



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Äquivariante Version des Theorems von de Rham  
für Wirkungen der Kreislinie“

Verfasser

Jan Andreas Pretnar

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im April 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 405

Studienrichtung lt. Studienblatt: Mathematik

Betreuer: Univ.-Ass. Privatdoz. Dr. Stefan Haller



## Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei meinem Betreuer Stefan Haller bedanken. Durch die Auseinandersetzung mit dem von ihm vorgeschlagenen Thema habe ich nicht nur auf mathematischem Gebiet viel gelernt, sondern auch auf emotionalem. In schwierigen Phasen hat er sich immer wieder sehr viel Zeit genommen, um mich bei mathematischen Problemen zu unterstützen und mich stets mit positivem, konstruktivem Feedback aufs neue motiviert.

Des weiteren bedanke ich mich bei Klaus Kröncke, Thomas Mejstrik und Florian Ried, mit denen ich mich zusätzlich mathematisch austauschen konnte.

Ein ganz besonderer Dank gebührt vor allem meiner Mutter Gabriele Pretnar, sowie meiner Großmutter Waltraud Lumbar, meinem Onkel Boris Lumbar, meiner Freundin Katja Link und ihren Eltern Monika und Erich Link. Ohne ihre finanzielle und emotionale Unterstützung wäre der Abschluss meines Studiums nicht möglich gewesen. Außerdem danke ich meiner Freundin, die mir auf jede erdenkliche Weise zur Seite gestanden ist, dass sie sich die Mühe gemacht hat, mir beim Korrekturlesen auch ohne spezielles mathematisches Fachwissen zu helfen.

Abschließend bedanke ich mich noch bei all meinen Freundinnen und Freunden, die akzeptiert haben, dass mein Studium im letzten Jahr oberste Priorität hatte und trotz der Vernachlässigung zu mir gehalten haben.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>11</b>
1.1 Transformationsgruppen . . . . .	11
1.2 Kohomologie . . . . .	19
<b>2 Äquivariante Kohomologie der Kreislinie</b>	<b>29</b>
2.1 Topologischer Zugang . . . . .	29
2.2 Algebraischer Zugang über die Geometrie . . . . .	38
<b>3 Äquivariante Version des de Rham Theorems</b>	<b>55</b>
3.1 Limiten . . . . .	55
3.2 Der Beweis . . . . .	66
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>75</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>79</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>81</b>



# Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist eine Verallgemeinerung des Theorems von de Rham, welches besagt, dass die de Rham Kohomologie einer glatten Mannigfaltigkeit mit der singulären Kohomologie derselben bis auf natürliche Isomorphie übereinstimmt. Letztere hängt dabei nur vom zugrunde liegenden topologischen Raum ab, während für die de Rham Kohomologie eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur notwendig ist. Gemäß dem Theorem ist die de Rham Kohomologie bereits eindeutig durch die der Mannigfaltigkeit zugrunde liegende Topologie festgelegt.

Eine Verallgemeinerung des Theorems soll derart erfolgen, dass wir zwei Kohomologien, die von Wirkungen der Kreislinie  $S^1$  abhängen, eine für topologische Räume und eine für glatte Mannigfaltigkeiten einführen werden, welche bis auf natürliche Isomorphie für kompakte, glatte Mannigfaltigkeiten übereinstimmen. Die Wirkung der  $S^1$  bildet einen wichtigen Spezialfall der in [GS99] behandelten Wirkungen allgemeiner kompakter Lie Gruppen  $G$ . Um den allgemeinen Fall zu beweisen, wird dort die Theorie der Spektralsequenzen benötigt. Die Eindimensionalität der  $S^1$  ermöglicht es, in dieser Arbeit einen Beweis zu führen, der ohne diese Theorie auskommt.

Im ersten Kapitel sollen Begriffe und Eigenschaften behandelt werden, die wir verallgemeinern wollen und die notwendig sein werden, um die gewünschten Verallgemeinerungen durchzuführen. Beginnen werden wir mit Letzterem, wobei wir zwischendurch auch immer wieder Ergebnisse erwähnen werden, die zum besseren Verständnis der eingeführten Begriffe dienen sollen. Im ersten Paragraphen betrachten wir topologische Räume resp. glatte Mannigfaltigkeiten und allgemeine Lie Gruppen, die auf ihnen wirken. Die zentralen Objekte sind Orbiträume und Hauptfaserbündel der Transformationsgruppen. Im zweiten Paragraphen behandeln wir die wichtigsten Aspekte der singulären - resp. de Rham Kohomologie, die für unsere Zwecke notwendig sein werden und das Theorem von de Rham, das wir verallgemeinern wollen. Ganz essenziell ist die Homotopieinvarianz, die besagt, dass Räume, die sich stetig ineinander transformieren lassen, bis auf Isomorphie dieselbe Kohomologie besitzen.

Im zweiten Kapitel werden wir die im ersten Kapitel eingeführten Kohomologien auf topologische Räume resp. glatte Mannigfaltigkeiten verallgemeinern, auf denen die kompakte, zusammenhängende Lie Gruppe  $S^1$  wirkt. So wie stetige resp. glatte Abbildungen zwischen topologischen Räumen resp. glatten Mannigfaltigkeiten Homomorphismen in der jeweiligen Kohomologie induzieren, sollen entsprechende Abbildungen, welche die  $S^1$ -Wirkungen respektieren, Homomorphismen in den so genannten äquivarianten Kohomologien induzieren. Für freie Wirkungen liefert in beiden Fällen die Kohomologie des Orbitraumes die gewünschten Objekte. Für nicht freie Wirkungen bedarf es einiger Arbeit, wobei wir den topologischen und den glatten Fall separat behandeln werden.

Im ersten Paragraphen des zweiten Kapitels führen wir das topologische Modell der äquivarianten Kohomologie ein, das auf Armand Borel zurückgeht. Die Idee ist, die  $S^1$ -Wirkung auf einem topologischen Raum  $X$  auf ein Produkt  $X \times F$  auszudehnen, auf dem sie dann frei ist. Damit die Kohomologie des Orbitraumes so eines Produktes bis auf einen natürlichen Isomorphismus eine Verallgemeinerung der Kohomologie des Orbitraumes ist, wird es notwendig sein, zu fordern, dass  $F$  kontrahierbar ist, i.e. sich stetig zu einem Punkt deformieren lässt. Damit diese Konstruktion unabhängig von den gewählten Räumen ist, werden einige Resultate über Faserbündel benötigt, die weitere Einschränkungen bezüglich der topologischen Räume zur Folge haben. Wie sich herausstellen wird, genügt es, Parakompaktheit zu fordern, um alle erforderlichen Resultate anwenden zu können. Um die Existenz sicherzustellen, wird am Ende des Paragraphen ein entsprechender topologischer Raum konstruiert.

Im zweiten Paragraphen des zweiten Kapitels wollen wir die de Rham Kohomologie glatter Mannigfaltigkeiten  $M$  verallgemeinern. Im Prinzip werden wir die Vorgänge des topologischen Falles imitieren, jedoch müssen dazu einige Schwierigkeiten überwunden werden. Es wird sich nämlich keine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit finden lassen, welche die Rolle des oben erwähnten Raumes  $F$  erfüllen könnte. Da sich die reguläre Kohomologie von  $M$  mithilfe des de Rham Komplexes  $\Omega^*(M)$  und der äußeren Ableitung  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  berechnen lässt, werden wir die notwendigen Eigenschaften der de Rham Komplexe einer Mannigfaltigkeit  $\Omega^*(M)$ , auf der die  $S^1$  wirkt, und deren Orbitraum  $\Omega^*(M/S^1)$  algebraisch charakterisieren. Das algebraische Pendant zu  $\Omega^*(M)$  bekommt den Namen  $S^1$ -Stern Algebra und die Teilalgebra, die  $\Omega^*(M/S^1)$  entspricht, wird der basische Teilkomplex genannt. Die Begriffe wurden von Victor Guillemin und Shlomo Sternberg eingeführt, die Ideen die dahinterstecken gehen jedoch größtenteils auf Henri Cartan zurück.

Als nächstes sollten die Eigenschaften des de Rham Komplexes des Orbitraumes von  $M$  charakterisiert werden, falls die  $S^1$  frei wirkt. Leider lassen sich freie Wirkungen nicht so einfach in die algebraische Sprache übersetzen. Wie sich jedoch herausstellen wird, ist es hinreichend, lokal freie Wirkungen zu charakterisieren. Wir sagen, dass eine  $S^1$ -Stern Algebra Bedingung (Z) erfüllt, wenn sie die entsprechenden Eigenschaften besitzt, die lokal freie Wirkungen verallgemeinern. Um im algebraischen Setting nun die topologischen Konstruktionen nachzuahmen, werden wir den de Rham Komplex  $\Omega^*(M)$  mit einer  $S^1$ -Stern Algebra  $\Lambda$  tensorieren, sodass das Tensorprodukt Bedingung (Z) erfüllt, und über dessen basischen Teilkomplex die äquivariante de Rham Kohomologie definieren. Die Kontrahierbarkeit von  $F$  übersetzt sich dabei in die Azyklizität von  $\Lambda$ , i.e. wir fordern, dass  $\Lambda$  dieselbe Kohomologie wie  $F$  resp. der einpunktige Raum besitzt. Es bedarf einiger Arbeit, den algebraischen Zugang über die Geometrie herzuleiten und zu zeigen, dass damit das Gewünschte erreicht wurde. Zweiteres wird im letzten Kapitel gesondert behandelt.

Im dritten Kapitel wollen wir zeigen, dass es für kompakte, glatte Mannigfaltigkeiten einen natürlichen Isomorphismus zwischen den zwei eingeführten Begriffen der  $S^1$ -äquivarianten Kohomologie gibt. Da wir mit einem Resultat, mit dem wir auch diese verallgemeinerte Version des Theorems von de Rham zeigen, beweisen werden, dass der eben besprochene algebraische Zugang nicht von der Wahl der azyklischen Algebren

abhängt, verschieben wir die Frage der Wohldefiniertheit bis dahin. Um die beiden Modelle vergleichen zu können, müssen wir einen speziellen kontrahierbaren Raum  $F$  und ein spezielles azyklisches algebraisches Objekt  $\Lambda$  konstruieren, die dies ermöglichen. Dies funktioniert wie im Fall allgemeiner Lie Gruppen in [GS99], indem wir  $F$  als den direkten Limes der Sphären  $S^{2m-1}$  ungerader Dimension und  $\Lambda$  als direkte Summe der inversen Limiten der de Rham Komplexe  $\Omega^k(S^{2m-1})$  für  $k \in \mathbb{Z}$  definieren. Deshalb beschäftigen wir uns im ersten Paragraphen des dritten Kapitels mit Limiten.

