universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Kohomologie von Lie Algebren

Verfasser

Florian Kickinger

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im April 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 405
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Diplomstudium Mathematik
Betreut von:	Assoz. Prof. Dr. Dietrich Burde

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegendes

1.1 Lie Algebren und deren Darstellungen

Zuerst wollen wir uns einige grundlegende Begriffe in Erinnerung rufen (siehe [Bu1], [J3], [H]): Eine *Lie Algebra* $\mathfrak{g}$ über einem Körper K ist ein K–Vektorraum $\mathfrak{g}$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, auch Lie–Klammer genannt, sodass

$$[x,x] = 0 \tag{1.1}$$
$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \tag{1.2}$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$ gilt. Die zweite Bedingung heißt Jacobi–Identität. Ein *Ideal* $\mathfrak{a}$ einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein Teilvektorraum von $\mathfrak{g}$ für den gilt: $[x,y] \in \mathfrak{a}$ für alle $x \in \mathfrak{a}$ und $y \in \mathfrak{g}$.

Beispiele 1.1.1. (1) Jeder K–Vektorraum V wird durch $[x,y] := 0$ für jedes $x, y \in V$ zu einer Lie Algebra über dem Körper K. Lie Algebren mit trivialer Lie–Klammer heißen auch abelsche Lie Algebren.

(2) Auf dem K–Vektorraum der 2×2–Matrizen $M_{2\times2}(K)$ erhalten wir durch $[M,N] := MN - NM$ für $M, N \in M_{2\times2}(K)$ eine Lie Algebra–Struktur. Dies lässt sich ohne weiteres auf beliebige quadratische Matrizen erweitern. Denn für jedes $n \geq 1$ bildet $M_{n\times n}$ eine assoziative K–Algebra die, wie das nächste Beispiel zeigt, mittels dem Kommutator zu einer Lie Algebra wird.

(3) Ist A eine assoziative K–Algebra, dann erhalten wir durch Bildung des Kommutators $[x,y] := xy - yx$ eine Lie Algebra. Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen.

(4) Die Menge der Endomorphismen $\mathrm{End}_K(V)$ eines K–Vektorraums V bildet bzgl. der Komposition von Endomorphismen eine assoziative K–Algebra. Nach (3) erhalten wir damit auf kanonischer Weise eine Lie Algebra die wir mit $\mathfrak{gl}(V)$ bezeichnen.

Ist $\mathfrak{h}$ eine weitere Lie Algebra und $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ eine lineare Abbildung, so nennen wir diese einen *Lie Algebra–Homomorphismus*, wenn sie die Lie–Klammern respektiert, dh. wenn

$$\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$$

für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ erfüllt ist. Gilt hingegen $\phi([x,y]) = [\phi(y), \phi(x)]$, so nennen wir ϕ einen *Lie Algebra–Antihomomorphismus*.

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem beliebigen Körper K und M ein K–Vektorraum. Dann nennen wir M zusammen mit einem Lie Algebra–Homomorphismus

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M)$$

einen $\mathfrak{g}$*–Linksmodul* (M, ρ), schreiben aber oft nur M. Für jedes $x \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$ legen wir $x \cdot m := \rho(x)(m)$ fest. Somit gilt für $x, y \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$: $[x, y] \cdot m = x \cdot (y \cdot m) - y \cdot (x \cdot m)$. Hingegen nennen wir M zusammen mit einem Lie Algebra–Antihomomorphismus $\bar{\rho} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M)$ einen $\mathfrak{g}$–Rechtsmodul $(M, \bar{\rho})$, schreiben aber auch hier oft nur M. Für $x \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$ sei $m \cdot x := \bar{\rho}(m)$. Es gilt dann: $m \cdot [x, y] = (m \cdot x) \cdot y - (m \cdot y) \cdot x$.

Bemerkung 1.1.2. Offensichtlich ist $\bar{\rho}$ genau dann ein Lie Algebra–Antihomomorphismus, wenn $\rho := -\bar{\rho}$ ein Lie Algebra–Homomorphismus ist. Somit macht man einen $\mathfrak{g}$–Rechtsmodul M durch $m \cdot x := -x \cdot m$ zu einem $\mathfrak{g}$–Linksmodul und umgekehrt. Wir werden daher zwischen beiden oft nicht unterscheiden und den Begriff $\mathfrak{g}$–Modul gleichermaßen als ein Synonym für einen $\mathfrak{g}$–Links– wie auch $\mathfrak{g}$–Rechtsmodul verwenden.

Einen Unterraum N eines $\mathfrak{g}$–Modul's M (bzgl. der Vektorraumstruktur) nennen wir einen *Untermodul* von M, falls $x \cdot n \in N$ für alle $x \in \mathfrak{g}$, $n \in N$ gilt. In diesem Fall besitzt der Quotientenraum M/N eine kanonische $\mathfrak{g}$–Modul–Struktur. Der dadurch erhaltene $\mathfrak{g}$–Modul nennen wir den *Quotientenmodul* von M durch N. Ist M ein $\mathfrak{g}$–Modul, dann heißt

$$M^{\mathfrak{g}} := \left\{ m \in M | x \cdot m = 0 \; \forall x \in \mathfrak{g} \right\} \qquad \text{resp.} \qquad M_{\mathfrak{g}} := M/\mathfrak{g} \cdot M$$

der *Invarianten–* resp. *Koinvarianten–Modul* von M. Offensichtlich ist $M^{\mathfrak{g}}$ ein Untermodul von M und $M_{\mathfrak{g}}$ der Quotientenmodul von M durch $\mathfrak{g} \cdot M$.

Beispiele 1.1.3. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K.
(1) Der zu einem K–Vektorraum V triviale $\mathfrak{g}$–Modul ist definiert durch $x \cdot v = 0$ für jedes $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$.
(2) K selbst tritt häufig als trivialer $\mathfrak{g}$–Modul auf.
(3) Durch $x \cdot y := [x, y]$ wird $\mathfrak{g}$ selbst auf kanonische Weise zu einem $\mathfrak{g}$–Modul. Dies folgt aus der Bilinearität der Lie Klammer und der Jacobi–Identität (1.2).
(4) Allgemeiner ist jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$ ein kanonischer $\mathfrak{g}$–Modul.
(5) Sind M und N zwei $\mathfrak{g}$–Moduln und bezeichne $M \otimes_K N$ das Tensorprodukt der beiden K–Vektorräume M und N, so induziert

$$x \cdot (m \otimes n) := (x \cdot m) \otimes n + m \otimes (x \cdot n) \tag{1.3}$$

eine $\mathfrak{g}$–Modul–Struktur auf $M \otimes_K N$.
(6) Hingegen erhalten wir auf $\mathrm{Hom}_K(M, N)$, den Raum der linearen Abbildungen

von M nach N, eine $\mathfrak{g}$–Modul–Struktur indem wir für jedes $x \in \mathfrak{g}$ und $f \in \mathrm{Hom}_K(M,N)$

$$(x \cdot f)(m) := x \cdot f(m) - f(x \cdot m) \tag{1.4}$$

definieren.

Sind M und N zwei $\mathfrak{g}$–Moduln und $f : M \longrightarrow N$ eine lineare Abbildung für die $f(x \cdot m) = x \cdot f(m)$ für jedes $x \in g$ und $m \in M$ gilt, so bezeichnen wir f als einen $\mathfrak{g}$*–Modul–Homomorphismus* von M nach N. Für den Raum aller $\mathfrak{g}$–Modul–Homomorphismen von M nach N schreiben wir $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N)$. Es gilt:

$$\big(\mathrm{Hom}_K(M,N)\big)^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N). \tag{1.5}$$

1.2 Homologie und Kohomologie von Lie Algebren

Sei R ein Ring und Γ eine Menge. Dann nennen wir einen R–Modul M Γ–graduiert, falls es eine Familie von Untermoduln $(M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ in M gibt, sodass man M als direkte (innere) Summe dieser schreiben kann:

$$M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma.$$

In weiterer Folge bezeichnen wir M entweder durch $M_\bullet$ oder $M^\bullet$ um die vorhandene Graduierung zu unterstreichen.

Ein Element $m \in M_\bullet$ heißt homogen vom Grad γ oder γ–homogen, falls $m \in M_\gamma$ gilt. Jedes Element $m \in M$ besitzt eine eindeutige Darstellung als Summe homogener Elemente: $m = \sum_{\gamma \in \Gamma} m_\gamma$. Dabei bezeichnen wir m_γ als den γ–homogenen Anteil von m. Bis auf endlich viele $\gamma \in \Gamma$ gilt: $m_\gamma = 0$. Ein R–Untermodul P von $M_\bullet$ heißt homogen (bzgl. Γ), falls mit $m \in P$ auch $m_\gamma \in P$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ folgt. Definieren wir $P_\gamma := P \cap M_\gamma$, dann gilt: $P = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} P_\gamma$, dh. jeder homogene Untermodul P ist gleichfalls Γ–graduiert.

Ist $N_\bullet$ ebenfalls Γ–graduiert und zudem $(\Gamma, +, 0)$ ein Monoid, so ist ein R–Modulhomomorphismus $f : M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ *homogen vom Grad* $\gamma' \in \Gamma$, falls

$$f_\bullet(M_\gamma) \subseteq N_{\gamma+\gamma'} \text{ für alle } \gamma \in \Gamma$$

gilt. In diesem Fall sei für jedes $\gamma \in \Gamma$ $f_\gamma : M_\gamma \longrightarrow N_{\gamma+\gamma'}$ jener Modulhomomorphismus, der $\iota_{N_\gamma} \circ f_\gamma = f \circ \iota_{M_\gamma}$ erfüllt. Die Untermoduln $\mathrm{Ker}(f_\bullet)$ und $\mathrm{Im}(f_\bullet)$ von $M_\bullet$ bzw. $N_\bullet$ sind dann homogen. Ist f homogen vom Grad 0, so bezeichnen wir f als *graderhaltend*.

Ein *Kettenkomplex* (s. [W, Chap. 1]) $(C_\bullet, d_\bullet)$ über einem Ring R ist ein $\mathbb{Z}$–graduierter R–Modul $C_\bullet$ zusammen mit einem homogenen R–Endomorphismus $d_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ vom Grad -1, welcher $d_\bullet \circ d_\bullet = 0$ erfüllt. Dh. im Wesentlichen besteht ein derartiger Kettenkomplex aus einer Familie von R–Moduln $(C_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ sowie einer Familie von R–Modulhomomorphismen $(d_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ mit $d_p : C_p \longrightarrow C_{p-1}$ und $d_{p-1} \circ d_p = 0$

für alle $p \in \mathbb{Z}$. Als Diagramm dargestellt erhalten wir:

$$\cdots \xrightarrow{d_{p+2}} C_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} C_p \xrightarrow{d_p} C_{p-1} \xrightarrow{d_{p-1}} C_{p-2} \xrightarrow{d_{p-2}} \cdots$$

Aus $d_\bullet \circ d_\bullet = 0$ folgt $\mathrm{Im}(d_\bullet) \subseteq \mathrm{Ker}(d_\bullet)$ sodass wir den Quotienten

$$H(C_\bullet, d_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_\bullet)/\,\mathrm{Im}(d_\bullet)$$

bilden können, die sogenannte *Homologie* des Kettenkomplex $(C_\bullet, d_\bullet)$. Da $d_\bullet$ graduiert ist, sind $\mathrm{Ker}(d_\bullet)$ und $\mathrm{Im}(d_\bullet)$ homogene Untermoduln und folglich $H(C_\bullet, d_\bullet)$ $\mathbb{Z}$–graduiert: $H(C_\bullet, d_\bullet) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(C_\bullet, d_\bullet)$ mit $H_p(C_\bullet, d_\bullet) = \mathrm{Ker}(d_p)/\,\mathrm{Im}(d_{p+1})$, der Raum der p–ten Homologiegruppe von $(C_\bullet, d_\bullet)$. Wir schreiben daher $H_\bullet(C_\bullet, d_\bullet)$ anstelle von $H(C_\bullet, d_\bullet)$. Die Elemente in $\mathrm{Ker}(d_p)$ werden als p–Zyklen — jene in $\mathrm{Im}(d_{p+1})$ ($\subseteq \mathrm{Ker}(d_p)$) als p–Ränder bezeichnet.

Ist $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ ein weiterer Kettenkomplex über R, dann nennen wir einen graderhaltenden Homomorphismus $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ eine *Kettenkomplexabbildung*, falls $f_\bullet$ mit den Randoperator vertauscht: $d'_\bullet \circ f_\bullet = f_\bullet \circ d_\bullet$. Eine Kettenkomplexabbildung stellt in Form eines Diagramms also eine kommutative Leiter dar:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "d_{p+1}"] \arrow[d, "f_{p+1}"'] & C_p \arrow[r, "d_p"] \arrow[d, "f_p"'] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{p+1} \arrow[r, "d'_{p+1}"] & C'_p \arrow[r, "d'_p"] & C'_{p-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Dass jede Kettenkomplexabbildung einen graderhaltenden Homomorphismus

$$H_\bullet(f_\bullet) : H_\bullet(C_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow H_\bullet(C'_\bullet, d'_\bullet)$$

in der Homologie induziert, zeigt folgende

Bemerkung 1.2.1. Homomorphismen, die zusammen ein kommutatives Rechteck bilden (solide Pfeile im folgenden Diagramm), induzieren Homomorphismen $\bar{f} : \mathrm{Ker}(\tau) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\tau')$ und $\tilde{g} : \mathrm{Koker}(\tau) \longrightarrow \mathrm{Koker}(\tau')$ die zusammen mit den kanonischen Homomorphismen (strichlierte Pfeile) das Rechteck links– und rechtsseitig kommutativ erweitern:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\tau) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dotted, "\bar{f}"'] & A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, dashed] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Koker}(\tau) \arrow[d, dotted, "\tilde{g}"] \\
\mathrm{Ker}(\tau') \arrow[r, dashed] & A' \arrow[r, "\tau'"] & B' \arrow[r, dashed] & \mathrm{Koker}(\tau')
\end{tikzcd}$$

Dies folgt aus elementaren Tatsachen der Algebra. Auf Grund von $d_{p+1} \circ d_p = 0$ faktorisiert der Korandoperator d_{p+1} zu $C_{p+1} \xrightarrow{\underline{d}_{p+1}} \mathrm{Ker}(d_p) \hookrightarrow C_p$ und es gilt

$\operatorname{Koker}(\underline{d}_{p+1}) = H_p(C_\bullet, d_\bullet)$. Aus (1.6) resultiert folglich das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& & & & & & H_p(C_\bullet, d_\bullet) \arrow[ddd, dotted, "H_p(f_\bullet)"] \\
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\underline{d}_{p+1}"] \arrow[d, "f_{p+1}"'] & \operatorname{Ker}(d_p) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dotted, "\bar{f}_p"'] \arrow[urrrr, dashed] & C_p \arrow[r, "d_p"] \arrow[d, "f_p"'] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"'] & \cdots & \\
\cdots \arrow[r] & C'_{p+1} \arrow[r, "\underline{d}'_{p+1}"] & \operatorname{Ker}(d'_p) \arrow[r, dashed] \arrow[drrrr, dashed] & C'_p \arrow[r, "d'_p"] & C'_{p-1} \arrow[r] & \cdots & \\
& & & & & & H_p(C'_\bullet, d'_\bullet).
\end{tikzcd}$$

Zur Definition der Homologie einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ samt $\mathfrak{g}$–Modul M benötigen wir einige Begriffe aus der multilinearen Algebra ([E, Appedix 2]): Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Dann konstruieren wir folgenden graduierten K–Vektorraum:

$$T^\bullet(V) := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} T^p(V) \text{ mit } T^0(V) := K \text{ und } T^p(V) := \underbrace{V \otimes_K \cdots \otimes_K V}_{p\text{–mal}}.$$

Auf ihn wird durch

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p, v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q}$$

ein Operator $\otimes : T^\bullet(V) \otimes_K T^\bullet(V) \longrightarrow T^\bullet(V)$ induziert, der $T^\bullet(V)$ zu einer assoziativen, unitären und graduierten Algebra werden lässt, die sogenannte *Tensoralgebra* von V.

Das Ideal I in $T^\bullet(V)$, welches durch die Elemente der Form $v \otimes v$ erzeugt wird, ist ein echtes und homogenes Ideal der Algebra $T^\bullet(V)$. Demnach ist der Quotient

$$\Lambda^\bullet(V) := T^\bullet(V)/I$$

ebenfalls eine assoziative, unitäre und graduierte Algebra:

$$\Lambda^\bullet(V) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p(V) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} T^p(V)/(I \cap T^p(V)).$$

Sie wird *Äußere Algebra* von V bezeichnet. Für ihre Elemente der Form $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p + I \in \Lambda^\bullet(V)$ schreiben wir $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ und folglich $\wedge$ für den Multiplikationsoperator

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, v_{p+1} \wedge \cdots \wedge v_{p+q}) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+q}.$$

Ist nun M ein $\mathfrak{g}$–Modul einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ über dem Körper K, so lässt sich die Tensoralgebra $T^\bullet(M)$ gleichfalls als einen $\mathfrak{g}$–Modul verstehen: $T^0(M) = K$ sei der triviale $\mathfrak{g}$–Modul und für $p \geq 1$ sei $T^p(M)$ jener $\mathfrak{g}$–Modul, welcher induktiv aus (1.3) hervor geht:

$$x \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_p) = \sum_{i=1}^{p} m_1 \otimes \cdots \otimes m_{i-1} \otimes (x \cdot m_i) \otimes m_{i+1} \otimes \cdots \otimes m_p.$$

Wie man leicht sieht, ist I ein $\mathfrak{g}$–Untermodul in $T^\bullet(M)$:
Für $m \otimes m \in I$ und einem beliebigen $x \in \mathfrak{g}$ gilt

$$x \cdot (m \otimes m) = (x \cdot m + m) \otimes (x \cdot m + m) - x \cdot m \otimes x \cdot m - m \otimes m \in I$$

und damit folgt für jedes Element $m \otimes m \otimes \alpha$ einer vektorraumerzeugenden Menge von I:

$$x \cdot (m \otimes m \otimes \alpha) = \underbrace{x \cdot (m \otimes m)}_{\in I} \otimes \alpha + m \otimes m \otimes x \cdot \alpha \in I.$$

Also besitzt auch der Quotient $T^\bullet(M)/I = \Lambda^\bullet(M)$ eine $\mathfrak{g}$–Modul–Struktur: Für $m_i \in M$ und einem $x \in \mathfrak{g}$ erhalten wir:

$$x \cdot (m_1 \wedge \cdots \wedge m_p) = \sum_{i=1}^{p} m_1 \wedge \cdots \wedge m_{i-1} \wedge (x \cdot m_i) \wedge m_{i+1} \wedge \cdots \wedge m_p. \tag{1.7}$$

Zur Vereinfachung verwenden wir folgende Notationen: Für $p, q, r \in \mathbb{N}$ und $m_i \in M$ definieren wir $m_p^q \in \Lambda^{q-p+1}(M)$ und ${}_r m_p^q \in \Lambda^{q-p}(M)$ durch:

$$m_p^q := \begin{cases} m_p \wedge \cdots \wedge m_q & \text{falls } p \leq q \\ 1_K & \text{falls } p = q+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$${}_r m_p^q := m_p^{r-1} \wedge m_{r+1}^q$$

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über dem Körper K und M ein $\mathfrak{g}$–Rechtsmodul. Dann definiert $C_\bullet(\mathfrak{g}, M)$ jenen $\mathbb{Z}$–graduierten K–Vektorraum, für den

$$C_p(\mathfrak{g}, M) := \begin{cases} \Lambda^p(\mathfrak{g}) \otimes_K M & \text{falls } p \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Da $\mathfrak{g}$ nach Beispiel 1.1.3 (3) selbst ein $\mathfrak{g}$–Rechtsmodul ist (man beachte dazu Bemerkung 1.1.2), besitzt $C_\bullet(\mathfrak{g}, M)$ die Modulstruktur

$$(x_1^p \otimes m) \cdot x \overset{(1.3)}{=} (x_1^p \cdot x) \otimes m + x_1^p \otimes m \cdot x \overset{(1.7)}{=} \sum_{i=1}^{p} x_1^{i-1} \wedge [x_i, x] \wedge x_{i+1}^p \otimes m + x_1^p \otimes m \cdot x.$$

Andererseits ist $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})$ als K–Algebra insbesondere ein Ring sodass $C_\bullet(\mathfrak{g}, M)$ zugleich ein $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})$–Linksmodul mit $\wedge$ als Moduloperator ist: $y_1^q \wedge (x_1^p \otimes_K m) := (y_1^q \wedge x_1^p) \otimes_K m$.

Wir verwenden nun beide Modulstrukturen um induktiv eine lineare graduierte Abbildung $d_\bullet(\mathfrak{g}, M) : C_\bullet(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C_\bullet(\mathfrak{g}, M)$ festzulegen: Für $p \leq 0$ sei $d_p(\mathfrak{g}, M) = 0$

und für $p > 0$ definieren wir

$$d_p(\mathfrak{g}, M)(x_1^p \otimes m) := (x_2^p \otimes m) \cdot x_1 - x_1 \wedge d_{p-1}(\mathfrak{g}, M)(x_2^p \otimes m). \tag{1.8}$$

Offensichtlich ist $d_\bullet(\mathfrak{g}, M)$ ein wohldefinierter, homogener K–Endomorphismus vom Grad -1. Es gilt nun folgende

Proposition 1.2.2. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K und M ein $\mathfrak{g}$–Rechtsmodul. Dann bildet $(C_\bullet(\mathfrak{g}, M), d_\bullet(\mathfrak{g}, M))$ einen Kettenkomplex über K. Zusätzlich gilt $d_\bullet(\mathfrak{g}, M) \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(C_\bullet(\mathfrak{g}, M))$.*

Beweis. Zuerst zeigen wir $d_\bullet \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(C_\bullet(\mathfrak{g}, M))$ per Induktion: Für $p \leq 0$ ist d_p trivialerweise ein $\mathfrak{g}$–Modulhomomorphismus. Sei also $p > 0$, $x_1^p \otimes m \in C_p(\mathfrak{g}, M)$ und für $< p$ gelte die Induktionsvoraussetzung. Dann erhalten wir aus

$$\begin{aligned}
d_p(x_1^p \otimes m) \cdot y &= ((x_2^p \otimes m) \cdot x_1 - x_1 \wedge d_{p-1}(x_2^p \otimes m)) \cdot y \\
&= ((x_2^p \otimes m) \cdot y) \cdot x_1 + (x_2^p \otimes m) \cdot [x_1, y] - [x_1, y] \wedge d_{p-1}(x_2^p \otimes m) \\
&\quad - x_1 \wedge d_{p-1}((x_2^p \otimes m) \cdot y) \\
&= d_p(x_1 \wedge (x_2^p \otimes m) \cdot y) + d_p([x_1, y] \wedge (x_2^p \otimes m)) \\
&= d_p((x_1^p \otimes m) \cdot y)
\end{aligned}$$

den erforderlichen Induktionsschritt.

Es fehlt noch $d_\bullet \circ d_\bullet = 0$ induktiv zu zeigen: Auch hier ist nur der Induktionsschritt nicht–trivial: Ist $x_1^p \otimes m \in C_p(\mathfrak{g}, M)$ und für $q < p$ gelte $d_{q-1} \circ d_q = 0$, dann folgt aus

$$\begin{aligned}
d_{p-1}(d_p(x_1^p \otimes m) &= d_{p-1}((x_2^p \otimes m) \cdot x_1 - x_1 \wedge d_{p-1}(x_2^p \otimes m)) \\
&= (d_{p-1}(x_2^p \otimes m)) \cdot x_1 - (d_{p-1}(x_2^p \otimes m)) \cdot x_1 + x_1 \wedge \underbrace{d_{p-2}(d_{p-1}(x_2^p \otimes m)}_{=0 \text{ nach I.V.}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

die Behauptung. □

Definition 1.2.3. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K und M ein $\mathfrak{g}$–Rechtsmodul. Dann nennen wir den $\mathbb{Z}$–graduierten K–Vektorraum

$$H_\bullet(\mathfrak{g}, M) := H_\bullet(C_\bullet(\mathfrak{g}, M), d_\bullet)$$

die Homologie von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M und $H_p(\mathfrak{g}, M) := H_p(C_\bullet(\mathfrak{g}, M), d_\bullet)$ die p–te Homologiegruppe von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M. Mit $Z_p(\mathfrak{g}, M) := \operatorname{Ker}(d_p)$ bezeichnen wir die p–Zyklen und mit $B_p(\mathfrak{g}, M) := \operatorname{Im}(d_{p+1})$ die p–Ränder von $(C_\bullet(\mathfrak{g}, M), d_\bullet)$.

Ist $f : M \longrightarrow N$ ein beliebiger $\mathfrak{g}$–Rechtsmodulhomomorphismus, dann induziert dieser eine Kettenkomplexabbildung

$$f_\bullet : C_\bullet(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C_\bullet(\mathfrak{g}, N)$$

indem wir $f_\bullet(x_1^p \otimes_K m) := x_1^p \otimes_K f(m)$ definieren und $\mathbb{Z}$–linear fortsetzen. Offensichtlich ist $f_\bullet$ eine lineare Abbildung vom Grad 0. Um nachzuprüfen, dass es sich dabei tatsächlich um eine Kettenkomplexabbildung handelt (dh. $f_\bullet$ vertauscht mit den Randoperatoren), zeigen wir zuvor die Verträglichkeit von $f_\bullet$ mit den beiden auf $C_\bullet(\mathfrak{g}, M)$ und $C_\bullet(\mathfrak{g}, N)$ herrschenden Modulstrukturen:

(i) $f_\bullet$ ist ein $\mathfrak{g}$–Rechtsmodulhomomorphismus:

$$\begin{aligned}(f_\bullet(x_1^p \otimes_K m) \cdot x &= (x_1^p \otimes_K f(m)) \cdot x = (x_1^p \cdot x) \otimes_K f(m) + x_1^p \otimes_K \underbrace{f(m) \cdot x}_{f(m \cdot x)} \\ &= f_\bullet(x_1^p \cdot x) \otimes_K f(m) + x_1^p \otimes_K m \cdot x) \\ &= f_\bullet((x_1^p \otimes_K m) \cdot x).\end{aligned}$$

(ii) $f_\bullet$ ist ein $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})$–Linksmodulhomomorphismus:

$$\begin{aligned}x \wedge f_\bullet(x_1^p \otimes_K m) &= x \wedge (x_1^p \otimes_K f(m)) = (x \wedge x_1^p) \otimes_K f(m) = f_\bullet((x \wedge x_1^p) \otimes_K m) \\ &= f_\bullet(x \wedge (x_1^p \otimes_K m)).\end{aligned}$$

Beachten wir nun (1.8) so folgt induktiv die Behauptung $f_\bullet$ ist eine Kettenkomplexabbildung. Für die durch $f_\bullet$ induzierte lineare Abbildung

$$H_\bullet(f_\bullet) : H_\bullet(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow H_\bullet(\mathfrak{g}, N)$$

schreiben wir kurz $H_\bullet(f)$. Nun kommen wir zu dem Begriff des Kokettenkomplexes und der zugehörigen Kohomologie:

Ein *Kokettenkomplex* $(C^\bullet, d^\bullet)$ über einem Ring R ist ein $\mathbb{Z}$–graduierter R–Modul $C^\bullet$ zusammen mit einem R–Modulendomorphismus $d^\bullet : C^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ vom Grad 1, welcher $d^\bullet \circ d^\bullet = 0$ erfüllt. Man kann einen Kokettenkomplex als einen Tupel, bestehend aus einer Familie von R–Moduln $(C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ und einer Familie von R–Modulhomomorphismen $(d^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ für die $d^p : C^p \longrightarrow C^{p+1}$ und $d_{p-1} \circ d_p = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt, verstehen. In Form eines Diagramms dargestellt erhalten wir:

$$\cdots \xrightarrow{d^{p-2}} C^{p-1} \xrightarrow{d^{p+1}} C^p \xrightarrow{d^p} C^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} C^{p+2} \xrightarrow{d^{p+2}} \cdots$$

Auf Grund von $d^\bullet \circ d^\bullet = 0$ gilt $\operatorname{Im}(d^\bullet) \subseteq \operatorname{Ker}(d^\bullet)$ und wir können analog zu den Kettenkomplexen den Quotienten

$$H(C^\bullet, d^\bullet) := \operatorname{Ker}(d^\bullet)/\operatorname{Im}(d^\bullet)$$

bilden und bezeichnen ihn als *Kohomologie* des Kokettenkomplexes $(C^\bullet, d^\bullet)$. Wiederum handelt es sich bei $\operatorname{Ker}(d^\bullet)$ und $\operatorname{Im}(d^\bullet)$ um homogene Untermoduln sodass wir $H^\bullet(C^\bullet, d^\bullet) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^p(C^\bullet, d^\bullet)$ schreiben können. Analog zu den Homologiegruppen bezeichnet $H^p(C^\bullet, d^\bullet) = \operatorname{Ker}(d^p)/\operatorname{Im}(d^{p-1})$ den Raum der *p–ten Kohomologiegruppe* von $(C^\bullet, d^\bullet)$. Die Elemente in $\operatorname{Ker}(d^p)$ werden *p–Kozyklen* — jene in $\operatorname{Im}(d^{p-1})$ *p–Koränder* genannt.

Ist $(C'^\bullet, d'^\bullet)$ ein weiterer Kokettenkomplex über R, dann nennen wir einen graderhaltenden Homomorphismus $f^\bullet : C^\bullet \longrightarrow C'^\bullet$ eine *Kokettenkomplexabbildung*, falls $f^\bullet$ mit den Korandoperator vertauscht: $d'^\bullet \circ f^\bullet = f^\bullet \circ d^\bullet$. Wie schon in Bemerkung 1.2.1 ausgeführt, induziert auch jede Kokettenkomplexabbildung einen graderhaltenden Homomorphismus in der Kohomologie: $H^\bullet(f^\bullet) : H^\bullet(C^\bullet, d^\bullet) \longrightarrow H^\bullet(C'^\bullet, d'^\bullet)$.

Ist nun $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über dem Körper K und M ein zugehöriger $\mathfrak{g}$–Linksmodul, dann definieren wir durch

$$C^p(\mathfrak{g}, M) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p(\mathfrak{g}), M) & \text{falls } p \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

einen $\mathbb{Z}$–graduierten K–Vektorraum $C^\bullet(\mathfrak{g}, M)$. Da sowohl $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})$ als auch M $\mathfrak{g}$–Linksmoduln sind, existiert nach (1.4) auf $C^\bullet(\mathfrak{g}, M)$ folgende $\mathfrak{g}$–Linksmodulstruktur:

$$(x \cdot \omega)(x_1^p) = x \cdot \omega(x_1^p) - \omega(x \cdot x_1^p) \tag{1.9}$$

für jedes $\omega \in C^\bullet(\mathfrak{g}, M)$ und $x \in \mathfrak{g}$. Für $p = 0$ folgt $(x \cdot \omega)(1_K) = x \cdot \omega(1_K)$ sodass der lineare Isomorphismus $C^0(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow M$, definiert durch $\omega \mapsto \omega(1_K)$, ein $\mathfrak{g}$–Modul–Isomorphismus ist. Daher werden wir zukünftig $C^0(\mathfrak{g}, M)$ mit M identifizieren.

Für jedes fix gewählte $x \in \mathfrak{g}$ definieren wir eine lineare Abbildung

$$-_x\colon C^\bullet(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}, M) \text{ durch } \omega_x(x_1^p) = \omega(x \wedge x_1^p)$$

für jedes $p \geq 0$ und $\omega \in C^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$. Sie ist offensichtlich ein homogener K–Endomorphismus vom Grad -1, im Allgemeinen jedoch kein $\mathfrak{g}$–Modul–Homomorphismus. Denn es gilt:

$$y \cdot \omega_x = (y \cdot \omega)_x + \omega_{y \cdot x}. \tag{1.10}$$

Liegt hingegen x im Zentrum von $\mathfrak{g}$, so ist nach (1.10) $-_x\colon C^\bullet(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}, M)$ sehr wohl ein $\mathfrak{g}$–Modul–Homomorphismus.

Mit Hilfe des soeben definierten Endomorphismus erklären wir auf $C^\bullet(\mathfrak{g}, M)$ einen weiteren K–Endomorphismus $d^\bullet : C^\bullet(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}, M)$ rekursiv durch $d^p = 0$ falls $p < 0$ ist und sonst

$$(d^p\omega)_x = x \cdot \omega - d^{p-1}(\omega_x) \text{ für jedes } \omega \in C^p(\mathfrak{g}, M) \text{ und } x \in \mathfrak{g}. \tag{1.11}$$

Hierbei handelt es sich um einen homogenen K–Endomorphismus vom Grad 1 der, wie folgende Proposition zeigt, ein Modulhomomorphismus ist und mit $C^\bullet(\mathfrak{g}, M)$ zusammen einen Kokettenkomplex bildet:

Proposition 1.2.4. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K und M ein $\mathfrak{g}$–Linksmodul. Dann bildet $(C^\bullet(\mathfrak{g}, M), d^\bullet)$ einen Kokettenkomplex über K. Zusätzlich gilt $d \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(C^\bullet(\mathfrak{g}, M))$.*

Beweis. Induktiv zeigen wir zuerst $x \cdot (d\omega) = d(x \cdot \omega)$: Der Induktionsanfang ist trivial, denn für $C^p(\mathfrak{g}, M)$ mit $p < 0$ ist $d^p = 0$. Sei also $p \geq 0$, $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, M)$ und für $q < p$ die

Bedingung $x \cdot (d^q \omega) = d^q(x \cdot \omega)$ für jedes $x \in \mathfrak{g}$ erfüllt. Dann zeigt sich durch

$$\begin{aligned}
(d^p(x\cdot\omega))_y &= y\cdot(x\cdot\omega) - d^{p-1}((x\cdot\omega)_y) = y\cdot(x\cdot\omega) - d^{p-1}(x\cdot\omega_y - \omega_{[x,y]}) = \\
&= y\cdot(x\cdot\omega) - x\cdot(d^{p-1}(\omega_y)) + d^{p-1}(\omega_{[x,y]}) \\
&= y\cdot(x\cdot\omega) - x\cdot(y\cdot\omega - (d^{p-1}\omega)_y) + d^{p-1}(\omega_{[x,y]}) \\
&= -[x,y]\cdot\omega + x\cdot(d^p\omega)_y + d^{p-1}(\omega_{[x,y]}) \\
&= x\cdot(d^p\omega)_y + (d^p\omega)_{[x,y]} \\
&= (x\cdot(d^p\omega))_y
\end{aligned}$$

der gesuchte Induktionsschritt.

Fehlt noch $d^\bullet \circ d^\bullet = 0$ induktiv nach zu weisen: Wie oben ist der Induktionsanfang trivial. Sei also $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, M)$, $y \in \mathfrak{g}$ beliebig und für $q < p$ gelte die Induktionsvoraussetzung $d^{q+1} \circ d^q = 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(d^{p+1}\circ d^p(\omega))_y &= y\cdot(d^p(\omega)) - d^p((d^p(\omega))_y) \\
&= y\cdot(d^p(\omega)) - d^p(y\cdot\omega - d^{p-1}(\omega_y)) \\
&= \underbrace{y\cdot(d^p(\omega)) - d^p(y\cdot\omega)}_{=0} + \underbrace{d^p(d^{p-1}(\omega_y))}_{=0 \text{ nach I.V.}}
\end{aligned}$$

Und die Proposition ist bewiesen. □

Definition 1.2.5. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K und M ein $\mathfrak{g}$–Linksmodul. Dann nennen wir den $\mathbb{Z}$–graduierten K–Vektorraum

$$H^\bullet(\mathfrak{g}, M) := H^\bullet(C^\bullet(\mathfrak{g}, M), d^\bullet)$$

die Kohomologie von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M und $H^p(\mathfrak{g}, M) := H^p(C^\bullet(\mathfrak{g}, M), d^\bullet)$ die p–te Kohomologiegruppe von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M. Mit $Z^p(\mathfrak{g}, M) := \operatorname{Ker}(d^p)$ bezeichnen wir die p–Kozyklen und mit $B^p(\mathfrak{g}, M) := \operatorname{Im}(d^{p-1})$ die p–Koränder von $(C^\bullet(\mathfrak{g}, M), d^\bullet)$.

Bemerkung 1.2.6.

(1) Jeder $\mathfrak{g}$–Linksmodulhomomorphismus $f : M \longrightarrow N$ führt zu einer Kokettenkomplexabbildung:

$$f^\bullet : C^\bullet(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}, N) \text{ mit } f^\bullet(\omega) := f \circ \omega.$$

Dies folgt induktiv aus (1.11) indem wir die folgenden beiden Tatsachen verwenden:

(i) $f^\bullet$ ist ein $\mathfrak{g}$–Linksmodulhomomorphismus:

$$\begin{aligned}
(x\cdot f^\bullet(\omega))(x_1^p) &= (x\cdot(f\circ\omega))(x_1^p) = x\cdot f(\omega(x_1^p)) - f(\omega(x\cdot x_1^p)) \\
&\overset{\text{n.V.}}{=} f(x\cdot\omega(x_1^p)) - f(\omega(x\cdot x_1^p)) = f(x\cdot\omega(x_1^p) - \omega(x\cdot x_1^p)) \\
&= f^\bullet(x\cdot\omega)(x_1^p)
\end{aligned}$$

(ii) $f^\bullet$ kommutiert mit der linearen Abbildung $-_x\colon C^\bullet(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C^{\bullet-1}(\mathfrak{g}, M)$, was offensichtlich der Fall ist.

Für die durch $f^\bullet$ induzierte lineare Abbildung $H^\bullet(f^\bullet) : H^\bullet(g, M) \longrightarrow H^\bullet(g, N)$ vom Grad 0 schreiben wir kurz $H^\bullet(f)$.

(2) Eine weitere Darstellung des Korand–Operators zeigt folgende Identität:

$$d^p\omega(x_0^p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(x_i \cdot \omega({}_i x_0^p) - \omega(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i+1}^p)). \tag{1.12}$$

Sie lässt sich induktiv leicht nachprüfen:

$$\begin{aligned} d\omega(x_0^p) &\overset{(1.11)}{=} (x_0 \cdot \omega)(x_1^p) - d(\omega_{x_0})(x_1^p) \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} x_0 \cdot \omega(x_1^p) - \omega(x_0 \cdot x_1^p) - \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}(x_i \cdot \omega({}_i x_0^p) - \omega(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i+1}^p)) \\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(x_i \cdot \omega({}_i x_0^p) - \omega(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i+1}^p)). \end{aligned}$$

(3) Sei M der triviale $\mathfrak{g}$–Modul K. Dann gilt $(d^0\omega)(x) = x \cdot \omega = 0$ für jedes $\omega \in K$. Insbesondere ist $B^1(\mathfrak{g}, K) = 0$. Aus (1.12) folgt des Weiteren:

$$\begin{aligned} (d^1\omega)(x_0^1) &= -\omega([x_0, x_1]) \\ (d^2\omega)(x_0^2) &= -\omega([x_0, x_1] \wedge x_2) - \omega(x_1 \wedge [x_0, x_2]) + \omega(x_0 \wedge [x_1, x_2]) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Einerseits gilt damit

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{g}, K) = Z^1(\mathfrak{g}, K) &= \{\omega \in C^1(\mathfrak{g}, K) \mid \omega([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0\} \\ &\cong_K \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], K), \end{aligned} \tag{1.14}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} Z^2(\mathfrak{g}, K) = \{\omega \in C^2(\mathfrak{g}, K) \mid\; &\omega(x_0 \wedge [x_1, x_2]) - \omega(x_1 \wedge [x_0, x_2]) \\ &- \omega([x_0, x_1] \wedge x_2) = 0\} \\ B^2(\mathfrak{g}, K) = \{\omega \in C^2(\mathfrak{g}, K) \mid\; &\omega(x_0 \wedge x_1) = f([x_1, x_2]) \\ &\text{für ein } f \in \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}, K)\}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.3 Die lange exakte Sequenz

Ist R ein Ring (resp. $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra), dann verstehen wir unter einer Sequenz von R– (resp. $\mathfrak{g}$–) Modulhomomorphismen ein Diagramm der Form

$$\cdots \longrightarrow A_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} A_p \xrightarrow{f_p} A_{p+1} \longrightarrow \cdots$$

das auf seiner linken und rechten Seite endlich oder unendlich sein kann. Ist sie beidseitig unendlich, so bezeichnen wir sie als lange Sequenz. Sie ist exakt bei A_p, falls $\mathrm{Im}(f_{p-1}) = \mathrm{Ker}(f_p)$ gilt und nennen sie exakt, wenn sie bei allen A_p's, die nicht ein Ende der Sequenz bilden, exakt ist. Zum Beispiel ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

exakt, wenn sowohl $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ als auch f injektiv und g surjektiv ist. Derartige exakte Sequenzen nennen wir kurze exakte Sequenz. In diesem Abschnitt zeigen wir folgenden

Satz 1.3.1. *Sei* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz von* $\mathfrak{g}$*–Moduln über* K*. Dann existiert eine lange exakte Sequenz sowohl in der Homologie*

$$\cdots \xrightarrow{H_{p+1}(g)} H_{p+1}(\mathfrak{g}, M'') \xrightarrow{\delta_{p+1}} H_p(\mathfrak{g}, M') \xrightarrow{H_p(f)} H_p(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{H_p(g)} H_p(\mathfrak{g}, M'') \xrightarrow{\delta_p} \cdots$$

als auch in der Kohomologie

$$\cdots \xrightarrow{H^{p+1}(g)} H^{p+1}(\mathfrak{g}, M'') \xrightarrow{\delta^{p+1}} H^p(\mathfrak{g}, M') \xrightarrow{H^p(f)} H^p(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{H^p(g)} H^p(\mathfrak{g}, M'') \xrightarrow{\delta^p} \cdots.$$

Wir führen denn Beweis dieses Satzes in zwei Schritten durch: Zuerst zeigen wir, dass jede kurze exakte Sequenz von $\mathfrak{g}$–Moduln eine exakte Sequenz der entsprechenden Ketten– (resp. Koketten–) Komplexe hervorruft (Korollar 1.3.3). Im zweiten Schritt bauen wir dann daraus die gesuchte lange exakte Sequenz der Homologie– (resp. Kohomologie–) Gruppen.

Proposition 1.3.2. *Seien* $f : M \longrightarrow N$ *und* $g : N \longrightarrow P$ *Homomorphismen von* $\mathfrak{g}$*–Moduln einer Lie Algebra* $\mathfrak{g}$ *über dem Körper* K*. Gilt* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$*, dann auch für die induzierte Ketten– und Kokettenkomplexabbildungen:*

$$\mathrm{Im}(f_\bullet) = \mathrm{Ker}(g_\bullet) \qquad\qquad \mathrm{Im}(f^\bullet) = \mathrm{Ker}(g^\bullet).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst $\mathrm{Im}(f_\bullet) = \mathrm{Ker}(g_\bullet)$: Ist $(e_i)_{i\in I}$ eine K–Basis von $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})$ dann bildet bekanntlich $\{e_i \otimes_K n \mid i \in I,\ n \in N\}$ ein lineares Erzeugendensystem von $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_K N$. Wir können daher jedes Element $k \in \mathrm{Ker}(g_\bullet)$ als endliche Summe schreiben: $k = \sum_{i\in I} e_i \otimes_K n_i$. Die n_i's sind dabei eindeutig bestimmt. Dies gilt auch für $0 = g_\bullet(k) = \sum_{i\in I} e_i \otimes_K g(n_i)$ sodass $g(n_i) = 0$ für alle $i \in I$ sein muss und daher m_i's mit $f(m_i) = n_i$ existieren. Folglich gilt $\mathrm{Im}(f_\bullet) \ni f_\bullet(\sum_{i\in I} e_i \otimes_K m_i) = k$. Die Umkehrung zeigt sich analog.

Kommen wir nun zu der Aussage $\mathrm{Im}(f^\bullet) = \mathrm{Ker}(g^\bullet)$: Sei $\omega \in \mathrm{Ker}(g^\bullet)$ und o.B.d.A. ω eine p–Kokette, dann gilt $0 = g^\bullet(\omega) = g \circ \omega$ was $\mathrm{Im}(\omega) \subseteq \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ zufolge hat. Aus den Grundlagen der linearen Algebra folgt die Existenz einer linearen Abbildung $\omega' : \Lambda^p(\mathfrak{g}) \longrightarrow M$ mit $f \circ \omega' = \omega$ und damit $\omega \in \mathrm{Im}(f^\bullet)$. Die Umkehrung zeigt sich noch einfacher. $\square$

Als direkte Folgerung dieser Proposition erhält man

Korollar 1.3.3. *Jede kurze exakte Sequenz* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *von* $\mathfrak{g}$*–Moduln über* K *induziert eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen*

$$0 \longrightarrow C_\bullet(\mathfrak{g}, M') \xrightarrow{f_\bullet} C_\bullet(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet(\mathfrak{g}, M'') \longrightarrow 0$$

und Kokettenkomplexen

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}, M') \xrightarrow{f^\bullet} C^\bullet(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{g^\bullet} C^\bullet(\mathfrak{g}, M'') \longrightarrow 0\,.$$

Da jede Kettenkomplexabbildung graderhaltend ist, gilt $\mathrm{Im}(f_\bullet) = \mathrm{Ker}(g_\bullet)$ genau dann, wenn $\mathrm{Im}(f_p) = \mathrm{Ker}(g_p)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Dh. jede kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen wie im obigen Korollar ist genau dann exakt, wenn jede Zeile im folgenden Diagramm exakt ist:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "d'_{p+1}"'] & \vdots \arrow[d, "d_{p+1}"'] & \vdots \arrow[d, "d''_{p+1}"'] & \\
0 \arrow[r] & C_p(\mathfrak{g}, M') \arrow[r, "f_p"] \arrow[d, "d'_p"'] & C_p(\mathfrak{g}, M) \arrow[r, "g_p"] \arrow[d, "d_p"'] & C_p(\mathfrak{g}, M'') \arrow[r] \arrow[d, "d''_p"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{p-1}(\mathfrak{g}, M') \arrow[r, "f_{p-1}"] \arrow[d, "d'_{p-1}"'] & C_{p-1}(\mathfrak{g}, M) \arrow[r, "g_{p-1}"] \arrow[d, "d_{p-1}"'] & C_{p-1}(\mathfrak{g}, M'') \arrow[r] \arrow[d, "d''_{p-1}"'] & 0. \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd} \tag{1.16}$$

Für Kokettenkomplexe und deren Abbildungen gilt dies völlig analog. Generell unterscheidet sich im weiteren Verlauf des Beweises der homologische vom kohomologischen Fall nicht wesentlich weshalb wir ab sofort nur noch ersteren weiter ausführen werden.

Lemma 1.3.4. *Sei* $(C_\bullet, d_\bullet)$ *ein Kettenkomplex über* R*. Dann induziert für jedes* $p \in \mathbb{Z}$ $d_p : C_p \longrightarrow C_{p-1}$ *einen* R*–Modulhomomorphismus* $\tilde{d}_p : \mathrm{Koker}(d_{p+1}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_{p-1})$ *für den gilt:*

$$\mathrm{Ker}(\tilde{d}_p) = H_p(C_\bullet) \qquad\qquad \mathrm{Koker}(\tilde{d}_p) = H_{p-1}(C_\bullet). \tag{1.17}$$

Ist zudem $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ *eine Komplexabbildung, dann ist folgendes Diagramm kommutativ:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Koker}(d_{p+1}) \arrow[r, "\tilde{f}_p"] \arrow[d, "\tilde{d}_p"] & \mathrm{Koker}(d'_{p+1}) \arrow[d, "\tilde{d}'_p"] \\
\mathrm{Ker}(d_{p-1}) \arrow[r, "\bar{f}_{p-1}"] & \mathrm{Ker}(d'_{p-1}).
\end{tikzcd}$$

Beweis. Da $d_{p-1} \circ d_p = 0$ gilt, können wir $d_p : C_p \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_{p-1}) \subseteq C_{p-1}$ schreiben und wegen $d_p \circ d_{p+1} = 0$ lässt sich $\mathrm{Im}(d_{p+1})$ herausfaktorisieren sodass wir einen Homomorphismus $\tilde{d_p} : \mathrm{Koker}(d_{p+1}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_{p-1})$ erhalten. Nun ist $x + \mathrm{Im}(d_{p+1}) \in \mathrm{Ker}(\tilde{d_p})$ genau dann, wenn $x \in \mathrm{Ker}(d_p)$ gilt. Folglich erhalten wir $\mathrm{Ker}(\tilde{d_p}) = H_p(C_\bullet)$. Die rechte Identität in (1.17) ist gleichfalls einfach zu erklären. Die Verifikation der Natürlichkeit von $\tilde{d_p}$, also der Kommutativität obigen Diagramms, sei dem Leser überlassen. □

Mit Hilfe dieses Lemmas erhalten wir, für jedes $p \in \mathbb{Z}$, aus (1.16) ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Koker}(d'_{p+1}) \arrow[r, "\tilde{f}_p"] \arrow[d, "\tilde{d}'_p"'] & \mathrm{Koker}(d_{p+1}) \arrow[r, "\tilde{g}'_p"] \arrow[d, "\tilde{d}_p"'] & \mathrm{Koker}(d''_{p+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}''_p"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d'_{p-1}) \arrow[r, "\bar{f}_{p-1}"] & \mathrm{Ker}(d_{p-1}) \arrow[r, "\bar{g}_{p-1}"] & \mathrm{Ker}(d''_{p-1}). &
\end{tikzcd} \tag{1.18}$$

Beide Zeilen in (1.18) sind dabei exakt wie folgende Bemerkung zeigt:

Bemerkung 1.3.5. Sei ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\tau') \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathrm{Ker}(\tau) \arrow[r, dotted] \arrow[d, dashed] & \mathrm{Ker}(\tau'') \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\iota_{A'}"] \arrow[d, "\tau'"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & A \arrow[r, "\pi_{A''}"] \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, phantom, "II"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\tau''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\iota_{B'}"'] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r, "\pi_{B''}"'] \arrow[d, dashed] & B'' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
 & \mathrm{Koker}(\tau') \arrow[r, dotted] & \mathrm{Koker}(\tau) \arrow[r, dotted] & \mathrm{Koker}(\tau'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

gegeben, wobei es sich bei den strichliert eingezeichneten Homomorphismen um die kanonischen handelt (siehe Bemerkung 1.2.1). Sind die beiden mittleren Zeilen exakt, so auch die äußeren: Zuerst verifizieren wir die Exaktheit der ersten Zeile bei $\mathrm{Ker}(\tau)$: Sei $a \in \mathrm{Ker}(\tau) \cap \mathrm{Ker}(\pi_{A''})$, dann existiert ein $a' \in A'$ für das $\iota_{A'}(a') = a$ gilt. Nun ist aber $\iota_{B'}(\tau'(a')) = \tau(\iota_{A'}(a')) = 0$ sodass mit $\iota_{B'}$ injektiv $a' \in \mathrm{Ker}(\tau')$ folgt. Die Umkehrung ist trivial. Es sei hier angemerkt, dass für die Exaktheit der ersten Zeile bei $\mathrm{Ker}(\tau)$ neben der Kommutativität des Rechtecks I nur die Exaktheit der zweiten Zeile bei A und die der dritten Zeile bei B' verwendet wurde. Ähnlich (nur dass man diesmal mit Urbildern arbeitet) zeigt sich die Exaktheit der vierten Zeile bei $\mathrm{Koker}(\tau)$ indem man die Kommutativität des Rechtecks II, die Exaktheit der zweiten Zeile bei A'' sowie die der dritten Zeile bei B verwendet. Die Exaktheit der ersten Zeile bei $\mathrm{Ker}(\tau')$ (resp. der vierten Zeile bei $Kokern(\tau'')$) folgt aus der Exaktheit der zweiten Zeile bei A' (resp. der dritten Zeile bei B'').

Berücksichtigen wir nun (1.17), so erhalten wir durch entsprechende Erweiterung von (1.18) ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
 & H_p(\mathfrak{g}, M') \arrow[r] \arrow[d] & H_p(\mathfrak{g}, M) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(\mathfrak{g}, M'') \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Koker}(d'_{p+1}) \arrow[r, "\tilde{f}_p"] \arrow[d, "\tilde{d}'_p"'] & \mathrm{Koker}(d_{p+1}) \arrow[r, "\tilde{g}'_p"] \arrow[d, "\tilde{d}_p"'] & \mathrm{Koker}(d''_{p+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g}''_p"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d'_{p-1}) \arrow[r, "\bar{f}_{p-1}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(d_{p-1}) \arrow[r, "\bar{g}_{p-1}"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(d''_{p-1}) \arrow[d] & \\
 & H_{p-1}(\mathfrak{g}, M') \arrow[r] & H_{p-1}(\mathfrak{g}, M) \arrow[r] & H_{p-1}(\mathfrak{g}, M''). &
\end{tikzcd}$$

Die beiden äußeren Zeilen sind, wie aus Bemerkung 1.3.5 herauszulesen ist, exakt. Nun gilt es, diese beiden Zeilen zu einer exakten Sequenz zu verbinden.

Lemma 1.3.6 (Schlangen–Lemma)**.** *Sei folgendes kommutative Diagramm von R–Moduln mit exakten Zeilen gegeben:*

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r, "\iota_{A'}"] \arrow[d, "\tau'"'] & A \arrow[r, "\pi_{A''}"] \arrow[d, "\tau"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\tau''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\iota_{B'}"] & B \arrow[r, "\pi_{B''}"] & B'' &
\end{tikzcd} \tag{1.19}$$

Dann existiert ein R–Modulhomomorphismus δ, sodass folgende Sequenz exakt ist:

$$\mathrm{Ker}(\tau') \xrightarrow{\overline{\iota_{A'}}} \mathrm{Ker}(\tau) \xrightarrow{\overline{\pi_{A''}}} \mathrm{Ker}(\tau'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Koker}(\tau') \xrightarrow{\widetilde{\iota_{B'}}} \mathrm{Koker}(\tau) \xrightarrow{\widetilde{\pi_{B''}}} \mathrm{Koker}(\tau'')$$

Ein Beweis dieses Lemmas findet sich in der Standardliteratur (z. B. [HiSt, Chap. III, Lem. 5.1]) oder, in wesentlich abstrakterem Kontext, in Abschnitt 3.4. Hier sei nur eine mögliche Definition des sogenannten Verbindungs– od. Einhängungs–Homomorphismus $\delta : \mathrm{Ker}(\tau'') \longrightarrow \mathrm{Koker}(\tau')$ angemerkt: Für ein $a'' \in \mathrm{Ker}(\tau'')$ sei

$$\delta(a'') := [\iota_{B'}^{-1}(\tau(\pi_{A''}^{-1}(a'')))] \in \mathrm{Koker}(\tau')$$

wobei $\pi_{A''}^{-1}(a'')$ ein beliebig gewähltes Urbild von a'' unter $\pi_{A''}$ bezeichnet.

Das Schlangen–Lemma liefert also für jedes $p \in \mathbb{Z}$ eine exakte Sequenz der Form

$$\cdots \longrightarrow H_p(\mathfrak{g}, M') \longrightarrow H_p(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow H_p(\mathfrak{g}, M'') \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(\mathfrak{g}, M') \longrightarrow H_{p-1}(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow H_{p-1}(\mathfrak{g}, M'') \longrightarrow \cdots.$$

Zusammengesetzt ergeben diese exakten Sequenzen die gesuchte lange exakte Sequenz.

1.4 Erweiterungen

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K und M, N $\mathfrak{g}$–Moduln. Eine Erweiterung ξ von M durch N ist eine exakte Sequenz von $\mathfrak{g}$–Moduln der Form

$$\xi : \; 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} \widehat{M} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0 \,.$$

Ist ξ' eine weitere Erweiterung von M durch N, so nennen wir ξ äquivalent zu ξ', kurz $\xi \equiv \xi'$, falls ein $\mathfrak{g}$–Modul–Homomorphismus $\varphi : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ existiert, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\xi : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_N"'] & \widehat{M} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_M"] & 0 \\
\xi' : 0 \arrow[r, "\iota'"] & N \arrow[r] & \widehat{M'} \arrow[r, "\pi'"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{1.20}$$

Bemerkung 1.4.1.

(1) Der $\mathfrak{g}$–Modul–Homomorphismus $\varphi : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M'}$ in (1.20) ist (sofern existent) ein Isomorphismus. Dies folgt aus dem Fünfer–Lemma 3.4.10.

(2) Sind umgekehrt zwei Erweiterungen ξ und ξ' von M durch N gegeben sodass $\widehat{M} \cong \widehat{M'}$ gilt, dann folgt daraus im Allgemeinen nicht $\xi \equiv \xi'$.

(3) Nach (1) ist die Relation $\equiv$ zwischen Erweiterungen symmetrisch (der zu φ inverse Homomorphismus führt zu einem kommutativen Diagramm). Auch Reflexivität und Transitivität von $\equiv$ ist trivialerweise gegeben. Somit handelt es sich bei $\equiv$ um eine Äquivalenzrelation.

(4) Die direkte Summe zweier $\mathfrak{g}$–Moduln M und N liefert eine splittende Erweiterung ξ_0 von M durch N:

$$\xi_0 : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota_c} M \times N \xrightarrow{\pi_c} M \longrightarrow 0$$

Hierbei sind $\iota_c(n) = (0, n)$ und $\pi_c(m, n) = m$ die kanonischen Homomorphismen. Auch sieht man sofort, dass jede zu ξ_0 äquivalente Erweiterung splittend ist.

(5) Ist $\xi : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} \widehat{M} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ eine splittende Erweiterung, dann gilt $\xi \equiv \xi_0$: Denn ist σ ein Schnitt von π, dh. $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$, so definiert $\varphi : M \times N \longrightarrow \widehat{M}$, $\varphi(m, n) := \sigma(m) + \iota(n)$ eine lineare Abbildung sodass

$$\begin{tikzcd}
\xi_0 : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota_c"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_N"'] & M \times N \arrow[r, "\pi_c"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_M"] & 0 \\
\xi : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & \widehat{M} \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von $\mathfrak{g}$–Moduln ist. Da σ ein $\mathfrak{g}$–Modul–Homomorphismus ist, gilt nämlich:

$$\varphi(x\cdot(m,n)) = \varphi(x\cdot m, x\cdot n) = \iota(x\cdot n) + \sigma(x\cdot m) = x\cdot(\iota(n)+\sigma(m)) = x\cdot\varphi(m,n).$$

(6) Eine Erweiterung ξ ist genau dann splittend, wenn $\xi \equiv \xi_0$ gilt. Dies folgt unmittelbar aus (4) und (5).

Definition 1.4.2. Seien M und N $\mathfrak{g}$–Moduln. Dann ist $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{g}}(M,N)$ die Menge der Äquivalenzklassen aller $\mathfrak{g}$–Modul–Erweiterungen von M durch N. $[\xi]$ bezeichne die Äquivalenzklasse von ξ in $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{g}}(M,N)$.

Auf Grund von Bemerkung 1.4.1 (6) bildet $[\xi_0] \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{g}}(M,N)$ die Äquivalenzklasse aller splittenden Erweiterungen. Insbesondere gilt stets $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{g}}(M,N) \neq \varnothing$.

Das folgende Lemma zeigt, wie man mit Hilfe von 1–Kozyklen der Form $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N))$ weitere $\mathfrak{g}$–Modul–Erweiterungen erhalten kann. Dass man damit bereits alle möglichen Erweiterungen beschrieben kann, besagt der anschließende Satz.

Satz 1.4.3. *Seien M,N $\mathfrak{g}$–Moduln und $\omega \in C^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N))$. Dann wird auf dem K–Modul $M\times N$ durch*

$$x\cdot(m,n) := (x\cdot m, x\cdot n + \omega(x)(m)). \tag{1.21}$$

genau dann eine $\mathfrak{g}$–Modul–Struktur beschrieben, wenn $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N))$ gilt. Für den damit erhaltenen $\mathfrak{g}$–Modul schreiben wir kurz $M\times_\omega N$. Zudem ist

$$\xi_\omega:\ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota_c} M\times_\omega N \xrightarrow{\pi_c} M \longrightarrow 0 \tag{1.22}$$

eine Erweiterung von M durch N die genau dann splittet, wenn ω ein Korand ist: $\omega \in B^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N))$. Mehr noch: $\xi_\omega \equiv \xi_{\omega'} \;\Leftrightarrow\; [\omega] = [\omega']$.

Beweis. $M\times N$ bildet zusammen mit (1.21) genau dann einen $\mathfrak{g}$–Modul, wenn

$$[x,y]\cdot(m,n) = \underbrace{x\cdot(y\cdot(m,n))}_{I} - \underbrace{y\cdot(x\cdot(m,n))}_{II} \tag{1.23}$$

gilt. Aus

$$I = x\cdot(y\cdot m, y\cdot n + \omega(y)(m)) = (x\cdot(y\cdot m), x\cdot(y\cdot m) + x\cdot\omega(y)(m) + \omega(x)(y\cdot m))$$

und der dazu analogen Rechnung für II ist (1.23) offensichtlich äquivalent zu

$$\begin{aligned}\omega([x,y])(m) &= x\cdot\omega(y)(m) + \omega(x)(y\cdot m) - y\cdot\omega(x)(m) - \omega(y)(x\cdot m)\\ &\overset{(1.4)}{=} (x\cdot\omega(y) - y\cdot\omega(x))(m).\end{aligned}$$

Nach (1.13) bedeutet das aber gerade $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N))$. Klarerweise ist in diesem Fall ξ_ω eine Erweiterung von M durch N.

Seien $\omega,\omega' \in Z^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N))$ zwei Kozykel. Um die Behauptung $\xi_\omega \equiv \xi_{\omega'} \;\Leftrightarrow$

$[\omega] = [\omega']$ zu zeigen, wählen wir eine lineare Abbildung $\varphi : M \times_\omega N \longrightarrow M \times_{\omega'} N$ sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\xi_\omega : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota_c"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_N"'] & M \times_\omega N \arrow[r, "\pi_c"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_\mathfrak{g}"] & 0 \\
\xi_{\omega'} : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota_c"] & M \times_{\omega'} N \arrow[r, "\pi_c"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Aus der linearen Algebra folgt dann $\varphi(m,n) = (m, n+f(m))$ für eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(M,N)$. Angenommen $\xi_\omega \equiv \xi_{\omega'}$ und φ ist ein $\mathfrak{g}$–Modul–Homomorphismus. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(x\cdot(m,n)) &= x\cdot\varphi(m,n) \\
&\hspace{-2em}(1.27)\Updownarrow \\
(x\cdot m, x\cdot n + \omega(x)(m) + f(x\cdot m)) &= (x\cdot m, x\cdot n + x\cdot f(m) + \omega'(x)(m)) \\
&\hspace{-2em}(1.4)\Updownarrow \\
(\omega-\omega')(x) &= x\cdot f \\
&\hspace{-2em}(1.12)\Updownarrow \\
\omega-\omega' &= d^0 f \in B^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N))
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage bedeutet aber $[\omega] = [\omega']$ in $H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N)$. Die Umkehrung zeigt sich durch Verwendung der Äquivalenzen in umgekehrter Reihenfolge.

Unter Hinzunahme von Bemerkung 1.4.1 (4) folgt daraus die letzte noch offene Behauptung des Satzes:

$$\xi_\omega \text{ splittet } \Leftrightarrow \xi_\omega \equiv \xi_0 \Leftrightarrow [\omega] = [0] \Leftrightarrow \omega \in B^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N)). \qquad \square$$

Satz 1.4.3 liefert uns also eine kanonische, injektive Abbildung

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\mathfrak{g}(M,N), \tag{1.24}$$

die der Klasse der splittenden Erweiterungen $[\xi_0]$ die Kohomologieklasse der Koränder $[0]$ zuordnet. Im Folgenden zeigen wir ihre Surjektivität (s. [N, Prop. V.2.9]):

Satz 1.4.4. *Seien M, N $\mathfrak{g}$–Moduln. Dann existiert eine kanonische Bijektion*

$$\mathrm{Ext}_\mathfrak{g}(M,N) \cong H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M,N))$$

von Mengen, die der Klasse der splittenden Erweiterungen $[\xi_0]$ die Kohomologieklasse der Koränder $[0]$ zuordnet.

Beweis. Es ist nur noch die Surjektivität der Abbildung (1.24) zu zeigen. Sei dazu ξ eine Erweiterung von M durch N, dh. eine exakte Sequenz von $\mathfrak{g}$–Moduln der Form

$$\xi : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} \widehat{M} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Ist $\sigma : M \longrightarrow \widehat{M}$ eine lineare Abbildung mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$, so folgt aus $\pi \circ (x \cdot \sigma) = x \cdot (\pi \circ \sigma) = x \cdot \mathrm{id}_M = 0$ sofort $\mathrm{Im}(x \cdot \sigma) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(\iota)$. Daher ist die lineare Abbildung

$$\omega_\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(M, N) \text{ mit } \omega_\sigma(x) := \iota^{-1} \circ (x \cdot \sigma)$$

wohldefiniert. Legen wir damit dem K–Modul $M \times N$ die Struktur (1.21) auf, so gilt für den linearen Isomorphismus $\varphi : M \times N \longrightarrow \widehat{M}$, $\varphi(m, n) := \iota(n) + \sigma(m)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x \cdot (m, n)) &= \varphi(x \cdot m, x \cdot n + \omega(x)(m)) = \iota(x \cdot n) + \iota(\omega_\sigma(x)(m)) + \sigma(x \cdot m) \\
&= x \cdot \iota(n) + (x \cdot \sigma)(m) + \sigma(x \cdot m) = x \cdot \iota(n) + x \cdot \sigma(m) \\
&= x \cdot \varphi(m, n)
\end{aligned}$$

Damit erklärt (1.21) eine $\mathfrak{g}$–Modul–Struktur auf $M \times N$ (φ ist isomorph) sodass nach Satz 1.4.3 ω_σ eine 1–Kozykel in $Z^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(M, N))$ ist. Außerdem führt φ zu der Äquivalenz $\xi \equiv \xi_{\omega_\sigma}$ (denn $\varphi \circ \iota_c = \iota$ und $\pi \circ \varphi = \pi_c$). Dh. aber (1.24) ist surjektiv: $[\omega_\sigma] \mapsto [\xi_{\omega_\sigma}] = [\xi]$. □

Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}$ Lie Algebren über einem Körper K. Dann nennen wir eine exakte Sequenz von Lie Algebra–Homomorphismen der Form

$$\zeta : 0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0.$$

eine *Erweiterung* von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a}$ eine abelsche Lie Algebra, so nennen wir ζ eine *abelsche* Erweiterung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$. Ist ζ' eine weitere Erweiterungen von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$, so nennen wir ζ äquivalent zu ζ', kurz $\zeta \equiv_{Lie} \zeta'$, falls ein Lie Algebra–Homomorphismus $\varphi : \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}'$ existiert, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\zeta : 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \xrightarrow{\iota} & \widehat{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{id}_{\mathfrak{a}} \Vert & & \varphi \downarrow & & \Vert \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} & & \\
\zeta' : 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \xrightarrow{\iota'} & \widehat{\mathfrak{g}}' & \xrightarrow{\pi'} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0.
\end{array} \tag{1.25}$$

Lemma 1.4.5. *Jede abelsche Erweiterung* $\zeta : 0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ *induziert auf* $\mathfrak{a}$ *eine kanonische* $\mathfrak{g}$*–Modul–Struktur* $\rho_\zeta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$.

Beweis. Als Ideal von $\widehat{\mathfrak{g}}$ besitzt $\iota(\mathfrak{a})$ auf kanonischer Weise (siehe Beispiel 1.1.3 (4)) eine $\widehat{\mathfrak{g}}$–Modul–Struktur $\rho : \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\iota(a))$. Da aber das Ideal $\iota(\mathfrak{a})$ abelsch ist, gilt $\ker(\rho) \supseteq \iota(\mathfrak{a}) = \ker(\pi)$ sodass ρ über π zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$ in $\iota(\mathfrak{a})$ faktorisiert. Mit Hilfe der Injektivität von ι übertragen wir diese Struktur eindeutig auf $\mathfrak{a}$. □

Bemerkung 1.4.6.

(1) Natürlich ist auch hier $\varphi : \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}'$ in (1.25) ein Isomorphismus und $\equiv_{Lie}$ eine Äquivalenzrelation.

(2) Die in Lemma 1.4.5 beschriebene Darstellung ρ_ζ lässt sich mit Hilfe eines Schnittes $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}$ von π wie folgt darstellen:

$$x \cdot_\zeta a := \rho_\zeta(x)(a) = \iota^{-1}([\sigma(x), \iota(a)]) \text{ für alle } x \in \mathfrak{g},\ a \in \mathfrak{a}. \tag{1.26}$$

(3) Äquivalente Erweiterungen $\zeta \equiv_{Lie} \zeta'$ von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$ induzieren idente $\mathfrak{g}$–Modul–Strukturen auf $\mathfrak{a}$: $\rho_\zeta = \rho_{\zeta'}$. Denn auf Grund des kommutativen Diagramms (1.25) gilt (siehe (1.26)):

$$x \cdot_\zeta a = \iota^{-1}([\sigma(x), \iota(a)]) = (\iota'^{-1} \circ \varphi)([\sigma(x), \iota(a)]) = \iota'^{-1}([\sigma'(x), \iota'(a)]) = x \cdot_{\zeta'} a$$

(4) Ist (N, ρ) ein $\mathfrak{g}$–Modul, dann definiert

$$[(x,n),(y,m)] := ([x,y], x \cdot m - y \cdot n)$$

eine Lie Klammer auf $\mathfrak{g} \times N$. Die Einzelheiten sind leicht zu verifizieren und seien dem Leser überlassen. Die so erhaltene Lie Algebra bezeichnen wir mit $\mathfrak{g} \ltimes_0^\rho N$.

(5) Die kanonische Sequenz

$$\zeta_0^\rho : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota_c} \mathfrak{g} \ltimes_0^\rho N \xrightarrow{\pi_c} \mathfrak{g} \longrightarrow 0,$$

bildet eine splittende abelsche Erweiterung von $\mathfrak{g}$ durch N, denn $\sigma_c(x) = (x, 0)$ ist ein Lie Algebra–Homomorphismus. Darüber hinaus gilt $\rho_{\zeta_0^\rho} = \rho$:

$$x \cdot_{\zeta_0^\rho} n \overset{(1.26)}{=} \iota_c^{-1}([\sigma_c(x), \iota_c(n)]) = \iota_c^{-1}([(x,0),(0,n)]) = \iota_c^{-1}((0, x \cdot n)) = x \cdot n.$$

(6) Ist $\zeta : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ eine splittende abelsche Erweiterung, dann gilt $\zeta \equiv_{Lie} \zeta_0^{\rho_\zeta}$. Um dies zu zeigen definieren wir zu einem Schnitt σ von π die lineare Abbildung $\varphi : \mathfrak{g} \ltimes_0^{\rho_\zeta} N \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}$ durch $\varphi(x,n) := \sigma(x) + \iota(n)$. Man sieht sofort, dass

$$\begin{tikzcd}
\zeta_0^{\rho_\zeta} : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota_c"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_N"'] & \mathfrak{g} \ltimes_0^{\rho_\zeta} N \arrow[r, "\pi_c"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_\mathfrak{g}"] & 0 \\
\zeta : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Lie Algebra–Homomorphismen bildet. Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
[\varphi((x,n)), \varphi((y,m))] &= [\sigma(x) + \iota(n), \sigma(y) + \iota(m)] \\
&= [\sigma(x), \sigma(y)] + [\sigma(x), \iota(m)] - [\sigma(y), \iota(n)] \\
&\overset{(1.26)}{=} \sigma([x,y]) + \iota(x \cdot m) - \iota(y \cdot n) \\
&= \varphi(([x,y], x \cdot m - y \cdot n)) \\
&= \varphi([(x,n),(y,m)]).
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(7) Die abelsche Erweiterung $\zeta : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ splittet genau dann, wenn $\zeta \equiv_{Lie} \zeta_0^{\rho_\zeta}$ gilt (siehe (5) und (6)).

Definition 1.4.7. Sei (N, ρ) ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann ist $\operatorname{Ext}_\rho(\mathfrak{g}, N)$ die Menge der Äquivalenzklassen aller abelschen Erweiterungen ζ von $\mathfrak{g}$ durch N, für die $\rho_\zeta = \rho$ gilt. $[\zeta]$ bezeichne die Äquivalenzklasse von ζ in $\operatorname{Ext}_\rho(\mathfrak{g}, N)$.

Satz 1.4.3 beschreibt, wie man jedem Kozykel aus $Z^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Hom}_K(M, N))$ eine $\mathfrak{g}$–Modul–Erweiterung von M durch N zuordnen kann. Der folgende Satz führt eine analoge Zuordnung zwischen $Z^2(\mathfrak{g}, M)$ und abelschen Erweiterungen von $\mathfrak{g}$ durch M vor (s. [N, Prop. V.2.4]):

Satz 1.4.8. *Sei (N, ρ) ein $\mathfrak{g}$–Modul und $\omega \in C^2(\mathfrak{g}, N)$. Dann wird auf dem K–Modul $\mathfrak{g} \times N$ durch*

$$[(x, n), (y, m)] := ([x, y], x \cdot m - y \cdot n + \omega(x \wedge y)) \tag{1.27}$$

genau dann eine Lie–Klammer definiert, wenn $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, N)$ gilt. Die dadurch erhaltene Lie Algebra bezeichnen wir mit $\mathfrak{g} \ltimes_\omega^\rho N$. Zudem ist die kanonische Sequenz

$$\zeta_\omega : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota_c} \mathfrak{g} \ltimes_\omega^\rho N \xrightarrow{\pi_c} \mathfrak{g} \longrightarrow 0,$$

eine abelsche Erweiterung von $\mathfrak{g}$ durch N die $\rho_{\zeta_\omega} = \rho$ erfüllt und genau dann splittet, wenn $\omega \in B^2(\mathfrak{g}, N)$ gilt. Mehr noch: $\zeta_\omega \equiv_{Lie} \zeta_{\omega'} \;\Leftrightarrow\; [\omega] = [\omega']$.

Beweis. Die Klammer in (1.27) definiert für jedes $\omega \in C^2(\mathfrak{g}, N)$ offensichtlich eine entsprechende bilineare Abbildung, die (1.1) erfüllt. Man rechne nun nach, dass sie die Jacobi–Identität (1.2) genau dann erfüllt (und damit genau dann eine Lie Klammer ist), wenn $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, N)$ gilt.

Offensichtlich handelt es sich bei ζ_ω um eine abelsche Erweiterung von $\mathfrak{g}$ durch N. Die Identität $\rho_{\zeta_\omega} = \rho$ ist wie in Bemerkung 1.4.6 (5) zu verifizieren.

Wir zeigen nun die Behauptung $\zeta_\omega \equiv_{Lie} \zeta_{\omega'} \;\Leftrightarrow\; [\omega] = [\omega']$. Dazu seien $\omega, \omega' \in Z^2(\mathfrak{g}, N)$ und $\varphi : \mathfrak{g} \times N \longrightarrow \mathfrak{g} \times N$ eine lineare Abbildung sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\zeta_\omega : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota_c"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_N"'] & \mathfrak{g} \ltimes_\omega^\rho N \arrow[r, "\pi_c"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_\mathfrak{g}"] & 0 \\
\zeta_{\omega'} : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota_c"] & \mathfrak{g} \ltimes_{\omega'}^\rho N \arrow[r, "\pi_c"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Aus der linearen Algebra folgt dann $\varphi(x, n) = (x, n + f(x))$ für ein $f \in \operatorname{Hom}_K(\mathfrak{g}, N)$.

