Rosen paradox
- [32] D. Bruß, Journal of Mathematical Physics, 43:4237, 2002, Characterizing entanglement
- [33] W. Dür, J. I. Cirac, M. Lewenstein, D. Bruß, Phys. Rev. A, 61:062313, 2000, Distillability and partial transposition in bipartite systems
- [34] S. L. Woronowicz, Rep. Math. Phys., 10:165, 1976, Positive maps of low dimensional matrix algebras.
- [35] Reinhold A. Bertlmann, Philipp Krammer, Phys. Rev. A, 77:024303, 2008, Geometric entanglement witnesses and bound entanglement
- [36] P. Krammer, J. Phys. A: Math. Theor., 42:065305, 2009, Characterizing entanglement with geometric entanglement witnesses
- [37] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, Phys. Lett. A, 200:340, 1995, Violating Bell inequality by mixed spin-1/2 states: necessary and sufficient condition
- [38] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett., 80:2245, 1998, Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits
- [39] F. Mintert, M. Kus, A. Buchleitner, Phys. Rev. Lett., 92:167902, 2004, Concurrence of mixed bipartite quantum states in arbitrary dimensions

Curriculum vitae

Persönlich:

Name: Heidi Maria Waldner
Geburtsdatum: 03.09.1980
Geburtsort: Wien
Nationalität: Österreich

Anstellungen:

- Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Vienna Environmental Research Accelerator von 01.09.2006 bis 30.09.2006.
- Projektassistentin der Lise Meitner Lectures SchülerInnenwettbewerb im WS 2009.

Ausbildung:

- Diplomstudium an der Fakultät für Physik, Universität von Wien von 01.10.2001 bis 31.01.2012 mit Beurlaubung von 01.10.2006 bis 30.06.2007.
- Matura am Bundesoberstufenrealgymnasium Wiener Neustadt am 19.06.2001.

Vermischtes:

- Studium an der Fakultät für Physik, Freie Universität in Berlin 01.10.2003 bis 28.02.2004.

Teilnahmen

- Joint Annual Meeting of PG/SPS/GAA in Innsbruck von 02.09.2009 bis 04.09.2009.
- 7th Central European Quantum Information Processing Workshop in Valtice, Tschechische Republik, 03.06.2010 bis 06.06.2010.
- Workshop in honour of Prof. Reinhold A. Bertlmann, Testing Foundations of Quantum Mechanics at Different Energy Scales, 25.06.2010 bis 27.06.2010.
- 60th Annual Meeting Austrian Physical Society in Salzburg, 06.09.2010 bis 10.09.2010.
- Meetings der Theoretischen Physik der Universitäten von Bratislava-Brno-Vienna von September 2009 bis Juni 2010.

Zusammenfassung

Das Hauptaugenmerk meiner Diplomarbeit liegt auf der geometrischen Untersuchung des sogenannten magischen Simplex $\mathcal{W}$. Es werden Schnitte durch den Simplex durchgeführt um Kenntnisse über seine Separabilität bzw. seine Verschränktheit zu erhalten. Der magischen Simplex der bipartiten Qutrits ist ein 8-dimensionaler Euklidischer Raum, in dem wir über den klassischen Phasenraum und dessen affinen Transformationen Schnitte diskutieren. Zustände ausserhalb des Umhüllenden Polytop sind stets verschränkt, die innerhalb des Kern Polytops stets separabel. Nach der Beschreibung beider Polytope reparametrisiere ich das Kern Polytop um eine Darstellung via Linearkombinationen von Projektionsoperatoren zu erhalten. Auf dieser Darstellung beruht das Mathematica-Programm mit dessen Hilfe ich Graphiken zu den betrachteten Schnitten erstelle. Das Peres Kriterium, ein notwendiges Kriterium für die Separabilität eines Zustandes, wende ich ebenfalls an um den Bereich wo Verschränktheit gesichert ist, weiter auszudehnen. Im Anschluss an diese Vorbereitungen widme ich mich der konkreten Berechnung der Schnitte durch den Simplex für bipartite Qubits und biparte Qutrits mit einer unterschiedlichen Anzahl von Belltypischen Zuständen (drei und vier für Qubits und vier, fünf, sechs und acht für Qutrits), wobei sie durch die hohe Symmetrie dezimiert werden können.

Abstract

The main focus of my diploma thesis is to investigate the geometry of the so called magic simplex $\mathcal{W}$. By intersections through the simplex one gets informations on separability and entanglement. The magic simplex of the bipartite qutrits is a 8-dimensional euclidian space. Via the classical phase space and its affine transformations one can discuss the intersections through $\mathcal{W}$. States outside the enclosure polytope are always entangled whereas states inside the kernel polytope are always separable. After description of both polytopes I make a reparametrization of the kernel polytop to get a representation via linear combinations of projection operations. The mathematica program which I use to produce graphics for the intersections bases on this representation. The Peres criterion is a necessary criterion for the separability of a state. I use it enlarge the area where entanglement is secure. Following this preparations I calculate the intersections through the simplex for bipartite qubits and biparte qutrits with a different number of Bell typical states (three and four for qubits and four, five, six and eight for qutrits). By the high symmetry we can reduce the number of intersections.