Im letzten Paragraphen werden wir die äquivariante Version des de Rham Theorems für beliebige Wirkungen der Kreislinie beweisen. Ein ganz zentrales Resultat, das wir zeigen werden, wird sein, dass eine Abbildung zwischen  $S^1$ -Stern Algebren, die Bedingung (Z) erfüllen, genau dann einen Isomorphismus in den Kohomologien induziert, wenn sie einen Isomorphismus in den Kohomologien der basischen Teilkomplexe induziert. Mit diesem Resultat werden wir dann schlussendlich ebenfalls zeigen, dass die äquivariante de Rham Kohomologie unabhängig von der Wahl der Bedingung (Z) erfüllenden, azyklischen  $S^1$ -Stern Algebren und eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen de Rham Kohomologie ist.

Während der gesamten Arbeit werden wir uns immer wieder der elementarsten kategorientheoretischen Begriffe bedienen, wie es in der algebraischen Topologie gängig ist, da sie eine geeignete Sprache bietet, um Gemeinsamkeiten verschiedener mathematischer Disziplinen zu vereinheitlichen. Eine knappe Einführung in die Sprache der Kategorientheorie findet sich zum Beispiel in [Hat02, Paragraph 2.3].



# 1 Grundlagen

Im ersten Paragrafen sollen notwendige Begriffe und Eigenschaften bereitgestellt werden, die im Zusammenhang mit Wirkungen von Lie Gruppen auf topologischen Räumen resp. glatten Mannigfaltigkeiten wichtig sein werden, um eine äquivariante Kohomologie zu definieren. Bevor wir Letzteres in Angriff nehmen, fassen wir im zweiten Paragrafen die wichtigsten Eigenschaften der Kohomologietheorie exemplarisch an den Beispielen der de Rham - und der singulären Kohomologie zusammen.

## 1.1 Transformationsgruppen

Um grundlegende Definitionen und Eigenschaften topologischer Räume und glatter Mannigfaltigkeiten simultan zu behandeln, soll folgende Konvention eingeführt werden. Wir werden ab nun, wenn im Zusammenhang alle Begriffe einen Sinn ergeben, das Wort *Raum* als Synonym für topologische Räume und glatte Mannigfaltigkeiten verwenden. Ein *Morphismus* soll eine stetige resp. glatte Abbildung sein und ein *Isomorphismus* dementsprechend ein Homöomorphismus resp. Diffeomorphismus, je nachdem in welcher Kategorie sich die Abbildungen befinden. Lie Gruppen  $G$  zusammen mit Räumen, auf denen sie wirken, werden auch Transformationsgruppen genannt. Neben diesen behandeln wir in diesem Paragrafen noch  $G$ -Hauptfaserbündel. Für die topologischen Aspekte dieses Paragrafen seien [St51], [Hu94] sowie [Kr99] und für glatte Mannigfaltigkeiten betreffende Aspekte [Mi08], [Ba09], [GHV73] sowie [Kr10] erwähnt.

In der verwendeten Literatur werden glatte Mannigfaltigkeiten zum Teil nicht notwendigerweise als metrisierbar und separabel angenommen,<sup>1</sup> was in dieser Arbeit jedoch durchgehend der Fall sein wird, wie etwa in [BT82] oder [Mi08]. Oftmals werden glatte Mannigfaltigkeiten als parakompakte Hausdorffräume<sup>2</sup> vorausgesetzt, was für alle metrischen Räume immer erfüllt ist, siehe etwa [Kr99, Theorem 1.3.8]. Eine noch allgemeinere Behandlung von glatten Mannigfaltigkeiten und Lie Gruppen kann in [Kr07] und [Kr10] gefunden werden.

---

<sup>1</sup>Ein Raum  $X$  heißt *metrisierbar*, falls seine Topologie von einer Metrik erzeugt werden kann. Für so einen Raum sind äquivalent: (i)  $X$  ist *separabel*, i.e.  $X$  ist (topologischer) Abschluss einer abzählbaren Teilmenge, (ii)  $X$  erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, i.e. es gibt eine abzählbare Basis für die Topologie und (iii)  $X$  ist *Lindelöf*, i.e. für jede offene Überdeckung von  $X$  gibt es eine abzählbare Teilüberdeckung. Bewiesen wird das in [Kr99, Proposition 3.3.1]. Außerdem erfüllen metrisierbare Räume alle Trennungssaxiome, siehe [Kr99, Seite 26f.].

<sup>2</sup>Ein Raum heißt *parakompakt*, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung hat und *hausdorffsch*, falls es zu je zwei Punkten zwei disjunkte Umgebungen gibt. Für glatte Hausdorff Mannigfaltigkeiten  $M$  sind folgende Aussagen äquivalent: (i)  $M$  ist parakompakt, (ii)  $M$  ist metrisierbar und (iii) Jede Zusammenhangskomponente von  $M$  ist Lindelöf, siehe etwa [Kr07, Satz 19.6].

**Definition 1.1.1** (Lie Gruppe). Eine *Lie Gruppe* ist eine Gruppe  $G$  mit glatter Mannigfaltigkeitsstruktur, sodass die Multiplikation  $\mu : G \times G \rightarrow G$ ,  $\mu(g, h) =: gh$  eine glatte Abbildung ist. Aus deren Glattheit folgt jene der Inversion  $\nu : G \rightarrow G$ ,  $\nu(g) =: g^{-1}$  nach [Kr10, Bemerkung 2.2 (1)]. Eine *Lie Untergruppe* ist eine Untergruppe  $H \subseteq G$ , die wieder eine Lie Gruppe ist, sodass die natürliche Inklusion  $\iota : H \hookrightarrow G$  glatt ist.

**Bemerkung 1.1.2.** Es sei  $G$  eine Lie Gruppe. Falls eine (algebraische) Untergruppe  $H$  von  $G$  (topologisch) abgeschlossen ist, dann ist sie nach [Kr10, Satz 5.5] eine Lie Untergruppe und nach [Kr10, Satz 5.4] eine Teilmannigfaltigkeit, i.e. trägt die Spurtopologie von  $G$ . In diesem Fall gibt es nach [Kr10, Satz 6.9] auf dem Raum der (Links-) Nebenklassen  $G/H = \{gH : g \in G\}$ <sup>3</sup> eine eindeutige glatte Mannigfaltigkeitsstruktur, sodass die natürliche Projektion  $\pi : G \rightarrow G/H$ ,  $g \mapsto gH$  eine (finale) Submersion<sup>4</sup> ist.

**Definition 1.1.3** ( $G$ -Raum). Es seien  $G$  eine Lie Gruppe und  $M$  ein Raum. Eine *Linkswirkung* von  $G$  auf  $M$  ist ein Morphismus  $\lambda := \lambda^M : G \times M \rightarrow M$ ,  $\lambda(g, x) =: gx =: \lambda_g(x)$ , sodass  $\lambda_{gh} = \lambda_g \circ \lambda_h$  für alle  $g, h \in G$  und  $\lambda_e = \text{id}_M$  für das Einselement  $e \in G$ . Ein Raum, auf dem  $G$  (von links) wirkt, heißt *topologischer  $G$ -Raum* oder *glatte  $G$ -Mannigfaltigkeit*, je nachdem aus welcher Kategorie er ist. Wir fassen wieder beide Begriffe unter dem Wort  *$G$ -Raum* zusammen. Das Paar  $(M, G)$  wird auch *Transformationsgruppe* genannt. Ein Morphismus  $f : M \rightarrow N$  von  $G$ -Räumen heißt  *$G$ -äquivariant*, falls  $f \circ \lambda^M = \lambda^N \circ f$  gilt, i.e.  $f(gx) = gf(x)$  für alle  $g \in G$  und  $x \in M$ .

Für  $x \in M$  heißt die Menge  $Gx := \{gx : g \in G\} \subseteq M$  *Orbit* von  $x$  und die Menge  $G_x := \{g \in G : gx = x\}$  *Stabilisator* von  $x$  oder *Fixpunktgruppe* von  $x$ . Tatsächlich ist diese eine Untergruppe von  $G$ , da für  $g, h \in G_x$  nach Definition der Wirkung  $(gh)x = g(hx) = gx = x$  gilt und aus  $x = gx$  auch  $g^{-1}x = g^{-1}gx = ex = x$  folgt.

Eine Linkswirkung heißt *frei*, falls  $G_x = \{e\}$  für alle  $x \in M$  und sie wird *transitiv* genannt, falls  $Gx = M$  für ein  $x \in M$  gilt. Letzteres besagt, dass es für jedes  $y \in M$  ein  $h \in G$  mit  $hx = y$  gibt und somit auch  $Gy = Ghx = Gx = M$  gilt. Weiters nennen wir eine Linkswirkung *proper*, falls die Abbildung  $(\lambda, \text{pr}_2) : G \times M \rightarrow M \times M$ ,  $(g, x) \mapsto (gx, x)$  proper ist, also wenn Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.

Eine *Rechtswirkung* von  $G$  auf  $M$  ist ein Morphismus  $\rho : M \times G \rightarrow M$ ,  $\rho(x, g) =: xg =: \rho_g(x)$ , sodass  $\rho_{gh} = \rho_h \circ \rho_g$  für alle  $g, h \in G$  und  $\rho_e = \text{id}_M$ . Jede Linkswirkung  $\lambda$  definiert eine Rechtswirkung mittels  $\rho^\lambda(x, g) := \lambda_{g^{-1}}(x)$ , denn  $\rho_e^\lambda = \lambda_e = \text{id}_M$  und  $\rho_{gh}^\lambda = \lambda_{(gh)^{-1}} = \lambda_{h^{-1}g^{-1}} = \lambda_{h^{-1}} \circ \lambda_{g^{-1}} = \rho_h^\lambda \circ \rho_g^\lambda$ . Analog definiert jede Rechtswirkung  $\rho$  eine Linkswirkung  $\lambda^\rho : G \times M \rightarrow M$  mittels  $\lambda^\rho(g, x) := \rho_{g^{-1}}(x)$ . Ein Morphismus  $f : M \rightarrow N$  für den  $G$  auf  $M$  von links und auf  $N$  von rechts wirkt resp. umgekehrt heißt  *$G$ -äquivariant*, falls  $f(gx) = f(x)g^{-1}$  resp.  $f(xg) = g^{-1}x$  gilt.