Angenommen $\zeta_\omega \equiv_{Lie} \zeta_{\omega'}$ und φ ist ein Lie Algebra–Homomorphismus. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi\big([(x,n),(y,m)]\big) &= [\varphi(x,n),\varphi(y,m)] \\
(1.27) &\Updownarrow \\
\big([x,y], x\cdot m - y\cdot n + \omega(x\wedge y) + f([x,y])\big) &= \big([x,y], x\cdot m - y\cdot n + x\cdot f(y) - y\cdot f(x) \\
&\Updownarrow \qquad\qquad + \omega'(x\wedge y)\big) \\
(\omega-\omega')(x\wedge y) &= x\cdot f(y) - y\cdot f(x) - f([x,y]) \\
(1.12) &\Updownarrow \\
\omega-\omega' &= d^1 f \in B^2(\mathfrak{g},N)
\end{aligned}$$

Letzteres bedeutet aber $[\omega]=[\omega']$ in $H^2(\mathfrak{g},N)$. Für die Umkehrung verwende man obige Äquivalenzen in umgekehrter Reihenfolge.

Mit Blick auf Bemerkung 1.4.6 (7) gilt nun insbesondere:

$$\zeta_\omega \text{ splittet } \Leftrightarrow \zeta_\omega \equiv_{Lie} \zeta_0 \Leftrightarrow [\omega]=[0] \Leftrightarrow \omega \in B^2(\mathfrak{g},N). \qquad \square$$

Der eben gezeigten Satz liefert also zu jedem $\mathfrak{g}$–Modul (N,ρ) eine kanonische injektive Abbildung

$$H^2(\mathfrak{g},N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\rho(\mathfrak{g},N) \tag{1.28}$$

die der Äquivalenzklasse der splittenden Erweiterungen die Kohomologieklasse der Koränder [0] zuordnet. Wiederum handelt es sich hierbei um eine Bijektion ([N, Prop. V.2.4]):

Satz 1.4.9. *Sei (N,ρ) ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann existiert eine kanonische Bijektion*

$$\mathrm{Ext}_\rho(\mathfrak{g},N) \cong H^2(\mathfrak{g},N)$$

von Mengen, die der Äquivalenzklasse der splittenden abelschen Erweiterungen $[\zeta_0]$ die Kohomologieklasse der Koränder $[0]$ zuordnet.

Beweis. Es ist noch die Surjektivität von (1.28) zu zeigen. Dazu sei $[\zeta] \in \mathrm{Ext}_\rho(\mathfrak{g},N)$ und ζ ein Repräsentant dieser Äquivalenzklasse, dh. eine exakte Sequenz von Lie Algebren der Form

$$\zeta : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

mit $\rho_\zeta = \rho$. Wählen wir zu π einen linearen Schnitt $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}$, dh. es gilt $\pi\circ\sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, so folgt aus $\pi([\sigma(x),\sigma(y)] - \sigma([x,y])) = 0$ die Tatsache $[\sigma(x),\sigma(y)] - \sigma([x,y]) \in \iota(N)$ für alle $x,y\in\mathfrak{g}$. Zusammen mit (1.1) und der Bilinearität der Lie Klammer ist daher

$$\omega_\sigma(x\wedge y) := \iota^{-1}([\sigma(x),\sigma(y)] - \sigma([x,y])) \tag{1.29}$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung $\omega_\sigma : \Lambda^2(\mathfrak{g}) \longrightarrow N$. Legen wir bzgl. dieser 2–Kokette dem K–Modul $\mathfrak{g}\times N$ die Struktur (1.27) auf, so zeigt sich für den linearen

Isomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \times N \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}$, $\varphi((m,n)) := \iota(n) + \sigma(m)$:

$$\begin{aligned} \varphi([(x,n),(y,m)]) &= \varphi([x,y], x\cdot m - y \cdot n + \omega_\sigma(x \wedge y)) \\ &\overset{(1.29)}{=} \iota(x\cdot m) - \iota(y\cdot n) + [\sigma(x),\sigma(y)] - \sigma([x,y]) + \sigma([x,y]) \\ &\overset{(1.26)}{=} [\sigma(x),\iota(m)] - [\sigma(y),\iota(n)] + [\sigma(x),\sigma(y)] \\ &= [\iota(n)+\sigma(x), \iota(m)+\sigma(y)] \\ &= [\varphi(x,n), \varphi(y,m)]. \end{aligned}$$

Damit handelt es sich bei (1.27) um eine Lie Klammer (φ isomorph) sodass nach Satz 1.4.8 ω_σ eine 2–Kozykel in $Z^2(\mathfrak{g}, N)$ ist. Damit haben wir $\zeta_{\omega_\sigma} \equiv \zeta$ gezeigt (denn $\varphi \circ \iota_c = \iota$ und $\pi \circ \varphi = \pi_c$) und folglich auch die Surjektivität von (1.28): $[\omega_\sigma] \mapsto [\zeta_{\omega_\sigma}] = [\zeta]$. $\square$

1.5 Euler–Poincaré Charakteristik

Sei $\mathfrak{g}$ eine n–dimensionale Lie Algebra über einem Körper K und $x_1, \dots, x_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Dann bildet die Menge aller $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p} \in \Lambda^p(\mathfrak{g})$ mit $1 \le i_1 < \dots < i_p \le n$ eine Basis von $\Lambda^p(\mathfrak{g})$ (siehe [J1]). Daher gilt $\dim_K \Lambda^p(\mathfrak{g}) = \binom{n}{p}$. Weiters ist aus den Grundlagen der linearen Algebra die Gleichung $\dim_K \mathrm{Hom}_K(V,W) = \dim_K V \cdot \dim_K W$ für endlichdimensionale Vektorräume V und W bekannt. Daraus ergibt sich für den Raum der p–Koketten:

$$\dim_K C^p(\mathfrak{g}, M) = \dim_K \Lambda^p(\mathfrak{g}) \cdot \dim_K M = \binom{n}{p} \cdot \dim_K M. \tag{1.30}$$

Lemma 1.5.1 ([Sa]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem beliebigen Körper K der Dimension n und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt:*

(i) $\dim_K H^p(\mathfrak{g}, M) = \dim_K Z^p(\mathfrak{g}, M) + \dim_K Z^{p-1}(\mathfrak{g}, M) - \binom{n}{p-1} \cdot \dim_K M$

(ii) $\dim_K H^p(\mathfrak{g}, M) = \binom{n}{p} \cdot \dim_K M - \dim_K B^p(\mathfrak{g}, M) - \dim_K B^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$

Beweis. Einerseits erhalten wir für jedes $p \in \mathbb{Z}$ zu $d^p : C^p(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$ die Dimensions–Gleichung

$$\binom{n}{p} \cdot \dim_K M = \dim_K C^p(\mathfrak{g}, M) = \dim_K \overbrace{Z^p(\mathfrak{g}, M)}^{\mathrm{Ker}(d^p)} + \dim_K \overbrace{B^{p+1}(\mathfrak{g}, M)}^{\mathrm{Im}(d^p)}. \tag{1.31}$$

Andererseits gilt auf Grund von $H^p(\mathfrak{g}, M) = Z^p(\mathfrak{g}, M)/B^p(\mathfrak{g}, M)$ die Gleichung

$$\dim_K H^p(\mathfrak{g}, M) = \dim_K Z^p(\mathfrak{g}, M) - \dim_K B^p(\mathfrak{g}, M). \tag{1.32}$$

Durch entsprechendes Einsetzen von (1.31) in (1.32) folgt sowohl *(i)* als auch *(ii)*. $\square$

Definition 1.5.2. Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem beliebigen Körper K und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann heißt

$$\chi(\mathfrak{g}, M) := \sum_{i=0}^{\dim_K \mathfrak{g}} (-1)^i \dim_K H^i(\mathfrak{g}, M)$$

die Euler–Poincaré Charakteristik von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M. Zu dem triviale $\mathfrak{g}$–Modul K schreiben wir kurz $\chi(\mathfrak{g}) := \chi(\mathfrak{g}, K)$.

Im folgenden Satz stellt sich nun heraus, dass die Euler–Poincaré Charakteristik einer Lie Algebra stets trivial ist.

Satz 1.5.3 ([G]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem beliebigen Körper K und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt:*

$$\chi(\mathfrak{g}, M) = 0$$

Beweis. Aus Lemma 1.5.1 *(i)*, mit $n = \dim_K \mathfrak{g}$, folgt

$$\begin{aligned}
\chi(\mathfrak{g}, M) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\dim_K Z^i(\mathfrak{g}, M) + \dim_K Z^{i-1}(\mathfrak{g}, M) - \binom{n}{i-1} \cdot \dim_K M \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K Z^i(\mathfrak{g}, M) - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left(\dim_K Z^i(\mathfrak{g}, M) - \binom{n}{i} \cdot \dim_K M \right) \\
&= (-1)^n \dim_K Z^n(\mathfrak{g}, M) + \dim_K M \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} \\
&= \dim_K M \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = \dim_K M \cdot (1-1)^n = 0
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

1.6 Poincaré–Dualität

Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K und (M, ρ) ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann erhalten wir durch

$$\rho_{tw}(x)(m) := \rho(x)(m) - \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_x) \cdot m$$

eine neue $\mathfrak{g}$–Modulstruktur auf M. Denn einerseits kommutiert $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_x) \cdot \operatorname{id}_M$ mit jedem Element in $\operatorname{End}_K(M)$ — woraus sofort $[\rho_{tw}(x), \rho_{tw}(y)] = [\rho_{tw}, \rho_{tw}]$ folgt — und andererseits ist $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{[x,y]}) = \operatorname{tr}([\operatorname{ad}_x, \operatorname{ad}_y]) = 0$ weil allgemein $\operatorname{tr}(f \circ g) = \operatorname{tr}(g \circ f)$ für $f, g \in \operatorname{End}_K(M)$ gilt. Beides zusammen führt zu der gewünschten Gleichung $\rho_{tw}([x, y]) = [\rho_{tw}(x), \rho_{tw}(y)]$.

Sofern keine Missverständnisse drohen, werden wir für (M, ρ_{tw}) kurz M^{tw} sowie $x \cdot_{tw} m$ anstelle von $\rho_{tw}(x)(m)$ schreiben. Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra, für die $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_x) = 0$

für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt, so nennen wir $\mathfrak{g}$ eine *unimodulare* Lie Algebra. In diesem Fall gilt $\rho = \rho_{tw}$ bzw. $M = M^{tw}$.

Lemma 1.6.1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich–dimensionale Lie Algebra über einem Körper K und M ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann existiert ein nicht–kanonischer $\mathfrak{g}$–Modul–Isomorphismus*

$$M^{tw} \cong_{\mathfrak{g}} \mathrm{Hom}_K(\Lambda^n(\mathfrak{g}), M) = C^n(\mathfrak{g}, M). \tag{1.33}$$

Beweis. Sei $x_1, \dots, x_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, $x \in \mathfrak{g}$ fix gewählt und $\gamma_{ij} \in K$ so, dass $[x, x_i] = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} x_j$ gilt. Dann erhalten wir:

$$x \cdot x_1^n = \sum_{i=1}^n x_1^{i-1} \wedge [x, x_i] \wedge x_{i+1}^n = \sum_{i=1}^n \gamma_{ii} x_1^n = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) \cdot x_1^n. \tag{1.34}$$

Weil $\Lambda^n(\mathfrak{g})$ allein von x_1^n linear erzeugt wird, ist die Abbildung

$$\omega \mapsto \omega(x_1^n),\ C^n(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow M$$

ein linearer Isomorphismus. Dass er auch die $\mathfrak{g}$–Modulstrukturen respektiert, zeigt schlussendlich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}(x \cdot \omega)(x_1^n) &= x \cdot (\omega(x_1^n)) - \omega(x \cdot x_1^n) \overset{(1.34)}{=} x \cdot (\omega(x_1^n)) - \omega(\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) \cdot x_1^n) \\ &= x \cdot \omega(x_1^n) - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) \cdot \omega_m(x_1^n) = x \cdot_{tw} \omega(x_1^n).\end{aligned}$$ □

Diese Identifizierung von M^{tw} mit $C^n(\mathfrak{g}, M)$ wird sich im Beweis der Poincaré–Dualität als sehr hilfreich erweisen. Dass sie nicht kanonisch ist, liegt an der Wahl der Basis von $\mathfrak{g}$: Sie ist im Allgemeinen nicht kanonisch.

Satz 1.6.2 (Poincaré–Dualität)**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine n–dimensionale Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt:*

$$H^p(\mathfrak{g}, (M^{tw})^*) \cong_K H^{n-p}(\mathfrak{g}, M)^*$$

Beweis. (s. [Kn, Chap. VI, Sec. 3] bzw. [Hz]): Wir werden die folgenden beiden Isomorphismen zeigen:

$$H_p(\mathfrak{g}, M^{tw}) \cong_K H^{n-p}(\mathfrak{g}, M) \quad (1.35a) \qquad H^p(\mathfrak{g}, M^*) \cong_K H_p(\mathfrak{g}, M)^* \quad (1.35b)$$

Durch entsprechendes Einsetzen lässt sich daraus die gesuchte Dualität ableiten. Um (1.35a) zu zeigen, betrachten wir (unter Verwendung von (1.33)) die zugehörigen Räume der p–Ketten und $(n-p)$–Koketten:

$$C_p(\mathfrak{g}, M^{tw}) \cong_K \Lambda^p(\mathfrak{g}) \otimes_K C^n(\mathfrak{g}, M) \qquad C^{n-p}(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-p}(\mathfrak{g}), M).$$

Die lineare Abbildung

$$\phi_p : C_p(\mathfrak{g}, M^{tw}) \longrightarrow C^{n-p}(\mathfrak{g}, M), \text{ mit } \phi_p(x_1^p \otimes \omega) = \omega_{x_1^p} \tag{1.36}$$

für alle $x_1^p \in \Lambda^p(\mathfrak{g})$ und $\omega \in C^n(\mathfrak{g}, M)$, ist offensichtlich ein linearer Isomorphismus. Zeigen wir

$$\phi_{p-1} \circ d_p = (-1)^p d^{n-p} \circ \phi_p, \tag{1.37}$$

wobei $d_p := d_p(\mathfrak{g}, M^{tw})$ und $d^{n-p} := d^{n-p}(\mathfrak{g}, M)$ bezeichnet, so folgt daraus sofort (1.35a): Wir berechnen die linke Seite und erhalten

$$\begin{aligned}
\phi_{p-1}(d_p(x_1^p \otimes \omega)) &= \sum_{i=1}^p (-1)^i \phi_{p-1}\Big(x_1^{i-1} \wedge (x_i \cdot x_{i+1}^p) \otimes \omega + {}_i x_1^p \otimes (x_i \cdot \omega)\Big) \\
&\overset{(1.10)}{=} \sum_{i=1}^p (-1)^i \Big(\omega_{x_1^{i-1} \wedge (x_i \cdot x_{i+1}^p)} + x_i \cdot \omega_{{}_i x_1^p} - \omega_{x_i \cdot {}_i x_1^p}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^p (-1)^i \Big(x_i \cdot \omega_{{}_i x_1^p} - \omega_{(x_i \cdot x_1^{i-1}) \wedge x_{i+1}^p}\Big) \\
&\overset{(1.38)}{=} \sum_{i=1}^p (-1)^i \Big(x_i \cdot \omega_{{}_i x_1^p} - \omega_{x_1^{i-1} \wedge (x_i \cdot x_{i+1}^p)}\Big) \overset{(1.10)}{=} \sum_{i=1}^p (-1)^i (x_i \cdot \omega_{x_1^{i-1}})_{x_{i+1}^p}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir folgende Identität verwendet:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^p (-1)^i x_1^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i+1}^p &= \sum_{1 \le i < j \le p} (-1)^{i+j-2} [x_i, x_j] \wedge {}_{ij} x_1^p = \sum_{1 \le i < j \le p} (-1)^{i+j-1} [x_j, x_i] \wedge {}_{ij} x_1^p \\
&= \sum_{j=1}^p (-1)^j x_j \cdot x_1^{j-1} \wedge x_{j+1}^p.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Damit sehen wir aber

$$\begin{aligned}
&(-1)^p d^{n-p}(\phi_p(x_1^p \otimes \omega)) - \phi_{p-1}(d_p(x_1^p \otimes \omega)) = \\
&\qquad = (-1)^p d^{n-p}(\omega_{x_1^p}) - \sum_{i=1}^p (-1)^i (x_i \cdot \omega_{x_1^{i-1}})_{x_{i+1}^p} = (d^n(\omega))_{x_1^p} = 0
\end{aligned}$$

womit (1.37) und folglich auch (1.35a) gezeigt ist.

Nun ist noch (1.35b) zu beweisen: Dazu betrachten wir folgenden linearen Isomorphismus

$$C^p(\mathfrak{g}, M^*) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p(\mathfrak{g}), \mathrm{Hom}_K(M, K)) \cong_K \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p(\mathfrak{g}) \otimes M, K) = C_p(\mathfrak{g}, M)^*$$

der durch

$$\psi : C^p(\mathfrak{g}, M^*) \longrightarrow C_p(\mathfrak{g}, M)^*, \;\; \psi(\omega)(x_1^p \otimes m) = \omega(x_1^p)(m) \tag{1.39}$$

für $x_1^p \in \Lambda^p(\mathfrak{g})$ und $m \in M$ gegeben ist. (1.35b) folgt nun aus der Gleichung

$$\psi(d^p(\omega)) = \psi(\omega) \circ d_{p+1}, \tag{1.40}$$

die einfach zu verifizieren ist:

$$\begin{aligned}
\psi(\omega)(d_{p+1}(x_0^p \otimes m)) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i-1} \psi(\omega)\Big(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot (x_{i+1}^p \otimes m)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i-1} \Big(\psi(\omega)({}_i x_0^p \otimes x_i \cdot m) + \psi(\omega)(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i-1}^p \otimes m)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i} \Big(-\omega({}_i x_0^p)(x_i \cdot m) - \omega(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i-1}^p)(m)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i} \Big(x_i \cdot \omega({}_i x_0^p) - \omega(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i-1}^p)\Big)(m) \\
&= d^p(\omega)(x_0^p)(m) = \psi(d^p(\omega))(x_0^p \otimes m).
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.6.3. *Sei $\mathfrak{g}$ eine n–dim. Lie Algebra über einem Körper K. Dann gilt:*

$$H^n(\mathfrak{g}, K^{-tw}) \cong K.$$

Beweis. Folgt sofort aus der Poincaré–Dualität 1.6.2 indem wir $((K^{-tw})^{tw})^* \cong K^* \cong K$ beachten und für $p = 0$ nachrechnen:

$$H^n(\mathfrak{g}, K^{-tw}) \cong H^0(\mathfrak{g}, ((K^{-tw})^{tw})^*) \cong H^0(\mathfrak{g}, K) \cong K.$$

□

Seien M und N $\mathfrak{g}$–Moduln. Zu jedem $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, M)$ und $\omega' \in C^q(\mathfrak{g}, N)$ wollen wir eine $(p+q)$–Kokette $\omega \wedge \omega' \in C^{p+q}(\mathfrak{g}, M \otimes_K N)$ definieren. Dazu legen wir zuerst zu jedem $\sigma \in S_{p+q}$ eine lineare Abbildung $\omega \times_\sigma \omega' : T^{p+q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow M \otimes_K N$ wie folgt fest[1]:

$$\omega \times_\sigma \omega'(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}) := \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega(x_{\sigma(1)}^{\sigma(p)}) \otimes \omega'(x_{\sigma(p+1)}^{\sigma(p+q)}).$$

Für jedes $\tau \in S_{p|q} := \{\sigma \in S_{p+q} \mid \{1, \dots, p\}$ ist eine Invariante von $\sigma\}$ (dh. τ permutiert die ersten p Elemente und die restlichen q Elemente getrennt von einander) gilt dann

$$\omega \times_\sigma \omega'(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \omega \times_\sigma \omega'(\overset{\otimes}{x}{}_{\tau(1)}^{\tau(p+q)}) = \omega \times_{\sigma\circ\tau} \omega'(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}), \tag{1.41}$$

jedoch nicht im Allgemeinen für jedes $\tau \in S_{p+q}$. Bilden wir nun die Summe über alle $\sigma \in S_{p,q} := \{\sigma \in S_{p+q} \mid \sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ und $\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)\}$

$$\omega \times \omega'(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}) := \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \omega \times_\sigma \omega'(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}), \tag{1.42}$$

so erhalten wir eine lineare Abbildung $\omega \times \omega' : T^{p+q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow M \otimes_K N$ die über die

[1] $\overset{\otimes}{x}{}_1^n := x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in T^n(\mathfrak{g})$.

kanonische Quotientenabbildung $\pi_\Lambda^{p+q} : T^{p+q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Lambda^{p+q}(\mathfrak{g})$ faktorisiert. Denn im folgenden zeigen wir: $\omega \times \omega'(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}) = 0$ für alle $\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q} \in I^{p+q}(\mathfrak{g})$.

Dazu sei $\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q} \in I^{p+q}(\mathfrak{g})$ (dh. $\exists\ 1 \le i < j \le p+q$ mit $x_i = x_j$), $\tau = (i\ j) \in S_{p+q}$ die Transposition von i und j sowie $\{S_<, S_=, S_>\}$ die Partition von $S_{p,q}$, welche wie folgt definiert ist:

$$S_= := \{\sigma \in S_{p,q} \mid (\sigma^{-1}(i) \le p \wedge \sigma^{-1}(j) \le p) \vee (\sigma^{-1}(i) > p \wedge \sigma^{-1}(j) > p)\}$$
$$S_< := \{\sigma \in S_{p,q} \mid \sigma^{-1}(i) \le p \wedge \sigma^{-1}(j) > p\} \quad S_> := \{\sigma \in S_{p,q} \mid \sigma^{-1}(i) > p \wedge \sigma^{-1}(j) \le p\}$$

Dann existiert für jedes $\sigma \in S_<$ ein eindeutiges $\tau_\sigma \in S_{p|q}$ sodass $\sigma' := \tau \circ \sigma \circ \tau_\sigma \in S_>$ gilt (nämlich $\tau_\sigma = (\sigma^{-1}(i) \cdots p)(p+1 \cdots \sigma^{-1}(j))^{-1}$ in Zykelschreibweise). Dies definiert eine 1-1–Korrespondenz zwischen den Permutationen in $S_<$ und $S_>$. Da Transpositionen stets Signum -1 haben, gilt weiters:

$$\omega \times_\sigma \omega'(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \omega \times_{\tau\circ\sigma} \omega'(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}) \overset{(1.41)}{=} -\omega \times_{\sigma'} \omega'(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}). \tag{1.43}$$

Damit heben sich die Teilsummen $\sum_{\sigma\in S_<}$ und $\sum_{\sigma\in S_>}$ in (1.42) gegenseitig auf und weil $\omega \times_\sigma \omega'(x_1^{p+q}) = 0$ für alle $\sigma \in S_=$ gilt, folgt insgesamt die Behauptung $\omega \times \omega'(x_1^{p+q}) = 0$. Es bezeichne

$$\omega \wedge \omega' : \Lambda^{p+q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow M \otimes_K N$$

die eindeutige lineare Abbildung, für die $\omega \wedge \omega' \circ \pi_\Lambda^{p+q} = \omega \times \omega'$ gilt. Handelt es sich bei M und N jeweils um den trivialen $\mathfrak{g}$–Modul K, so ist $\omega \wedge \omega' \in C^{p+q}(\mathfrak{g})$. Damit macht man $C^\bullet(\mathfrak{g})$ wie auch $H^\bullet(\mathfrak{g})$ zu einer K–Algebra.

Korollar 1.6.4. *Sei $\mathfrak{g}$ eine n–dimensionale, unimodulare Lie Algebra über einem Körper K und $x_1, \dots, x_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Dann ist*

$$\beta : H^p(\mathfrak{g}) \times H^{n-p}(\mathfrak{g}) \longrightarrow K, \ \beta([\omega], [\omega']) := \omega \wedge \omega'(x_1^n)$$

eine nicht–ausgeartete Bilinearform.

Beweis. Für den zu (1.36) inversen Isomorphismus $\phi_p^{-1} : C^{n-p}(\mathfrak{g}, K) \longrightarrow C_p(\mathfrak{g}, K^{tw})$ gilt $\phi_p^{-1}(\omega_{n-p}) = \bar{y} \otimes \eta$ mit $\eta_{\bar{y}} = \omega_{n-p}$. Verknüpfen wir den dazu dualen Homomorphismus $\phi_p^{-1*} : C_p(\mathfrak{g}, K^{tw})^* \longrightarrow C^{n-p}(\mathfrak{g}, K)^*$ mit ψ_p aus (1.39), so erhalten wir den Isomorphismus

$$\phi_p^{-1*} \circ \psi_p : C^p(\mathfrak{g}, K^{tw*}) \longrightarrow C^{n-p}(\mathfrak{g}, K)^*.$$

Für diesen gilt:

$$\phi_p^{-1*}(\psi_p(\omega_p))(\omega_{n-p}) = \psi_p(\omega_p)(\phi_p^{-1}(\omega_{n-p}) = \omega_p(\bar{y})(\eta). \tag{1.44}$$

Da $\mathfrak{g}$ unimodular ist, handelt es sich bei K^{tw*} um einen trivialen $\mathfrak{g}$–Moduln sodass er mit K identifizierbar ist: $K \longrightarrow K^{tw*}$, $1_K \mapsto f$ mit $f(\eta) = \eta(x_1^n)$. Damit induziert

(1.44) wegen (1.37) und (1.40) in der Kohomologie den linearen Isomorphismus

$$\theta_p : H^p(\mathfrak{g}) \longrightarrow H^{n-p}(\mathfrak{g})^*,\ \ \theta_p([\omega_p])([\omega_{n-p}]) = \omega_p(\bar{y})\eta(x_1^n).$$

Sei nun $\bar{y} = \sum_{\tau \in S_{p,q}} \lambda_\tau x_{\tau_1}^{\tau_p}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\omega_p \wedge \omega_{n-p}(x_1^n) &= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_p(x_{\sigma_1}^{\sigma_p})\omega_{n-p}(x_{\sigma_{p+1}}^{\sigma_n}) = \sum_{\sigma \in S_{n,p}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_p(x_{\sigma_1}^{\sigma_p})\eta(\bar{y} \wedge x_{\sigma_{p+1}}^{\sigma_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{n,p}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S_{n,p}} \lambda_\tau \omega_p(x_{\sigma_1}^{\sigma_p})\eta(\underbrace{x_{\tau_1}^{\tau_p} \wedge x_{\sigma_{p+1}}^{\sigma_n}}_{\neq 0 \Leftrightarrow \sigma = \tau}) = \sum_{\tau \in S_{n,p}} \operatorname{sgn}(\tau)\lambda_\tau \omega_p(x_{\tau_1}^{\tau_p})\eta(x_{\tau_1}^{\tau_n}) \\
&= \omega_p(\bar{y})\eta(x_1^n) = \theta_p(\omega_p)(\omega_{n-p})
\end{aligned}$$

Damit ist β eine wohldefinierte Bilinearform die nicht ausgeartet ist (weil θ_p bijektiv ist). □

2 Hochschild–Serre–Spektralsequenz

Sei R ein Ring. Ein R–Modul E heißt *bigraduiert*, falls E Γ–graduiert mit $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist. Dh. es existiert ein Familie von Untermoduln $(E^{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, sodass $E = \bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} E^{p,q}$ gilt (bei Indizierung mit (p,q) lassen wir die Klammern weg). In diesem Fall schreiben wir $E^{\bullet,\bullet}$ anstelle von E um dessen Bigraduierung hervor zu heben. Ein Homomorphismus $f : E^{\bullet,\bullet} \longrightarrow E'^{\bullet,\bullet}$ ist folglich homogen vom Grad (r,s), wenn für alle $p,q \in \mathbb{Z}$ gilt: $f(E^{p,q}) \subseteq E^{p+r,q+s}$. Wie in Abschnitt 1.2 definiert, bezeichnet

$$f^{p,q} : E^{p,q} \longrightarrow E'^{p+r,q+s}.$$

jenen Homomorphismus, welcher der Gleichung $\iota_{E'^{p+r,q+s}} \circ f^{p,q} = f \circ \iota_{E^{p,q}}$ genügt.

Sei $(E^\bullet, d^\bullet)$ ein Kokettenkomplex über R und für jedes $n \in \mathbb{Z}$ sei E^n $\mathbb{Z}$–graduiert, dh. es existiert ein Familie von Untermoduln $((E^n)^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von E^n sodass $E^n = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} (E^n)^p$ gilt. Dann erhalten wir durch $E^{p,q} := (E^{p+q})^p$ eine Bigraduierung auf E für die gilt: $E^n = \bigoplus_{p+q=n} E^{p,q}$. Ist zudem $d^n : E^n \longrightarrow E^{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ homogen vom Grad r (dh. $d^n((E^n)^p) \subseteq (E^{n+1})^{p+r}$), so ist d zugleich ein homogener Homomorphismus vom Grad $(r, 1-r)$: $d^{p,q} : E^{p,q} \longrightarrow E^{p+r,q+1-r}$. Die Untermoduln $\mathrm{Ker}(d^\bullet)$ und $\mathrm{Im}(d^\bullet)$ von $E^\bullet$ sind dann homogen bzgl. der Bigraduierung sodass auch die Kohomologie von $(E^\bullet, d^\bullet)$ bigraduiert ist:

$$H^n(E,d) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(E,d) \text{ mit } H^{p,q}(E,d) := \mathrm{Ker}(d^{p,q})/\,\mathrm{Im}(d^{p-r,q-1+r}).$$

In diesem Zusammenhang bezeichnen wir $(E^\bullet, d^\bullet)$ als einen *bigraduierten Kokettenkomplex* vom Grad r.

Eine *Kospektralsequenz* (s. [W, Chap. 5]) über einem Ring R ist eine Folge $((E_r, d_r))_{r\geq r_0}$ von Kokettenkomplexen über R, die für jedes $r \geq r_0$ folgende Eigenschaften erfüllen:

(i) (E_r, d_r) ist ein bigraduierter Kokettenkomplex vom Grad r.

(ii) Es existiert ein graderhaltender Isomorphismus $\Phi_r : E_{r+1}^{\bullet,\bullet} \longrightarrow H^{\bullet,\bullet}(E_r, d_r)$.

Dh. für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt $E_r^n = \bigoplus_{p+q=n} E_r^{p,q}$ und d_r ist homogen vom Grad $(r, 1-r)$: $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q+1-r}$. Handelt es sich bei dem Ring R um einen Körper, so sprechen wir auch von einer *linearen Kospektralsequenz*.

Eine Kospektralsequenz $(E_r, d_r)_{r\geq r_0}$ bezeichnen wir als *beschränkt*, falls für jedes $n \in \mathbb{Z}$ der $\mathbb{Z}$–graduierte Modul $E_{r_0}^n$ endlich ist, dh. für jedes $n \in \mathbb{Z}$ sind, bis auf endlich viele, alle $E_{r_0}^{p,q}$ mit Totalgrad $p + q = n$ trivial. Man beachte, dass für jeden Tupel

$(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $E_{r_0}^{p,q} = 0$ auch $E_r^{p,q} = 0$ für alle $r \geq r_0$ gilt.

Beschränkte Kospektralsequenzen haben ein "endliches Konvergenzverhalten": Für jedes $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ existiert ein $r_{p,q} \in \mathbb{N}$, sodass $E_r^{p,q} \cong E_{r_{p,q}}^{p,q}$ für jedes $r \geq r_{p,q}$ gilt. Denn für ein hinreichend großes $r \in \mathbb{N}$ sind $E_r^{p-r,q-1+r} = E_r^{p+r,q+1-r} = 0$ (E_r^{p+q-1} und E_r^{p+q+1} sind endlich) und daher die beiden Homomorphismen

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q+1-r} \qquad\qquad d_r^{p-r,q-1+r} : E_r^{p-r,q-1+r} \longrightarrow E_r^{p,q} \tag{2.1}$$

trivial, was

$$E_{r+1}^{p,q} \cong \ker(d_r^{p,q}) / \operatorname{im}(d_r^{p-r,q-1+r}) = E_r^{p,q}$$

zufolge hat. Mit $E_\infty^{p,q} := E_{r_{p,q}}^{p,q}$ bezeichnen wir diesen "Grenzwert" von $(E_r^{p,q})_{r \geq r_0}$.

Eine absteigende (resp. aufsteigende) *Filtrierung* eines R–Moduls M ist eine Familie $(F^pM)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Untermoduln von M, sodass $F^pM \supseteq F^{p+1}M$ (resp. $F^pM \supseteq F^{p+1}M$) für jedes $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Eine absteigende (resp. aufsteigende) Filtrierung von M heißt *beschränkt*, falls es $s \leq t$ (resp. $s \geq t$) in $\mathbb{Z}$ mit $F^sM = M$ und $F^tM = 0$ gibt. Ist zudem $M = M^\bullet$ Γ–graduiert, dann setzen wir F^pM als homogen bzgl. Γ voraus, dh. $F^pM = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} F^pM^\gamma$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass für jedes $\gamma \in \Gamma$ die Modulfamilie $(F^pM^\gamma)_{p\in\mathbb{Z}}$ eine Filtrierung von M^γ bildet. $(F^pM^\bullet)_{p\in\mathbb{Z}}$ heißt *graduiert–beschränkt*, wenn für jedes $\gamma \in \Gamma$ die Filtrierung $(F^pM^\gamma)_{p\in\mathbb{Z}}$ von M^γ beschränkt ist.

Sei $H^\bullet$ ein $\mathbb{Z}$–graduierter R–Modul und $(E_r, d_r)_{r\geq r_0}$ eine beschränkte Kospektralsequenz über R. Dann sagen wir $(E_r, d_r)_{r\geq r_0}$ *konvergiert* gegen $H^\bullet$, falls eine absteigende Filtrierung $(F^pH^\bullet)_{p\in\mathbb{Z}}$ von $H^\bullet$ existiert, sodass

$$E_\infty^{p,q} \cong F^pH^{p+q} / F^{p+1}H^{p+q}$$

für alle $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt. Man schreibt dann auch $E_r^{p,q} \overset{p}{\Rightarrow} H^{p+q}$, wobei über dem Doppelpfeil der Filtrierungsindex angegeben wird.

Die auf $H^\bullet$ gegebene Filtrierung ist dann graduiert–beschränkt, dh. für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $(F^pH^n)_{p\in\mathbb{Z}}$ beschränkt. Dies folgt aus der Tatsache, dass $E_\infty^{p,q} \neq 0$ nur für endlich viele Terme mit Totalgrad $p + q = n$ gilt. Aber Vorsicht, die Filtrierung auf $H^\bullet$ ist nicht notwendigerweise beschränkt.

2.1 Spektralsequenz eines filtrierten Kokettenkomplex

Definition 2.1.1. Eine absteigende Filtrierung eines Kokettenkomplexes $(C^\bullet, d^\bullet)$ ist eine absteigende Filtrierung $(F^pC^\bullet)_{p\in\mathbb{Z}}$ des $\mathbb{Z}$–graduierten Moduls $C^\bullet$, die mit dem Korandoperator $d^\bullet : C^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ wie folgt verträglich ist:

$$d^n(F^pC^n) \subseteq F^pC^{n+1}.$$

Satz 2.1.2 ([W, Thm. 5.4.1]). *Sei $(C^\bullet, d^\bullet)$ ein Kokettenkomplex über einem Ring R.*

Dann induziert jede absteigende Filtrierung $(F^pC^\bullet)_{p\in\mathbb{Z}}$ auf kanonischer Weise eine Kospektralsequenz $(E_r, d_r)_{r\geq 0}$ über R für die

$$E_0^{p,q} \cong F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q} \tag{2.2}$$

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ gilt.

Beweis. Für jedes $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \geq -1$ definieren wir Untermoduln von F^pC^{p+q} von der Gestalt

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &:= \{\omega \in F^pC^{p+q} \mid d\omega \in F^{p+r}C^{p+q+1}\} \\ B_r^{p,q} &:= d(F^{p-r}C^{p+q-1}) \cap F^pC^{p+q}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Offensichtlich gilt $B_r^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}$ und wegen $d^\bullet(Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \subseteq F^{p+r}C^{p+q+1}$ auch $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subseteq Z_r^{p,q}$. Daher sind die Quotienten

$$E_r^{p,q} := Z_r^{p,q}/(B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \tag{2.4}$$

wohldefiniert und $E_r := \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} E_r^{p,q}$ für jedes $r \geq 0$ ein bigraduierter R–Modul. Darüber hinaus ist, was leicht nachzuprüfen ist, (2.2) erfüllt.

Der Korandoperator $d^\bullet : C^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ induziert eine Abbildung $Z_r^{p,q} \longrightarrow Z_r^{p+r,q+1-r}$, die zusammengesetzt mit dem kanonischen Epimorphismus $Z_r^{p+r,q+1-r} \longrightarrow E_r^{p+r,q+1-r}$ zu der Abbildung $\overline{d}_r^{p,q} : Z_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q+1-r}$ führt. Für jedes $\omega \in Z_r^{p,q}$ gilt nun einerseits $d\omega \in B_r^{p+r,q+1-r} \Leftrightarrow \omega \in Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ und andererseits $d^\bullet(\omega) \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \Leftrightarrow \omega \in Z_{r+1}^{p,q}$. Daher erhalten wir

$$\ker(\overline{d}_r^{p,q}) = Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}. \tag{2.5}$$

Offensichtlich ist $B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subseteq \ker(\overline{d}_r^{p,q})$ sodass $\overline{d}_r^{p,q}$ zu einer eindeutigen Abbildung $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q+1-r}$ faktorisiert. Diese Familie von Abbildungen bildet zu jedem $r \geq 0$ einen Endomorphismus $d_r : E_r \longrightarrow E_r$ der bigraduiert vom Grad $(r, 1-r)$ ist und $d_r \circ d_r = 0$ erfüllt. Um zu zeigen, dass es sich bei $(E_r, d_r)_{r\geq 0}$ tatsächlich um eine Kospektralsequenz handelt, ist noch $H^{p,q}(E_r, d_r) \cong E_{r+1}^{p,q}$ nachzuweisen. Dazu halten wir zuerst einmal fest:

$$\ker(d_r^{p,q}) \cong \frac{Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}} \qquad \mathrm{im}(d_r^{p-r,q-1+r}) \cong \frac{B_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}.$$

Unter Verwendung des 2. und anschließend des 1. Isomorphiesatzes sowie der Identität $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \cap Z_{r+1}^{p,q} = Z_r^{p+1,q-1}$ folgt schlussendlich

$$\frac{\ker(d_r^{p,q})}{\mathrm{im}(d_r^{p-r,q-1+r})} \overset{2.}{\cong} \frac{Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{B_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}} \overset{1.}{\cong} \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{(B_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \cap Z_{r+1}^{p,q}} \cong \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{B_{r+1}^{p,q} + Z_r^{p+1,q-1}}. \qquad \square$$

Eine absteigende Filtrierung auf $(C^\bullet, d^\bullet)$ definiert auf kanonische Weise eine ebensolche auf der zugehörigen Kohomologie:

$$F^pH^\bullet(C^\bullet, d^\bullet) := \operatorname{im}\big(H^\bullet(F^pC^\bullet, d^\bullet_{|F^pC^\bullet}) \longrightarrow H^\bullet(C^\bullet, d^\bullet)\big).$$

Handelt es sich bei der Filtrierung um eine graduiert–beschränkte, dann existiert zu jedem Tupel $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine natürliche Zahl $r_{p,q} \in \mathbb{N}$, sodass für alle $r \geq r_{p,q}$

$$Z^{p,q}_\infty := Z^{p,q}_{r_{p,q}} = Z^{p,q}_r \qquad\qquad B^{p,q}_\infty := B^{p,q}_{r_{p,q}} = B^{p,q}_r$$

gilt (siehe (2.3)). Der Quotient $Z^{p,q}_\infty / B^{p,q}_\infty$ entspricht dann $F^pH^{p+q}(C^\bullet, d^\bullet)$ und die im obigen Satz konstruierte kanonische Kospektralsequenz besitzt folgendes Konvergenzverhalten:

Korollar 2.1.3. *Ist $(C^\bullet, d^\bullet)$ ein Kokettenkomplex mit graduiert–beschränkter Filtrierung, so ist $(E_r, d_r)_{r\geq 0}$ aus Satz 2.1.2 eine beschränkte Kospektralsequenz die gegen die Kohomologie $H^\bullet(C^\bullet, d^\bullet)$ konvergiert.*

Beweis. Aus (2.2) sieht man sofort, dass eine graduiert–beschränkte Filtrierung eine beschränkte Kospektralsequenz hervor ruft. Betrachten wir den kanonischen Epimorphismus

$$\varphi^{p,q} : Z^{p,q}_\infty / B^{p,q}_\infty \cong F^pH^{p+q}(C^\bullet, d^\bullet) \longrightarrow E^{p,q}_\infty \cong Z^{p,q}_\infty / (B^{p,q}_\infty + Z^{p+1,q-1}_\infty)$$

und berechnen dessen Kern

$$\ker \varphi^{p,q} = (Z^{p+1,q-1}_\infty + B^{p,q}_\infty)/B^{p,q}_\infty \cong Z^{p+1,q-1}_\infty / (B^{p,q}_\infty \cap Z^{p+1,q-1}_\infty) = Z^{p+1,q-1}_\infty / B^{p+1,q-1}_\infty,$$

so führt uns die Faktorisierung von $\varphi^{p,q}$ über dessen Kern zu dem gewünschten Isomorphismus

$$E^{p,q}_\infty \cong \frac{Z^{p,q}_\infty / B^{p,q}_\infty}{Z^{p+1,q-1}_\infty / B^{p+1,q-1}_\infty} \cong \frac{F^pH^{p+q}(C^\bullet, d^\bullet)}{F^{p+1}H^{p+q}(C^\bullet, d^\bullet)}. \qquad \square$$

2.2 Die Hochschild–Serre–Spektralsequenz

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K und $\mathfrak{k}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Dann definiert für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$F^p\Lambda^n(\mathfrak{g}) := \begin{cases} 0 & p < 0 \\ \langle \{x_1^n \mid \exists \sigma \in S_n \text{ sodass } x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-p)} \in \mathfrak{k}\} \rangle_K & 0 \leq p < n \\ \Lambda^n(\mathfrak{g}) & p \geq n \end{cases}$$

eine aufsteigende und beschränkte Filtrierung des $\mathfrak{g}$–Moduls $\Lambda^n(\mathfrak{g})$ (zum Nachweis verwende man (1.7)). Damit wird auf dem $\mathbb{Z}$–graduierten $\mathfrak{g}$–Modul $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})$ eine aufsteigende, graduiert–beschränkte Filtrierung $(F^p\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}))_{p\geq}$ festgelegt.

Proposition 2.2.1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K, $\mathfrak{k}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ und M ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann definiert*

$$F^pC^n(\mathfrak{g},M) := \{\omega \in C^n(\mathfrak{g},M) \mid \omega(x) = 0 \text{ für alle } x \in F^{p-1}\Lambda^n(\mathfrak{k})\}$$

eine fallende, graduiert–beschränkte Filtrierung des linearen Kokettenkomplexes $(C^\bullet(\mathfrak{g},M), d^\bullet)$.

Beweis. Offensichtlich bildet $(F^pC^n(\mathfrak{g},M))_{p\in\mathbb{Z}}$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine fallende Filtrierung des K–Vektorraumes $C^n(\mathfrak{g},M)$ die dazu noch beschränkt ist:

$$F^0C^n(\mathfrak{g},M) = C^n(\mathfrak{g},M) \qquad F^{n+1}C^n(\mathfrak{g},M) = 0 \tag{2.6}$$

Sie ist auch verträglich mit dem Korandoperator $d^\bullet$: Denn zu jedem $x_0^p \in F^{p-1}\Lambda^{n+1}(\mathfrak{g})$ liegen die Monome ${}_ix_0^n$ und $x_0^i \wedge x_i \cdot x_{i+1}^n$ für jedes $0 \le i \le n$ in $F^{p-1}\Lambda^n(\mathfrak{g})$ sodass für jedes $\omega \in F^pC^n(\mathfrak{g},M)$

$$d^n(\omega)(x_0^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \big(x_i \cdot \omega({}_ix_0^n) - \omega(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i+1}^n\big) = 0$$

und folglich $d^n(\omega) \in F^pC^{n+1}(\mathfrak{g},M)$ gilt. □

Definition 2.2.2. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über dem Körper K, $\mathfrak{k}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ und M ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann nennen wir die durch Proposition 2.2.1 und Satz 2.1.2 kanonisch gewonnene Kospektralsequenz die *Hochschild–Serre–Spektralsequenz* von $\mathfrak{g}$ bezüglich dem Ideal $\mathfrak{k}$ mit Werten in M (s. [HS]).

Da $(C^\bullet(\mathfrak{g},M), d^\bullet)$ ein linearer Kokettenkomplex ist, handelt es sich bei der Hochschild–Serre–Spektralsequenz um eine lineare Kospektralsequenz. Darüber hinaus ist sie, Korollar 2.1.3 zufolge, beschränkt und konvergiert gegen die Kohomologie $H^\bullet(\mathfrak{g},M)$. Dh. für jedes $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ und ein dazu hinreichend groß gewähltes r gilt

$$E_r^{p,q} \cong E_\infty^{p,q} \cong \frac{F^pH^{p+q}(\mathfrak{g},M)}{F^{p+1}H^{p+q}(\mathfrak{g},M)}. \tag{2.7}$$

Aus (2.6) und (2.2) ist ersichtlich, dass $E_r^{p,q} = 0$ gilt sobald $p < 0$ oder $q < 0$ ist. — Die Hochschild–Serre–Spektralsequenz konzentriert sich also im ersten Quadranten. Daraus lässt sich eine hinreichende Bedingung für (2.7) ableiten: Mit $r \ge p+q+2$ sind die Homomorphismen in (2.1) trivial und folglich (2.7) erfüllt. Ist die Lie Algebra endl.–dim., dann gilt zusammenfassend:

Satz 2.2.3. *Sei $\mathfrak{g}$ eine m–dimensionale Lie Algebra über einem Körper K, $\mathfrak{k}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ und M ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt für $r \ge m+2$ und für jedes $n \in \mathbb{Z}$:*

$$H^n(\mathfrak{g},M) \cong_K \bigoplus_{p+q=n} E_r^{p,q}.$$

2.3 Der 1–te Term $E_1^{\bullet\bullet}$

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K, $\mathfrak{k}$ eine Ideal in $\mathfrak{g}$ und M ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann besitzt der $\mathbb{Z}$–graduierte K–Vektorraum $C^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M)$ die kanonische $\mathfrak{k}$–Modulstruktur

$$(x \cdot \omega)(\bar{y}_1^p) = x \cdot \omega(\bar{y}_1^p) \text{ für jedes } p \in \mathbb{Z},\ x \in \mathfrak{k},\ \omega \in C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M) \text{ und } \bar{y}_i \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k}. \tag{2.8}$$

Dies folgt aus Beispiel 1.1.3 (6) indem man beachtet, dass $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ auf kanonischer Weise ein trivialer $\mathfrak{k}$–Modul ist. Daher lässt sich zu dem bigraduierten K-Modul $C^\bullet(\mathfrak{k}, C^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}))$ der kanonische Korandoperator $d_{\mathfrak{k}}^\bullet := d^\bullet(\mathfrak{k}, C^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M))$ wohldefinieren. Er erfüllt für jedes $p, q \in \mathbb{Z}$ und $\omega \in C^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M))$ nach (1.12) und (2.8) die Identität

$$d_{\mathfrak{k}}^q(\omega)(x_0^q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \big((x_i \cdot \omega_{x_0^{i-1}})(x_{i+1}^q)\big). \tag{2.9}$$

Insbesondere ist $d_{\mathfrak{k}}^q(\omega) \in C^{q+1}(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M))$ und daher

$$(C^\bullet(\mathfrak{k}, C^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M)), d_{\mathfrak{k}}^\bullet) \tag{2.10}$$

ein bigraduierter Kokettenkomplex vom Grad 0. Legen wir die Indizierung durch $(C^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M)))_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ fest, so ist $d_{\mathfrak{k}}^\bullet$ homogen vom Grad $(0,1)$ und schreiben

$$d_{\mathfrak{k}}^{p,q} : C^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M)) \longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M)).$$

Der Grund für die "umgekehrt" gewählte Reihenfolge seiner Indizierung erschließt sich nun aus dem folgenden Satz (s. [HS, Thm. 1]):

Satz 2.3.1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K, $\mathfrak{k}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ und M ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann existiert ein graderhaltender Isomorphismus bigraduierter Kokettenkomplexen*

$$\Phi_0 : (E_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M), d_0) \xrightarrow{\cong} C^\bullet(\mathfrak{k}, C^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M), d_{\mathfrak{k}}). \tag{2.11}$$

Beweis. Zunächst sei $\beta : \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{g}$ eine rechtsinverse lineare Abbildung zur kanonischen Quotientenabbildung $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, dh. $\pi \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$. Sie lässt sich kanonisch zu einer linearen Abbildung $\beta : \Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \longrightarrow \Lambda^\bullet(\mathfrak{g})$ erweitern. Unter Verwendung der Schreibweise $\bar{x} := \pi(x)$ definieren wir zu jedem Tupel $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine lineare Abbildung

$$r_\beta^{p,q} : C^{p+q}(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M),\ r_\beta^{p,q}(\omega)(x_1^q)(\bar{x}_{q+1}^{q+p}) = \omega(x_1^q \wedge \beta(\bar{x}_{q+1}^{q+p})).$$

Schränken wir diese auf $F^pC^{p+q}(\mathfrak{g}, M)$ ein, so erhalten wir eine von β unabhängige lineare Abbildung

$$r^{p,q} : F^pC^{p+q}(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M)) \text{ mit } r^{p,q}(\omega)(x_1^q)(\bar{x}_{q+1}^{q+p}) = \omega(x_1^{p+q}).$$

Für den Kern dieses Homomorphismus gilt

$$\ker r^{p,q} = F^{p+1}C^{p+q}(\mathfrak{g}, M).$$

Somit erhalten wir durch Herausfaktorisieren des Kerns einen Monomorphismus:

$$\phi_0^{p,q} : E_0^{p,q} \longrightarrow C^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M)).$$

Wie sich sogleich herausstellt, ist dieser auch surjektiv: Dazu sei $x \mapsto x'$, $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{k}$ eine lineare Fortsetzung der Identität $\mathrm{id}_\mathfrak{k} : \mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{k}$ und $\overset{\otimes}{x}{}_1^n := x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$. Dann erhalten wir zu jedem $\widetilde{\omega} \in C^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M))$ und jeder $p+q$–stelligen Permutation $\sigma \in S_{p+q}$ mittels

$$\overline{\omega}(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}) := \sum_{\sigma \in S_{q,p}} \mathrm{sgn}(\sigma)\widetilde{\omega}(x'_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x'_{\sigma(q)})(\bar{x}_{\sigma(q+1)} \wedge \cdots \wedge \bar{x}_{\sigma(q+p)})$$

eine lineare Abbildung $\overline{\omega} : T^{p+q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow M$. Sie faktorisiert über die kanonische Abbildung $\pi^\Lambda : T^{p+q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Lambda^{p+q}(\mathfrak{g})$, dh. es existiert ein $\omega \in C^{p+q}(\mathfrak{g}, M)$ mit $\overline{\omega} = \omega \circ \pi^\Lambda$ (siehe dazu (1.42)). $\omega \in F^pC^{p+q}(\mathfrak{g}, M)$ ist einfach zu verifizieren. Es gilt nun

$$r^{p,q}(\omega)(x_1^q)(\bar{x}_{q+1}^{p+q}) = \omega(x_1^{p+q}) = \overline{\omega}(\overset{\otimes}{x}{}_1^{p+q}) = \widetilde{\omega}(x_1^q)(\bar{x}_{q+1}^{p+q})$$

denn $\widetilde{\omega}_\sigma(x_1^q)(\bar{x}_{q+1}^{p+q}) = 0$ für alle $\sigma \in S_{q,p}$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}$. Folglich ist $\phi_0^{p,q}$ auch surjektiv und damit $\phi_0 : E_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{k}, C^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M))$ ein graderhaltender Isomorphismus bigraduierter K–Moduln.

Es gilt noch die Verträglichkeit von ϕ_0 mit den beiden Korandoperatoren, also die Gleichung

$$\phi_0^{p,q+1} \circ d_0^{p,q} = d_\mathfrak{k}^{p,q} \circ \phi_0^{p,q}. \tag{2.12}$$

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ zu beweisen. Dazu führen wir induktiv über q den Beweis der Gleichung $r^{p,q+1}(d^q\omega) = d_\mathfrak{k}^q(r^{p,q}(\omega))$, aus der dann sofort (2.12) folgt.

Der Induktionsanfang ist trivialerweise erfüllt denn eine einfache Rechnung zeigt allgemeiner: $x \cdot r^{p,q}(\omega) = r^{p,q}(x \cdot \omega)$. Für den Induktionsschritt sei $\omega \in F^pC^{p+q}(\mathfrak{g}, M)$. Dann ist $d\omega \in F^pC^{p+q+1}(\mathfrak{g}, M)$ und wir erhalten für jedes $x \in \mathfrak{k}$

$$\begin{aligned} r^{p,q+1}(d^q\omega)_x &= r^{p,q}((d^q\omega)_x) = r^{p,q}(x \cdot \omega - d^{q-1}(\omega_x)) \\ &= x \cdot r^{p,q}(\omega) - d_\mathfrak{k}^{q-1}(r^{p,q}(\omega)_x) \\ &= d_\mathfrak{k}^q(r^{p,q}(\omega))_x. \end{aligned}$$

□

Aus dem letzten Satz erhalten wir nun folgendes

Korollar 2.3.2. *Es existiert ein graderhaltender Isomorphismus bigraduierter K–Moduln:*

$$\phi_1 : E_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) \xrightarrow{\cong} \big(H^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M))\big)_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}.$$

2.4 Der 2–te Term $E_2^{\bullet\bullet}$

Zuerst betrachten wir zu einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper K, einem Ideal $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{g}$ und einem $\mathfrak{g}$–Modul M die beiden bigraduierten K–Moduln

$$C^\bullet(\mathfrak{k}, C^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M)) \qquad\qquad C^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C^\bullet(\mathfrak{k}, M)).$$

Sie sind graderhaltend isomorph denn die für jedes $p, q \in \mathbb{Z}$ gegebene lineare Abbildung

$$\gamma_0^{p,q} : C^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M)) \longrightarrow C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, C^q(\mathfrak{k}, M)),\ \gamma_0^{p,q}(\omega)(\bar{y}_1^p)(x_1^q) := \omega(x_1^q)(\bar{y}_1^p)$$

ist offensichtlich ein linearer Isomorphismus. Dazu gilt nun folgendes

Lemma 2.4.1. *Für jedes $p, q \in \mathbb{Z}$ induziert $\gamma_0^{p,q}$ einen linearen Isomorphismus der Form*

$$\gamma_1^{p,q} : H^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M)) \xrightarrow{\cong} C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, H^q(\mathfrak{k}, M))$$

Beweis. Wir zeigen induktiv nach q die Gleichung

$$\gamma_0^{p,q+1}(d_\mathfrak{k}^q\omega)(\bar{y}_1^p) = d(\mathfrak{k}, M)(\gamma_0^{p,q}(\omega)(\bar{y}_1^p))$$

für alle $\omega \in C^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M))$ und $\bar{y}_1^p \in \Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$. Unmittelbar daraus folgt dann die Aussage des Lemmas.

Der Induktionsanfang erschließt sich aus der Tatsache, dass $\mathfrak{k}$ trivial auf $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ operiert. Denn damit gilt für jedes $x \in \mathfrak{k}$ und $\omega \in C^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, M))$ allgemeiner (siehe auch (2.8))

$$\gamma_0^{p,q}(x \cdot \omega)(\bar{y}_1^p) = x \cdot (\gamma_0^{p,q}(\bar{y}_1^p)).$$

Für den Induktionsschritt rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}\gamma_0^{p,q+1}(d_\mathfrak{k}^q\omega)(\bar{y}_1^p)_x &= \gamma_0^{p,q}(d_\mathfrak{k}^q\omega_x)(\bar{y}_1^p) = \gamma_0^{p,q+1}(x \cdot \omega - d_\mathfrak{k}^{q-1}(\omega_x))(\bar{y}_1^p)\\ &= x \cdot (\gamma_0^{p,q}(\omega)(\bar{y}_1^p)) - d^{q-1}(\mathfrak{k}, M)(\gamma_0^{p,q}(\omega)(\bar{y}_1^p)_x)\\ &= d^q(\mathfrak{k}, M)(\gamma_0^{p,q}(\omega)(\bar{y}_1^p))_x.\end{aligned}$$ □

Nun besitzt aber $H^q(\mathfrak{k}, M)$ eine kanonische $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$–Modul–Struktur: Das Ideal $\mathfrak{k}$ ist, siehe Beispiel 1.1.3 (4), ein kanonischer $\mathfrak{g}$–Modul, in weiterer Folge daher auch $\Lambda^\bullet(\mathfrak{k})$ und $C^\bullet(\mathfrak{k}, M)$ (siehe (1.7) und Beispiel 1.1.3 (6)). Wie im Beweis von Proposition 1.2.4 zeigt sich $d^\bullet \in \operatorname{End}_\mathfrak{g}(C^\bullet(\mathfrak{k}, M))$. Daher existiert auf $H^\bullet(\mathfrak{k}, M)$ eine kanonische $\mathfrak{g}$–Modul–Struktur. Ist nun $\omega \in Z^p(\mathfrak{k}, M)$ ein p–Kozykel, so gilt nach der Definition des Korandoperators (1.11)

$$x \cdot \omega = d(\omega_x) \text{ für jedes } x \in \mathfrak{k}. \tag{2.13}$$

Damit operiert $\mathfrak{k}$ trivial auf $H^\bullet(\mathfrak{k}, M)$ sodass wir durch Herausfaktorisieren von $\mathfrak{k}$ eine kanonische Darstellung von $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ in $H^\bullet(\mathfrak{k}, M)$ erhalten. Wir können somit den Korandoperator $d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} := d(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, H^\bullet(\mathfrak{k}, M))$ zu $C^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, H^\bullet(\mathfrak{k}, M))$ wohldefinieren und folgenden Satz beweisen (s. [HS, Thm. 4]):

Satz 2.4.2. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K, $\mathfrak{k}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ und M ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann existiert ein graderhaltender Isomorphismus bigraduierter Kokettenkomplexen*

$$\psi_1 : (E_1(\mathfrak{g},\mathfrak{k},M), d_1) \xrightarrow{\cong} (C^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, H^\bullet(\mathfrak{k},M))), d^\bullet_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}). \tag{2.14}$$

Beweis. Für jedes $p,q \in \mathbb{Z}$ erhalten wir nach Korollar 2.3.2 und Lemma 2.4.1 mittels $\psi_1^{p,q} := (-1)^{p\cdot q}\gamma_1^{p,q} \circ \phi_1^{p,q}$ einen linearen Isomorphismus der Form

$$\psi_1^{p,q} : E_1^{p,q}(\mathfrak{g},\mathfrak{k},M) \longrightarrow C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, H^q(\mathfrak{k},M)).$$

Um die Verträglichkeit von ψ_1 mit den beiden Korandoperatoren $d_1(\mathfrak{g},\mathfrak{k},M)$ und $d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$ zu zeigen, definieren wir zuerst zu jedem $p,q \in \mathbb{Z}$ die lineare Abbildung

$$s_\beta^{p,q} := (-1)^{p\cdot q}\gamma_0^{p,q} \circ r_\beta^{p,q}$$

(siehe Beweis zu Satz 2.3.1). Weil $r^{p,q}(\omega) \in Z^q(\mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k},M))$ für jedes $\omega \in Z_1^{p,q}$ gilt (siehe (2.3)), führt die Einschränkung von $s_\beta^{p,q}$ auf $Z_1^{p,q} \subseteq F^pC^{p+q}(\mathfrak{g},M)$ zu einer, von β unabhängigen, linearen Abbildung der Form

$$s^{p,q} : Z_1^{p,q} \longrightarrow C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, Z^q(\mathfrak{k},M)).$$

Bezeichnet $\omega \mapsto [\omega]$ die kanonische Abbildung

$$Z_1^{p,q} \longrightarrow Z_1^{p,q}/(B_1^{p,q} + Z_0^{p+1,q-1}) = E_1(\mathfrak{g},\mathfrak{k},M)$$

und $\eta \mapsto [\![\eta]\!]$ die kanonische Abbildung $Z^q(\mathfrak{k},M) \longrightarrow H^q(\mathfrak{k},M)$ für alle $p,q \in \mathbb{Z}$, dann gilt für jedes $\omega \in Z_1^{p,q}$:

$$[\![s^{p,q}(\omega)(\bar{y}_1^p)]\!] = \psi_1^{p,q}([\omega])(\bar{y}_1^p). \tag{2.15}$$

Daher berechnen wir für ein $\omega \in Z_1^{p,q}$ zuerst den Ausdruck $s^{p+1,q}(d\omega)$ (der wohldefiniert ist, weil $d\omega \in Z_1^{p+1,q}$) und gehen anschließend wie in (2.15) zur Kohomologie über:

$$\begin{aligned} s^{p+1,q}(d\omega)(\bar{x}_0^p)(x_{p+1}^{p+q}) &= (-1)^{(p+1)\cdot q} d\omega(x_{p+1}^{p+q} \wedge x_0^p) = d\omega(x_0^{p+q}) = \sum_{i=0}^{p+q}(-1)^i x_i \cdot \omega_{x_0^{i-1}}(x_{i+1}^{p+q}) \\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i s^{p-i,q}(x_i \cdot \omega_{x_0^{i-1}})(\bar{x}_{i+1}^p)(x_{p+1}^{p+q}) + \sum_{i=p+1}^{p+q}(-1)^i x_i \cdot \omega_{x_0^{i-1}}(x_{i+1}^{p+q}) \\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i x_i \cdot s^{p,q}(\omega)_{\bar{x}_0^{i-1}}(\bar{x}_{i+1}^p)(x_{p+1}^{p+q}) - (-1)^p d(\mathfrak{k},M)(\omega_{x_0^p})(x_{p+1}^{p+q}) \end{aligned}$$

Beachtet man nun noch $[\![x \cdot \eta]\!] \overset{(2.13)}{=} \bar{x} \cdot [\![\eta]\!]$ wie auch $x \cdot \bar{x}_1^p = \bar{x} \cdot \bar{x}_1^p$ für alle $x \in \mathfrak{k}$, $\eta \in$

$C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, Z^q(\mathfrak{k}, M))$ und $\bar{x}_1^p \in \Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$, so erhält man schlussendlich

$$\begin{aligned}\psi_1^{p+1,q}(\underbrace{d_1([\omega])}_{=[d(\omega)]})(\bar{x}_0^p) &\overset{(2.15)}{=} [\![s^{p+1,q}(d(\omega))(\bar{x}_0^p)]\!] \\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \bar{x}_i \cdot [\![s^{p,q}(\omega)_{\bar{x}_0^{i-1}}(\bar{x}_{i+1}^p)]\!] = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \bar{x}_i \cdot \psi_1^{p,q}(\omega)_{\bar{x}_0^{i-1}}(\bar{x}_{i+1}^p) \\ &= d^p_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(\psi_1^{p,q}([\omega]))(\bar{x}_0^p).\end{aligned}$$

□

Korollar 2.4.3. *Es existiert ein graderhaltender Isomorphismus bigraduierter K–Moduln:*

$$\psi_2 : E_2^{\bullet,\blacksquare}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) \longrightarrow H^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, H^\blacksquare(\mathfrak{k}, M)).$$

Definition 2.4.4. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K, $\mathfrak{k}$ ein Ideal und $\mathfrak{b}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ sodass $\mathfrak{g}$ direkte Vektorraumsumme von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{k}$ ist. Dann nennen wir $\mathfrak{g}$ semidirekte Summe von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{k}$ und schreiben kurz $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \ltimes \mathfrak{k}$.

Satz 2.4.5. *Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \ltimes \mathfrak{k}$ eine semi–direkte Summe eines Ideals $\mathfrak{k}$ und einer Unteralgebra $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{g}$. Dann ist $E_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) = E_\infty(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M)$ und für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$H^n(\mathfrak{g}, M) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(\mathfrak{b}, H^q(\mathfrak{k}, M)). \tag{2.16}$$

Beweis. ([Roz]): Als K–Vektorraum ist $\mathfrak{g} \cong_K \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{k}$ und daher $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \cong_K \Lambda^\bullet(\mathfrak{b}) \otimes_K \Lambda^\bullet(\mathfrak{k})$ was leicht zu verifizieren ist. Damit lässt sich nun zu jedem $p, q \in \mathbb{Z}$ der Teilvektorraum $C^{p,q}$ von $C^{p+q}(\mathfrak{g}, M)$ wie folgt definieren

$$\begin{aligned}C^{p,q} := \{\omega \in C^{p+q}(\mathfrak{g}, M) \mid \omega(y_1^{p'} \wedge x_1^{q'}) = 0 \text{ für alle} \\ y_1^{p'} \wedge x_1^{q'} \in \Lambda^{p'}(\mathfrak{b}) \otimes_K \Lambda^{q'}(\mathfrak{k}) \text{ mit } p' + q' = p + q \text{ und } q' \neq q\}\end{aligned}$$

und $F^pC^{p+q}(\mathfrak{g}, M)$ als Vektorraumsumme anschreiben:

$$F^pC^{p+q}(\mathfrak{g}, M) \cong_K C^{p,q} \oplus_K F^{p+1}C^{p+q}(\mathfrak{g}, M).$$

Wenden wir auf ein $\omega \in C^{p,q}$ den Korandoperator an, so gilt $d\omega \in C^{p,q+1} \oplus C^{p+1,q}$. Denn sind $p', q' \in \mathbb{Z}_0^+$ mit $p' + q' = p + q$, dann folgt:

$$\begin{aligned}&d\omega(x_0^{q'} \wedge y_1^{p'})) = \\ &= \sum_{i=0}^{q'}(-1)^i\Big(\underbrace{x_i \cdot \omega({}_ix_0^{q'} \wedge y_1^{p'}) - \omega(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i+1}^{q'} \wedge y_1^{p'})}_{\neq 0 \ \Rightarrow\ q'=q} - \underbrace{\omega({}_ix_0^{q'} \wedge x_i \cdot y_1^{p'})}_{\neq 0 \ \Rightarrow\ q'=q-1}\Big) \\ &\quad + (-1)^{q'}\sum_{i=1}^{p'}(-1)^i\Big(\underbrace{y_i \cdot \omega(x_0^{q'} \wedge {}_iy_1^{p'}) - \omega(x_0^{q'} \wedge y_1^{i-1} \wedge y_i \cdot y_{i+1}^{p'})}_{\neq 0 \ \Rightarrow\ q'=q-1}\Big).\end{aligned}$$

Dh. für ein $\omega \in C^{p,q}$ mit $d\omega \neq 0$ gilt $d\omega \notin F^{p+2}C^{p+q+1}(\mathfrak{g}, M)$ bzw. $C^{p,q} \cap Z_2^{p,q} \subseteq Z_3^{p,q}$ und erhalten in weiterer Folge

$$Z_2^{p,q} \overset{(2.3)}{=} \{\omega \in F^pC^{p+q}(\mathfrak{g}, M) \mid d\omega \in F^{p+2}C^{p+q+1}(\mathfrak{g}, M)\} \subseteq Z_3^{p,q} + Z_1^{p+1,q-1} \overset{(2.5)}{\subseteq} ker(\overline{d}_2^{p,q}).$$

Also ist $\overline{d}_2^{p,q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ trivial und damit d_2 ein trivialer Korandoperator was $E_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M) = E_\infty(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, M)$ zufolge hat. (2.16) folgt aus Satz 2.2.3 und Korollar 2.4.3. □

3 (Ko-) Homologische δ–Funktoren

3.1 Kategorien und Funktoren

In der Kategorientheorie fasst man strukturgleiche Objekte, wie die der abelschen Gruppen, der Vektorräume oder der topologischen Räume zu einzelnen Kategorien zusammen. Dabei lässt man die konkreten Strukturen der einzelnen Objekte weitgehendsten außer acht und stellt vielmehr den Vergleich der Objekte untereinander in den Vordergrund. Dies geschieht meist durch strukturverträgliche Abbildungen zwischen den Objekten, nunmehr Morphismen genannt. Anhand ihrer Kompositionen und deren Eigenschaften lassen sich Rückschlüsse auf die Objekte und deren Eigenschaften ziehen. Daher werden Kategorien allein durch "die Menge"[1] ihrer Objekte und Morphismen samt Kompositionsvorschrift festgelegt (s. [Ma], [Mi]):

Definition 3.1.1. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus folgenden Daten:

(I) Eine Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, deren Elemente Objekte von $\mathcal{C}$ genannt werden (für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ schreiben wir kurz $X \in \mathcal{C}$).

(II) Eine Klasse $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, die Morphismen von $\mathcal{C}$, und einer aus Mengen bestehenden, $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$–indizierten Prä–Partition[2] $\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\big)_{(X,Y)\in\mathcal{C}\times\mathcal{C}}$ von $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$. Ein $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ bezeichnen wir als einen Morphismus von X nach Y und schreiben $f : X \longrightarrow Y$.

(III) Zu jedem geordneten Tripel von Objekten $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ gibt es eine Abbildung

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

und $g \circ f$ wird als die Komposition von $f : X \longrightarrow Y$ mit $g : Y \longrightarrow Z$ bezeichnet.

die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) Die Komposition von Morphismen ist assoziativ:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

für alle $U, X, Y, Z \in \mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ und $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,U)$.

[1] Anstelle des Mengenbegriffs setzen wir hier ab sofort den vorerst nicht weiter präzisierten Begriff der Klasse ein.

[2] Eine Prä–Partition einer Klasse $\mathcal{K}$ ist eine Klasse $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{K})$ disjunkter Teilklassen von $\mathcal{K}$, für die $\mathcal{K} = \bigcup \mathcal{M} = \{x \mid \exists y \in \mathcal{M} \text{ mit } x \in y\}$ gilt.

(ii) Für jedes Objekt $Y \in \mathcal{C}$ existiert ein Morphismus $\mathrm{id}_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y)$, Einheit genannt, mit $\mathrm{id}_Y \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_Y = g$ für alle $X, Z \in \mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ und $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$.

In der naiven Mengenlehre führen Konstrukte wie "die Menge aller Mengen" zu bekannte Paradoxien. Daher sind derartige Gebilde in der axiomatischen Mengenlehre (z. B. ZF oder ZFC) nicht existent. Um trotzdem Kategorien wie die der Mengen und Mengenabbildungen als Ganzes betrachten zu können (die Objekte dieser Kategorie sind ja sämtliche Mengen und damit in einer Menge nicht fassbar), verwenden wir in obiger Definition den Begriff der Klasse. Man kann ihn als Grundbegriff einer Mengenlehre wie die von NBG verstehen. Darin wird jede Klasse, die Element einer Klasse ist, als Menge und alle anderen Klassen als echte Klassen bezeichnet. Aus dem sogenannten Komprehensionsschema lässt sich unter anderem die Existenz der Klasse aller Mengen ableiten. Sie wird universelle Klasse genannt und taucht z. B. in der Kategorie der Mengen und Mengenabbildungen als Klasse der Objekte auf.

Wir erwähnen hier noch einen weiteren Weg den Grothendieck einschlug: Dabei gehen wir von ZFC aus, einer Mengenlehre in der die Mengen den Grundbegriff bilden. Durch Hinzunahme eines weiteren Axioms, welches die Existenz von "sehr großen" Mengen garantiert, erhalten wir ein ausreichend starkes Axiomensystem um sinnvoll Kategorientheorie betreiben zu können. Diese "sehr großen" Mengen nennen sich Universen und werden durch folgende Eigenschaften charakterisiert (s. [Bor1], [BP]):

Definition 3.1.2. Ein Universum $\mathcal{U}$ ist eine Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

Univ (i) $a \in A \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; a \in \mathcal{U}$ (dh. $\mathcal{U}$ ist eine transitive Menge).

Univ (ii) $A \in \mathcal{U}$ und $B \in \mathcal{U} \Rightarrow \{A, B\} \in \mathcal{U}$.

Univ (iii) $A \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \mathcal{U}$.

Univ (iv) $I \in \mathcal{U}$ und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von $\mathcal{U}$–Mengen $\Rightarrow \bigcup\{A_i \mid i \in I\} \in \mathcal{U}$.

Elemente von $\mathcal{U}$ bezeichnen wir als $\mathcal{U}$–Mengen, Teilmengen von $\mathcal{U}$ als $\mathcal{U}$–Klassen.

Wir ergänzen nun die Mengenlehre von ZFC um folgendes Axiom:

(Univ): Zu jeder Menge A existiert ein Universum $\mathcal{U}$ welches A als Element enthält:

$$A \in \mathcal{U}.$$

Dieses Axiom scheint plausibel zu sein, denn wie sich aus der folgenden Bemerkung unter anderem herausstellt, "sammelt" $\mathcal{U}$ all jene Mengen, die sich aus, bereits in $\mathcal{U}$ liegenden Mengen mit Hilfe der Axiome aus ZFC konstruieren lassen:

Bemerkung 3.1.3.

(1) Als ein triviales Beispiel eines Universums dient die leere Menge: $\mathcal{U} = \varnothing$.

(2) Ist hingegen $\mathcal{U} \neq \varnothing$ so gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{U}$: Ist $A \in \mathcal{U}$ (und damit selbst eine Menge), dann folgt aus $\varnothing \in \mathcal{P}(A) \overset{(iii)}{\in} \mathcal{U}$ und (i) $0 = \varnothing \in \mathcal{U}$. Angenommen n liegt in $\mathcal{U}$. Dann ist wegen (ii) auch $\{n\} = \{n, n\} \in \mathcal{U}$ und folglich $n + 1 = n \cup \{n\} \in \mathcal{U}$. Nach dem Induktionsprinzip liegt damit jede natürliche Zahl in $\mathcal{U}$ (aber nicht notwendigerweise $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$). Dh. bei $\mathcal{U} \neq \varnothing$ ist jede natürliche Zahl eine $\mathcal{U}$–Menge und $\mathbb{N}$ eine $\mathcal{U}$–Klasse.

(3) Oft wird an ein Universum $\mathcal{U}$ zusätzlich die Forderung gestellt, dass $\mathbb{N}$ eine $\mathcal{U}$–Menge ist: $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Unter dieser zusätzlichen Voraussetzung enthält $\mathcal{U}$ all jene Mengen, deren Existenzen aus den Axiomen in ZFC beweisbar sind. Dies wird mit folgenden Punkt klar:

(4) $\mathcal{U}$ ist abgeschlossen bezüglich den mengenkonstruierenden Axiomen (Paar), (Pot), (Verei), (Komp) und (Ers) in ZFC: Für die Axiome (Paar) und (Pot) ist dies offensichtlich gegeben. Zu (Verei) sei A sei eine Menge in $\mathcal{U}$. Setzen wir $I := A$ und $A_a := a$ so folgt aus (iv) $\bigcup A \in \mathcal{U}$. Insbesondere enthält wegen (ii) $\mathcal{U}$ die Vereinigung $A \cup B$ zweier Mengen $A, B \in \mathcal{U}$. In Axiom (Komp) wird eine Teilmenge B einer Ausgangsmengen A gebildet. Gilt $A \in \mathcal{U}$ dann auf Grund von (iii) auch $B \in \mathcal{U}$. Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{U}$ bzgl. dem Axiom (Ers) zeigt sich in (7).

(5) Insbesondere sind $A \times B$ $(\subseteq \mathcal{P}(A \cup B))$ und $\prod_{i \in I} A_i$ $(\subseteq \mathcal{P}(I \times \bigcup\{A_i \mid i \in I\}))$ in $\mathcal{U}$ sofern A und B bzw. I und sämtliche A_i's Elemente von $\mathcal{U}$ sind.

(6) Auch bei Anwendung des Axiom (Ext) "verläßt" man das Universum nicht. Denn mit zwei zu vergleichende Mengen A und B in $\mathcal{U}$ liegen nach (i) auch deren Elemente in $\mathcal{U}$.

(7) Ist I ein Element von $\mathcal{U}$ und $f : I \longrightarrow \mathcal{U}$ eine beliebige Funktion (dh. $f = (I, \mathcal{U}, G^f)$ mit $G^f \subseteq I \times \mathcal{U}$), dann liegt auch das Bild $f[I]$ in $\mathcal{U}$. Denn definiert man $A_i := \{f(i)\}$, so gilt nach (iv): $f[I] = \bigcup\{A_i \mid i \in I\} \in \mathcal{U}$. Insbesondere ist damit $f' := (I, f[I], G^f)$, welches mit f auf der Quellenmenge I übereinstimmt, ein Element von $\mathcal{U}$ $(G^f \subseteq I \times f[I] \in \mathcal{U})$.