<sup>3</sup>Die zugrunde liegende Topologie von  $G/H$  ist die *Quotiententopologie*. Für eine Menge von Äquivalenzklassen  $X/\sim$  einer Äquivalenzrelation  $\sim$  auf einem Raum  $X$  ist diese definiert als die *Finaltopologie* bezüglich der *natürlichen Projektion*  $\pi : X \rightarrow X/\sim$ ,  $x \mapsto [x]$ , i.e. eine Menge  $U \subseteq X/\sim$  ist genau dann offen, wenn  $\pi^{-1}(U) \subseteq X$  offen ist. Damit sind Abbildungen  $f : X/\sim \rightarrow Y$  genau dann stetig, wenn es  $f \circ \pi$  ist. Auf  $G$  ist die Äquivalenzrelation gegeben durch  $a \sim g :\Leftrightarrow g^{-1}a \in H \Leftrightarrow a \in gH := \{gh : h \in H\}$  für  $a, g \in G$  und somit sind die Äquivalenzklassen  $[g] := \{a \in G : a \sim g\} = gH$ .

<sup>4</sup>Eine glatte Abbildung  $g : M \rightarrow N$  heißt *Submersion*, falls für jedes  $x \in M$  die Tangentialabbildung  $T_x g : T_x M \rightarrow T_{g(x)} N$  surjektiv ist. Ist  $g$  zusätzlich surjektiv, dann ist  $g$  auch *final*, i.e. Abbildungen  $f : N \rightarrow P$ , für die  $f \circ g : M \rightarrow P$  glatt ist, sind selbst schon glatt, siehe etwa [Kr07, Folgerung 22.2].

**Bemerkung 1.1.4.** Es sei  $M$  ein  $G$ -Raum.

(i) Für jedes  $g \in G$  ist der Morphismus  $\lambda_g : M \rightarrow M, \lambda_g(x) := \lambda(g, x) = gx$  sogar ein Isomorphismus, denn für  $\lambda_{g^{-1}}$  gilt  $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \lambda_{gg^{-1}} = \lambda_e = \text{id}_M$  und ebenso folgt  $\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g = \text{id}_M$ . Somit definiert jede Linkswirkung einen Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow \text{Aut}(M)$ ,  $g \mapsto \lambda_g$ , wobei  $\text{Aut}(M) := \text{Iso}(M, M)$ , denn  $gh \mapsto \lambda_g \circ \lambda_h$ . Es sei zu beachten, dass Rechtswirkungen Gruppenantihomomorphismen definieren, i.e.  $gh \mapsto \rho_h \circ \rho_g$ .

(ii) Wir betrachten nun die *Evaluationsabbildung*  $ev_x : G \rightarrow M, ev_x(g) := gx$  bei  $x \in M$ . Diese ist als Einschränkung von  $\lambda$  wieder ein Morphismus und faktorisiert zu einem bijektiven Morphismus  $\tilde{ev}_x : G/G_x \rightarrow \text{img}(ev_x) = Gx, gG_x \mapsto gx$ , denn:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{ev_x} & Gx \subseteq M \\ \pi \downarrow & \# \nearrow & \\ G/G_x & \xrightarrow{\tilde{ev}_x} & \end{array} \quad (1.1)$$

$\tilde{ev}_x$  ist wohldefiniert und injektiv, da  $gx = hx \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow gG_x = hG_x$  für alle  $g, h \in G$  gilt. Im topologischen Fall folgt mit Fußnote 3 aus der Stetigkeit von  $ev_x = \tilde{ev}_x \circ \pi$ , dass auch  $\tilde{ev}_x$  stetig ist. Um dies im glatten Fall einsehen zu können, beachten wir zuerst, dass der Stabilisator  $G_x$  als Urbild der abgeschlossenen Menge  $\{x\}$  unter der stetigen Abbildung  $ev_x$  wieder abgeschlossen ist. Nach Bemerkung 1.1.2 kann  $G/G_x$  also eindeutig mit einer glatten Struktur versehen werden, sodass die natürliche Projektion  $\pi : G \rightarrow G/G_x$  eine Submersion wird und da  $ev_x = \tilde{ev}_x \circ \pi$  glatt ist, gilt dies mit Fußnote 4 auch für  $\tilde{ev}_x$ .

Mit dem Diagramm (1.1) lässt sich nun gut erkennen, dass  $G$  genau dann frei wirkt, wenn alle  $ev_x$  injektiv sind und genau dann transitiv wirkt, wenn ein (und somit alle)  $ev_x$  surjektiv ist. Für freie Wirkungen sind die Evaluationsabbildungen also stetige Bijektionen auf das Bild, jedoch werden die Umkehrabbildungen im Allgemeinen nicht stetig und somit keine Homöomorphismen sein.

(iii) Wir betrachten den Morphismus  $(\lambda, \text{pr}_2) : G \times M \rightarrow M \times M, (g, x) \mapsto (ev_x(g), x)$  und bezeichnen mit  $M^* := \{(gx, x) : g \in G, x \in M\} \in M \times M$  sein Bild. Falls  $G$  frei wirkt, erhalten wir eine Abbildung  $\tau : M^* \rightarrow G, (y, x) \mapsto ev_x^{-1}(y)$ , die auch *Translationsfunktion* von  $M$  genannt wird, sodass für jedes  $x \in M$  mit  $\tau_x := \tau|_{Gx \times \{x\}}$  und  $i_x : M \rightarrow M \times \{x\}, y \mapsto (y, x)$  folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{(\lambda, \text{pr}_2)} & M^* \subseteq M \times M \\ \text{pr}_1 \downarrow & \tau \nearrow & \cup \\ & & Gx \times \{x\} \subseteq M \times \{x\} \\ & \tau_x \nearrow & \cong \uparrow i_x \\ G & \xrightarrow{ev_x} & Gx \subseteq M \end{array} \quad (1.2)$$

Falls  $\tau$  stetig ist, dann ist jeder Orbit  $Gx$  homöomorph zu  $G$ . Denn mit  $\tau$  sind alle Einschränkungen  $\tau_x$  stetig, also auch alle  $ev_x^{-1} = \tau_x \circ i_x$ . Außerdem ist  $\tau$  genau dann stetig, wenn  $(\lambda, \text{pr}_2)$  ein Homöomorphismus auf das Bild ist.

**Bemerkung 1.1.5.** Es sei  $M$  eine glatte  $G$ -Mannigfaltigkeit.

(i) Für  $x \in M$  ist nach [Mi08, Theorem 6.4] der Orbit  $Gx \subseteq M$  eine initiale Teilmannigfaltigkeit und  $\tilde{e}v_x : G/G_x \rightarrow Gx$  eine initiale Immersion.<sup>5</sup> Also ist  $\tilde{e}v_x^{-1}$  glatt, weil  $\tilde{e}v_x \circ \tilde{e}v_x^{-1} = \text{id}_{Gx}$  glatt ist und damit ist  $\tilde{e}v_x : G/G_x \xrightarrow{\cong} Gx$  ein Diffeomorphismus. Falls  $G$  transitiv wirkt, gilt die Mengenidentität  $Gx = M$  und wir erhalten einen Diffeomorphismus  $\tilde{e}v_x : G/G_x \xrightarrow{\cong} M$ , weil die Umkehrabbildung  $i : M \rightarrow Gx = M$  der natürlichen Inklusion  $\iota : Gx \rightarrow M$  wegen  $\iota \circ i = \text{id}_M$  mit Fußnote 5 glatt ist. Falls  $G$  frei wirkt, dann stimmen nach (1.1) die Abbildungen  $\tilde{e}v_x$  und  $e v_x$  überein. Wir fassen zusammen:

$$\tilde{e}v_x : G/G_x \xrightarrow{\cong} Gx \Rightarrow \begin{cases} \tilde{e}v_x : G/G_x \xrightarrow{\cong} M, & \text{falls } G \text{ transitiv auf } M \\ e v_x : G \xrightarrow{\cong} M, & \text{falls } G \text{ transitiv und frei auf } M \end{cases} \quad (1.3)$$

(ii) Falls  $G$  kompakt ist, dann ist die Wirkung proper. Dazu betrachten wir das Urbild einer kompakten Menge  $K \times L$  unter der stetigen Abbildung  $(\lambda, \text{pr}_2) : G \times M \rightarrow M \times M$ , wobei  $K, L \subseteq M$  zwei kompakte Mengen sind. Weil  $M \times M$  hausdorffsch ist, ist  $K \times L$  abgeschlossen, siehe [Kr99, Proposition 2.1.6], und somit auch  $(\lambda, \text{pr}_2)^{-1}(K \times L)$ . Weiters ist dieses (abgeschlossene) Urbild enthalten in der kompakten Menge  $G \times L$ , also selbst wieder kompakt, siehe etwa [Kr99, Folgerung 2.1.4].

**Definition 1.1.6** (Hauptfaserbündel). Es seien  $P, B$  und  $F$  Räume und  $p : P \rightarrow B$  ein Morphismus. Das Quadrupel  $(P, p, B, F) =: \mathcal{P}$  heißt (*lokal triviales*) *Faserbündel* mit *Fasertyp*  $F$ , *Totalraum*  $P$ , *Basisraum*  $B$  und *Projektion*  $p$ , falls jeder Punkt  $b \in B$  eine Umgebung  $U \subseteq B$  und einen Isomorphismus  $\varphi_U : p^{-1}(U) =: P|_U \rightarrow U \times F$  besitzt, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} P \supseteq P|_U & \xrightarrow[\varphi_U]{\cong} & U \times F \\ & \downarrow p \quad \# & \swarrow \text{pr}_1 \\ B \supseteq U & & \end{array}$$

Für jedes  $b \in B$  heißt  $P_b := p^{-1}(b)$  die *Faser über*  $b$  und via der Einschränkungen  $\varphi_b := \varphi_U|_{P_b} : P_b \rightarrow \{b\} \times F$  erhalten wir Isomorphismen  $P_b \cong F$ . Lokal sieht ein Faserbündel wie ein Produkt  $\text{pr}_1 : B \times F \rightarrow B$ , ein so genanntes *triviales Bündel* aus und wir nennen die  $\varphi_U$  *lokale Trivialisierungen*. Insbesondere ist  $p$  surjektiv und im glatten Fall submersiv. Ein *lokaler Schnitt* eines Faserbündels ist ein Morphismus  $s : U \rightarrow P$  mit  $p \circ s = \text{id}_U$ , i.e.  $s(b) \in P_b$  für alle  $b \in U$ . Er heißt (*globaler*) *Schnitt*, falls er auf dem gesamten Basisraum definiert ist.