(8) Jedes Universum $\mathcal{U}$ ist nach Definition eine Menge und nach (Univ) daher selbst Element eines höheren Universums $\mathcal{U}'$. In diesem Fall ist jede $\mathcal{U}$–Klasse zugleich $\mathcal{U}'$–Menge.

(9) Je endlich viele Universen liegen in einem gemeinsamen höheren Universum: Für zwei Universen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ existiert nach dem Axiom (Paar) die Menge $\{\mathcal{U}, \mathcal{U}'\}$ welche wiederum nach (Univ) in einem Universum $\mathcal{U}''$ liegt. Aus Definition 3.1.2 (i) folgt schlussendlich: $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ liegen in dem Universum $\mathcal{U}''$. Iterativ erhält man den allgemeinen Fall.

Wir stellen also aus (8) in obiger Bemerkung fest, dass bei Verwendung der Begriffe Menge und Klasse auf das zugrunde liegende Universum zu achten ist. Daher sind wir dazu aufgefordert, die Definition von Kategorien diesem mengentheoretischen Rahmen anzupassen: Anstelle von Kategorie, Menge und Klasse sind in der Definition 3.1.1

die Begriffe $\mathcal{U}$–Kategorie, $\mathcal{U}$–Menge und $\mathcal{U}$–Klasse für ein fest gewähltes Universum $\mathcal{U}$ zu verwenden.

Beispiel 3.1.4. Sei $\mathcal{U}$ ein Universum. Dann bezeichnen wir mit $\mathbf{Set}_{\mathcal{U}}$ die Kategorie der $\mathcal{U}$–Mengen und deren Abbildungen. Genauer sei $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$ und

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{Set}_{\mathcal{U}}) = \{f \in \mathcal{U} \mid \exists X, Y, G \in \mathcal{U} : f = (X, Y, G) \\ \wedge G \subseteq X \times Y \wedge \forall x \in X : \exists! y \in Y : (x, y) \in G\}.$$

Die Prä–Partition auf $\mathrm{Mor}(\mathbf{Set}_{\mathcal{U}})$ sei durch

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}_{\mathcal{U}}}(X, Y) \coloneqq \{f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{Set}_{\mathcal{U}}) \mid \exists G \in \mathcal{U} : f = (X, Y, G)\}$$

für jedes $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ definiert. Die Komposition sei in naheliegender Weise durch die der Mengenabbildungen festgelegt. Trivialerweise ist die Komposition assoziativ sowie die Existenz der Einheiten gesichert sodass es sich bei $\mathbf{Set}_{\mathcal{U}}$ in der Tat um eine Kategorie handelt.

In weiterer Folge sei $\mathcal{U}$ ein fest gewähltes Universum welches $\mathbb{N}$ enthält (dh. $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$). Daraus geht hervor, siehe Bemerkung 3.1.3 (4), dass $\mathcal{U}$ all jene Mengen enthält, deren Existenzen rein aus den Axiomen in ZFC ableitbar sind. Diese Wahl genügt vorerst unserem Tätigkeitsfeld sodass wir in weiterer Folge Kategorien, Mengen und Klassen sagen obwohl wir $\mathcal{U}$–Kategorien, $\mathcal{U}$–Mengen und $\mathcal{U}$–Klassen meinen. Dies gibt uns auch den Vorteil eine Sprache zu verwenden, die mit jener von NBG übereinstimmt.

Beispiele 3.1.5.
(1) $\mathbf{Gr}$, die Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen.
(2) $\mathbf{Ab}$, die Kategorie der abelschen Gruppen mit ihren Gruppenhomomorphismen.
(3) $\mathbf{Ring}$, die Kategorie der unitären Ringe und deren Ringhomomorphismen.
(4) $\mathbf{Krp}$, die Kategorie der Körper und Körperhomomorphismen.
(5) ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$, die Kategorie der (Links–)Vektorräume über einem Körper K und deren linearen Abbildungen.
(6) Allgemeiner ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$, die Kategorie der Linksmoduln über einem Ring R und den zugehörigen Modulhomomorphismen wie auch $\mathbf{Mod}_{\mathbf{R}}$, die Kategorie der Rechtsmoduln über einem Ring R und deren Modulhomomorphismen.
(7) ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Alg}$, die Kategorie der Algebren über einem Körper K und den zugehörigen Homomorphismen.
(8) ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}$, die Kategorie der Lie Algebren über einem Körper K und deren Lie Algebren–Homomorphismen.
(9) ${}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod}$, die Kategorie der $\mathfrak{g}$–Linksmoduln einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ und deren Homomorphismen sowie $\mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}}$, die Kategorie der $\mathfrak{g}$–Rechtsmoduln samt deren Homomorphismen.

(10) **Top**, die Kategorie der topologischen Räumen mit ihren stetigen Abbildungen.
(11) **Ch($_{\mathbf{R}}$Mod)** oder kurz $_R$**Ch**, die Kategorie der Kettenkomplexe über R–Linksmoduln und den Kettenkomplexabbildungen.

Um mit kategorientheoretischen Aussagen und Definitionen leichter arbeiten zu können, gibt man diese oft in Form von Diagrammen wieder. Zum Beispiel lässt sich die Assoziativität der Komposition folgendermaßen darstellen:

Jedes Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & Z \arrow[r, "h"] & U \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiel 3.1.6. Die Kategorie der kurzen exakten Sequenzen über R–Linksmoduln, **SeS($_{\mathbf{R}}$Mod)**, lässt sich mittels Diagrammen gut beschreiben: Die Objekte sind kurze exakte Sequenzen von R–Linksmodulhomomorphismen und deren Morphismen sind Tripel von R-Linksmodulhomomorphismen (f, g, h) sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Definition 3.1.7. Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Isomorphismus, falls ein Morphismus $g : Y \longrightarrow X$ in $\mathcal{C}$ existiert, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt. Zwei Objekte X, Y einer Kategorie $\mathcal{C}$ nennen wir isomorph, falls es einen Isomorphismus $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{C}$ gibt. In diesen Fall schreiben wir auch $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ oder nur $X \cong Y$.

Um unterschiedliche Kategorien in Bezug zueinander zu bringen, führen wir den Begriff des Funktors ein. Dieser transferiert Objekte und Morphismen von einer Kategorie in eine andere:

Definition 3.1.8. Ein (kovarianter) Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie $\mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung von Objekten $\mathcal{C} \ni X \mapsto F(X) \in \mathcal{D}$ und einer Abbildung von Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \ni f \mapsto F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ sodass $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ und $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ für alle $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ gilt.

Bemerkung 3.1.9.
(1) Allein eine Morphismen–Abbildung $F : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$, die sämtliche Identitäten (für jedes $C \in \mathcal{C}$ ist $F(\mathrm{id}_C)$ eine Identität in $\mathcal{D}$) und Kompositionen ($F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ sofern $g \circ f$ in $\mathcal{C}$ existiert) respektiert, bestimmt eindeutig

einen Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$: Ist $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, dann sei $F(C)$ jenes Objekt in $\mathcal{D}$, für das $\mathrm{id}_{F(C)} = F(\mathrm{id}_C)$ gilt. Für einen Morphismus $f : A \longrightarrow B$ in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ folgt dann aus

$$F(f) = F(\mathrm{id}_B \circ f \circ \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(B)} \circ F(f) \circ \mathrm{id}_{F(A)}$$

dass $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ liegt. Damit ist $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein wohldefinierter Funktor.

(2) Die Verträglichkeit von Funktoren mit der Komposition von Morphismen führt unter anderem dazu, dass jeder Funktor F kommutative Diagramme in kommutative transferiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(h)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\ & F(Z) \end{tikzcd}$$

(3) Offensichtlich erhält man durch verketten zweier Funktoren $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ und $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ wiederum einen Funktor $G \circ F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}$, die Komposition von F und G. Sie ist assoziativ.

Beispiele 3.1.10.

(1) Betrachten wir die Kategorie **Gr** der Gruppen und bezeichnet $[G, G]$ die zu der Gruppe $G \in \mathbf{Gr}$ gehörenden Kommutatorgruppe, dann erhalten wir durch Bildung des Quotienten $Ab(G) := G/[G, G]$ einen Funktor $Ab : \mathbf{Gr} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der abelschen Gruppen. Denn ist $f : G \longrightarrow G'$ ein Gruppenmorphismus und $\pi' : G' \longrightarrow G'/[G', G']$ der kanonische, dann gilt $[G, G] \subseteq \mathrm{Ker}(\pi' \circ f)$; nach dem ersten Homomorphiesatz existiert also ein eindeutiger Homomorphismus $Ab(f) : Ab(G) \longrightarrow Ab(G')$.

(2) Sei Z ein beliebiges Objekt einer Kategorie $\mathcal{C}$, dann erhalten wir durch $F(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, für jedes $X \in \mathcal{C}$ und $F(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \ni g \mapsto f \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$, für jeden $\mathcal{C}$–Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ einen Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$, den sogenannten Homfunktor–Funktor und bezeichnen ihn durch $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, -)$.

(3) Ist R ein Ring und $N \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ ein fest gewählter R–Linksmodul, dann führt $M \mapsto M \otimes_R N$ zu einen Funktor $- \otimes_R N : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ indem wir jedem R–Morphismus $f : M \longrightarrow M'$ den $\mathbb{Z}$–Morphismus $f \otimes_R N : M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N$ mit $f \otimes_R N(m \otimes n) = f(m) \otimes n$ zuordnen.

(4) Ist hingegen $M \in \mathbf{Mod_R}$ ein fest gewählter R–Rechtsmodul, dann erhalten wir dem Beispiel (3) entsprechend einen Funktor $M \otimes_R - : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

(5) Ist R ein unitärer Ring, dann definieren wir zu jeder Menge $X \in \mathbf{Set}$ die Menge

$$Fr(X) := R^{(X)} := \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, R) \mid f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in X\},$$

wobei wir, etwas schlampig, $R \in \mathbf{Set}$ annehmen (wir "vergessen" die Ringstruktur).

Mittels $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$, für jedes $x \in X$ und $r \in R$, erhalten wir eine R–Modulstruktur auf $Fr(X)$, die $(\delta_x)_{x \in X}$, definiert durch

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1_R & \text{falls } y = x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Basis besitzt. Damit können wir jedes $x \in X$ mit $\delta_x \in Fr(X)$ identifizieren und jede Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ in **Set** eindeutig zu einen Morphismus $Fr(f) : Fr(X) \longrightarrow Fr(Y)$ in ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ "erweitern". Damit erhalten wir einen Funktor $Fr : \mathbf{Set} \longrightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$. $Fr(X)$ heißt dabei der freie Modul über (der Basis) X.

(6) Zu einer K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ erhalten wir durch $M \mapsto M^{\mathfrak{g}}$, $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod}$ kanonisch einen Funktor $(-)^{\mathfrak{g}} : {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$: Für jeden Modulhomomorphismus $f : M \longrightarrow M'$ sei $f^{\mathfrak{g}} : M^{\mathfrak{g}} \longrightarrow M'^{\mathfrak{g}}$ durch $f^{\mathfrak{g}} := f_{|M^{\mathfrak{g}}}$ definiert $(f(M^{\mathfrak{g}}) \subseteq M'^{\mathfrak{g}})$.

(7) Ebenso induziert jede K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ einen Funktor $(-)_{\mathfrak{g}} : {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$ der jedem $\mathfrak{g}$–Modul M den Koinvariantenmodul $M_{\mathfrak{g}}$ zuordnet: Zu jedem $\mathfrak{g}$–Modulhomomorphismus $f : M \longrightarrow M'$ sei $f_{\mathfrak{g}}$ analog zu $Ab(f)$ aus Beispiel (1) definiert.

(8) Indem wir jedem topologischen Raum seine Trägermenge und jeder stetigen Abbildung ihre zugrunde liegende Mengenabbildung zuordnen, erhalten wir den sogenannten Vergiss–Funktor $U_{\mathbf{Top}} : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$, der die topologische Struktur quasi vergisst. Allgemein nennen wir eine Kategorie $\mathcal{C}$ konkret, wenn ein treuer Funktor $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ in die Kategorie **Set** existiert. Weitere Beispiele sind: ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$, **Gr**, **Rng**.

(9) Andererseits existiert zu jeder Menge $X \in \mathbf{Set}$ eine topologische Struktur, nämlich die der diskreten Topologie $T(X) = (X, \mathcal{P}(X))$. Damit können wir jede Mengenabbildung $f : X \longrightarrow Y$ als stetige Abbildung $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$ verstehen und erhalten einen Funktor $T : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Top}$.

Bemerkung 3.1.11. Die Komposition $U \circ T$ der Funktoren aus den obigen Beispielen führt uns zu dem Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathbf{Set}} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ von **Set**. Generell besitzt jede Kategorie $\mathcal{C}$ einen Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathbf{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, der auf $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ jedes Element auf sich selbst abbildet. Hingegen ist in unserem Beispiel, wie man sofort sieht, $T \circ U \neq \mathrm{id}_{\mathbf{Top}}$.

Definition 3.1.12. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ Funktoren, für die $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ gilt. Dann nennen wir $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ *isomorphe* Kategorien.

Beispiel 3.1.13. Zu einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ sind die Kategorien ${}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod}$ und $\mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}}$ isomorph: Man legen Funktoren fest, die gemäß Bemerkung 1.1.2 die Objektabbildung $(M, \rho) \mapsto (M, -\rho)$ besitzen. Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen.

Definition 3.1.14. Seien $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ zwei parallele Funktoren. Eine natürliche Transformation von F nach G ist eine Klasse von Morphismen $\tau_X : F(X) \longrightarrow G(X)$, $X \in \mathcal{C}$ sodass für jeden Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{C}$ folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{D}$ kommutiert und schreiben $\tau : F \longrightarrow G$. Ist τ_X für jedes $X \in \mathcal{C}$ ein Isomorphismus, so nennen wir $\tau : F \xrightarrow{\cong} G$ eine natürliche Isomorphie zwischen F und G.

Beispiele 3.1.15.

(1) Ergänzend zu Bemerkung 3.1.11 findet sich eine natürliche Transformation von $T \circ U$ nach $\mathrm{id}_{\mathbf{Top}}$, sie ist aber keine natürliche Isomorphie.

(2) Für jedes fix gewählte $n \geq 0$ definiert der Verbindungshomomorphismus δ^n aus Abschnitt 1.3 eine natürliche Transformation von F nach G, wobei

$$F, G : \mathbf{SeS}(\mathbf{Ch}({}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod})) \longrightarrow \mathbf{R}\text{–}\mathbf{Mod}$$

durch $F(S) := H^n(C^\bullet)$ und $G(S) := H^{n+1}(A^\bullet)$ für jede exakte Sequenz

$$S : 0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$$

definiert ist.

(3) Zu jedem Funktor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ erhält man trivialerweise die natürliche Transformation $\mathrm{id}_F : F \longrightarrow F$ indem man $(\mathrm{id}_F)_X := \mathrm{id}_{F(X)}$ für jedes $X \in \mathcal{A}$ definiert. Wir bezeichnen sie als die Identität des Funktors F.

(4) Seien $F, G, H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ parallele Funktoren und $\tau : F \longrightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen F und G sowie $\tau' : G \longrightarrow H$ eine zwischen G und H. Dann bildet $\tau' \circ \tau : F \longrightarrow H$, definiert durch $(\tau' \circ \tau)_X := \tau'_X \circ \tau_X$, wiederum eine natürliche Transformation, die Komposition von τ mit τ'.

Der Begriff der natürlichen Transformation ermöglicht es uns, aus zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{J}$ eine neue Kategorie zu konstruieren: Die *Funktorkategorie* $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, deren Objekte sämtliche Funktoren von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{C}$ sind und deren Morphismenklasse aus den natürlichen Transformationen zwischen diesen Funktoren besteht. Die Komposition zweier (verknüpfbarer) natürlicher Transformationen ist wie in 3.1.15 (4) definiert. Doch aus mengentheoretischer Sicht müssen wir bei der Definition von $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ etwas präziser vorgehen. Wir benötigen zuvor folgende

Definition 3.1.16. Ein *kleine* $\mathcal{U}$–Kategorie $\mathcal{J}$ ist eine $\mathcal{U}$–Kategorie für die $\mathrm{Mor}(\mathcal{J})$ (oder gleichbedeutend $\mathrm{Ob}(\mathcal{J})$) eine $\mathcal{U}$–Menge ist.

Lemma 3.1.17 ([Sch1, 3.4.3])**.** *Sei $\mathcal{J}$ eine kleine, $\mathcal{C}$ eine beliebige $\mathcal{U}$–Kategorie.*

Dann ist die Funktorkategorie $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ eine $\mathcal{U}$–Kategorie.

Beweis. Ein Funktor $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ ist nach Bemerkung 3.1.9 (1) durch seine Morphismen–Abbildung $F_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eindeutig bestimmt. Weil nach Voraussetzung $\mathrm{Mor}(\mathcal{J}) \in \mathcal{U}$ gilt, ist nach Bemerkung 3.1.3 (7) F_{Mor} ebenfalls eine $\mathcal{U}$–Menge. Daher gilt $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathcal{J}}) \subset \mathcal{U}$.

Eine natürliche Transformation $\tau \in \mathrm{Nat}(F, G)$ zweier Funktoren $F, G : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ kann als Element der Menge $\prod_{X \in \mathcal{J}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), G(X)$ verstanden werden. Sie ist eine $\mathcal{U}$–Menge (siehe Bemerkung 3.1.3 (5)) und daher ist auch ihre Teilmenge $\mathrm{Nat}(F, G)$ eine $\mathcal{U}$–Menge. Damit aber die Vereinigung der Morphismenmengen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{J}}}(F, G)$ disjunkt ist, setzen wir diese gleich $\mathrm{Nat}(F, G) \times \{F_{Mor}\} \times \{G_{Mor}\}$. Sie ist eine $\mathcal{U}$–Menge (Bemerkung 3.1.3 (5)), nach Univ (iii) auch Teilmenge von $\mathcal{U}$ sodass die Vereinigung all dieser Morphismenmengen ebenfalls Teilmenge von $\mathcal{U}$ ist: $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}^{\mathcal{J}}) \subseteq \mathcal{U}$.

Die Verifikationen der Kategorieneigenschaften sind trivial. □

Bemerkung 3.1.18. Ist $\tau : F \longrightarrow G$ eine natürliche Isomorphie zwischen F und G, dann definiert $\tau_X^{-1} := (\tau_X)^{-1}$ eine natürliche Transformation $\tau^{-1} : G \longrightarrow F$: Aus jedem kommutativen Diagramm unten links erhält man auf Grund von

$$F(f) \circ (\tau_X)^{-1} = (\tau_Y)^{-1} \circ \tau_Y \circ F(f) \circ (\tau_X)^{-1} = (\tau_Y)^{-1} \circ G(f) \circ \tau_X \circ (\tau_X)^{-1} = (\tau_Y)^{-1} \circ G(f)$$

ein kommutatives Diagramm unten rechts.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[u, "(\tau_X)^{-1}"] & G(Y). \arrow[u, "(\tau_Y)^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

In $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ gilt damit offensichtlich $\tau \circ \tau^{-1} = \mathrm{id}_G$ und $\tau^{-1} \circ \tau = \mathrm{id}_F$ (siehe Beispiel 3.1.15 (3) und (4)). Dh. natürliche Isomorphien zwischen Funktoren $F, G : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A}$ entsprechen genau den Isomorphismen $\tau : F \xrightarrow{\cong} G$ in der Funktorkategorie $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$.

Definition 3.1.19. Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt initial (resp. terminal), falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$) für jedes Objekt Y in $\mathcal{C}$ einelementig ist. Falls es sowohl initial als auch terminal ist, nennen wir es Null–Objekt.

Bemerkung 3.1.20.

(1) Je zwei initiale Objekte I und I' einer Kategorie $\mathcal{C}$ sind isomorph. Denn es existieren komponierbare Morphismen $i : I \longrightarrow I'$ und $i' : I' \longrightarrow I$ deren Kompositionen $i' \circ i$ und $i \circ i'$ nur die Identitäten sein können.

(2) Je zwei terminale Objekte T und T' einer Kategorie $\mathcal{C}$ sind isomorph. Dies zeigt sich analog zu (1).

Beispiele 3.1.21.

(1) In **Set** ist die leere Menge $\varnothing$ ein initiales und jede einelementige Menge $S = \{s\}$ ein terminales Objekt. Bemerkung 3.1.20 zufolge besitzt damit **Set** kein Null–Objekt.
(2) Einige algebraische Strukturen wie **Gr**, **R**–**Mod** oder **Rng** besitzen ein 0–Objekt, **Krp** hingegen nicht denn Körperhomomorphismen existieren nur zwischen Körpern gleicher Charakteristik.
(3) Besitzt $\mathcal{A}$ ein Null–Objekt Z, so auch $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$: Der Ketten–Komplex (Z_n, d_n) mit $Z_n = Z$ ist, wie unschwer erkennbar, ein Null–Objekt in $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$.
(4) Verallgemeinert man dieses Konstruktionsprinzip, so erhält man mit einem Null–Objekt $Z \in \mathcal{A}$ auch in der Funktorkategorie $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ ein Null–Objekt: Man definiere $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A}$ mit $F(j) = Z$ für jedes $j \in \mathcal{J}$.

Definition 3.1.22. Ein Morphismus $m : X \longrightarrow Y$ ist ein Monomorphismus, falls für jedes Paar paralleler Morphismen $f, g : Z \longrightarrow X$ gilt: Aus $m \circ f = m \circ g$ folgt $f = g$. In diesem Fall sagen wir: m ist moni.

Ein Morphismus $e : X \longrightarrow Y$ ist ein Epimorphismus, falls für jedes Paar paralleler Morphismen $f, g : Y \longrightarrow Z$ gilt: Aus $f \circ e = g \circ e$ folgt $f = g$. In diesem Fall sagen wir: e ist epi.

Bemerkung 3.1.23.
(1) In **R**–**Mod** ist ein Morphismus f ein Monomorphismus (resp. Epimorphismus) genau dann wenn f injektiv (resp. surjektiv) ist.
(2) In **Rng** ist $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ epi.
(3) Ist die Komposition $g \circ f$ epi, dann auch g: Ist $h \circ g = h' \circ g$, dann gilt $h \circ (g \circ f) = h' \circ (g \circ f)$ und auf Grund der Voraussetzung folgt $h = h'$. Dual folgt:
(4) Ist die Komposition $g \circ f$ moni, dann auch f. Dies ist analog zu (3) zu beweisen, siehe dazu auch Bemerkung 3.1.27 (3).
(5) Ist $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ die Funktorkategorie von $\mathcal{J}$ über $\mathcal{A}$ und τ eine natürliche Transformation sodass für jedes $j \in \mathcal{J}$ der Morphismus τ_j moni (resp. epi) in $\mathcal{A}$ ist, dann ist τ moni (resp. epi) in $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$.
(6) Sei Y ein Objekt einer Kategorie $\mathcal{C}$, dann bezeichnen wir mit $\mathrm{Mo}_{\mathcal{C}}(Y)$ die Klasse aller Monomorphismen $m : \bullet \longrightarrow Y$ mit Ziel Y und definieren $m' \leq m$ in $\mathrm{Mo}_{\mathcal{C}}(Y)$, falls m' durch m faktorisiert wird, dh. wenn es einen Morphismus n gibt, sodass $m' = m \circ n$ gilt. Nach (4) ist dann n ebenfalls moni. Da $\leq$ offensichtlich reflexiv und transitiv ist, erhalten wir durch

$$m \equiv m' \Leftrightarrow m \leq m' \text{ und } m' \leq m$$

eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $\mathrm{Mo}_{\mathcal{C}}(Y)$ und bezeichnen die "Menge" der zugehörigen Äquivalenzklassen $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(Y) := \mathrm{Mo}_{\mathcal{C}}(Y)/\equiv$ und ihre Elemente als die Unterobjekte von Y. Dabei induziert die Relation $\leq$ eine partielle Ordnung auf $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(Y)$. In vielen konkreten Kategorien wie **R**–**Mod**, **Rng** oder **Grp**, ist dieser Begriff von Unterobjekten äquivalent zu dem herkömmlich mengentheoretisch

definierten.
Sind m und m' äquivalente Monomorphismen sodass $m = m' \circ n'$ und $m' = m \circ n$ gilt, dann ist $m = m \circ (n \circ n')$ und weil m linkskürzbar ist, folgt $\mathrm{id} = n \circ n'$. Analog erhalten wir $\mathrm{id} = n' \circ n$ sodass n und n' zueinander inverse Morphismen sind.

(7) Dual lässt sich auch der Begriff der Quotienten–Objekte entwickeln: Es bezeichne $\mathrm{Ep}_{\mathcal{C}}(X)$ die Klasse der Epimorphismen $e : X \longrightarrow \bullet$ in $\mathcal{C}$ mit Quelle X und sagen $e \leq e'$ in $\mathrm{Ep}_{\mathcal{C}}(X)$, falls ein Morphismus f mit $e = f \circ e'$ existiert sowie $e \equiv e'$ genau dann, wenn $e \leq e'$ und $e' \leq e$ gilt. Die dadurch erhaltenen Äquivalenzklassen in $\mathrm{Ep}_{\mathcal{C}}(X)$ nennen wir Quotienten–Objekte und schreiben $\mathrm{Quo}_{\mathcal{C}}(X) := \mathrm{Ep}_{\mathcal{C}}(X)/\equiv$. Wiederum gilt: $e \equiv e'$ genau dann, wenn $e = f \circ e'$, mit f invertierbar, gilt.

Ein fundamentales Konzept in der Kategorientheorie ist jenes der Dualität. Es lässt sich anhand eines Meta–Operators in der Kategorientheorie verdeutlichen, welcher den Begriffen wie Objekte, Morphismen, Diagramme oder Aussagen ihre jeweiligen dualen Begriffe zuordnet. Charakterisierend für diesen Meta–Operator ist dabei die Eigenschaft, den Pfeil eines jeden Morphismus, wie auch die Komposition zweier Morphismen, umzukehren. Um dieses Konzept mengentheoretisch umzusetzen, definieren wir zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ ihre duale Kategorie:

Definition 3.1.24. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist $\mathcal{C}^{op}$ die Kategorie mit den selben Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, Morphismen $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}^{op}) := \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ und der selben Prä–Partition $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \mid (A,B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}\}$ wie in $\mathcal{C}$, aber mit einer neuen Indizierung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ der Prä–Partition und einer, durch $f \circ^{op} g = g \circ f$ neu definierten Komposition.

Bemerkung 3.1.25.

(1) Man prüft leicht nach, dass es sich bei $\mathcal{C}^{op}$ tatsächlich um eine Kategorie handelt: Die Identitäten in $\mathcal{C}^{op}$ stimmen mit jenen in $\mathcal{C}$ überein und die Assoziativität von $\circ$ überträgt sich auf $\circ^{op}$.

(2) Die Neuindizierung der Prä–Partition von $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ verursacht bei jeden Morphismus in $\mathcal{C}$ ein Vertauschen von Quelle und Ziel in $\mathcal{C}^{op}$: Ist $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, dann besitzt dieser in $\mathcal{C}^{op}$ die Darstellung $f : B \longrightarrow A$.

(3) Generell lässt sich jedes kommutative Diagramm in $\mathcal{C}$ durch vertauschen der Pfeile in ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{C}^{op}$ umwandeln.

(4) Offensichtlich gilt $\left(\mathcal{C}^{op}\right)^{op} = \mathcal{C}$ für jede Kategorie $\mathcal{C}$.

(5) Ist $f : A \longrightarrow A$ ein Endomorphismus in $\mathcal{C}$, so besitzt dieser in $\mathcal{C}^{op}$ zwar die selbe Pfeil–Darstellung, aber nicht notwendigerweise die selben Eigenschaften. Auch die Objekt aus $\mathcal{C}$ können in $\mathcal{C}^{op}$ andere Eigenschaften aufweisen. Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen.

Beispiel 3.1.26. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem initialen Objekt I, dh. zu jedem Objekt $Y \in \mathcal{C}$ ist die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I,Y)$ einelementig. Dann besitzt I in $\mathcal{C}^{op}$ die dazu duale Eigenschaft: Zu jedem $X \in \mathcal{C}$ ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,I) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I,X)$ einelementig, also ist I terminal in $\mathcal{C}^{op}$. Ist hingegen T terminal in $\mathcal{C}$, dann folgt auf analoger Art und Weise, dass T initial in $\mathcal{C}^{op}$ ist.

Bemerkung 3.1.27.
(1) Aus dem Beispiel 3.1.26 geht folgender Zusammenhang hervor: Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist in $\mathcal{C}$ initial genau dann, wenn es in $\mathcal{C}^{op}$ terminal ist. Begriffe, die derartig in Bezug zueinander stehen, bezeichnen wir als duale.
(2) Aus der Definition von Monomorphismus und Epimorphismus sieht man sofort, dass diese Begriffe dual zueinander stehen, dh. ein Morphismus f ist genau dann moni in $\mathcal{C}$, wenn er epi in $\mathcal{C}^{op}$ ist.
(3) Aussagen und ihre Beweise lassen sich oft dualisieren. In diesen Fällen führen wir steht's nur einen Beweis. Zum Beispiel gewinnen wir die Aussage in Beispiel 3.1.23 (4) zusammen mit ihrem Beweis aus Beispiel 3.1.23 (3) durch Dualisierung desselben.

Ist $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor, so ist F, weil $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \mathrm{Mor}(\mathcal{C}^{op})$ gilt, insbesondere eine Morphismen–Abbildung $F : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$. Sie respektiert die Identitäten, dreht aber Kompositionen wie $f \circ g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ um: $F(f \circ g) = F(g \circ^{op} f) = F(g) \circ F(f)$. Daher ist F im Allgemeinen kein Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$. Wir definieren daher:

Definition 3.1.28. Sei $F : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ eine Abbildung mit

$$F(\mathrm{id}_C) \in \mathrm{Id}(\mathcal{D}) \qquad\qquad F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

für jedes Objekt $C \in \mathcal{C}$ und jede mögliche Komposition $g \circ f$ in $\mathcal{C}$. Dann nennen wir F einen kontravarianten Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$. Wir schreiben dafür $F : \mathcal{C} \xrightarrow{\leftrightarrows} \mathcal{D}$.

Bemerkung 3.1.29.
(1) Als kontravarianter Funktor $F : \mathcal{C} \xrightarrow{\leftrightarrows} \mathcal{D}$ ist F zugleich ein Funktor von $\mathcal{C}^{op}$ nach $\mathcal{D}$. Denn für $f \circ^{op} g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}^{op})$ gilt $F(f \circ^{op} g) = F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ sodass nach Bemerkung 3.1.9 (1) die Behauptung folgt. Daher werden wir einen kontravarianten Funktor $F : \mathcal{C} \xrightarrow{\leftrightarrows} \mathcal{D}$ in Zukunft als Funktor $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$ von $\mathcal{C}^{op}$ nach $\mathcal{D}$ bezeichnen.
(2) Jeder Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist zugleich ein kontravarianter Funktor $F : \mathcal{C}^{op} \xrightarrow{\leftrightarrows} \mathcal{D}$ von $\mathcal{C}^{op}$ nach $\mathcal{D}$ und ein kontravarianter Funktor $F : \mathcal{C} \xrightarrow{\leftrightarrows} \mathcal{D}^{op}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}^{op}$.

Beispiel 3.1.30. Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ und einem fest gewählten Objekt $Z \in \mathcal{C}$ definiert die Zuordnung

$$\mathrm{id}_C \mapsto \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,Z)} \qquad\qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D) \ni f \mapsto \big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D,Z) \ni g \mapsto g \circ f\big)$$

einen kontravarianten Funktor von $\mathcal{C}$ nach **Set**, den kontravarianten Homfunktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(-,Z) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$. Er ordnet jedem Objekt $C \in \mathcal{C}$ die Morphismenmenge

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,Z)$, und jedem Morphismus $f : C \longrightarrow D$ die Mengenabbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,Z) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,Z),$$

die durch $g \mapsto g \circ f$ definiert ist, zu.

Hier sei noch eine weitere Konstruktion einer Kategorie angeführt:

Definition 3.1.31. Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Dann definieren wir deren *Produktkategorie* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ als jene Kategorie, deren Objekte Paare (X,Y) von Objekten $X \in \mathcal{C}$ und $Y \in \mathcal{D}$ sind und zu jedem geordneten Paar von Objekten $((X,Y),(X',Y'))$ die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X,Y),(X',Y')) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,Y')$ als Morphismen von (X,Y) nach (X',Y') besitzt und deren Komposition komponentenweise festgelegt ist.

Man prüft leicht nach, dass es sich bei $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ in der Tat um eine Kategorie handelt. Die Identität $\mathrm{id}_{(X,Y)}$ des Objektes $(X,Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ist durch $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y)$ gegeben.

Einen Funktor $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, dessen Quelle ein Produkt zweier Kategorien ist, bezeichnen wir als einen *Bifunktor*. Man spricht in manchen Fällen auch von einem Funktor in zwei Argumenten, das erste liegt in $\mathcal{A}$ und das zweite in $\mathcal{B}$.

Beispiele 3.1.32.

(1) Sei R ein Ring. Dann bildet der Tensorfunktor, der jedem Paar von Objekten $(M,N) \in \mathbf{Mod_R} \times {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ ihr Tensorprodukt $M \otimes_R N$ zuordnet und jedem Paar von Morphismen $(f,g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{Mod_R}) \times \mathrm{Mor}({}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod})$ mit $f : M \longrightarrow M'$ und $g : N \longrightarrow N'$ den Gruppenhomomorphismus $f \otimes_R g : M \otimes_R N \longrightarrow M' \otimes_R N'$ mit $f \otimes_R g(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ zuordnet, einen Bifunktor

$$- \otimes_R - : \mathbf{Mod_R} \times {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

(2) Der Homfunktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ gibt ein weiteres Standardbeispiel für einen Bifunktor ab. Er ordnet jedem Paar von Objekten $(C,D) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$ die Morphismenmenge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$, und jedem Paar von Morphismen $(f,g) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}^{op}) \times \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ mit $f : C \longrightarrow C'$ und $g : D \longrightarrow D'$ in $\mathcal{C}$ die Mengenabbildung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C',D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D')$, die durch $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,g)(h) := g \circ h \circ f$ definiert ist, zu. Es ist auch üblich ihn als Bifunktor $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$, der kontravariant im ersten und kovariant im zweiten Argument ist, zu bezeichnen.

Bemerkung 3.1.33.

(1) Fixieren wir bei einem Bifunktor $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Argument durch ein gewähltes Objekt A in $\mathcal{A}$, so erhalten wir einen Funktor $B(A,-) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ indem wir zusätzlich $B(A,g) := B(\mathrm{id}_A, g)$ definieren und bezeichnen ihn als *partiellen Funktor* von B. Die Funktoreigenschaften sind leicht zu verifizieren. Zum Beispiel gehen auf diese Weise die Tensor–Funktoren in 3.1.10 (3) und (4) aus dem Bifunktor in 3.1.32 (1) hervor sowie die Hom–Funktoren in 3.1.10 (2) und 3.1.30 aus dem Bifunktor in 3.1.32 (2).

(2) Jeder Morphismus $f : A \longrightarrow A'$ in $\mathcal{A}$ induziert eine natürliche Transformation $\tau := B(f,-) : B(A,-) \longrightarrow B(A',-)$ indem wir analog zu (1) $\tau_B := B(f,B) := B(f,\mathrm{id}_B)$ setzen. Denn zu jeden Morphismus $g : B \longrightarrow B'$ in $\mathcal{B}$ lässt sich folgende Gleichung in $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ generieren:

$$(\mathrm{id}_{A'}, g) \circ (f, \mathrm{id}_B) = (f, g) = (f, \mathrm{id}_{B'}) \circ (\mathrm{id}_A, g)$$

Wendet man darauf den Bifunktor B an, erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} B(A,B) \arrow[r, "B(A,g)"] \arrow[d, "\tau_B = B(f,B)"'] & B(A,B') \arrow[d, "\tau_{B'} = B(f,B')"] \\ B(A',B) \arrow[r, "B(A',g)"] & B(A',B') \end{tikzcd}$$

womit $B(f,-)$ eine natürliche Transformation ist. Analog erhalten wir zu einem Morphismus $g : B \longrightarrow B'$ eine natürliche Transformation

$$B(-,g) : B(-,B) \longrightarrow B(-,B').$$

(3) Die Richtigkeit der beiden Gleichungen

$$B(\mathrm{id}_A, -) = \mathrm{id}_{B(A,-)} \qquad\qquad B(f' \circ f, -) = B(f', -) \circ B(f, -)$$

ist ebenfalls leicht zu verifizieren.

3.2 Projektive und Injektive Objekte

Definition 3.2.1. Wir nennen ein Objekt P einer Kategorie $\mathcal{A}$ projektiv in $\mathcal{A}$, falls zu jedem Epimorphismus $g : B \longrightarrow C$ und beliebigen Morphismus $\gamma : P \longrightarrow B$ ein Morphismus $\beta : P \longrightarrow B$ existiert, sodass $\gamma = g \circ \beta$ gilt.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, two heads, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, dotted, "\beta"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Dual nennen wir ein Objekt I in $\mathcal{A}$ injektiv in $\mathcal{A}$, falls zu jedem Monomorphismus $f : A \longrightarrow B$ und Morphismus $\alpha : A \longrightarrow I$ ein Morphismus $\beta : B \longrightarrow I$ existiert, sodass $\alpha = \beta \circ f$ gilt.

Beispiele 3.2.2.

(1) Jedes terminale Objekt einer Kategorie ist projektiv und jedes initiales Objekt einer Kategorie ist injektiv.

(2) In **Set** ist jede Menge projektiv: Ist $P \neq \varnothing$ so wählt man zu jedem $x \in P$ ein

Element $\beta(x)$ aus der Urbildmenge $g^{-1}(\gamma(x))$ (Auswahlaxiom). Als terminales Objekt ist auch die leere Menge $\varnothing$ projektiv.

(3) In **Set** sind genau die nicht-leeren Mengen injektiv: Die Injektivität nicht–leerer Mengen ist leicht nachzuprüfen. Hingegen existiert zu $\mathrm{id}_\varnothing$ und dem Morphismus $f : \varnothing \longrightarrow B \neq \varnothing$ kein Morphismus von B nach $\varnothing$, der das entsprechende Diagramm kommutativ ergänzen könnte.

(4) Das Objekt $\mathbb{Z}$ in der Kategorie der abelschen Gruppen **Ab** ist projektiv.

(5) In der Kategorie der Vektorräume über einem Körper K ist jedes Objekt projektiv und injektiv.

(6) In $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$, R unitär, ist jeder freie Modul projektiv. Dies folgt aus seiner universellen Eigenschaft. Insbesondere ist R in $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ projektiv.

Definition 3.2.3. Ein *Produkt* einer Familie von Objekten $(X_i)_{i\in I}$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Tupel $(X, (\pi_i)_{i\in I})$ bestehend aus einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ und einer Familie von Morphismen $(\pi_i : X \longrightarrow X_i)_{i\in I}$, Projektionen genannt, sodass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Zu jedem Objekt $Y \in \mathcal{C}$ und jeder Familie von Morphismen $(f_i : Y \longrightarrow X_i)_{i\in I}$ existiert ein eindeutiger Morphismus $f : Y \longrightarrow X$ sodass für jedes $i \in I$ das Diagramm unten links kommutiert. In diesem Fall bezeichnen wir X auch durch $\prod_{i\in I} X_i$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ Y \arrow[u, dotted, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[d, dotted, "f"] \\ X_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[r, "f_i"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ein *Koprodukt* einer Familie von Objekten $(X_i)_{i\in I}$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Tupel $(X, (\iota_i)_{i\in I})$ bestehend aus einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ und einer Familie von Morphismen $(\iota_i : X_i \longrightarrow X)_{i\in I}$, Inklusion genannt, sodass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Zu jedem Objekt $Y \in \mathcal{C}$ und jeder Familie von Morphismen $(f_i : X_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ existiert ein eindeutiger Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ sodass für jedes $i \in I$ das Diagramm oben rechts kommutiert. In diesem Fall bezeichnen wir X auch durch $\coprod_{i\in I} X_i$.

Die Kategorie $\mathcal{C}$ besitzt (endliche) Produkte (resp. Koprodukte), falls zu jeder (endlichen) Objektfamilie $(X_i)_{i\in I}$ ein Produkt $(\prod_{i\in I} X_i, \pi_i)$ (resp. Koprodukt $(\coprod_{i\in I} X_i, \iota_i)$) in $\mathcal{C}$ existiert.

Beispiele 3.2.4.

(1) Ist $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, so lässt sich dazu das sogenannte kartesische Produkt bilden, die Menge von Abbildungen der Form

$$\prod_{i\in I} X_i := \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \mid f(i) \in X_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

Zusammen mit der Familie von Evaluations–Abbildungen $(\mathrm{ev}_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i)_{i\in I}$ $(\mathrm{ev}_i(f) = f(i))$ erhalten wir ein Produkt $(\prod_{i\in I} X_i, (\mathrm{ev}_i)_{i\in I})$ der Mengen $(X_i)_{i\in I}$

in **Set**. Denn ist ein Objekt Y in **Set** und eine Familie von Abbildungen $(f_i : Y \longrightarrow X_i)_{i\in I}$ gegeben, so ist durch $f(y) : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$ mit $f(y)(i) := f_i(y)$ für alle $y \in Y$ und $i \in I$ eine wohldefinierte Abbildung $f : Y \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ gegeben, die einzig $\mathrm{ev}_i \circ f = f_i$ für jedes $i \in I$ erfüllt.

(2) In vielen konkreten Kategorien wie $_{\mathbf{K}}$**Vek**, $_{\mathbf{R}}$**Mod**, **Grp**, **Ab** oder **Top** lässt sich ein Produkt einer Objekt–Familie $(A_i)_{i\in I}$ mit Hilfe des kartesischen Produktes der darunterliegenden Objekt–Familie in **Set** auffinden indem man dem kartesischen Produkt die fehlende Struktur wieder "auferlegt". Sie muss aber derart universell sein, dass sämtliche Projektionen π_i und Abbildungen f aus (1) sie respektieren. In den algebraischen Fällen lässt sich die Struktur komponentenweise erklären. Zum Beispiel ist zu einer Familie von abelschen Gruppen $((A_i, +_i))_{i\in I}$ das kartesische Produkt $(\prod_{i\in I} A_i, (\pi_i)_{i\in I})$ zusammen mit $(f + f')(i) := f(i) +_i f'(i)$ für alle $f, f' \in \prod_{i\in I} A_i$ das Produkt dieser Gruppenfamilie in **Ab**.

(3) Das Koprodukt in **Set** kann durch die disjunkte Vereinigung realisiert werden: Zu einer Familie von Mengen $(X_i)_{i\in I}$ in **Set** definieren wir zuerst die dazu kanonisch isomorphe aber disjunkte Mengen–Familie $(Y_i := X_i \times \{i\})_{i\in I}$. Ihre disjunkte Vereinigung $\bigcup_{i\in I} Y_i$ bildet zusammen mit den kanonischen Abbildungen $\iota_i : X_i \longrightarrow Y_i$, $\iota_i(x) = (x, i)$ ein Koprodukt von $(X_i)_{i\in I}$, wie sich leicht verifizieren lässt.

(4) In den konkreten Kategorien $_{\mathbf{K}}$**Vek**, $_{\mathbf{R}}$**Mod** und **Ab** existieren ebenfalls Koprodukte. Doch im Gegensatz zu dem Produkt sind sie nicht über das Koprodukt in der darunterliegenden Kategorie **Set** zu verwirklichen. Vielmehr entsprechen die direkten Summen von Vektorräumen (resp. R–Moduln, abelschen Gruppen) zusammen mit den kanonischen Inklusionen dem Begriff des Koproduktes in $_{\mathbf{K}}$**Vek** (resp. $_{\mathbf{R}}$**Mod**, **Ab**). Daher lässt sich in diesen Kategorien das Koprodukt einer Familie von Objekten $(M_i)_{i\in I}$ durch folgendes Unterobjekt des Produktes $\prod_{i\in I} M_i$ realisieren:

$$\coprod_{i\in I} M_i := \{g \in \prod_{i\in I} M_i \mid g(i) = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$$

$$\iota_j : M_j \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i \text{ mit } \mathrm{ev}_i \circ \iota_j := \begin{cases} \mathrm{id}_{M_j} & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Denn ist eine Familie von Morphismen der Form $(f_i : M_i \longrightarrow N)_{i\in I}$ gegeben, so ist durch $f := \sum_{i\in I} f_i \circ \mathrm{ev}_i$ eine wohldefinierte Abbildung $f : \coprod_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ gegeben, die $f \circ \iota_j = \sum_{in\in I} f_i \circ \mathrm{ev}_i \circ \iota_j = f_i$ erfüllt. Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen. Ist die Indexmenge I endlich, so gilt $\prod_{i\in I} M_i = \coprod_{i\in I} M_i$.

(5) Hingegen entspricht der Begriff der direkten Summe von Gruppen nicht dem des Koproduktes in **Grp**. Stattdessen ist das freie Produkt von Gruppen eine Realisation des Koprodukts in **Grp**.

(6) Auch in **Rng** unterscheidet sich das Koprodukt von der direkten Summe: Hier

entspricht das Tensorprodukt von Ringen $R \otimes_{\mathbb{Z}} S$ dem Koprodukt.

Bemerkung 3.2.5.

(1) Existiert zu einer Familie von Objekten $(X_i)_{i\in I}$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ein Produkt $(X, (\pi_i)_{i\in I})$ (resp. Koprodukt $(X, (\iota_i)_{i\in I})$), so ist dieses bis auf kanonischer Isomorphie eindeutig bestimmt. Dies zeigt sich aus der universellen Eigenschaft von Produkten (resp. Koprodukten). Daher ist es legitim, nur von dem einen Produkt $(\prod_{i\in I} X_i, \pi_i)$ (resp. Koprodukt $(\coprod_{i\in I} X_i, \iota_i)$) von $(X_i)_{i\in I}$, sofern es existiert, zu sprechen.

(2) Ist ein Produkt $(\prod_{i\in I} X_i, (\pi_i)_{i\in I})$ in $\mathcal{C}$ gegeben und setzen wir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_j) \neq \varnothing$ für alle $i, j \in I$ voraus (dies ist z. B. dann erfüllt, wenn $\mathcal{C}$ ein Null–Objekt besitzt), so ist jede Projektion π_i ein Retrakt (insbesondere epi). Dies zeigt sich für π_{i_0}, $i_0 \in I$ fix gewählt, in dem man $f_{i_0} := \mathrm{id}_{X_{i_0}}$ und $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{i_0}, X_i)$ für $i \neq i_0$ beliebig wählt. Denn nach der universellen Eigenschaft des Produktes existiert ein eindeutiger Morphismus $f : X_{i_0} \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$, sodass unter anderem $\pi_{i_0} \circ f = \mathrm{id}_{X_{i_0}}$ gilt.

(3) Ist $(\coprod_{i\in I} X_i, \iota_i)$ ein Koprodukt, so zeigt sich unter den gleichen Voraussetzungen wie in (2), dass jedes ι_i ein Schnitt (und insbesondere moni) ist.

(4) In ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ gilt umgekehrt: Ist $\pi : M \longrightarrow M''$ ein Retrakt, dh. es existiert ein Morphismus $\iota'' : M'' \longrightarrow M$ mit $\pi'' \circ \iota'' = \mathrm{id}_{M''}$, dann existiert ein $\pi' : M \longrightarrow M'$ sodass $(M, (\pi', \pi''))$ ein Produkt von (M', M'') bildet. Gleichzeitig existiert zu dem Schnitt ι'' ein Morphismus $\iota' : M' \longrightarrow M$ sodass $(M, (\iota', \iota''))$ ein Koprodukt von (M', M'') bildet. Dies zeigt sich, in dem man $\pi' \in \mathrm{coker}(\iota'')$ bzw. $\iota' \in \ker(\pi'')$ wählt. In allgemeinerem Zusammenhang wird dies in Proposition 3.3.17 behandelt.

(5) Aus den letzten drei Bemerkungen und dem Beispiel 3.2.4 (4) geht hervor, dass zu jeder endlichen Familie von R–Moduln $(M_i)_{i\in I}$ es zwei Familien von Morphismen $(\iota_i)_{i\in I}$ und $(\pi_i)_{i\in I}$ gibt, sodass mit $M = \prod_{i\in I} M_i = \coprod_{i\in I} M_i$ gilt:

$$\pi_i \circ \iota_j = \begin{cases} \mathrm{id}_{M_j} & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad\qquad \sum_{i\in I} \iota_i \circ \pi_i = \mathrm{id}_M \,.$$

Man bezeichnet dann $(M, (\iota_i)_{i\in I}, (\pi_i)_{i\in I})$ mit diesen Eigenschaften als das Biprodukt von $(M_i)_{i\in I}$. $(M, (\pi_i)_{i\in I})$ bildet dann ein Produkt und $(M, (\iota_i)_{i\in I})$ ein Koprodukt von $(M_i)_{i\in I}$.

(6) Seien $(X_i)_{i\in I}$ und $(X_i')_{i\in I}$ Familien von Objekten und $(f_i : X_i \longrightarrow X_i')_{i\in I}$ eine Familie von Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$. Existiert zu beiden Objekt–Familien jeweils das Produkt $(\prod_{i\in I} X_i, (\pi_i)_{i\in I})$ und $(\prod_{i\in I} X_i', (\pi_i')_{i\in I})$, dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $\prod f_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i'$, sodass für jedes $i \in I$ das

Diagramm unten links kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[r, dotted, "\prod f_i"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \prod\limits_{i\in I} X'_i \arrow[d, "\pi'_i"] \\ X_i \arrow[r, "f_i"'] & X'_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\iota_i"'] & X'_i \arrow[d, "\iota'_i"] \\ \coprod\limits_{i\in I} X_i \arrow[r, dotted, "\coprod f_i"'] & \coprod\limits_{i\in I} X'_i \end{tikzcd}$$

Existieren hingegen die Koprodukte $(\coprod_{i\in I} X_i, (\iota_i)_{i\in I})$ und $(\coprod_{i\in I} X'_i, (\iota'_i)_{i\in I})$, dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $\coprod f_i : \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} X'_i$, sodass für jedes $i \in I$ das Diagramm oben rechts kommutiert.

(7) Zu einer Familie von Monomorphismen $(m_i : X_i \longrightarrow X'_i)_{i\in I}$ ist auch der Morphismus $\prod m_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X'_i$ (sofern die Produkte existieren) moni. Denn sind $g, g' : Y \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ parallele Morphismen mit $\prod m_i \circ g = \prod m_i \circ g'$, dann gilt für jedes $i \in I$: $m_i \circ \pi_i \circ g = m_i \circ \pi_i \circ g'$, nach Voraussetzung also $\pi_i \circ g = \pi_i \circ g'$. Der universellen Eigenschaft des Produktes zufolge gilt daher $g = g'$.
Unter denselben Voraussetzungen wie in (2) gilt auch die Umkehrung: Ist $\prod m_i$ moni dann sind auch sämtliche m_i moni. Dazu seien $f_{i_0}, g_{i_0} : Y \longrightarrow X_{i_0}$ parallele Morphismen sodass $m_{i_0} \circ f_{i_0} = m_{i_0} \circ g_{i_0}$ gilt. Wählen wir nun für jedes $i \neq i_0$ beliebige Morphismen $f_i = g_i : Y \longrightarrow X_i$ (nach Voraussetzung existieren zumindest die Morphismen $\pi_i \circ \bar\iota_{i_0} \circ f_{i_0} : Y \longrightarrow X_i$, siehe (2)), dann existieren eindeutige Morphismen $f, g : Y \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ die $\pi_i \circ f = f_i$ bzw. $\pi_i \circ g = g_i$ für jedes $i \in I$ erfüllen. Ihre Kompositionen mit $\prod m_i$ sind ident, denn für alle $i \in I$ gilt

$$\pi'_i \circ \prod m_j \circ f = m_i \circ \pi_i \circ f = m_i \circ f_i = m_i \circ g_i = \cdots = \pi'_i \circ \prod m_j \circ g$$

was der universellen Eigenschaft des Produktes zufolge $\prod m_j \circ f = \prod m_j \circ g$ impliziert. Weil aber $\prod m_j$ moni ist, erhalten wir $f = g$ und damit $f_{i_0} = g_{i_0}$.

(8) Dual ist zu jeder Familie von Epimorphismen $(e_i : X_i \longrightarrow X'_i)_{i\in I}$ auch der Morphismus $\coprod e_i : \coprod_{i\in I} X_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} X'_i$ epi und die Umkehrung dessen ist unter den gleichen Voraussetzungen wie in (2) gegeben.

(9) Im Allgemeinen ist aber $\prod e_i$ zu einer Familie $(e_i)_{i\in I}$ von Epimorphismen nicht epi wie auch $\coprod m_i$ zu einer Familie von Monomorphismen $(m_i)_{i\in I}$ nicht notwendigerweise moni ist.

(10) In der Kategorie $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ gilt für Familien von Morphismen jedoch:

$$\begin{array}{rcccc} m_i \text{ ist moni für alle } i \in I & \Leftrightarrow & \prod m_i \text{ ist moni} & \Leftrightarrow & \coprod m_i \text{ ist moni} \\ e_i \text{ ist epi für alle } i \in I & \Leftrightarrow & \prod e_i \text{ ist epi} & \Leftrightarrow & \coprod e_i \text{ ist epi.} \end{array}$$

Dies folgere man sofort aus Bemerkung 3.1.23 (1) und den Beispielen 3.2.4 (2) und (4).

Proposition 3.2.6 ([HiSt, Chap. II, Prop. 10.6 (ii)]). *Zu jeder Familie* $(X_i)_{i\in I}$

von injektiven Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist auch $\prod_{i\in I} X_i$ injektiv (sofern zu $(X_i)_{i\in I}$ ein Produkt existiert).

Dual ist zu jeder Familie $(X_i)_{i\in I}$ von projektiven Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$ auch $\coprod_{i\in I} X_i$ projektiv (sofern zu $(X_i)_{i\in I}$ ein Koprodukt existiert).

Beweis. Wir zeigen nur den injektiven Fall, der projektive ist dual zu beweisen. Sei für jedes $i \in I$ folgendes Diagramm mit soliden Pfeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, dotted, "\beta"'] \arrow[d, dotted, "\beta_i"] \\ \prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Da jedes X_i injektiv ist, existiert zu jedem $i \in I$ ein Morphismus $\beta_i : B \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ sodass ein kommutatives Rechteck entsteht. Auf Grund der universellen Eigenschaft des Produktes existiert wiederum ein Morphismus $\beta : B \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ für den gilt: $\beta_i = \pi_i \circ \beta$ für alle $i \in I$. Da nun $\pi_i \circ \alpha = \beta_i \circ f = \pi_i \circ \beta \circ f$ für jedes $i \in I$ gilt, folgt wiederum aus der universellen Eigenschaft des Produktes $\alpha = \beta \circ f$. □

Proposition 3.2.7. *Sei R ein unitärer Ring. Dann gilt:*

(i) P ist genau dann projektiv in ${}_R\mathbf{Mod}$, wenn P direkter Summand eines freien Moduls ist ([J2, Prop. 3.10]).

(ii) I ist genau dann injektiv in ${}_R\mathbf{Mod}$, wenn zu jedem Ideal J von R und jedem Morphismus $f : J \longrightarrow I$ eine Erweiterung $f' : R \longrightarrow I$ von f existiert ([J2, Prop. 3.15]).

Ist R ein Hauptidealbereich so gilt zusätzlich:

(iii) I ist genau dann injektiv in ${}_R\mathbf{Mod}$, wenn I dividierbar ist, dh. wenn zu jedem $0 \neq r \in R$ und jedem $m \in I$ es ein $m' \in I$ gibt, sodass $r \cdot m' = m$ gilt ([J2, Prop. 3.16]).

Beweis. (i) "⇒": Ist P projektiv und $\pi : P_{Fr} \longrightarrow P$ der kanonische Epimorphismus aus Beispiel 3.2.9 (2), dann existiert zu der Identität id_P ein Morphismus $\iota : P \longrightarrow P_{Fr}$ mit $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_P$. Wie in Beispiel 3.2.5 (4) ausgeführt, ist damit (P, ι) direkter Summand von P_{Fr}.

(i) "⇐": Sei (P, ι) direkter Summand eines freien Moduls F. Dann existiert zu einem Morphismus $\gamma_P : P \longrightarrow N$ ein Morphismus $\gamma : F \longrightarrow N$ mit $\gamma \circ \iota = \gamma_P$. Ist zusätzlich $\epsilon : M \longrightarrow N$ ein Epimorphismus, so gibt es, weil F projektiv ist, ein $\beta : F \longrightarrow M$ mit $\epsilon \circ \beta = \gamma$. Für $\beta_P := \beta \circ \iota$ gilt nun: $\epsilon \circ \beta_P = \epsilon \circ \beta \circ \iota = \gamma \circ \iota = \gamma_P$. Damit ist auch P projektiv.

(ii) "⇒": Folgt direkt aus der Definition injektiver Objekte.

(ii) "$\Leftarrow$": Zu einem Monomorphismus $\mu : M \longrightarrow N$ und einem beliebigen Morphismus $\alpha : M \longrightarrow I$ definieren wir die Menge aller Erweiterungen von α der Form $\mathcal{E} = \{(M', \alpha') \mid \mathrm{im}(\mu) \subseteq M' \subseteq N,\ \alpha' \circ \mu = \alpha\}$. Da stets die triviale Erweiterung (dh. $M' = \mathrm{im}(\mu)$) existiert, ist $\mathcal{E} \neq \varnothing$. Mit

$$(A', \alpha') \leq (A'', \alpha'') \ \Leftrightarrow A' \subseteq A'' \text{ und } \alpha''_{|_{A'}} = \alpha'$$

erhalten wir auf $\mathcal{E}$ eine Teilordnung sodass zu jeder totalgeordneten Teilmenge in $\mathcal{E}$ eine obere Schranke existiert. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es daher ein maximales Element $(\bar{M}, \bar{\alpha}) \in \mathcal{E}$. Wir zeigen nun $\bar{M} = N$ indirekt indem wir annehmen, es gibt ein $m_0 \in N \smallsetminus \bar{M}$. Dann bildet die Menge $J = \{r \in R \mid r \cdot m_0 \in \bar{M}\}$ offensichtlich ein Ideal in R. Der Morphismus $f' : J \longrightarrow I,\ f'(r) := \bar{\alpha}(r \cdot m_0)$ lässt sich daher zu $f : R \longrightarrow I$ erweitern. Dieser wiederum ermöglicht eine echte Erweiterung von $\bar{\alpha}$ auf $\tilde{M} = \bar{M} + R \cdot m_0 \subseteq N$ indem wir

$$\tilde{\alpha} : \tilde{M} \longrightarrow N \text{ mit } \tilde{\alpha}(m + r \cdot m_0) = \bar{\alpha}(m) + f(r)$$

definieren. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für $r \cdot m_0 \in \bar{M}$ gilt $f(r) = \bar{\alpha}(r \cdot m_0)$. Ein Widerspruch zur Maximalität von $(\bar{M}, \bar{\alpha})$ in $\mathcal{E}$.

Ist R ein Hauptidealbereich, so ist jede Abbildung $f : J \longrightarrow I$ eindeutig durch das Bild $r_0 \mapsto f(r_0) = m$, mit $(r_0) = J$, bestimmt. Eine Erweiterung von f auf ganz R existiert genau dann, wenn ein $m' \in I$ mit $r_0 \cdot m' = m$ existiert ($f'(r) = f'(r \cdot 1_R) = r \cdot f'(1_R) = r \cdot m'$ für alle $r \in R$). Daher ist in diesem Fall (iii) äquivalent zu (ii). □

Definition 3.2.8. Eine Kategorie $\mathcal{A}$ besitzt genug Projektive, falls zu jedem Objekt A in $\mathcal{A}$ ein Epimorphismus $\pi : P \longrightarrow A$ mit P projektiv existiert und nennen π eine projektive Erweiterung von A.

$\mathcal{A}$ besitzt genug Injektive, falls es zu jedem Objekt A in $\mathcal{A}$ ein Monomorphismus $\mu : A \longrightarrow I$ mit I injektiv existiert und nennen μ eine injektive Erweiterung von A.

Beispiele 3.2.9.

(1) Die Kategorie $_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$ der Vektorräume über einem Körper K besitzt auf Grund von Beispiel 3.2.2 (5) trivialerweise genug Injektive und Projektive (zu jedem Objekt V in $_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$ wähle man die Identität id_V).

(2) Auch die Kategorie $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ der R–Moduln über einem unitären Ring R besitzt genug Projektive: Zu jedem M in $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ sei M_{Fr} der über der Menge M freie Modul und $\pi : M_{Fr} \longrightarrow M$ der kanonische Epimorphismus. Als freier Modul ist M_{Fr} projektiv (siehe Beispiel 3.2.2 (6)) und damit π eine projektive Erweiterung von M.

Insbesondere besitzt die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen genug Projektive. Dass **Ab** auch genug Injektive besitzt, zeigt folgendes Lemma ([W, Ex. 2.3.2]):

Lemma 3.2.10. *Die Kategorie der abelschen Gruppen* **Ab** *besitzt genug Injektive.*

Beweis. Sei $A \neq 0$ eine abelsche Gruppe. Dann induziert die Familie von Morphismen $(f : A \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{f\in\mathcal{M}}$, $\mathcal{M} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, einen eindeutigen Morphismus $\eta : A \longrightarrow \prod_{f\in\mathcal{M}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sodass $\pi_f \circ \eta = f$ gilt (Definition eines Produktes). Nach Proposition 3.2.6 ist das Ziel von η injektiv. Dass η ein Monomorphismus ist, zeigt sich indem man zu jedem $0 \neq a \in A$ die Existenz eines Morphismus $\eta_a : A \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\eta_a(a) \neq 0$ nachweist:

Sei $\tilde{\phi}_a : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ jener Morphismus, der durch $\tilde{\phi}_a(1) = a$ eindeutig bestimmt ist und wähle $\tilde{\alpha}_a : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ so, dass $\mathrm{Ker}(\tilde{\phi}_a) \subseteq \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_a)$ gilt (im Falle $\mathrm{Ker}(\tilde{\phi}_a) = n\mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$ wähle $\tilde{\alpha}_a(1) = [\frac{1}{n}]$ und im Falle $\mathrm{Ker}(\tilde{\phi}_a) = 0$ wähle $\tilde{\alpha}_a(1) \neq 0$ beliebig). Zu den durch Herausfaktorisieren des Kerns $\mathrm{Ker}(\tilde{\phi}_a)$ erhaltenen Morphismen ϕ_a und α_a existiert auf Grund der Injektivität von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (und weil ϕ_a moni ist) ein Morphismus $\eta_a \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/\ker(\tilde{\phi}_a) \arrow[r, tail, "\phi_a"] \arrow[d, "\alpha_a"'] & A \arrow[dl, dotted, "\eta_a"] \\
\mathbb{Q}/\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $\eta_a(a) = \alpha_a(1) \neq 0$ für jedes $a \neq 0$ erfüllt. □

Nun drängt sich die Frage auf, ob auch ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ genug Injektive besitzt. Eine Möglichkeit dies zu zeigen wäre, analog wie im obigen Beweis vorzugehen. Anstelle der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}$ wähle man dann den Modul R und anstelle der injektiven abelschen Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ den R–Modul $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Doch ist die Injektivität von $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ nicht mehr offensichtlich und auch der Nachweis, η ist moni, fällt in diesem Fall mitunter schwieriger aus.

Daher werden wir einen anderen Weg einschlagen und zuerst den konkreten Vorgang in Beispiel 3.2.9 (2) näher betrachten. Denn schaffen wir es dazu eine Verallgemeinerung im kategorie–theoretischen Sinne zu finden, so können wir durch Dualisieren den injektiven Fall lösen. Konkret bedeutet dies erst einmal eine "basisfreie" Beschreibung des freien Moduls M_{Fr} zusammen mit dem kanonischen Epimorphismus $\epsilon : M_{Fr} \longrightarrow M$ zu geben. Der Schlüssel dazu ist die sogenannte Adjunktion von Funktoren:

Definition 3.2.11. Seien $L : \mathcal{A} \longleftarrow \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Paar von Funktoren sodass eine natürliche Isomorphie

$$\tau : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(-), -) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-, R(-))$$

von Bi–Funktoren $\mathcal{B}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ existiert. Dann nennen wir das Tripel (L, R, τ) eine Adjunktion von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Dazu sagen wir auch: L ist links–adjungiert zu R und R ist rechts–adjungiert zu L und schreiben kurz $L \dashv R$.

Dh. für jedes Paar $(B, A) \in \mathcal{B}^{op} \times \mathcal{A}$ ist

$$\tau_{B,A} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(B), A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, R(A))$$

eine Mengen–Bijektion, die sowohl in A als auch in B natürlich ist: Zu jedem Morphismus $f : A \longrightarrow A'$ in $\mathcal{A}$ und $g : B' \longrightarrow B$ in $\mathcal{B}$ erhalten wir folgende kommutative Rechtecke:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(B), A) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\tau_{B,A}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(B), A') \arrow[r, "L(g)_*"] \arrow[d, "\tau_{B,A'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(B'), A') \arrow[d, "\tau_{B',A'}"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, R(A)) \arrow[r, "R(f)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, R(A')) \arrow[r, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B', R(A')).
\end{tikzcd}$$

Dabei wurde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(B), f)$ durch f^*, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(g), A')$ durch $L(g)_*$ usw. abgekürzt.

Die Natürlichkeit von $\tau_{(-,-)}$ lässt sich auch folgendermaßen charakterisieren: Ist $\alpha : L(B) \longrightarrow A$ ein Morphismus in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(B), A)$, dann gilt für jeden Morphismus $f : A \longrightarrow A'$ in $\mathcal{A}$ und $g : B' \longrightarrow B$ in $\mathcal{B}$:

$$\tau(\alpha \circ L(g)) = \tau(\alpha) \circ g \qquad\qquad \tau(f \circ \alpha) = R(f) \circ \tau(\alpha) \tag{3.1}$$

Für jedes $B \in \mathcal{B}$ definieren wir $\eta_B : B \longrightarrow RL(B)$ durch $\eta_B := \tau_{B,L(B)}(\mathrm{id}_{L(B)})$. Es zeigt sich durch

$$RL(g) \circ \tau(\mathrm{id}_{L(B)}) \overset{(3.1)}{=} \tau(L(g) \circ \mathrm{id}_{L(B)}) = \tau(\mathrm{id}_{L(B')} \circ L(g)) \overset{(3.1)}{=} \tau(\mathrm{id}_{L(B')}) \circ g,$$

dass das folgende Diagramm für jeden Morphismus $g : B \longrightarrow B'$ in $\mathcal{B}$ kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_B"'] & B' \arrow[d, "\eta_{B'}"] \\
RL(B) \arrow[r, "RL(g)"] & RL(B').
\end{tikzcd}$$

Dh. $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \longrightarrow RL$ ist eine natürliche Transformation und nennen diese die *Einheit* der Adjunktion (L, R, τ). Dual erhalten wir durch $\epsilon_A := \tau^{-1}_{R(A),A}(\mathrm{id}_{R(A)})$ eine natürliche Transformation $\epsilon : LR \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, die sogenannte *Koeinheit* der Adjunktion (L, R, τ).

Beispiele 3.2.12.

(1) Der Funktor $Fr : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longleftarrow \mathbf{Set}$ aus Beispiel 3.1.10 (5) ist links–adjungiert zu $U : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Set}$, dem Vergiss–Funktor aus Beispiel 3.1.10 (8): Auf Grund der universellen Eigenschaft von $Fr(X)$ existiert zu jeder Mengen–Abbildung $f : X \longrightarrow U(M)$ genau ein R–Modulhomomorphismus $\tau(f) : Fr(X) \longrightarrow M$. Offensichtlich erhalten wir dadurch eine Bijektion

$$\tau^{-1}_{X,M} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{RMod}}(Fr(X), M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, U(M)).$$

Die Natürlichkeit von $\tau_{X,M}^{-1}$ in X und M lässt sich ebenfalls einfach nachprüfen sodass es sich um eine Adjunktion (Fr, U, τ^{-1}) handelt.

(2) Ist R ein Ring und $N \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$, dann ist der Tensor–Funktor

$$- \otimes_R N : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ \mathbf{Mod_R} \ni M \mapsto M \otimes_R N \in \mathbf{Ab}$$

links–adjungierter zu $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(N, -) : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Mod_R}$ (hierbei deuten wir N als abelsche Gruppe indem wir die restliche Modulstruktur vergessen). Dh. zu jedem $A \in \mathbf{Ab}$ und $M \in \mathbf{Mod_R}$ existiert eine Bijektion

$$\tau_{M,A} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M \otimes_R N, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod_R}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(N, A)),$$

welche in A und M natürlich ist.
Dazu definieren wir $\tau(f)(m)(n) := f(m \otimes n)$ für jedes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M \otimes_R N)$. Auf Grund der Distributivität des Tensor–Produkts und $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{Ab})$ ist $\tau(f)(m)$ ein Morphismus in $\mathbf{Ab}$. Aus analogen Gründen respektiert $\tau(f)$ die Gruppenstruktur auf M und ist wegen

$$\tau(f)(mr)(n) = f(mr \otimes n) = f(m \otimes rn) = \tau(f)(m)(rn) = ((\tau(f)(m))r)(n)$$

ein Morphismus in $\mathbf{Mod_R}$. Definieren wir nun $\sigma(g)(m \otimes n) := g(m)(n)$ für jedes $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod_R}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(N, A))$ so erhalten wir, wie man leicht nachprüfen kann, eine zu τ inverse Abbildung womit τ eine Bijektion ist. Die Natürlichkeit von τ in A und M ist gleichsam einfach zu verifizieren.

(3) Der zu einem fest gewählten R–Rechtsmodul $M \in \mathbf{Mod_R}$ gehörende Tensorfunktor

$$M \otimes_R - : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \ni N \mapsto M \otimes_R N \in \mathbf{Ab}$$

ist links–adjungiert zu $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, -) : \mathbf{Ab} \longrightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ (hier verstehen wir M als abelsche Gruppe). Dh. zu jedem $A \in \mathbf{Ab}$ und $N \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ existiert eine Bijektion

$$\tau_{N,A} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M \otimes_R N, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}}(N, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, A)),$$

welche in A und N natürlich ist. Die Einzelheiten sind wie in (2) auszuführen.

(4) Der Vergiss–Funktor $U : \mathbf{Ab} \longleftarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ ist links–adjungiert zu dem Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, -) : \mathbf{Ab} \longrightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ (R ein unitärer Ring):
Jedes $M \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ und $A \in \mathbf{Ab}$ induziert mittels $\tau(\alpha)(m)(r) := \alpha(U(r \cdot m))$ eine Bijektion in $\mathbf{Set}$:

$$\tau_{M,A} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(U(M), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, A))$$

Denn mit der Abbildung $\tau'(\alpha')(U(m)) := \alpha'(m)(1_R)$ erhält man, wie man sofort nachrechnen kann, eine zu τ inversen Abbildung.
Leicht zu verifizieren ist auch die Natürlichkeit von $\tau_{M,A}$ in M als auch in A und

sei deshalb dem Leser überlassen.

(5) Der Invariantenfunktor $-^{\mathfrak{g}}\colon {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Mod}$ einer K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist rechts–adjungiert zu dem trivialen $\mathfrak{g}$–Modul–Funktor $Tr : {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod}$, dh. zu jedem K–Vektorraum M und $\mathfrak{g}$–Modul N existiert eine Bijektion

$$\tau_{M,N} : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(Tr(M), N) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_K(M, N^{\mathfrak{g}})$$

die in M und N natürlich ist:
Jeder Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_K(M, N^{\mathfrak{g}})$ lässt sich durch Komposition mit der Inklusion $N^{\mathfrak{g}} \hookrightarrow N$ als Morphismus in $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(Tr(M), N)$ verstehen. Umgekehrt liegt das Bild eines jeden Homomorphismus $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(Tr(M), N)$ in $N^{\mathfrak{g}}$ und können daher g als Morphismus in $\mathrm{Hom}_K(M, N^{\mathfrak{g}})$ betrachten. Damit ist die gesuchte Bijektion beschrieben. Ihre Natürlichkeit in M und N zeigt sich in wenigen einfachen Schritten.

(6) Der Koinvariantenfunktor $-_{\mathfrak{g}}\colon {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Mod}$ einer K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist links–adjungiert zu $Tr : {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod}$. Dies zeigt sich analog zum vorherigen Fall.

Nach dem Beispiel 3.2.12 (1) können wir die in Beispiel 3.2.9 (2) angeführte Konstruktion einer projektiven Erweiterung eines R–Moduls M durch die beiden adjungierten Funktoren $Fr : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longleftarrow \mathbf{Set}$ und $U : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Set}$ beschreiben: $M_{Fr} = Fr(U(M))$ und $\pi = \epsilon_M : Fr(U(M)) \longrightarrow M$.

Nun suchen wir nach allgemeinen, dualisierbaren Bedingungen für den Funktor $U : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Set}$, die einerseits "$\epsilon_M$ ist epi" und andererseits "$Fr(U(M))$ ist projektiv" implizieren. Eine dieser Bedingungen ist die Treue von U (s. [HiSt, Chap. II, Prop. 10.4]):

Proposition 3.2.13. *Sei $L : \mathcal{A} \longleftarrow \mathcal{B}$ links–adjungiert zu $R : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. Dann gilt:*

(i) L ist treu $\Rightarrow$ die Einheit $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \longrightarrow RL$ ist moni.

(ii) R ist treu $\Rightarrow$ die Koeinheit $\epsilon : LR \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ ist epi.

Beweis. Seien $f, f' : B \longrightarrow B'$ parallele Morphismen in $\mathcal{B}$ sodass $\eta_{B'} \circ f = \eta_{B'} \circ f'$ gilt. Dann folgt durch Adjungieren (siehe (3.1)) $L(f) = L(f')$ und damit nach Voraussetzung $f = f'$. Analog zeigt sich (ii). □

Bleibt noch zu klären, welche allgemeine Eigenschaft von U die Projektivität von $Fr(U(M))$ implizieren könnte. Da ja jedes Objekt in **Set**, also insbesondere auch $U(M)$, projektiv ist (siehe Beispiel 3.2.2 (2)), führt Fr trivialerweise Projektive in Projektive über. Diese Eigenschaft von Fr wird bereits dadurch, dass U Epimorphismen erhält (siehe Bemerkung 3.1.23), garantiert:

Definition 3.2.14. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ erhält Mono– (resp. Epimorphismen), falls für jeden derartigen Morphismus f in $\mathcal{A}$ auch $F(f)$ moni (resp. epi) in $\mathcal{B}$ ist. F erhält Injektive (resp. Projektive), falls mit A in $\mathcal{A}$ auch das Bildobjekt $F(A)$ in $\mathcal{B}$ injektiv (resp. projektiv) ist.

Proposition 3.2.15. *Sei $L : \mathcal{A} \longleftarrow \mathcal{B}$ links–adjungiert zu $R : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. Dann gilt:*

(i) L erhält Monomorphismen $\Rightarrow$ R erhält Injektive.

(ii) R erhält Epimorphismen $\Rightarrow$ L erhält Projektive.

Beweis. ([HiSt, Chap. II, Prop. 10.2]) Sei $\tau : L \longrightarrow R$ eine Adjunktion. Wir weisen aus Dualitätsgründen nur (ii) nach: Sei P ein projektives Objekt in $\mathcal{B}$, $\pi : A \longrightarrow A'$ ein Epimorphismus sowie $\gamma : L(P) \longrightarrow A'$ ein beliebiger Morphismus in $\mathcal{A}$. Auf Grund der Voraussetzung ist auch $R(\pi) : R(A) \longrightarrow R(A')$ epi sodass zusammen mit dem adjungierten Morphismus $\tau(\gamma) : P \longrightarrow R(A')$ ein Morphismus $\beta : P \longrightarrow R(A)$ mit $R(\pi) \circ \beta = \tau(\gamma)$ existiert (siehe (3.1)). Durch "Zurückadjungieren" erhalten wir damit einen Morphismus $\tau^{-1}(\beta) : L(P) \longrightarrow A$ mit $\pi \circ \tau^{-1}(\beta) = \gamma$. Nach Definition ist also $L(P)$ projektiv. Die Beweisschritte lassen sich durch die beiden folgenden Diagramme rekapitulieren:

$$\begin{tikzcd} & L(P) \arrow[dl, dotted, "\tau^{-1}(\beta)"'] \arrow[d, "\gamma"] & & & P \arrow[dl, dotted, "\beta"'] \arrow[d, "\tau(\gamma)"] \\ A \arrow[r, two heads, "\pi"'] & A' & \arrow[r, shift left, "\tau"] & \arrow[l, shift left, "\tau^{-1}"] R(A) \arrow[r, two heads, "R(\pi)"'] & R(A') \end{tikzcd}$$

□

Für die Formulierung einer vollständig charakterisierenden Eigenschaft einer Kategorie, genug Projektive zu besitzen, benötigen wir noch einen Teil des folgenden Resultates (s. [HiSt, Chap. II, Thm. 7.7]):

Proposition 3.2.16. *Sei $L : \mathcal{A} \longleftarrow \mathcal{B}$ links–adjungiert zu $R : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. Dann gilt:*

(i) L erhält Epimorphismen und Koprodukte.

(ii) R erhält Monomorphismen und Produkte.

Beweis. Sei $\tau : L \longrightarrow R$ eine Adjunktion. Wir weisen aus Dualitätsgründen nur (i) nach:

Sei $g : B \longrightarrow B'$ ein Epimorphismus in $\mathcal{B}$ und $h, h' : L(B') \longrightarrow A$ parallele Morphismen in $\mathcal{A}$ für die $h \circ L(g) = h' \circ L(g)$ gilt. Dann folgt durch Adjungieren $\tau(h) \circ g = \tau(h') \circ g$ (siehe (3.1)). Nach Voraussetzung ist damit $\tau(h) = \tau(h')$ und folglich $h = h'$ denn τ ist injektiv.

Sei nun $(\coprod_{i \in I} B_i, (\iota_i)_{i \in I})$ ein beliebiges Koprodukt in $\mathcal{B}$. Um zu zeigen dass der Tupel $(L(\coprod_{i \in I} B_i), (L(\iota_i))_{i \in I})$ ein Produkt in $\mathcal{A}$ bildet, nehmen wir ein Familie von Morphismen $f_i : L(B_i) \longrightarrow A$ als gegeben an. Die dazu adjungierte Familie von Morphismen $\tau(f_i) : B_i \longrightarrow R(A)$ induziert einen eindeutigen Morphismus $f : \coprod_{i \in I} B_i \longrightarrow R(A)$ sodass $f \circ \iota_i = \tau(f_i)$ für alle $i \in I$ gilt. Durch "Zurückadjungieren" erhalten wir einen eindeutigen (τ ist bijektiv) Morphismus $\tau^{-1}(f) : L(\coprod_{i \in I} B_i) \longrightarrow A$ sodass $\tau^{-1}(f) \circ L(\iota_i) = f_i$ für alle $i \in I$ gilt. Der Beweis lässt sich durch die beiden folgenden Diagramme verdeutlichen:

$$\begin{tikzcd}
 & L(\coprod_{i\in I} B_i) \arrow[d, dotted, "\tau^{-1}(f)"] \\
L(B_i) \arrow[ur, "L(\iota_i)"] \arrow[r, "f_i"'] & A
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, shift left, "\tau"] & {} \arrow[l, shift left, "\tau^{-1}"]
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
 & \coprod_{i\in I} B_i \arrow[d, dotted, "f"] \\
B_i \arrow[ur, "\iota_i"] \arrow[r, "\tau(f_i)"'] & R(A)
\end{tikzcd}$$ □

Bemerkung 3.2.17. Auf analoger Art und Weise kann man für eine Adjunktion $L \dashv R$ zwischen abelschen Kategorien zeigen, dass L rechts– und R links–exakt ist.

Theorem 3.2.18. *Eine Kategorie $\mathcal{A}$ besitzt genau dann genug Projektive, wenn ein Funktor $R : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ in eine Kategorie $\mathcal{B}$ mit genug Projektiven existiert der treu ist, Epimorphismen erhält und rechts–adjungiert zu einem Funktor $L : \mathcal{A} \longleftarrow \mathcal{B}$ ist.*

Beweis. Sei A ein beliebiges Objekt in $\mathcal{A}$. Nach Voraussetzung existiert eine projektive Erweiterung von $R(A)$ in $\mathcal{B}$: $\pi : P \longrightarrow R(A)$. Ist $L \dashv R$, dann folgern wir aus Proposition 3.2.16 und Satz 3.2.15, dass $L(\pi) : L(P) \longrightarrow L(R(A))$ eine projektive Erweiterung von $L(R(A))$ ist. Nach Proposition 3.2.13 ist $\epsilon_A : L(R(A)) \longrightarrow A$ epi und folglich die Komposition $\epsilon_A \circ L(\pi) : L(P) \longrightarrow A$ eine projektive Erweiterung von A.

Die Umkehrung ist trivial, denn $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ ist zu sich selbst adjungiert. □

Die Aussage obigen Theorems, sowie der zugehörige Beweis, lassen sich einfach dualisieren und wir erhalten das injektive Pendant:

Theorem 3.2.19. *Eine Kategorie $\mathcal{B}$ besitzt genau dann genug Injektive, wenn ein Funktor $L : \mathcal{A} \longleftarrow \mathcal{B}$ in eine Kategorie $\mathcal{A}$ mit genug Injektiven existiert der treu ist, Monomorphismen erhält und links–adjungiert zu einem Funktor $R : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ist.*

Mit Hilfe diesem Theorems lässt sich nun darauf schließen, dass die Kategorie der R–Moduln über einem unitären Ring genug Injektive besitzt. Denn der in Beispiel 3.2.12 (4) auftretende Vergiss–Funktor $U : \mathbf{Ab} \longleftarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ ist nicht nur links–adjungiert zu einem Funktor von $\mathbf{Ab}$ nach ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$, sondern auch treu und erhaltend bzgl. Monomorphismen. Damit gilt folgendes

Korollar 3.2.20. *Die Kategorien ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ und $\mathbf{Mod}_{\mathbf{R}}$, R ein unitärer Ring, besitzen genug Injektive.*

Bemerkung 3.2.21. Wir wollen zu einem Modul $M \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ noch konkret eine injektive Erweiterung konstruieren indem wir dual zu dem im Beweis von Theorem 3.2.18 angeführten Verfahren vorgehen:

$U(M)$ besitzt in $\mathbf{Ab}$ nach dem Beweis von Lemma 3.2.10 eine injektive Erweiterung der Form $\eta : U(M) \longrightarrow \prod_{f\in\mathcal{M}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ wobei $\mathcal{M} = \mathrm{Hom}_{Ab}(U(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ gilt.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, \eta) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, U(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, \prod_{f\in\mathcal{M}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

ist dann ein Monomorphismus in $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ mit injektivem Ziel (siehe Proposition 3.2.15 und 3.2.16). Die Komposition mit $\eta_M : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, U(M))$ ergibt wiederum einen Monomorphismus $\bar{\eta} : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, \prod_{f\in\mathcal{M}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (siehe Proposition 3.2.13) und damit eine injektive Erweiterung von M. Proposition 3.2.16 zufolge können wir nun auch $\bar{\eta} : M \longrightarrow \prod_{f\in\mathcal{M}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ schreiben.

Später von Nutzen wird folgendes Lemma sein:

Lemma 3.2.22. *Sei $\tau : F \longrightarrow G$ eine natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ welche Produkte erhalten. Dann gilt für jedes Produkt $(\prod_{i\in I} X_i, (\pi_i)_{i\in I})$ in $\mathcal{C}$: $\tau_{\prod_{i\in I} X_i} = \prod_{i\in I} \tau_{X_i}$.*

Zu Koprodukten gilt die analoge Aussage.

Beweis. Zu jedem $j \in I$ wird durch die Projektion $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ folgendes kommutatives Diagramm induziert:

$$\begin{tikzcd}
F(\prod_{i\in I} X_i) \arrow[r, "\tau_{\prod_{i\in I} X_i}"] \arrow[d, "F(\pi_j)"] & G(\prod_{i\in I} X_i) \arrow[d, "G(\pi_j)"] \\
F(X_j) \arrow[r, "\tau_{X_j}"'] & G(X_j)
\end{tikzcd}$$

Da nach Voraussetzung $(F(\prod_{i\in I} X_i), (F(\pi_i))_{i\in I})$ und $(G(\prod_{i\in I} X_i), (G(\pi_i))_{i\in I})$ Produkte in $\mathcal{D}$ sind, folgt zusammen mit der Eindeutigkeit von $\prod \tau_{X_i}$ (siehe Bemerkung 3.2.5 (6)) die Behauptung. □

Beispiel 3.2.23. Zu dem Tensorfunktor $- \otimes_R -: \mathbf{Mod_R} \times {_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, jeder Familie $(N_i)_{i\in I}$ von R–Linksmoduln und jedem Morphismus $f : M \longrightarrow M'$ in $\mathbf{Mod_R}$ gilt:

$f \otimes_R \coprod_{i\in I} N_i$ ist genau dann moni (resp. epi), wenn $f \otimes_R N_i$ für alle $i \in I$ es ist. Denn f induziert nach Bemerkung 3.1.33 (2) eine natürliche Transformation $f \otimes_R -: M \otimes_R - \longrightarrow M' \otimes_R -$ zwischen Funktoren, die Proposition 3.2.16 zufolge Koprodukte erhalten. Nach obigen Lemma gilt daher $f \otimes_R \coprod_{i\in I} N_i = \coprod_{i\in I}(f \otimes_R N_i)$ woraus zusammen mit Bemerkung 3.2.5 (10) die Behauptung folgt.

3.3 Abelsche Kategorien

In vielen konkreten Kategorien treten Null–Abbildungen auf: Jedes Element $x \in X$ wird dem Null–Element $0 \in Y$ zugeordnet. Doch wollen wir in der Kategorientheorie Relationen zwischen Elementen von Objekten (oder innerhalb eines Objektes) vermeiden und stattdessen eine strukturunabhängige Definition für sogenannte Null–Morphismen geben:

Definition 3.3.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem 0–Objekt und X, Y Objekte in $\mathcal{C}$. Dann existieren genau ein Morphismus $_X0 : X \longrightarrow 0$ und ein Morphismus $0_Y : 0 \longrightarrow Y$

und wir nennen die Komposition ${}_X0_Y := 0_Y \circ {}_X0$ den Null–Morphismus von X nach Y und schreiben kurz $0 : X \longrightarrow Y$.

In vielen konkreten Kategorien wie **Grp**, **R–Mod** oder $\mathbf{Set}_*$ stimmen die Null–Morphismen offensichtlich mit den ansonsten üblichen Null–Abbildungen überein.

Mit dem Begriff des Null–Morphismus lassen sich nun auch Kerne und Kokerne eines Morphismus definieren:

Definition 3.3.2. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem 0–Objekt.

Ein Kern eines Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ ist ein Morphismus $k : K \longrightarrow X$ sodass $f \circ k = 0$ und folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist $k' : K' \longrightarrow X$ ein Morphismus mit $f \circ k' = 0$, dann existiert ein eindeutiger Morphismus $\gamma : K \longrightarrow K'$ mit $k' = k \circ g$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
K' \arrow[u, dotted, "\gamma"] \arrow[ur, "k'"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "c'"] & C \arrow[d, dotted, "\gamma"] \\
& & C'
\end{tikzcd}$$

Ein Kokern eines Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ ist ein Morphismus $c : Y \longrightarrow C$ sodass $c \circ f = 0$ und folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist $c' : Y \longrightarrow C'$ ein Morphismus mit $c' \circ f = 0$, dann existiert ein eindeutiger Morphismus $\gamma : C \longrightarrow C'$ mit $c' = \gamma \circ c$.

$\mathcal{C}$ besitzt Kerne, falls jeder Morphismus f in $\mathcal{C}$ einen Kern in $\mathcal{C}$ besitzt. Dual besitzt $\mathcal{C}$ Kokerne, falls jeder Morphismus f in $\mathcal{C}$ einen Kokern in $\mathcal{C}$ besitzt.

Bemerkung 3.3.3. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Null–Objekt 0, dann führt die Eindeutigkeit der Faktorisierungen durch Kerne und Kokerne in obiger Definition, sofern sie existieren, zu folgenden Eigenschaften dieser:

(1) Jeder Kern k eines Morphismus f ist moni: Sind g, g' parallele Morphismen sodass $k \circ g = k \circ g' := h$ gilt, dann wird h wegen $f \circ h = 0$ eindeutig durch k faktorisiert und folglich muss $g = g'$ erfüllt sein. Dual zeigt sich:

(2) Jeder Kokern ist epi.

(3) Jeder Monomorphismus $m : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{C}$ besitzt $0 : 0 \longrightarrow A$ als einen Kern und jeder Epimorphismus $e : B \longrightarrow C$ besitzt $0 : C \longrightarrow 0$ als einen Kokern.

(4) Die Menge $\ker f$ aller Kerne eines Morphismus $f : A \longrightarrow \bullet$ bildet, sofern f einen Kern besitzt, eine Äquivalenzklasse in $\mathrm{Mo}_{\mathcal{C}}(A)$ und ist damit ein Unterobjekt von A: $\ker f \in \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(A)$. Siehe dazu Bemerkung 3.1.23 (6).

(5) Dual ist die Menge $\operatorname{coker} f$ aller Kokerne eines Morphismus $f : \bullet \longrightarrow A$ eine Äquivalenzklasse in $\mathrm{Ep}_{\mathcal{C}}(A)$ und folglich $\operatorname{coker} f \in \mathrm{Quo}_{\mathcal{C}}(A)$, vorausgesetzt f besitzt einen Kokern.

Wie in Bemerkung 3.1.23 (6) lässt sich auch auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, Y)$, der Klasse aller Morphismen in $\mathcal{C}$ mit Ziel Y, eine Präordnung und folglich eine Äquivalenzrelation definieren: Für $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, Y)$ ist $f \leq g$ genau dann, wenn es einen Morphismus h gibt, sodass $f = g \circ h$ gilt und $f \equiv g$ falls zusätzlich $g \leq f$ erfüllt ist. Für die Menge der Äquivalenzklassen in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, Y)$ schreiben wir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[\mathcal{C}, Y]$ und $[f]$ bezeichne jene Äquivalenzklasse, in der f liegt.

Dual findet sich auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{C})$, der Klasse aller Morphismen in $\mathcal{C}$ mit Quelle X, eine derartige Präordnung und Äquivalenzrelation und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[X, \mathcal{C}]$ sei die zugehörige Menge der Äquivalenzklassen. Ist also $\mathcal{C}$ ein Kategorie mit Null–Objekt, die zu jedem Morphismus sowohl einen Kern als auch Kokern besitzt, erhalten wir nach Bemerkung 3.3.3 die Operatoren

$$\begin{aligned} \ker : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(X) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[\mathcal{C}, X] \\ \mathrm{coker} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, Y) &\longrightarrow \mathrm{Quo}_{\mathcal{C}}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[Y, \mathcal{C}] \,. \end{aligned}$$

Bevor wir nun zum nächsten Lemma übergehen, machen wir uns klar, dass diese Operatoren auf den Äquivalenzklassen konstant sind: Dazu sei $f \equiv f'$ in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{C})$, k ein Kern von f, sowie k' einer von f'. Ist γ jener Morphismus, der $f = \gamma \circ f'$ erfüllt, dann folgt aus

$$f \circ k' = (\gamma \circ f') \circ k' = \gamma \circ (f' \circ k') = 0$$

dass $k' \leq k$ gilt. Auf analoger Weise erhalten wir $k \leq k'$, also insgesamt $k \equiv k'$. Dual sind Kokerne c und c' äquivalenter Morphismen $g \equiv g'$ in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, Y)$ äquivalent in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \mathcal{C})$. Damit sind Ausdrücke wie $\ker(\mathrm{coker}\, f)$ wohldefiniert und ermöglichen uns, folgende Charakterisierung von Kern und Kokern zu geben:

Lemma 3.3.4. *Ein Morphismus k (resp. c) ist genau dann normal (resp. konormal), wenn die linke (resp. rechte) Aussage in*

$$k \in \ker(\mathrm{coker}\, k) \qquad\qquad c \in \mathrm{coker}(\ker c) \tag{3.2}$$

erfüllt ist.

Beweis. Angenommen k ist normal sodass ein Morphismus f mit $k \in \ker f$ existiert. Legen wir nun $c \in \mathrm{coker}\, k$ als einen Kokern von k fest und beachten $f \circ k = 0$, dann existiert eine eindeutige Zerlegung $f = d \circ c$. Damit folgt für einen Morphismus k' mit $c \circ k' = 0$ die Gleichung $f \circ k' = d \circ (c \circ k') = 0$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "k'"'] \arrow[drr, "0"] & & \\
\bullet \arrow[r, "k"] & \bullet \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "f"] & \bullet \arrow[d, dotted, "d"] \\
\bullet \arrow[u, dotted, "h''"] \arrow[ur, "k''"] \arrow[rr, "0"] & & \bullet
\end{tikzcd}$$

Andererseits folgt für ein k'' mit $f \circ k'' = 0$ die Existenz eines eindeutigen Morphismus h'' sodass $k'' = k \circ h''$ gilt. Damit erhalten wir $c \circ k'' = (c \circ k) \circ h'' = 0$. Also gilt $c \circ k' = 0$ genau dann, wenn $f \circ k' = 0$ gilt. Mit anderen Worten gilt $\ker f = \ker c$, was zu zeigen war. Die Umkehrung ist trivial.

Die Charakterisierung des Kokerns ist dual zu beweisen. □

Definition 3.3.5. Ein Morphismus $f : A \longrightarrow B$ einer Kategorie $\mathcal{A}$ besitzt ein Bild $m : I \longrightarrow B$ in $\mathcal{A}$, falls m ein Monomorphismus ist, der f faktorisiert und folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jeder weiteren Faktorisierung von $f = m' \circ e'$ mit m' moni existiert ein Morphismus γ', der das Diagramm links unten kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "e'"'] & I \arrow[r, "m"] \arrow[d, dotted, "\gamma'"] & C \\ & I' \arrow[ur, "m'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "e''"'] & I \arrow[r] & C \\ & I'' \arrow[u, dotted, "\gamma''"] \arrow[ur, "m''"'] & \end{tikzcd}$$

Dual nennen wir $e : A \longrightarrow I''$ ein Kobild von f, falls e ein Epimorphismus ist, der f faktorisiert und folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jeder weiteren Faktorisierung von $f = m'' \circ e''$ mit e'' epi existiert ein Morphismus γ, sodass das Diagramm rechts oben kommutiert.

Bemerkung 3.3.6.

(1) Der in der obigen Definition eines Bildes (resp. Kobildes) auftretende Morphismus γ' (resp. γ'') ist, falls existent, eindeutig. Denn m' ist moni (resp. e' ist epi).

(2) Ist $m : I \longrightarrow B$ ein Monomorphismus, so ist m ein Bild von m: Wir wählen $e := \mathrm{id}_I$ sodass für jede Faktorisierung von $m = m' \circ e'$ mit m' moni durch $\gamma := e'$ das entsprechende Diagramm kommutiert.

(3) Dual ist jeder Epimorphismus $e : A \longrightarrow I$ Kobild seiner selbst.

(4) Jedoch besitzt im Allgemeinen nicht jeder Epimorphismus $e : A \longrightarrow I$ einer Kategorie $\mathcal{A}$ auch ein Bild. Wohl aber wenn $\mathcal{A}$ ausgeglichen ist. In diesem Fall ist nämlich die Identität id_I ein Bild von e: Angenommen $e = m' \circ e'$ sei eine Faktorisierung von e mit m' moni. Dann ist nach Bemerkung 3.1.23 (3) m' auch epi, also nach Voraussetzung ein Isomorphismus und daher ein γ' mit $m' \circ \gamma' = \mathrm{id}_I$ existent.

(5) Dual besitzt jeder Monomorphismus $m : I \longrightarrow B$ einer ausgeglichenen Kategorie die Identität id_I als ein Kobild, im Allgemeinen jedoch nicht notwendigerweise.

(6) Besitzt $f : A \longrightarrow B$ ein Bild in $\mathcal{A}$, so bildet die Menge $\mathrm{im}(f)$ aller Bilder von f eine Äquivalenzklasse in $\mathrm{Mo}_{\mathcal{A}}(B)$ und ist folglich ein Unterobjekt von B: $\mathrm{im}(f) \in \mathrm{Sub}_{\mathcal{A}}(B)$.

(7) Falls $f : A \longrightarrow B$ ein Kobild besitzt, bildet die Menge $\mathrm{coim}(f)$ aller Kobilder von f eine Äquivalenzklasse in $\mathrm{Ep}_{\mathcal{A}}(A)$. Daher ist $\mathrm{coim}(f) \in \mathrm{Quo}_{\mathcal{A}}(A)$ ein Quotientenobjekt von A.

Nun sind wir in der Lage, exakte Sequenzen einer Kategorie zu definieren:

Definition 3.3.7. Wir nennen die Komposition $g \circ f$ zweier Morphismen f und g

einer Kategorie $\mathcal{A}$ exakt, wenn f ein Bild und g einen Kern besitzt und $\operatorname{im} f = \ker g$ gilt. In diesem Fall nennen wir das Diagramm

$$\bullet \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \bullet$$

exakt bei B.

Allgemein nennen wir ein beliebiges Diagramm/Sequenz exakt, falls jede darin auftretende Komposition exakt ist.

Ein Diagramm in $\mathcal{A}$ der Form

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

nennen wir

- kurze exakte Sequenz, falls es bei A, B und C
- links–exakt, falls es bei A und B
- rechts–exakt, falls es bei B und C

exakt ist.

Dual bezeichnen wir $g \circ f$ koexakt, wenn f einen Kokern und g ein Kobild besitzt und die zugehörigen Quotientenobjekte ident sind: $\operatorname{coker}(f) = \operatorname{coim}(g)$. Das entsprechende Diagramm nennen wir koexakt bei B. Die Definitionen von koexakter Diagrammen, sowie links– und rechts–koexakter Sequenzen sind analog.

Bemerkung 3.3.8.
(1) Ist f ein Mono– (resp. g ein Epimorphismus), dann ist die Sequenz (3.3) bei A exakt (resp. C koexakt).
(2) Falls $f \in \ker(g)$ (resp. $g \in \operatorname{coker}(f)$) gilt, ist die Sequenz (3.3) links–exakt (resp. rechts–koexakt).

Die Umkehrungen beider Aussagen gelten im Allgemeinen nicht; es lassen sich einfache, minimale Gegenbeispiele konstruieren.

Im Allgemeinen ist für ein Morphismus f einer Kategorie $\mathcal{A}$ die Existenz einer Faktorisierung $f = m \circ e$ in ein Bild $m \in \operatorname{im}(f)$ und Kobild $e \in \operatorname{coim}(f)$, wie wir später anhand eines Beispieles sehen werden, nicht gesichert. Erst unter gewissen Voraussetzungen, die wir an die Kategorie $\mathcal{A}$ stellen werden, ist dies stets möglich. Eine wichtige Klasse von Kategorien, die diese Eigenschaft erfüllt, ist die der abelschen Kategorien. Aber zuerst gehen wir auf eine umfassendere Klasse von Kategorien näher ein:

Definition 3.3.9. Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt *Ab*–Kategorie, wenn jede Morphismenmenge $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ eine (additive) abelsche Gruppen–Struktur besitzt, sodass die Komposition bi-additive ist:

$$(g + g') \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' + g' \circ f + g' \circ f'$$

für jedes $f, f' : A \longrightarrow B$ und $g, g' : B \longrightarrow C$.

Bemerkung 3.3.10.
(1) Ist $\mathcal{A}$ eine *Ab*–Kategorie, so besitzen die beiden Hom–Funktoren als Ziel die Kategorie der abelschen Gruppen **Ab** und schreiben in diesem Fall daher:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, B) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

(2) Besitzt eine *Ab*–Kategorie $\mathcal{A}$ ein Null–Objekt Z, dann stimmt für jedes Objektepaar $A, B \in \mathcal{A}$ der in 3.3.1 definierte 0–Morphismus ${}_A0_B$ und das 0–Element $0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ überein: ${}_A0_B = 0_B \circ {}_A0$ ist die Komposition zweier 0-Elemente (es sind $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, B)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Z)$ triviale abelsche Gruppen) und die Komposition $0 \circ f$ eines Morphismus $f : C \longrightarrow D$ mit einem 0–Element $0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(D, E)$ ist stets das 0–Element $0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, E)$:

$$0 = 0 \circ f - 0 \circ f = (0 + 0) \circ f - 0 \circ f = 0 \circ f$$

(3) Umgekehrt kann aber nicht davon ausgegangen werden, dass eine *Ab*–Kategorie ein 0–Objekt besitzt. Hierfür lassen sich ebenfalls einfache Gegenbeispiele finden.

Beispiele 3.3.11.
(1) Die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen ist eine *Ab*–Kategorie.
(2) Zu jedem Ring R erhalten wir die *Ab*–Kategorien ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ und $\mathbf{Mod}_{\mathbf{R}}$.
(3) Die Kategorie ${}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Alg}$ der K–Lie Algebren sowie die Kategorien der Links– und Rechtsmoduln ${}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod}$ und $\mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}}$ sind *Ab*–Kategorien.
(4) Ist $\mathcal{A}$ eine *Ab*–Kategorie, dann ist auch $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ eine. Die abelsche Struktur auf $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Kom}(\mathcal{A})}((C_\bullet, d_\bullet), (C'_\bullet, d'_\bullet))$ ist komponentenweise definiert.
(5) Allgemeiner erhalten wir zu einer *Ab*–Kategorie $\mathcal{A}$ und einer kleinen Kategorie $\mathcal{J}$, durch Bildung der Funktor–Kategorie $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$, eine neue *Ab*–Kategorie. Wiederum erklärt sich die abelsche Struktur auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathcal{J}}}(F, G) = \mathrm{Nat}(F, G)$ komponentenweise.

Bemerkung 3.3.12. In einer *Ab*–Kategorie $\mathcal{A}$ gelten folgende Charakterisierungen von Mono– und Epimorphismen:
(1) m ist moni genau dann, wenn gilt: Aus $m \circ g = 0$ folgt $g = 0$.
(2) e genau dann epi, wenn gilt: Aus $f \circ e = 0$ folgt $f = 0$.

Besitzt $\mathcal{A}$ zusätzlich ein Null–Objekt, dann können wir formulieren:
(3) m ist moni genau dann, wenn $0 \in \ker m$.
(4) e ist epi genau dann, wenn $0 \in \operatorname{coker} e$.

Damit sind die Umkehrungen zu den Aussagen aus Bemerkung 3.3.8 in einer *Ab*–Kategorie stets gültig.

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ *Ab*–Kategorien und $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ ein Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}'$, dann nennen wir T *additiv*, falls

$$T(f+g) = T(f) + T(g)$$

für jedes Paar paralleler Morphismen f, g in $\mathcal{A}$ gilt, dh. T respektiert die auf jeder einzelnen Morphismenmenge bestehende Gruppenstruktur.

Beispiele 3.3.13.

(1) Die beiden Hom-Funktoren

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab} \qquad\qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,B) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

einer *Ab*–Kategorie $\mathcal{A}$ sind additiv. Dies folgt nach Definition 3.3.9 aus der Bi-Additivität der Komposition von Morphismen.

(2) Der Tensorfunktor $- \otimes_R N : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ zu einem fest gewählten R–Linksmodul N wie auch $M \otimes_R - : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ zu einem fest gewählten R–Rechtsmodul M sind offensichtlich additive Funktoren.

(3) Der Invarianten– sowie der Koinvarianten–Funktor

$$(-)^{\mathfrak{g}} : {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek} \qquad\qquad (-)_{\mathfrak{g}} : {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$$

einer K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ sind additiv.

Dass zueinander adjungierte Funktoren die Additivität "übertragen" zeigt folgende Proposition (s. [Ma, Chap. IV, Sec. 1, Thm. 3]

Proposition 3.3.14. *Ist $L : \mathcal{A} \longleftarrow \mathcal{B}$ ein zu $R : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ links–adjungierter Funktor zwischen Ab–Kategorien, dann gilt: L ist additiv $\Leftrightarrow$ R ist additiv. In diesem Fall bildet*

$$\tau_{B,A} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(B), A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, R(A))$$

einen Gruppenisomorphismus.

Beweis. Ist $\epsilon : LR \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ die Koeinheit der Adjunktion dann gilt für jeden Morphismus $f : B \longrightarrow R(A)$

$$\tau_{B,A}(\epsilon_A \circ L(f)) \overset{(3.1)}{=} \tau_{B,A}(\epsilon_A) \circ f = f$$

sodass wir $\tau_{B,A}^{-1}(f) = \epsilon_A \circ L(f)$ schreiben können. Für ein weiteres $f' : B \longrightarrow R(A)$ erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}\tau_{B,A}^{-1}(f+f') &= \epsilon_A \circ L(f+f') = \epsilon_A \circ (L(f) + L(f')) \\ &= \epsilon \circ L(f) + \epsilon \circ L(f') = \tau_{B,A}^{-1}(f) + \tau_{B,A}^{-1}(f').\end{aligned}$$

Daher ist $\tau_{B,A}^{-1}$, und auf Grund der Bijektivität auch $\tau_{B,A}$, ein Gruppenhomomorphismus.

Wir behaupten R sei additiv und rechnen für ein Paar paralleler Morphismen

$g, g' : A \longrightarrow A'$ in $\mathcal{A}$ nach:

$$\begin{aligned}\tau^{-1}_{R(A),A'}(R(g+g')) &= \epsilon_{A'} \circ LR(g+g') \overset{*}{=} (g+g') \circ \epsilon_A = g \circ \epsilon_A + g' \circ \epsilon_A \\ &= \epsilon_{A'} \circ LR(g) + \epsilon_{A'} \circ LR(g') = \epsilon_{A'} \circ (LR(g) + LR(g')) \\ &= \epsilon_{A'} \circ (L(R(g) + R(g'))) = \tau^{-1}_{R(A),A'}(R(g) + R(g'))\end{aligned}$$

wobei $*$ auf die Natürlichkeit der Koeinheit ϵ zurück zuführen ist. Auf Grund der Bijektivität von $\tau^{-1}_{R(A),A'}$ folgt die Behauptung. □

Zwei Objekte A, B einer *Ab*–Kategorie $\mathcal{A}$ besitzen ein *Biprodukt* in $\mathcal{A}$, falls ein Diagramm

$$A \underset{i_A}{\overset{p_A}{\leftrightarrows}} C \underset{i_B}{\overset{p_B}{\rightleftarrows}} B$$

mit einem Objekt C und Morphismen p_A, p_B, i_A, i_B in $\mathcal{A}$ existiert, sodass

$$p_A \circ i_A = \mathrm{id}_A \qquad p_B \circ i_B = \mathrm{id}_B \qquad i_A \circ p_A + i_B \circ p_B = \mathrm{id}_C \tag{3.4}$$

gilt. Wir bezeichnen dann den Tupel $(C, \iota_A, \iota_B, \pi_A, \pi_B)$ als ein Biprodukt von A und B.

Bemerkung 3.3.15. Sei $(C, \iota_A, \iota_B, \pi_A, \pi_B)$ ein Biprodukt von A und B in einer *Ab*–Kategorie $\mathcal{A}$.

(1) Auf Grund der beiden linken Gleichungen in (3.4) sind nach Bemerkung 3.1.23 (3) und (4) ι_A, ι_B moni und π_A, π_B epi.

(2) Die beiden gegenläufigen Zeilen

$$0 \rightleftarrows A \underset{\pi_A}{\overset{\iota_A}{\rightleftarrows}} C \underset{\iota_B}{\overset{\pi_B}{\rightleftarrows}} B \rightleftarrows 0$$

bilden jeweils eine kurze exakte Sequenz:
Aus Gründen der Symmetrie zeigen wir nur die Exaktheit der oberen Zeile. Da nach (1) diese bei B exakt ist, haben wir nur Links–Exaktheit dieser nachzuweisen. Dazu sei $k : D \longrightarrow C$ ein Morphismus mit $\pi_B \circ k = 0$. Dann wird k durch ι_A faktorisiert:

$$\iota_A \circ (\pi_A \circ k) = (\iota_A \circ \pi_A) \circ k \overset{(3.4)}{=} (\mathrm{id}_C - \iota_B \circ \pi_B) \circ k = k - \iota_B \circ (\pi_B \circ k) = k$$

Und da nach (1) ι_A moni ist, ist diese Faktorisierung eindeutig und folglich $\iota_A \in \ker(\pi_B)$.

(3) Additive Funktoren führen Biprodukte in Biprodukte über: Sie erhalten jede der in (3.4) auftretende Gleichung die zusammen ein Biprodukt definieren.

Definition 3.3.16. Wir nennen eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{\nu} A'' \longrightarrow 0$$

splittend, falls ein Morphismus $\bar{\nu} : A'' \longrightarrow A$ mit $\nu \circ \bar{\nu} = \mathrm{id}_{A''}$ existiert.

Proposition 3.3.17. *Eine kurze exakte Sequenz* $\Lambda : 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{\nu} A'' \longrightarrow 0$ *splittet genau dann, wenn es Morphismen* $\bar{\lambda} : A \longrightarrow A'$ *und* $\bar{\nu} : A'' \longrightarrow A$ *gibt, sodass* $(A, \lambda, \bar{\nu}, \bar{\lambda}, \nu)$ *ein Biprodukt bildet.*

Beweis. Sei Λ eine kurze exakte Sequenz und $\bar{\nu} : A'' \longrightarrow A$ ein Morphismus, für den $\nu \circ \bar{\nu} = \mathrm{id}_{A''}$ gilt. Dann existiert ein Morphismus τ, der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, shift right, "\iota_{A'}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{A'}"'] & A' \bigoplus A'' \arrow[l, shift right, "\pi_{A'}"'] \arrow[r, shift right, "\pi_{A''}"'] \arrow[d, "\tau"'] & A'' \arrow[l, shift right, "\iota_{A''}"'] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{A''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\lambda"] & A \arrow[r, shift left, "\nu"] & A'' \arrow[l, shift left, "\bar{\nu}"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

Denn definieren wir τ als jenen Morphismus, welcher eindeutig durch die Bedingungen $\tau \circ \iota_{A'} = \lambda$ und $\tau \circ \iota_{A''} = \bar{\nu}$ bestimmt ist, dann kommutiert einerseits das linke Rechteck und auf Grund von

$$\left.\begin{aligned} \nu \circ \tau \circ \iota_{A'} &= \nu \circ \lambda = 0 = \pi_{A''} \circ \iota_{A'} \\ \nu \circ \tau \circ \iota_{A''} &= \nu \circ \bar{\nu} = \mathrm{id}_{A''} = \pi_{A''} \circ \iota_{A''} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nu \circ \tau = \pi_{A''}$$

auch das rechte Rechteck. Damit ist aber nach Bemerkung 3.4.2 (5) und (11) τ sowohl moni als auch epi, also ein Isomorphismus und folglich $(A, \lambda, \bar{\nu}, \bar{\lambda}, \nu)$, mit $\bar{\lambda} := \pi_{A'} \circ \tau^{-1}$, ein Biprodukt.

Die Umkehrung folgt aus Bemerkung 3.3.15 (2). □

Bemerkung 3.3.18. Aus der eben gezeigten Proposition und der Bemerkung 3.3.15 (3) stellen wir also fest, dass additive Funktoren splittende, kurze exakte Sequenzen respektieren. Jedoch gilt dies nicht für jede kurze exakte Sequenz.

Eine Besonderheit des Biprodukts ist seine "intrinsische" Definition, in der neben den Objekten A, B und C nur Morphismen zwischen diesen auftreten. Im Gegensatz dazu stehen Produkt und Koprodukt, deren Definitionen auf sämtliche Objekte der Kategorie zurückgreifen. Doch sind in einer *Ab*–Kategorie $\mathcal{A}$ die Begriffe Produkt, Koprodukt und Biprodukt äquivalent, wie folgende Proposition zeigt (s. [Bor2, Prop. 1.2.4]:

Proposition 3.3.19. *Seien A_1 und A_2 Objekte einer Ab–Kategorie $\mathcal{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) A_1 und A_2 besitzen ein Biprodukt.

(ii) A_1 und A_2 besitzen ein Produkt.

(iii) A_1 und A_2 besitzen ein Koprodukt.

Trifft eine der Aussagen zu, existieren ein Objekt C und Morphismen p_1, p_2, i_1, i_2 in $\mathcal{A}$, sodass sowohl (C, p_1, p_2, i_1, i_2) ein Biprodukt, (C, p_1, p_2) ein Produkt, als auch (C, i_1, i_2) ein Koprodukt von A_1 und A_2 bildet.

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*, der Beweis zu *(i)*$\Leftrightarrow$*(iii)* ist dual zu führen.

Angenommen, (C, p_1, p_2, i_1, i_2) ist ein Biprodukt von A_1 und A_2. Dann folgt aus

$$p_1 \circ i_2 = p_1 \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ i_2 \overset{(3.4)}{=} p_1 \circ i_2 + p_1 \circ i_2$$

durch Subtraktion $p_1 \circ i_2 = 0$ und auf Grund der Symmetrie zugleich $p_2 \circ i_1 = 0$. Sind nun Morphismen $A_1 \xleftarrow{f_1} D \xrightarrow{f_2} A_2$ gegeben, dann erhalten wir durch $h := i_1 \circ f_1 + i_2 \circ f_2$ im folgenden Diagramm zwei kommutative Dreiecke:

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A_1 \arrow[r, shift right, "i_1"'] & C \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[r, shift left, "p_2"] & A_2 \arrow[l, shift left, "i_2"] \end{tikzcd}$$

Denn es gilt:

$$p_1 \circ (i_1 \circ f_1 + i_2 \circ f_2) = \underbrace{(p_1 \circ i_1)}_{\mathrm{id}_{A_1}} \circ f_1 + \underbrace{(p_1 \circ i_2)}_{0} \circ f_2 = f_1 \quad p_2 \circ (i_1 \circ f_1 + i_2 \circ f_2) = f_2$$

Ist $h' : D \longrightarrow C$ ein weiterer Morphismus mit $p_1 \circ h' = f_1$ und $p_1 \circ h' = f_1$, dann folgt aus

$$h' = (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ h' = i_1 \circ (p_1 \circ h') + i_2 \circ (p_2 \circ h') = h$$

die Eindeutigkeit von h. Also ist (C, p_1, p_2) ein Produkt von A_1 und A_2.

Sei nun umgekehrt (C, p_1, p_2) als ein Produkt von A_1 und A_2 gegeben. Dann existiert ein Morphismus $i_1 : A \longrightarrow C$ mit $p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_{A_1}$ und $p_2 \circ i_1 = 0$ sowie ein Morphismus $i_2 : A \longrightarrow C$ mit $p_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_{A_2}$ und $p_1 \circ i_2 = 0$. Aus

$$p_1 \circ \underbrace{(i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2)}_{h:=} = \underbrace{(p_1 \circ i_1)}_{\mathrm{id}_{A_1}} \circ p_1 + \underbrace{(p_1 \circ i_2)}_{0} \circ p_2 = p_1 \quad p_2 \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) = p_2$$

und der damit verbundenen Eindeutigkeit von h folgt $h = \mathrm{id}_C$. Somit ist nach Definition (C, p_1, p_2, i_1, i_2) ein Biprodukt. □

Definition 3.3.20. Eine *Ab*–Kategorie $\mathcal{A}$ heißt *additiv*, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\mathcal{A}$ besitzt ein Null–Objekt.

(ii) Für jedes Paar von Objekten A, B in $\mathcal{A}$ existiert ein Biprodukt.

$\mathcal{A}$ heißt *abelsch*, falls zusätzlich gilt:

(iii) $\mathcal{A}$ besitzt sowohl Kerne als auch Kokerne.

(iv) $\mathcal{A}$ ist eine normale und konormale Kategorie.

Sind nur die Axiome (i) bis (iii) erfüllt, so nennen wir $\mathcal{A}$ eine *präabelsche* Kategorie.

Beispiele 3.3.21.

(1) Die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen, wie auch die Kategorien $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ und $\mathbf{Mod}_{\mathbf{R}}$ zu einem Ring R, sind abelsche Kategorien.

(2) Weiterführend zu Beispiel 3.3.11 (4) ist mit $\mathcal{A}$ auch $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ eine additive Kategorie: Nach Beispiel 3.1.21 (3) besitzt $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ ein Null–Objekt und das Biprodukt zweier Komplexe (C_n, d_n) und (C'_n, d'_n) definieren wir komponentenweise: $(C \oplus C')_n = C_n \oplus C'_n$ sowie $(d \oplus d')_n = d_n \oplus d'_n$.

(3) Die Konstruktionen des Biprodukts lässt sich auf die Funktorkategorie $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ verallgemeinern, sodass wir zusammen mit Beispiel 3.1.21 (4) $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ als additive Kategorie erkennen.

(4) Zu einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ existiert, wie in Beispiel 3.1.5 3.1.6 konkreter angeführt, die Kategorie der in $\mathcal{A}$ exakten Sequenzen $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$. Objekte dieser Kategorie sind exakte Sequenzen in $\mathcal{A}$ und Morphismen $f_\bullet : A \longrightarrow B$ in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ sind Tripeln (τ_1, τ_2, τ_3) von Morphismen in $\mathcal{A}$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A : 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_3"'] & 0 \\
B : 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

kommutiert. Wie man sofort erkennt, ist $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ eine volle Unterkategorie der Funktorkategorie $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_3}$, die ein Null–Objekt besitzt und abgeschlossen bzgl. Bildung des Biprodukts ist. Damit ist $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ eine additive Kategorie.

Wir werden bald zeigen, dass sowohl $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ als auch $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ abelsch und $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ präabelsch ist. Doch zuvor erarbeiten wir eine bereits angekündigte, zentrale Eigenschaft abelscher Kategorien: Jeder Morphismus f einer abelschen Kategorie besitzt ein Bild und ein Kobild. Dafür ist folgendes Lemma von großem Nutzen:

Lemma 3.3.22. *Seien m und e Morphismen einer Kategorie $\mathcal{A}$ mit Kernen und Kokernen sodass $m \circ e$ existiert. Dann gilt:*

(i) Aus e epi folgt $\operatorname{coker} m = \operatorname{coker} m \circ e$. *Ist m moni und $\mathcal{A}$ abelsch, gilt auch die Umkehrung.*

(ii) Aus m moni folgt $\ker e = \ker m \circ e$. *Ist e epi und $\mathcal{A}$ abelsch, gilt auch die Umkehrung.*

Beweis. Wir zeigen *(i)*, der Beweis zu *(ii)* ist dual zu führen.

Ist e epi, also rechtskürzbar, dann gilt:

$$g \circ m = 0 \text{ genau dann, wenn } g \circ (m \circ e) = 0$$

Nach Definition folgt daher $\operatorname{coker} m = \operatorname{coker} m \circ e$.

Sei nun $\mathcal{A}$ abelsch und m moni sowie r, s parallele Morphismen, für die $r \circ e = s \circ e$ gilt. Bezeichnen wir mit $k = \ker(r - s)$ den Differenzkern von r und s, dann existiert ein eindeutiger Morphismus e', sodass wir $e = k \circ e'$ schreiben können. Definiert $c \in \operatorname{coker} m = \operatorname{coker} m \circ e$ einen gemeinsamen Kokern und $c' \in \operatorname{coker} m'$ einen Kokern von $m' := m \circ k$, dann folgt $c' \circ (m \circ e) = (c' \circ m') \circ e' = 0$. Daher existiert ein Morphismus w mit $c' = w \circ c$. Nun ist m', als Komposition zweier Monomorphismen, moni, in $\mathcal{A}$ folglich ein Kern und damit gilt nach (3.2) $m' \in \ker c'$. Daraus und auf Grund von $c' \circ m = w \circ (c \circ m) = 0$ existiert ein eindeutiger Morphismus t mit $m = m' \circ t$. Folgendes Diagramm fasst die Beweisschritte zusammen:

$$\begin{tikzcd}
& & & \bullet \arrow[r, dotted, "w"] & \bullet \\
& & \bullet \arrow[ur, "c"] \arrow[urr, "c'"'] & & \\
\bullet \arrow[urr, "m'"] \arrow[r, shift left, "k"] & \bullet \arrow[ur, "m"'] \arrow[l, dotted, shift left, "t"] & & & \\
\bullet \arrow[u, "e'"] \arrow[ur, "e"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Da m linkskürzbar ist, erhalten wir $\mathrm{id} = k \circ t$, nach Bemerkung 3.1.23 (3) ist also k epi. Zusammen mit $(r - s) \circ k = 0$ folgt schließlich die gesuchte Aussage $r - s = 0$ bzw. $r = s$. □

Proposition 3.3.23. *Sei $\mathcal{A}$ eine präabelsche Kategorie und $f = m \circ e$ ein faktorisierter Morphismus in $\mathcal{A}$. Dann gilt:*

(i) Falls m moni und e konormal ist, ist m ein Bild von f.

(ii) Falls e epi und m normal ist, ist e ein Kobild von f.

Umgekehrt gilt: Ist m ein Bild oder e ein Kobild von f, dann ist m moni und e epi (s. [Mi, Chap. I, Prop. 10.1]).

Beweis. Wir zeigen *(i)*, *(ii)* ist dual zu beweisen.

Sei $f = m' \circ e'$ eine weitere Faktorisierung von f mit m' moni. Ist $k \in \ker(f) = \ker(e)$ ein Kern, dann gilt auf Grund von $0 = f \circ k = m' \circ e' \circ k$ und m' moni die Gleichung $e' \circ k = 0$. Da aber nach Voraussetzung $e \in \operatorname{coker}(\ker(e))$ ist, erhalten wir mittels eines Morphismus γ die Faktorisierung $e' = \gamma \circ e$. Damit ist aber

$$m \circ e = f = m' \circ \gamma \circ e$$

und weil e epi ist, erhalten wir $m = m' \circ \gamma$.

Nun sei umgekehrt m ein Bild von f. Dann ist per Definition m moni. Nehmen wir an, g sei ein Morphismus mit $g \circ e = 0$. Dann faktorisiert k, ein Kern von g, $e = k \circ e'$ und erhalten damit die Faktorisierung $f = (m \circ k) \circ e'$. Weil k moni und m ein Bild von f ist, existiert ein Morphismus γ mit $(m \circ k) \circ \gamma = m$. Folglich gilt $k \circ \gamma = \mathrm{id}$, nach Bemerkung 3.1.23 (3) also k epi. Damit ist $g = 0$ und nach Bemerkung 3.3.12 (1) e epi. Dual folgt aus e Kobild von f, dass e epi und m moni ist. □

In abelschen Kategorien ist $f = m \circ e$ mit m moni und e epi bereits eine Zerlegung des Morphismus f in ein Bild und Kobild (s. [Ma, Chap. VIII, Sec. 3, Prop. 1]):

Satz 3.3.24. *Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f = m \circ e$ *mit* m *moni und* e *epi.*

(ii) $m \in \ker(\operatorname{coker} f)$.

(iii) m *ist ein Bild von* f.

(iv) $e \in \operatorname{coker}(\ker f)$.

(v) e *ist ein Kobild von* f.

Beweis. (i)⇒(ii): Da in $\mathcal{A}$ der Monomorphismus m normal ist, erhalten wir sofort:

$$m \overset{(3.2)}{\in} \ker(\operatorname{coker} m) \overset{3.3.22}{=} \ker(\operatorname{coker} f)$$

(i)⇐(ii): Auf Grund von $\operatorname{coker} f \circ f = 0$ faktorisiert m, als Kern von $\operatorname{coker}(f)$, f: $f = m \circ e$. Nun gilt

$$\operatorname{coker} m = \operatorname{coker}(\ker(\operatorname{coker}(f))) \overset{(3.2)}{=} \operatorname{coker} f = \operatorname{coker}(m \circ e)$$

sodass nach Lemma 3.3.22 e epi ist.

Die Äquivalenz zwischen (i) und (iv) zeigt sich dual und jene zwischen (i) und (iii) (resp. (i) und (v)) folgt aus Proposition 3.3.23. □

Bemerkung 3.3.25. Sind

$$\cdots \xrightarrow{f_{-2}} B_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} B_0 \xrightarrow{e} B \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{m} B_1 \xrightarrow{f_1} B_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$$

exakte Sequenzen einer präabelschen Kategorie und e konormal, dann erhalten wir durch Komposition von e und m eine neue exakte Sequenz:

$$\cdots \xrightarrow{f_{-2}} B_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} B_0 \xrightarrow{f_0 := m \circ e} B_1 \xrightarrow{f_1} B_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$$

Denn aus Lemma 3.3.22 (ii) folgt $\operatorname{im}(f_{-1}) = \ker(e) = \ker(m \circ e) = \ker(f_0)$ und auf Grund von Lemma 3.3.23 (i) gilt $\operatorname{im}(f_0) \ni m \in \ker(f_1)$ und folglich Gleichheit.

Nun konzentrieren wir uns auf die Funktorkategorien $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ und ihrem Nachweis, abelsch zu sein, sofern $\mathcal{A}$ es ist. Dazu betrachten wir erst einmal den speziellen Fall $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_\mathbf{2}}$. Dabei ist $\mathcal{I}_\mathbf{2}$ jene Kategorie, die genau zwei Objekte $1, 2$, und neben den Identitäten genau einen weiteren Morphismus $\omega : 1 \longrightarrow 2$ besitzt. Objekte in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_\mathbf{2}}$ sind damit Morphismen f, g aus $\mathcal{A}$ und Morphismen in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_\mathbf{2}}$ sind natürliche Transformationen $\tau : F \longrightarrow G$ von Funktoren $F, G : \mathcal{I}_\mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{A}$, also Morphismen–Paare (τ_1, τ_2) sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \\
\bullet \arrow[r, "\tau_2"] & \bullet
\end{tikzcd}
\tag{3.7}
$$

wobei $F(\omega) = f$ und $G(\omega) = g$ gilt. Wir erhalten erst einmal:

Lemma 3.3.26. *Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, dann besitzt jeder Morphismus τ in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_\mathbf{2}}$ sowohl einen Kern $\kappa_\bullet$, als auch einen Kokern $\epsilon_\bullet$:*

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\kappa_1"] \arrow[d, dotted, "k"'] & \bullet \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \\
\bullet \arrow[r, "\kappa_2"] & \bullet \arrow[r, "\tau_2"] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[d, "g"] & \bullet \arrow[d, dotted, "c"] \\
\bullet \arrow[r, "\tau_2"] & \bullet \arrow[r, "\epsilon_2"] & \bullet
\end{tikzcd}
\tag{3.8}
$$

Beweis. Wir zeigen nur die Existenz eines Kerns zu einem beliebigen Morphismus, der Beweis für die Existenz eines Kokerns ist dual zu führen. Sei, wie in (3.7), τ ein Morphismus in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_\mathbf{2}}$. Dann existieren in $\mathcal{A}$ Kerne κ_i von τ_i, $i = 1, 2$ und wir erhalten aus

$$\tau_2 \circ (f \circ \kappa_1) = (g \circ \tau_1) \circ \kappa_1 = 0$$

einen Morphismus k in $\mathcal{A}$, sodass das linke Diagramm in (3.8) kommutiert. Es gilt $\tau \circ \kappa = 0$.

Ist nun κ' ein weiterer Morphismus in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_\mathbf{2}}$ mit $\tau \circ \kappa' = 0$, dann existieren eindeutige Morphismen γ_i in $\mathcal{A}$, sodass die beiden Dreiecke im folgenden Diagramm kommutieren:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, dotted, "\gamma_1"] \arrow[drr, "\kappa_1'"] \arrow[ddd, "k'"'] & & & \\
& \bullet \arrow[r, "\kappa_1"'] \arrow[d, "k"'] & \bullet \arrow[r, "\tau_1"'] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \\
& \bullet \arrow[r, "\kappa_2"] & \bullet \arrow[r, "\tau_2"] & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, dotted, "\gamma_2"] \arrow[urr, "\kappa_2'"'] & & &
\end{tikzcd}
\tag{3.9}
$$

Da κ_2 moni ist, ist nach folgender Rechnung auch das innenliegende Trapez in (3.9) kommutativ:

$$\kappa_2 \circ (\gamma_2 \circ k') = \kappa_2' \circ k' = f \circ \kappa_1' = f \circ (\kappa_1 \circ \gamma_1) = \kappa_2 \circ (k \circ \gamma_1)$$

Damit bilden γ_1 und γ_2 eindeutig einen Morphismus γ in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$, der der gesuchten Faktorisierung $\kappa' = \kappa \circ \gamma$ genügt. □

Bemerkung 3.3.27. Sind f und g in (3.8) Isomorphismen, so auch k und c: Wie in Bemerkung 3.1.18 kommutiert das rechte Rechteck im folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\tilde\kappa_1:=\kappa_2"] \arrow[d, dotted, "\tilde k"'] & \bullet \arrow[r, "\tilde\tau_1:=\tau_2"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & \bullet \arrow[d, "g^{-1}"] \\ \bullet \arrow[r, "\tilde\kappa_2:=\kappa_1"'] & \bullet \arrow[r, "\tilde\tau_2:=\tau_1"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

sodass wir es durch den Kern $\tilde\kappa$ von $\tilde\tau$ erweitern können. Fügen wir das linke Diagramm in (3.8) mit obigen zusammen, lässt sich folgende Rechnung durchführen:

$$\tilde\kappa_2 \circ \tilde k \circ k = f^{-1} \circ \tilde\kappa_1 \circ k = f^{-1} \circ f \circ \kappa_1 = \kappa_1$$

Weil $\tilde\kappa_2 = \kappa_1$ linkskürzbar ist, folgt $\tilde k \circ k = \mathrm{id}$. Analog zeigt sich $k \circ \tilde k = \mathrm{id}$ sodass k ein Isomorphismus ist. Dual folgt: c ist ein Isomorphismus.

Nun zeigen wir allgemein ([Rot, Prop. 5.93]):

Satz 3.3.28. *Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{J}$ eine beliebige, kleine Kategorie, dann ist auch die Funktorkategorie $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ abelsch.*

Beweis. In Beispiel 3.3.21 haben wir $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ bereits als additive Kategorie erkannt sodass noch die Axiome (iii) und (iv) in Definition 3.3.9 nachzuweisen sind.

Sei $\tau : F \longrightarrow G$ ein Morphismus in $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$. Wählen wir für jedes $X \in \mathcal{J}$ ein $\kappa_X \in \ker(\tau_X)$, dann existiert nach Lemma 3.3.26 für jeden Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{J}$ ein Morphismus $K(f) : K(X) \longrightarrow K(Y)$ in $\mathcal{A}$ mit kommutativem Diagramm

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "\kappa_X"] \arrow[d, dotted, "K(f)"'] & F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ K(Y) \arrow[r, "\kappa_Y"] & F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"] & F(Y). \end{tikzcd}$$

Falls $f = \mathrm{id}_X$ gilt, folgt offensichtlich $K(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{K(X)}$ und auf Grund der Eindeutigkeit von $K(g \circ f)$ gilt $K(g \circ f) = K(g) \circ K(f)$. Also ist $K : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor und zusammen mit obigen Diagramm $\kappa : K \longrightarrow F$ eine natürliche Transformation für die $\tau \circ \kappa = 0$ gilt. Dass nun κ ein Kern von τ in $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ ist, folgt unmittelbar aus der universellen Faktorisierungs–Eigenschaft, die nach Lemma 3.3.26 jedes, als Morphismus in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$ betrachte Paar (κ_X, κ_Y) besitzt. Dual zeigt sich zu jedem Morphismus in $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ auch die Existenz eines Kokerns, also insgesamt Axiom 3.3.20 (iii).

Sei $\tau : F \longrightarrow G$ ein Monomorphismus in $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$. Dann ist laut Bemerkung 3.3.12 (3) $\kappa = 0$ für ein $\kappa \in \ker(\tau)$. Damit ist aber auch $\kappa_X = 0$ für alle $X \in \mathcal{J}$ und weil $\kappa_X \in \ker(\tau_x)$ für jedes $X \in \mathcal{J}$ gilt, folgt gemäß letztgenannter Bemerkung und der Normalität von $\mathcal{A}$: κ_X ist normal für alle $X \in \mathcal{J}$. Für ein $\gamma \in \operatorname{coker}(\tau)$ gilt daher (siehe Lemma 3.3.4) $\tau_X \in \ker(\operatorname{coker}(\tau_X))$ was aber sofort $\tau \in \ker(\operatorname{coker}(\tau))$ zufolge hat. Nach letztgenanntem Lemma ist damit τ normal.

Dual dazu zeigt man, dass jeder Epimorphismus in $\mathcal{A}^{\mathcal{J}}$ konormal ist. □

Korollar 3.3.29. *Sei in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ein kommutatives Rechteck $g \circ \tau_1 = \tau_2 \circ f$ gegeben.*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\epsilon_1"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\tau_1"] & I_1 \arrow[r, "\mu_1"'] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & B_1 \arrow[d, "g"] \\
A_2 \arrow[r, "\epsilon_2"] \arrow[rr, bend right, "\tau_2"'] & I_2 \arrow[r, "\mu_2"] & B_2
\end{tikzcd}$$

Faktorisieren wir τ_1 und τ_2 wie in Satz 3.3.24, dann existiert ein eindeutiger Morphismus γ, sodass die beiden entstandenen Rechtecke kommutieren.

Beweis. Der Morphismus $\tau_\bullet : f \longrightarrow g$ besitzt nach den Sätzen 3.3.28 und 3.3.24 in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$ eine Faktorisierung $f \xrightarrow{\epsilon_\bullet} \gamma \xrightarrow{\mu_\bullet} g$. Ist $\gamma' : I_1 \longrightarrow I_2$ ein weiterer Morphismus, welcher obiges Diagramm kommutativ macht, so folgt aus $\gamma' \circ \epsilon_1 = \epsilon_2 \circ f = \gamma \circ \epsilon_1$ und ϵ_1 epi die Gleichung $\gamma' = \gamma$ und damit die Eindeutigkeit von γ. □

Sind $(C_\bullet, d_\bullet)$ und $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ Objekte in $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$, dann definieren wir durch $F(n) = C_n$ und $F'(n) = C'_n$ sowie $F(n \longrightarrow n-1) = d_n$ und $F'(n \longrightarrow n-1) = d'_n$ zwei Funktoren $F, F' : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}$. Identifizieren wir $(C_\bullet, d_\bullet)$ mit F, $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ mit F' dann entsprechen die Morphismen $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Kom}(\mathcal{A})}(C_\bullet, C'_\bullet)$ genau den natürlichen Transformationen $\operatorname{Nat}(F, F')$. Dh. wir können $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ als volle Unterkategorie von $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ betrachten. Es gilt:

Korollar 3.3.30. *Zu jeder abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist auch die Kategorie der $\mathcal{A}$–Kettenkomplexe $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ abelsch.*

Beweis. $\mathcal{K} := \mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ ist als volle Unterkategorie von $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ eine *Ab*–Kategorie, die offensichtlich ein Null–Objekt enthält und abgeschlossen bezüglich Bildung des Biprodukts zweier Objekte $C_\bullet$ und $C'_\bullet$ ist. Des Weiteren ist $\mathcal{K}$ in $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ abgeschlossen bzgl. Bildung eines Kerns bzw. Kokerns eines Morphismus $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$, was genauer bedeutet:[3]

$$\varnothing \subsetneq \ker_{\mathcal{K}} f_\bullet = \ker_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} f_\bullet \cap \operatorname{Mor}(\mathcal{K}) \qquad \varnothing \subsetneq \operatorname{coker}_{\mathcal{K}} f_\bullet = \operatorname{coker}_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} f_\bullet \cap \operatorname{Mor}(\mathcal{K}) \tag{3.10}$$

[3]Die Indizierung der Operatoren ker und *coker* in (3.10) dient zur Unterscheidung dieser zwischen Morphismen–Operatoren in $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Also fehlt nur mehr der Beweis der Gültigkeit des Axiom (iv) aus Definition 3.3.20:

Sei $m_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ ein Monomorphismus in $\mathcal{K}$. Nach Bemerkung 3.3.12 gilt $0 \in \ker_{\mathcal{K}}(m_\bullet)$, wegen (3.10) auch $0 \in \ker_{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}(m_\bullet)$ und damit, wiederum nach Bemerkung 3.3.12, $m_\bullet$ moni in $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Als Monomorphismus ist $m_\bullet$ zugleich ein Kern in $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, also gilt nach Lemma 3.3.4 $m_\bullet \in \ker(\operatorname{coker} m_\bullet)$ in $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ und auf Grund von (3.10) auch in $\mathcal{K}$.

Dual ist ein Epimorphismus in $\mathcal{K}$ Kokern eines Morphismus in $\mathcal{K}$. $\square$

Die Kategorie $({}^{|||}\mathcal{A})$ der kurzen exakten Sequenzen einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist hingegen nicht abelsch (s. Beispiel 3.4.3). Aber es gilt zumindest (s. [Mi, Chap. I, Ex. 18]):

Proposition 3.3.31. *Die Kategorie* $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ *der exakten Sequenzen einer abelschen Kategorie* $\mathcal{A}$ *ist präabelsch.*

Beweis. Nach Beispiel 3.3.21 (4) ist $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ eine additive Kategorie, sodass nur noch die Existenz eines Kerns und Kokerns zu einem beliebigen Morphismus $\tau_\bullet : E_\bullet \longrightarrow E'_\bullet$ zu zeigen ist. Wir konstruieren zu $\tau_\bullet$ nur einen Kern, die Konstruktion eines Kokerns ist dual zu führen.

Mit $\kappa_i \in \ker(\tau_i)$, $i = 1, 2$ erhalten wir im folgenden Diagramm nach Lemma 3.3.26 das kommutative Rechteck I:

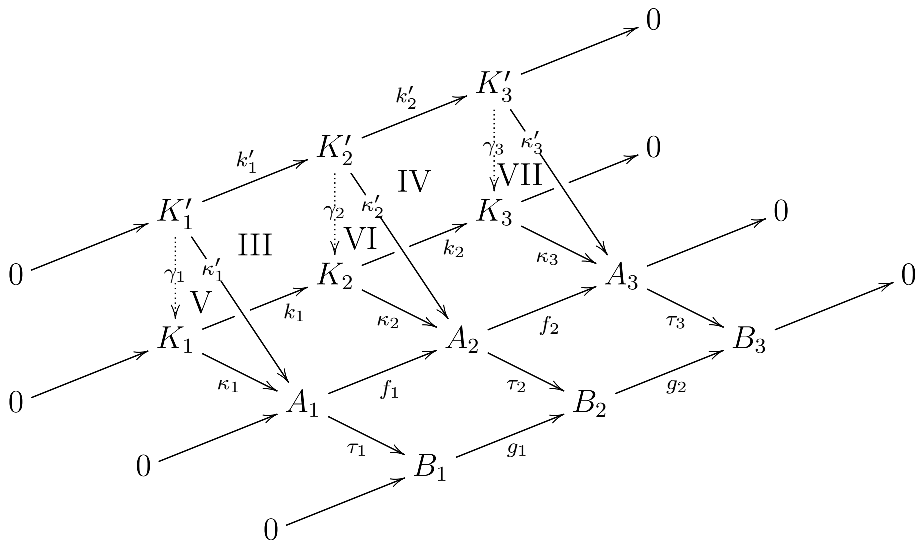
$$\begin{tikzcd}
K : 0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, dotted, "k_1"] \arrow[d, "\kappa_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & K_2 \arrow[r, "k_2"] \arrow[d, "\kappa_2"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \tilde{K}_3 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\tilde{\kappa}_3"'] & 0 \\
E : 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\tau_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\tau_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_3"'] & 0 \\
E' : 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

Und indem wir ein $k_2 \in \operatorname{coker}(k_1)$ wählen, existiert wiederum nach Lemma 3.3.26 ein Morphismus $\tilde{\kappa}_3$, sodass das Rechteck II kommutiert.

Weil die rechte Seite von $\kappa_2 \circ k_1 = f_1 \circ \kappa_1$ eine Komposition von Monomorphismen ist, folgt nach Bemerkung 3.1.23 (4), dass k_1 moni ist, also die Sequenz K exakt bei K_1 ist. Nach Konstruktion ist sie auch rechts–exakt und somit insgesamt eine kurze exakte Sequenz. Offensichtlich gilt $\tau_\bullet \circ \kappa_\bullet = 0$.

Gilt nur noch für $\kappa_\bullet : K \longrightarrow E$ die universelle Eigenschaft eines Kerns nachzuweisen.

Dazu sei $\kappa'_\bullet : K' \longrightarrow E$ ein weiterer Morphismus mit $\tau_\bullet \circ \kappa'_\bullet = 0$:



Nach Konstruktion ist $(\kappa_1, \kappa_2) : k_1 \longrightarrow f_1$ ein Kern von $(\tau_1, \tau_2) : f_1 \longrightarrow g_1$ in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$, daher existiert ein eindeutiger Morphismus $(\gamma_1, \gamma_2) : k'_1 \longrightarrow k_1$ in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$ (und damit das kommutative Rechteck III) mit $(\kappa_1, \kappa_2) \circ (\gamma_1, \gamma_2) = (\kappa'_1, \kappa'_2)$ (was bedeutet, dass die Dreiecke V und VI kommutieren). Und da $k'_2 \in \operatorname{coker}(k'_1)$ und $k_2 \in \operatorname{coker}(k_1)$ gilt, folgt wiederum nach Lemma 3.3.26 die Existenz eines eindeutigen Morphismus γ_3, sodass das Rechteck IV kommutiert. Mittels der Rechnung

$$\kappa_3 \circ \gamma_3 \circ k'_2 = \kappa_3 \circ k_2 \circ \gamma_2 = f_2 \circ \kappa_2 \circ \gamma_2 = f_2 \circ \kappa'_2 = \kappa'_3 \circ k'_2$$

und der Tatsache k'_2 ist epi, kommutiert auch das Dreieck VII. Damit haben wir auf eindeutiger Weise einen Morphismus $\gamma : K' \longrightarrow K$ konstruiert, der die Gleichung $\kappa' = \kappa \circ \gamma$ erfüllt. □

Definition 3.3.32. Ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien heißt links– (resp. rechts–) exakt, falls

$$F(\ker g) = \ker F(g) \text{ (resp. } F(\operatorname{coker} f) = \operatorname{coker} F(f))$$

gilt. F heißt exakt, falls er sowohl links– als auch rechts–exakt ist.

Bemerkung 3.3.33. Ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann exakt (resp. links–, rechts–exakt), wenn er jede exakte Sequenz in $\mathcal{A}$

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0$$

in eine exakte (resp. links–, rechts–exakt) Sequenz in $\mathcal{B}$

$$0 \longrightarrow F(A') \xrightarrow{F(\iota)} F(A) \xrightarrow{F(\pi)} F(A'') \longrightarrow 0$$

überführt.

Beispiel 3.3.34. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Dann gilt:

(1) Die beiden Hom–Funktoren

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-):\mathcal{A}\longrightarrow\mathbf{Ab}\qquad\qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,B):\mathcal{A}^{op}\longrightarrow\mathbf{Ab}$$

sind stets links–exakt.
Wir weisen dies zuerst für den kovarianten Hom–Funktor nach: Dazu sei ein Kern $k:K\longrightarrow B'$ eines beliebigen Morphismus $f:B\longrightarrow B'$ gegeben. Dann gilt: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,f)\circ\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,k)\overset{(1)}{=}0$. Nun sei $\kappa:G\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ ein Morphismus in $\mathbf{Ab}$ der ebenfalls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,f)\circ\kappa=0$ erfüllt, dh. für jedes $g\in G$ gilt $f\circ\kappa(g)=0$. Dann existiert für jedes $g\in G$ eine Faktorisierung $\kappa(g)=k\circ\gamma(g)$ in $\mathcal{A}$ und zeigen, dass die damit konstruierte Abbildung γ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,K) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,k)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,f)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B') \\
G \arrow[u, dotted, "\gamma"] \arrow[ur, "\kappa"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{Ab}$ hervor ruft und folglich $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,k)$ ein Kern von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,f)$ ist:
Dazu bleibt nur die Frage offen, ob $\gamma:G\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,K)$ ein Morphismus in $\mathbf{Ab}$ ist und rechnen zuerst in $\mathcal{A}$ nach:

$$\begin{aligned}k\circ\gamma(g+g')&=\kappa(g+g')=\kappa(g)+\kappa(g')=k\circ\gamma(g)+k\circ\gamma(g')\\&=k\circ(\gamma(g)+\gamma(g'))\end{aligned}$$

Weil aber k moni ist, folgt $\gamma(g+g')=\gamma(g)+\gamma(g')$.
Für den kontravarianten Hom–Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,B):\mathcal{A}^{op}\longrightarrow\mathbf{Ab}$ folgern wir aus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,B)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(B,-)$ seine Links–Exaktheit.

(2) Der kovariante Hom–Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-):\mathcal{A}\longrightarrow\mathbf{Ab}$ ist genau dann exakt, wenn P ein projektives Objekt in $\mathcal{A}$ ist:
Da jeder Epimorphismus $\pi:B\longrightarrow B''$ stets zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0\longrightarrow B'\xrightarrow{\iota}B\xrightarrow{\pi}B''\longrightarrow 0$$

ergänzt werden kann, folgern wir zusammen mit (1): $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,-)$ ist genau dann exakt, wenn er Epimorphismen respektiert, dh. genau dann, wenn er jeden Epimorphismus $\pi:B\longrightarrow B'$ in $\mathcal{A}$ in eine Surjektion $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,B'')$ in $\mathbf{Ab}$ überführt. Letzteres ist aber genau dann surjektiv, wenn zu jedem Morphismus $f''\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,B'')$ ein Morphismus $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,B)$ existiert, sodass $f''=\pi\circ f$ gilt.

(3) Der kontravariante Hom–Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I):\mathcal{A}^{op}\longrightarrow\mathbf{Ab}$ ist genau dann exakt, wenn I ein injektives Objekt in $\mathcal{A}$ ist:

Dies folgt aus dem Vorherigen (2) indem wir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(I,-)$ verwenden (wie in (1)) und beachten, dass I genau dann injektiv in $\mathcal{A}$ ist, wenn I projektiv in $\mathcal{A}^{op}$ ist.

Proposition 3.3.35 ([HiSt, Chap. II, Thm. 7.7])**.** *Seien $L \dashv R$ adjungierte additive Funktoren zwischen abelschen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Dann ist L ein rechts– und R ein links–exakter Funktor.*

Beweis. Aus Gründen der Dualität zeigen wir nur die Links–Exaktheit von R: Sei $f : A \longrightarrow A'$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$ und $k : K \longrightarrow A$ ein Kern von f. Da R additiv ist, gilt $R(f) \circ R(k) = R(f \circ k) = 0$. Andererseits erhalten wir für ein $h : B \longrightarrow R(A)$ in $\mathcal{B}$ mit $R(f) \circ h = 0$

$$f \circ \tau^{-1}_{B,A}(h) \overset{(3.1)}{=} \tau^{-1}_{B,A} 0 \overset{3.3.14}{=} 0.$$

Als Kern von f faktorisiert k den Morphismus $\tau^{-1}_{B,A}(h)$ eindeutig, also gilt $\tau^{-1}_{B,A}(h) = k \circ \gamma$ für einen eindeutigen Morphismus $\gamma : L(B) \longrightarrow A$ in $\mathcal{A}$. Durch nochmaliger Anwendung von (3.1) erhalten wir die Faktorisierung $h = R(k) \circ \tau^{-1}_{B,A}(\gamma)$. Sie ist in $\mathcal{B}$ eindeutig, denn für jeden weiteren Morphismus $\gamma' : B \longrightarrow R(A)$ mit $h = R(k) \circ \gamma'$ gilt auf Grund der Eindeutigkeit von γ: $\tau(\gamma') = \gamma$. Dies ist aber gleichbedeutend mit $\gamma' = \tau^{-1}(\gamma)$. □

Beispiele 3.3.36.

(1) Zu jedem Ring R und $N \in {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ ist der Tensor–Funktor

$$- \otimes_R N : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ \mathbf{Mod_R} \ni M \mapsto M \otimes_R N \in \mathbf{Ab}$$

rechts–exakt. Dies folgt aus Beispiel 3.2.12 (2) und obiger Proposition. Ist zudem N ein projektiver Modul, so ist $- \otimes_R N$ ein exakter Funktor (siehe folgendes Lemma).

(2) Auch der zu dem R–Rechtsmodul $M \in \mathbf{Mod_R}$ gehörende Tensor–Funktor

$$M \otimes_R - : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \ni N \mapsto M \otimes_R N \in \mathbf{Ab}$$

ist nach Beispiel 3.2.12 (3) und obiger Proposition rechts–exakt (siehe folgendes Lemma).

(3) Der Invariantenfunktor $(-)^{\mathfrak{g}} : {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$ einer K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist links–exakt (siehe Beispiel 3.2.12 (5)).

(4) Der Koinvariantenfunktor $(-)_{\mathfrak{g}} : {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$ einer K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist rechts–exakt (siehe Beispiel 3.2.12 (6)).

Lemma 3.3.37 ([Rot, Prop. 3.46 (iii)])**.** *Sei R ein unitärer Ring und P ein projektiver R–Linksmodul. Dann ist der Tensorfunktor $- \otimes_R P : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ exakt.*

Hingegen ist $Q \otimes_R - : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ ein exakter Funktor wenn Q ein projektiver R–Rechtsmodul ist.

Beweis. Wir zeigen dies für den Funktor $- \otimes_R P : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, wobei wegen des Beispiels 3.3.36 (1) nur noch nachzuweisen ist, dass $- \otimes_R P$ Monomorphismen erhält.

Auf Grund von Proposition 3.2.7 wissen wir, dass ein R–Modul P genau dann projektiv ist, wenn er direkter Summand eines freien Moduls F ist, dh. wenn es einen Modul Q mit $P \coprod Q = F$ gibt. F selbst ist aber wiederum ein Koprodukt von Kopien von R. Da $- \otimes_R R$ offensichtlich Monomorphismen erhält, folgt aus Beispiel 3.2.23, dass $- \otimes_R F$ und wegen demselben Beispiel auch $- \otimes_R P$ Monomorphismen erhält. $\square$

Die Umkehrung gilt aber nicht: Es gibt nicht–projektive Moduln N, für die der Funktor $- \otimes_R N : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ trotzdem exakt ist.

3.4 Diagramm–Lemmata

Bevor wir einige Bemerkungen zu den eben konstruierten Kernen und Kokernen in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ geben, betrachten wir ein dafür hilfreiches, ansonsten eher technisches Resultat (vgl. [Sch1, Lem. 13.5.1]:

Lemma 3.4.1. *Sei in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ das kommutative Diagramm links (resp. rechts) unten mit exakten Zeilen und Spalten gegeben. Dann gilt $\bar{k} \in \ker(f \circ \kappa_2)$ (resp. $\bar{c} \in \operatorname{coker}(\gamma_1 \circ f)$).*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "\bar{k}"] \arrow[d, "\kappa_1"'] & \bullet \arrow[d, "\kappa_2"'] & \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\tau_1"'] & \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau_2"'] & \bullet \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "m"] & \bullet &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\tau_1"'] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "\tau_2"'] & 0 \\
\bullet \arrow[r, "f"] & \bullet \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"'] & 0 \\
 & \bullet \arrow[r, "\bar{c}"] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\tag{3.12}
$$

Beweis. Aus Dualitätsgründen zeigen wir nur die Aussage zu dem Diagramm links oben: Sei $\alpha := f \circ \kappa_2$ und angenommen k' ist ein Morphismus mit $0 = \alpha \circ k' = f \circ (\kappa_2 \circ k')$. Dann existiert, weil $k \in \ker(f)$ ist, ein Morphismus γ mit $\kappa_2 \circ k' = k \circ \gamma$. Aus $m \circ \tau_1 \circ \gamma = \tau_2 \circ \kappa_2 \circ k' = 0$ und m moni folgt $\tau_1 \circ \gamma = 0$. Da aber κ_1 Kern von τ_1 ist, existiert ein Morphismus γ', sodass $\gamma = \kappa_1 \circ \gamma'$ gilt. Aus

$$\kappa_2 \circ \bar{k} \circ \gamma' = k \circ \kappa_1 \circ \gamma' = k \circ \gamma = \kappa_2 \circ k'$$

und κ_2 links–kürzbar folgt die Faktorisierung $k' = \bar{k} \circ \gamma$, welche, auf Grund von $\bar{k}$ moni, eindeutig ist. Damit ist aber $\bar{k} \in \ker(\alpha)$. $\square$

Bemerkung 3.4.2. Im Beweis der vorhergehenden Proposition geht aus der Konstruktion des Kerns $\kappa_\bullet : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ in (3.11) hervor:

(1) $\kappa_i \in \ker(\tau_i)$ für $i = 1, 2$ jedoch im Allgemeinen nicht $\kappa_3 \in \ker(\tau_3)$; wir werden später klären, unter welcher Bedingung dies doch der Fall ist.