Es sei  $P$  zusätzlich ein  $G$ -Raum, dessen Fasern  $F = G$  erfüllen. Falls die lokalen Trivialisierungen  $G$ -äquivariant bezüglich der Wirkung  $g(b, h) := (b, gh)$  für alle  $g, h \in G$  und  $b \in B$  sind, so nennen wir  $\mathcal{P}$  ein  *$G$ -Hauptfaserbündel*.

<sup>5</sup>Eine glatte Abbildung  $g : M \rightarrow N$  heißt *Immersion*, falls für jedes  $x \in M$  die Tangentialabbildung  $T_x g : T_x M \rightarrow T_{g(x)} N$  injektiv ist und heißt *initial*, falls Abbildungen  $f : P \rightarrow M$ , für die  $g \circ f : P \rightarrow N$  glatt ist, selbst schon glatt sind. Eine glatte Mannigfaltigkeit  $M \subseteq N$  heißt *initiale Teilmannigfaltigkeit* der glatten Mannigfaltigkeit  $N$ , falls die natürliche Inklusion eine initiale Immersion ist.

**Bemerkung 1.1.7.** (i) Faserbündel  $(P, p, B, F)$  besitzen immer lokale Schnitte. Dies gilt, da triviale Bündel  $\text{pr}_1 : B \times F \rightarrow B$  globale Schnitte  $t : B \hookrightarrow B \times F$  besitzen, die mittels der lokalen Trivialisierungen  $\varphi_U : P|_U \rightarrow U \times F$  lokale Schnitte  $s : U \hookrightarrow P|_U$  via  $s := \varphi_U^{-1} \circ t|_U$  liefern.

Wir zeigen weiters, dass die lokalen Schnitte eines Faserbündels in bijektiver Korrespondenz mit Morphismen  $\phi : U \rightarrow F$  stehen. Wiederum genügt es, dies für Schnitte  $t : U \rightarrow U \times F$  trivialer Bündel zu zeigen. Die Zuordnung  $\Phi : t \mapsto (\phi_t := \text{pr}_2 \circ t)$  liefert die Bijektion, denn für  $\Psi : \phi \mapsto (t_\phi := (\text{id}_U, \phi))$  gelten  $\Phi(\Psi(\phi)) = \text{pr}_2 \circ (\text{id}_U, \phi) = \phi$  und weil  $\text{pr}_1 \circ t = \text{id}_U$  auch  $\Psi(\Phi(t)) = (\text{id}_U, \text{pr}_2 \circ t) = t$ . Jeder Morphismus  $\phi : U \rightarrow F$  liefert also einen lokalen Schnitt mittels  $s_\phi := \varphi_U^{-1} \circ t_\phi$  und jeder Schnitt einen Morphismus mittels  $\phi_s := \text{pr}_2 \circ \varphi_U \circ s$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 P & \supseteq & P|_U & \xrightarrow[\varphi_U]{\cong} & U \times F & \subseteq & B \times F \\
 p \downarrow & & \uparrow s_\phi & \swarrow \phi_s & \searrow t_\phi & & \downarrow \text{pr}_1 \\
 B & \supseteq & U & \xrightarrow{\phi_s} & F & \xleftarrow{\phi_t} & U & \subseteq & B
 \end{array}$$

(ii) Für ein  $G$ -Hauptfaserbündel  $(P, p, B, G)$  ist die Wirkung von  $G$  auf  $P$  faserinvariant, i.e. sie schränkt sich für jedes  $b \in B$  zu einer Wirkung  $G \times P_b \rightarrow P_b$  ein. Dies folgt aus der  $G$ -Äquivarianz der Trivialisierungen  $\varphi_U : P|_U \rightarrow U \times G$ , denn für  $x \in P_b$  mit  $b \in U$  und  $g \in G$  gilt:  $p(gx) = \text{pr}_1(\varphi_U(gx)) = \text{pr}_1(g\varphi_U(x)) = \text{pr}_1(g(b, x)) = \text{pr}_1(b, gx) = b$ .

Weiters ist diese Wirkung frei und transitiv auf den Fasern. Dies folgt aus der  $G$ -Äquivarianz der zweiten Komponente  $\varphi_2 : P|_U \rightarrow G$  der Trivialisierungen  $\varphi_U$ . Ersteres stimmt, weil aus  $x = gx \in P_b$  folgt  $g\varphi_2(x) = \varphi_2(gx) = \varphi_2(x) \in G$  und damit  $g = e$ , also gilt  $G_x = \{e\}$ . Für die Transitivität auf den Fasern sei  $x \in P_b$  fix für ein  $b \in B$ . Für jedes  $y \in P_b$  sei  $g_y := \varphi_2(y)\varphi_2(x)^{-1} \in G$ . Da  $g_y x \in P_b$  liegt, folgt mit  $\varphi_2(g_y x) = g_y \varphi_2(x) = \varphi_2(y)$ , dass  $\varphi_U(g_y x) = \varphi_U(y)$  und somit  $g_y x = y$  gilt, also erhalten wir  $Gx = P_b$ .

(iii) Es sei nun umgekehrt ein Faserbündel  $(P, p, B, G)$  mit einer faserinvarianten Wirkung einer Lie Gruppe  $G$  auf  $P$ , die frei und transitiv auf den Fasern ist, gegeben. Nach (i) existieren lokale Schnitte  $s : U \rightarrow P|_U$  und wir werden zeigen, dass diese bijektive  $G$ -äquivariante Morphismen  $\psi_U : U \times G \rightarrow P|_U$ ,  $(b, g) \mapsto gs(b)$  liefern:

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xleftarrow{\lambda^P} & G \times P & (1.4) \\
 \cup & & \uparrow \text{id}_G \times s \\
 P|_U & \xleftarrow{\psi_U} & U \times G \cong G \times U \\
 p \downarrow & \swarrow \text{pr}_1 & \\
 U & & 
 \end{array}$$

Zuerst gilt aufgrund der Faserinvarianz  $p(\psi_U(b, g)) = p(gs(b)) = b = \text{pr}_1(b, g)$  für jedes  $b \in U$  und  $g \in G$ , also sind  $\psi_U$  wirklich Abbildungen, die das Diagramm (1.4) kommutativ machen. Weil  $\lambda^P$  und  $s$  Morphismen sind, gilt dies auch für die  $\psi_U$ . Weiters gilt  $\psi_U(g(b, h)) = \psi_U(b, gh) = ghs(b) = g\psi_U(b, h)$  für alle  $g, h \in G$  und  $b \in B$ , also ist die  $G$ -Äquivarianz erfüllt. Die Surjektivität folgt aus der Transitivität auf den Fasern, denn

für  $y \in P_b$  und  $x = s(b)$  gibt es ein  $g \in G$  mit  $gx = y$ , also  $\psi_U(b, g) = gs(b) = gx = y$ . Die Injektivität ist gegeben, weil  $G$  frei und faserinvariant wirkt, denn für  $x = s(b) \in P_b$  und  $g, h \in G$  folgt aus  $gx = \psi_U(b, g) = \psi_U(b, h) = hx$ , dass  $h^{-1}gx = x$  ist, also  $h^{-1}g = e$  und somit  $(b, g) = (b, h)$  gilt.

(iv) Die Voraussetzungen aus (iii) für ein Faserbündel sind in der Kategorie glatter Mannigfaltigkeiten äquivalent zu den Bedingungen für ein  $G$ -Hauptfaserbündel. In [Kr10, nach Definition 6.11] wird nämlich gezeigt, dass die glatten Abbildungen  $\psi_U$  in (1.4) Diffeomorphismen sind, also sind deren Umkehrabbildungen  $G$ -äquivalente lokale Trivialisierungen.<sup>6</sup> Anstelle der Forderung, dass  $p : P \rightarrow B$  ein lokal triviales Faserbündel ist, genügt es zu fordern, dass  $p$  surjektiv und submersiv ist, denn laut [Kr07, Proposition 22.1] existieren für Submersionen immer lokale Schnitte und wir erhalten analog mit (iii) lokale Trivialisierungen.

(v) In der Kategorie topologischer Räume sind die stetigen Abbildungen  $\psi_U$  in (1.4) im Allgemeinen keine Homöomorphismen, weil die Umkehrabbildungen nicht notwendigerweise stetig sein müssen. Wir betrachten die stetige Bijektion  $\lambda \times \text{pr}_2 : G \times P \rightarrow P^*$  aus (1.2). In 1.1.4 (iii) haben wir für freie Wirkungen gezeigt, dass die Translationsfunktion  $\tau : P^* \rightarrow G$  von  $P$  genau dann stetig ist, wenn  $\lambda \times \text{pr}_2$  ein Homöomorphismus ist und dies ist genau dann der Fall, wenn  $\lambda$  eine offene Abbildung ist.<sup>7</sup> Mit dem Diagramm (1.4) erkennen wir weiters, dass dies gleichbedeutend dazu ist, dass  $\psi_U$  offen und somit ein Homöomorphismus ist. In [Hu94] wird diese äquivalente Beschreibung von  $G$ -Hauptfaserbündeln als Definition herangezogen.

**Definition 1.1.8** (Orbitraum). Es sei  $M$  ein  $G$ -Raum, dann bildet die Menge aller Orbits eine Partition von  $M$ , denn aus  $\emptyset \neq Gx \cap Gy$  folgt  $gx = hy$  für gewisse  $g, h \in G$ , also gilt die Mengeneidentität  $Gx = Ggx = Ghy = Gy$ . Somit erhalten wir eine Äquivalenzrelation  $x \sim_G y :\Leftrightarrow y \in Gx$  auf  $M$ , dessen Äquivalenzklassen die Orbits sind. Die Familie  $\{Gx : x \in M\} =: M/G$  versehen mit der Quotiententopologie heißt *Orbitraum*. Um die Orbits  $Gx \subseteq M$  für  $x \in M$  besser von den Elementen im Orbitraum zu unterscheiden, sollen diese fortan mit  $[x] := Gx \in M/G$  bezeichnet werden.

**Bemerkung 1.1.9.** Die natürliche Projektion  $p : M \rightarrow M/G$ ,  $p(x) = [x]$  ist  $G$ -äquivariant und offen. Ersteres gilt wegen der Identität  $p(gx) = [gx] = [x] = g[x] = gp(x)$ . Für die zweite Behauptung beachten wir zuerst, dass  $p^{-1}(p(x)) = p^{-1}([x]) = Gx$  gilt. Somit folgt für offene Mengen  $U \subseteq M$ , dass  $p^{-1}(p(U)) = GU = \bigcup_{g \in G} \lambda_g(U)$  offen ist, weil die  $\lambda_g$  nach Bemerkung 1.1.4 (i) Homöomorphismen sind.