(2) Da nach Lemma 3.4.1 $\ker(k_2) = \ker(\kappa_3 \circ k_2)$ gilt, erhalten wir zusammen mit Lemma 3.3.22 (ii): κ_3 ist moni.

(3) Aus und $\beta := g_1 \circ \tau_1 = \tau_2 \circ f_1$ und $\kappa_1 \in \ker(\beta)$ und aus Gründen der Symmetrie der verwendeten Eigenschaften folgt $\kappa_1 \in \ker(\beta)$.

(4) $\kappa_3 \leq \ker(\tau_3)$: Dies folgt sofort aus $(\tau_3 \circ \kappa_3) \circ k_2 = (\kappa_2 \circ \tau_2) \circ g_2 = 0$ und der Tatsache, dass k_2 epi ist.

(5) Sind τ_1 und τ_3 moni, dann auch τ_2: Aus (1) und (4) folgt $K_1 = 0 = K_3$ und damit auch $K_2 = 0$. Dann gilt aber $0 = \kappa_2 \in \ker(\tau_2)$.

(6) $\tau_\bullet$ ist genau dann ein Monomorphismus, wenn τ_2 einer ist. Insbesondere folgt aus $\tau_\bullet$ moni, dass τ_1 und τ_2 moni in $\mathcal{A}$ sind.

Die Konstruktion eines Kokerns zu $\tau_\bullet : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ erfolgt dual, sodass wir ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
E : 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\tau_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\tau_2"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_3"'] & 0 \\
E' : 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\epsilon_1"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\epsilon_2"'] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_3"'] & 0 \\
C : 0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "c_1"] & C_2 \arrow[r, "c_2"] & C_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.13}$$

erhalten, zu dem wir auf Grund der Dualität sofort folgern:

(7) $\epsilon_i \in \operatorname{coker}(\tau_i)$ für $i = 2, 3$; im Allgemeinen ist aber $\epsilon_1 \notin \operatorname{coker}(\tau_1)$.

(8) Für $\alpha := g_2 \circ \tau_2 = \tau_3 \circ f_2$ und $\beta := \epsilon_2 \circ g_1 = c_1 \circ \epsilon_1$ gilt: $\epsilon_3 \in \operatorname{coker}(\alpha)$ und $c_2 \in \operatorname{coker}(\beta)$.

(9) ϵ_1 ist epi.

(10) $\epsilon_1 \leq \operatorname{coker}(\tau_1)$.

(11) Sind τ_1 und τ_3 epi, dann auch τ_2.

(12) $\tau_\bullet$ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn τ_2 einer ist. Insbesondere folgt aus $\tau_\bullet$ epi, dass τ_2 und τ_3 epi in $\mathcal{A}$ sind.

Ist also τ_2 ein Isomorphismus, so ist $\tau_\bullet$ sowohl moni als auch epi aber nicht notwendigerweise ein Isomorphismus in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 3.4.3. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt, welches kein

Null–Objekt ist. Dann definieren wir folgenden Morphismus $\tau_\bullet$ in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd}
E: 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \\
E': 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] & A \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.14}$$

Ein Kern dieses Morphismus ist der Nullmorphismus $0: 0 \longrightarrow E$ und ein Kokern davon $\epsilon_\bullet : E \longrightarrow E''$, definiert durch

$$\begin{tikzcd}
E: 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & 0 \\
E'': 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.15}$$

Wie man sofort sieht[4], ist $\epsilon_\bullet \not\equiv \tau_\bullet$, was nach Lemma 3.3.4 bedeutet, dass $\tau_\bullet$ nicht normal ist. Dual zeigt sich: $\tau_\bullet$ ist nicht konormal. Anhand dieses Morphismus entpuppt sich $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ als eine Kategorie, die weder normal, noch konormal, noch ausgeglichen ist.

Zwar besitzt nicht jeder Morphismus in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ eine Faktorisierung in Bild und Kobild, doch findet sich stets eine allgemeinere:

Proposition 3.4.4. *Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, dann besitzt jeder Morphismus $\tau_\bullet : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ eine Faktorisierung $\tau_\bullet = \mu_\bullet \circ \theta_\bullet \circ \epsilon_\bullet$ für die gilt:*

(i) $\mu_\bullet : \widetilde{D}_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ *ist normal und für* $i = 2, 3$ *ist* $\mu_i \in \mathrm{im}(\tau_i)$.

(ii) $\epsilon_\bullet : A_\bullet \longrightarrow \overline{D}_\bullet$ *ist konormal und für* $i = 1, 2$ *ist* $\epsilon_i \in \mathrm{coim}(\tau_i)$.

(iii) $\theta_\bullet : \overline{D}_\bullet \longrightarrow \widetilde{D}_\bullet$ *ist sowohl moni als auch epi (θ_2 ist isomorph).*

Durch geeignete Wahl von $\mu_\bullet$ (resp. $\epsilon_\bullet$) gilt zusätzlich: $\widetilde{D}_2 = \overline{D}_2$ und $\theta_2 = \mathrm{id}_{\widetilde{D}_2}$.

Beweis. Man wähle $\mu_\bullet \in \ker(\mathrm{coker}(\tau_\bullet))$, dann existiert ein $\theta'_\bullet$ mit $\tau_\bullet = \mu_\bullet \circ \theta'_\bullet$. Dual existiert zu einem gewählten $\epsilon_\bullet \in \mathrm{coker}(\ker(\theta'_\bullet))$ ein $\theta_\bullet$ mit $\theta'_\bullet = \theta_\bullet \circ \epsilon_\bullet$ und folglich die Faktorisierung $\tau_\bullet = \mu_\bullet \circ \theta_\bullet \circ \epsilon_\bullet$. Auf Grund der Konstruktion von Kern und Kokern in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ (siehe Bemerkung 3.4.2) gilt für die mittlere Komponente dieser Faktorisierung: $\mu_2 \in \ker(\mathrm{coker}(\tau_2))$ und $\epsilon_2 \in \mathrm{coker}(\ker(\tau_2))$. Damit muss aber nach Satz 3.3.24 θ_2 isomorph und folglich $\theta_\bullet$ sowohl moni als epi sein. □

Mittels Proposition 3.3.23 folgern wir daraus:

[4] Zwei Morphismen $\tau_\bullet, \tau'_\bullet$ in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ sind genau dann äquivalent in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$, wenn für $i = 1, 2, 3$ $\tau_i \equiv \tau'_i$ in $\mathcal{A}$ gilt.

Korollar 3.4.5. *Ist $\mathcal{A}$ abelsch, dann besitzt jeder Morphismus $\tau : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ sowohl ein Bild als auch ein Kobild:*

$$\mu_\bullet \circ \theta_\bullet \in \mathrm{im}(\tau_\bullet) \qquad\qquad \theta_\bullet \circ \epsilon_\bullet \in \mathrm{coim}(\tau_\bullet)$$

wobei $\tau_\bullet = \mu_\bullet \circ \theta \circ \epsilon_\bullet$ nach Proposition 3.4.4 faktorisiert wurde.

Lemma 3.4.6 (Neuner–Lemma). *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mu_\bullet : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ ein Morphismus in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ welcher komponentenweise moni ist. Dann existiert ein weiterer Morphismus $\epsilon_\bullet : B_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ sodass wir folgende kurze exakte Sequenz erhalten:*

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\mu_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\epsilon_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$$

Dual existiert zu einem komponentenweise epimorphen Morphismus $\epsilon_\bullet : B_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ ein Morphismus $\mu_\bullet : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$, sodass obere Sequenz eine kurze exakte ist.

In beiden Fällen erhalten wir ein in $\mathcal{A}$ kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "\mu_1"'] & A_2 \arrow[r, "k_2"] \arrow[d, "\mu_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\mu_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\epsilon_1"'] & B_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\epsilon_2"'] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d] & C_2 \arrow[r, "e_2"] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und Spalten.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, zweitere folgt dual. Betrachten wir (μ_1, μ_2) und (μ_2, μ_3) als Morphismen in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$ und bilden zu diesen jeweils einen Kokern, so erhalten wir ein wie oben abgebildetes kommutatives Diagramm, dessen Spalten und oberen beiden Zeilen kurze exakte Sequenzen sind. Nun gilt es, die Exaktheit der dritten Zeile nachzuweisen:

Aus Lemma 3.4.1 folgern wir, dass μ_1 Kern von $\beta := \epsilon_2 \circ f_1 = e_1 \circ \epsilon_1$ ist. Daher gilt $\mathrm{coker}(\ker(\beta)) = \mathrm{coker}(\mu_1) \ni \epsilon_1$ und Satz 3.3.24 zufolge $e_1 \in \ker(\mathrm{coker}(\beta))$. Weil nun aber die linke Seite von $\epsilon_3 \circ f_2 = e_2 \circ \epsilon_2$ eine Komposition von Epimorphismen und damit e_2 epi ist, erhalten wir wiederum aus Lemma 3.4.1 $e_2 \in \mathrm{coker}(\beta)$ und folglich $e_1 \in \ker(e_2)$. Zusammen mit e_2 epi ist daher die dritte Zeile exakt und das Lemma gezeigt. □

Korollar 3.4.7. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Dann gilt für jeden Morphismus $\tau_\bullet : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ in* $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$*:*

(i) $\tau_\bullet$ *ist normal* $\Leftrightarrow$ $\tau_\bullet$ *ist komponentenweise moni*[5] $\Leftrightarrow$ τ_1 *und* τ_3 *sind moni.*

(ii) $\tau_\bullet$ *ist konormal* $\Leftrightarrow$ $\tau_\bullet$ *ist komponentenweise epi*[5] $\Leftrightarrow$ τ_1 *und* τ_3 *sind epi.*

Beweis. Wir zeigen aus Dualitätsgründen wiederum nur *(i)*: Ist $\tau_\bullet$ normal, also Kern eines Morphismus, dann ist $\tau_\bullet$ äquivalent zu einem in Bemerkung 3.4.2 konstruierten Kern, welcher auf Grund von (1) und (2) komponentenweise moni ist. Auf Grund der Äquivalenz[2] ist daher auch $\tau_\bullet$ komponentenweise moni.

Die Umkehrung, aus $\tau_\bullet$ komponentenweise moni folgt $\tau_\bullet$ normal, ergibt sich sofort aus Lemma 3.4.6.

Die zweite Äquivalenz ist mittels Bemerkung 3.4.2 (5) sofort ersichtlich. □

Zum Beweis des Fünfer–Lemma benötigen wir eine weitere Folgerung aus dem Neuner–Lemma:

Korollar 3.4.8. *Ein Monomorphismus $\mu_\bullet : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ in* $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ *mit μ_1 epi ist normal. Dual ist ein Epimorphismus $\epsilon_\bullet : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$, mit ϵ_3 moni, konormal.*

Beweis. Nach Bemerkung 3.4.2 (6) ist μ_2 moni in $\mathcal{A}$ und in weiterer Folge auch μ_1, zusammen mit der Voraussetzung ist also μ_1 isomorph. Bilden wir zudem einen Kokern von $\mu_\bullet$, erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\mu_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\mu_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\mu_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r, "c_2"] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

bei dem alle drei Zeilen und die ersten beiden Spalten kurze exakte Sequenzen sind. Nach Lemma 3.4.6 ist damit auch die rechte Spalte exakt, also insbesondere $\mu_\bullet$ komponentenweise moni.

Durch Dualisierung folgt auch die zweite Aussage. □

[5] $\tau_\bullet$ nennen wir komponentenweise moni (resp. epi) falls jedes τ_i moni (resp. epi) ist.

Korollar 3.4.9. *Seien*

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{g_1} C_1 \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{f_2} B \xrightarrow{g_2} C_2 \longrightarrow 0$$

kurze exakte Sequenzen einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ und $\alpha = g_1 \circ f_2$.

Ist $\iota : A_1 \longrightarrow A_2$ ein Morphismus mit $f_2 \circ \iota = f_1$, dann existiert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\iota} A_2 \xrightarrow{\alpha} C_1 \xrightarrow{\pi} C_2 \longrightarrow 0$$

mit $\pi \circ g_1 = g_2$.

Dual erhalten wir aus der Existenz eines Morphismus $\pi : C_1 \longrightarrow C_2$ mit $\pi \circ g_1 = g_2$ obige exakte Sequenz mit $f_2 \circ \iota = f_1$.

Beweis. Wir zeigen wiederum nur die erste Aussage: Nach Bemerkung 3.1.23 (4) ist ι moni sodass wir mittels dem Neuner–Lemma 3.4.6 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und Spalten erhalten. Komponieren wir wie in Bemerkung 3.3.25 die erste Zeile mit der letzten Spalte, so erhalten wir dadurch die gesuchte exakte Sequenz. □

Lemma 3.4.10 (Fünfer–Lemma)**.** *Sei folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen gegeben.*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\tau_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\tau_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\tau_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\tau_4"'] & A_5 \arrow[d, "\tau_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

(i) Ist τ_1 epi und sind τ_2 und τ_4 moni, dann ist auch τ_3 moni.

(ii) Ist τ_5 moni und sind τ_2 und τ_4 epi, dann ist auch τ_3 epi.

Beweis. *(i)* und *(ii)* sind zueinander duale Aussagen, daher beweisen wir nur *(i)*: Zerlegen wir die f_i's und g_i's nach Satz 3.3.24, erhalten wir aus Korollar 3.3.29 folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "\tau_1"'] & I_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, dotted, "\gamma_1"'] & A_2 \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "\tau_2"'] & I_2 \arrow[r, "m_2"] \arrow[d, dotted, "\gamma_2"'] & A_3 \arrow[r, "e_3"] \arrow[d, "\tau_3"'] & I_3 \arrow[r, "m_3"] \arrow[d, dotted, "\gamma_3"'] & A_4 \arrow[r, "e_4"] \arrow[d, "\tau_4"'] & I_4 \arrow[r, "m_4"] \arrow[d, dotted, "\gamma_4"'] & A_5 \arrow[d, "\tau_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "e'_1"] & I'_1 \arrow[r, "m'_1"] & B_2 \arrow[r, "e'_2"] & I'_2 \arrow[r, "m'_2"] & B_3 \arrow[r, "e'_3"] & I'_3 \arrow[r, "m'_3"] & B_4 \arrow[r, "e'_4"] & I'_4 \arrow[r, "m'_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Da nach Voraussetzung τ_1 epi ist, ist die Komposition $e'_1 \circ \tau_1 = \gamma_1 \circ e_1$ und damit auch γ_1 epi (siehe Bemerkung 3.1.23 (3)). Daher ist nach Korollar 3.4.8 der Monomorphismus $(\gamma_1, \tau_2, \gamma_2)$ (denn τ_2 ist einer in $\mathcal{A}$) normal in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$, laut Korollar 3.4.7 also auch γ_2 moni. Andererseits ist auch γ_3 moni, denn die Komposition $m'_3 \circ \gamma_3 = \tau_4 \circ m_3$ ist nach Voraussetzung ein Monomorphismus. Aus Korollar 3.4.7 folgt nun das gesuchte Resultat: τ_3 ist moni. □

Lemma 3.4.11 (Schlangen–Lemma)**.** *Sei in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ folgendes kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\tau_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\tau_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 &
\end{tikzcd} \tag{3.16}$$

mit exakten Zeilen gegeben. Sind nun $\kappa_i : K_i \longrightarrow A_i$ Kerne und $\gamma_i : B_i \longrightarrow C_i$ Kokerne von $\tau_i : A_i \longrightarrow B_i$ für $i = 1, 2, 3$, dann existieren Morphismen k_i, c_i und δ in $\mathcal{A}$, sodass folgende Sequenz exakt ist:

$$K_1 \xrightarrow{k_1} K_2 \xrightarrow{k_2} K_3 \xrightarrow{\delta} C_1 \xrightarrow{c_1} C_2 \xrightarrow{c_2} C_3$$

Ist zudem f_1 moni (resp. g_2 epi), dann ist auch k_1 moni (resp. c_2 epi).

Beweis. (s. [Sch1, Satz 13.5.9]): Wir setzen zuerst voraus, dass f_1 moni und g_2 epi und folglich

$$\tau_\bullet := (\tau_1, \tau_2, \tau_3) : A_\bullet \longrightarrow B_\bullet$$

ein Morphismus in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ ist. Zerlegen wir diesen nach Proposition 3.4.4 in $\tau_\bullet = \mu_\bullet \circ \theta_\bullet \circ \epsilon_\bullet$, dann gilt für jeden Kern $\bar{\kappa}_\bullet$ (resp. Kokern $\widetilde{\gamma}_\bullet$) von $\tau_\bullet$

$$\bar{\kappa}_\bullet \in \ker(\tau_\bullet) = \ker(\epsilon_\bullet) \qquad\qquad \widetilde{\gamma}_\bullet \in \operatorname{coker}(\tau_\bullet) = \operatorname{coker}(\mu_\bullet)$$

sodass nach Lemma 3.4.6

$$0 \longrightarrow \overline{K}_\bullet \xrightarrow{\bar{\kappa}_\bullet} A_\bullet \xrightarrow{\epsilon_\bullet} \overline{D}_\bullet \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow \widetilde{D}_\bullet \xrightarrow{\mu_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\widetilde{\gamma}_\bullet} \widetilde{C}_\bullet \longrightarrow 0 \tag{3.17}$$

zwei kurze exakte Sequenzen in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ sind. Die Zerlegung sei außerdem so gewählt, dass

$$\overline{\kappa}_i = \kappa_i \text{ für } i = 1,2 \qquad \theta_2 = \mathrm{id}_{\overline{D}_2} = \mathrm{id}_{\widetilde{D}_2} \qquad \tilde{\gamma}_i = \gamma_i \text{ für } i = 2,3 \tag{3.18}$$

gilt, wobei wir nach Bemerkung 3.4.2 (4) und (10) die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{K}_3 \arrow[r, tail, "\iota"] \arrow[dr, "\overline{\kappa}_3"'] & K_3 \arrow[d, "\kappa_3"] \\ & A_3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, two heads, "\widetilde{\gamma}_1"] \arrow[dr, "\gamma_1"'] & \widetilde{C}_1 \arrow[d, "\pi"] \\ & C_1 \end{tikzcd} \tag{3.19}$$

erhalten.

Nun ist nach Proposition 3.4.4 $\mu_3 \in \mathrm{im}(\tau_3) = \ker(\mathrm{coker}(\tau_3))$, sodass wir $\theta_3 \circ \epsilon_3 \in \mathrm{coim}(\tau_3) = \mathrm{coker}(\ker(\tau_3))$ erhalten und daraus $\kappa_3 \in \ker(\tau_3) = \ker(\theta_3 \circ \epsilon_3)$ folgern. Insbesondere ist

$$0 \longrightarrow K_3 \xrightarrow{\kappa_3} A_3 \xrightarrow{\theta_3 \circ \epsilon_3} \widetilde{D}_3 \longrightarrow 0 \tag{3.20}$$

eine kurze exakte Sequenz. Dual zeigt sich die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow \overline{D}_1 \xrightarrow{\mu_1 \circ \theta_1} B_1 \xrightarrow{\gamma_1} C_1 \longrightarrow 0. \tag{3.21}$$

Mit (3.20) (resp. (3.21)) und jener kurzen exakten Sequenz, die der dritten Zeile in (3.17) links (resp. der ersten Zeile in (3.17) rechts) entspricht, können wir unter Berücksichtigung von (3.19) Korollar 3.4.9 anwenden und erhalten die exakte Sequenz

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \overline{K}_3 \xrightarrow{\iota} K_3 \xrightarrow{\overline{\delta}} \overline{D}_3 \xrightarrow{\theta_3} \widetilde{D}_3 \longrightarrow 0 \\ \text{resp.} \\ 0 \longrightarrow \overline{D}_1 \xrightarrow{\theta_1} \widetilde{D}_1 \xrightarrow{\widetilde{\delta}} C_1 \xrightarrow{\pi} \widetilde{C}_1 \longrightarrow 0. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Betrachten wir nun auch den Morphismus $\theta_\bullet : \overline{D}_\bullet \longrightarrow \widetilde{D}_\bullet$, dann ist auf Grund von (3.18) einerseits $\overline{D}_2 = \widetilde{D}_2$ und andererseits $\widetilde{d}_1 \circ \theta_1 = \overline{d}_1$, womit wiederum die Voraussetzungen für Korollar 3.4.9 erfüllt sind und wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \overline{D}_1 \xrightarrow{\theta_1} \widetilde{D}_1 \xrightarrow{\delta'} \overline{D}_3 \xrightarrow{\theta_3} \widetilde{D}_3 \longrightarrow 0.$$

erhalten. Zusammen mit (3.22) gilt daher $\ker(\delta') = \ker(\widetilde{\delta})$ und $\mathrm{coker}(\delta') = \mathrm{coker}(\overline{\delta})$. Mit Hilfe von Satz 3.3.24 und einer, nach ihm fix gewählten Faktorisierung von $\delta' = m' \circ e'$, erhalten wir ebensolche für $\widetilde{\delta} = m \circ e'$ und $\overline{\delta} = m' \circ e$. Nun ist es ein Leichtes, die Sequenz

$$0 \longrightarrow \overline{K}_3 \xrightarrow{\iota} K_3 \xrightarrow{\delta := m \circ e} C_1 \xrightarrow{\pi} \widetilde{C}_1 \longrightarrow 0$$

als eine exakte zu erkennen und mittels Bemerkung 3.3.25 den Beweis für den Spezialfall abzuschließen.

Der allgemeine Fall lässt sich, durch Faktorisierung der Morphismen (f_1, g_1) und (f_2, g_2) nach Korollar 3.3.29, auf den eben gezeigten Spezialfall zurückführen. □

3.5 Homologie– und Kohomologieobjekte

Ist $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ eine in A' exakte Sequenz, dann gilt insbesondere $f' \circ f = 0$. Setzen wir umgekehrt anstelle der Exaktheit nur $f' \circ f = 0$ voraus, können wir uns die Frage stellen, in wie "weit" die Sequenz von der Exaktheit bei A' abweicht. Wir formulieren:

Proposition 3.5.1. *Seien $f : A \longrightarrow A'$ und $f' : A' \longrightarrow A''$ Morphismen einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ sodass $f' \circ f = 0$ gilt. Dann existiert zu einem Bild $m : I \longrightarrow A'$ von f und einem Kern $k : K \longrightarrow A'$ von f' genau ein Monomorphismus $\iota : I \longrightarrow K$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "e"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & I \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, dotted, "\iota"'] & A' \arrow[r, "f'"] & A'' \\ & K \arrow[ur, tail, "k"'] & & \end{tikzcd} \tag{3.23}$$

Ist $h : K \longrightarrow H$ ein Kokern von ι, so bezeichnen wir H als ein Homologieobjekt der Null–Sequenz $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$. Es ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Nach Proposition 3.3.24 existieren Morphismen $A \xrightarrow{e} I \xrightarrow{m} A'$ mit m moni und e epi in $\mathcal{A}$ sodass $m \circ e = f$ gilt. Außerdem ist m ein Bild von f. Nun gilt $0 = g \circ f = (f' \circ m) \circ e$ und da e rechtskürzbar ist, erhalten wir $f' \circ m = 0$. Folglich faktorisiert $k : K \longrightarrow A'$, ein Kern von f', eindeutig m und wir erhalten den gesuchten Morphismus $\iota : I \longrightarrow K$ mit $m = k \circ \iota$, welcher nach Bemerkung 3.1.23 (4) moni ist. Mit $h : K \longrightarrow H$ legen wir einen Kokern von ι fest. H ist nach Bemerkung 3.3.3 (7) b.a.I.[6] unabhängig von der Wahl von h.

Wählen wir einen anderen Kern $\bar{k} : \bar{K} \longrightarrow A'$ zu f', dann erhalten wir einen neuen Morphismus $\bar{\iota} : I \longrightarrow \bar{K}$, der $m = \bar{k} \circ \bar{\iota}$ erfüllt und einen zugehörigen Kokern $\bar{h} : \bar{K} \longrightarrow \bar{H}$. Nach Bemerkung 3.3.3 (4) existiert ein Isomorphismus γ mit $\bar{k} \circ \gamma = k$ und auf Grund der Eindeutigkeit von $\bar{\iota}$ gilt auch $\gamma \circ \iota = \bar{\iota}$. Laut Bemerkung 3.3.27

[6] bis auf Isomorphie

erhalten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{id}_I"'] & K \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & H \arrow[d, dotted, "\cong"] \\ I \arrow[r, "\bar{\iota}"] & \bar{K} \arrow[r, "\bar{h}"] & \bar{H} \end{tikzcd}$$

Insbesondere sind H und $\bar{H}$ isomorphe Objekte sodass H b.a.I. unabhängig von der Wahl des Kerns k ist.

Dass H auch b.a.I. unabhängig von der Wahl des Bildes m ist, folgt aus Lemma 3.3.22 (i): $\mathrm{coker}(\iota) = \mathrm{coker}(\iota \circ e)$ und $\iota \circ e$ ist allein durch die eindeutige Faktorisierung von f durch k bestimmt. □

Bemerkung 3.5.2. (1) Definitionsgemäß ist die Sequenz $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ in obiger Proposition genau dann bei A' exakt, wenn $k \equiv m$ ist, also genau dann, wenn ι ein Isomorphismus bzw. dessen Kokern $h : K \longrightarrow H$ ein Null–Morphismus bzw. das Ziel H ein Null–Objekt ist. Damit können beide, h und H, gleichermaßen als "Maß für die Abweichung der Sequenz von der Exaktheit" verstanden werden.

(2) Besonders für die Null–Sequenz $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{0} 0$ erhalten wir ein zugehöriges Homologieobjekt H durch Bildung eines Kokerns $c : A' \longrightarrow H$ von f: Denn wählen wir $\mathrm{id}_{A'}$ als Kern von $g = 0$, dann ist $i = m$ und aus Lemma 3.3.22 (i) folgt schlussendlich $c \in \mathrm{coker}(\iota) = \mathrm{coker}(\iota \circ e) = \mathrm{coker}(f)$.

(3) Zur Definition eines Homologieobjekts in Proposition 3.5.1 existiert eine dazu duale Version: Sei wiederum $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ eine Null–Sequenz. Dann lässt sich zu einem gewählten Kobild $e' : A' \longrightarrow I'$ von f' und einem gewählten Kokern $c : A' \longrightarrow C$ von f eindeutig ein Epimorphismus $\pi : C \longrightarrow I'$ finden, welcher folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & A' \arrow[r, two heads, "e'"'] \arrow[rr, bend left, "f'"] \arrow[dr, two heads, "c"'] & I' \arrow[r, tail, "m'"'] & A'' \\ & & C \arrow[u, dotted, two heads, "\pi"'] & \end{tikzcd} \tag{3.24}$$

kommutativ ergänzt. Die Quelle eines Kerns $k' : H' \longrightarrow C$ von π bezeichnen wir als ein Kohomologieobjekt der Nullsequenz $f' \circ f$, es ist (b.a.I) eindeutig bestimmt. Die Aussagen sind dual zu Proposition 3.5.1 zu beweisen. Doch haben wir mit den Kohomologieobjekten im Grunde genommen nichts Neues gewonnen, wie nächster Punkt zeigt:

(4) Jedes Homologieobjekt einer Null–Sequenz $f' \circ f$ ist zugleich ein Kohomologieob-

jekt derselben, und umgekehrt. Dazu betrachten wir folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & H \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "m"] \arrow[d] & A' \arrow[r, "c"] \arrow[d, "e'"'] & C \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\pi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & I' \arrow[r, equal] \arrow[d] & I' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dessen Morphismen aus den Diagrammen (3.23) und (3.24) stammen und dessen ersten beiden Spalten und sämtlichen Zeilen exakt sind. Nach Lemma 3.4.6 lässt sich letztere Spalte zu einer kurzen exakten Sequenz ergänzen und da die Faktorisierung von e' durch c eindeutig ist, ist der darin auftretende Epimorphismus $C \longrightarrow I'$ gleich π. Somit ist H zugleich ein Kohomologieobjekt der Null–Sequenz $f' \circ f$.

Definition 3.5.3. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $(C_\bullet, d_\bullet) \in \mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ ein $\mathcal{A}$–Kettenkomplex. Dann definieren wir das n–te Homologieobjekt $H_n(C_\bullet)$ von $(C_\bullet, d_\bullet)$ nach Proposition 3.5.1 durch ein Homologieobjekt der Null–Sequenz

$$C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} .$$

In den Kategorien $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$, $\mathbf{Mod}_{\mathbf{R}}$ und $\mathbf{Ab}$ ist $H_n(C_\bullet) \cong \ker d_n / \operatorname{im} d_{n-1}$ sodass der oben definierte Homologiebegriff mit dem in diesen Kategorien ursprünglich definierten (b.a.I.) übereinstimmt.

Proposition 3.5.4 ([Rot, Prop. 6.8])**.** *Jeder Morphismus $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ von Kettenkomplexen induziert auf dem n–ten Homologieobjekt einen natürlichen $\mathcal{A}$–Morphismus*

$$H_n(f_\bullet) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(C'_\bullet)$$

sodass wir für jedes $n \in \mathbb{Z}$ einen additiven Funktor $H_n : \mathbf{Kom}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ erhalten, der bis auf natürliche Isomorphie wohldefiniert ist.

Beweis. Wir betrachten $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ als einen Kettenkomplex über $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$: Die senkrechten Pfeile $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$ in (3.25) sind Objekte und die jeweils übereinanderliegenden Pfeilpaare (d_n, d'_n) Morphismen in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$ sodass die gesamte Sequenz $(f_\bullet, (d, d')_\bullet)$

einen Kettenkomplex in $\mathbf{Kom}(\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2})$ bildet.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d'_{n+2}"] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{3.25}
$$

Die n–te Homologie $H_n(f_\bullet) \in \mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$ dieses Komplexes ist der gesuchte $\mathcal{A}$–Morphismus.
Um sich mehr Einblick zu verschaffen, betrachten wir folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "e_n"'] \arrow[rr, bend left, "d_{n+1}"] \arrow[ddd, "f_{n+1}"'] & I_n \arrow[r, "m_n"'] \arrow[d, "i_n"] \arrow[ddd, dotted, bend right, "\bar{f}_n"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[ddd, bend left, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[ddd, "f_{n-1}"] & \cdots \\
 & & K_n \arrow[ur, "k_n"] \arrow[r, "c_n"] \arrow[d, dotted, "\tilde{f}_n"] & H_n(C_\bullet) \arrow[d, dotted, "H_n(f_\bullet)"'] & & \\
 & & K'_n \arrow[r, "c'_n"] \arrow[dr, "k'_n"'] & H_n(C'_\bullet) & & \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "e'_n"] \arrow[rr, bend right, "d'_{n+1}"'] & I'_n \arrow[r, "m'_n"] \arrow[u, "i'_n"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{3.26}
$$

Die punktierten Pfeile erhalten wir durch anwenden der Beweisschritte aus Proposition 3.5.1 auf die Null–Sequenz

$$
f_{n+1} \xrightarrow{(d,d')_{n+1}} f_n \xrightarrow{(d,d')_n} f_{n-1} \,. \tag{3.27}
$$

Die Ausarbeitung der Einzelheiten, die aus $H_n : \mathbf{Kom}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ einen additiven Funktor machen, der bis auf natürliche Isomorphie eindeutig ist, sei dem Leser überlassen. $\square$

Bemerkung 3.5.5. Anstelle eines Homologieobjekts der Nullsequenz (3.27) im obigen Beweis lässt sich der Morphismus $H_n(f_\bullet)$ auch durch ein Kohomologieobjekt von (3.27) finden.

Der wesentliche Beweisschritt des Satzes 1.3.1 bestand darin, aus der exakten Sequenz von linearen Kettenkomplexen (1.16) die lange exakte Sequenz der zugehörigen Homologiegruppen zu konstruieren. Er ist generell für exakte Sequenz von Kettenkomplexen über R–Moduln gültig. Eine Verallgemeinerung dieses Beweisschritts auf abelsche Kategorien $\mathcal{A}$ gibt folgender

Satz 3.5.6 ([Rot, Thm. 6.10]). *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und*

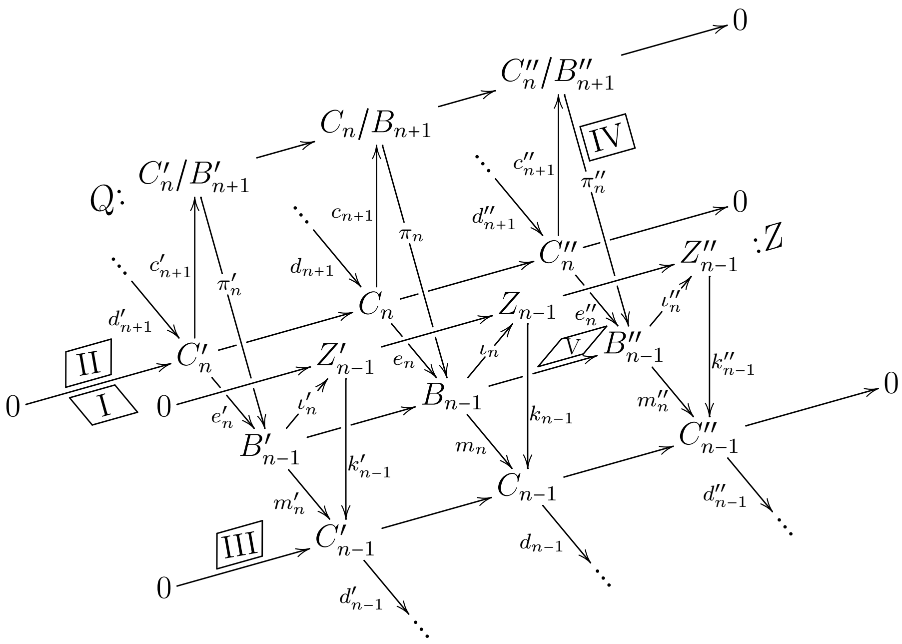
$$
0 \longrightarrow C'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C''_\bullet \longrightarrow 0
$$

eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen in $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$. *Dann existiert eine Familie von Morphismen* $\delta_n : H_n(C''_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(C'_\bullet)$ *in* $\mathcal{A}$, *sodass*

$$\cdots \xrightarrow{H_{n+1}(g)} H_{n+1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(C'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} \cdots$$

eine lange exakte Sequenz bildet.

Beweis. Für ein $n \in \mathbb{Z}$ zerlegen wir d'_n, d_n und d''_n nach Satz 3.3.24 in ihr jeweiliges Bild und Kobild sodass wir nach Korollar 3.3.29 die kommutative Diagramm–Ebene *I* in (3.28) erhalten. Bezeichnet $c^{\cdot}_{n+1}$ einen Kokern von $d^{\cdot}_{n+1}$ so lässt sich Lemma 3.3.26 zufolge die kommutative Diagramm–Ebene *II* in (3.28) bilden. Auf Grund von $0 = d^{\cdot}_n \circ d^{\cdot}_{n+1} = m^{\cdot}_n \circ e^{\cdot}_n \circ d^{\cdot}_{n+1}$ und $m^{\cdot}_n$ moni folgt $0 = e^{\cdot}_n \circ d^{\cdot}_{n+1}$ und daher die Existenz von Morphismen $\pi^{\cdot}_n$ mit $\pi^{\cdot}_n \circ c^{\cdot}_{n+1} = e^{\cdot}_n$. Die Kommutativität der beiden Rechtecke in der Diagramm–Ebene *IV* ist wiederum durch Lemma 3.3.26 belegt. Beachten wir noch das Schlangen–Lemma 3.4.11, so erkennen wir die Rechts–Exaktheit der Zeile *Q*.



(3.28)

Dual erhalten wir die Diagramm–Ebenen *III* und *V*, die (3.28) kommutativ ergänzen und gemeinsam die links–exakte Zeile *Z* enthalten.

Ziehen wir zu den Kompositionen $\iota^{\cdot}_n \circ \pi^{\cdot}_n$ jeweils einen Kern $\bar{h}^{\cdot}_n$ und einen Kokern $h^{\cdot}_n$ heran und beachten

$$\bar{h}^{\cdot}_n \in \ker(\iota^{\cdot}_n \circ \pi^{\cdot}_n) \overset{3.3.22}{=} \ker(\pi^{\cdot}_n) \qquad h^{\cdot}_n \in \operatorname{coker}(\iota^{\cdot}_n \circ \pi^{\cdot}_n) \overset{3.3.22}{=} \operatorname{coker}(\iota^{\cdot}_n),$$

dann tauchen $H_{n-1}(C^{\cdot}_\bullet)$ nach Proposition 3.5.1 als Ziel von $h^{\cdot}_n : Z^{\cdot}_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C^{\cdot}_\bullet)$

und $H_n(C^\cdot_\bullet)$ nach Bemerkung 3.5.2 als Quelle von $\bar{h}^\cdot_n : H_n(C^\cdot_\bullet) \longrightarrow C^\cdot_n / B^\cdot_{n+1}$ wieder auf. Somit erhalten wir mittels dem Schlangen–Lemma 3.4.11 die exakte Sequenz

$$H_n(C'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C'_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(f_\bullet)} H_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(g_\bullet)} H_{n-1}(C''_\bullet).$$

Dass dabei die Morphismen $H_n(f_\bullet)$, $H_n(g_\bullet), \ldots$ etc. auftreten, lässt sich anhand des Beweises von Proposition 3.5.1 und der Bemerkung 3.5.5 leicht erklären.

Also existiert zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ ein Morphismus $\delta_n : H_n(C''_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(C'_\bullet)$, sodass die soeben angeführte Sequenz exakt ist. In der Gesamtheit betrachtet, führt uns dies zu der postulierten langen exakten Sequenz. □

Die Morphismen $\delta_p : H_p(C'') \longrightarrow H_{p-1}(C')$ aus obigen Satz werden *Verbindungs–* oder auch *Einhängungshomomorphismen* genannt. Sie hängen von der jeweils gegebenen exakten Sequenz von Kettenkomplexen ab, besitzen aber eine Eigenschaft, die sie zu einer natürlichen Transformation machen:

Satz 3.5.7 (Zusatz zu Satz 3.5.6). *Jedes kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r, "\iota^C_\bullet"] \arrow[d, "f'_\bullet"] & C_\bullet \arrow[r, "\pi^C_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & C''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f''_\bullet"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D'_\bullet \arrow[r, "\iota^D_\bullet"] & D_\bullet \arrow[r, "\pi^D_\bullet"] & D''_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.29}$$

führt zu einer exakten kommutativen Leiter

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "H_{p+1}(g)"] & H_{p+1}(C''_\bullet) \arrow[r, "\delta_{p+1}"] \arrow[d, "H_{p+1}(f')"'] & H_p(C'_\bullet) \arrow[r, "H_p(f)"] \arrow[d, "H_p(f')"'] & H_p(C_\bullet) \arrow[r, "H_p(g)"] \arrow[d, "H_p(f)"'] & H_p(C''_\bullet) \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "H_p(f'')"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "H_{p+1}(g)"] & H_{p+1}(D''_\bullet) \arrow[r, "\delta_{p+1}"] & H_p(D'_\bullet) \arrow[r, "H_p(f)"] & H_p(D_\bullet) \arrow[r, "H_p(g)"] & H_p(D''_\bullet) \arrow[r, "\delta_p"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Beweis. Indem man (3.29) als eine kurze exakte Sequenz in $\mathbf{Kom}(\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2})$ ansieht, folgt die Existenz der exakten kommutativen Leiter aus dem vorherigen Satz 3.5.6. □

Korollar 3.5.8. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K. Dann induziert jedes kommutative Diagramm*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\iota^M"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "\pi^M"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\iota^N"] & N \arrow[r, "\pi^N"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}}$*, dessen Zeilen exakt sind, eine exakte kommutative Leiter der Form*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "H_{p+1}(g)"] & H_{p+1}(\mathfrak{g}, M'') \arrow[r, "\delta_{p+1}"] \arrow[d, "H_{p+1}(\mathfrak{g},f'')"'] & H_p(\mathfrak{g}, M') \arrow[r, "H_p(f)"] \arrow[d, "H_p(\mathfrak{g},f')"'] & H_p(\mathfrak{g}, M) \arrow[r, "H_p(g)"] \arrow[d, "H_p(\mathfrak{g},f)"'] & H_p(\mathfrak{g}, M'') \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "H_p(\mathfrak{g},f'')"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "H_{p+1}(g)"] & H_{p+1}(\mathfrak{g}, N'') \arrow[r, "\delta_{p+1}"] & H_p(\mathfrak{g}, N') \arrow[r, "H_p(f)"] & H_p(\mathfrak{g}, N) \arrow[r, "H_p(g)"] & H_p(\mathfrak{g}, N'') \arrow[r, "\delta_p"] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

3.6 Auflösungen

Definition 3.6.1. Sei $\mathcal{A}$ eine (prä–)abelsche Kategorie und A ein Objekt in $\mathcal{A}$. Dann heißt ein $\mathcal{A}$–Komplex $(P_\bullet, d_\bullet)$ mit $P_i = 0$ für $i < 0$ zusammen mit einem (konormalen) $\mathcal{A}$–Morphismus $\epsilon : P_0 \longrightarrow A$ eine *(konormale) Links–Auflösung* von A, falls die lange Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

exakt (und koexakt) ist. Sie heißt *(konormale) projektive Auflösung*, falls sämtliche P_i projektiv in $\mathcal{A}$ sind.

Lemma 3.6.2. *In einer präabelschen Kategorie* $\mathcal{A}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Jedes Objekt besitzt eine konormale projektive Auflösung.

(ii) Jedes Objekt besitzt eine konormale projektive Erweiterung. Dh. zu jedem Objekt A *in* $\mathcal{A}$ *existiert ein projektives Objekt* P *und ein konormaler Morphismus* $\epsilon : P \longrightarrow A$.

Beweis. Die Richtung *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* ist trivial.

Sei also umgekehrt *(ii)* erfüllt und A ein beliebiges Objekt in $\mathcal{A}$. Angenommen, für ein $n \geq 0$ ist folgende exakte Sequenz gegeben

$$E_n : 0 \longrightarrow A_n \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

wobei sämtliche P_i's projektiv sind. Dann existiert nach Voraussetzung ein konormaler Epimorphismus $e_{n+1} : P_{n+1} \longrightarrow A_n$ mit projektivem P_{n+1}. Wir wählen einen Kern $k_{n+1} : A_{n+1} \longrightarrow P_{n+1}$ von e_{n+1}. Dann ist auf Grund von Proposition 3.3.23 die Sequenz

$$0 \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{k_{n+1}} P_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} A_n \longrightarrow 0$$

exakt und zusammen mit Bemerkung 3.3.25 auch deren Komposition mit E_n:

$$E_{n+1} : 0 \longrightarrow A_{n+1} \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Induktiv lässt sich somit aus $0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{id_A} A \longrightarrow 0$ mit $A_0 := A$ eine konormale projektive Auflösung von A konstruieren. $\square$

Korollar 3.6.3 ([W, Lem. 2.2.5])**.** *In einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ besitzt jedes Objekt genau dann eine projektive Auflösung, wenn $\mathcal{A}$ genug Projektive besitzt.*

Definition 3.6.4. Sei $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ die Kategorie der Kettenkomplexe über einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Zwei parallele Morphismen $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ in $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ heißen ketten–homotop, kurz $f \sim g$, falls Morphismen $h_i : C_i \longrightarrow C'_{i+1}$ in $\mathcal{A}$ existieren, sodass

$$f_i - g_i = h_{i+1} \circ d_i + d'_{i+1} \circ h_i$$

gilt.

Zwei Ketten–Komplexe $(C_\bullet, d_\bullet)$ und $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ in $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ heißen homotopie–äquivalent, falls Morphismen $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ und $f'_\bullet : C'_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ existieren, die $f'_\bullet \circ f_\bullet \sim \mathrm{id}_{C_\bullet}$ und $f_\bullet \circ f'_\bullet \sim \mathrm{id}_{C'_\bullet}$ erfüllen.

Lemma 3.6.5. *Seien $f_\bullet, \mathfrak{g}_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt für jedes $p \in \mathbb{Z}$:*

$$H_p(f_\bullet) = H_p(g_\bullet) : H_p(C_\bullet) \longrightarrow C'_\bullet.$$

Beweis. Sei $g_p = 0$ sodass $f_p = h_{p+1} \circ d_p - d'_{p+1} \circ h_p$ gilt. Aus dem kommutativen Diagramm (3.26) lesen wir heraus ($k_p \in \ker(d_p)$):

$$k'_p \circ \tilde{f}_p = f_p \circ k_p = -d'_{p+1} \circ h_p \circ k_p = -k'_p \circ \iota'_p \circ e'_p \circ h_p \circ k_p.$$

Weil k'_p linkskürzbar ist, folgt $\tilde{f}_p = -\iota'_p \circ e'_p \circ h_p \circ k_p$. Auf Grund von $c'_p \in \operatorname{coker}(\iota'_p)$ gilt daher $H_p(f_\bullet) \circ c_p = c'_p \circ \tilde{f}_p = 0$. Aus der Rechtskürzbarkeit von c_p folgt schlussendlich $H_p(f_\bullet) = 0$.

Der allgemeine Fall folgt nun aus der Additivität des Funktors H_p. □

Um später die universelle Eigenschaft projektiver (resp. injektiver) Objekte direkter anwenden zu können, ziehen wir folgende Verallgemeinerung dieser heran:

Proposition 3.6.6 ([V, Prop. 3.1.5])**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, P ein projektives Objekt in $\mathcal{A}$ und folgendes Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[ld, dotted, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$ gegeben, sodass die Zeile in B exakt ist und $g \circ \gamma = 0$ gilt. Dann existiert ein $\mathcal{A}$–Morphismus $\beta : P \longrightarrow A$ mit $f \circ \beta = \gamma$.

Beweis. Ist $k : K \longrightarrow B$ ein Kern von $g : B \longrightarrow C$, dann impliziert $g \circ \gamma = 0$ die Existenz eines Morphismus $\beta' : P \longrightarrow K$ mit $\gamma = k \circ \beta'$.

Da die Sequenz $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ in B exakt ist, gilt $\operatorname{im} f = \ker g$ und wir finden zu f die Zerlegung $A \xrightarrow{e} K \xrightarrow{k} B$. Da e epi und P projektiv ist, existiert ein Morphismus

$\beta : P \longrightarrow A$ mit $\beta' = e \circ \beta$. Insgesamt erhalten wir also das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[lld, "\beta"'] \arrow[ld, "\beta'"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\
A \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & K \arrow[r, "k"] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

und die Proposition ist gezeigt. □

Bemerkung 3.6.7. Proposition 3.6.6 gilt auch für präabelsche Kategorien, wenn man zusätzlich fordert: e ist Kobild von f (s. Proposition 3.3.23).

Eine wichtige Eigenschaft projektiver Auflösungen ist die der Liftbarkeit: Jedes $f : A \longrightarrow B$ lässt sich bis auf Homotopie eindeutig zu einer Ketten–Komplex–Abbildung von einer gewählten projektiven Auflösung von A, zu einer von B liften. Allgemeiner ist dies für jede beliebige (konormale) Links–Auflösung von B möglich:

Theorem 3.6.8 ([W, Thm. 2.2.6]). *Sei $\epsilon_A : P_\bullet \longrightarrow A$ eine projektive Auflösung von A und $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$. Dann existiert zu jeder konormalen Auflösung $\epsilon_B : Q_\bullet \longrightarrow B$ von B eine Kettenabbildung $f_\bullet : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ mit $f \circ \epsilon_A = \epsilon_B \circ f_0$, dh. wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f_2"'] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f_1"'] & P_0 \arrow[r, "\epsilon_A"] \arrow[d, dotted, "f_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "\epsilon_B"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $f_\bullet$ bis auf Ketten–Homotopie eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir werden zuerst mit Hilfe der universellen Eigenschaft der projektiven P_i's induktiv die Existenz einer Kettenabbildung $f_\bullet : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ mit $f \circ \epsilon_M = \epsilon_N \circ f_0$ nachweisen.

Da P_0 projektiv und ϵ_N epi ist, existiert ein $f_0 : P_0 \longrightarrow Q_0$ mit $f \circ \epsilon_M = \epsilon_N \circ f_0$. Nehmen wir nun an, für $i \leq n$ existieren $f_i : P_i \longrightarrow Q_i$ sodass das resultierende Leiter–Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, dotted, "f_{n+1}"'] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dann ist aber P_{n+1} projektiv, die Sequenz $Q_{n+1} \longrightarrow Q_n \longrightarrow Q_{n-1}$ exakt und für den Morphismus $f_n \circ d : P_{n+1} \longrightarrow Q_n$ gilt:

$$d \circ f_n \circ d = f_{n-1} \circ d \circ d = 0$$

Damit existiert aber gemäß Proposition 3.6.6 und Bemerkung 3.6.7 ein Morphismus $f_{n+1} : P_{n+1} \longrightarrow Q_{n+1}$ mit $d \circ f_{n+1} = f_n \circ d$.

Nun ist noch zu zeigen, dass $f_\bullet$ bis auf Ketten–Homotopie eindeutig bestimmt ist. Dazu nehmen wir an, $g_\bullet : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ sei eine weitere Kettenabbildung für die $\epsilon_N \circ g_0 = f \circ \epsilon_M$ gilt und setzen $h_\bullet := f_\bullet - g_\bullet$. Dann lässt sich induktiv eine Ketten–Kontraktion $s_\bullet : P_\bullet \longrightarrow Q_{\bullet+1}$ konstruieren: Für $n < 0$ ist P_n gleich dem Null–Objekt und folglich $s_n = 0$. Für $n = 0$ folgt aus P_0 projektiv, $Q_1 \to Q_0 \to N$ exakt und $\epsilon_N \circ h = \epsilon_N \circ (f_0 - g_0) = 0$ sowie durch anwenden von Proposition 3.6.6 die Existenz eines Morphismus $s_0 : P_0 \longrightarrow Q_1$ mit $h_0 = d \circ s_0 = d \circ s_0 + s_1 \circ d$. Sei nun $n > 0$ und nehmen wir an, für $0 < i < n$ sei bereits ein Morphismus $s_i : P_i \longrightarrow Q_{i+1}$ konstruiert, sodass

$$h_i = d \circ s_i + s_{i-1} \circ d \text{ für } 0 < i < n \tag{3.30}$$

gilt. Betrachten wir nun folgendes Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d"] \arrow[dl, dotted, "s_n"'] \arrow[d, "h_n"] \arrow[dr, phantom] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] \arrow[d, "h_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

und beachten, dass

$$\begin{aligned}
d \circ (h_n - s_{n-1} \circ d) &= h_{n-1} \circ d - (d \circ s_{n-1}) \circ d \\
&\overset{(3.30)}{=} h_{n-1} \circ d - (h_{n-1} - s_{n-2} \circ d) \circ d \\
&= 0
\end{aligned}$$

gilt, so existiert wiederum nach Proposition 3.6.6 ein Morphismus $s_n : P_n \longrightarrow Q_{n+1}$ mit $d \circ s_n = h_n - s_{n-1} \circ d$. □

Ist insbesondere $f = \mathrm{id}_M$ sowie $\epsilon_M : P_\bullet \longrightarrow M$ und $\epsilon'_M : P'_\bullet \longrightarrow M$ zwei projektive Auflösungen von M, dann erhalten wir nach obigen Theorem zwei Ketten–Komplex–Morphismen $f : P_\bullet \longrightarrow P'_\bullet$ und $f' : P'_\bullet \longrightarrow P_\bullet$ deren Kompositionen $f' \circ f$ und $f \circ f'$ wiederum Lifte von id_M sind. Auf Grund der Eindeutigkeit (bis auf Homotopie) folgt:

Korollar 3.6.9. *Je zwei (konormale) projektive Auflösungen eines Objektes sind homotopie–äquivalent.*

Proposition 3.6.10. *Besitzt die abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ genug Projektive, dann auch die Funktorkategorie $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$ (vgl. dazu [W, Ex. 2.3.7 u. Ex. 2.3.8]).*

Beweis. Zuerst zeigen wir: Sind P und Q projektive Objekte in $\mathcal{A}$, dann sind die Morphismen i_P, i_Q, welche von einem Koprodukt $(P \coprod Q, i_P, i_Q)$ von P und Q stammen, projektive Objekte in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$. Aus Gründen der Symmetrie weisen wir dies nur für i_P nach: Angenommen $(\tau_A, \tau_B) : i_P \longrightarrow f$ und $(\epsilon_A, \epsilon_B) : g \longrightarrow f$ sind Morphismen in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$, zweitere epi. Dann sind ϵ_A und ϵ_B Epimorphismen in $\mathcal{A}$ (siehe dazu Beweis zu Satz 3.3.28), womit Morphismen $\gamma_A : P \longrightarrow C$ und $\gamma'_B : Q \longrightarrow D$ existieren, welche das folgende Diagramm kommutativ erweitern:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[drr, "i_P"] \arrow[dd, "\tau_A"] \arrow[dddl, dotted, "\gamma_A"'] \arrow[ddl, phantom, "\mathrm{I}"] & & \\
& & & P\coprod Q \arrow[dd, "\tau_B"] \arrow[dddl, dotted, "\gamma_B"'] \arrow[dd, phantom, "\mathrm{II}"'] \\
& A \arrow[drr, "f"] & Q \arrow[ur, "i_Q"] \arrow[dd, dotted, "\gamma'_B"] & \\
C \arrow[ur, two heads, "\epsilon_A"'] \arrow[drr, "g"'] & & & B \\
& & D \arrow[ur, two heads, "\epsilon_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Aus der universellen Eigenschaft des Koprodukts folgt die Existenz eines Morphismus $\gamma_B : Q \longrightarrow D$, sodass sowohl $g \circ \gamma_A = \gamma_B \circ i_P$ als auch $\gamma_B \circ i_Q = \gamma'_B$ gilt. Erstere Gleichung bedeutet, dass (γ_A, γ_B) ein Morphismus in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$ bildet. Fehlt noch $\epsilon_\bullet \circ \gamma_\bullet = \tau_\bullet$ nachzuweisen und damit nur mehr die Kommutativität des Dreiecks II: Aus den beiden folgenden Ableitungen

$$\epsilon_B \circ \gamma_B \circ i_Q = \epsilon_B \circ \gamma'_B = \tau_B \circ i_Q \qquad \epsilon_B \circ \gamma_B \circ i_P = \epsilon_B \circ g \circ \gamma_A = f \circ \tau_A = \tau_B \circ i_P$$

erhalten wir auf Grund der Eindeutigkeit von τ_B die gesuchte Gleichung $\epsilon_B \circ \gamma_B = \tau_B$.

Ist nun $f : A \longrightarrow B$ ein beliebiges Objekt in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$, dann wählen wir zu A und B projektive Erweiterungen $\epsilon_A : P \longrightarrow A$ und $\epsilon'_B : Q \longrightarrow B$ in $\mathcal{A}$ und erhalten auf Grund der universellen Eigenschaft des Koprodukts $(P \coprod Q, i_P, i_Q)$ einen Morphismus $\epsilon_B : P \coprod Q \longrightarrow B$ mit $\epsilon_B \circ i_P = f \circ \epsilon_A$ und $\epsilon_B \circ i_Q = \epsilon'_B$. Damit haben wir nach erstere Gleichung einen Morphismus $\epsilon_\bullet : i_P \longrightarrow f$ in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$ konstruiert, der nach zweiterer Gleichung komponentenweise, und folglich in $\mathcal{A}^{\mathcal{I}_2}$ selbst, epi ist. □

Proposition 3.6.11. *Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug Projektiven, dann besitzt jedes Objekt in* $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ *eine konormale projektive Erweiterung.*

Beweis. Zuerst zeigen wir: Sind P und Q projektiv in $\mathcal{A}$, dann ist die exakte Sequenz

$$P_\bullet : \quad 0 \longrightarrow P \xrightarrow{i_P} P \bigoplus Q \xrightarrow{\pi_Q} Q \longrightarrow 0$$

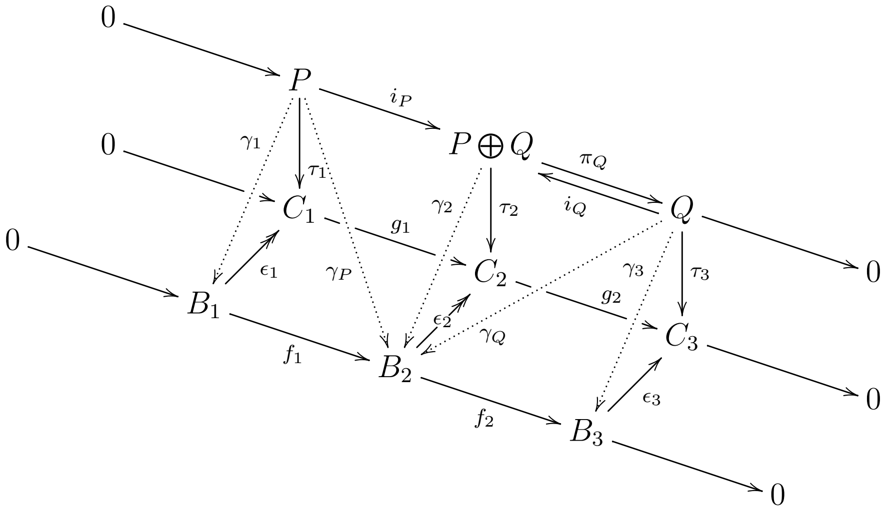
ein projektives Objekt in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$.

Dazu müssen wir zu einem in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ gegebenem Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
& P_\bullet \arrow[dl, dotted, "\gamma_\bullet"'] \arrow[d, "\tau_\bullet"] \\
B_\bullet \arrow[r, two heads, "\epsilon_\bullet"] & C_\bullet
\end{tikzcd}$$

die Existenz eines Morphismus $\gamma_\bullet : P_\bullet \longrightarrow B_\bullet$ nachweisen, welcher dieses Diagramm kommutativ komplettiert: Auf Grund der Voraussetzung ($\epsilon_\bullet$ epi), ist nach Bemerkung

3.4.2 (12) ϵ_2 ein Epimorphismus in $\mathcal{A}$. Daher existieren, wie im unteren Diagramm eingezeichnet, Morphismen γ_P und γ_Q mit $\epsilon_2 \circ \gamma_P = \tau_2 \circ i_P$ und $\epsilon_2 \circ \gamma_Q = \tau_2 \circ i_Q$. Proposition 3.3.19 zufolge findet sich nun ein Morphismus γ_2, der $\gamma_2 \circ i_P = \gamma_P$ und $\gamma_2 \circ i_Q = \gamma_Q$ erfüllt. Aus den letzten vier Gleichungen erhalten wir $\epsilon_2 \circ \gamma_2 \circ i_P = \tau_2 \circ i_P$ und $\epsilon_2 \circ \gamma_2 \circ i_Q = \tau_2 \circ i_Q$. Weil aber ein Morphismus, welcher als Quelle ein Koprodukt besitzt, eindeutig durch die Kompositionen mit den zugehörigen Injektionen bestimmt ist, folgt $\epsilon_2 \circ \gamma_2 = \tau_2$.



Definieren wir nun $\gamma_3 := f_2 \circ \gamma_2 \circ i_Q$, dann gilt offensichtlich $\gamma_3 \circ \pi_Q = f_2 \circ \gamma_2$ sowie

$$\epsilon_3 \circ \gamma_3 \circ \pi_Q = \epsilon_3 \circ f_2 \circ \gamma_2 \circ i_Q \circ \pi_Q = g_2 \circ \epsilon_2 \circ \gamma_2 \circ i_Q \circ \pi_Q = g_2 \circ \tau_2 \circ i_Q \circ \pi_Q = \tau_3 \circ \pi_Q$$

woraus, auf Grund der Rechtskürzbarkeit von π_Q, die Gleichung $\epsilon_3 \circ \gamma_3 = \tau_3$ folgt. Dh. mit γ_3 haben wir obiges Diagramm kommutativ erweitert. Nach Lemma 3.3.26 existiert ein γ_1, sodass das damit erhaltene Rechteck im obigen Diagramm kommutiert. Aus der Rechnung $g_1 \circ \epsilon_1 \circ \gamma_1 = \epsilon_2 \circ f_1 \circ \gamma_1 = \tau_2 \circ i_P = g_1 \circ \tau_1$ und der Links–Kürzbarkeit von g_1 folgt auch die Kommutativität des linken äußeren Dreiecks.

Nun suchen wir zu einem Objekt $A_\bullet : 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \longrightarrow 0$ in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ eine konormale projektive Erweiterung. Dazu wählen wir in $\mathcal{A}$ projektive Erweiterungen $\epsilon_1 : P_1 \longrightarrow A_1$ und $\epsilon_3 : P_3 \longrightarrow A_3$ von A_1 bzw. A_3. Da P_3 projektiv und f_2 epi ist, existiert ein Morphismus $\gamma_3 : P_3 \longrightarrow B$ mit $f_2 \circ \gamma_3 = \epsilon_3$. Zusammen mit $\gamma_1 := f_1 \circ \epsilon_1$ erhalten wir einen Morphismus ϵ_2, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet : 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "i_{P_1}"] \arrow[d, "\epsilon_1"'] \arrow[dr, "\gamma_1"] & P_1 \bigoplus P_3 \arrow[r, "\pi_{P_3}"] \arrow[d, dotted, "\epsilon_2"] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_3"] \arrow[dl, "\gamma_3"'] & 0 \\
A_\bullet : 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] & A_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Damit haben wir einen Morphismus $\epsilon_\bullet : P_\bullet \longrightarrow A_\bullet$ in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ gefunden, welcher nach obigen ein projektives Objekt als Quelle besitzt und nach Korollar 3.4.7 ein konormaler Epimorphismus ist. □

Dual zu den projektiven Auflösungen, existieren die sogenannten injektiven Auflösungen:

Definition 3.6.12. Sei $\mathcal{A}$ eine (prä–)abelsche Kategorie und A ein Objekt in $\mathcal{A}$. Dann heißt ein $\mathcal{A}$–Komplex $(I^\bullet, d^\bullet)$ mit $I^i = 0$ für $i < 0$ zusammen mit einem (normalen) $\mathcal{A}$–Morphismus $\eta : A \longrightarrow I^0$ eine (normale) Rechts–Auflösung von A, falls die lange Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

exakt (und koexakt) ist. Sie heißt injektive Auflösung, falls sämtliche I^i injektiv in $\mathcal{A}$ sind.

Die erhaltenen Ergebnisse über projektive Auflösungen lassen sich dualisieren (sowohl die Aussagen als auch ihre Beweise) sodass wir für die injektiven Auflösungen nur noch zusammenfassend notieren:

Lemma 3.6.13. *In einer präabelschen Kategorie $\mathcal{A}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Jedes Objekt besitzt eine normale injektive Auflösung.

(ii) Jedes Objekt besitzt eine normale injektive Erweiterung.

Korollar 3.6.14 ([W, Lem. 2.3.6])**.** *In einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ besitzt jedes Objekt genau dann eine injektive Auflösung, wenn $\mathcal{A}$ genug Injektive besitzt.*

Theorem 3.6.15. *Sei $\eta_B : B \longrightarrow J^\bullet$ eine injektive Auflösung von B und $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$. Dann existiert zu jeder (normalen) Auflösung $\eta_A : A \longrightarrow I^\bullet$ von A ein Koketten–Morphismus $f^\bullet : I^\bullet \longrightarrow J^\bullet$ mit $f^0 \circ \eta_M = \eta_N \circ f$, dh. wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f^0"'] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f^1"'] & I^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\eta_B"] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & J^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$f^\bullet$ ist bis auf Koketten–Homotopie eindeutig bestimmt.

Korollar 3.6.16. *Je zwei (normale) injektive Auflösungen eines Objektes sind kohomotopie–äquivalent.*

Nun sind wir ausreichend gewappnet, rechts– und links–derivierte Funktoren zu definieren.

3.7 δ–Funktoren und derivierte Funktoren

Unter einem (kovarianten) homologischen (resp. kohomologischen) δ–Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ versteht man eine Familie von additiven Funktoren $(T_p)_{p\geq 0}$, $T_p : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ (resp. $(T^p)_{p\geq 0}$, $T^p : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$) zusammen mit einer, zu jeder exakten Sequenz

$$A''' : 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0$$

definierten Familie von $\mathcal{B}$–Morphismen

$$\delta_p^{A'''} : T_p(A'') \longrightarrow T_{p-1}(A') \qquad \text{(resp.} \qquad \delta_p^{A'''} : T_p(A'') \longrightarrow T_{p+1}(A'))$$

sodass gilt: Jede exakte Sequenz A''' induziert, unter der Vereinbarung $T_p = 0$ (resp. $T^p = 0$) für $p < 0$, eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow T_{p+1}(A'') \xrightarrow{\delta_{p+1}^{A'''}} T_p(A') \xrightarrow{T_p(\iota)} T_p(A) \xrightarrow{T_p(\pi)} T_p(A'') \xrightarrow{\delta_p^{A'''}} T_{p-1}(A') \longrightarrow \cdots$$

(resp.

$$\cdots \longrightarrow T^{p-1}(A'') \xrightarrow{\delta_{p-1}^{A'''}} T^p(A') \xrightarrow{T^p(\iota)} T^p(A) \xrightarrow{T^p(\pi)} T^p(A'') \xrightarrow{\delta_p^{A'''}} T^{p+1}(A') \longrightarrow \cdots)$$

und zu jedem Morphismus $f''' : A''' \longrightarrow B'''$ kurzer exakter Sequenzen und jedem $p \geq 0$ bildet

$$\begin{tikzcd}
T_p(A'') \arrow[r, "\delta_p^{A'''}"] \arrow[d, "T_p(f'')"'] & T_{p-1}(A') \arrow[d, "T_{p-1}(f')"] \\
T_p(B'') \arrow[r, "\delta_p^{B'''}"'] & T_{p-1}(B')
\end{tikzcd} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{tikzcd}
T^p(A'') \arrow[r, "\delta_p^{A'''}"] \arrow[d, "T^p(f'')"'] & T^{p+1}(A') \arrow[d, "T^{p+1}(f')"] \\
T^p(B'') \arrow[r, "\delta_p^{B'''}"'] & T^{p+1}(B')
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm.

Die Definition kontravarianter homologischer (resp. kohomologischer) δ–Funktoren erhält man aus obiger Beschreibung der kovarianten δ–Funktoren, indem man die auftretenden Funktoren durch kontravariante additive Funktoren ersetzt und die Pfeilrichtungen der Morphismen aus $\mathcal{A}$ umkehrt.

δ–Funktoren, sowohl homologische als auch kohomologische, haben wir bereits kennengelernt: Die Familie der additiven Funktoren $(H_p)_{p\in\mathbb{Z}}$, $H_p : \mathbf{Kom}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ bildet einen homologische δ–Funktor (siehe Satz 3.5.7) wie auch die Funktorfamilie $(H_p(\mathfrak{g},-))_{p\in\mathbb{Z}}$, $H_p(\mathfrak{g},-) : \mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$ (siehe Korollar 3.5.8). Die kohomologischen Pendant's zu diesen beiden Funktorfamilien geben wiederum Beispiele zu kohomologische δ–Funktoren. Wir wollen nun einen Weg finden, homologische δ–Funktoren auf natürliche Weise zu konstruieren.

Sei $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien sodass $\mathcal{A}$

genug Projektive besitzt. Nach Lemma 3.6.2 finden wir zu jedem Objekt A in $\mathcal{A}$ eine projektive Auflösung $\epsilon_A : \mathcal{P}^A \longrightarrow A$ und legen mit $\mathcal{P}^- : Ob(\mathcal{A}) \longrightarrow Ob(\mathbf{Kom}(\mathcal{A}))$, $A \mapsto \mathcal{P}^A$, eine entsprechende Zuordnung fest (diese führt im Allgemeinen aber zu keinem Funktor). Dann definieren wir für jedes $p \geq 0$ folgende Objekte–Abbildung:

$$L_p^{\mathcal{P}} F : Ob(\mathcal{A}) \longrightarrow Ob(\mathcal{B}), \; L_p^{\mathcal{P}} F(A) := H_p(F(\mathcal{P}^A)).$$

Ist hingegen $f : A \longrightarrow A'$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$, dann induziert dieser nach Theorem 3.6.8 eine bis auf Homotopie eindeutige Kettenkomplexabbildung $f_\bullet : \mathcal{P}^A \longrightarrow \mathcal{P}^{A'}$ in $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$. Wenden wir darauf F als Funktor $\mathbf{Kom}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{Kom}(\mathcal{B})$ an und gehen zur Homologie über, so erhalten wir eine, nach Lemma 3.6.5 wohldefinierte Morphismen–Abbildung

$$L_p^{\mathcal{P}} F : Mor(\mathcal{A}) \longrightarrow Mor(\mathcal{B}), \; L_p^{\mathcal{P}} F(f) := H_p(F(f_\bullet)).$$

In den folgenden beiden Propositionen zeigen wir, dass es sich bei $L_p^{\mathcal{P}} F$ um einen Funktor handelt, der, grob gesprochen, unabhängig von der Wahl der Auflösungen $\mathcal{P}^-$ ist.

Proposition 3.7.1 ([Rot, Thm. 6.17])**.** *Für jedes $p \geq 0$ ist $L_p^{\mathcal{P}} F$ ein additiver Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.*

Beweis. Sei $p \geq 0$ fix gewählt. Sind $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Morphismen in $\mathcal{A}$ und $f_\bullet : \mathcal{P}^A \longrightarrow \mathcal{P}^B$, $g_\bullet : \mathcal{P}^B \longrightarrow \mathcal{P}^C$ zugehörige projektive Lifte. Dann ist trivialerweise $g_\bullet \circ f_\bullet$ ein projektiver Lift der Komposition $g \circ f$, also $(g \circ f)_\bullet \sim g_\bullet \circ f_\bullet$ und folglich gilt:

$$L_p^{\mathcal{P}} F(g \circ f) = L_p^{\mathcal{P}} F(g) \circ L_p^{\mathcal{P}} F(f).$$

Da $\mathrm{id}_{\mathcal{P}^A}$ ein projektiver Lift der Identität id_A ist und die Identität $\mathrm{id}_{H_p(F(\mathcal{P}))}$ auf der p–ten Kohomologie induziert, gilt auch $L_p^{\mathcal{P}} F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{L_p^{\mathcal{P}} F(A)}$. Damit ist $L_p^{\mathcal{P}} F$ ein Funktor. Dass sich die Additivität von F auf $L_p^{\mathcal{P}} F$ überträgt, zeigt sich völlig analog. □

Wählen wir nun eine andere Zuordnung $\mathcal{Q}^- : Ob(\mathcal{A}) \longrightarrow Ob(\mathbf{Kom}(\mathcal{A}))$ projektiver Auflösungen an die Objekte in $\mathcal{A}$, so gilt:

Proposition 3.7.2 ([Rot, Prop. 6.20])**.** *Für jedes $p \geq 0$ sind $L_p^{\mathcal{P}} F$ und $L_p^{\mathcal{Q}} F$ natürlich isomorph. Dh. es existieren Morphismen $\tau_{pA} = \tau_{pA}^{\mathcal{Q},\mathcal{P}} : L_p^{\mathcal{P}} F(A) \longrightarrow L_p^{\mathcal{Q}} F(A)$,* *sodass für jeden Morphismus $f : A \longrightarrow B$ in $\mathcal{A}$*

$$\begin{tikzcd} L_p^{\mathcal{P}}F(A) \arrow[r, "L_p^{\mathcal{P}}F(f)"] \arrow[d, "\tau_{pA}^{\mathcal{Q},\mathcal{P}}"', "\cong"] & L_p^{\mathcal{P}}F(B) \arrow[d, "\cong"', "\tau_{pB}^{\mathcal{Q},\mathcal{P}}"] \\ L_p^{\mathcal{Q}}F(A) \arrow[r, "L_p^{\mathcal{Q}}F(f)"'] & L_p^{\mathcal{Q}}F(B) \end{tikzcd} \tag{3.31}$$

ein kommutatives Diagramm bildet.

Beweis. Seien $t_\bullet^A : \mathcal{P}^A \longrightarrow \mathcal{Q}^A$ und $s_\bullet^A : \mathcal{Q}^A \longrightarrow \mathcal{P}^A$ projektive Lifte von id_A sowie $\tau_{pA}^{\mathcal{Q},\mathcal{P}} := F(t_\bullet^A)_{\star p}$ und $\tau_{pA}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}} := F(s_\bullet^A)_{\star p}$. Auf Grund von Theorem 3.6.8 gilt sowohl $s_\bullet^A \circ t_\bullet^A \sim \mathrm{id}_{\mathcal{P}^A}$ als auch $t_\bullet^A \circ s_\bullet^A \sim \mathrm{id}_{\mathcal{Q}^A}$. Daher ist für jedes $p \geq 0$ $\tau_{pA}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}} \circ \tau_{pA}^{\mathcal{Q},\mathcal{P}} = \mathrm{id}_{L_p^{\mathcal{P}}F(A)}$ und $\tau_{pA}^{\mathcal{Q},\mathcal{P}} \circ \tau_{pA}^{\mathcal{P},\mathcal{Q}} = \mathrm{id}_{L_p^{\mathcal{Q}}F(A)}$. Insbesondere sind $\tau_{pA}^{\mathcal{Q},\mathcal{P}} : L_p^{\mathcal{P}}F(A) \longrightarrow L_p^{\mathcal{Q}}F(A)$, für alle $p \geq 0$ und $A \in \mathcal{A}$, Isomorphismen.

Es bezeichnen $f_\bullet : \mathcal{P}^A \longrightarrow \mathcal{P}^B$ und $\bar{f}_\bullet : \mathcal{Q}^A \longrightarrow \mathcal{Q}^B$ projektive Lifte von $f : A \longrightarrow B$. Dann bilden auch $t_\bullet^B \circ f_\bullet, \bar{f}_\bullet \circ t_\bullet^A : \mathcal{P}^A \longrightarrow \mathcal{Q}^B$ projektive Lifte von f. Sie sind nach Theorem 3.6.8 homotopieäquivalent, was $\tau_{pB}^{\mathcal{Q},\mathcal{P}} \circ L_p^{\mathcal{P}}F(f) = L_p^{\mathcal{Q}}F(f) \circ \tau_{pA}^{\mathcal{Q},\mathcal{P}}$ zufolge hat. $\square$

Zu drei gewählten Zuordnungen projektiver Auflösungen $\mathcal{P}^-, \mathcal{Q}^-, \mathcal{R}^-$ zeigt sich wie im obigen Beweis $\tau_p^{\mathcal{R}\mathcal{Q}} \circ \tau_p^{\mathcal{Q},\mathcal{P}} = \tau_p^{\mathcal{R},\mathcal{P}}$. Dh. die natürlichen Isomorphien erfüllen eine Verträglichkeitsrelation die es erlaubt, die einzelnen Funktoren $L_p^{\mathcal{P}}F$, $L_p^{\mathcal{Q}}F, \ldots$ etc. eindeutig, dh. kanonisch miteinander zu identifizieren. Wir definieren daher:

Definition 3.7.3. Sei $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor und $\mathcal{P}^-$ eine Zuordnung projektiver Auflösungen. Für jedes $p \geq 0$ bezeichne $L_pF := L_p^{\mathcal{P}}F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ den p–ten *links–derivierten* Funktor von F. Er ist bis auf kanonische natürliche Isomorphie unabhängig von der Wahl der Zuordnung projektiver Auflösungen.