Falls  $G$  kompakt ist, so ist  $p$  zusätzlich abgeschlossen. Wir zeigen, dass die Menge  $p^{-1}(p(A)) = GA = \lambda(G, A)$  abgeschlossen ist, falls es  $A \subseteq M$  ist. Da  $G \times M \rightarrow G \times M$ ,  $(g, x) \mapsto (g, gx)$  ein Homöomorphismus mit Inverser  $\kappa : (g, x) \mapsto (g, g^{-1}x)$  ist, folgt  $(\lambda \circ \kappa)(g, x) = x = \text{pr}_2(g, x)$ . Da  $G$  kompakt ist, ist die Projektion  $\text{pr}_2 : G \times M \rightarrow M$  und damit  $\lambda$  abgeschlossen, siehe etwa [Di08, Proposition 1.5.1 und 1.8.5].

<sup>6</sup>Für  $G$ -äquivalente Isomorphismen  $\varphi : X \rightarrow Y$  ist  $\varphi^{-1} =: \psi : Y \rightarrow X$  wieder  $G$ -äquivariant, da mit  $y = \varphi(x) \in Y$  und  $g \in G$  gilt, dass  $\psi(gy) = \psi(g\varphi(x)) = \psi(\varphi(gx)) = gx = g\psi(\varphi(x)) = g\psi(y)$  ist.

<sup>7</sup>Eine Abbildung heißt *offen*, wenn Bilder offener Mengen offen sind. Sie heißt *abgeschlossen*, wenn die analoge Bedingung für abgeschlossene Mengen gilt. Eine bijektive Abbildung ist also genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie stetig und offen oder stetig und abgeschlossen ist.

**Proposition 1.1.10.** *Es sei  $M$  eine glatte  $G$ -Mannigfaltigkeit mit freier Wirkung. Genau dann, wenn die Translationsfunktion  $\tau : M^* \rightarrow G$  aus (1.2) in Bemerkung 1.1.4 (iii) stetig ist, kann der Orbitraum  $M/G$  mit einer eindeutigen Mannigfaltigkeitsstruktur ausgestattet werden, sodass die natürliche Projektion  $p : M \rightarrow M/G$ ,  $x \mapsto [x]$  eine Submersion ist. Nach Bemerkung 1.1.7 (iv) ist  $(M, p, M/G, G)$  in diesem Fall ein  $G$ -Hauptfaserbündel.*

*Beweis.* Ein Beweis kann in [Kr10, Satz 6.14] gefunden werden.  $\square$

**Korollar 1.1.11.** *Es sei  $M$  eine glatte  $G$ -Mannigfaltigkeit mit freier  $G$ -Wirkung. Falls  $G$  kompakt ist, dann ist  $\mathcal{M} := (M, p, M/G, G)$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel. Im topologischen Setting gilt dies ebenso, falls  $M \times M$  kompakt erzeugt<sup>8</sup> und hausdorffsch ist.*

*Beweis.* Gemäß Bemerkung 1.1.5 (ii) sind freie Wirkungen kompakter Lie Gruppen proper, i.e.  $(\lambda, \text{pr}_2) : G \times M \rightarrow M \times M$  ist proper und somit auch abgeschlossen.<sup>9</sup> Weil  $G$  frei wirkt, ist die Abbildung  $(\lambda, \text{pr}_2)$  außerdem injektiv, siehe Bemerkung 1.1.4 (ii). Als abgeschlossene, stetige Bijektion auf das Bild  $M^*$ , ist sie also ein Homöomorphismus, was äquivalent zur Stetigkeit der Translationsfunktion  $\tau$  in (1.2) ist. Mit Proposition 1.1.10 folgt also der erste Teil der Behauptung.

Für topologische Räume beachten wir, dass wir in Bemerkung 1.1.5 (ii) nur die Hausdorffeigenschaft verwendet haben, um zu zeigen, dass freie Wirkungen kompakter Lie Gruppen  $G$  proper sind. Wie im ersten Teil des Beweises folgt die Stetigkeit der Translationsfunktion von  $M$ , welche nach Bemerkung 1.1.7 (v) äquivalent zur  $G$ -Hauptfaserbündel Eigenschaft von  $\mathcal{M}$  ist.  $\square$

**Bemerkung 1.1.12.** Es wirke eine kompakte Lie Gruppe  $G$  frei auf den Räumen  $M$  und  $N$ . Jeder  $G$ -äquivariante Morphismus  $f : M \rightarrow N$  faktorisiert dann zu einem Morphismus  $f_G : M/G \rightarrow N/G$ ,  $f_G([x]) := [f(x)]$ , denn:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ p^M \downarrow & \# & \downarrow p^N \\ M/G & \xrightarrow{f_G} & N/G \end{array} \quad (1.5)$$

Für  $[y] = [x] \in M/G$  gilt wegen  $f(y) = f(gx) = gf(x)$  die Wohldefiniertheit  $[f(y)] = [f(x)] \in N/G$ . Die Kommutativität des Diagramms  $f_G \circ p^M = p^N \circ f$  gilt per definitionem, also folgt die Stetigkeit von  $f_G$  aus jener von  $p^N \circ f$ , weil die Orbiträume  $M/G$  und  $N/G$  die Quotiententopologie tragen. Analog folgt die Glattheit von  $f_G$ , da die natürlichen Projektionen für kompakte und frei wirkende Lie Gruppen  $G$  nach Korollar 1.1.11 Submersionen sind.

<sup>8</sup>Ein Raum  $X$  heißt *kompakt erzeugt* oder *k-Raum*, wenn er die finale Topologie bezüglich der natürlichen Inklusionen seiner kompakten Mengen trägt.

<sup>9</sup>In [Kr10, Lemma, S.78f.] wird gezeigt, dass stetige, propere Abbildungen von Hausdorff Räumen  $f : X \rightarrow Y$  für  $k$ -Räume  $Y$  auch abgeschlossen sind. Mannigfaltigkeiten sind lokal homöomorph zum  $\mathbb{R}^n$ , also *lokal kompakt*, i.e. jeder Punkt besitzt eine kompakte Umgebung. Nach [Kr99, Proposition 2.3.2] sind sie damit auch kompakt erzeugt. Das Produkt zweier  $k$ -Räume ist kompakt erzeugt, falls einer der Räume lokal kompakt ist, siehe etwa [Kr99, Folgerung 2.3.4].

**Definition 1.1.13** (Assoziiertes Faserbündel). Es seien  $G$  eine kompakte Lie Gruppe, sowie  $M$  und  $F$  zwei  $G$ -Räume, sodass  $G$  frei auf  $M$  wirkt. Die natürliche Projektion  $\text{pr}_1 : M \times F \rightarrow M$  ist  $G$ -äquivariant bezüglich der komponentenweisen (freien) Wirkung  $g(x, y) := (gx, gy)$  am Produktraum  $M \times F$  und liefert nach Bemerkung 1.1.12 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M \times F & \xrightarrow{p^{M \times F}} & M_F := M \times_G F := (M \times F) / G \\ \downarrow \text{pr}_1 & \# & \downarrow p_F \\ M & \xrightarrow{p} & M/G \end{array} \quad (1.6)$$

für einen Morphismus  $p_F : M_F \rightarrow M/G$ ,  $[x, y] \mapsto [x]$ . Nach Korollar 1.1.11 ist in der Kategorie glatter Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M} := (M, p, M/G, G)$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel, also gilt nach [GHV73, Paragraf V.2, Seite 198f.], dass auf  $M_F$  eine eindeutige glatte Struktur existiert, sodass  $\mathcal{M}_F := (M_F, p_F, M/G, F)$  ein Faserbündel mit Fasertyp  $F$  ist. Im topologischen Setting ist  $\mathcal{M}_F$  laut [Hu94, Paragraf 4.5 bis 4.7] ein Faserbündel mit Fasertyp  $F$ , falls  $\mathcal{M}$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel ist. In beiden Fällen wird  $\mathcal{M}_F$  das zu  $\mathcal{M}$  assoziierte Faserbündel mit Faser  $F$  genannt.

**Definition 1.1.14** (Pullback Bündel). Es sei  $\mathcal{P} = (P, p, B, F)$  ein Faserbündel und  $f : A \rightarrow B$  ein Morphismus. Für  $f^*P := \{(a, x) \in A \times P : f(a) = p(x)\}$  nennen wir  $f^*(\mathcal{P}) := (f^*P, \text{pr}_1, A, F)$  das *Pullback Bündel* oder auch das *induzierte Bündel* von  $P$  unter  $f$  und  $\tilde{f} : f^*P \rightarrow P$ ,  $(a, x) \mapsto x$  die von  $f$  induzierte Projektion, die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} A \times P \supseteq f^*P & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

**Bemerkung 1.1.15.** Gemäß [Hu94, Korollar 2.6.7] ist  $f^*\mathcal{P}$  ein (lokal triviales) Faserbündel, falls  $\mathcal{P}$  eines ist und laut [Hu94, Proposition 4.4.1] gibt es für ein  $G$ -Hauptfaserbündel  $\mathcal{P}$  auf dem Pullbackbündel genau eine Möglichkeit eine  $G$ -Wirkung zu definieren, sodass  $f^*\mathcal{P}$  wieder ein  $G$ -Hauptfaserbündel und  $\tilde{f}$  eine  $G$ -äquivariante Abbildung wird, nämlich via  $g(a, x) := (a, gx)$ . Weiters wird gezeigt, dass der Orbitraum des Pullback Bündels homöomorph zu  $A$  mittels der Abbildung  $[(a, x)] \mapsto a$  ist.

$$\begin{array}{ccc} f^*P & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\ \pi \downarrow & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow p \\ (f^*P)/G & \xrightarrow{\cong} & A \xrightarrow{f} B \end{array}$$

Diese Tatsachen gelten ebenfalls in der Kategorie glatter Mannigfaltigkeiten, siehe etwa [GHV73, Paragraf V.1, Seite 196]. Insbesondere ist die Basis jedes  $G$ -Hauptfaserbündels isomorph zu ihrem Orbitraum, wenn wir  $f = \text{id} : B \rightarrow B$  wählen.

## 1.2 Kohomologie

Im zweiten Paragrafen soll ein Überblick über die elementarsten Fakten im Umgang mit der de Rham - resp. der singulären Kohomologie gegeben werden. Zur intensiveren Auseinandersetzung mit dem Thema seien [BT82], [GHV72, Kapitel 5] sowie [Mi08, Kapitel III] für die de Rham Theorie und [Hat02] sowie [Di08, Kapitel 17] für die singuläre Kohomologietheorie empfohlen.

**Definition 1.2.1** (De Rham Differenzial). Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\Omega^k(M)$  der Vektorraum der Differentialformen vom Grad  $k$ , dann hat die äußere Ableitung  $d := d^k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  nach [Ca11, Satz 4.4] folgende Eigenschaften:

- (i)  $d^k$  sind lineare Abbildungen von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (ii)  $dd\alpha := d^k(d^{k-1}(\alpha)) = 0$  für alle  $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$  und  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (iii)  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$  für alle  $\alpha \in \Omega^k(M)$  und  $\beta \in \Omega^l(M)$ .
- (iv)  $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha)$  für alle glatten Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  and  $\alpha \in \Omega^k(N)$ .

Die Abbildung  $d$  wird auch *de Rham Differenzial* und der  $\mathbb{Z}$ -graduierte<sup>10</sup>  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega^k(M)$$

*de Rham Komplex* genannt, wobei die direkte Summe endlich ist, da  $\Omega^k(M) = \{0\} =: \mathfrak{o}$  für  $k < 0$  und  $k > \dim(M)$  trivial sind. Die Eigenschaft (iii) heißt *Leibniz Regel* und (iv) ist die *Natürlichkeit* des de Rham Differenzials. Eine  $k$ -Form  $\alpha \in \Omega^k(M)$  heißt *exakt*, falls  $\alpha \in \text{img}(d^{k-1})$ , also falls eine  $(k-1)$ -Form  $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$  existiert, für die  $d\beta = \alpha$  gilt und sie heißt *geschlossen*, falls  $\alpha \in \ker(d^k)$ , also  $d\alpha = 0$  gilt.

**Bemerkung 1.2.2.** Die Eigenschaft  $d \circ d = 0$  in 1.2.1 (ii) bedeutet gerade, dass jede exakte Differentialform auch geschlossen ist, i.e. für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  gilt für die Teilvektorräume  $\text{img}(d^{k-1}) \subseteq \ker(d^k) \subseteq \Omega^k(M)$ . Die Umkehrung gilt somit genau dann, wenn  $\text{img}(d^{k-1}) = \ker(d^k)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  beziehungsweise wenn alle Faktorräume  $\ker(d^k)/\text{img}(d^{k-1}) = \mathfrak{o}$  trivial sind.

**Definition 1.2.3** (De Rham Kohomologie). Es seien  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  das de Rham Differenzial. Unter der *k-ten de Rham Kohomologie* von  $M$  verstehen wir den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $H_{\text{dR}}^k(M) := \ker(d^k)/\text{img}(d^{k-1})$ . Für eine geschlossene  $k$ -Form  $\alpha \in \Omega^k(M)$  sei  $[\alpha] \in H^k(M)$  die von  $\alpha$  repräsentierte *Kohomologiekategorie*. Zwei geschlossene  $k$ -Formen  $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$  repräsentieren also dieselbe Kohomologiekategorie, wenn  $\alpha - \beta = d\gamma$  für ein  $\gamma \in \Omega^{k-1}(M)$  gilt, i.e. wenn sie sich durch eine exakte  $k$ -Form unterscheiden. Weiters nennen wir den  $\mathbb{Z}$ -graduierten  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$$H_{\text{dR}}^*(M) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H_{\text{dR}}^k(M)$$

<sup>10</sup>Es sei  $V$  ein Vektorraum und  $I$  eine Menge. Eine *I-Graduierung* von  $V$  ist eine Zerlegung von  $V$  in eine direkte Summe  $\bigoplus_{i \in I} V_i$  von Vektorräumen  $V_i$ . Wir nennen  $V$  in diesem Fall auch *I-graduiert*.

die *de Rham Kohomologie* von  $M$ . Die direkte Summe ist endlich, da nur endlich viele  $\Omega^k \neq \mathfrak{o}$  nicht trivial sind. Damit lässt sich jedes  $a \in H_{\text{dR}}^*(M)$  eindeutig als endliche Summe  $a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k$  für  $a_k \in H_{\text{dR}}^k(M)$  schreiben. Die Elemente  $a_k \in H_{\text{dR}}^k(M)$  heißen *homogen vom Grad  $k$* . Für die folgenden Bemerkungen beachten wir, dass lineare Abbildungen zwischen graduierten Vektorräumen eindeutig durch ihre Angabe auf homogenen Elementen festgelegt sind.

**Beispiel 1.2.4.** Die nullte Kohomologie einer Mannigfaltigkeit ist der Kern der Abbildung  $d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ , weil  $d^{-1} = 0$ . Da  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  ist  $H_{\text{dR}}^0(M)$  die Menge aller glatten Abbildungen von  $M$  nach  $\mathbb{R}$ , für die  $df = 0$  gilt, die also lokal konstant sind. Für zusammenhängende Mannigfaltigkeiten  $M$  gilt also  $H_{\text{dR}}^0(M) \cong \mathbb{R}$ .

**Bemerkung 1.2.5.** Es seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten.

(i) Die de Rham Kohomologie von  $M$  kann zu einer assoziativen, graduiert kommutativen  $\mathbb{R}$ -Algebra gemacht werden, i.e. ein graduierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum zusammen mit bilinearen Abbildungen

$$\wedge := {}^k \wedge^l : H_{\text{dR}}^k(M) \times H_{\text{dR}}^l(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^{k+l}(M),$$

welche  $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$  und  $a \wedge b = (-1)^{kl} b \wedge a$  für alle  $a \in H_{\text{dR}}^k(M)$ ,  $b \in H_{\text{dR}}^l(M)$ ,  $c \in H_{\text{dR}}^m(M)$  und  $k, l, m \in \mathbb{Z}$  erfüllen. Das Wedge-Produkt von Differenzialformen liefert die gewünschten Abbildungen mittels

$$([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta], \quad (1.7)$$

für  $\alpha \in \Omega^k(M)$  und  $\beta \in \Omega^l(M)$ . Um dies einzusehen, beachten wir, dass aus der Leibniz Regel  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta = 0$  folgt und deshalb  $[\alpha \wedge \beta]$  wirklich eine Kohomologieklass in  $H_{\text{dR}}^{k+l}(M)$  repräsentiert. Ebenfalls mit der Leibniz Regel folgt die Wohldefiniertheit der Abbildungen (1.7), i.e.  $[(\alpha + d\gamma) \wedge \beta] = [\alpha \wedge \beta] = [\alpha \wedge (\beta + d\tilde{\gamma})]$  für beliebige  $\gamma \in \Omega^{k-1}(M)$ ,  $\tilde{\gamma} \in \Omega^{l-1}(M)$ . Aus der Bilinearität des Wedge-Produktes und der Identität  $d(\gamma \wedge \beta) = d\gamma \wedge \beta + \gamma \wedge d\beta = d\gamma \wedge \beta$  folgt nämlich  $(\alpha + d\gamma) \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + d(\gamma \wedge \beta)$  mit  $\gamma \wedge \beta \in \Omega^{k+l-1}$ . Analog kann  $\alpha \wedge (\beta + d\tilde{\gamma}) - \alpha \wedge \beta = d((-1)^k(\alpha \wedge \tilde{\gamma}))$  mit  $(-1)^k(\alpha \wedge \tilde{\gamma}) \in \Omega^{k+l-1}$  gezeigt werden.

Das Wedge-Produkt von Differenzialformen ist bilinear, assoziativ und graduiert kommutativ, siehe etwa [Ča11, Paragraf 4.3], also auch die Abbildungen (1.7).

(ii) Falls  $M \neq \emptyset$ , dann liefert die von der konstanten Funktion  $\mathbf{1} \in C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^0(M)$  repräsentierte Kohomologieklass ein (eindeutiges) Einselement von  $H_{\text{dR}}^*(M)$ .

(iii) Zu jeder glatten Abbildung  $f : M \rightarrow N$  erhalten wir einen Algebrhomomorphismus  $f^* : H_{\text{dR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^*(M)$ . Diesen liefert der Pullback von Differenzialformen, denn wegen der Natürlichkeit  $d \circ f^* = f^* \circ d$  aus 1.2.1 (iv) sind für alle  $k \in \mathbb{Z}$

$$f^* := f^k : H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M), \quad f^*([\alpha]) := [f^*\alpha], \quad (1.8)$$

wohldefinierte, lineare Abbildungen. Für ein  $\alpha \in \Omega^k(N)$  mit  $d\alpha = 0$  und  $\gamma \in \Omega^{k-1}(N)$  gilt nämlich  $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha) = f^*(0) = 0$  und  $f^*(\alpha + d\gamma) = f^*\alpha + f^*(d\gamma) = f^*\alpha + d(f^*\gamma)$ .

Aus der Verträglichkeit des Pullbacks mit dem Wedge-Produkt, siehe etwa [Mi08, 9.5], folgt die Algebromorphismus-Eigenschaft  $f^*(a \wedge b) = f^*(a) \wedge f^*(b)$ .

(iv) Die Zuordnung  $(f : M \rightarrow N) \mapsto (f^* : H_{\text{dR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^*(M))$  ist funktoriell, i.e. erfüllt die beiden Identitäten (1)  $\text{id}_M^* = \text{id}_{H^*(M)}$  und (2)  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$  für alle glatten Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow P$ . Eine Zuordnung, die (1) und (2) erfüllt, heißt *kontravarianter Funktor* und würde sich „die Reihenfolge“ der Zusammensetzung in (2) nicht ändern, hieße sie *kovarianter Funktor*. Funktoren besitzen also die Eigenschaft, dass sie Isomorphismen beim Wechsel der Kategorien bewahren.

Wir fassen die Bemerkungen 1.2.5 (i) bis (iv) in folgender Proposition zusammen:

**Proposition 1.2.6.** *Die de Rham Kohomologie liefert einen kontravarianten Funktor von der Kategorie glatter (nichtleerer) Mannigfaltigkeiten und glatter Abbildungen in die Kategorie der assoziativen, graduiert kommutativen  $\mathbb{R}$ -Algebren (mit Einselement) und Algebromorphismen.*

**Bemerkung 1.2.7.** Ein topologisches Pendant zur de Rham Kohomologie bildet die singuläre Kohomologie mit reellen Koeffizienten topologischer Räume  $X$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne  $\Delta^k \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$  den  $k$ -dimensionalen *Standardsimplex*, i.e. die konvexe Hülle der Standardbasiselemente  $e_0, \dots, e_k$  und  $S_k(X)$  die Menge aller *singulären  $k$ -Simplizes*, i.e. stetige Abbildungen  $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ . Weiters bezeichnen wir mit  $C_k(X)$  den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, der durch das Bilden aller endlichen Linearkombinationen singulärer  $k$ -Simplizes, die wir als Basis von  $C_k(X)$  auffassen, entsteht. Für alle  $k < 0$  sei  $C_k(X) = \mathfrak{o}$ .