Bemerkung 3.7.4. (1) Für jedes projektive Objekt P in $\mathcal{A}$ gilt: $L_pF(P) = 0$ für alle $p > 0$.

(2) Für einen exakten, additiven Funktor $U : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ gilt: $L_0U \cong U$ und $L_pU = 0$ für $p > 0$.

(3) Darüber hinaus ist $L_p(U \circ F)$ natürlich isomorph zu $U \circ L_pF$ weil U mit dem Homologiefunktor H_p vertauscht.

Die Links–Derivation eines rechts–exakten Funktors ist von besonderem Interesse. Denn es gilt (s. [W, Ex. 2.4.1]):

Lemma 3.7.5. *Ist $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor dessen Quelle genug Projektive besitzt, dann existiert eine kanonische und natürliche Transformation $\tau : L_0F \longrightarrow F$. Ist F rechts–exakt, dann sind L_0F und F natürlich isomorph.*

Beweis. Sei $\mathcal{P}^-$ eine gewählte Zuordnung projektiver Auflösungen, A ein Objekt in $\mathcal{A}$ und $\epsilon_A : \mathcal{P}^A \longrightarrow A$ die entsprechende projektive Auflösung von A. Bezeichnet c_A einen Kokern von $F(P_1^A) \longrightarrow F(P_0^A)$, so ist nach Bemerkung 3.5.2 (2) das Ziel von c_A gleich $L_0^{\mathcal{P}}F(A)$. Außerdem faktorisiert c_A den Morphismus $F(\epsilon_A)$ eindeutig, dh. es existiert ein eindeutiger (und damit kanonischer) Morphismus $\tau_A^{\mathcal{P}}$ sodass $F(\epsilon_A) = \tau_A^{\mathcal{P}} \circ c_A$ gilt. Ist zusätzlich F rechtsexakt, so ist $F(\epsilon_A)$ selbst Kokern von $F(P_1^A) \longrightarrow F(P_0^A)$ und folglich $\tau_A^{\mathcal{P}}$ isomorph. Führt man zu einem weiteren Objekt A' aus $\mathcal{A}$ die eben beschriebenen Schritte aus und bezeichne $f : A \longrightarrow A'$ einen Morphismus in $\mathcal{A}$, so erhält man mit Hilfe des Theorems 3.6.8 folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & & L_0^{\mathcal{P}}F(A) \arrow[d, dotted, "\tau_A^{\mathcal{P}}"] \arrow[ddr, "L_0^{\mathcal{P}}F(f)"] & \\
 & & & F(A) \arrow[dddr, "F(f)"] & \\
 & & F(P_0^A) \arrow[uur, "c_A"] \arrow[ur, "F(\epsilon_A)"'] \arrow[dddr, "F(f_0)"'] & & L_0^{\mathcal{P}}F(A') \arrow[dd, dotted, "\tau_{A'}^{\mathcal{P}}"] \\
 & F(P_1^A) \arrow[ur] \arrow[dddr, "F(f_1)"'] & & & \\
 & & & & F(A') \\
 & & & F(P_0^{A'}) \arrow[uuur, "c_{A'}"] \arrow[ur, "F(\epsilon_{A'})"'] & \\
 & & F(P_1^{A'}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Die Kommutativität des schräg liegenden Rechtecks folgt aus Definitionsgründen von $L_0^{\mathcal{P}}F(f)$, die des senkrecht stehenden zeigt sich indem man $\tau_{A'}^{\mathcal{P}} \circ L_0^{\mathcal{P}}F(f) \circ c_A = F(f) \circ \tau_A^{\mathcal{P}} \circ c_A$ nachweist und die Rechtskürzbarkeit von c_A verwendet. Damit haben wir die Existenz einer kanonischen, natürlichen Transformation $\tau^{\mathcal{P}} : L_0^{\mathcal{P}}F \longrightarrow F$ gezeigt, die isomorph ist sofern F rechts–exakt ist. □

Satz 3.7.6 ([W, Thm. 2.4.6]). *Die Familie $(L_pF)_{p\geq 0}$ der links–derivierten Funktoren eines Funktors $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ abelscher Kategorien lässt sich kanonisch zu einem homologischen δ–Funktor komplettieren.*

Beweis. Sei $A^{|||} : 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Nach Proposition 3.6.11 und Lemma 3.6.2 existiert in $\mathbf{SeS}(\mathcal{A})$ eine projektive Auflösung $\epsilon_{A^{|||}} : Q_\bullet^{|||} \longrightarrow A^{|||}$ von $A^{|||}$. Da Q_p'', für jedes $p \geq 0$ ein projektives Objekt ist, splittet jede exakte Sequenz $Q_p^{|||}$. Nach Bemerkung 3.3.18 sind daher auch $F((Q)_p^{|||})$ für jedes $p \geq 0$ kurze exakte Sequenzen in $\mathcal{B}$, zusammen bilden sie eine in $\mathbf{Kom}(\mathcal{B})$:

$$F(Q_\bullet^{|||}) : 0 \longrightarrow F(Q_\bullet') \longrightarrow F(Q_\bullet) \longrightarrow F(Q_\bullet'') \longrightarrow 0.$$

Satz 3.5.6 zufolge existieren Morphismen $(\overline{\delta}_p)_{p\geq 0}$, sodass die obere Zeile in (3.32) eine lange exakte Sequenz bildet. Dabei sind $\mathcal{Q}'^-$, $\mathcal{Q}^-$ und $\mathcal{Q}''^-$ zu $\epsilon_{A^{|||}}$ passend gewählte

Zuordnungen projektiver Auflösungen. Die untere Zeile erhält man durch Hinzufügen der Isomorphismen aus Proposition 3.7.2 (vertikale Pfeile) und durch die eindeutige Wahl der δ_p's sodass die daraus entstehenden Rechtecke kommutativ sind.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L^{\mathcal{Q}''}_{p+1}F(A'') \arrow[r, "\overline{\delta}_{p+1}"] \arrow[d, "\tau^{\mathcal{P},\mathcal{Q}''}_{p+1A''}"'] & L^{\mathcal{Q}'}_{p}F(A') \arrow[r, "H_p(\iota_\bullet)"] \arrow[d, "\tau^{\mathcal{P},\mathcal{Q}'}_{pA'}"'] & L^{\mathcal{Q}}_{p}F(A) \arrow[r, "H_p(\pi_\bullet)"] \arrow[d, "\tau^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}_{pA}"'] & L^{\mathcal{Q}''}_{p}F(A'') \arrow[r, "\overline{\delta}_{p}"] \arrow[d, "\tau^{\mathcal{P},\mathcal{Q}''}_{pA''}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L^{\mathcal{P}}_{p+1}F(A'') \arrow[r, "\delta_{p+1}"'] & L^{\mathcal{P}}_{p}F(A') \arrow[r, "L^{\mathcal{P}}_{p}F(\iota)"'] & L^{\mathcal{P}}_{p}F(A) \arrow[r, "L^{\mathcal{P}}_{p}F(\pi)"'] & L^{\mathcal{P}}_{p}F(A'') \arrow[r, "\delta_{p}"'] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{3.32}$$

Zeigen wir nun auch die Kommutativität der restlichen Rechtecke, so folgt daraus bereits die Exaktheit der unteren Zeile: $H_p(\iota_\bullet)$ (resp. $H_p(\pi_\bullet)$) gleicht der Diagonale eines, dem Diagramm (3.31) entsprechenden Rechtecks, dh.

$$H_p(\iota_\bullet) = \tau^{\mathcal{Q},\mathcal{Q}'}_{pA'} \circ L^{\mathcal{Q}'}_{p}F(\iota) \qquad \big(\text{resp.} \qquad H_p(\pi_\bullet) = \tau^{\mathcal{Q}'',\mathcal{Q}}_{pA} \circ L^{\mathcal{Q}}_{p}F(\pi)\big).$$

Komposition beider Seiten der Identität mit $\tau^{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ (resp. $\tau^{\mathcal{P},\mathcal{Q}''}$) unter anschließender Verwendung der Proposition 3.7.2 zeigt die Kommutativität der restlichen Rechtecke in (3.32). An dieser Stelle ist aber noch nicht klar, dass die δ_p's kanonisch sind (dh. unabhängig von der anfangs gewählten Auflösung $Q^{|||}_\bullet$).

Um zu zeigen, dass die δ_p's natürlich und kanonisch sind, sei $f''' : A^{|||} \longrightarrow B^{|||}$ ein Morphismus exakter Sequenzen. Zu zwei projektiven Auflösungen $\epsilon_{A^{|||}} : P^{|||}_\bullet \longrightarrow A^{|||}$ und $\epsilon_{B^{|||}} : Q^{|||}_\bullet \longrightarrow B^{|||}$ existiert nach Satz 3.6.8 ein Morphismus $f^{'''}_\bullet : P^{|||}_\bullet \longrightarrow Q^{|||}_\bullet$ mit $f''' \circ \epsilon_{A^{|||}} = \epsilon_{B^{|||}} \circ f^{'''}_0$. Insbesondere erhalten wir folgendes kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P'_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f'_\bullet"'] & P_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f_\bullet"'] & P''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f''_\bullet"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q'_\bullet \arrow[r] & Q_\bullet \arrow[r] & B''_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Darauf Satz 3.5.7 angewendet erhalten wir eine lange exakte kommutative Leiter die, unter Einsatz der natürlichen Isomorphien aus Proposition 3.7.2, zu dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
L^{\mathcal{P}}_{p}F(A'') \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "L^{\mathcal{P}}_{p}F(f'')"'] & L^{\mathcal{P}}_{p-1}F(A') \arrow[d, "L^{\mathcal{P}}_{p-1}F(f')"] \\
L^{\mathcal{P}}_{p}F(B'') \arrow[r, "\delta_p"] & L^{\mathcal{P}}_{p-1}F(B').
\end{tikzcd} \tag{3.33}$$

führt. Damit ist die Natürlichkeit der δ_p's gezeigt. Dass sie auch kanonisch sind, folgt nun zugleich aus (3.33): Man setze $\mathrm{id}_{A^{|||}}$ für f''' ein und wähle unterschiedliche Auflösungen von $A^{|||}$. Die daraus gewonnenen Familien von Verbindungshomomorphismen sind dann nach (3.33) ident. $\square$

Angenommen $\mathcal{A}$ bezeichne eine abelsche Kategorie mit genug Injektiven. Dann existiert ein Abbildung $\mathcal{I}^- : Ob(\mathcal{A}) \longrightarrow Ob(\mathbf{Kom}(\mathcal{A}))$, die jedem Objekt in $A \in \mathcal{A}$ eine injektive Auflösung desselben zuordnet und definieren zu jedem additiven Funktor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ und jedem $p \geq 0$:

$$R^p_{\mathcal{I}}F : Ob(\mathcal{A}) \longrightarrow Ob(\mathcal{B}),\ R^p_{\mathcal{I}}F(A) := H^p(F(\mathcal{I}^A)).$$

Ein Morphismus $f : A \longrightarrow A'$ in $\mathcal{A}$ induziert nach Theorem 3.6.8 eine bis auf Homotopie eindeutige Kettenkomplexabbildung $f_\bullet : \mathcal{I}^A \longrightarrow \mathcal{I}^{A'}$ in $\mathbf{Kom}^{op}(\mathcal{A})$. Wenden wir darauf F als Funktor $\mathbf{Kom}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{Kom}(\mathcal{B})$ an und gehen zur Homologie über, so erhalten wir eine, nach Lemma 3.6.5 wohldefinierte Morphismen–Abbildung

$$R^p_{\mathcal{I}}F : Mor(\mathcal{A}) \longrightarrow Mor(\mathcal{B}),\ R^p_{\mathcal{I}}F(f) := H^p(F(f_\bullet)).$$

Dual zu den Propositionen 3.7.1 und 3.7.2 zeigt sich, dass $R^p_{\mathcal{I}}$ ein additiver Funktor ist, der bis auf kanonischer natürlicher Isomorphie unabhängig von der Wahl der gewählten injektiven Auflösungen ist. Wir definieren daher:

Definition 3.7.7. Sei $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor und $\mathcal{I}^-$ eine Zuordnung injektiver Auflösungen. Für jedes $p \geq 0$ bezeichne $R^pF := R^p_{\mathcal{I}}F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ den p–ten *rechts–derivierten* Funktor von F. Er ist bis auf kanonische natürliche Isomorphie eindeutig definiert.

Bemerkung 3.7.8. Vergleiche mit 3.7.4:

(1) Für jedes injektive Objekt I in $\mathcal{A}$ gilt: $R^pF(I) = 0$ für alle $p > 0$.

(2) Für einen exakten, additiven Funktor $U : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ gilt: $R^0U \cong U$ und $R^pU = 0$ für $p > 0$. Darüber hinaus ist $R^p(U \circ F)$ natürlich isomorph zu $U \circ R^pF$ weil U mit dem Kohomologiefunktor H^p vertauscht.

Entsprechend dem Lemma 3.7.5 und dem Satz 3.7.6 gelten folgende Resultate:

Lemma 3.7.9. *Ist $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor dessen Quelle genug Injektive besitzt, dann existiert eine kanonische und natürliche Transformation $\tau : F \longrightarrow R^0F$. Ist F links–exakt, dann sind R^0F und F natürlich isomorph.*

Satz 3.7.10. *Die Familie $(R^pF)_{p\geq 0}$ der rechts–derivierten Funktoren eines Funktors $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ abelscher Kategorien lässt sich kanonisch zu einen kohomologischen δ–Funktor komplettieren.*

Ihre Beweise sind dual zu führen (s. [W, Sec. 2.5]).

Ergänzend zu den kovarianten Funktoren wollen wir noch den Fall der kontravarianten Funktoren besprechen: Sei $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein kontravarianter additiver Funktor, dh. F ist zugleich ein kovarianter Funktor $\mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{B}$. Besitzt $\mathcal{A}$ genug Projektive und ist $\mathcal{P}^-$ eine Zuordnung projektiver Auflösungen, so ist diese zugleich eine Zuordnung injektiver Auflösungen in $\mathcal{A}^{op}$. Es lässt sich daher $R^p_{\mathcal{P}}F : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{B}$ für jedes $p \geq 0$ definieren und in weiterer Folge den kontravarianten, additiven Funktor $R^pF : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ welcher bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Falls F links–exakt ist, so gilt wiederum $R^0F \cong F$. Außerdem lässt sich die Funktorfamilie $(R^pF)_{p\geq 0}$ kanonisch zu einen kontravarianten kohomologischen δ–Funktor ergänzen.

Analog definiert sich die links–derivierte Funktorfamilie $(L_pF)_{p\geq 0}$ eines kontravarianten additiven Funktors $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ dessen Quelle genug Injektive besitzt.

Definition 3.7.11. Eine Familie von natürlichen Transformationen $\tau_p : S_p \longrightarrow T_p$ (resp. $\tau^p : S^p \longrightarrow T^p$), $p \geq 0$, nennen wir einen *Morphismus* $\tau_\bullet : S_\bullet \longrightarrow T_\bullet$ von homologischen (resp. einen Morphismus $\tau^\bullet : S^\bullet \longrightarrow T^\bullet$ von kohomologischen) δ–Funktoren zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, falls sie mit den δ_p's (resp. δ^p's) im folgenden Sinne verträglich sind: Zu jeder kurzen exakten Sequenz $A^{|||} : 0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{A}$ und jedem $p \geq 0$, bildet

$$\begin{tikzcd} S_p(A'') \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "\tau_{pA''}"'] & S_{p-1}(A') \arrow[d, "\tau_{p-1A'}"] \\ T_p(A'') \arrow[r, "\delta_p"] & T_{p-1}(A') \end{tikzcd} \quad \text{resp.} \quad \begin{tikzcd} S^p(A'') \arrow[r, "\delta^p"] \arrow[d, "\tau_{pA''}"'] & S^{p+1}(A') \arrow[d, "\tau_{p-1A'}"] \\ T^p(A'') \arrow[r, "\delta^p"] & T^{p+1}(A') \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm. Sind sämtliche natürliche Transformationen natürliche Isomorphismen, so sprechen wir von einem *Isomorphismus* von δ–Funktoren.

Einen homologischen (resp. kohomologischer) δ–Funktor $T_\bullet$ (resp. $T^\bullet$) nennen wir *universell*, falls zu jedem weiteren δ–Funktor $S_\bullet$ (resp. $S^\bullet$) und jeder natürlichen Transformation $\tau_0 : S_0 \longrightarrow T_0$ (resp. $\tau^0 : T^0 \longrightarrow S^0$) ein eindeutiger Morphismus $\tau_\bullet : S_\bullet \longrightarrow T_\bullet$ (resp. $\tau^\bullet : T^\bullet \longrightarrow S^\bullet$) von δ–Funktoren existiert, der τ_0 (resp. τ^0) erweitert.

Morphismen zwischen kontravarianten δ–Funktoren sowie universelle kontravariante δ–Funktoren sind entsprechend definiert.

Bemerkung 3.7.12. Ist $\tau : S_0 \longrightarrow T_0$ eine natürliche Isomorphie zwischen den Basisfunktoren zweier universeller homologischer δ–Funktoren $S_\bullet$ und $T_\bullet$, dann existiert zugleich eine Isomorphie von δ–Funktoren $\tau_\bullet : S_\bullet \longrightarrow T_\bullet$: τ und τ^{-1} induzieren eindeutige Morphismen von δ–Funktoren $\tau_\bullet$ und $\tau_\bullet^{-1}$. Ihre Kompositionen $\tau_\bullet^{-1} \circ \tau_\bullet$ und $\tau_\bullet \circ \tau_\bullet^{-1}$ sind Morphismen von δ–Funktoren über id_{S_0} bzw. id_{T_0}. Auf Grund der Eindeutigkeit folgt $\tau_\bullet^{-1} \circ \tau_\bullet = \mathrm{id}_{S_\bullet}$ und $\tau_\bullet \circ \tau_\bullet^{-1} = \mathrm{id}_{T_\bullet}$.

Satz 3.7.13 ([Rot, Thm.6.36])**.** *Ein homologischer δ–Funktor $(T_\bullet, \delta_\bullet)$ ist genau dann universell, wenn $T_p(P) = 0$ für jedes projektive Objekt P in $\mathcal{A}$ und $p \geq 1$ gilt.*

Ein kohomologischer δ–Funktor $(T^\bullet, \delta^\bullet)$ ist genau dann universell, wenn $T^p(I) = 0$ für jedes injektive Objekt I in $\mathcal{A}$ und $p \geq 1$ gilt.

Beweis. Wir zeigen nur Ersteres, der Beweis des kohomologischen Falles ist dual zu führen.

Sei $(S_\bullet, \overline{\delta}_\bullet)$ ein weiterer homologischer δ–Funktor und $\tau_0 : S_0 \longrightarrow T_0$ eine natürliche Transformation. Wir zeigen induktiv die Existenz natürlicher Transformationen $\tau_p : S_p \longrightarrow T_p$, die zusammen einen eindeutigen Morphismus $\tau_\bullet = (\tau_p)_{p \geq 0} : S_\bullet \longrightarrow T_\bullet$ von δ–Funktoren bilden.

Dazu sei $p > 0$ und für sämtliche $0 \leq q < p$ bereits b.a.I. eindeutige natürliche Transformationen $\tau_q : S_q \longrightarrow T_q$ bekannt, die mit den entsprechenden δ_q's kommutieren. Des Weiteren sei $f : A \longrightarrow A'$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$ gegeben. Wählen wir zu A und A' jeweils eine projektive Präsentation, dann existieren Morphismen in $\mathcal{A}$ (P projektiv), sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & P' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Da $S_\bullet$ und $T_\bullet$ homologische δ–Funktoren sind, existieren dazu zwei kommutative Leitern, die auf Grund der Induktionsvoraussetzung uns zu folgendem kommutativen Diagramm mit soliden Pfeilen führen:

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & S_p(A) \arrow[r] \arrow[d, "S_p(f)"] \arrow[dd, dashed, "\tau_{pA}"'] & S_{p-1}(K) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, "\tau_{p-1K}"'] & S_{p-1}(P) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd] & \cdots \\
 & \cdots \arrow[r] & S_p(A') \arrow[r] \arrow[dd, dashed, "\tau_{pA'}"] & S_{p-1}(K') \arrow[r] \arrow[dd, "\tau_{p-1K'}"] & S_{p-1}(P') \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & T_p(P) \arrow[r] \arrow[d] & T_p(A) \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "T_p(f)"'] & T_{p-1}(K) \arrow[r] \arrow[d] & T_{p-1}(P) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & T_p(P') \arrow[r] & T_p(A') \arrow[r, "\delta'_p"'] & T_{p-1}(K') \arrow[r] & T_{p-1}(P') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nun ist aber nach Voraussetzung $T_p(P) = 0 = T_p(P')$ und damit sind die Verbindungshomomorphismen δ_p, δ'_p Kerne — sie garantieren die Existenz von Morphismen τ_{pA} und $\tau_{pA'}$, die die Rück- resp. Vorderseite kommutativ ergänzen und zwar unabhängig von f. Dass die dabei entstandene linke Seitenfläche ebenfalls kommutativ ist, folgt aus der, mittels Diagrammjagd erhaltenen Gleichung

$$\delta'_p \circ \tau_{pA'} \circ S_p(f) = \delta'_p \circ T_p(f) \circ \tau_{pA}$$

und der Tatsache, dass δ'_p als Kern linkskürzbar ist. Dies bedeutet τ_p ist eine natürlich Transformation.

Speziell für $f = \mathrm{id}_A$ zeigt sich auch, dass τ_{pA} unabhängig von der Wahl der projektiven Präsentation von A eindeutig definiert ist.

Ist nun $A^{|||} : 0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ eine beliebige kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$, dann ist noch zu zeigen, dass τ_p mit den dazu entsprechend auftretenden δ_p's kommutiert. Dazu wählen wir eine projektive Präsentation von A'' und ergänzen diese, zusammen mit der kurzen exakten Sequenz $A^{|||}$, zu einen Morphismus kurzer exakter Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "k"'] & P \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_{A''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Zeichnen wir dazu das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & S_{p-1}(K) \arrow[dd, "\tau_{p-1K}"'] \arrow[ddr, "S_{p-1}(k)"] & \\
S_p(A'') \arrow[urr, "\delta_p"] \arrow[dd, "\tau_{pA''}"'] \arrow[ddr, equal] & & & \\
 & & T_{p-1}(K) \arrow[ddr, "T_{p-1}(k)"] & S_{p-1}(A') \arrow[dd, "\tau_{p-1A'}"] \\
T_p(A'') \arrow[urr, "\delta_p"] \arrow[ddr, equal] & S_p(A'') \arrow[urr, "\delta_p"] \arrow[dd, "\tau_{pA''}"] & & \\
 & & & T_{p-1}(A') \\
 & T_p(A'') \arrow[urr, "\delta_p"'] & &
\end{tikzcd}$$

so besteht dieses aus einer kommutativen Boden- und Deckfläche ($T_\bullet$ und $S_\bullet$ sind homologische δ–Funktoren), einer kommutativen linken und rechten Seitenfläche (τ_p und τ_{p-1} sind natürliche Transformationen) und einer kommutativen Rückfläche (nach obiger Konstruktion der natürlichen Transformation τ_p). Mittels Diagrammjagd zeigt sich schlussendlich auch die Kommutativität der Vorderseite des Kubus. $\square$

Korollar 3.7.14. *Sei $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein kovarianter (resp. kontravarianter) additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien.*

(i) Besitzt $\mathcal{A}$ genug Projektive (resp. Injektive), so bildet $(L_\bullet F, \delta_\bullet)$ aus Satz 3.7.6 einen kovarianten (resp. kontravarianten) universellen homologischen δ–Funktor.

(ii) Besitzt $\mathcal{A}$ genug Injektive (resp. Projektive), so bildet $(R^\bullet F, \delta^\bullet)$ aus Satz 3.7.10 einen kovarianten (resp. kontravarianten) universellen kohomologischen δ–Funktor.

Bemerkung 3.7.15. Sind $S_\bullet, T_\bullet : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ universelle homologische δ–Funktoren und $\tau_0 : S_0 \longrightarrow T_0$ eine natürliche Transformation, dann lässt sich der δ–Morphismus $\tau_\bullet : S_\bullet \longrightarrow T_\bullet$ folgendermaßen konstruieren: Man wähle zu jedem Objekt $A \in \mathcal{A}$ eine projektive Auflösung $\epsilon_A : (P_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow A$ und bilde dazu den Morphismus von Kettenkomplexen $S_0(P_\bullet) \longrightarrow T_0(P_\bullet)$. Der in der p–ten Homologie induzierte Morphismus $H_p(S_0(P_\bullet)) \longrightarrow H_p(T_0(P_\bullet))$ ist (bis auf kanonische Isomorphie) der gesuchte Morphismus $\tau_{pA} : S_p(A) \longrightarrow T_p(A)$.

Definition 3.7.16. Sei $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. Einen (universellen) homologischen (resp. kohomologischen) δ–Funktor $(T_\bullet, \delta_\bullet)$ (resp. $(T^\bullet, \delta^\bullet)$) nennen wir dann eine (universelle) homologische (resp. kohomologische) *Erweiterung* von T, falls eine natürliche Isomorphie $\tau : T \longrightarrow T_0$ (resp. $\tau : T \longrightarrow T^0$) existiert.

Entsprechend sind (universelle) homologische und kohomologische Erweiterungen eines kontravarianten Funktors definiert.

Auf Grund der universellen Eigenschaft universeller δ–Funktoren ist die universelle homologische (resp. kohomologische) Erweiterung eines Funktors F, sofern sie existiert, bis auf kanonischer Isomorphie eindeutig bestimmt. Daher sprechen wir künftig nur noch von der einen universellen homologischen (resp. kohomologischen) Erweiterung von F.

Aus Korollar 3.7.14 und den beiden Lemmata 3.7.5 und 3.7.9 erhalten wir nun

Korollar 3.7.17. *Sei $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein additiver Funktor dessen Quelle genug Projektive (resp. Injektive) besitzt. Dann existiert genau dann eine universelle homologische (resp. kohomologische) Erweiterung von F, wenn dieser rechts– (resp. links–) exakt ist.*

Für kontravariante Funktoren gilt die entsprechend modifizierte Aussage.

Beispiele 3.7.18.

(1) Zu einem fix gewählten R–Linksmodul N ist nach Beispiel 3.3.13 (2) und 3.3.36 (1) der Tensorfunktor $- \otimes_R N : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ ein rechts–exakter, additiver Funktor. Daher besitzt dieser eine universelle homologische Erweiterung die wir durch

$$\underline{\mathrm{Tor}}^R_\bullet(-, N) : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

bezeichnen. Es gilt $\underline{\mathrm{Tor}}^R_p(M, N) \cong L_p(- \otimes_R N)(M)$. Die Konstruktion von $\underline{\mathrm{Tor}}^R_p(M, N)$ geschieht wie folgt: Zu einer projektiven Auflösung $\epsilon : P_\bullet \longrightarrow M$ von M bildet man den Komplex $P_\bullet \otimes_R N$. Dessen p-te Homologie ist dann kanonisch isomorph zu $\underline{\mathrm{Tor}}^R_p(M, N)$. Speziell gilt $\underline{\mathrm{Tor}}^R_0(M, N) \cong M \otimes_R N$.

(2) Zu einem fix gewählten R–Rechtsmodul M ist nach Beispiel 3.3.13 (2) und 3.3.36 (2) der Tensorfunktor $M \otimes_R - : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ ein rechts–exakter, additiver Funktor. Daher besitzt dieser eine universelle homologische Erweiterung die wir durch

$$\overline{\mathrm{Tor}}^R_\bullet(M, -) : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

bezeichnen. Es gilt $\overline{\mathrm{Tor}}_p^R(M,N) \cong L_p(M \otimes_R -)(N)$. Die Konstruktion von $\overline{\mathrm{Tor}}_p^R(M,N)$ geschieht wie folgt: Zu einer projektiven Auflösung $\epsilon : Q_\bullet \longrightarrow N$ von N bildet man den Komplex $M \otimes_R Q_\bullet$. Dessen p-te Homologie ist dann kanonisch isomorph zu $\overline{\mathrm{Tor}}_p^R(M,N)$. Speziell gilt $\overline{\mathrm{Tor}}_0^R(M,N) \cong M \otimes_R N$.

(3) Der Homfunktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ zu jedem fix gewählten Objekt A einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist nach Beispiel 3.3.13 (1) und 3.3.34 ein links–exakter, additiver Funktor. Besitzt $\mathcal{A}$ genug Injektive so existiert zu diesem Homfunktor eine universelle kohomologische Erweiterung und bezeichnen sie durch

$$\overline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{A}}^\bullet(A,-) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

Es gilt $\overline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{A}}^p(A,B) \cong R^p(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-))(B)$. Dies lässt sich folgenderweise konstruieren: Zu einer injektiven Auflösung $\eta : A \longrightarrow I^\bullet$ von A bildet man den Kokettenkomplex $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, I^\bullet)$. Dessen p–te Kohomologie entspricht dann $\overline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{A}}^p(A,B)$. Speziell gilt $\overline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{A}}^0(A,B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$.

(4) Besitzt hingegen $\mathcal{A}$ genügend Projektive, so existiert zu jedem fix gewählten Objekt B in $\mathcal{A}$ eine kontravariante, universelle, kohomologische Erweiterung des kontravarianten Homfunktors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,B) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$. Wir bezeichnen sie durch

$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{A}}^\bullet(-,B) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

Konkret erhält man $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{A}}^p(A,B)$ indem man zu einem Objekt A eine projektive Auflösung $\epsilon : P_\bullet \longrightarrow A$ wählt, den Kokettenkomplex $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_\bullet, B)$ bildet und davon die p–te Kohomologie bestimmt.

3.8 Ausgeglichene Bifunktoren

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ abelsche Kategorien mit genug Projektiven und $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Bifunktor. Dann ist auch $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ eine abelsche Kategorie mit genug Projektiven. Ist nun der Bifunktor auch additiv, so lässt sich die Familie der links–derivierten Funktoren von B bilden. Doch bei den für uns interessanten Beispielen an Bifunktoren ist dies nicht der Fall: Im Allgemeinen sind weder $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ noch $- \otimes_R - : \mathbf{Mod_R} \times {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ additive Bifunktoren. Aber sie verfügen über eine, der Additivität verwandten Eigenschaft: Ein Bifunktor $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ bezeichnen wir als *biadditiv*, falls zu jedem $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ die partiellen Funktoren (eine Beschreibung dieser folgt in der anschließenden Bemerkung 3.1.33 (1)) $B(A,-) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ und $B(-,B) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ additiv sind. In diesem Fall existiert zu $B(A,-)$ wie auch zu $B(-,B)$ der p–te links–derivierte Funktor den wir mit $\overline{L}_p B(A,-)$ bzw. $\underline{L}_p B(-,B)$ bezeichnen.

Analog definiert $\overline{R}^p B(A,-)$ (resp. $\underline{R}^p B(-,B)$) den p–ten rechts–derivierten Funktor von $B(A,-) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$) (resp. $B(-,B) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$) sofern $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ jeweils genug

Injektive besitzen.

Um Vergleiche zwischen den beiden Derivationen $\overline{L}_pB(A,-)$ und $\underline{L}_pB(-,B)$ ziehen zu können, zeigen wir zuerst, unter welchen Voraussetzungen es sich bei $\underline{L}_pB$ und $\overline{L}_pB$ (resp. $\underline{R}^pB$ und $\overline{R}^pB$) um Bifunktoren handelt. Dazu benötigen wir eine allgemeine Charakterisierung von Bifunktoren die allein durch die in Bemerkung 3.1.33 (1) und (2) angeführten Zuordnungen und der darauf folgenden Identität (3) gegeben ist:

Proposition 3.8.1 ([Sch1, 2.6.20])**.** *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ Kategorien. Existieren zu jedem A in $\mathcal{A}$ ein Funktor $F^A : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ und zu jedem Morphismus $f : A \longrightarrow A'$ in $\mathcal{A}$ eine natürliche Transformation $F^f : F^A \longrightarrow F^{A'}$ sodass*

$$F^{\mathrm{id}_A} = \mathrm{id}_{F^A} \qquad\qquad F^{f'\circ f} = F^{f'} \circ F^f \tag{3.34}$$

für jedes Objekt A und jedes Paar komponierbarer Morphismen f, f' in $\mathcal{A}$ gilt, dann ist durch

$$B(A,B) \coloneqq F^A(B) \qquad\qquad B(f,g) \coloneqq F^f_{B'} \circ F^A(g)$$

für $f : A \longrightarrow A'$ in $\mathcal{A}$ und $g : B \longrightarrow B'$ in $\mathcal{B}$ ein Bifunktor definiert.

Beweis. Offensichtlich ordnet $B(-,-)$ jedem Objekt (A,B) in $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ eines in $\mathcal{C}$ und jedem Morphismus $(f,g) : (A,B) \longrightarrow (A',B')$ in $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ einen in $\mathcal{C}$ zu. Zu zweiteren Zuordnung betrachten wir folgendes Diagramm in $\mathcal{C}$, welches kommutiert weil F^f eine natürliche Transformation ist:

$$\begin{tikzcd}
F^A(B) \arrow[r, "F^A(g)"] \arrow[d, "F^f_B"'] & F^A(B') \arrow[d, "F^f_{B'}"] \\
F^{A'}(B) \arrow[r, "F^{A'}(g)"] & F^{A'}(B')
\end{tikzcd}$$

In dem Quadrat tritt $B(f,g)$ als eine Diagonale auf, woraus wir erkennen, dass einerseits $B(f,g) : B(A,B) \longrightarrow B(A',B')$ die erforderliche Quelle und das erforderliche Ziel besitzt und andererseits die Gleichung

$$B(f,g) = F^f_{B'} \circ F^A(g) = F^{A'}(g) \circ F^f_B$$

gilt. Aus dieser Kommutativitätsbedingung erhalten wir

$$\begin{aligned}
B(f'\circ f, g'\circ g) &= F^{f'\circ f}_{B''} \circ F^A(g'\circ g) = F^{f'}_{B''} \circ F^f_{B''} \circ F^A(g') \circ F^A(g) \\
&= F^{f'}_{B''} \circ F^{A'}(g') \circ F^f_{B'} \circ F^A(g) \\
&= B(f',g') \circ B(f,g)
\end{aligned}$$

und für jede Identität $(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)$ folgt sofort

$$B(\mathrm{id}_{(A,B)}) = B(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B) = F^{id_A}_B \circ F^A(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{F^A,B} \circ \mathrm{id}_{F^A(B)} = \mathrm{id}_{F^A(B)} = \mathrm{id}_{B(A,B)}$$

womit $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Bifunktor ist. $\square$

Definition 3.8.2. Einen Bifunktor $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ nennen wir *links– (resp. rechts–) biexakt*, falls zu jedem $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ die partiellen Funktoren $B(A, -)$ und $B(-, B)$ links– (resp. rechts–) exakt sind. Ist B sowohl links– als auch rechts–biexakt, so nennen wir B *biexakt*.

B bezeichnen wir als *rechts–ausgeglichenen* Bifunktor, falls zu allen projektiven Objekten $P \in \mathcal{A}$ und $Q \in \mathcal{B}$ die partiellen Funktoren $B(P, -)$ und $B(-, Q)$ exakt sind.

Hingegen nennen wir B *links–ausgeglichen*, falls zu allen injektiven Objekten $I \in \mathcal{A}$ und $J \in \mathcal{B}$ die partiellen Funktoren $B(I, -)$ und $B(-, J)$ exakt sind.

Beispiele 3.8.3.

(1) Der Homfunktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, -) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ ist nach Beispiel 3.3.34 ein links–biexakter, und den Beispielen 3.3.34 (2) und (1) zufolge ein links–ausgeglichener Bifunktor. Dazu sei angemerkt, dass ein Objekt P in $\mathcal{A}^{op}$ genau dann projektiv ist, wenn es injektiv in $\mathcal{A}$ ist.

(2) Der Tensorfunktor $- \otimes_R - : \mathbf{Mod_R} \times {_\mathbf{R}\mathbf{Mod}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ ist nach den Beispielen 3.3.36 (1) und (2) ein rechts–biexakter, und dem Lemma 3.3.37 zufolge ein rechts–ausgeglichener Bifunktor.

Proposition 3.8.4. *Ist $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein rechts–biexakter Bifunktor, dann lassen sich $\underline{L}_p B$ und $\overline{L}_p B$ für jedes $p \geq 0$ kanonisch zu Bifunktoren von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ erweitern.*

Beweis. Ist $p \geq 0$ dann existiert zu jedem B in $\mathcal{B}$ ein Funktor $\underline{L}_p B(-, B)$. Ordnen wir nun jedem Morphismus $g : B \longrightarrow B'$ in $\mathcal{B}$ kanonisch eine natürliche Transformation $\underline{L}_p B(-, B) \longrightarrow \underline{L}_p B(-, B')$ zu sodass die Bedingungen in (3.34) erfüllt sind, dann folgt aus Proposition 3.8.1 die Behauptung. Sie gilt dann aus Gründen der Symmetrie auch für $\overline{L}_p B(-, -)$.

Sei also $g : B \longrightarrow B'$ ein beliebiger Morphismus in $\mathcal{B}$. Bemerkung 3.1.33 (2) zufolge induziert dieser eine natürliche Transformation $B(-, g) : B(-, B) \longrightarrow B(-, B')$. Weil aber nach Lemma 3.7.5 $B(-, B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}$ natürlich und kanonisch isomorph zu $\underline{L}_0 B(-, B)$ ist, lässt sich eine natürliche und kanonische Transformation $\underline{L}_0 B(-, g) : \underline{L}_0 B(-, B) \longrightarrow \underline{L}_0 B(-, B')$ definieren.

Nun bildet aber $(\underline{L}_p B(-, B'))_{p \geq 0}$ nach Korollar 3.7.14 einen universellen δ–Funktor sodass $\underline{L}_0 B(-, g)$ einen eindeutigen (und folglich kanonischen) Morphismus von δ–Funktoren induziert:

$$(\underline{L}_p B(-, g))_{p \geq 0} : (\underline{L}_p B(-, B))_{p \geq 0} \longrightarrow (\underline{L}_p B(-, B'))_{p \geq 0}.$$

Aus dessen Eindeutigkeit folgt für jedes $p \geq 0$ sofort:

$$\underline{L}_p B(-, \mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{(\underline{L}_p B(-, B))} \qquad \underline{L}_p B(-, g' \circ g) = \underline{L}_p B(-, g') \circ \underline{L}_p B(-, g). \qquad \square$$

Dual beweist man die folgende

Proposition 3.8.5. *Ist $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein links–biexakter Bifunktor, dann lassen sich $\underline{R}_p B$ und $\overline{R}_p B$ für jedes $p \geq 0$ kanonisch zu Bifunktoren von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ ergänzen.*

Zu jedem $B \in \mathcal{B}$ ist $(\underline{L}_p B(-, B))_{p\geq 0}$ ein universeller homologischer δ–Funktor und jeder Morphismus $g : B \longrightarrow B'$ induziert einen δ–Morphismus $(\underline{L}_p B(-, g))_{p\geq 0}$ wie aus dem Beweis von Proposition 3.8.4 zu entnehmen ist. Entsprechend gelten für die Bifunktorfamilie $(\overline{L}_p B)_{p\geq 0}$ jene Aussagen, die sich analog auf das erste Argument beziehen. Wir zeigen nun unter welchen Voraussetzungen auch $(\underline{L}_p B(f, -))_{p\geq 0}$ und $(\overline{L}_p B(-, g))_{p\geq 0}$ δ–Morphismen zwischen universellen homologischen δ–Funktoren darstellen.

Satz 3.8.6. *Sei $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ rechts–exakter und rechts–ausgeglichener Bifunktor. Dann ist für jedes A in $\mathcal{A}$ die Funktorfamilien $(\underline{L}_p B(A, -))_{p\geq 0}$ ein universeller homologischer δ–Funktor und für jeden Morphismus $f : A \longrightarrow A'$ bildet $(\underline{L}_p B(f, -))_{p\geq 0}$ einen δ–Morphismus.*

Für die Bifunktorfamilie $(\overline{L}_p B)_{p\geq 0}$ gelten jene Aussagen, die sich entsprechend auf das zweite Argument beziehen.

Beweis. Wir zeigen nur die zu der Bifunktorfamilie $(\underline{L}_p B)_{p\geq 0}$ gestellten Behauptungen.

Sei A ein fix gewähltes Objekt in $\mathcal{A}$ und $\epsilon_A : (P_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow A$ eine projektive Auflösung von A. Dann lässt sich daraus eine Familie von exakten Funktoren zusammen mit einer Familie von natürlichen Transformationen definieren:

$$(B(P_p, -))_{p\geq 0} \qquad (B(d_p, -) : B(P_p, -) \longrightarrow B(P_{p-1}, -))_{p\geq 1} \tag{3.35}$$

Damit führt uns jede kurze exakte Sequenz $B^{|||} : 0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{B}$ zu einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen über $\mathcal{C}$:

$$0 \longrightarrow B(P_\bullet, B') \longrightarrow B(P_\bullet, B) \longrightarrow B(P_\bullet, B'') \longrightarrow 0.$$

Satz 3.5.6 und Bemerkung 3.7.15 zufolge bildet dann

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{p+1}} \underline{L}_p(A, B') \longrightarrow \underline{L}_p(A, B) \longrightarrow \underline{L}_p(A, B'') \xrightarrow{\delta_p} \underline{L}_{p-1}(A, B') \longrightarrow \cdots$$

eine lange exakte Sequenz in $\mathcal{C}$. Liegt nun ein Morphismus exakter Sequenzen in $\mathcal{B}$ vor, also ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \bar{B}' \arrow[r] & \bar{B} \arrow[r] & \bar{B}'' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen, dann erhalten wir wiederum unter Verwendung von (3.35) ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexabbildungen in $\mathbf{Kom}(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B(P_\bullet, B') \arrow[r] \arrow[d] & B(P_\bullet, B) \arrow[r] \arrow[d] & B(P_\bullet, B'') \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B(P_\bullet, \bar{B}') \arrow[r] & B(P_\bullet, \bar{B}) \arrow[r] & B(P_\bullet, \bar{B}'') \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Mit Hilfe des Satzes 3.5.7 erhalten wir die gewünschte kommutative Leiter sodass die Funktorfamilie $(\underline{L}_p(A,-))_{p\geq 0}$ in der Tat ein homologischer δ–Funktor ist. Weil aber für jedes projektive P der Funktor $B(-,P)$ exakt und folglich $\underline{L}_p(A,P) = 0$ für $p \geq 1$ gilt, ist nach Satz 3.7.13 diese Funktorfamilie ein universeller homologischer δ–Funktor.

Es ist noch zu zeigen, dass $\underline{L}_\bullet B(f,-)$ für jeden Morphismus $f : A \longrightarrow A'$ ein δ–Morphismus ist. Dazu seien $\epsilon_A : (P_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow A$ und $\epsilon_{A'} : (P'_\bullet, d'_\bullet) \longrightarrow A'$ projektive Auflösungen und $f_\bullet : P_\bullet \longrightarrow P'_\bullet$ der aus Satz 3.6.8 hervorgehende Kettenkomplexmorphismus. Dieser induziert eine Familie von natürlichen Transformationen exakter Funktoren sodass zu jeder kurzen exakten Sequenz $B^{|||} : 0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$ in $\mathcal{B}$ folgendes kommutative Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen existiert:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B(P_\bullet, B') \arrow[r] \arrow[d] & B(P_\bullet, B) \arrow[r] \arrow[d] & B(P_\bullet, B'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B(P'_\bullet, B') \arrow[r] & B(P'_\bullet, B) \arrow[r] & B(P'_\bullet, B'') \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Gehen wir mit Hilfe des Satzes 3.5.7 zur Homologie über, erhalten wir eine kommutative Leiter in der unter anderem die Rechtecke

$$\begin{tikzcd}
\underline{L}_p B(A, B'') \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "\underline{L}_p B(f, B'')"'] & \underline{L}_{p-1} B(A, B') \arrow[d, "\underline{L}_p B(f, B')"] \\
\underline{L}_p B(A', B'') \arrow[r, "\delta'_p"] & \underline{L}_{p-1} B(A', B')
\end{tikzcd}$$

für jedes $p \geq 0$ auftreten. □

Bemerkung 3.8.7.

(1) Ist $\tau : B(-,-) \longrightarrow B'(-,-)$ eine natürliche Transformation von Bifunktoren $B, B' : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, so sind für jedes $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$

$$\tau_{(A,-)} : B(A,-) \longrightarrow B'(A,-) \qquad \tau_{(-,B)} : B(-,B) \longrightarrow B'(-,B) \tag{3.36}$$

ebenfalls natürliche Transformationen der partiellen Bifunktoren.

(2) Ist umgekehrt eine Familie von Morphismen

$$(\tau_{(A,B)} : B(A,B) \longrightarrow B'(A,B))_{(A,B)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}}$$

gegeben, sodass für jedes $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ (3.36) zwei natürliche Transformationen bilden, dann definiert diese eine natürliche Transformation von Bifunktoren: Denn für jeden Morphismus $(f,g) : (A,B) \longrightarrow (A',B')$ in $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ erhalten wir nach Voraussetzung die beiden kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} B(A,B) \arrow[r, "B(f,B)"] \arrow[d, "\tau_{(A,B)}"'] & B(A',B) \arrow[d, "\tau_{(A',B)}"] \\ B'(A,B) \arrow[r, "B'(f,B)"] & B'(A',B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B(A',B) \arrow[r, "B(A',g)"] \arrow[d, "\tau_{(A',B)}"'] & B(A',B') \arrow[d, "\tau_{(A',B')}"] \\ B'(A',B) \arrow[r, "B'(A',g)"] & B'(A',B') \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$. Fügen wir diese zu einem Diagramm zusammen, zeigt sich dass τ eine natürliche Transformation von B nach B' ist.

Beispiel 3.8.8. Sei $B : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Bifunktor abelscher Kategorien dessen erster partieller Funktor $B(-,B) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ für jedes $B \in \mathcal{B}$ rechts–exakt ist. Besitzt darüber hinaus $\mathcal{A}$ genug Projektive, dann definiert die aus den natürlichen Isomorphismen $\underline{L}_0 B(-,B) \cong B(-,B)$ (siehe Lemma 3.7.5) gewonnene Familie von Morphismen

$$(\underline{\tau}_{(A,B)} : \underline{L}_0 B(A,B) \longrightarrow B(A,B))_{(A,B)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}}$$

Bemerkung 3.8.7 zufolge eine natürliche Transformation $\underline{\tau} : \underline{L}_0 B \longrightarrow B$, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ auch $\underline{\tau}_{(A,-)} : \underline{L}_0 B(A,-) \longrightarrow B(A,-)$ eine beschreibt. Doch dies ist trivialerweise der Fall. Denn $\underline{L}_0 B(-,g)$ wurde gerade so definiert, dass für jedes $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} \underline{L}_0 B(A,B) \arrow[r, "\underline{L}_0(A{,}g)"] \arrow[d, "\underline{\tau}_{(A,B)}"'] & \underline{L}_0 B(A,B') \arrow[d, "\underline{\tau}_{(A,B')}"] \\ B(A,B) \arrow[r, "B(A{,}g)"] & B(A,B'). \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm formt.

Unter symmetrischer Voraussetzungen erhalten wir die natürliche Isomorphie $\overline{\tau} : \overline{L}_0 B \longrightarrow B$. Folglich existiert eine natürliche Isomorphie von Bifunktoren

$$\tau : \underline{L}_0 B \xrightarrow{\cong} \overline{L}_0 B \tag{3.37}$$

sofern B ein rechts–biexakter Bifunktor ist und sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{B}$ genug Projektive besitzt.

Korollar 3.8.9. *Ist $B : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein links–exakter und links–ausgeglichener Bifunktor, so sind die folgenden beiden partiell derivierten Bifunktoren natürlich* *isomorph:*

$$\underline{L}_p B(-,-) \cong \overline{L}_p B(-,-).$$

Beweis. Auf Grund von (3.37) und Satz 3.8.6 existiert zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ein Isomorphismus von universellen δ–Funktoren $\tau_{\bullet,(A,-)} : \underline{L}_\bullet B(A,-) \xrightarrow{\cong} \overline{L}_\bullet B(A,-)$. Ist nun $f : A \longrightarrow A'$ ein beliebiger Morphismus in $\mathcal{A}$, so induziert dieser die beiden δ–Morphismen $\underline{L}_\bullet B(f,-)$ und $\overline{L}_\bullet B(f,-)$ die ihrerseits zu den beiden Kompositionen von δ–Morphismen führen:

$$\overline{L}_\bullet B(f,-) \circ \tau_{\bullet,(A-)}, \tau_{\bullet,(A',-)} \circ \underline{L}_\bullet B(f,-) : \underline{L}_\bullet B(A,-) \longrightarrow \overline{L}_\bullet B(A',-).$$

Sie stimmen überein, denn nach (3.37) haben sie die gemeinsame Basis $\tau_{0,(A,-)} \circ \underline{L}_0 B(f,-) = \overline{L}_0 B(f,-) \circ \tau_{0,(A',-)}$. Damit ist aber $\tau_{p,(-,B)} : \underline{L}_p B(-,B) \longrightarrow \overline{L}_p B(-,B)$ für jedes $p \geq 0$ und $B \in \mathcal{B}$ eine natürliche Transformation, Bemerkung 3.8.7 (2) zufolge also $\tau_p : \underline{L}_p B \longrightarrow \overline{L}_p B$ für jedes $p \geq 0$ eine natürliche Transformation von Bifunktoren. □

Durch dualisieren des Satzes 3.8.6 und des Korollars 3.8.11 samt ihrer Beweise erhalten wir die entsprechenden Aussagen zu den partiell rechts–derivierten Bifunktoren:

Satz 3.8.10. *Sei $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ links–exakter und links–ausgeglichener Bifunktor. Dann ist für jedes Objekt A in $\mathcal{A}$ die Funktorfamilien $(\underline{R}_p B(A,-))_{p\geq 0}$ ein universeller homologischer δ–Funktor und für jeden Morphismus $f : A \longrightarrow A'$ bildet $(\underline{R}_p B(f,-))_{p\geq 0}$ einen δ–Morphismus.*

Für die Bifunktorfamilie $(\overline{R}_p B)_{p\geq 0}$ gelten jene Aussagen, die sich entsprechend auf das zweite Argument beziehen.

Korollar 3.8.11. *Ist $B : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein links–exakter und links–ausgeglichener Bifunktor, so sind die folgenden beiden partiell derivierten Bifunktoren natürlich isomorph:*

$$\underline{R}_p B(-,-) \cong \overline{R}_p B(-,-).$$

Beispiele 3.8.12.

(1) Der Tensorfunktor $- \otimes_R -: \mathbf{Mod_R} \times {}_\mathbf{R}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ ist nach Beispiel 3.8.3 (2) ein rechts–biexakter und rechts–ausgeglichener Bifunktor. Daher kann man für jedes $p \geq 0$ $\underline{\mathrm{Tor}}_p^R$ und $\overline{\mathrm{Tor}}_p^R$ aus den Beispielen 3.7.18 (1) und (2) kanonisch zu Bifunktoren von $\mathbf{Mod_R} \times {}_\mathbf{R}\mathbf{Mod}$ nach $\mathbf{Ab}$ ergänzen, die auf Grund von Korollar 3.8.11 kanonisch und natürlich isomorph sind (s. [Rot, Thm. 7.1]):

$$\underline{\mathrm{Tor}}_p^R(-,-) \cong \overline{\mathrm{Tor}}_p^R(-,-).$$

Folglich unterscheiden wir nicht mehr zwischen beiden und schreiben statt ihrer $\mathrm{Tor}_p^R(-,-) : \mathbf{Mod_R} \times {}_\mathbf{R}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

(2) Der Homfunktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ist nach Beispiel (1) ein links–biexakter und links–ausgeglichener Bifunktor. Besitzt nun $\mathcal{A}$ genug Projektive und Injektive, so kann man für jedes $p \geq 0$ $\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{A}}$ und $\overline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{A}}$ aus den Beispielen 3.7.18 (3) und (4) kanonisch zu Bifunktoren von $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ergänzen, die auf Grund von Korollar 3.8.9 kanonisch und natürlich isomorph sind:

$$\underline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{A}}(-,-) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^p_{\mathcal{A}}(-,-).$$

Daher unterscheiden wir nicht mehr zwischen beiden und schreiben statt ihrer $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{A}}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.

3.9 Der Chevalley–Eilenberg Komplex

Nun liegt es an der Zeit eine axiomatische Definition des Homologie– und Kohomologiebegriffs einer K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ zu geben und zwar als homologische bzw. kohomologische Erweiterung wie wir sie in Definition 3.7.16 erklärt haben. Als Basis–Funktoren sollen dazu der Invarianten- und der Koinvariantenfunktor von $\mathfrak{g}$ dienen:

$$(-)_{\mathfrak{g}} : {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek} \qquad\qquad (-)^{\mathfrak{g}} : \mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}. \tag{3.38}$$

Denn sie sind zugleich Basisfunktoren der in 1.2 definierten δ–Funktoren $H_\bullet(\mathfrak{g},-)$ und $H^\bullet(\mathfrak{g},-)$. Um jedoch Korollar 3.7.17 anwenden zu können, ist zuvor noch der Beweis folgenden Satzes zu erbringen:

Satz 3.9.1 ([W, Cor. 7.3.4]). *Die Kategorien* ${}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod}$ *und* $\mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}}$ *zu jeder K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ besitzen sowohl genug Projektive als auch genug Injektive.*

Den Nachweis dieses Satzes erbringen wir durch Auffinden eines unitären Ringes R, sodass die Kategorie ${}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod}$, (und damit auch $\mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}}$, wie aus Beispiel 3.1.13 zu entnehmen ist) isomorph zur Kategorie der R–Linksmoduln ist; Letztere besitzt ja, wie in Beispiel 3.2.9 (2) und Korollar 3.2.20 gezeigt, genug Projektive und Injektive.

Der gesuchte Ring ist in Wahrheit eine K–Algebra, die sogenannte universelle Einhüllende einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Wir geben erst einmal eine

Definition 3.9.2. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K. Eine assoziative K–Algebra $U(\mathfrak{g})$ mit Einselement zusammen mit einem Morphismus von Lie Algebren $\iota^U : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})_{Lie}$ bezeichnen wir als eine universelle Einhüllende von $\mathfrak{g}$, falls folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Zu jeder Algebra A in ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Alg}$ und Morphismus $f : \mathfrak{g} \longrightarrow A_{Lie}$ in ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}$ existiert ein eindeutiger Morphismus $f^U : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{g})_{Lie} \arrow[dr, dotted, "f^U"] & \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\iota^U"] \arrow[r, "f"] & A_{Lie} \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt für den ${}_K\mathbf{Lie}$–Morphismus $\iota^U : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})_{Lie}$:

$$\iota^U([x,y]) = \iota^U(x)\iota^U(y) - \iota^U(y)\iota^U(x). \tag{3.39}$$

Wie aus der universellen Eigenschaft sofort abgeleitet werden kann, sind je zwei universelle Einhüllenden einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ isomorph. Daher sprechen wir in Zukunft auch nur noch von "der einen" universellen Einhüllenden. Die Existenz der universellen Einhüllenden zu einer beliebigen K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ zeigen wir in der folgenden Proposition (s. [H, Sec. 17.1]):

Proposition 3.9.3. *Zu jeder Lie Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper K existiert eine bis auf Isomorphie eindeutige universelle Einhüllende $(U(\mathfrak{g}), \iota^U)$.*

Beweis. Zur Konstruktion einer universell Einhüllenden ziehen wir die zu dem K–Modul $\mathfrak{g}$ gehörenden Tensor–Algebra $(T(\mathfrak{g}), \iota^T)$ heran. Sie enthält das zwei–seitige Ideal J, welches durch die Elemente der Form

$$\iota^T(x) \otimes \iota^T(y) - \iota^T(y) \otimes \iota^T(x) - \iota^T([x,y]), \text{ mit } x, y \in \mathfrak{g} \tag{3.40}$$

erzeugt wird. Offensichtlich gilt $1 \notin J$, daher ist der Quotient $U(\mathfrak{g}) \coloneqq T(\mathfrak{g})/J$ nicht trivial und die Quotientenabbildung $\pi : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ ein ${}_K\mathbf{Alg}$–Morphismus. Die Komposition $\iota^U \coloneqq \pi \circ \iota^T$ ist, wie leicht zu verifizieren ist, ein ${}_K\mathbf{Lie}$–Morphismus $\iota^U : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})_{Lie}$.

Nun zeigen wir die universelle Eigenschaft von $(U(\mathfrak{g}), \iota^U)$: Zu jedem ${}_K\mathbf{Lie}$–Morphismus $f : \mathfrak{g} \longrightarrow A_{Lie}$, betrachtet als ${}_K\mathbf{Vek}$–Morphismus, existiert ein ${}_K\mathbf{Alg}$–Morphismus $f^T : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$, sodass $f^T \circ \iota^T = f$ in ${}_K\mathbf{Vek}$ gilt. Aus $J \subseteq \ker f^T$, was einfach zu verifizieren ist, folgt die Existenz eines ${}_K\mathbf{Alg}$–Morphismus $f^U : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ mit $f^U \circ \pi = f^T$ und damit $f^U \circ \iota^U = f^U \circ (\pi \circ \iota^T) = f^T \circ \iota^T = f$ in ${}_K\mathbf{Vek}$. Da f^U zugleich ein ${}_K\mathbf{Lie}$–Morphismus ist, gilt die Gleichung $f^U \circ \iota^U = f$ auch in ${}_K\mathbf{Lie}$. f^U ist eindeutig da die Menge $\iota^U(\mathfrak{g})$ in $U(\mathfrak{g})$ eine ${}_K\mathbf{Alg}$–Erzeugende ist: Die Tensoralgebra $T(\mathfrak{g})$ wird von $\iota^T(\mathfrak{g})$ erzeugt und π ist als ${}_K\mathbf{Alg}$–Morphismus epi. □

Die Eindeutigkeit von $U(\mathfrak{g})$ bis auf Isomorphie und ihre universelle Eigenschaft lässt $U : {}_K\mathbf{Lie} \longrightarrow {}_K\mathbf{Alg}$ zu einem Funktor werden: Zu dem ${}_K\mathbf{Lie}$–Morphismus $f \coloneqq \iota^U_{\mathfrak{h}} \circ \varphi$ aus dem folgenden Diagramm existiert ein eindeutiger ${}_K\mathbf{Alg}$–Morphismus

$U(\varphi) : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{h})$ sodass dieses Diagramm in ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}$ kommutiert:

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{g})_{Lie} \arrow[r, dotted, "U(\varphi)_{Lie}"] & U(\mathfrak{h})_{Lie} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\iota^U_{\mathfrak{g}}"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\iota^U_{\mathfrak{h}}"'] \end{tikzcd}$$

Zusammen mit $(-)_{Lie} : {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Alg} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}$ erhalten wir eine Adjunktion von Funktoren (s. [W, Ex. 7.3.3]):

Proposition 3.9.4. *Der Funktor $U : {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Alg} \longleftarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}$ ist links–adjungiert zu dem Funktor $(-)_{Lie} : {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Alg} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}$ und die zu jeder Lie Algebra $\mathfrak{g}$ gehörenden ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}$–Morphismen $\iota^U_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})_{Lie}$ bilden die Einheit $\iota^U : \mathrm{id}_{{}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}} \longrightarrow U(-)_{Lie}$ dieser Adjunktion.*

Beweis. Auf Grund der universellen Eigenschaft von $(U(\mathfrak{g}), \iota^U)$ erhalten wir zu jeder Lie Algebra $\mathfrak{g}$ und K–Algebra A die Mengen–Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{{}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}}(\mathfrak{g}, A_{Lie}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{{}_{\mathbf{K}}\mathbf{Alg}}(U(\mathfrak{g}), A).$$

Dass die Klasse von Morphismen $\iota^U_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})_{Lie}$, $\mathfrak{g} \in {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}$ die Einheit der Adjunktion bildet, ist aus obigen Diagramm sofort ersichtlich. □

Beispiel 3.9.5. Der triviale $\mathfrak{g}$–Modul K besitzt als Darstellung die Nullabbildung $\mathfrak{g} \longrightarrow K_{Lie}$. Der dazu unter obiger Adjunktion korrespondierende ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Alg}$–Homomorphismus $\varepsilon : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow K$ nennen wir die *Augmentierung* von $U(\mathfrak{g})$. Offensichtlich ist ε surjektiv und der Kern $\mathfrak{I} := \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ gleich dem (2–seitigen) Ideal, welches von den Elementen $\iota^U(\mathfrak{g})$ in $U(\mathfrak{g})$ erzeugt wird.

Korollar 3.9.6 ([W, Thm. 7.3.3])**.** *Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K, dann ist die Kategorie der linken $\mathfrak{g}$–Moduln isomorph zur Kategorie der linken $U(\mathfrak{g})$–Moduln.*

Beweis. Ein $\mathfrak{g}$–Modul (resp. $U(\mathfrak{g})$–Modul) ist ein K–Vektorraum M zusammen mit einem Morphismus $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_K(M)_{Lie}$ in ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}$ (resp. einem Morphismus $\rho_U : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_K(M)$in ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Alg}$). Nun bildet $\mathrm{End}_K(M)$ eine assoziative K–Algebra mit Einselement id_M sodass wir mittels Proposition 3.9.4 folgende Bijektion erhalten:

$$\mathrm{Hom}_{{}_{\mathbf{K}}\mathbf{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathrm{End}_K(M)_{Lie}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{{}_{\mathbf{K}}\mathbf{Alg}}(U(\mathfrak{g}), \mathrm{End}_K(M))$$

Diese induziert eine 1–1 Korrespondenz zwischen $\mathrm{Ob}({}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod})$ und $\mathrm{Ob}({}_{\mathbf{U}(\mathfrak{g})}\mathbf{Mod})$. Auch die Morphismen können miteinander identifiziert werden:

Ein $\alpha : (M, \rho) \longrightarrow (N, \rho')$ in ${}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod}$ ist ein ${}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$–Morphismus $\alpha : M \longrightarrow N$, welcher

$$\alpha \circ \rho(x) = \rho'(x) \circ \alpha \text{ für jedes } x \in \mathfrak{g}$$

erfüllt. Weil $\rho_U(U(\mathfrak{g})) = \langle \rho_U(\iota^U(\mathfrak{g}))\rangle_{\mathbf{KAlg}} = \langle \rho(\mathfrak{g})\rangle_{\mathbf{KAlg}}$ gilt, folgt

$$\alpha \circ \rho_U(z) = \rho'_U(z) \circ \alpha \text{ für jedes } z \in U(\mathfrak{g}).$$

Also ist α zugleich ein Morphismus in ${}_{\mathbf{U}(\mathfrak{g})}\mathbf{Mod}$. Die Umkehrung sowie die Übereinstimmung der Identitäten ist trivial. □

Damit ist auch Satz 3.9.1 bewiesen. Zusammen mit den Beispielen 3.3.36 (3) und (4) erfüllen also die beiden Funktoren in (3.38) die Voraussetzungen zu Korollar 3.7.17 sodass die beiden folgenden Begriffe wohldefiniert sind.

Definition 3.9.7. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K. Dann bezeichnen wir durch $H^{Lie}_{\bullet}(\mathfrak{g}, -) : \mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$ die homologische Erweiterung von $(-)_{\mathfrak{g}}$. Ist $M \in \mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}}$ und $p \geq 0$ so nennen wir $H^{Lie}_p(\mathfrak{g}, M)$ die p–te Homologiegruppe von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M.

Andererseits bezeichnen wir durch $H^{\bullet}_{Lie}(\mathfrak{g}, -) : {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{K}}\mathbf{Vek}$ die kohomologische Erweiterung von $(-)^{\mathfrak{g}}$. Ist $M \in {}_{\mathfrak{g}}\mathbf{Mod}$ und $p \geq 0$ so nennen wir $H^p_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ die p–te Kohomologiegruppe von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M.

Die p–te Homologiegruppe von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M, $H^{Lie}_p(\mathfrak{g}, M)$ ist folgenderweise zu erhalten: Man wähle eine projektive Auflösung $\epsilon_M : P_{\bullet} \longrightarrow M$ in $\mathbf{Mod}_{\mathfrak{g}}$, wende darauf den Koinvariantenfunktor $(-)_{\mathfrak{g}}$ an und berechne zu dem erhaltenen Kettenkomplex $(P_{\bullet})_{\mathfrak{g}}$ die p–te Homologie.

Die p–te Kohomologiegruppe von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M, $H^p_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$, hingegen erhält man, indem man eine injektive Auflösung $\eta_M : M \longrightarrow I^{\bullet}$ wählt, den Invariantenfunktor $(-)^{\mathfrak{g}}$ darauf anwendet und anschließend die p–te Kohomologie des daraus erhaltenen Kokettenkomplex $(I^{\bullet})^{\mathfrak{g}}$ berechnet.

Natürlich erhebt sich sofort die Frage, inwieweit diese Definitionen von Homologie– und Kohomologiegruppen mit jenen aus Kapitel 1 übereinstimmen. Zwar sind $H_{\bullet}(\mathfrak{g}, -)$ und $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, -)$ nach Satz 1.3.1 und Korollar 3.5.8 δ–Funktoren, doch wissen wir nicht ob sie universell sind. Könnten wir auch dies nachweisen, z. B. mit Hilfe von Satz 3.7.13, dann wären nach Bemerkung 3.7.12 die beiden Definitionen übereinstimmend. Leider steht uns aber keine vernünftige charakterisierende Beschreibung projektiver und injektiver $\mathfrak{g}$–Moduln (wie auch U($\mathfrak{g}$)–Moduln) zur Verfügung, um diesen Satz einsetzen zu können. Aus dem selben Grund lassen sich auch keine konkreten projektiven bzw. injektiven Auflösungen der $\mathfrak{g}$–Moduln bestimmen, um einen direkten Vergleich der Definitionen zu bekommen. Einen Ausweg aus dieser Misere finden wir in der folgenden Proposition. Sie beschränkt die Suche nach projektiven und injektiven Auflösungen von $\mathfrak{g}$–Moduln auf nunmehr einer einzigen projektiven Auflösung — Nämlich die des trivialen $\mathfrak{g}$–Moduls K (dazu seien Beispiel 3.7.18 (1) und (4) sowie Beispiel 3.8.12 angemerkt).

Proposition 3.9.8 ([W, Cor. 7.3.6]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine K–Lie Algebra und M ein $\mathfrak{g}$–Mo-*

dul. Dann gilt:

$$H_\bullet^{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong \operatorname{Tor}_\bullet^{U(\mathfrak{g})}(K, M) \qquad\qquad H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g}, M) \cong \operatorname{Ext}^\bullet_{U(\mathfrak{g})}(K, M)$$

Beweis. Die Basis–Funktoren der homologischen δ–Funktoren sind natürlich isomorph:

$$M_\mathfrak{g} \cong M/\mathfrak{g}\cdot M \cong M/\mathfrak{J}M \cong (U(\mathfrak{g})/\mathfrak{J}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} M \cong K \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$$

Dies trifft auch für jene der beiden kohomologischen δ–Funktoren zu:

$$M^\mathfrak{g} \cong (\operatorname{Hom}_K(K, M))^\mathfrak{g} \overset{(1.5)}{\cong} \operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(K, M) \cong \operatorname{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(K, M)$$

Da es sich in beiden Fällen um universelle δ–Funktoren handelt, folgt daraus bereits die Proposition. □

Also machen wir uns auf, eine projektive Auflösung des trivialen $\mathfrak{g}$–Moduls K zu finden: Ist $(U(\mathfrak{g}), \iota)$ die zu $\mathfrak{g}$ gehörende universelle Einhüllende mit der $\mathfrak{g}$–Rechtsmodulstruktur $u \cdot x = u\iota(x)$, dann bildet nach Proposition 1.2.2

$$(C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g}), d_\bullet^{CE}) := (C_\bullet(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})), d_\bullet)$$

einen linearen Kettenkomplex, den sogenannten *Chevalley–Eilenberg Komplex*. Auf $C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g}) = \Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_K U(\mathfrak{g})$ herrscht mittels $u \cdot (e \otimes u') = e \otimes (uu')$ eine $U(\mathfrak{g})$–Linksmodulstruktur. Sie ist mit den beiden anderen, in Abschnitt 1.2 definierten Modulstrukturen verträglich:

$$\begin{aligned} u \cdot (e \wedge (e' \otimes u')) &= e \wedge e' \otimes uu' = e \wedge (u \cdot (e' \otimes u')) \\ u \cdot ((e \otimes u') \cdot x) &= e \otimes (uu' \cdot x) = (u \cdot (e \otimes u')) \cdot x. \end{aligned}$$

Daher ist zusammen mit (1.8) sofort erkennbar, dass $d_\bullet^{CE}$ ein $U(\mathfrak{g})$–Modulhomomorphismus, also $(C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g}), d_\bullet^{CE})$ ein $U(\mathfrak{g})$–Kettenkomplex ist. Außerdem ist $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})$ ein freier K–Modul sodass für jedes $p \geq 0$ das Tensorprodukt $\Lambda^p(\mathfrak{g}) \otimes_K U(\mathfrak{g})$ ein freier, also insbesondere ein projektiver $U(\mathfrak{g})$–Modul ist. Die Augmentierung von $U(\mathfrak{g})$ aus Beispiel 3.9.5 ist offensichtlich auch ein $U(\mathfrak{g})$–Linksmodulhomomorphismus und damit

$$\cdots \longrightarrow C_2^{CE}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_2^{CE}} C_1^{CE}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_1^{CE}} C_0^{CE}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0 \tag{3.41}$$

eine lange Sequenz in ${}_{\mathbf{U}(\mathfrak{g})}\mathbf{Mod}$. Es gilt nun:

Theorem 3.9.9 ([W, Thm. 7.7.2]). *Die Sequenz* (3.41) *stellt ein projektive Auflösung des trivialen* $\mathfrak{g}$*–Moduls* K *dar.*

Um das Theorem zu beweisen ist nur noch die Exaktheit der Sequenz (3.41) zu verifizieren. Doch müssen wir dazu erst noch mehr über die universelle Einhüllende $U(\mathfrak{g})$ und ihren strukturellen Eigenschaften in Erfahrung bringen. Hierfür betrachten wir zuerst ein einfaches Beispiel:

Beispiel 3.9.10. Ist $\mathfrak{a}$ eine abelsche Lie Algebra, dann wird das Ideal J durch alle Elemente der Form $\iota^T(x) \otimes \iota^T(y) - \iota^T(y) \otimes \iota^T(x) \in T(\mathfrak{g})$ erzeugt. Damit ist die universelle Einhüllende $U(\mathfrak{a})$ eine kommutative K–Algebra. Sie stimmt mit der symmetrischen Algebra $S(\mathfrak{a})$ über den Vektorraum $\mathfrak{a}$ überein und werden sie daher in der folgenden Bemerkung näher betrachten.

Wir gehen daher zuerst näher auf die strukturellen Eigenschaften der symmetrischen Algebra ein:

Bemerkung 3.9.11. Sei V ein K–Vektorraum, $T(V)$ die Tensoralgebra über V und J jenes Ideal in $T(V)$, welches von den homogenen Elementen $\iota^T(v) \otimes \iota^T(w) - \iota^T(w) \otimes \iota^T(v)$ erzeugt wird. Dann nennen wir $S(V) := T(V)/J$ die symmetrische Algebra über V und bezeichnen mit $\pi^S : T(V) \longrightarrow S(V)$ den kanonischen Morphismus. Offensichtlich ist $J \cap (T^0(V) \oplus T^1(V)) = 0$ und weil J ein homogenes Ideal ist (und daher $J = (J \cap T^2(V)) \oplus (J \cap T^3(V)) \oplus \dots$), erbt $S(V)$ eine Graduierung $S^p(V) = T^p(V)/(J \cap T^p(V))$ mit $S^0(V) = T^0(V) = K$ und $S^1(V) = T^1(V) = V$. Mit $\iota^S := \pi^S \circ \iota^T$ bezeichnen wir den kanonischen Morphismus $V \longrightarrow S(V)$ und für eine Basis $(x_1, \dots, x_n)$ von V legen wir $s_i := \iota^S(x_i)$ fest. Die folgenden Eigenschaften sind nun leicht zu verifizieren:

(1) $\iota^S : V \longrightarrow S(V)$ ist injektiv.

(2) Die Menge aller $s_{i_1} \dots s_{i_k} \in S(V)$ mit $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ zusammen mit der 1 bilden eine Basis von $S(V)$.

(3) $S(V)$ ist nullteilerfrei.

Auch für die universelle Einhüllende $U(\mathfrak{g})$ wollen wir die hier genannten strukturellen Eigenschaften nachweisen. Doch gestaltet sich diese Aufgabe, die schlussendlich im sogenannten Poincaré–Birkhoff–Witt Theorem gipfelt, weitaus schwieriger als für $S(V)$.

Zuerst halten wir fest, dass $U(\mathfrak{g})$ als homomorphes Bild von $T(\mathfrak{g})$ zwar keine Graduierung besitzt ($\mathfrak{I}$ ist i. A. inhomogen) aber zumindest eine Filtrierung erbt:

$$U_p(\mathfrak{g}) := \pi(T_p(\mathfrak{g})) = \pi\Big(\bigoplus_{i=0}^{p} T^i(\mathfrak{g})\Big) \tag{3.42}$$

Sei $\iota^U : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})_{Lie}$ der kanonische Morphismus und $(x_i)_{i \in \Psi}$ eine K–Basis von $\mathfrak{g}$ dann bezeichnen wir das Bild von x_i unter ι^U durch u_i. Zu jeder endlichen Folge $I = (i_1, \dots, i_n)$ von Elementen in Ψ sei u_I das Monom $u_{i_1} \cdots u_{i_n} \in$ in $U(\mathfrak{g})$. Die Länge n der Folge I bezeichnen wir durch $|I|$. Wir schreiben $i \leq I$ für $i \leq i_1, \dots, i \leq i_n$. Insbesondere gilt damit $i \leq \varnothing$ für jedes $i \in \Psi$. I nennen wir eine nicht–fallende Folge, falls $i_1 \leq \dots \leq i_n$ gilt. Die leere Folge $I = \varnothing$ sehen wir ebenfalls als eine nicht–fallende an. Ist $\sigma : I \longrightarrow \Psi$ eine Mengenabbildung dann sei $\sigma(I) = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n))$.

Offensichtlich wird auf Grund von (3.42) der K–Vektorraum $U_p(\mathfrak{g})$ von der Menge aller Monomen u_I mit $|I| \leq p$ erzeugt. Es gilt sogar folgende stärkere Aussage:

Lemma 3.9.12 ([D2, Lem. 2.1.6]). *Der K–Vektorraum $U_p(\mathfrak{g})$ wird von allen Monomen u_I mit nichtfallender Folge $I = (i_1, \ldots, i_k)$ (dh. $i_1 \leq \ldots \leq i_k$) der Länge $|I| = k \leq p$ erzeugt.*

Beweis. Indem wir für jede Permutation $\sigma \in S_I$ über der Folge I die Behauptung

$$u_I - u_{\sigma(I)} \in U_{p-1}(\mathfrak{g}) \text{ für } |I| = p \tag{3.43}$$

zeigen, folgt daraus bereits das Lemma induktiv nach p.

Für Transpositionen, also Permutationen die genau zwei benachbarte Folgeelemente in I vertauschen, zeigt sich (3.43) aus (3.39). Ist hingegen (3.43) für zwei Permutationen $\sigma_1, \sigma_2 \in S_I$ erfüllt, dann auch für ihre Komposition $\sigma := \sigma_2 \circ \sigma_1 \in S_I$:

$$u_I - u_{\sigma(I)} = \big(u_I - u_{\sigma_1(I)}\big) + \big(u_{\sigma_1(I)} - u_{\sigma(I)}\big) \in U_{p-1}(\mathfrak{g})$$

Da jede Permutation σ einer endlichen Komposition von Transpositionen gleicht, erfüllt auch jedes σ die Behauptung (3.43). □

Um die lineare Unabhängigkeit der Monome aus Lemma 3.9.12 zu zeigen, bemühen wir uns einer treuen Darstellung von $\mathfrak{g}$ in der symmetrischen Algebra $S(\mathfrak{g})$:

Lemma 3.9.13 ([D2, Lem. 2.1.7]). *Auf $S(\mathfrak{g})$ existiert genau eine $\mathfrak{g}$–Modulstruktur sodass $x_i \cdot s_I = s_i s_I$ für jedes $i \in \Psi$ und für jede nicht–fallende Folge I in Ψ mit $i \leq I$ gilt.*

Beweis. Um das Lemma zu zeigen, konstruieren wir induktiv nach $|I|$ eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times S(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{g})$, $(x, s) \mapsto x \cdot s$ für die

$$x_i \cdot s_I = s_i s_I + t,\ \ t \in S_{|I|}(\mathfrak{g}) \tag{3.44}$$

gilt und zeigen anschließend, dass es sich dabei tatsächlich um eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ in $S(\mathfrak{g})$ handelt. Dabei sei bemerkt, dass $s_I = s_{\sigma(I)}$ in $S(\mathfrak{g})$ gilt, σ eine Bijektion über der Menge der Folgeelemente aus I.

Für den Fall $I = \varnothing$ sei $x_i \cdot s_I := s_i$. Da hierbei $s_I = 1$ und $i \leq I$ für jedes $i \in \Psi$ gilt, ist (3.44) erfüllt. Sei nun $I \supsetneq \varnothing$ und für alle $|J| < |I|$ der Ausdruck $x_j \cdot s_J$ für jedes $j \in \Psi$ definiert und erfülle (3.44). Bilinear fortgesetzt erhalten wir eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g} \times S_{|J|}(\mathfrak{g}) \longrightarrow S_{|I|}(\mathfrak{g})$, $(x, t) \mapsto x \cdot t$ und definieren

$$x_i \cdot s_I = \begin{cases} s_i s_I & \text{falls } i \leq I \qquad (3.45\text{a}) \\ x_j \cdot (x_i \cdot s_J) + [x_i, x_j] \cdot s_J & \text{für } I = (j, J) \text{ und } j < i. \qquad (3.45\text{b}) \end{cases}$$

(3.45b) ist wohldefiniert und erfüllt (3.44): Nach I.V. und (3.44) ist $x_i \cdot s_J = s_i s_J + t = s_{(i,J)} + t$ für ein $t \in S_{|J|}(\mathfrak{g})$ und weil $j \leq (i, J)$, ist mittels (3.45a) und der I.V.

$$\underbrace{x_j \cdot s_{(i,J)}}_{s_j s_{(i,J)} = s_i s_I} + \underbrace{x_j \cdot t + [x_i, x_j] \cdot s_J}_{\in S_{|I|}(\mathfrak{g})}$$

ebenfalls definiert und wie in (3.44) verlangt.

Aus (3.45b) geht jene Gleichung

$$[x_i, x_j] \cdot s_J = x_i(x_j s_J) - x_j(x_i s_J) \tag{3.46}$$

für $i > j \leq J$ hervor, die wir noch allgemein zu zeigen haben: Da auf Grund der Antisymmetrie beider Seiten in (3.46) der Fall $i < j$ aus $i > j$ folgt und für $i = j$ (3.46) trivialerweise erfüllt ist, ist (3.46) nur noch für den Fall $i > j \nleq J$ zu verifizieren:

Sei also $\varnothing \neq J = (k, L)$ mit $i > j > k$. Auf Grund der Jacobi–Identität (1.2) gilt

$$\underbrace{[x_k, [x_j, x_i]] \cdot s_L}_{I} = \underbrace{[x_i, [x_j, x_k]] \cdot s_L}_{II} - \underbrace{[x_j, [x_i, x_k]] \cdot s_L}_{III}.$$

Setzen wir für die Indexmenge L induktiv (3.46) voraus, dann erhalten wir für die linke Seite

$$I = x_k([x_j, x_i]s_L) - [x_j, x_i](x_k s_L) = x_k([x_j, x_i]s_L) + [x_i, x_j]s_J.$$

Beachten wir, dass $x_i \cdot s_L = s_{(i,L)} + t$ mit $t \in S_{|L|}(\mathfrak{g})$ und $j > k \leq (i, L)$ gilt, so lässt sich auf Term II (3.46) hintereinander anwenden:

$$\begin{aligned} II &= x_i([x_j, x_k]s_L) - [x_j, x_k](x_i s_L) \\ &= x_i(x_j(x_k s_L)) - x_i(x_k(x_j s_L)) - x_j(x_k(x_i s_L)) + x_k(x_j(x_i s_L)) \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für Term III

$$III = x_j(x_i(x_k s_L)) - x_j(x_k(x_i s_L)) - x_i(x_k(x_j s_L)) + x_k(x_i(x_j s_L))$$

Daraus folgt $II - III = x_i(x_j s_J) - x_j(x_i s_J) + x_k([x_j, x_i]s_L)$ und der Vergleich mit I zeigt schlussendlich (3.46).

Da (3.45b) aus der, für eine $\mathfrak{g}$–Modulstruktur notwendigen Bedingung (3.46) hervor geht, ist diese allein durch (3.45a) eindeutig festgelegt. □

Theorem 3.9.14 (Poincaré–Birkhoff–Witt). *Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K und $(x_i)_{i\in\psi}$ eine geordnete Basis von $\mathfrak{g}$. Dann bildet die Menge aller Monome $u_I \in U(\mathfrak{g})$, I eine nichtfallende Folge in Ψ, eine Basis von $U(\mathfrak{g})$.*

Beweis. Wegen der universellen Eigenschaft erweitert sich die aus Lemma 3.9.13 gewonnene Darstellung von $\mathfrak{g}$ in $S(\mathfrak{g})$ zu einem Morphismus $\rho^U : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_K(S(\mathfrak{g}))$ in ${}_K\mathbf{Alg}$. Induktiv nach $|I|$ erhalten wir für jede nichtfallende Folge $I = (i, J)$ in Ψ:

$$\rho^U(u_I)(1) = \rho^U(u_i) \circ \rho^U(u_J)(1) = \rho(x_i)(s_J) = x_i \cdot s_J = s_i s_J = s_I$$

und folglich eine lineare Abbildung $U(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{g})$ die die Monome u_I, I nichtfallend, bijektiv auf eine Basis von $S(\mathfrak{g})$ abbildet. Damit bilden sie eine linear unabhängige Teilmenge von $U(\mathfrak{g})$, zusammen mit Lemma 3.9.12 also eine Basis von $U(\mathfrak{g})$. □

Korollar 3.9.15. *Für die universelle Einhüllende $U(\mathfrak{g})$ einer K–Lie Algebra $\mathfrak{g}$ gilt:*

(i) $\iota^U : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ *ist injektiv.*

(ii) $U(\mathfrak{g})$ *ist nullteilerfrei.*

Sei $(x_i)_{i\in\Psi}$ eine geordnete Basis von $\mathfrak{g}$ und e_i das kanonische Bild von x_i in $\Lambda^\bullet\mathfrak{g}$. Dann bildet für jedes $n \geq 0$ die Menge aller Elemente der Form e_J mit $J = (j_1, \ldots, j_n)$, $j_l \in \Psi$ und $j_1 < \ldots < j_n$ eine K–Basis von $\Lambda^p\mathfrak{g}$. Bezeichnet hingegen u_i das kanonische Bild von x_i in $U(\mathfrak{g})$, dann stellt nach dem PBW–Theorem 3.9.14 die Menge aller Elemente der Form u_I mit $I = (i_1, \ldots, i_m)$, $i_l \in \Psi$ und $i_1 \leq \ldots \leq i_m$ eine K–Basis von $U_m(\mathfrak{g})$, $m \geq 0$, dar. Zusammen ergibt die Menge aller Elemente der Form

$$e_J \otimes_K u_I,\ J = (j_1, \ldots, j_n),\ j_1 < \ldots < j_n, I = (i_1, \ldots, i_m),\ i_1 \leq \ldots \leq i_m,\ m \geq 0 \quad (3.47)$$

eine K–Basis von $C_n^{CE}(\mathfrak{g}) = \Lambda^n\mathfrak{g} \otimes_K U(\mathfrak{g})$ für jedes $n \geq 0$.

Folglich erhält der Randoperator $d_\bullet^{CE} : C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g}) \longrightarrow C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g})$ nach (1.8) die rekursive Darstellung

$$d_p^{CE}(e_J \otimes u) = (e_{J\smallsetminus\{j_1\}} \otimes u) \cdot x_{j_1} - e_{j_1} \wedge d_{p-1}^{CE}(e_{J\smallsetminus\{j_1\}} \otimes u)$$

für jedes Element der Form (3.47) mit $n > 0$ bzw. die explizite Darstellung

$$d_\bullet^{CE}(e_J \otimes u) = \sum_{l=1}^{|J|}(-1)^{l-1} e_{J\smallsetminus\{j_l\}} \otimes u u_{j_l} + \sum_{1\leq l<k\leq|J|}(-1)^{l+k}\iota^E([x_{j_l}, x_{j_k}]) \wedge e_{J\smallsetminus\{j_l,j_k\}} \otimes u. \quad (3.48)$$

Beweis des Theorems 3.9.9. Wir zeigen $H_n(C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g})) = 0$ für $n \neq 0$. Dazu werden wir eine Filtrierung auf $C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g})$ definieren und die davon abgeleitete Spektralsequenz berechnen.

Für jedes $p \geq 0$ sei $F_pC_\bullet^{CE}(\mathfrak{g})$ jener lineare Kokettenkomplex, für den gilt:

$$(F_pC_\bullet^{CE}(\mathfrak{g}))_n := \langle e_J \otimes u_I \mid |J| = n,\ |I| + |J| \leq p\rangle_K \text{ für } n \geq 0, \quad (3.49)$$

und $= 0$ für $n < 0$. Offensichtlich gilt $0 \subseteq F_0C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g}) \subseteq F_1C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g}) \cdots \subseteq C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g}) = \bigcup_p F_pC_\bullet^{CE}(\mathfrak{g})$ sowie $d(F_pC_\bullet^{CE}(\mathfrak{g})) \subseteq F_pC_\bullet^{CE}(\mathfrak{g})$ sodass es sich um eine aufsteigende, ausschöpfende Filtrierung von $C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g})$ handelt.

Die daraus gewonnene Spektralsequenz $E_{p,q}^0 := F_pC_{p+q}^{CE}(\mathfrak{g})/F_{p-1}C_{p+q}^{CE}(\mathfrak{g})$ (siehe Satz 2.1.2) konzentriert sich im Abschnitt $p \geq 0$, $q \leq 0$, $p + q \geq 0$, wie aus (3.49) sofort hervorgeht. Daher gilt $E_{0,0}^1 = E_{0,0}^0 = F_0C_0^{CE}(\mathfrak{g}) = K$ und für $p \neq 0$ zeigen wir, dass die Komplexe $E_{p,\bullet}^0$ exakt sind woraus insgesamt $E_{p,q}^1 = 0$ für $(p,q) \neq (0,0)$ folgt.

Dazu bezeichne $[e \otimes u]$ jene Klasse in $E_{p,q}^0$, die von $e \otimes u \in F_pC_{p+q}^{CE}(\mathfrak{g})$ repräsentiert wird. Für den Termoperator $d^0_{p,q} : E^0_{p,q} \longrightarrow E^0_{p,q-1}$ erhalten wir dann

$$d^0_{p,q}([e_J \otimes u_I]) = [d(e_J \otimes u_I)] \overset{(3.48)}{=} \sum_{l=1}^{|J|} (-1)^{l-1} [e_{J \smallsetminus \{j_l\}} \otimes u_I u_{j_l}], \tag{3.50}$$

denn die Doppelsumme in (3.48) liegt in $F_{p-1} C^{CE}_{p+q-1}$, der Nullklasse von $E^0_{p,q-1}$. Die linearen Abbildungen $s_{p,q} : E^0_{p,q} \longrightarrow E^0_{p,q+1}$, die auf den Klassen $\neq 0$ definiert sind durch

$$s_{p,q}(e_J \otimes u_I) = \begin{cases} [(-1)^{p+q} e_J \wedge e_{i_{|I|}} \otimes u_{I \smallsetminus \{i_{|I|}\}}] & \text{falls } q < 0 \text{ und } J < i_{|I|} \quad (3.51a) \\ 0 & \text{sonst} \quad (3.51b) \end{cases}$$

bilden für jedes $p \neq 0$ eine Kokettenkontraktion: $d^0_{p,q+1} \circ s_{p,q} + s_{p,q-1} \circ d^0_{p,q} = \mathrm{id}_{E^0_{p,q}}$. Um dies zu zeigen, setzen wir $p > 0$, $q \leq 0$ und $p + q \geq 0$ voraus und unterscheiden zwei Fälle:

(a): $q < 0$ und $J < i_{|I|}$: Nach (3.51a) und (3.50) gilt

$$d_{p,q+1} \circ s_{p,q}([e_J \otimes u_I]) = \underbrace{\sum_{l=1}^{p+q} (-1)^{l-1+p+q} [e_{J \smallsetminus \{j_l\}} \wedge e_{i_{|I|}} \otimes u_{I \smallsetminus \{i_{|I|}\}} u_{j_l}]}_{I} + \underbrace{(-1)^{2(p+q)}}_{=1} [e_J \otimes u_I]$$

Wie aus (3.43) hervor geht, führt eine Umordnung von I zu keinem Wechsel der Klasse: $[e \otimes u_I] = [e \otimes u_{\sigma(I)}]$. Daher lässt sich durch aufsteigendes Ordnen von (I, j_l) aus (3.50) und der Voraussetzung $J < i_{|I|}$ folgern: $s_{p,q-1} \circ d_{p,q}([e_J \otimes u_I]) = -I$. Man beachte, dass im Fall $p + q = 0$ die Summe I leer und folglich $= 0$ ist.

(b): $q = 0$ oder $J \nless i_{|I|}$: In diesem Fall ist nach (3.51b) $d_{p,q+1} \circ s_{p,q}([e_J \otimes u_I]) = 0$ und

$$s_{p,q-1} \circ d_{p,q}([e_J \otimes u_I]) \overset{(3.50)}{=} s_{p,q-1}([e_{J \smallsetminus \{j_{|J|}\}} \otimes u_I u_{j_{|J|}}]) = [u_I \otimes e_J]. \qquad \square$$

Zu jedem $\mathfrak{g}$–Rechtsmodul M lässt sich nun mit Hilfe der projektiven Auflösung von K in ${}_{\mathbf{U}(\mathfrak{g})}\mathbf{Mod}$ die in 3.9.7 definierte Homologie von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M bestimmen: Dazu müssen wir den Funktor $M \otimes_{U(\mathfrak{g})} -$ auf den Chevalley–Eilenberg Komplex $(C^{CE}_\bullet(\mathfrak{g}), d^{CE}_\bullet)$ anwenden, die Homologie davon ist dann nach Proposition 3.9.8 $H^{Lie}_\bullet(\mathfrak{g}, M)$. Zuerst halten wir für $M \otimes_{U(\mathfrak{g})} C^{CE}_\bullet(\mathfrak{g})$ folgende Isomorphie fest:

$$M \otimes_{U(\mathfrak{g})} (\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_K U(\mathfrak{g})) \cong \Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_K (M \otimes_{U(\mathfrak{g})} U(\mathfrak{g})) \cong \Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_K M.$$

Dabei haben wir $m \otimes (e \otimes u)$ mit $e \otimes (m \cdot u)$ identifiziert und bezeichnen mit

$$\varphi_M : M \otimes_{U(\mathfrak{g})} (\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_K U(\mathfrak{g})) \longrightarrow \Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_K M$$

diesen linearen Isomorphismus. Mit seiner Hilfe lässt sich $M \otimes_{U(\mathfrak{g})} (d^{CE}_\bullet)$ als einen Randoperator von $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_K M$ beschreiben:

$$d_\bullet := \varphi_M \circ M \otimes_{U(\mathfrak{g})} (d^{CE}_\bullet) \circ \varphi_M^{-1} : \Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_K M \longrightarrow \Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_K M.$$

Wir rechnen nun nach:

$$\begin{aligned}
d_\bullet(e_J\otimes m) &= \varphi_M(\mathrm{id}_M \otimes d_\bullet^{CE}(m\otimes(e_J\otimes 1_{U(\mathfrak{g})}))) = \varphi_M(m\otimes d_\bullet^{CE}(e_J\otimes 1_{U(\mathfrak{g})}))\\
&\overset{(3.48)}{=} \sum_{l=1}^{|J|}(-1)^{l-1} e_{J\smallsetminus\{j_l\}}\otimes m\cdot x_{j_l} + \sum_{1\le l<k\le |J|}(-1)^{l+k}\iota^E([x_{j_l},x_{j_k}])\wedge e_{J\smallsetminus\{j_l,j_k\}}\otimes m
\end{aligned}$$

Dh. $(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})\otimes_K M, d_\bullet)$ und der in Proposition 1.2.2 definierte Kettenkomplex stimmen überein und damit auch die beiden unterschiedlich definierten Homologien von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M.

Wir wollen nun analog dazu den kohomologischen Fall untersuchen. Dazu sei M ein $\mathfrak{g}$–Linksmodul. Wenden wir den Homfunktor $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(-,M)$ auf den Chevalley–Eilenberg Komplex $(C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g}), d_\bullet^{CE})$ an, so ist wiederum nach Proposition 3.9.8 die Homologie davon $H^\bullet_{Lie}(\mathfrak{g},M)$. Für $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(C_\bullet^{CE}(\mathfrak{g}),M)$ gilt folgende Isomorphie:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})\otimes_K U(\mathfrak{g}),M) &\cong \mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}),\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}),M))\\
&\cong \mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}),M)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $f\in \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}),M)$ mit $f(1_{U(\mathfrak{g})})\in M$ identifiziert. Bezeichnet

$$\psi_M : \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})\otimes_K U(\mathfrak{g}),M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}),M)$$

diesen Isomorphismus, so gilt einerseits $\psi_M(\overline{\omega})(e_J) = \overline{\omega}(e_J\otimes 1_{U(\mathfrak{g})})$ und andererseits $\psi_M^{-1}(\omega)(e_J\otimes u) = u\cdot\omega(e_J)$. Damit können wir $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(d_\bullet^{CE},M)$ als einen Korandoperator auf $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}),M)$ verstehen:

$$d^\bullet := \psi_M\circ \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(d_\bullet^{CE},M)\circ\psi_M^{-1} : \mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}),M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}),M).$$

Für diesen gilt:

$$\begin{aligned}
d^\bullet(\omega)(e_J) &= \mathrm{Hom}_K(d_\bullet^{CE},M)(\psi_M^{-1}(\omega))(e_J\otimes 1_{U(\mathfrak{g})}) = (\psi_M^{-1}(\omega)\circ d_\bullet^{CE})(e_J\otimes 1_{U(\mathfrak{g})})\\
&\overset{(3.48)}{=} \sum_{l=1}^{|J|}(-1)^{l-1}u_{j_l}\cdot\omega(e_{J\smallsetminus\{j_l\}}) + \sum_{1\le l<k\le|J|}(-1)^{l+k}\omega(\iota^E([x_{j_l},x_{j_k}])\wedge e_{J\smallsetminus\{j_l,j_k\}}).
\end{aligned}$$

Also stimmen $(\mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}),M),d^\bullet)$ und der in Proposition 1.2.4 definierte Kokettenkomplex überein und in weiterer Folge auch die beiden unterschiedlich definierten Kohomologien von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M.

4 Die Whitehead–Resultate

Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *einfach*, wenn 0 und $\mathfrak{g}$ die einzigen Ideale in $\mathfrak{g}$ sind und $g^1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$ gilt. Wir bezeichnen Lie Algebren *perfekt*, wenn sie $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ erfüllen. Einfache Lie Algebren sind perfekt, weil in diesem Fall $0 \neq \mathfrak{g}^1 \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist. Besitzt $\mathfrak{g}$ keine auflösbaren[1] Ideale $\neq 0$, so nennen wir $\mathfrak{g}$ *halbeinfach*. Zum Beispiel ist jede einfache Lie Algebra auch halbeinfach. Wir werden einige Charakterisierungen halbeinfacher Lie Algebren geben. Dabei spielt das sogenannte lineare Cartan–Kriterium, das wir im Abschnitt 4.1 behandeln werden, eine wesentliche Rolle. Daher erst später mehr. An dieser Stelle wollen wir noch einen dritten wichtigen Lie Algebren–Typ definieren: Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *reduktiv*, wenn jedes auflösbare Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ zentral in $\mathfrak{g}$ liegt, dh. $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$. Laut den Definitionen gilt:

$$\mathfrak{g} \text{ ist einfach } \Rightarrow \mathfrak{g} \text{ ist halbeinfach } \Rightarrow \mathfrak{g} \text{ ist reduktiv.}$$

Ein $\mathfrak{g}$–Modul M heißt *irreduzibel*, wenn M keinen echten Untermodul $\neq 0$ besitzt. Ist zudem M nicht–trivial, dann bezeichnen wir M als *einfachen* $\mathfrak{g}$–Modul. Ist z. B. $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K, so ist der triviale $\mathfrak{g}$–Modul K irreduzibel aber nicht einfach. Hingegen ist jede einfache Lie Algebra bzgl. der adjungierten Darstellung zugleich ein einfacher $\mathfrak{g}$–Modul.

4.1 Bilinearformen und der Casimir–Operator

Zu einer Bilinearform $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper K ist

$$\mathrm{rad}(\beta) := \{x \in \mathfrak{g} | \beta(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

das *Radikal* von β in $\mathfrak{g}$. Ist β *invariant*, dh. $\beta([x, y], z) = \beta(x, [y, z])$ für $x, y, z \in \mathfrak{g}$, so ist $\mathrm{rad}(\beta)$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Falls $\mathrm{rad}(\beta) = 0$, so nennen wir β eine *nicht–ausgeartete* Bilinearform. In diesem Fall findet man zu einer Basis $(z_i)_{1 \le i \le n}$ von $\mathfrak{g}$ eine weitere, eindeutig bestimmte Basis $(z^i)_{1 \le i \le n}$, sodass $\beta(z_i, z^j) = \delta_{ij}$ (Kroneckersymbol) gilt. Wir nennen $(z^i)_{1 \le i \le n}$ die bzgl. β *duale Basis* von $(z_i)_{1 \le i \le n}$. Ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$, so heißt

$$\mathfrak{h}^\perp := \{x \in \mathfrak{g} \mid \beta(x, y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{h}\}$$

der *Orthogonalraum* von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ bzgl. β. Es gilt: $\mathrm{rad}(\beta) = \mathfrak{g}^\perp$. Ist β invariant, so ist auch $\mathfrak{h}^\perp$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$.

[1] Die Definition auflösbarer und nilpotenter Lie Algebren geben wir in Kapitel 5.

Lemma 4.1.1. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie Algebra über einem Körper* K *und* $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M)$ *eine endlich–dim. Darstellung von* $\mathfrak{g}$*. Dann ist*

$$\kappa_\rho : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K \text{ mit } \kappa_\rho(x,y) := \operatorname{tr}(\rho(x)\rho(y))$$

eine symmetrische, invariante Bilinearform von $\mathfrak{g}$*.*

Beweis. Offensichtlich ist κ_ρ eine Bilinearform. Identifizieren wir $\rho(x)$ und $\rho(y)$ durch Matrizen $X = (x_{ij})$ und $Y = (y_{mn})$ in $\mathrm{M}_n(K)$, $n = \dim_K M$, dann folgt aus

$$\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}((x_{ij})(y_{mn})) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_{ij} y_{ji} = \operatorname{tr}((y_{mn})(x_{ij})) = \operatorname{tr}(YX)$$

die Symmetrieeigenschaft der Spurform. Diese wiederum impliziert die Invarianz:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}([X,Y]Z) &= \operatorname{tr}((XY - YX)Z) = \operatorname{tr}(XYZ) - \operatorname{tr}(YXZ) \\ &= \operatorname{tr}(XYZ) - \operatorname{tr}(XZY) = \operatorname{tr}(X(YZ - ZY)) \\ &= \operatorname{tr}(X[Y,Z]). \end{aligned}$$ □

Definition 4.1.2. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich–dim. Lie Algebra über einem Körper K. Die Bilinearform

$$\kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K \text{ mit } \kappa_{\mathfrak{g}} := \kappa_{\mathrm{ad}}(x,y) := \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y))$$

heißt *Killingform* von $\mathfrak{g}$.

Für den weiteren Verlauf von großer Bedeutung ist das sogenannte lineare Cartan–Kriterium. An dieser Stelle sei es nur zitiert. Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [Bu1, Satz 2.2.9].

Satz 4.1.3 (lineares Cartan–Kriterium)**.** *Sei* $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ *eine lineare Lie Algebra über einem Körper* K *der Charakteristik* 0 *und* $\dim_K V < \infty$*. Dann gilt:* $\mathfrak{g}$ *ist genau dann auflösbar, wenn* $\operatorname{tr}(XY) = 0$ *für jedes* $X \in \mathfrak{g}$ *und* $Y \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *gilt.*

Korollar 4.1.4. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie Algebra über einem Körper* K *der Charakteristik* 0*. Dann ist* $\mathfrak{g}$ *genau dann auflösbar, wenn* $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$ *gilt.*

Beweis. Indem man beachtet, dass $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar ist, wenn $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ auflösbar ist, folgt der Beweis aus dem linearen Cartan–Kriterium 4.1.3. Für Details sei wiederum auf das Skript [Bu1, Kor. 2.2.10] verwiesen. □

Eine weitere Anwendung des linearen Cartan–Kriterium findet sich im folgenden

Lemma 4.1.5. *Für jede endl.–dim. Darstellung* $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ *einer halbeinfachen Lie Algebra* $\mathfrak{g}$ *gilt:*

$$\operatorname{rad}(\kappa_\rho) = \ker(\rho).$$

Insbesondere gilt für jedes Komplement $\mathfrak{h}$ *von* $\ker(\rho)$ *in* $\mathfrak{g}$ *(dh.* $\mathfrak{g} = \ker(\rho) \oplus \mathfrak{h}$*):*

$$\kappa_{\rho_{|\mathfrak{h}}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow K \textit{ ist nicht ausgeartet.}$$

Beweis. Offensichtlich gilt $\ker(\rho) \subseteq \mathrm{rad}(\kappa_\rho)$.

Umgekehrt betrachten wir $\mathfrak{k} := \rho(\mathrm{rad}(\kappa_\rho)) \trianglelefteq \rho(\mathfrak{g})$ in $\mathfrak{gl}(V)$: Nach Voraussetzung gilt $\mathrm{tr}(XY) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{k}$ und $Y \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$. Damit ist aber $\mathfrak{k}$ nach dem Cartan Kriterium 4.1.3 ein auflösbares Ideal in $\rho(\mathfrak{g})$ und daher $\mathfrak{k} = 0$. Denn $\rho(\mathfrak{g})$ ist als homomorphes Bild ein halbeinfachen Lie Algebra selbst halbeinfach. Damit erhalten wir $\mathrm{rad}(\kappa_\rho) \subseteq \ker(\rho)$. □

Bemerkung 4.1.6. Sei $\mathfrak{g}$ ein Lie Algebra über einem Körper K, $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ und $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ eine Bilinearform auf $\mathfrak{g}$.

(1) Ist β invariant, dann ist der Orthogonalraum $\mathfrak{a}^\perp$ von $\mathfrak{a}$ bzgl. β ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Denn für jedes $x \in \mathfrak{a}^\perp$ und $y \in \mathfrak{g}$ gilt:

$$\beta([x,y],z) = \beta(x,[y,z]) = 0 \text{ für alle } z \in \mathfrak{a}$$

woraus $[x,y] \in \mathfrak{a}^\perp$ folgt.

(2) Es gilt folgende Dimensionsformel:

$$\dim_K \mathfrak{g} = \dim_K \mathfrak{a} + \dim_K \mathfrak{a}^\perp - \dim_K \mathfrak{a} \cap \mathrm{rad}(\beta). \tag{4.1}$$

Denn für die lineare Abbildung $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}^*$ mit $\phi(x) = \beta(-,x)_{|\mathfrak{a}}$ gilt: $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathfrak{a}^\perp$ und $\mathrm{Im}(\phi) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \lambda_{|\mathfrak{a}\cap \mathrm{rad}\,\beta} = 0\}$. Zusammen mit $\dim_K \mathfrak{g} = \dim_K \mathrm{Ker}(\phi) + \dim_K \mathrm{Im}(\phi)$ folgt die Behauptung.

(3) Für die Killingform $\kappa_\mathfrak{g}$ gilt:

$$\kappa_{\mathfrak{g}|\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}} = \kappa_\mathfrak{a}. \tag{4.2}$$

Dh. die Einschränkung der Killingform $\kappa_\mathfrak{g}$ auf ein Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$ stimmt mit der Killingform $\kappa_\mathfrak{a}$ der Lie Algebra $\mathfrak{a}$ überein. Dies folgt aus der Tatsache, dass $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(x)$ für jedes $x \in \mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{a}$ abbildet. Denn damit gilt: $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(x)\,\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(y)) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(x)\,\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(y)_{|\mathfrak{a}}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{a}(x)\,\mathrm{ad}_\mathfrak{a}(y))$.

Es gelten folgende Charakterisierungen halbeinfacher Lie Algebren (s. [H, Chap. II, Subsec. 5.1 u. 5.2]):

Proposition 4.1.7. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper* K*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach (*$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$*).*

(ii) $\mathfrak{g}$ *besitzt kein abelsches Ideal* $\mathfrak{a} \neq 0$ *(*$\Leftrightarrow$ $\mathrm{nil}(\mathfrak{g}) = 0$*).*

Besitzt K *Charakteristik* 0*, so ist dazu äquivalent:*

(iii) $\mathfrak{g}$ *ist direkte Summe ihrer einfachen Ideale.*

(iv) Die Killingform ist nicht ausgeartet (dh. $\mathrm{rad}(\kappa) = 0$*).*

Beweis. (i)⇒(ii): Jedes abelsche Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ ist auflösbar, also $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$.

(ii)⇒(i): Ist $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$, dann ist für ein $n > 0$ das Ideal $\mathfrak{a} := \mathrm{rad}(\mathfrak{g})^{(n-1)} \neq 0$ und $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})^{(n)} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$, also $\mathfrak{a}$ ein abelsches Ideal $\neq 0$.

(i)⇒(iv): Aus dem Lemma 4.1.5 folgt sofort:

$$\mathrm{rad}(\kappa_{\mathfrak{g}}) = \ker(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}) = \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = 0.$$

(iv)⇒(ii): Sei $\mathfrak{a}$ ein abelsches Ideal in $\mathfrak{g}$ und $x \in \mathfrak{a}$ fix gewählt. Dann gilt für jedes $y \in \mathfrak{g}$: $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ und daher $(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))^2 = 0$ weil $\mathfrak{a}$ abelsch ist. Nilpotenz impliziert triviale Spur: $\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$. Da dies für alle $y \in \mathfrak{g}$ gilt und $\kappa_{\mathfrak{g}}$ nicht ausgeartet ist, folgt $x = 0$ und damit $\mathfrak{a} = 0$.

(iv)⇒(iii): Ist $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie Algebra, so ist nichts zu zeigen. Besitzt hingegen $\mathfrak{g}$ ein echtes Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$, so ist Bemerkung 4.1.6 (1) zufolge auch $\mathfrak{a}^{\perp}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Für das Ideal $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ gilt dann: $0 = \kappa_{\mathfrak{g}|\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}} \overset{(4.2)}{=} \kappa_{\mathfrak{b}}$ wonach $\mathfrak{b}$ auflösbar ist (Korollar 4.1.4) und daher $\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$. Aus Dimensionsgründen (siehe (4.1)) folgt daher insgesamt $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$. Da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^{\perp}$ direkte Summanden sind, sind ihre Ideale auch Ideale in $\mathfrak{g}$. Sie haben daher keine abelschen Ideale $\neq 0$. Nach (ii) ⇔ (i) sind beide also halbeinfach woraus wir induktiv folgern: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ mit einfachen a_i's.

Für ein einfaches Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ ist $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_i]$ ein Ideal in $\mathfrak{a}_i$ und daher 0 oder $\mathfrak{a}_i$. Weil $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}, \bigoplus \mathfrak{a}_i] = \bigoplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_i]$ gilt, existiert genau ein i mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_i$. □

Korollar 4.1.8. *Jede endl.dim. halbeinfache Lie Algebra* $\mathfrak{g}$ *über einem Körper* K *der Charakteristik* 0 *ist perfekt.*

Beweis. Dies folgt aus (iii) obiger Proposition:

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\bigoplus_i \mathfrak{g}_i, \bigoplus_i \mathfrak{g}_i] = \bigoplus_i [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}. \qquad \square$$

Sei nun $\mathfrak{g}$ eine endl.dim. halbeinfache Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 und (M, ρ) eine endl.–dim. Darstellung von $\mathfrak{g}$ ungleich Null. Dann existiert laut (iii) in Proposition 4.1.7 zu dem Ideal $\ker(\rho) \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein Komplement $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$, dh. $\mathfrak{g} = \ker(\rho) \oplus \mathfrak{h}$. Nach Lemma 4.1.5 ist $\kappa_{\rho|\mathfrak{h}}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform auf $\mathfrak{h}$ sodass zu jeder Basis $(z_i)_{1\le i\le n}$ von $\mathfrak{h}$ eine bzgl. dieser Bilinearform duale Basis $(z^i)_{1\le i\le n}$ existiert. Wir definieren nun dazu ([H, Chap. II, Subsec. 6.2], [CE, S. 117]:

Definition 4.1.9. Der lineare Endomorphismus $\Omega_\rho : M \longrightarrow M$, definiert durch

$$\Omega_\rho := \sum_{i=1}^{n} \rho(z_i)\rho(z^i),$$

heißt *Casimir–Operator* von $\mathfrak{g}$ zur Darstellung $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M)$.

Wir zeigen nun, dass Ω_ρ ein nicht–trivialer $\mathfrak{g}$–Modul–Endomorphismus ist. Dazu benötigen wir unter anderem folgendes, eher technisches, Lemma:

Lemma 4.1.10 ([CE, (24.1)]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K mit $\mathrm{char}(K) = 0$, $\mathfrak{h}$ ein endl.–dim. Ideal in $\mathfrak{g}$ sowie $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ eine invariante Bilinearform. Ist β auf $\mathfrak{h}$ nicht–ausgeartet sodass zu jeder Basis $(z_i)_{1\le i\le n}$ von $\mathfrak{h}$ eine bzgl. β duale Basis $(z^i)_{1\le i\le n}$ existiert, dann gilt für jedes $f \in \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}, M)$, M ein $\mathfrak{g}$–Modul:*

$$\sum_{i=1}^{n} [z_i, x] \cdot f(z^i) = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot f([x, z^i]). \tag{4.3}$$

Beweis. Für ein $x \in \mathfrak{g}$ seinen $a_{ij}, a^{ij} \in K$ so, dass $[z_i, x] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j$ und $[x, z^j] = \sum_{i=1}^{n} a^{ij} z^i$ gilt ($[x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$). Da $\beta(z_i, z^j) = \delta_{ij}$ (Kroneckersymbol) und β invariant ist, erhalten wir

$$a_{ij} = \beta([z_i, x], z^j) = \beta(z_i, [x, z^j]) = a^{ij}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} [z_i, x] \cdot f(z^i) &= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j) \cdot f(z^i) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} z_j \cdot f(z^i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot f(\sum_{i=1}^{n} a^{ij} z^i) = \sum_{j=1}^{n} z_j \cdot f([x, z^j]).\end{aligned}$$ □

Proposition 4.1.11. *Der Casimir–Operator Ω_ρ einer halbeinfachen Lie Algebra mit Darstellung $\rho \neq 0$ ist ein nicht–trivialer $\mathfrak{g}$–Modul–Endomorphismus.*

Beweis. Für jedes $x \in \mathfrak{g}$ gilt erst einmal:

$$z_i \cdot (z^i \cdot (x \cdot m)) - x \cdot (z_i \cdot (z^i \cdot m)) = z_i \cdot ([z^i, x] \cdot m) + [z_i, x] \cdot (z^i \cdot m). \tag{4.4}$$

Damit folgt aber für jedes $m \in M$:

$$\Omega_\rho(x \cdot m) - x \cdot \Omega_\rho(m) \overset{(4.4)}{=} \sum_{i=1}^{n} (z_i \cdot ([z^i, x] \cdot m) + [z_i, x] \cdot (z^i \cdot m)) \overset{(4.3)}{=} 0.$$

Dh. Ω_ρ ist ein $\mathfrak{g}$–Modul–Endomorphismus. Dass er $\neq 0$ ist, zeigen wir durch Berechnung seiner Spur:

$$\mathrm{tr}(\Omega_\rho) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(\rho(z_i)\rho(z^i)) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_\rho(z_i, z^i) = \sum_{i=1}^{n} 1 = \dim_K \mathfrak{h} \neq 0.$$ □

4.2 Das Whitehead–Theorem

Das klassische Whitehead–Theorem (s. [CE, Thm. 4.1]) besagt, dass für jede endl.–dim. Lie Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper K der Charakteristik 0 und jeden endl.–dim.

einfachen $\mathfrak{g}$–Modul M gilt:

$$H^p(\mathfrak{g}, M) = 0 \text{ für alle } p \geq 0.$$

In diesem Abschnitt werden wir nicht nur einen Beweis dafür erbringen, sondern auch einfache Verallgemeinerungen dieses Resultats aufzeigen. Einerseits kann man die Bedingung "M ist einfach" durch $M^{\mathfrak{g}} = 0$ ersetzen (siehe Proposition 4.2.3), andererseits gilt die Behauptung auch für nilpotente Lie Algebren (Satz 4.2.5) sowie für die direkte Summe einer halbeinfachen und einer nilpotenten Lie Algebra (Satz 4.2.7). Bevor wir das Whitehead–Theorem beweisen, benötigen wir noch folgendes

Lemma 4.2.1 ([CE, (24.3)])**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K und M ein $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt für jedes $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, M)$ und $f \in \operatorname{End}_K(M)$:*

$$(df\omega - fd\omega)(x_0^p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (x_i \cdot f)(\omega({}_ix_0^p)). \tag{4.5}$$

Beweis. Dies lässt sich einfach verifizieren:

$$\begin{aligned}
(df\omega - fd\omega)(x_0^p) &\overset{(1.12)}{=} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \Big(x_i \cdot (f\omega({}_ix_o^p)) - f\omega(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i+1}^p) \\
&\qquad - f\Big(x_i \cdot \omega({}_ix_0^p) - \omega(x_0^{i-1} \wedge x_i \cdot x_{i+1}^p)\Big)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \Big(x_i \cdot (f\omega({}_ix_0^p)) - f\Big(x_i \cdot \omega({}_ix_0^p)\Big)\Big) \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \Big(x_i \cdot f\Big)(\omega({}_ix_0^p))
\end{aligned}$$

□

Theorem 4.2.2 (Whitehead)**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. halbeinfache Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0. Dann gilt für jeden endlich–dim. einfachen $\mathfrak{g}$–Modul M:*

$$H^p(\mathfrak{g}, M) = 0 \text{ für alle } p \geq 0.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $H^0(\mathfrak{g}, M) = M^{\mathfrak{g}} = 0$. Für $p > 0$ zeigen wir: Jeder p–Kozykel ist ein Korand. Daraus folgt dann unmittelbar $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Als einfacher $\mathfrak{g}$–Modul ist (M, ρ) insbesondere nicht trivial sodass zu $\ker(\rho)$ ein Komplement $\mathfrak{h} \neq 0$ in $\mathfrak{g}$ existiert. Nach Lemma 4.1.5 ist die Bilinearform $\kappa_{\rho|\mathfrak{h}}$ auf $\mathfrak{h}$ nicht ausgeartet. Also besteht zu einer gewählten Basis $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ von $\mathfrak{h}$ eine bzgl. $\kappa_{\rho|\mathfrak{h}}$ duale Basis $(z^i)_{1\leq i\leq n}$. Zu einem p–Kozykel $\omega \in Z^p(\mathfrak{g}, M)$ definieren wir nun eine $p-1$–Kokette

$$\bar{\omega} := \sum_{i=1}^{n} \rho(z_i)\omega_{z^i} \in C^{p-1}(\mathfrak{g}, M),$$

und zeigen:

$$d^{p-1}\bar{\omega} = \Omega_\rho \omega.$$

Für ein $x_1^p \in \Lambda^p(\mathfrak{g})$ gilt erst einmal:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(d^{p-1}\rho(z_i)\omega_{z^i} - \rho(z_i)d^{p-1}\omega_{z^i})(x_1^p) &\overset{(4.5)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}(x_j\cdot\rho(z_i))(\omega_{z^i}({}_jx_1^p)) \\
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j-1}\rho(x_j\cdot z_i)(\omega_{z^i}({}_jx_1^p)) \\
&\overset{(4.3)}{=} \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\rho(z_i)(\omega_{[z^i,x_i]}({}_ix_1^p)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\rho(z_i)\omega)(z^i\cdot x_1^p)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
(d^{p-1}\bar{\omega})(x_1^p) &= \sum_{i=1}^{n} d^{p-1}(\rho(z_i)\omega_{z^i})(x_1^p) \overset{(4.6)}{=} \sum_{i=1}^{n}\big(\rho(z_i)(d^{p-1}\omega_{z^i})(x_1^p) + \rho(z_i)\omega(z^i\cdot x_1^p)\big) \\
&\overset{(1.12)}{=} \sum_{i=1}^{n}\rho(z_i)\big((z^i\cdot\omega)(x_1^p) + \omega(z^i\cdot x_1^p)\big) \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{i=1}^{n} z_i\cdot(z^i\cdot\omega(x_1^p)) = \Omega_\rho\omega(x_1^p).
\end{aligned}$$

Nun ist aber $\mathrm{Im}(\Omega_\rho)$ als Bild eines nicht–trivialen $\mathfrak{g}$–Modul ein nicht–trivialer Untermodul von M und daher gleich M, denn M ist einfach. Da M endl.–dim. ist, ist also Ω_ρ ein Automorphismus womit sich zeigt, dass der p–Kozykel ω ein p–Korand ist:

$$\omega = \Omega_\rho^{-1}d^p\bar{\omega} \overset{(4.5)}{=} d^p(\Omega_\rho^{-1}\bar{\omega}).$$ □

Ein alternativer Beweis des Whitehead–Theorem, der auf der axiomatischen Definition der Kohomologie von Lie Algebren basiert, findet sich in [W, Thm. 7.8.9].

Die folgende Proposition erlaubt es uns, das Whitehead–Theorem etwas allgemeiner zu formulieren.

Proposition 4.2.3. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ *für alle* $p \in \mathbb{Z}$ *und alle einfachen, endl.–dim.* $\mathfrak{g}$*–Moduln* M.

(ii) $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ *für alle* $p \in \mathbb{Z}$ *und alle endl.–dim.* $\mathfrak{g}$*–Moduln* M *mit* $M^{\mathfrak{g}} = 0$.

Beweis. (i)⇒(ii): Wir zeigen diese Richtung induktiv nach $\dim_K M$. Sei also $M^{\mathfrak{g}} = 0$. Für den Induktionsanfang $\dim_K M = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\dim_K M > 0$. Ist M irreduzibel, so ist wiederum nichts zu zeigen denn in diesem Fall ist auf Grund von $M^{\mathfrak{g}} = 0$ M ein einfacher $\mathfrak{g}$–Modul. Wir setzen daher voraus, dass M einen echten

Untermodul $0 \subsetneq N \subsetneq M$ von M besitzt. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

induziert nach Satz 1.3.1 eine lange exakte Sequenz der Kohomologiegruppen:

$$\begin{aligned} &0 \to N^{\mathfrak{g}} \to M^{\mathfrak{g}} \to (M/N)^{\mathfrak{g}} \to H^1(\mathfrak{g}, N) \to \cdots \\ &\cdots \longrightarrow H^p(\mathfrak{g}, N) \longrightarrow H^p(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow H^p(\mathfrak{g}, M/N) \longrightarrow H^{p+1}(\mathfrak{g}, N) \longrightarrow \cdots . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Mit $M^{\mathfrak{g}} = 0$ geht aus ihr $N^{\mathfrak{g}} = 0$ hervor sodass nach Induktionsvoraussetzung

$$H^p(\mathfrak{g}, N) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{Z}$$

gilt. Mit nochmaligen Blick auf die lange exakte Sequenz folgt daraus aber sofort $(M/N)^{\mathfrak{g}} = 0$. Damit ist wiederum nach Induktionsvoraussetzung auch

$$H^p(\mathfrak{g}, M/N) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{Z}.$$

Folglich ist die lange exakte Sequenz trivial, insbesondere $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.

(ii)⇒(i): Ist M ein einfacher $\mathfrak{g}$–Modul, dann gilt insbesondere $M^{\mathfrak{g}} = 0$. Damit ist aber nach Voraussetzung $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. □

Korollar 4.2.4. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. halbeinfache Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik* 0*. Dann gilt für jeden endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul M mit $M^{\mathfrak{g}} = 0$:*

$$H^p(\mathfrak{g}, M) = 0 \textit{ für alle } p \geq 0.$$

Wir wollen nun das Whitehead–Theorem auf weitere Typen von Lie Algebren ausweiten. Im Falle von endl.–dim. nilpotenten Lie Algebren ist dies auch möglich:

Satz 4.2.5 ([Ba1, Lem. 3])**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. nilpotente Lie Algebra über einem Körper K. Dann gilt für jeden endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul M mit $M^{\mathfrak{g}} = 0$:*

$$H^p(\mathfrak{g}, M) = 0 \textit{ für alle } p \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Wir nehmen an M sei ein einfacher $\mathfrak{g}$–Modul und zeigen die Aussage in diesem Fall induktiv nach $\dim_K \mathfrak{g}$. Der allgemeine Fall folgt dann aus Proposition 4.2.3. Ist $\dim_K \mathfrak{g} = 1$ so gilt

$$H^0(\mathfrak{g}, M) \cong M^{\mathfrak{g}} \cong M/\mathfrak{g} \cdot M \cong H^1(\mathfrak{g}, M) \tag{4.8}$$

woraus sofort der Induktionsanfang folgt.

Sei nun $\dim_K \mathfrak{g} > 1$ und die Induktionsvoraussetzung gelte für alle Lie Algebren $\mathfrak{g}'$ mit $\dim_K \mathfrak{g}' < \dim_K \mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, gilt $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0$ und damit existiert ein eindimensionales Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$. Für die Hochschild–Serre–Spektralsequenz von $\mathfrak{g}$ bzgl.

diesem Ideal $\mathfrak{a}$ weisen wir $E_2 = 0$ nach indem wir, nach Korollar 2.4.3,

$$H^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}, H^q(\mathfrak{a}, M)) = 0 \text{ für jedes } p, q \in \mathbb{Z} \tag{4.9}$$

zeigen. Dazu betrachten wir die beiden Fälle $M^{\mathfrak{a}} = 0$ und $M^{\mathfrak{a}} = M$, die, weil $M^{\mathfrak{a}}$ ein $\mathfrak{g}$–Untermodul von M ist, die einzig möglichen sind:

(a): Falls $M^{\mathfrak{a}} = 0$ ist, folgt nach Induktionsvoraussetzung $H^q(\mathfrak{a}, M) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ und somit (4.9).

(b): Ist hingegen $M^{\mathfrak{a}} = M$, dann ist M ein $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$–Modul mit $M^{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} = 0$ und nach (4.8)

$$H^0(\mathfrak{a}, M) \cong M \cong H^1(\mathfrak{a}, M).$$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung für $q = 0, 1$ und auf Grund der Tatsache, dass $H^q(\mathfrak{a}, M) = 0$ für $q \geq 2$ gilt, folgt (4.9). □

Lemma 4.2.6 ([Z2]). *Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2$ die direkte Summe zweier Lie Algebren über einem beliebigen Körper K und M ein einfacher $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gibt es ein $i \in \{1, 2\}$ sodass $M^{\mathfrak{k}_i} = 0$ gilt.*

Beweis. Angenommen $M^{\mathfrak{k}_1} \neq 0$. Da $[\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2] = 0$ ist, folgt

$$\mathfrak{k}_1 \cdot (\mathfrak{k}_2 \cdot M^{\mathfrak{k}_1}) = \mathfrak{k}_2 \cdot (\mathfrak{k}_1 \cdot M^{\mathfrak{k}_1}) = 0$$

und damit ist $M^{\mathfrak{k}_1}$ ein nicht–trivialer $\mathfrak{g}$–Untermodul, also gleich M. Wären beide Invariantenmoduln $M^{\mathfrak{k}_i} \neq 0$, so folgt der Widerspruch zu M ist einfacher $\mathfrak{g}$–Modul. □

Satz 4.2.7 ([Z2]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 welche direkte Summe einer halbeinfachen und einer nilpotenten Lie Algebra ist. Dann gilt für jeden endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul M mit $M^{\mathfrak{g}} = 0$:*

$$H^p(\mathfrak{g}, M) = 0 \text{ für jedes } p \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Auf Grund von Proposition 4.2.3 reicht es, die Behauptung nur für einfache $\mathfrak{g}$–Moduln nachzuweisen. Sei also M ein einfacher $\mathfrak{g}$–Modul. Nach Lemma 4.2.6 besitzt dann einer der beiden direkten Summanden $\mathfrak{k}_1$ oder $\mathfrak{k}_2$ einen trivialen Invarianten–Modul. Sei o.B.d.A. $M^{\mathfrak{k}_2} = 0$. Bilden wir die Hochschild–Serre–Spektralsequenz von $\mathfrak{g}$ bezüglich dem Ideal $\mathfrak{k}_2$, so erhalten wir nach Satz 2.4.5 für jedes $p \in \mathbb{Z}$

$$H^p(\mathfrak{g}, M) \cong_K \bigoplus_{i+j=p} H^i(\mathfrak{k}_1, H^j(\mathfrak{k}_2, M)).$$

Falls $\mathfrak{k}_2$ der halbeinfache Summand ist, so folgt aus dem Korollar 4.2.4 $H^j(\mathfrak{k}_{\sigma(2)}, M) = 0$, im nilpotenten Fall folgt dasselbe aus Satz 4.2.5. In beiden Fällen ist für jedes $p \in \mathbb{Z}$ daher $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$. □

Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, dass jede reduktive Lie Algebra $\mathfrak{g}$ direkte Summe ihrer Kommutatoralgebra $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ und ihrem Zentrum $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ ist und $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ halbeinfach ist (Korollar 4.4.8). Daraus erschließt sich aber sofort das folgende

Korollar 4.2.8 ([HS, Thm. 10])**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. reduktive Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0. Dann gilt für jeden endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul M mit $M^{\mathfrak{g}} = 0$:*

$$H^p(\mathfrak{g},M) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{Z}.$$

4.3 Die Whitehead–Lemmata

Satz 4.3.1 (1. Whitehead–Lemma)**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. halbeinfache Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt*

$$H^1(\mathfrak{g},M) = 0.$$

Beweis. Wir zeigen den Satz durch Induktion nach $\dim_K M$. Der Fall $\dim_K M = 0$ ist trivial. Sei also $\dim_K M > 0$. Ist M ein irreduzibler $\mathfrak{g}$–Modul, so unterscheiden wir dabei zwei Fälle:

a) M ist einfach: Dann folgt die Behauptung aus dem Whitehead–Theorem 4.2.2.

b) M ist der triviale $\mathfrak{g}$–Modul K: Dann folgt die Behauptung aus (1.14) unter Berücksichtigung von Korollar 4.1.8.

Ist hingegen M nicht irreduzibel, dann existiert ein echter Untermodul $0 \subsetneq N \subsetneq M$. Die daraus gebildete kanonische kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ von $\mathfrak{g}$–Moduln induziert nach Satz 1.3.1 eine lange exakte Sequenz (4.7). Da nach I.V. $H^1(\mathfrak{g},N) = H^1(\mathfrak{g},M/N) = 0$ folgt aus ihr sofort $H^1(\mathfrak{g},M) = 0$. □

Satz 4.3.2 (2. Whitehead–Lemma)**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. halbeinfache Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt*

$$H^2(\mathfrak{g},M) = 0.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zuerst für den Fall $M = K$, K der triviale $\mathfrak{g}$–Modul: Sei $\omega \in C^2(\mathfrak{g},K)$ und $\widetilde{\omega} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g},K)$ jene Abbildung, welche durch $\widetilde{\omega}(x) := \omega_x$ definiert ist. Offensichtlich gilt $\widetilde{\omega} \in C^1(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g},K))$. Sei $\widetilde{d^p} := d^p(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g},K))$ wobei $\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g},K)$ die kanonische $\mathfrak{g}$–Modul–Struktur (1.4) besitzt. Dann gilt:

$$(\widetilde{d^1}\widetilde{\omega})(x_0^1) \overset{(1.12)}{=} x_0 \cdot \widetilde{\omega}(x_1) - x_1 \cdot \widetilde{\omega}(x_0) - \widetilde{\omega}([x_0,x_1]).$$

Für jedes $x_2 \in \mathfrak{g}$ folgt daraus:

$$(\widetilde{d^1}\widetilde{\omega})(x_0^1)(x_2) = -\omega(x_1 \wedge [x_0,x_2]) + \omega(x_0 \wedge [x_1,x_2]) - \omega([x_0,x_1] \wedge x_2) \overset{(1.13)}{=} (d^2\omega)(x_0^2).$$

Damit ist für jedes $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, K)$ auch $\widetilde{\omega} \in Z^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}, K))$, nach dem 1. Whitehead–Lemma also $\widetilde{\omega} \in B^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}, K))$. Dh. es existiert ein $f \in \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}, K)$, sodass $\widetilde{\omega}(x) = x \cdot f$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt und folglich

$$\omega(x_1^2) = \widetilde{\omega}(x_1)(x_2) = (x_1 \cdot f)(x_2) = -f([x_1, x_2]).$$

Gemäß (1.15)) gilt daher $\omega \in B^2(\mathfrak{g}, K)$. Damit haben wir $Z^2(\mathfrak{g}, K) = B^2(\mathfrak{g}, K)$ gezeigt, was $H^2(\mathfrak{g}, K) = 0$ zufolge hat.

Den allgemeinen Fall zeigt man wie im Beweis des 1. Whitehead–Lemma durch Induktion nach $\dim_K M$. Eine Beweisalternative findet sich z. B. in [HiSt, Chap. VII]. □

4.4 Anwendungen der Whitehead–Resultate

Ist M ein $\mathfrak{g}$–Modul und U ein Untermodul von M, dann nennen wir W ein *Komplement* von U in M, wenn W ein Untermodul von M ist und $M = U \oplus W$ gilt. Besitzt jeder Untermodul von M ein Komplement, so bezeichnen wir M *komplementär*. Offensichtlich ist jeder irreduzible und jeder einfache $\mathfrak{g}$–Modul komplementär. Triviale $\mathfrak{g}$–Moduln (dh. $x \cdot m = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}, m \in M$) sind weitere Beispiele komplementärer $\mathfrak{g}$–Moduln.

Proposition 4.4.1 ([J2, Thm. 3.10])**.** *Sei M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt: M ist genau dann komplementär, wenn M* vollständig reduzibel *ist, dh.*

$$M = M_1 + \cdots + M_r = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$$

wobei die M_i's paarweise verschiedene, irreduzible Untermoduln von M sind.

Beweis. Ist M ein komplementärer $\mathfrak{g}$–Modul, dann auch jeder Untermodul N von M: Zu jedem Untermodul P von N existiert ein Komplement P' von P in M: $M = P \oplus P'$. Nach dem Modularitätsprinzip gilt $N = M \cap N = P + (P' \cap N)$ und wegen $P \cap (P' \cap N) = (P \cap P') \cap N = 0$ ist diese Summe direkt. Damit ist auch N komplementär.

Induktiv nach $n = \dim_K M$ folgt nun die Richtung "⇒": Für den Fall $\dim_K M = 1$ ist trivialerweise nichts zu zeigen, denn in diesem Fall ist M irreduzibel. Sei also M ein komplementärer $\mathfrak{g}$–Modul mit $\dim_K M > 0$ und die Induktionsvoraussetzung gelte für alle $\mathfrak{g}$–Modul $\overline{M}$ mit $\dim_K \overline{M} < \dim_K M$. Ist N ein echter Untermodul von M (ansonsten ist M irreduzibel), so existiert nach Voraussetzung ein Komplement N' von N in M: $M = N \oplus N'$. Auf N und N' können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden woraus sofort die Behauptung folgt.

Die Umkehrung "⇐", dass nämlich jeder Untermodul $N \neq 0$ eines vollständig reduziblen $\mathfrak{g}$–Modul's M ein Komplement in M besitzt, zeigen wir induktiv nach $d = \dim_K M - \dim_K N$. Für den Fall $d = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $M = M_1 \oplus$

$\cdots \oplus M_r$ ein vollständig reduzibler $\mathfrak{g}$–Modul, $N \neq 0$ ein echter Untermodul und die Induktionsvoraussetzung gelte für alle $\overline{N} \subseteq \overline{M}$ mit $\dim_K \overline{M} - \dim_K \overline{N} < d$. Da $N \cap M = N \subsetneq M$ existiert ein $1 \leq i \leq r$ mit $M_i \cap N \neq M_i$ und weil M_i irreduzibel ist, folgt $M_i \cap N = 0$. Sei o.B.d.A. $i = r$, dann ist N ein Untermodul von $\overline{M} := M_1 \oplus \cdots \oplus M_{r-1}$. Nach I.V. besitzt N ein Komplement $\overline{N}'$ in $\overline{M}$: $\overline{M} = N \oplus \overline{N}'$. Damit ist aber $\overline{N}' \oplus M_r$ ein Komplement von N in M: $M = \overline{M} \oplus M_r = (N \oplus \overline{N}') \oplus M_r = N \oplus (\overline{N}' \oplus M_r)$. □

Theorem 4.4.2 (Weyl)**.** *Jeder endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul M einer endl.–dim. halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper K der Charakteristik 0 ist vollständig reduzibel.*

Beweis. Zu jedem Untermodul N von M betrachten wir die kanonische Erweiterung $\xi : 0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$. Sie ist splittend, denn auf Grund des Satzes 1.4.4 und des 1. Whitehead Lemma's 4.3.1 gilt:

$$[\xi] \in \operatorname{Ext}_{\mathfrak{g}}(M/N, N) \cong H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Hom}_K(M/N, N)) = 0.$$

Dh. M ist komplementär, nach Proposition 4.4.1 also vollständig reduzibel. □

Korollar 4.4.3 ([Bu1, Kor. 1.3.15])**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. halbeinfache Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann ist*

$$H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = H^\bullet(\mathfrak{g}, M^{\mathfrak{g}}) \cong H^\bullet(\mathfrak{g}, K) \otimes M^{\mathfrak{g}}.$$

Beweis. Nach dem Satz von Weyl 4.4.2 können wir M als direkte Summe irreduzibler Untermoduln M_i schreiben:

$$M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i.$$

Damit erhalten wir für die p–te Kohomologiegruppe:

$$H^p(\mathfrak{g}, M) = \bigoplus_{i=1}^{r} H^p(\mathfrak{g}, M_i).$$

Ist nun M_i ein einfacher $\mathfrak{g}$–Modul, so folgt nach Theorem 4.2.2 $H^p(\mathfrak{g}, M_i) = 0$. Ist hingegen M_i ein trivialer irreduzibler Untermodul, so ist $M_i \cong K$ und da die Summe all dieser Untermoduln gleich dem Invariantenmodul $M^{\mathfrak{g}}$ ist, folgt sofort die Behauptung. □

Lemma 4.4.4 ([CE, (19.2)])**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$ und M ein trivialer $\mathfrak{g}$–Modul. Dann ist jede $\mathfrak{g}$–invariante Kokette ein Kozykel.*

Beweis. Da der Fall $p = 0$ trivial ist, nehmen wir $p > 0$ an. Ist nun $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, M)^{\mathfrak{g}}$, also mit $x \cdot \omega = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$, dann folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i (x_i\cdot\omega)({}_i x_0^p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\big(\overbrace{x_i\cdot\omega({}_i x_0^p)}^{=0} - \omega(x_i\cdot {}_i x_0^p)\big)\\
&= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\big(2x_i\cdot\omega({}_i x_0^p) - \omega(x_i\cdot x_0^{i-1}\wedge x_{i+1}^p) - \omega(x_0^{i-1}\wedge x_i\cdot x_{i+1}^p)\big)\\
&\overset{(1.38)}{=} 2\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\big(x_i\cdot\omega({}_i x_0^p) - \omega(x_0^{i-1}\wedge x_i\cdot x_{i+1}^p)\big)\\
&= 2\, d^p\omega(x_0^p).
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\operatorname{char} K \neq 2$ gilt, folgt daraus die Behauptung. □

Satz 4.4.5 ([CE, Thm. 19.1]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. halbeinfache Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt für die Kohomologie von $\mathfrak{g}$ mit Werten in M:*

$$H^p(\mathfrak{g}, M) \cong C^p(\mathfrak{g}, M^{\mathfrak{g}})^{\mathfrak{g}}$$

Beweis. Auf Grund von Korollar 4.4.3 können wir M als trivialen $\mathfrak{g}$–Modul annehmen. Anstelle von $B^p(\mathfrak{g}, M)$, $Z^p(\mathfrak{g}, M)$ und $C^p(\mathfrak{g}, M)$ schreiben wir kurz B^p, Z^p und C^p. Sei $p \geq 0$ fix gewählt. Weil für alle $x \in \mathfrak{g}$

$$x\cdot Z^p \overset{(1.11)}{\subseteq} B^p \subseteq Z^p. \tag{4.10}$$

gilt, ist B^p ein Untermodul von Z^p. Daher existiert nach dem Satz von Weyl 4.4.2 ein Komplement T^p von B^p in Z^p:

$$Z^p = B^p \oplus T^p.$$

Nun gilt sowohl $x\cdot T^p \subseteq T^p$ als auch $x\cdot T^p \overset{(4.10)}{\subseteq} B^p$, insgesamt also $x\cdot T^p = 0$, dh. $T^p \subseteq (C^p)^{\mathfrak{g}}$. Damit gilt aber nach Dedekind's Modularitätsprinzip

$$(C^p)^{\mathfrak{g}} \overset{4.4.4}{=} Z^p \cap (C^p)^{\mathfrak{g}} = (B^p \cap (C^p)^{\mathfrak{g}}) + T^p.$$

Indem wir $B^p \cap (C^p)^{\mathfrak{g}} = 0$ zeigen, folgt dann die Behauptung $(C^p)^{\mathfrak{g}} = T^p \cong H^p(\mathfrak{g}, M)$: Dazu sei D^{p-1} ein Komplement von Z^{p-1} in C^{p-1} (Satz von Weyl), dh. $C^{p-1} = Z^{p-1} \oplus D^{p-1}$. Für ein $\omega \in B^p \cap (C^p)^{\mathfrak{g}}$ wählen wir ein $\bar\omega \in D^{p-1}$ mit $d^{p-1}(\bar\omega) = \omega$. Weil d^{p-1} ein $\mathfrak{g}$–Modul–Homomorphismus ist (siehe Proposition 1.2.4), gilt für jedes $x \in \mathfrak{g}$:

$$d(x\cdot\bar\omega) = x\cdot d\bar\omega = x\cdot\omega = 0.$$

Somit folgt $x\cdot\bar\omega \in Z^{p-1} \cap D^{p-1} = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$, dh. $\bar\omega \in (C^{p-1})^{\mathfrak{g}}$ und Lemma 4.4.4 zufolge $\bar\omega \in Z^{p-1}$. Damit ist aber $\omega = 0$, also $B^p \cap (C^p)^{\mathfrak{g}} = 0$. □

Lemma 4.4.6. *Für jede endl.–dim. Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist die Quotientenalgebra $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ halbeinfach.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Auf Grund der Erweiterungseigenschaft von "auflösbar", ist damit auch $\mathfrak{a}$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$, daher $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Folglich ist $\mathfrak{a} = \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$, dh. $\mathfrak{a}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ und $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ ist halbeinfach. □

Theorem 4.4.7 (Levi). *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik* 0. *Dann ist*

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0$$

eine splittende exakte Sequenz von Lie Algebren und $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ halbeinfach. Dh. es existiert eine halbeinfache Unteralgebra $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{g}$ (ein sogenanntes Levi–Komplement), sodass $\mathfrak{g}$ isomorph zu dem folgenden semidirekten Produkt ist:

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \ltimes \operatorname{rad}(\mathfrak{g}).$$

Beweis. Wir zeigen das Theorem induktiv nach der abgeleiteten Länge l von $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Der Fall $l = 1$ (dh. $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ ist abelsch) folgt aus Satz 1.4.9, dem Lemma 4.4.6 und dem 2. Whitehead–Lemma:

$$[\zeta] \in \operatorname{Ext}_{\rho_\zeta}(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}), \operatorname{rad}(\mathfrak{g})) \cong H^2(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}), \operatorname{rad}(\mathfrak{g})) = 0.$$

Ist hingegen $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ nicht abelsch, also $l > 1$, dann erhalten wir mit Hilfe des Ideals $\mathfrak{r} := [\operatorname{rad}(\mathfrak{g}), \operatorname{rad}(\mathfrak{g})]$ in $\mathfrak{g}$ eine abelsche Lie Algebra–Erweiterung der Form

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}(\mathfrak{g})/\mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0.$$

Wie oben splittet sie über einen Homomorphismus $\sigma : \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ von Lie Algebren. Für das Bild $\sigma(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$ in $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ schreiben wir $\mathfrak{h}/\mathfrak{r}$, $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und betrachten dazu das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen der Form

$$\begin{tikzcd}
\zeta' : 0 \arrow[r] & \mathfrak{r} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{h} \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathfrak{h}/\mathfrak{r} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\cong"'] & 0 \\
\zeta : 0 \arrow[r] & \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\sigma"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Da $\mathfrak{h}/\mathfrak{r} \cong \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ halbeinfach ist und daher kein auflösbares Ideal enthält, gilt $\pi'(\operatorname{rad}(\mathfrak{h})) = 0$ und somit $\operatorname{rad}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{r}$. Weil aber $\mathfrak{r}$ auflösbar ist, folgt $\operatorname{rad}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{r}$. Nach Induktionsvoraussetzung splittet daher ζ' über einen Lie Algebra–Homomorphismus $\tau : \mathfrak{h}/\mathfrak{r} \longrightarrow \mathfrak{h}$ womit auch ζ splittet. Denn es gilt:

$$\pi \circ (\iota \circ \tau \circ \sigma) = \sigma^{-1} \circ \pi' \circ \tau \circ \sigma = \operatorname{id}_{\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})}.$$ □

Korollar 4.4.8. *Ist $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. reduktive Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0. Dann gilt:*

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathrm{Z}(\mathfrak{g}).$$

Beweis. Da $\mathfrak{g}$ reduktiv ist, gilt $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$. Dann ist aber das semidirekte Produkt aus obigen Theorem mit $\mathfrak{s} := \mathfrak{g}/\,\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ direkt: $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \ltimes \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{s} \oplus \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$. Da $\mathfrak{s}$ halbeinfach und folglich perfekt ist, gilt weiters $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cong [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$. Damit ist aber die Behauptung gezeigt. □

Theorem 4.4.9. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0, M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul und $\mathfrak{s}$ ein Levi–Komplement von $\mathfrak{g}$. Dann gilt für die n–te Kohomologiegruppe:*

$$H^n(\mathfrak{g}, M) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(\mathfrak{s}, K) \otimes H^q(\mathrm{rad}(\mathfrak{g}), M)^{\mathfrak{s}}.$$

Beweis. Nach dem Theorem von Levi 4.4.7 existiert eine halbeinfache Unteralgebra $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{g}$ sodass $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \ltimes \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ gilt. Satz 2.4.5 und Korollar 4.4.3 zufolge folgt dann:

$$H^n(\mathfrak{g}, M) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(\mathfrak{s}, H^q(\mathrm{rad}(\mathfrak{g}), M)) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(\mathfrak{s}, K) \otimes H^q(\mathrm{rad}(\mathfrak{g}), M)^{\mathfrak{s}}. \qquad \square$$

Das Theorem zeigt, dass man sich bei der Berechnung der Kohomologiegruppen einer Lie Algebra im wesentlich auf die der halbeinfachen und auflösbaren Lie Algebren beschränken kann. Leider gibt es bzgl. der Kohomologiegruppen auflösbarer Lie Algebren nur wenig Resultate.

4.5 Die Umkehrung beider Whitehead–Lemmata

Zu diesem Abschnitt siehe [Z1].

Definition 4.5.1. Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ nennen wir n–trivial, falls $H^n(\mathfrak{g}, M) = 0$ für alle endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul M gilt.

Das Ideal $\mathfrak{h}$ einer n–trivialen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist nicht notwendigerweise n–trivial. Aber es gilt zumindest (s. [Z1, Lem. 2.1]):

Lemma 4.5.2. *Sei $\mathfrak{g}$ eine n–triviale endl.–dim. Lie Algebra über einem beliebigen Körper K. Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{h}$ ein semidirektes Produkt der Unteralgebra $\mathfrak{s}$ und dem Ideal $\mathfrak{h}$, dann gilt:*

(i) $\mathfrak{s}$ *ist n-trivial*

(ii) $H^n(\mathfrak{h}, K) = 0$ *falls $\mathfrak{s}$ halbeinfach ist.*

Beweis. Wir betrachten die Hochschild–Serre–Spektralsequenz von $\mathfrak{g}$ bzgl. dem Ideal $\mathfrak{h}$ mit Werten in M. Da $\mathfrak{g}$ n–trivial ist, folgt aus dem Satz 2.4.5 einerseits

$$0 = E_2^{n0} \supseteq H^n(\mathfrak{s}, H^0(\mathfrak{h}, M)) \cong H^n(\mathfrak{s}, M^{\mathfrak{h}}) \tag{4.11}$$

und andererseits

$$0 = E_2^{0n} \supseteq H^0(\mathfrak{s}, H^n(\mathfrak{h}, M)) \cong H^n(\mathfrak{h}, M)^{\mathfrak{s}}. \tag{4.12}$$

Jeder $\mathfrak{s}$–Modul M wird durch $\mathfrak{h} \cdot M = 0$ zu einen $\mathfrak{g}$–Modul mit $M^{\mathfrak{h}} = M$. Aus (4.11) folgt dann sofort *(i)*. Hingegen erhalten wir aus (4.12)

$$0 = H^n(\mathfrak{h}, M)^{\mathfrak{s}} \cong (H^n(\mathfrak{h}, K) \otimes_K M)^{\mathfrak{s}}. \tag{4.13}$$

Ist $\mathfrak{s}$ halbeinfach und nehmen wir indirekt $N := H^n(\mathfrak{h}, K) \neq 0$ an, dann betrachten wir den kanonischen $\mathfrak{g}$–Modul–Homomorphismus

$$\pi : N \otimes N^* \longrightarrow K, \ \pi(m \otimes f) = f(m).$$

Er ist unter der Voraussetzung $N \neq 0$ surjektiv und daher zu einer kurzen exakten Sequenz von $\mathfrak{s}$–Moduln ergänzbar:

$$0 \longrightarrow \ker(\pi) \longrightarrow N \otimes N^* \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 0$$

Da nach dem Satz von Weyl die Sequenz splittet, liegt K als trivialer $\mathfrak{s}$–Modul in $N \otimes N^*$ und folglich ist $(N \otimes N^*)^{\mathfrak{s}} \neq 0$, ein Widerspruch zu (4.13) wenn wir $M = N^*$ wählen. Daher gilt $H^n(\mathfrak{h}, K) = 0$. □

Aus dem soeben gezeigten Lemma und der Levi–Zerlegung $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \ltimes \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ aus Theorem 4.4.7 erhalten wir sofort folgendes

Korollar 4.5.3. *Sei $\mathfrak{g}$ eine n–triviale, endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0. Dann gilt:*

$$H^n(\mathrm{rad}(\mathfrak{g}), K) = 0$$

Satz 4.5.4. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. perfekte Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0. Dann gilt:*

$\mathfrak{g}$ ist halbeinfach sobald $\mathfrak{g}$ 1– oder 2–trivial ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{g}$ eine perfekte Lie Algebra. Angenommen $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Da $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ im Gegensatz zu $\mathfrak{g}$ nicht perfekt ist, handelt es sich dabei um ein echtes Ideal in $\mathfrak{g}$. Das Levi–Komplement $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{g}$ ist daher nicht–trivial und die Levi–Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ keine direkte Summe (ansonsten wäre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{s} \oplus [\mathrm{rad}(\mathfrak{g}), \mathrm{rad}(\mathfrak{g})] \neq \mathfrak{g}$). Letzteres besagt aber, dass die Darstellung (siehe Beispiel 1.1.3 (4))

$$\rho : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) \text{ mit } \rho(x)(y) = [x, y],$$

nicht–trivial ist, was $\dim_K \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \geq 2$ zufolge hat. Denn aus $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \cong K$ erhalten wir $\rho(\mathfrak{s}) = \rho([\mathfrak{s},\mathfrak{s}]) = [\rho(\mathfrak{s}),\rho(\mathfrak{s})] \subseteq [\mathfrak{gl}(K),\mathfrak{gl}(K)] = 0$ und damit einen Widerspruch zu $\rho \neq 0$.

Wegen der Perfektheit von $\mathfrak{g}$, gilt $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \operatorname{rad}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$. Weil aber $\operatorname{rad}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ stets nilpotent ist (siehe [J3, Chap. III, §9, Cor. 2]), ist $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ nilpotent.

Zusammenfassend ist also $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ eine nilpotentes Ideal mit $\dim_K \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \geq 2$. Nach Korollar 5.1.5 gilt daher $H^p(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}),K) \neq 0$ für $p = 1,2$ und dem Korollar 4.5.3 zufolge ist $\mathfrak{g}$ weder 1– noch 2–trivial. □

Aus dem soeben gezeigten Satz können wir die erste Folgerung ziehen: Die Umkehrung des 1. Whitehead–Lemmas.

Korollar 4.5.5. *Eine endl.–dim. Lie Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper K der Charakteristik 0 ist genau dann halbeinfach, wenn sie 1–trivial ist.*

Beweis. Die Richtung “⇒” entspricht dem 1. Whitehead Lemma 4.3.1.

“⇐” : Sei $\mathfrak{g}$ 1–trivial. Dann gilt insbesondere für den trivialen $\mathfrak{g}$–Modul K:

$$0 = H^1(\mathfrak{g},K) \cong (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])^*$$

Also ist $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ und nach Satz 4.5.4 halbeinfach. □

Für die Umkehrung des 2. Whitehead–Lemmas benötigen wir noch das folgende

Lemma 4.5.6 ([Z1, Lem. 2.2])**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem beliebigen Körper K. Ist $\mathfrak{g}$ 2–trivial, dann gibt es zu jedem Ideal $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ der Kodimension 1 ein $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, sodass $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus Kx$ gilt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{g}$ eine 2–triviale Lie Algebra und $\mathfrak{h}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ der Kodimension 1. Dann können wir $\mathfrak{g} = Kx \ltimes \mathfrak{h}$ für ein $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ schreiben und Lemma 5.1.1 anwenden:

$$0 = H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = H^2(\mathfrak{h},\mathfrak{h})^x \oplus H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})^x$$

wobei $\mathfrak{h}$ als adjungierter $\mathfrak{g}$–Modul zu verstehen ist. Insbesondere erhalten wir daraus:

$$0 = H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})^x \cong (\operatorname{Der}(\mathfrak{h})/\operatorname{ad}(\mathfrak{h}))^x. \tag{4.14}$$

Nun ist aber $\operatorname{ad}(x) \in \operatorname{Der}(\mathfrak{h})$ und durch

$$(x \cdot \operatorname{ad}(x))(y) = x \cdot \operatorname{ad}(x)(y) - \operatorname{ad}(x)([x,y]) = [x,[x,y]] - [x,[x,y]] = 0$$

eine x–Invariante, nach (4.14) gilt daher: $\operatorname{ad}(x) \in \operatorname{ad}(\mathfrak{h})$. Dh. es gibt ein $z \in \mathfrak{h}$, sodass für jedes $y \in \mathfrak{h}$

$$\operatorname{ad}(x)(y) = \operatorname{ad}(z)(y) \text{ bzw. } 0 = \operatorname{ad}(x')(y) = [x',y]$$

gilt, wobei $x' := x - z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ gewählt wurde. Also ist die Summe von Lie Algebren $\mathfrak{h} \oplus Kx' = \mathfrak{g}$ direkt. □

Satz 4.5.7 ([Z1, Thm. 0.2]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0. Ist $\mathfrak{g}$ 2–trivial, dann trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:*

(i) $\mathfrak{g}$ *ist ein–dimensional*

(ii) $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach*

(iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus Kx$ *wobei* $\mathfrak{s}$ *halbeinfach ist*

Beweis. Wir führen den Beweis induktiv durch. Der Fall $\dim_K \mathfrak{g} = 1$ ist trivial. Sei also $\mathfrak{g}$ eine 2–triviale Lie Algebra und die Induktionsvoraussetzung gelte für all jene Lie Algebren, deren Dimension $< \dim_K \mathfrak{g}$ ist.

1. Fall: $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$: Dann ist nach Satz 4.5.4 $\mathfrak{g}$ bereits halbeinfach.

2. Fall: $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$: Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{s}$ der Kodimension 1 in $\mathfrak{g}$ welches nach Lemma 4.5.6 ein direkter Summand von $\mathfrak{g}$ ist:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus Kx \text{ für ein passendes } x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{s}.$$

Nach Lemma 4.5.2 *(i)* lässt sich die Induktionsvoraussetzung auf $\mathfrak{s}$ anwenden und wir erhalten: entweder ist $\mathfrak{s} = Ky$ ein–dimensional, halbeinfach oder direkte Summe einer halbeinfachen und einer ein–dimensionalen Lie Algebra: $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}' \oplus Ky$. Im ersten und dritten Fall ist das auflösbare Radikal $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = Kx \oplus Ky$ abelsch, was auf Grund von Satz 5.1.4 zu $H^2(\mathrm{rad}(\mathfrak{g}), K) \neq 0$ führt — ein Widerspruch zu Korollar 4.5.3 und der Voraussetzung. Somit ist $\mathfrak{s}$ halbeinfach. □

4.6 Die Umkehrung des Whitehead Theorem

Zu diesem Abschnitt siehe [Z2].

Lemma 4.6.1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt:*

(i) *M ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ M^* ist irreduzibel.*

(ii) *M ist nicht trivial $\Leftrightarrow$ M^* ist nicht trivial.*

(iii) *M ist halbeinfach (resp. einfach) $\Leftrightarrow$ M^* ist halbeinfach (resp. einfach).*

Beweis. Wir zeigen zuerst jeweils die Richtung "$\Rightarrow$":

(i): Sei M irreduzibel und $\dim_K M > 1$. Zu einem echten Unterraum $N^* \neq 0$ des Vektorraums M^* definieren wir den Unterraum

$$N^\perp := \bigcap_{f \in N^*} \ker f \subsetneq M.$$

Auf Grund von $0 \subsetneq N^* \subsetneq M^*$ gilt auch $0 \subsetneq N^\perp \subsetneq M$. Da M irreduzibel ist, existiert daher ein $x \in \mathfrak{g}$ und $n \in N^\perp$ sodass $x \cdot n \notin N^\perp$ liegt. Dann gibt es dazu aber ein $f \in N^*$ mit

$$0 \neq -f(x \cdot n) = (x \cdot f)(n).$$

Wegen $n \in N^\perp$ folgt damit $x \cdot f \notin N^*$ sodass N^* kein $\mathfrak{g}$–Untermodul ist. Also sind 0 und M^* die einzigen Untermoduln von M^*, dh. M^* ist irreduzibel.

(ii): Aus (1.4) folgt sofort die Trivialität von M^*.

(iii): Ist M einfach, so ist nach *(i)* und *(ii)* auch M^* einfach. Für den Fall $M = N_1 \oplus_{\mathfrak{g}} N_2$ gehen wir induktiv nach $\dim_K M$ vor. Legen wir für jedes $\sigma \in S_2$

$$\bar{N}^*_{\sigma(1)} := \{f \in M^* \mid \ker f \supseteq N^*_{\sigma(2)}\}$$

fest, so erhalten wir zwei $\mathfrak{g}$–Untermoduln von M^*: Denn für jedes $f \in \bar{N}^*_{\sigma(1)}$ und $x \in \mathfrak{g}$ folgt aus $x \cdot N_{\sigma(2)} \subseteq N_{\sigma(2)}$ sofort $\ker(x \cdot f) \supseteq N_{\sigma(2)}$. Aus der linearen Algebra schließen wir

$$M^* = \bar{N}^*_1 \oplus \bar{N}^*_2$$

wie folgt: Sei $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ eine Basis von N_1, $(x_i)_{k+1 \leq i \leq n}$ eine von N_2. Definiert man $f_1, f_2 \in M^*$ durch

$$f_1(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_2(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 \leq i \leq k \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann gilt für jedes $f \in M^*$: $f \cdot f_j \in \bar{N}^*_j$ und $f = f \cdot f_1 + f \cdot f_2$. Offensichtlich gilt nun auch $\bar{N}^*_i \cong_{\mathfrak{g}} N^*_i$ sodass nach Induktionsvoraussetzung M^* halbeinfach ist.

Um nun die Richtung "$\Leftarrow$" für *(i)*, *(ii)* und *(iii)* zu zeigen, betrachten wir zuerst den kanonischen linearen Isomorphismus

$$\varphi : M \longrightarrow (M^*)^*, \ \varphi(m)(f) = f(m) \text{ für jedes } f \in M^*$$

der ein $\mathfrak{g}$–Modul–Isomorphismus ist:

$$\varphi(x \cdot m)(f) = f(x \cdot m) = -(x \cdot f)(m) = (x \cdot \varphi(m))(f).$$

Mit Hilfe dessen können wir aus der jeweils gezeigten Richtung ihre Umkehrung folgern. □

Lemma 4.6.2. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem beliebigen Körper K und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt:*

(i) $(M^{tw})^*$ *ist irreduzibel* $\Leftrightarrow$ M *ist irreduzibel.*

(ii) $(M^{tw})^* \cong_{\mathfrak{g}} K \ \Leftrightarrow \ M \cong_{\mathfrak{g}} K^{-tw}$ *wobei K der triviale $\mathfrak{g}$–Modul ist.*

Beweis. *(i)*: Es ist klar, dass jeder Untermodul von M sowohl Untermodul von M^{tw} als auch von M^{-tw} ist. Zusammen mit

$$(M^{tw})^{-tw} = M \tag{4.15}$$

gilt auch die Umkehrung: Jeder Untermodul von M^{tw} ist Untermodul von M. Insbesondere ist genau dann M irreduzibel, wenn M^{tw} es ist. Zusammen mit Lemma 4.6.1 folgt die Behauptung.

(ii): Nach Lemma 4.6.1 *(ii)* können wir sagen: $(M^{tw})^* \cong_{\mathfrak{g}} K$ genau dann wenn $M^{tw} \cong_{\mathfrak{g}} K$ und mittels (4.15) erhalten wir die gesuchte Aussage. □

Lemma 4.6.3. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K sodass für jeden einfachen $\mathfrak{g}$–Modul M gilt: $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$. Dann folgt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$: $H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}, N) = 0$ für jeden einfachen $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$–Modul N.*

Beweis. Sei M ein einfacher $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$–Modul. Mittels $\mathfrak{a} \cdot M = 0$ machen wir M zu einen einfachen $\mathfrak{g}$–Modul. Da die Abbildungen $d_2^{-1,1} : E_2^{-1,1} \longrightarrow E_2^{1,0}$ und $d_2^{1,0} : E_2^{1,0} \longrightarrow E_2^{-1,-2}$ der Hochschild–Serre–Spektralsequenz von $\mathfrak{g}$ bzgl. $\mathfrak{a}$ trivial sind, erhalten wir:

$$H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}, M) \cong E_2^{1,0} \cong E_\infty^{1,0} \subseteq H^1(\mathfrak{g}, M) = 0.$$ □

Theorem 4.6.4 ([Z2])**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine n–dimensionale Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{g}$ ist direkte Summe einer halbeinfachen und einer nilpotenten Lie Algebra.*

(ii) *$H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ für jedes $p \in \mathbb{Z}$ und jeden $\mathfrak{g}$–Modul M mit $M^{\mathfrak{g}} = 0$.*

(iii) *$H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ für jedes $p \in \mathbb{Z}$ und jeden einfachen $\mathfrak{g}$–Modul M.*

(iv) *$H^{n-1}(\mathfrak{g}, M) = 0$ für jeden einfachen $\mathfrak{g}$–Modul M.*

(v) *$H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$ für jeden einfachen $\mathfrak{g}$–Modul M.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Diese Richtung entspricht dem Satz 4.2.7.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Folgt aus Proposition 4.2.3.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Ist trivial.
$(iv) \Rightarrow (v)$: Sei M ein einfacher $\mathfrak{g}$–Modul. Aus der Poincaré–Dualität 1.6.2 wissen wir:

$$H^p(\mathfrak{g}, (M^{tw})^*) \cong_K H^{n-p}(\mathfrak{g}, M)^*. \tag{4.16}$$

Zeigen wir, dass mit M auch $(M^{tw})^*$ ein einfacher $\mathfrak{g}$–Modul ist, erhalten wir aus (4.16), mit $p = n - 1$, das gesuchte Resultat $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$:

Nach Lemma 4.6.2 *(i)* ist $(M^{tw})^*$ irreduzibel. Nehmen wir indirekt an, dieser $\mathfrak{g}$–Modul sei trivial, dh. $(M^{tw})^* \cong K$. Dann folgt einerseits aus Lemma 4.6.2 *(ii)*: $M \cong K^{-tw}$. Aber andererseits erhalten wir aus (4.16) mit $p = 1$, $H^1(\mathfrak{g}, K) \cong H^{n-1}(\mathfrak{g}, M) = 0$, was

$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ bedeutet (siehe (1.14)). Also ist $\mathfrak{g}$ unimodular und daher $M \cong K^{-tw} \cong K$ trivial — ein Widerspruch zu M ist einfach.

$(v) \Rightarrow (i)$: Wir setzen $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$ voraus (ansonsten ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach) und zeigen induktiv nach $\dim_K \mathfrak{g}$ zuerst: $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Für den Induktionsanfang $\dim_K \mathfrak{g} = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\dim_K \mathfrak{g} > 1$. Weil $\mathfrak{g}$ nicht–halbeinfach ist existiert ein abelsches Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ in $\mathfrak{g}$. Es sei minimal gewählt sodass es zugleich ein irreduzibler $\mathfrak{g}$–Modul ist (siehe Beispiel 1.1.3 (4)). Falls $\mathfrak{a}$ ein trivialer $\mathfrak{g}$–Modul ist, dann liegt $\mathfrak{a}$ im Zentrum von $\mathfrak{g}$ und folglich $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Ist hingegen $\mathfrak{a}$ ein nicht–trivialer und damit einfacher $\mathfrak{g}$–Modul, dann gilt $H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^{\mathfrak{g}} = 0$ und nach Voraussetzung $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = 0$. Wenden wir dies auf die, aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

von $\mathfrak{g}$–Moduln resultierenden langen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \longrightarrow \dots$$

an, folgt:

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \cong H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} = \mathrm{Z}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}). \tag{4.17}$$

Nach Lemma 4.6.3 erfüllt auch $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ die Eigenschaft: $H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}, N) = 0$ für jeden einfachen $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$–Modul N. Um jedoch induktiv auf $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \neq 0$ schließen zu können, ist noch $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \neq 0$ zu zeigen. Wir nehmen indirekt an, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ sei halbeinfach. Dann gilt $\mathfrak{a} = \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ und folglich $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{a}$ sodass wir mit Hilfe von Theorem 2.4.5 folgenden Zusammenhang erhalten:

$$0 = H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \supseteq H^0(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}, H^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})) \cong \mathrm{End}_K(\mathfrak{a})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} \ni \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$$

Dies hat aber $\mathfrak{a} = 0$ zufolge, ein Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{a}$. Daher ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ nicht–halbeinfach, nach I.V. also $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \neq 0$ was auf Grund von (4.17) zu $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0$ führt.

Kommen wir nun zur eigentlichen Behauptung die wir wiederum per Induktion nach $\dim_K \mathfrak{g}$ beweisen: Der Induktionsanfang $\dim_K \mathfrak{g} = 1$ ist trivial. Sei also $\dim_K \mathfrak{g} > 1$, $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$ und $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \ltimes \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ die Levi–Zerlegung aus Theorem 4.4.7. Nach Obigen ist $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0$ und liegt in $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. Daher folgt aus $\mathfrak{g}/\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{s} \ltimes (\mathrm{rad}(\mathfrak{g})/\mathrm{Z}(\mathfrak{g}))$ induktiv: $\mathfrak{g}/\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{s} \oplus (\mathrm{rad}(\mathfrak{g})/\mathrm{Z}(\mathfrak{g}))$ und $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})/\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ ist nilpotent. Weil zentrale Erweiterungen nilpotenter Lie Algebren nilpotent sind, ist folglich $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ nilpotent. Außerdem ist $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ direkte Summe der beiden trivialen $\mathfrak{s}$–Moduln $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})/\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ und $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ und daher selbst ein trivialer $\mathfrak{s}$–Modul womit $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ folgt. □

Korollar 4.6.5 ([Z2]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ für jedes $p \geq 3$ und jeden einfachen $\mathfrak{g}$–Modul M.

(ii) Es trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:

a) $\dim_K(\mathfrak{g}) \leq 2$.

b) $\dim_K(\mathfrak{g}) = 3$ *und* $\mathfrak{g}$ *ist unimodular.*

c) $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}$ *wobei* $\mathfrak{s}$ *halbeinfach und* $\mathfrak{n}$ *nilpotent ist.*

Beweis. Wir betrachten folgende Fälle:

$\dim_K \mathfrak{g} \leq 2$: trivial.

$\dim_K \mathfrak{g} = 3$: Angenommen es gilt *(i)*. Aus Korollar 1.6.3 folgt $H^3(\mathfrak{g}, K^{-tw}) \neq 0$. Dann ist aber K^{-tw} nicht einfach was $K^{-tw} \cong K$ zufolge hat. Das bedeutet aber, $\mathfrak{g}$ ist unimodular.

Ist umgekehrt *(ii)* erfüllt, dann gilt $M^{tw} = M$ und nach Lemma 4.6.1: M ist genau dann einfach, wenn $M^* = (M^{tw})^*$ einfach ist. Damit erhalten wir für jeden einfachen $\mathfrak{g}$–Modul M aus (4.16):

$$H^3(\mathfrak{g}, M) \cong H^0(\mathfrak{g}, (M^{tw})^*)^* \cong (M^*)^{\mathfrak{g}} = 0.$$

$\dim_K \mathfrak{g} > 3$: Dieser Fall folgt aus Theorem 4.6.4. □

5 Bettizahlen

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper K. Dann nennen wir

$$b_p(\mathfrak{g}) := \dim_K H^p(\mathfrak{g}, K)$$

die *p–te Bettizahl* von $\mathfrak{g}$. Es gilt stets: $b_0 = 1$. Ist $\mathfrak{g}$ eine unimodulare Lie Algebra und $n := \dim_K \mathfrak{g} < \infty$, dann gilt gemäß Korollar 1.6.4:

$$b_p(\mathfrak{g}) = b_{n-p}(\mathfrak{g}).$$

Die *absteigende Zentralreihe* einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist induktiv definiert durch

$$\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g} \qquad\qquad \mathfrak{g}^i := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}].$$

Man sieht sofort, dass $\mathfrak{g}^i \supseteq \mathfrak{g}^{i+1}$ gilt und daher die $\mathfrak{g}^i$'s Ideale sind. Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt nun *nilpotent*, wenn ein $n \geq 0$ existiert, sodass $\mathfrak{g}^n = 0$ gilt. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$ nennen wir nilpotent, wenn es als Lie Algebra nilpotent ist.

Die *abgeleitete Reihe* einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist induktiv definiert durch

$$\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g} \qquad\qquad \mathfrak{g}^{(i)} := [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}].$$

Auch hierbei handelt es sich um eine Folge von Idealen die $\mathfrak{g}^{(i)} \supseteq \mathfrak{g}^{(i+1)}$ erfüllen. Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *auflösbar* wenn ein $n \geq 0$ existiert, sodass $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ gilt. Offensichtlich gilt $\mathfrak{g}^{(i)} \subseteq \mathfrak{g}^i$ sodass jede nilpotente Lie Algebra insbesondere auflösbar ist. Ein auflösbares Ideal $\mathfrak{a}$ ist ein Ideal, welches als Lie Algebra auflösbar ist. Die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ zweier auflösbarer Ideale in $\mathfrak{g}$ ist, wie leicht zu verifizieren ist, wieder ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$. Damit besitzt jede endl.–dim. Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ein bzgl. $\subseteq$ maximales auflösbares Ideal, das *auflösbare Radikal* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

Da $\mathrm{ad}(x)$ für jedes Element x einer endl.–dim. nilpotente Lie Algebra $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, folgt $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Daher ist jede endl.–dim. nilpotente Lie Algebra unimodular.

5.1 Untere Schranken der Betti–Zahlen

In Satz 4.2.5 haben wir gesehen, dass die Kohomologie einer nilpotenten Lie Algebra $\mathfrak{n}$ mit Werten in einem $\mathfrak{n}$–Modul mit $M^{\mathfrak{n}} = 0$ trivial ist. Ist hingegen $M^{\mathfrak{n}} \neq 0$ und

$n = \dim_K \mathfrak{n}$, so zeigen wir in diesem Abschnitt:

$$\dim_K H^p(\mathfrak{n}, M) \geq \begin{cases} 1 & \text{für } p = 0, n \\ 2 & \text{für } 0 < p < n. \end{cases}$$

Lemma 5.1.1 ([D1]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. nilpotente Lie Algebra über einem beliebigen Körper K und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ der Kodimension 1, dann gilt für jedes $p > 0$ und $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$:*

$$H^p(\mathfrak{g}, M) \cong H^p(\mathfrak{h}, M)^x \oplus H^{p-1}(\mathfrak{h}, M)^x.$$

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{g}$ mit $x \notin \mathfrak{h}$. Dann können wir $\mathfrak{g}$ als semidirektes Produkt von $\mathfrak{h}$ und Kx schreiben:

$$\mathfrak{g} \cong Kx \ltimes \mathfrak{h}.$$

Betrachten wir nun die Spektralsequenz von $\mathfrak{g}$ bezüglich dem Ideal $\mathfrak{h}$, so kollabiert diese nach Satz 2.4.5 bei E_2 und für jedes $p \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$H^p(\mathfrak{g}, M) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H^{p-i}(\mathfrak{h}, M)).$$

Da $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong Kx$ eindimensional ist, sind sämtliche Summanden mit Index $i \neq 0, 1$ trivial und wir erhalten

$$H^p(\mathfrak{g}, M) \cong H^0(Kx, H^p(\mathfrak{h}, M)) \oplus H^1(Kx, H^{p-1}(\mathfrak{h}, M)).$$

Beachtet man, dass einerseits

$$H^0(Kx, H^p(\mathfrak{h}, M)) = H^p(\mathfrak{h}, M)^x$$

und andererseits

$$H^1(Kx, H^{p-1}(\mathfrak{h}, M)) \cong H^{p-1}(\mathfrak{h}, M)/x \cdot H^{p-1}(\mathfrak{h}, M) \cong H^{p-1}(\mathfrak{h}, M)^x$$

gilt, folgt sofort die gesuchte Aussage. □

Lemma 5.1.2 ([D1, Lem. 1]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine nilpotente Lie Algebra über einem Körper K, $\mathfrak{h}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ und M ein $\mathfrak{g}$–Modul. Falls $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent resp. bijektiv auf M operiert, so auch auf $H^\bullet(\mathfrak{h}, M)$.*

Beweis. Da $\mathfrak{g}$ eine nilpotente Lie Algebra ist, ist die Adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ eingeschränkt auf $\mathfrak{h}$ nilpotent und in Folge auch die auf $\Lambda\mathfrak{h}$ induzierte Darstellung

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}^{\Lambda} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\Lambda\mathfrak{h}),$$

lediglich die Stufe der Nilpotenz erhöht sich um den Faktor $\dim_K \mathfrak{g}$. Insbesondere ist für jedes $x \in \mathfrak{g}$ der Endomorphismus $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}^{\Lambda}(x)$ nilpotent. Nun sei $x \in \mathfrak{g}$ und $\omega \in C^p(\mathfrak{h}, M)$

für ein $p \geq 0$. Dann können wir nach (1.4) und (1.3) die Operation von x auf $C^p(\mathfrak{h}, M)$ als Differenz der beiden Endomorphismen $\theta_x, \eta_x \in \operatorname{End}_K(C^p(\mathfrak{h}, M))$ mit $\theta_x(\omega) = \rho(x)\omega$ und $\eta_x(\omega) = \omega \operatorname{ad}_{\mathfrak{h}}^{\Lambda^p}(x)$ schreiben:

$$x \cdot \omega = (\theta_x - \eta_x)(\omega) = \rho(x)\omega - \omega \operatorname{ad}_{\mathfrak{h}}^{\Lambda^p}(x).$$

Offensichtlich kommutieren beide miteinander und nach obigen ist η_x nilpotent.

(i): Operiert x nilpotent auf M, so auch auf $C^p(\mathfrak{h}, M)$ denn mit $\rho(x)$ ist θ_x und folglich auch $\theta_x - \eta_x$ als Differenz zweier kommutierender nilpotenter Endomorphismen nilpotent.

(ii): Operiert x hingegen bijektiv auf M, dann ist $\rho(x)$ und folglich θ_x ein Automorphismus. Andererseits ist $\theta_x^{-1}\eta_x$ nilpotent und für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\operatorname{id} + \theta_x^{-1}\eta_x + \cdots + (\theta_x^{-1}\eta_x)^{m-1})(\operatorname{id} - \theta_x^{-1}\eta_x) = \operatorname{id}$$

woraus wir $\operatorname{id} - \theta_x^{-1}\eta_x$ und in weiterer Folge $\theta_x(\operatorname{id} - \theta_x^{-1}\eta_x) = \theta_x - \eta_x$ als Automorphismus erkennen. □

Proposition 5.1.3. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. nilpotente Lie Algebra und (M, ρ) ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann definiert*

$$M_{\text{nil}} := \bigcap_{x \in \mathfrak{g}} H_0(\rho(x)) = \bigcap_{x \in \mathfrak{g}} \{m \in M \mid \exists k \text{ sodass } \rho(x)^k(m) = 0\}$$

einen $\mathfrak{g}$–Untermodul von M und es gilt:

$$H^p(\mathfrak{g}, M) \cong_K H^p(\mathfrak{g}, M_{\text{nil}}).$$

Beweis. Für ein $x \in \mathfrak{g}$ und $m \in M_{\text{nil}}$ ist $x \cdot m \in M_{\text{nil}}$ zu zeigen. Dazu sei $y \in \mathfrak{g}$, $y^k \cdot m := \rho(y)^k(m)$ sowie $x^{(k)} := \operatorname{ad}(y)^k(x) \in \mathfrak{g}$ für jedes $k \geq 0$. Wie leicht zu sehen ist, gilt dann

$$y \cdot (x^{(k)} \cdot (y^l \cdot m)) = x^{(k+1)} \cdot (y^l \cdot m) + x^{(k)} \cdot (y^{l+1} \cdot m).$$

Daraus schließt man induktiv

$$y^k \cdot (x \cdot m) \in \sum_{i=0}^{k} x^{(i)} \cdot (y^{k-i} \cdot \langle m \rangle_K). \tag{5.1}$$

Einerseits existiert ein $N > 0$ sodass $x^{(N)} = 0$ (denn $\mathfrak{g}$ ist nilpotent) und andererseits ein $l > 0$ mit $y^l \cdot m = 0$ (denn $m \in M_{\text{nil}}$). Damit sind für $k = N + l - 1$ sämtliche Summanden in (5.1) trivial und daher $y^k \cdot (x \cdot m) = 0$ was $x \cdot m \in M_{\text{nil}}$ bedeutet (s. [J3, Chap. II, §4, Lem. 1]).

Auf Grund der Definition von M_{nil} ist $(M/M_{\text{nil}})^{\mathfrak{g}} = 0$. Daher gilt Satz 4.2.5 zufolge $H^p(\mathfrak{g}, M/M_{\text{nil}}) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Damit liefert die durch

$$0 \longrightarrow M_{\text{nil}} \longrightarrow M \longrightarrow M/M_{\text{nil}} \longrightarrow 0$$

induzierte lange exakte Sequenz das gesuchte Resultat. □

Satz 5.1.4 ([D1]). *Sei $\mathfrak{g} \neq 0$ eine n–dimensionale nilpotente Lie Algebra über einem Körper K und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul mit $M^{\mathfrak{g}} \neq 0$. Dann gilt:*

$$\dim_K H^p(\mathfrak{g}, M) \geq \begin{cases} 1 & \text{für } p = 0, n \\ 2 & \text{für } 0 < p < n \end{cases}$$

Beweis. Auf Grund von Proposition 5.1.3 gilt $H^0(\mathfrak{g}, M) \cong H^0(\mathfrak{g}, M_{\text{nil}}) = M_{\text{nil}}^{\mathfrak{g}} \supseteq M^{\mathfrak{g}} \neq 0$ und nach der Poincaré–Dualität 1.6.2 damit auch $H^n(\mathfrak{g}, M) \neq 0$ womit die Fälle $p = 0, n$ bereits abgeschlossen sind.

Die Aussage für die übrigen Fälle $0 < p < n$ beweisen wir mittels Induktion nach $\dim_K \mathfrak{g}$: Im eindimensionalen Fall $\mathfrak{g} \cong K$ ist klarerweise nichts mehr zu zeigen. Sei also $\dim_K \mathfrak{g} = n > 1$. Dann besitzt $\mathfrak{g}$ als nilpotente Lie Algebra ein Ideal $\mathfrak{h}$ der Kodimension 1. Wählen wir dazu ein $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, so erhalten wir nach Lemma 5.1.1 für alle $p > 0$

$$H^p(\mathfrak{g}, M) \cong H^p(\mathfrak{h}, M_{\text{nil}})^x \oplus H^{p-1}(\mathfrak{h}, M_{\text{nil}})^x.$$

Nun sind aber nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 5.1.2 beide Summanden nicht–trivial und folglich $\dim_K H^p(\mathfrak{g}, M) \geq 2$. □

Korollar 5.1.5. *Sei $\mathfrak{g} \neq 0$ eine n–dimensionale nilpotente Lie Algebra über einem Körper K. Dann gilt für die Betti–Zahlen von $\mathfrak{g}$:*

$$b_p(\mathfrak{g}) \geq \begin{cases} 1 & \text{für } p = 0, n \\ 2 & \text{für } 0 < p < n \end{cases}$$

5.2 Obere Schranken der Betti–Zahlen

Bemerkung 5.2.1. Der Binomialkoeffizient einer beliebigen Zahl n ($\in \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und einer nicht–negativen ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z}_0^+$ ist definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{k!}.$$

Das leere Produkt ist definitionsgemäß 1 sodass $\binom{n}{0} = \frac{1}{1} = 1$ gilt. Für $k \in \mathbb{Z}^-$ und beliebigen n verallgemeinern wir: $\binom{n}{k} := 0$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}. \tag{5.2}$$

Für $k > 0$ rechnet sich dies wie folgt nach:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+2)}{k!}\cdot(n-k+1+k)\\ &= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\dots(n-k+2)}{k!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Die Fälle $k = 0$ und $k < 0$ folgen unmittelbar aus der verallgemeinerten Definition.

Lemma 5.2.2 ([CJ, Lem. 2]). *Sei V ein n–dimensionaler Vektorraums über einem beliebigen Körper K, $n \geq 2$ und $\Lambda^\bullet(V)$ die äußere Algebra von V. Dann gilt für jede nicht–triviale nilpotente Derivation η in $\Lambda^\bullet(V)$ vom Grad* 0

$$\dim_K \ker(\eta_p) \leq \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p} = \binom{n}{p} - \binom{n-2}{p-1}, \tag{5.3}$$

wobei $p \geq 0$ und $\eta_p = \eta_{|\Lambda^p(V)}$ ist.

Beweis. Der Fall $p = 0$ ist klar sodass wir $p > 0$ voraussetzen und induktiv nach $n = \dim_K V$ vorgehen. Für $n = 2$ ist $\eta_1 : V \longrightarrow V$ ein nicht–trivialer Endomorphismus von V und daher $\dim_K \ker(\eta_1) < 2$ woraus der Induktionsanfang folgt.

Sei nun die Aussage für $n - 1$ erfüllt und $\dim_K V = n$. Da η nilpotent ist, gibt es ein $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$ mit $\eta_1(v_1) = 0$, $(v_2, \dots, v_n)$ sei eine Ergänzung von (v_1) zu einer Basis von V. Außerdem bezeichnen wir $\Lambda^\bullet(\langle v_{m+1}, \dots, v_n\rangle_K)$ kurz mit $\Lambda^\bullet_{n-m}$. Ist nun $a \in \Lambda^\bullet_{n-1}$, so lässt sich η folgendermaßen beschreiben:

$$\eta(a) = \bar{\eta}(a) + \theta(a) \wedge v_1$$

wobei $\bar{\eta}$ und θ Derivationen von $\Lambda^\bullet_{n-1}$ vom Grad 0 resp. -1 sind.

Für ein $\alpha \in \Lambda^p(V)$ seien $a \in \Lambda^{p-1}_{n-1}$ und $b \in \Lambda^p_{n-1}$ sodass $\alpha = a \wedge v_1 + b$ gilt. Dann erhalten wir

$$\eta(\alpha) = \eta(a \wedge v_1 + b) = \bar{\eta}(a) \wedge v_1 + \bar{\eta}(b) + \theta(b) \wedge v_1.$$

Für den Kern von η gilt daher

$$\ker(\eta_p) = \left\{a \wedge v_1 + b \in \Lambda^p(V) \mid a \in \Lambda^{p-1}_{n-1},\ b \in \ker(\bar{\eta}_p) \text{ und } \bar{\eta}_{p-1}(a) + \theta_p(b) = 0\right\}.$$

Definieren wir nun eine lineare Abbildung

$$\psi_p : \Lambda^{p-1}_{n-1} \oplus \ker(\bar{\eta}_p) \longrightarrow \Lambda^{p-1}_{n-1} \text{ mit } \psi_p(a,b) = \bar{\eta}_{p-1}(a) + \theta_p(b),$$

dann gilt offensichtlich $\ker(\psi_p) \cong \ker(\eta_p)$ sowie $\mathrm{rg}(\bar{\eta}_{p-1}) \leq \mathrm{rg}(\psi_p)$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

(i) $\bar{\eta} \neq 0$: Hierbei lässt sich die Induktionsvoraussetzung auf $\bar{\eta}$ anwenden und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\dim_K \ker(\eta_p) &= \dim_K \ker(\psi_p) = \binom{n-1}{p-1} + \dim_K \ker(\bar{\eta}_p) - \operatorname{rg}(\psi_p) \\
&\leq \binom{n-1}{p-1} + \dim_K \ker(\bar{\eta}_p) - \operatorname{rg}(\bar{\eta}_{p-1}) \\
&\leq \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-3}{p} \\
&\quad - \left(\binom{n-1}{p-1} - \binom{n-2}{p-2} - \binom{n-3}{p-1}\right) \\
&= \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} + \binom{n-3}{p} + \binom{n-3}{p-1} \\
&\overset{(5.2)}{=} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p}.
\end{aligned}$$

(ii) $\bar{\eta} = 0$: Da $\eta \neq 0$ ist, muss $\theta \neq 0$ sein und es gibt ein $v \in \Lambda^1_{n-1}$ mit $\theta_1(v) \neq 0 \in K$. Sei o.B.d.A. $v = v_2$, dann gilt $\theta(v_2) \wedge \Lambda^{p-1}_{n-2} \subseteq \operatorname{im}(\theta_p)$ und wir erhalten

$$\dim_K \ker(\theta_p) = \binom{n-1}{p} - \operatorname{rg}(\theta_p) \leq \binom{n-1}{p} - \binom{n-2}{p-1} \overset{(5.2)}{=} \binom{n-2}{p}.$$

Da in diesem Fall $\ker(\psi_p) \cong \Lambda^{p-1}_{n-1} \oplus \ker(\theta_p)$ gilt, ist auch dieser Induktionsschritt gezeigt.

Die in (5.3) angeführte Identität erklärt sich aus dem folgenden Zusammenhang:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} \overset{(5.2)}{=} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \overset{(5.2)}{=} \binom{n}{p}. \qquad \square$$

Bemerkung 5.2.3.

(1) Für jede nilpotente nicht–abelsche Lie Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper K gilt: $\dim_K \mathfrak{g} \geq 3$: Da $\mathfrak{g}$ nicht–abelsch ist, gilt $\dim_K \mathfrak{g} \geq 2$. Angenommen $\mathfrak{g}$ ist nicht abelsch und $\dim_K \mathfrak{g} = 2$. Dann existieren $x, y \in \mathfrak{g}$ mit $[x, y] = \lambda x + \mu y$ mit $\lambda, \mu \in K$ und $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Daraus folgt aber iterativ $\operatorname{ad}(x)^n(y) = \lambda\mu^{n-1}x + \mu^n y$ mit $(\lambda\mu^{n-1}, \mu^n) \neq 0$. Insbesondere ist $\mathfrak{g}$ nicht nilpotent. Folglich gilt $\dim_K \mathfrak{g} \geq 3$.

(2) Ist $\mathfrak{g}$ eine 3–dimensionale, nilpotente, nicht–abelsche Lie Algebra, dann gilt: $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_1$ — die 3–dimensionale Heisenberg–Lie Algebra welche eine Basis (x, y, z) besitzt, sodass $[x, y] = z$ die einzig nicht–triviale Lie Klammer ist (siehe Abschnitt 5.3). Dies zeigt sich wie folgt: Als nilpotente Lie Algebra besitzt $\mathfrak{g}$ ein nicht–triviales Zentrum $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Es gilt $\dim_K \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = 1$ denn aus $\dim_K \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) > 1$ folgt sofort: $\mathfrak{g}$ ist abelsch. Damit ist aber $\mathfrak{g}/\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ eine 2–dimensionale nilpotente Lie Algebra und nach (1) daher abelsch. Folglich existieren $x, y \in \mathfrak{g}$ für die $[x, y] = z \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ und $\langle x, y, z\rangle_K = \mathfrak{g}$ gilt.

Satz 5.2.4 ([CJ, Thm. 1])**.** *Sei $\mathfrak{g}$ eine n–dim. nilpotente, nicht–abelsche Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik* 0*. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{Z}$:*

$$\dim_K H^p(\mathfrak{g}) \leq \binom{n}{p} - \binom{n-2}{p-1}.$$

Beweis. Auf Grund der Poincaré–Dualität (siehe Korollar 1.6.4) gilt $K = H^0(\mathfrak{g}) = H^n(\mathfrak{g})$ woraus die Fälle $p = 0, n$ folgen. Für $0 < p < n$ zeigen wir den Satz induktiv nach der Dimension n von $\mathfrak{g}$ wobei Bemerkung 5.2.3 (1) zufolge $n = \dim_K \mathfrak{g} \geq 3$ gilt:

Im Induktionsanfang $n = 3$ gilt nach Bemerkung 5.2.3 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}_1$ sodass

$$\dim_K H^1(\mathfrak{g}) = \dim_K(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])^* = 2 = \binom{3}{1} - \binom{1}{0}.$$

Sei nun $n > 3$ und $\mathfrak{h}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ der Kodimension 1. Dann gilt Lemma 5.1.1 zufolge für ein $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$:

$$H^p(\mathfrak{g}) \cong H^p(\mathfrak{h})^x \oplus H^{p-1}(\mathfrak{h})^x. \tag{5.4}$$

Wir behaupten nun für jedes $p \geq 0$:

$$\dim_K H^p(\mathfrak{h})^x \leq \binom{n-1}{p} - \binom{n-3}{p-1}. \tag{5.5}$$

Für den Fall dass $\mathfrak{h}$ nicht–abelsch ist, folgt (5.5) sofort aus der Induktionsvoraussetzung. Ist hingegen $\mathfrak{h}$ abelsch, so erhalten wir

$$H^\bullet(\mathfrak{h}) = C^\bullet(\mathfrak{h}, K) \cong \Lambda^\bullet(\mathfrak{h}^*).$$

Da aber $\mathfrak{g}$ nicht–abelsch ist, gilt $\operatorname{ad}(x) \neq 0$. Nach Lemma 5.1.2 ist daher η_x, $\eta_x(\omega) = x \cdot \omega$ ein nicht–trivialer, nilpotenter Endomorphismus von $H^\bullet(\mathfrak{h})$ und (1.3) zufolge eine Derivation vom Grad 0. Also können wir Lemma 5.2.2 anwenden und erhalten auch im abelschen Fall (5.5).

Den Beweis schließen wir nun mit folgender Rechnung ab:

$$\begin{aligned}
\dim_K H^p(\mathfrak{g}) &\overset{(5.4)}{=} \dim_K H^p(\mathfrak{h})^x + \dim_K H^{p-1}(\mathfrak{h})^x \\
&\overset{(5.5)}{\leq} \binom{n-1}{p} - \binom{n-3}{p-1} + \binom{n-1}{p-1} - \binom{n-3}{p-2} \\
&= \binom{n}{p} - \binom{n-2}{p-1}.
\end{aligned}$$

□

5.3 Heisenberg Lie Algebra in Charakteristik 0

Für jedes $m \geq 1$ sei $\mathfrak{h}_m$ die m–te Heisenberg Lie Algebra. Das ist jene $2m+1$–dimensionale Lie Algebra mit Basis $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m, z\}$, deren nicht–trivialen

Lie Klammern zwischen diesen Basiselementen durch $[x_i, y_i] = z$ für jedes $1 \le i \le m$ definiert sind.

Lemma 5.3.1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K. Dann gilt für alle $p \ge 1$:*

$$Z^p(\mathfrak{g}) \supseteq \{\omega \in C^p(\mathfrak{g}) \mid \omega_x = 0 \text{ für alle } x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus (1.12). □

Satz 5.3.2 ([Sa]). *Sei $\mathfrak{h}_m$ die m–te Heisenberg Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0. Dann gilt für $0 \le p \le m$:*

$$\dim_K H^p(\mathfrak{h}_m) = \binom{2m}{p} - \binom{2m}{p-2}. \tag{5.6}$$

Beweis. Auf Grund von $[\mathfrak{h}_m, \mathfrak{h}_m] = \langle z \rangle_K$ und dem Lemma 5.3.1 gilt für $p \ge 1$:

$$Z^p(\mathfrak{h}_m) \supseteq \{\omega \in C^p(\mathfrak{h}_m) \mid \omega_z = 0\} \cong_K \operatorname{Hom}_K(\Lambda^p(\mathfrak{h}_m/\langle z \rangle_K), K). \tag{5.7}$$

Wegen $\binom{2m}{0} = 1$ gilt daher für jedes $0 \le p \le 2m+1$:

$$\dim_K Z^p(\mathfrak{h}_m) \ge \dim_K \Lambda^p(\mathfrak{g}/\langle z \rangle_K) = \binom{2m}{p}.$$

Unter Zuhilfenahme von Lemma 1.5.1 erhalten wir daraus eine Abschätzung nach unten:

$$\dim_K H^p(\mathfrak{h}_m) \ge \binom{2m}{p} + \binom{2m}{p-1} - \binom{2m+1}{p-1} \overset{(5.2)}{=} \binom{2m}{p} - \binom{2m}{p-2}. \tag{5.8}$$

Um für $0 \le p \le m$ die Identität (5.6) zu zeigen, ist daher nur noch ein Abschätzung der Bettizahlen nach oben hin zu geben. Der Fall $p = 0$ ist trivial, für $0 < p \le m$ hingegen gehen wir induktiv nach m vor. Für $m = 1$ greifen wir dazu auf Bemerkung 1.2.6 zurück:

$$\dim_K H^1(\mathfrak{h}_1) \overset{(1.14)}{=} \dim_K(\mathfrak{h}_1/[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1]) = 2 = \binom{2m}{1} - \binom{2m}{-1}.$$

Sei nun $m > 1$. Wir betrachten die Hochschild–Serre–Spektralsequenz von $\mathfrak{h}_m$ bezüglich $\mathfrak{h}_{m-1}$. Es ist $\mathfrak{h}_m/\mathfrak{h}_{m-1} \cong Kx_m \oplus Ky_m$ abelsch und weil sowohl x_m als auch y_m trivial auf $\mathfrak{h}_{m-1}$ operiert, folgt aus Korollar 2.4.3

$$E_2^{i,j} \cong C^i(Kx_m \oplus Ky_m, H^j(\mathfrak{h}_{m-1})). \tag{5.9}$$

Für $j < m$ erhalten wir daher nach Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$$\begin{aligned}\dim_K E_2^{i,j} &= \binom{2}{i} \dim_K H^j(\mathfrak{h}_{m-1}) \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} \binom{2}{i}\left(\binom{2(m-1)}{j} - \binom{2(m-1)}{j-2}\right)\end{aligned}$$

Dies führt für $p < m$ bereits zu der gewünschten Abschätzung (denn es gilt stets $\dim_K E_\infty^{i,j} \leq \dim_K E_r^{i,j}$):

$$\begin{aligned}\dim_K H^p(\mathfrak{h}_m) &= \dim_K E_\infty^{0,p} + \dim_K E_\infty^{1,p-1} + \dim_K E_\infty^{2,p-2} \\ &\leq \binom{2(m-1)}{p} - \binom{2(m-1)}{p-2} + 2\cdot\left(\binom{2(m-1)}{p-1} - \binom{2(m-1)}{p-3}\right) \\ &\quad + \binom{2(m-1)}{p-2} - \binom{2(m-1)}{p-4} \\ &= \binom{2m-1}{p} - \binom{2m-1}{p-2} + \binom{2m-1}{p-1} - \binom{2m-1}{p-3} \\ &= \binom{2m}{p} - \binom{2m}{p-2}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Dies zeigt unter anderem auch $E_2^{i,j} = E_\infty^{i,j}$ für $i + j < m$. Um die Abschätzung auch für $p = m$ durchführen zu können, ist noch $E_\infty^{0,m}$ zu bestimmen (Vorsicht: $E_\infty^{0,m} \neq E_2^{0,m}$ wie sich bald herausstellt). Dazu betrachten wir den Term–Operator

$$d_2^{0,m} : E_2^{0,m} \longrightarrow E_2^{2,m-1}$$

der, wie wir wissen, durch den Differentialoperator d induziert wird. Eine einfache Rechnung zeigt für jedes $\omega \in C^m(\mathfrak{h}_m)$, $u_i \in \mathfrak{h}_{m-1}$:

$$d\omega(x_m \wedge y_m \wedge u_1^{m-1}) = -\omega(z \wedge u_1^{m-1}) + d(\omega_{x_m \wedge y_m})(u_1^{m-1}). \tag{5.11}$$

Nach (5.9) erhalten wir daher ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} E_2^{0,m} \arrow[r, "d_2^{0,m}"] \arrow[d, "\cong"'] & E_2^{2,m-1} \arrow[d, "\cong"] \\ H^m(\mathfrak{h}_{m-1}) \arrow[r, "\widetilde{d}"] & H^{m-1}(\mathfrak{h}_{m-1}) \end{tikzcd}$$

in welchem (5.11) zufolge

$$\widetilde{d}([\omega]) = [\omega_z], \text{ für jede } [\omega] \in H^m(\mathfrak{h}_{m-1})$$

gilt. Wir zeigen nun, dass $\widetilde{d}$ (und somit $d_2^{0,m}$) injektiv ist. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf $\mathfrak{h}_{m-1}$ folgt aus Lemma 1.5.1 (induktiv nach p) die

Tatsache: $\dim_K Z^p(\mathfrak{h}_{m-1}) = \binom{2(m-1)}{p}$ für $0 \le p \le m-1$. Zusammen mit (5.7) gilt daher:

$$Z^p(\mathfrak{h}_{m-1}) = \Lambda^{m-1}\langle x_1^*, \dots, x_{m-1}^*, y_1^*, \dots y_{m-1}^*\rangle_K \tag{5.12}$$

Wir greifen nun auf die Poincaré– Dualität zurück, nach der

$$H^{m-1}(\mathfrak{h}_{m-1}) \times H^m(\mathfrak{h}_{m-1}) \longrightarrow K,\ ([\omega],[\omega']) \mapsto \omega \wedge \omega(z \wedge x_1^{m-1} \wedge y_1^{m-1})$$

eine nicht ausgeartete Bilinearform ist. Weil $H^{m-1}(\mathfrak{h}_{m-1})$ ein Quotient von (5.12) ist, entspricht $H^m(\mathfrak{h}_{m-1})$ einem Quotienten von $\Lambda^{m-1}\langle z^*, x_1^*, \dots, x_{m-1}^*, y_1^*, \dots y_{m-1}^*\rangle_K$. Damit ist aber $\widetilde{d}$ surjektiv und folglich auch injektiv. Denn wegen der Poincaré–Dualität gilt auch $H^m(\mathfrak{h}_{m-1}) \cong H^{m-1}(\mathfrak{h}_{m-1})$.

Daraus folgt nun $E_\infty^{0,m} = 0$. Zusammen mit $E_\infty^{1,m-1} = E_2^{1,m-1}$ und $E_\infty^{2,m-2} = E_2^{1,m-1}$ und der Tatsache $\binom{2(m-1)}{m} = \binom{2(m-1)}{m-2}$ erhält man $\dim_K H^m(\mathfrak{h}_m) \le \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-2}$ sofort aus Rechnung (5.10) mit $p = m$. □

5.4 Die dritte Kohomologiegruppe halbeinfacher Lie Algebren

Satz 5.4.1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. halbeinfache Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0 und M ein endl.–dim. $\mathfrak{g}$–Modul. Dann gilt für die dritte Kohomologiegruppe*

$$H^3(\mathfrak{g}, M) \cong \mathfrak{B}(\mathfrak{g}) \otimes_K M^{\mathfrak{g}}$$

wobei $\mathfrak{B}(\mathfrak{g})$ den Raum der symmetrischen invarianten Bilinearformen auf $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Außerdem gilt $\mathfrak{B}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Beweis. Nach Korollar 4.4.3 und Satz 4.4.5 reicht es $C^3(\mathfrak{g}, K)^{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{B}(\mathfrak{g})$ zu zeigen. Sei $\beta \in \mathfrak{B}(\mathfrak{g})$, dann definieren wir

$$\omega_. : \mathfrak{B}(\mathfrak{g}) \longrightarrow C^3(\mathfrak{g}, K)^{\mathfrak{g}} \text{ durch } \omega_\beta(x_1^3) := \beta([x_1, x_2], x_3)$$

für jedes $\beta \in \mathfrak{B}(\mathfrak{g})$ und beliebige $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{g}$ und zeigen, dass diese offensichtlich lineare Abbildung ein Isomorphismus ist.

Doch zuerst überprüfen wir $\omega_\beta \in C^3(\mathfrak{g}, K)^{\mathfrak{g}}$: Auf Grund der Bilinearität von β und der Lie–Klammer gilt

$$\omega_\beta((x_1 + \lambda y) \wedge x_2^3) = \omega_\beta(x_1^3) + \lambda\omega_\beta(y \wedge x_2^3)$$

und wegen der Invarianz und Symmetrie von β und der Antisymmetrie der Lie–Klammer folgt zudem für jedes $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$\omega(x \wedge x \wedge y) = \omega(x \wedge y \wedge x) = \omega(y \wedge x \wedge x) = 0.$$

Damit ist $\omega_\beta \in C^3(\mathfrak{g}, K)$.

Sind nun $x, x_i \in \mathfrak{g}$ beliebig, dann folgt

$$\begin{aligned}(x\cdot\omega_\beta)(x_1^3) &= -\omega_\beta([x,x_1]\wedge x_2\wedge x_3) - \omega_\beta(x_1\wedge[x,x_2]\wedge x_3) - \omega_\beta(x_1\wedge x_2\wedge[x,x_3]) \\ &= -\beta([[x,x_1],x_2],x_3) - \beta([x_1,[x,x_2]],x_3) - \beta([x_1,x_2],[x,x_3]) \\ &\overset{(1.2)}{=} \beta([[x_1,x_2],x],x_3) - \beta([x_1,x_2],[x,x_3]) \\ &= 0\end{aligned}$$

Folglich ist $\omega_\beta \in C^3(\mathfrak{g}, K)^{\mathfrak{g}}$ und damit $\omega_.$ wohldefiniert.

Die Injektivität von $\omega_.$ ist leicht zu verifizieren: Ist $\beta \in \mathfrak{B}(\mathfrak{g})$ sodass $\omega_\beta(x_1^3) = 0$ für alle $x_i \in \mathfrak{g}$ gilt, dann folgt aus $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ sofort $\beta(x,y) = 0$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ und damit $\beta = 0$.

Für die Surjektivität müssen wir etwas weiter ausholen (s. [CE, Thm. 21.1]): Für eine beliebige invariante Kokette $\omega \in C^3(\mathfrak{g}, K)^{\mathfrak{g}} = Z^3(\mathfrak{g}, K)$ und einem $x \in \mathfrak{g}$ gilt

$$d(\omega_x) \overset{(1.11)}{=} x\cdot\omega - (d\omega)_x = 0$$

und nach dem zweiten Whitehead–Lemma 4.3.2 gilt $\omega_x \in B^2(\mathfrak{g}, K)$, was die Existenz einer 1–Kokette $\bar\omega_x \in C^1(\mathfrak{g}, K)$ mit $d(\bar\omega_x) = \omega_x$ impliziert. Da K als $\mathfrak{g}$–Modul trivial ist, folgt $B^1(\mathfrak{g}, K) = 0$ und nach dem 1. Whitehead–Lemma somit auch $Z^1(\mathfrak{g}, K) = 0$. Also ist d auf $C^1(\mathfrak{g}, K)$ injektiv und die Abbildung $\omega_x \mapsto \bar\omega_x$ eindeutig definiert. Außerdem gilt

$$z\cdot\bar\omega_x = \bar\omega_{[z,x]}$$

was sich aus folgender Überlegung erklärt:

$$d(z\cdot\bar\omega_x) = z\cdot(d\bar\omega_x) = z\cdot\omega_x \overset{(1.10)}{=} (z\cdot\omega)_x + \omega_{[z,x]} = \omega_{[z,x]} = d(\bar\omega_{[z,x]}).$$

Definieren wir nun

$$\beta_\omega(x,y) := \bar\omega_y(x),$$

dann ist offensichtlich β_ω eine Bilinearform, die invariant ist:

$$\beta_\omega([x,y],z) = \bar\omega_z([x,y]) = (y\cdot\bar\omega_z)(x) = \bar\omega_{[y,z]}(x) = \beta_\omega(x,[y,z]).$$

Aus der Invarianz folgt hingegen

$$\begin{aligned}\beta_\omega([x,y],z) =&\beta_\omega(x,[y,z]) = -\beta_\omega(x,[z,y]) = -\beta_\omega([x,z],y) \\ =&\beta_\omega([z,x],y) = \beta_\omega(z,[x,y])\end{aligned}$$

und da $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ gilt, ist damit β_ω symmetrisch — Insgesamt also $\beta_\omega \in \mathfrak{B}(\mathfrak{g})$. Wenden wir nun darauf die anfangs definierte Abbildung $\omega_.$ an, erhalten wir

$$\begin{aligned}\omega_{\beta_\omega}(x_1^3) &= \beta_\omega([x_1, x_2], x_3) = \bar{\omega}_{x_3}([x_1, x_2]) \\ &= -d(\bar{\omega}_{x_3})(x_1 \wedge x_2) = -\omega_{x_3}(x_1 \wedge x_2) \\ &= \omega(x_1^3)\end{aligned}$$

und die Surjektivität von $\omega_.$ ist gezeigt.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{g}) \neq 0$ folgt sofort aus Lemma 4.1.1. Dem zufolge ist nämlich

$$\beta(x,y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))$$

eine symmetrische invariante Bilinearform, die auf Grund der Treue von ad nicht–ausgeartet und damit insbesondere nicht–trivial ist. □

Korollar 5.4.2. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. einfache Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0. Dann gilt:*

$$b_3(\mathfrak{g}) = \dim_K H^3(\mathfrak{g}, K) = 1.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie Algebra. Da nach Satz 5.4.1 $\mathfrak{B}(\mathfrak{g}) \neq 0$ ist, gibt es eine nicht–triviale Bilinearform $\beta \in \mathfrak{B}(\mathfrak{g})$ und da $\mathrm{rad}(\beta)$ ein echtes Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, gilt

$$\mathrm{rad}(\beta) = 0.$$

Also ist jede nicht–triviale Bilinearform von $\mathfrak{B}(\mathfrak{g})$ nicht–ausgeartet. Insbesondere findet sich zu jeder weiteren Bilinearform $\beta' \in \mathfrak{B}(\mathfrak{g})$ ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ sodass

$$\beta'(x,y) = \beta(f(x), y) \text{ für alle } x, y \in \mathfrak{g}$$

gilt.
Mit Hilfe der Invarianz von β und β' erhalten wir

$$\beta(f([x,y]), z) = \beta'([x,y],z) = \beta'(x,[y,z]) = \beta(f(x),[y,z]) = \beta([f(x),y],z)$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$ und weil β nicht–ausgeartet ist, folgt

$$f([x,y]) = [f(x), y].$$

Dies führt uns aber zu der Tatsache, dass jeder Eigenraum $E_\lambda(f)$ zum Eigenwert λ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ und damit entweder trivial oder ganz $\mathfrak{g}$ ist. Da nun K algebraisch abgeschlossen ist, existiert ein $\lambda' \in K$ sodass $E_{\lambda'}(f) \neq 0$ und damit $E_{\lambda'}(f) = \mathfrak{g}$ ist und wir erhalten

$$\beta'(x,y) = \lambda' \beta(x,y).$$

Dh. $\dim_K \mathfrak{B}(\mathfrak{g}) = 1$ sodass Satz 5.4.1 zufolge $\dim_K H^3(\mathfrak{g}, K) = 1$ gilt. □

5.5 Kohomologische Dimension

Definition 5.5.1. Eine Erweiterung von $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{b} \longrightarrow 0 \tag{5.13}$$

heißt *unimodular* wenn $\mathrm{ad}(x)|_{\mathfrak{a}}$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ triviale Spur besitzt.

Lemma 5.5.2. *Sei eine unimodulare Erweiterung von Lie Algebren wie in* (5.13) *gegeben. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)_{|\mathfrak{g}}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(\pi(x))_{|\mathfrak{b}})$ *für alle* $x \in \mathfrak{g}$.

(ii) $x \cdot m = \pi(x) \cdot m$ *für alle* $x \in \mathfrak{g}$ *und* $m \in K^{tw}$.

Beweis. *(i)*: Da wir $\mathfrak{g}$ als direkte Vektorraumsumme $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ schreiben können und $\mathrm{ad}(x)_{|\mathfrak{a}} \in \mathrm{End}_K(\mathfrak{a})$ ist, gilt für die Spurform:

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)_{|\mathfrak{g}}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)_{|\mathfrak{a}}) + \mathrm{tr}(\pi \circ \mathrm{ad}(x)_{|\mathfrak{b}}).$$

Aus der Voraussetzung und der Tatsache, dass ad mit jedem $\mathfrak{g}$–Modul–Homomorphismus kommutiert, folgt die Behauptung.

(ii) erhält man nun sofort aus *(i)*. □

Definition 5.5.3. Sei $\mathfrak{g}$ eine endl.–dim. Lie Algebra über einem Körper K. Dann nennen wir

$$cd(\mathfrak{g}) := \sup\{p \in \mathbb{Z} \mid H^p(\mathfrak{g}, K) \neq 0\}$$

die *kohomologische Dimension* von $\mathfrak{g}$.

Bemerkung 5.5.4. In der Definition der Kohomologischen Dimension haben wir $\mathfrak{g}$ als endl.–dim. vorausgesetzt sodass stets $cd(\mathfrak{g}) \leq \dim_K \mathfrak{g}$ gilt.

Lemma 5.5.5 ([ACK, Lem. 3.1])**.** *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie Algebra über einem Körper* K *und* M *ein* $\mathfrak{g}$*–Modul. Dann ist für jeden Kozykel* $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, M)$

$$\mathfrak{a} := \ker \omega \cap \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(M)$$

ein Ideal in $\mathfrak{g}$.

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in \mathfrak{a}$ beliebig gewählt. Dann ist nach

$$\omega([x, y]) = \omega(x \cdot y) \overset{(1.11)}{=} x \cdot \omega(y) \overset{y \in \ker \omega}{=} 0$$

$[x, y] \in \ker \omega$ und da $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(M)$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, folgt die gesuchte Behauptung $[x, y] \in \mathfrak{a}$. □

Bemerkung 5.5.6. Ist M ein $\mathfrak{g}$–Modul, so gilt für den Annihilator:

$$\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(M) = \bigcap_{\omega \in B^1(\mathfrak{g},M)} \ker \omega.$$

Ist zudem M eindimensional, können wir $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(M) = \ker d(m)$ für jedes $0 \neq m \in M$ schreiben.

Bemerkung 5.5.7. Ein Lie Algebra–Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ induziert die lineare, $\mathbb{Z}$–graduierte Abbildung $\varphi^\bullet : \Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Lambda^\bullet(\mathfrak{g}')$, definiert durch

$$\varphi^p(x_1^p) := \varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_p)$$

für alle $p \geq 0$ und $x_1^p \in \Lambda^p(\mathfrak{g})$ (damit ist $\varphi^0 = \mathrm{id}_K$). Ist φ injektiv (resp. surjektiv), dann ist für jedes $p \geq 1$ auch φ^p injektiv (resp. surjektiv) (für die Injektivität verwende man die Tatsache: $x_1^p = 0 \Leftrightarrow \{x_1, \ldots, x_p\}$ ist keine linear unabhängige Menge von Elementen aus $\mathfrak{g}$).

Lemma 5.5.8 ([Sa]). *Sei $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von Lie Algebren sowie (M, ρ) resp. (M, ρ') ein $\mathfrak{g}$– resp. $\mathfrak{g}'$–Modul sodass $\rho = \rho' \circ \varphi$ gilt. Dann induziert φ eine Kokettenkomplex–Abbildung:*

$$\Phi^\bullet : C^\bullet(\mathfrak{g}', M) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}, M) \ \mathit{mit}\ \Phi^p(\omega')(x_1^p) = \omega'(\varphi^p(x_1^p)).$$

(damit ist $\Phi^0 = \mathrm{id}_M$). Aus φ surjektiv folgt $\Phi^\bullet$ injektiv.

Beweis. Zuerst zeigen wir die Verträglichkeit von $\Phi^\bullet$ mit den Modulstrukturen der beiden Kokettenkomplexe im Sinne von

$$x \cdot \Phi^p(\omega') = \Phi^p(\varphi(x) \cdot \omega').$$

Für $p = 0$ ist dies auf Grund der Voraussetzung erfüllt. Sei also $p > 0$. Wenden wir nun auf $p - 1$ die Induktionsvoraussetzung an, so folgt diese erste Behauptung:

$$\begin{aligned}
(x \cdot \Phi^p(\omega'))_y &\overset{(1.10)}{=} x \cdot (\Phi^p(\omega')_y) - \Phi^p(\omega')_{[x,y]} = x \cdot \Phi^{p-1}(\omega'_{\varphi(y)}) - \Phi^{p-1}(\omega'_{[\varphi(x),\varphi(y)]}) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \Phi^{p-1}(\varphi(x) \cdot \omega'_{\varphi(y)} - \omega'_{[\varphi(x),\varphi(y)]}) \overset{(1.10)}{=} \Phi^{p-1}((\varphi(x) \cdot \omega')_{\varphi(y)}) \\
&= \Phi^p(\varphi(x) \cdot \omega')_y
\end{aligned}$$

Nun können wir die kommutative Leiter $d^p(\Phi^p(\omega)) = \Phi^{p+1}(d^p(\omega))$ wiederum induktiv nach p zeigen wobei der Induktionsanfang $p = 0$ auf Grund der Voraussetzung gegeben ist. Sei daher $p > 0$. Wenden wir auf $p - 1$ die I.V. an, so folgt:

$$\begin{aligned}
(d^p(\Phi^p(\omega')))_x &\overset{(1.11)}{=} x \cdot \Phi^p(\omega') - d^{p-1}(\Phi^p(\omega')_x) = \Phi^p(\varphi(x) \cdot \omega') - d^{p-1}(\Phi^{p-1}(\omega'_{\varphi(x)})) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \Phi^p(\varphi(x) \cdot \omega') - \Phi^p(d'^{p-1}(\omega'_{\varphi(x)})) \overset{(1.11)}{=} \Phi^p((d'^p \omega')_{\varphi(x)}) \\
&= (\Phi^{p+1}(d'^p \omega'))_x
\end{aligned}$$

Damit ist $\Phi^\bullet : C^\bullet(\mathfrak{g}', M) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}, M)$ ein Kokettenkomplex.

Angenommen φ ist surjektiv. Dann ist nach Bemerkung 5.5.7 auch φ^p für jedes $p \geq 0$ surjektiv. Für ein $\omega' \in \mathrm{Ker}(\Phi^p)$ gilt aber $\omega' \circ \varphi^p = 0$. Aus der Rechtskürzbarkeit von φ^p folgt daher $\omega' = 0$. Also ist Φ^p injektiv. □

Satz 5.5.9 ([ACK, Thm. 1.1]). *Sei $\mathfrak{g}$ eine n–dimensionale Lie Algebra über einem Körper K der Charakteristik 0. Dann gilt:*

(i) $cd(\mathfrak{g}) = n$ genau dann wenn $\mathfrak{g}$ unimodular ist.

(ii) $cd(\mathfrak{g}) = n - 1$ genau dann wenn $\mathfrak{g}$ eine unimodulare Erweiterung von $\mathfrak{aff}$ ist.

Beweis. *(i)*: Diese Äquivalenz folgt sofort aus der Poincaré–Dualität Satz 1.6.2:

$$H^n(\mathfrak{g}, K) \neq 0 \overset{1.6.2}{\Leftrightarrow} H^0(\mathfrak{g}, K^{tw}) \neq 0 \Leftrightarrow \mathfrak{g} \cdot K^{tw} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{g} \text{ ist unimodular.}$$

(ii): Sei zuerst $cd(\mathfrak{g}) = n - 1$. Wie man leicht sehen kann, ist ein eindimensionaler $\mathfrak{g}$–Modul M stets isomorph zu seiner dualen Struktur M^*. Außerdem gilt für den trivialen Modul K: $K^{tw} \cong_{\mathfrak{g}} K^{-tw}$. Zusammen mit der Poincaré–Dualität erhalten wir damit

$$H^0(\mathfrak{g}, K^{-tw}) = 0 \qquad \text{und} \qquad H^1(\mathfrak{g}, K^{-tw}) \neq 0. \tag{5.14}$$

Aus ersterem folgt $0 \neq \eta := d_{-tw}(1_K) \in B^1(\mathfrak{g}, K^{-tw})$ und nach zweiterem existiert ein $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, K^{-tw}) \smallsetminus B^1(\mathfrak{g}, K^{-tw})$. Nun definieren wir

$$\mathfrak{a} := \ker \omega \cap \ker \eta,$$

was nach Bemerkung 5.5.6 und Lemma 5.5.5 ein Ideal von $\mathfrak{g}$ der Kodimension 2 ist, und wählen $x, y \in \mathfrak{g}$ sodass

$$\mathfrak{a} \oplus Kx = \ker \omega,\ \mathfrak{a} \oplus Ky = \ker \eta \text{ und } \eta(x) = \omega(y) = 1_K$$

gilt. Da y im Ideal $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(K^{-tw}) = \ker \eta$ liegt, gilt $[x, y] \in \mathfrak{a} \oplus Ky$ und indem man beachtet, dass $\eta(z) = z \cdot_{-tw} (1_K)$ für alle $z \in \mathfrak{g}$ gilt, folgt zudem

$$\omega([x, y]) = \omega(x \cdot y) \overset{d_{-tw}\omega = 0}{=} x \cdot_{-tw} \omega(y) - \underbrace{y \cdot_{-tw} \omega(x)}_{=0} = \eta(x) = 1_K$$

was $[x, y] \in y + \mathfrak{a}$ und folglich $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{aff}$ bedeutet. Dh. $\mathfrak{g}$ ist eine Erweiterung von $\mathfrak{aff}$ über $\mathfrak{a}$ und, wie wir gleich zeigen werden, ist sie unimodular:

Denn für jedes $z \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(z)_{|\mathfrak{a}}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(z)_{|\mathfrak{g}}) - \eta([z, x]) - \omega([z, y]) = \eta(z) - \eta([z, x] - \omega([z, y]).$$

Ist $z \in \mathfrak{a}$, so folgt daraus sofort $\mathrm{ad}(z)_{|\mathfrak{a}} = 0$ da $\mathfrak{a}$ ein Ideal ist und sowohl η als auch ω

darauf verschwinden. Für die restlichen Fälle rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x)_{|\mathfrak{a}}) &= \eta(x) - \omega([x,y]) = 1 - 1 = 0\\ \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(y)_{|\mathfrak{a}}) &= \eta(y) - \eta([y,x]) = 2\eta(y) = 0\end{aligned}$$

sodass wir diese Richtung gezeigt haben.

Sei umgekehrt $\mathfrak{g}$ eine unimodulare Erweiterung $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{aff} = \langle x, y \mid [x,y] = y\rangle_K$. Weil $\mathfrak{aff}$ nicht perfekt ist, gilt $H^1(\mathfrak{aff}, K) \neq 0$ und nach der Poincaré–Dualität daher auch $H^1(\mathfrak{aff}, K^{tw}) \neq 0$. Auf Grund von Lemma 5.5.2 *(ii)* und der Surjektivität von π erhalten wir aus Lemma 5.5.8

$$\dim_K H^1(\mathfrak{g}, K^{tw}) \geq \dim_K H^1(\mathfrak{aff}, K^{tw}) \neq 0.$$

Damit ist aber wiederum nach der Poincaré–Dualität auch $H^{n-1}(\mathfrak{g}, K) \neq 0$ und folglich $cd(\mathfrak{g}) \geq n - 1$. Weil aber $\mathfrak{aff}$ nicht–unimodular ist und nach Lemma 5.5.2 *(i)* damit auch $\mathfrak{g}$, folgt aus der vorhin gezeigten Aussage *(i)* sofort $cd(\mathfrak{g}) = n - 1$. $\square$

Literaturverzeichnis

[ACK] G. F. Armstrong, G. Cairns und G. Kim, *Lie Algebras of cohomological codimension one*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 3, 709–714.

[Ba1] D. W. Barnes, *On the cohomolgy of soluble Lie algebras*, Math. Zeitschr. **101** (1967), 343–349.

[Ba2] D. W. Barnes, *First Cohomology Groups of Soluble Lie Algebras*, Journal of Algebra **46** (1977), 292–297.

[Bou] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Chap. 1–3, Springer, 1989.

[Bor1] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1*, Cambridge University Press, 1994.

[Bor2] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2*, Cambridge University Press, 1994.

[Bu1] D. Burde, *Lie–Algebra Kohomologie*, Vorlesungsskript, Wien, 2005.

[Bu2] D. Burde, *Lie Algebren und Darstellungstheorie*, Vorlesungsskript, Wien, 2006.

[BP] H.–B. Brinkmann und D. Puppe, *Kategorien und Funktoren*, Springer–Verlag, 1966.

[CJ] G. Cairns und B. Jessup, *New bounds on the Betti numbers of nilpotent Lie algebras*, Comm. Alg. **25** (1997), no. 2, 415–430.

[CE] C. Chevalley und S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 85–124.

[D1] J. Dixmier, *Cohomologie des algébres de Lie nilpotentes*, Acta. Sci. Math. Szeged **16** (1955), 246–250.

[D2] J. Dixmier, *Enveloping Algebras*, North–Holland Publishing Company, 1977.

[E] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer–Verlag, 1995.

[GM] S.I. Gelfand und Y.I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer–Verlag, 1988.

[G] S. I. Goldberg, *On the Euler characteristic of a Lie algebra*, Amer. Math. Monthly **62** (1955), 239–240.

[Hz] M. Hazewinkel, *A Duality theorem for the cohomology of Lie algebras*, Math. USSR Sbornik **12** (1970), 638–644.

[HiSt] P.J. Hilton und U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Springer–Verlag, 1970.

[HS] G. Hochschild und J.–P. Serre, *Cohomology of Lie algebras*, Annals of Math. **57** (1953), 591–603.

[H] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer–Verlag, 1972.

[J1] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W. H. Freeman and Company, 1985.

[J2] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W. H. Freeman and Company, 1980.

[J3] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover, 1979.

[Ko] J.–L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algébres de Lie*, Bull. Soc. France **78** (1950), 65–127.

[Kn] A. W. Knapp, *Lie groups, Lie algebras and cohomology*, Princeton University Press, 1988.

[Ma] S. Maclane, *Categories for the working mathmatician*, Springer–Verlag, 1971.

[Mi] B. Mitchell, *Theory of Categories*, Academic Press, New York and London, 1965.

[N] K.H. Neeb, *Lie Algebren*, Vorlesungsskript, TU Darmstadt.

[OV1] A. L. Onishchik und E. B. Vinberg (Eds.), *Lie Groups and Lie Algebras I*, Springer–Verlag, 1988.

[OV2] A.L. Onishchik und E. B. Vinberg (Eds.), *Lie Groups and Lie Algebras III*, Springer–Verlag, 1994.

[P] H. Pouseele, *On the Cohomology of Extensions by a Heisenberg Lie Algebra*, Bull. Austral. Math. Soc. **71** (2005), 459–470.

[Rot] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Springer–Verlag, 2009.

[Roz] B. I. Rozenfeld, *Cohomology of the algebra of formal universal differential operators*, Funct. Anal. Appl. **9** (1975), 126–130.

[Sa] L. J. Santharoubane, *Cohomology of Heisenberg Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), no. 1, 23–28.

[Sch1] H. Schubert, *Kategorien 1*, Akademie–Verlag Berlin, 1970.

[Sch2] H. Schubert, *Kategorien 2*, Akademie–Verlag Berlin, 1970.

[Se] J.P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, W. A. Benjamin, Inc., 1965.

[V] L.R. Vermani, *An elementary approach to homological algeba*, Chapman & Hall/CRC.

[W] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1997.

[Z1] P. Zusmanovich, *A converse to the Second Whitehead Lemma*, J. Lie Theory **18** (2008), 295–299.

[Z2] P. Zusmanovich, *A converse to the Whitehead Theorem*, J. Lie Theory **18** (2008), 811–815.

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit gewährt einen Einblick in die Theorie der Kohomologie von Lie Algebren und führt einige Resultate, vorrangig zu halbeinfachen und nilpotenten Lie Algebren und die dafür notwendigen Grundlagen, an. Dazu geben wir zu einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ und einem $\mathfrak{g}$–Modul M zuerst eine explizite Definition des Kokettenkomplexes und des zugehörigen Korandoperators $(C^\bullet(\mathfrak{g}, M), d^\bullet)$.

Die lange exakte Sequenz der Kohomologiegruppe, die durch eine kurze exakte Sequenz von $\mathfrak{g}$–Moduln induziert wird, ist neben der Euler–Poincaré Charakteristik und der Poincaré Dualität eines der ersten Resultate in Kapitel 1. Hierin beschäftigen wir uns auch mit der ersten und zweiten Kohomologiegruppe zu einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ und deren Interpretation als Klasse von $\mathfrak{g}$–Modulerweiterungen resp. abelschen Lie Algebra–Erweiterungen von $\mathfrak{g}$. Sie dienen unter anderem dafür, die klassischen Theoreme von Weyl und Levi zu zeigen. Maßgebend für deren Beweis sind aber das erste und zweite Whitehead–Lemma und damit indirekt auch das Whitehead–Theorem, welche wir ebenfalls, unter Einsatz des Casimir–Operators, beweisen werden.

Damit verbunden beantworten wir auch folgende Fragen: Für welche Lie Algebren sind sämtliche ersten resp. zweiten Kohomologiegruppen trivial und für welche Lie Algebren gilt: $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ für jeden einfachen $\mathfrak{g}$–Modul? Hierbei findet die in Kapitel 2 beschriebene Hochschild–Serre–Spektralsequenz ihre erste Anwendung. Sie ist auch bei konkreten Fragestellungen zu den Bettizahlen in Kapitel 5 ein erfolgreiches Werkzeug. Dabei geben wir obere und untere Schranken der Bettizahlen nilpotenter Lie Algebren an, berechnen die Bettizahlen der Heisenberg Lie Algebren und zeigen: $b_3(\mathfrak{g}) = 1$ für jede einfache Lie Algebra $\mathfrak{g}$.

Ein großer Teil dieser Arbeit widmet sich auch der Homologischen Algebra. Es werden alle kategorie–theoretischen Grundlagen angeführt, um die Kohomologie von Lie Algebren axiomatisch in Form eines homologischen δ–Funktors zu definieren. Anschließend begründen wir anhand des Chevalley–Eilenberg Komplexes die Übereinstimmung der axiomatisch definierten Kohomologie von Lie Algebren mit der in Kapitel 1 explizit definierten.

Abstract

This thesis provides an insight into the theory of cohomology of Lie algebras and some of the results, primarily for semisimple and nilpotent Lie algebras, with the necessary foundations. For this we give a explicit definition of a cochain complex and the associated differential $(C^\bullet(\mathfrak{g}, M), d^\bullet)$ of a Lie algebra $\mathfrak{g}$ and a $\mathfrak{g}$–module M.

The long exact sequence of cohomology, induced by a short exact sequence of $\mathfrak{g}$–modules is, in addition to the Euler–Poincaré characteristic and the Poincaré duality, one of the first results in Chapter 1. Herein, we also deal with the first and second cohomology group of a Lie algebra $\mathfrak{g}$ and its interpretation as a class of $\mathfrak{g}$–module extensions and abelian Lie algebra extensions of $\mathfrak{g}$, respectively. They are used, among other things, to show the classical theorems of Weyl and Levi. But the decisive role in their proofs plays the first and second Whitehead lemma and thus, indirectly, the Whitehead theorem, which we also prove using the Casimir–operator.

Linked to this we ask the following questions: For which Lie algebras all of the first cohomology groups respectively second cohomology groups are trivial and for which Lie algebras is $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ for every simple $\mathfrak{g}$–module? Here we use the Hochschild–Serre spectral sequence described in Chapter 2 for the first time to give answers of these questions. It is also a successful tool in concrete questions about the Betti numbers in Chapter 5. There we give upper and lower bounds of the Betti numbers of nilpotent Lie algebras, compute the Betti numbers of the Heisenberg Lie algebras and show: $b_3(\mathfrak{g}) = 1$ for any simple Lie algebra $\mathfrak{g}$.

Much of this work is also dedicated to homological algebra. All category theoretical foundations are presented to define the cohomology of Lie algebras axiomatically in the form of a homological δ functor. Subsequently we show on the basis of the Chevalley–Eilenberg complex that the axiomatically defined cohomology of Lie algebras is in accordance with the explicitly defined cohomology in Chapter 1.

Lebenslauf des Autors

Florian Kickinger

Staatsbürgerschaft:	Österreich

09/1996 – 06/2001	**Höhere Lehranstalt für Maschinenbau** Ausbildungszweig Automatisierungstechnik
06/2001	**Reife- und Diplomprüfung** mit ausgezeichnetem Erfolg bestanden
01/2002 – 09/2002	**Präsenzdienst**
10/2002 – 10/2004	**Universität Wien** I. Abschnitt Diplomstudium Mathematik mit Auszeichnung bestanden
seit 10/2004	**Universität Wien** II. Abschnitt Diplomstudium Mathematik