Auf den Vektorräumen  $C^k(X) := L(C_k(X), \mathbb{R})$  aller linearen Abbildungen von  $C_k(X)$  nach  $\mathbb{R}$  wollen wir nun lineare Abbildungen

$$d := d_X^k : C^k(X) \rightarrow C^{k+1}(X)$$

definieren, die wie das de Rham Differenzial  $d \circ d = 0$  erfüllen sollen, um analog Faktorräume  $\ker(d^k) / \text{img}(d^{k-1})$  bilden zu können. Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft wird auch *Korandoperator* genannt und der zugrunde liegende graduierte Vektorraum *Kokettenkomplex*. Jeder linearen Abbildung  $\alpha \in C^k(X)$  soll also eine lineare Abbildung  $d\alpha \in C^{k+1}(X)$  zugeordnet werden. Dafür definieren wir zuerst stetige Abbildungen  $\delta_{k+1}^j : \Delta^k \rightarrow \Delta^{k+1}$  als Einschränkung der linearen Abbildungen

$$\varphi_j : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{k+2}, \quad \varphi_j(e_i) := \begin{cases} e_i, & \text{falls } 0 \leq i < j \\ e_{i+1}, & \text{falls } j \leq i \leq k+1 \end{cases}$$

für  $0 \leq j \leq k+1$ . Da lineare Abbildungen eindeutig durch ihre Werte auf einer Basis festgelegt sind, liefert die Zuordnung

$$d\alpha := \left( \sigma \mapsto \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \cdot \alpha(\sigma \circ \delta_{k+1}^j) \right)$$

für  $\alpha \in C^k(X)$ ,  $\sigma \in S_{k+1}(X)$  eine lineare Abbildung  $d\alpha \in C^{k+1}(X)$ . Es lässt sich mit [Di08, Paragraf 9.1, Seite 224] elementar nachrechnen, dass  $d \circ d = 0$  gilt.

Wir bezeichnen mit  $H_{\text{sing}}^k(X) := \ker(d^k)/\text{img}(d^{k-1})$  die  $k$ -te *singuläre Kohomologie* von  $X$  und mit

$$H_{\text{sing}}^*(X; \mathbb{R}) := H_{\text{sing}}^*(X) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H_{\text{sing}}^k(X)$$

die *singuläre Kohomologie (mit reellen Koeffizienten)* von  $X$ .

Für stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und alle  $\alpha \in C^k(Y)$ , sowie  $\sigma \in S_k(X)$  erhalten wir mittels  $f^k \alpha := \sigma \mapsto \alpha(f \circ \sigma)$  lineare Abbildungen  $f^k \alpha \in C^k(X)$  und damit lineare Abbildungen  $f^* := f^k : C^k(Y) \rightarrow C^k(X)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Diese sind *Kokettenabbildungen*, i.e. sie erfüllen die Natürlichkeitseigenschaft  $d_X \circ f^k = f^{k+1} \circ d_Y$ :

$$d_X(f^k \alpha)(\sigma) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \alpha(f \circ \sigma \circ \delta_{k+1}^j) = d_Y \alpha(f \circ \sigma) = f^{k+1}(d_Y \alpha)(\sigma)$$

Dadurch erhalten wir analog zu Bemerkung 1.2.5 (iii) wohldefinierte und lineare Abbildungen  $f^* : H_{\text{sing}}^*(Y) \rightarrow H_{\text{sing}}^*(X)$  in der singulären Kohomologie wie in (1.8) mittels  $f^*([\sigma]) := [f^* \sigma]$ .

In [Hat02, Paragraf 3.2] wird gezeigt, dass sich auch die singuläre Kohomologie eines nichtleeren Raumes  $X$  zu einer assoziativen, graduiert kommutativen Algebra mit Einselement machen lässt, nämlich mittels des so genannten *Cup-Produktes*

$$\cup : H_{\text{sing}}^*(X) \times H_{\text{sing}}^*(X) \rightarrow H_{\text{sing}}^*(X), (a, b) \mapsto a \cup b \quad (1.9)$$

welches durch folgende Abbildung für  $k, l \in \mathbb{Z}$  definiert ist:

$$\begin{aligned} C^k(X) \times C^l(X) &\rightarrow C^{k+l}(X), \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \cup \beta := (\sigma \mapsto \alpha(\sigma|_{[e_0, \dots, e_k]}) \cdot \beta(\sigma|_{[e_k, \dots, e_{k+l}]})) \end{aligned}$$

Für einen  $(k+l)$ -Simplex  $\sigma \in S_{k+l}(X)$  bezeichne dabei  $\sigma|_{[e_0, \dots, e_k]}$  die Einschränkung auf die konvexe Hülle der  $e_0, \dots, e_k$ . Das Einselement  $H_{\text{sing}}^*(X)$  wird von der konstanten Abbildung  $\mathbf{1} : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$  repräsentiert, denn für alle  $\sigma \in S_1(X)$  ist  $d\mathbf{1}(\sigma) = 1 - 1 = 0$ . Weiters ist für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  die induzierte lineare Abbildung  $f^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$  ein Algebramorphismus, i.e.  $f^*(a \cup b) = f^*(a) \cup f^*(b)$ , denn es gilt für  $\alpha \in C^k(Y)$ ,  $\beta \in C^l(Y)$  sowie  $\sigma \in S_{k+l}(X)$  mit entsprechenden Einschränkungen  $\sigma_k := \sigma|_{[e_0, \dots, e_k]}$  und  $\sigma_l := \sigma|_{[e_k, \dots, e_{k+l}]}$ :

$$f^{k+l}(\alpha \cup \beta)(\sigma) = \alpha(f \circ \sigma_k) \cdot \beta(f \circ \sigma_l) = f^k(\alpha(\sigma_k)) \cdot f^l(\beta(\sigma_l)) = (f^k \alpha \cup f^l \beta)(\sigma)$$

Mit [Hat02, Theorem 3.14] können wir die Beobachtungen wie folgt zusammenfassen:

**Proposition 1.2.8.** *Die singuläre Kohomologie mit reellen Koeffizienten liefert einen kontravarianten Funktor von der Kategorie (nichtleerer) topologischer Räume und stetiger Abbildungen in die Kategorie der assoziativen, graduiert kommutativen  $\mathbb{R}$ -Algebren (mit Einselement) und Algebramorphismen.*

**Definition 1.2.9** (Homotopie). Es seien  $M, N$  Räume und  $I = [0, 1]$  das geschlossene Einheitsintervall. Wir nennen zwei Morphismen  $f, g : M \rightarrow N$  *homotop*, falls es eine stetige Abbildung  $h : M \times I \rightarrow N$ ,  $(x, t) \mapsto h_t(x)$  gibt, sodass  $h_0 = f$  und  $h_1 = g$  gelten und schreiben dann  $f \simeq g := f \simeq_h g$ . Die Abbildung  $h$  heißt *Homotopie* von  $f$  nach  $g$ . Falls ein Morphismus homotop zu einer konstanten Funktion ist, nennen wir ihn auch *nullhomotop*.

Ein Morphismus  $f : M \rightarrow N$  heißt *Homotopieäquivalenz*, falls es einen Morphismus  $g : N \rightarrow M$  gibt, sodass  $\text{id}_M \simeq g \circ f$  und  $\text{id}_N \simeq f \circ g$  gelten. In diesem Fall heißen  $M$  und  $N$  *homotopieäquivalent* und wir schreiben  $M \simeq N$ . Falls ein Raum  $M$  homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum  $\mathbb{R}^0 := \{0\}$  ist, nennen wir ihn *kontrahierbar*.

Eine Teilmenge  $D \subseteq M$  wird (schwacher) *Deformationsretrakt* genannt, falls es eine Homotopie  $h : M \times I \rightarrow M$  gibt, für die  $h_0 = \text{id}_M$ ,  $h_1(M) \subseteq D$  und  $h_1|_D = \text{id}_D$  gelten. Die Homotopie heißt dann *Deformationsretraktion*.

**Bemerkung 1.2.10.** Es seien  $M$  und  $N$  Räume und  $I = [0, 1]$ .

(i) Homotop zu sein ist laut [Di08, Seite 28] eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Morphismen  $M \rightarrow N$ . Gemäß [BJ73, Satz 14.8] gibt es im Setting glatter Mannigfaltigkeiten zu jeder Homotopie  $h : M \times I \rightarrow N$  auch eine glatte Abbildung  $\tilde{h} : M \times I \rightarrow N$  mit denselben Eigenschaften.

(ii) Falls eine Deformationsretraktion  $h : M \times I \rightarrow M$  auf  $D \subseteq M$  existiert, ist die natürliche Inklusion  $\iota : D \hookrightarrow M$  eine Homotopieäquivalenz, denn für den Morphismus  $g : M \rightarrow D$ ,  $x \mapsto h_1(x)$  gelten dann  $\text{id}_D = h_1|_D = g \circ \iota$  und  $\text{id}_M = h_0 \simeq h_1 = \iota \circ g$ .

(iii) Ein Raum  $M$  ist genau dann kontrahierbar, wenn  $\text{id}_M$  nullhomotop ist. Dies ist äquivalent dazu, dass einer (und dann jeder) der Punkte  $\{x\}$  von  $M$  ein Deformationsretrakt ist. Außerdem ist  $M$  dann wegzusammenhängend, denn für je zwei Punkte  $x, y \in M$  und die konstante Funktion  $c_y : M \rightarrow M$ ,  $z \mapsto y$  erhalten wir mittels der Homotopie  $h : M \times I \rightarrow M$ , die  $\text{id}_M \simeq c_y$  erfüllt, einen Weg  $\gamma : t \mapsto h_t(x)$  von  $x$  nach  $y$ , i.e. eine stetige Abbildung  $\gamma : I \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .

**Proposition 1.2.11** (Homotopieinvarianz). *Homotope Morphismen  $f \simeq g : M \rightarrow N$  induzieren dieselben Homomorphismen  $f^* = g^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$  in der Kohomologie.*

*Beweis.* Für topologische Räume siehe [Hat02, Paragraf 3.1, Seite 201] und für glatte Mannigfaltigkeiten [BT82, Korollar 4.1.2].  $\square$

**Korollar 1.2.12.** *Homotopieäquivalente Räume  $M \simeq N$  induzieren Isomorphismen  $H^*(M) \cong H^*(N)$  in der Kohomologie. Insbesondere liefert die Inklusion  $\iota : D \hookrightarrow M$  eines Deformationsretraktes einen Isomorphismus  $\iota^* : H^*(M) \rightarrow H^*(D)$  in der Kohomologie.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung existieren Morphismen  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow M$  mit  $g \circ f \simeq \text{id}_M$  und  $f \circ g \simeq \text{id}_N$ . Nach Proposition 1.2.11 induzieren diese dieselben Homomorphismen in der Kohomologie. Nach den Propositionen 1.2.8 und 1.2.6 ist die Kohomologie funktoriell und mit Bemerkung 1.2.5 (iv) folgt somit  $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \text{id}_M^* = \text{id}_{H^*(M)}$  sowie  $g^* \circ f^* = \text{id}_{H^*(N)}$ . Die letzte Aussage des Korollars folgt aus Bemerkung 1.2.10 (ii).  $\square$

**Beispiel 1.2.13** (Poincaré Lemma). Für die Kohomologie der  $n$ -dimensionalen Euklidischen Räume  $\mathbb{R}^n$ , sowie für alle kontrahierbaren Räume  $X$  gilt:

$$H^k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } k = 0 \\ \mathfrak{o}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.10)$$

*Beweis.* Es ist  $h : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, t) \mapsto (1-t)x$  eine Deformationsretraktion von  $\mathbb{R}^n$  auf  $\mathbb{R}^0$ , also ist  $\mathbb{R}^n$  nach Bemerkung 1.2.10 (iii) kontrahierbar. Nach Korollar 1.2.12 genügt es für kontrahierbare Räume die Kohomologie von  $\mathbb{R}^0$  anzugeben.

Für den einpunktigen Raum ist nur die nullte de Rham Kohomologie nicht trivial und diese ist nach Beispiel 1.2.4 isomorph zu  $\mathbb{R}$ . Für die singuläre Kohomologie beachten wir, dass es am einpunktigen Raum für jedes  $k \in \mathbb{N}$  nur einen singulären  $k$ -Simplex, nämlich die konstante Abbildung  $\Delta_k \rightarrow \mathbb{R}^0$ ,  $x \mapsto 0$  gibt. Der Vektorraum  $C_k(\mathbb{R}^0)$  ist also eindimensional und wir können  $C_k(\mathbb{R}^0)$  mit  $\mathbb{R}$  identifizieren, womit wir  $C^k(\mathbb{R}^0) = L(C_k(\mathbb{R}^0), \mathbb{R}) \cong (L(\mathbb{R}, \mathbb{R})) =: \mathbb{R}^*$  erhalten. Mittels dieser Identifikation erhält der Randoperator auf der Basis  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^*$ ,  $r \mapsto 1$  die Form  $d^k(\mathbf{1}) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \mathbf{1}$ , also  $d^{2k}(\mathbf{1}) = \mathfrak{o}$  und  $d^{2k+1}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  und somit

$$\dots \xrightarrow{c_{\mathfrak{o}}} \mathfrak{o} \xrightarrow{c_{\mathfrak{o}}} \mathfrak{o} \xrightarrow{c_{\mathfrak{o}}} \mathbb{R}^* \xrightarrow{c_{\mathfrak{o}}} \mathbb{R}^* \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{R}^*}} \mathbb{R}^* \xrightarrow{c_{\mathfrak{o}}} \mathbb{R}^* \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{R}^*}} \mathbb{R}^* \xrightarrow{c_{\mathfrak{o}}} \mathbb{R}^* \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{R}^*}} \dots$$

wobei  $c_{\mathfrak{o}} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  die konstante Abbildung auf  $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^*$  bezeichne. Für  $k > 1$  folgt also  $H^{2k}(\mathbb{R}^0) \cong \ker(c_{\mathfrak{o}})/\text{img}(\text{id}_{\mathbb{R}^*}) = \mathbb{R}^*/\mathbb{R}^* = \mathfrak{o}$  und  $H^{2k+1}(\mathbb{R}^0) \cong \ker(\text{id}_{\mathbb{R}^*})/\text{img}(c_{\mathfrak{o}}) = \mathfrak{o}$ . Es bleibt nur  $H^0(\mathbb{R}^0) \cong \ker(c_{\mathfrak{o}})/\text{img}(c_{\mathfrak{o}}) = \mathbb{R}^*/\mathfrak{o} \cong \mathbb{R}$ .  $\square$

**Theorem 1.2.14** (Künneth). *Es seien  $M$  und  $N$  Räume, von denen einer eine endlich dimensionale Kohomologie besitze, dann ist*

$$H^*(M \times N) \cong H^*(M) \otimes H^*(N) = \bigoplus_{i+j=k \in \mathbb{Z}} H^i(M) \otimes H^j(N)$$

ein natürlicher Isomorphismus. Für die natürlichen Projektionen  $\text{pr}_1 : M \times N \rightarrow M$  und  $\text{pr}_2 : M \times N \rightarrow N$  wird dieser im glatten Setting von den Abbildungen

$$\begin{aligned} \Omega^i(M) \otimes \Omega^j(N) &\rightarrow \Omega^{i+j}(M \times N), \\ \omega \otimes \nu &\mapsto p_1^*(\omega) \wedge p_2^*(\nu) \end{aligned}$$

und in der Kategorie topologischer Räume von

$$\begin{aligned} C^i(M) \otimes C^j(N) &\rightarrow C^{i+j}(M \times N), \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto p_1^*(\alpha) \cup p_2^*(\beta) \end{aligned}$$

induziert.

*Beweis.* Für topologische Räume liefert [Hat02, Theorem 3.16]<sup>11</sup> und für glatte Mannigfaltigkeiten [GHV72, Paragraf V.6] einen Beweis. Details zum Tensorprodukt finden sich in [JS06, Paragraf VII.10], die in Bemerkung 2.2.25 ausführlicher behandelt werden.  $\square$

<sup>11</sup>In [Hat02, Theorem 3.16] wird dies für die singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in Ringen  $R$  gezeigt, falls eine der beiden  $R$ -Moduln  $H_{\text{sing}}^*(M; R)$  und  $H_{\text{sing}}^*(N; R)$  endlich erzeugt ist. Für  $R = \mathbb{R}$  spezialisiert sich das auf unseren Fall.  $R$ -Moduln verallgemeinern den Begriff des  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes, wobei der Unterschied darin besteht, dass der Körper  $\mathbb{K}$  durch einen Ring  $R$  ersetzt wird.

**Bemerkung 1.2.15.** (i) Die Voraussetzung im Künneth Theorem, dass die Kohomologie endlich dimensional sein soll, ist zum Beispiel für kompakte, glatte Mannigfaltigkeiten gegeben. Diese nicht triviale Aussage kann zum Beispiel wie in [Kr07, Folgerung 49.9] mit Hodge Theorie oder wie in [Mi08, Theorem 13.2] mit der Poincaré Dualität resp. auch wie in [BT82, Proposition 5.3.1.] mit der Tatsache, dass kompakte Mannigfaltigkeiten eine endliche, gute Überdeckung besitzen, bewiesen werden.

(ii) Das Künneth Theorem wird mit der Mayer-Vietoris Sequenz bewiesen, welche in dieser Arbeit außerhalb dieses Paragrafen nicht mehr direkt angewandt werden wird. Für einen Raum  $M$ , der offene Vereinigung zweier Mengen  $U_1$  und  $U_2$  ist, stellt die (lange exakte) Mayer-Vietoris Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H^k(M) \xrightarrow{\alpha} H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) \xrightarrow{\beta} H^k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

einen Zusammenhang zwischen der Kohomologie von  $M$  und den Kohomologien der Mengen  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_1 \cap U_2$  her. Für die natürlichen Inklusionen  $\iota_i : U_i \hookrightarrow M$  und  $j_i : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_i$  sind die natürlichen Homomorphismen für  $a \in H^k(M)$ ,  $b_i \in H^k(U_i)$  und  $c \in H^k(U_1 \cap U_2)$  gegeben durch  $\alpha(a) = (\iota_1^*(a), \iota_2^*(a))$  und  $\beta(b_1, b_2) = j_1^*(b_1) - j_2^*(b_2)$ . Die Abbildung  $\delta$  ist gegeben durch  $\delta(c) = [\alpha^{-1}(d(\beta^{-1}(c)))]$  und wird *Einhängungshomomorphismus* genannt.

Damit kann die Kohomologie vieler Mannigfaltigkeiten u.a. jene der Sphären berechnet werden. Für eine detailliertere Behandlung dieses Themas sei hier auf [Mi08, Theorem 11.10] verwiesen.

**Definition 1.2.16** (Exakte Sequenzen). Es seien  $\varphi_n : G_n \rightarrow G_{n+1}$  Gruppenhomomorphismen für  $n \in \mathbb{Z}$ . Falls  $\text{img}(\varphi_n) = \ker(\varphi_{n+1})$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt, dann heißt

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{k-2}} G_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} G_k \xrightarrow{\varphi_k} G_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} \cdots \quad (1.11)$$

*lange exakte Sequenz* von Gruppen. Falls in (1.11) alle bis auf drei Gruppen  $G_n = \mathfrak{o}$  trivial sind, dann heißt

$$\mathfrak{o} \xrightarrow{c_0} G_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} G_k \xrightarrow{\varphi_k} G_{k+1} \xrightarrow{c_0} \mathfrak{o} \quad (1.12)$$

*kurze exakte Sequenz* von Gruppen. Wir beachten, dass aufgrund von  $\text{img}(c_0) = \ker(\varphi_{k-1})$  und  $\text{img}(\varphi_k) = \ker(c_0)$  die entsprechende Abbildung injektiv resp. surjektiv ist.

**Bemerkung 1.2.17.** Für die Kohomologie eines Raumes  $M$  gibt es einen natürlichen Isomorphismus in das Produkt der Kohomologien der Zusammenhangskomponenten  $M_i$  von  $M$ , i.e.  $H^*(\sqcup M_i) \cong \prod H^*(M_i)$ . Laut [Wa83, Kapitel 5] ist eine Kohomologie glatter Mannigfaltigkeiten eindeutig bestimmt durch diese Eigenschaft zusammen mit der Funktorialität, der Homotopieinvarianz, der Kohomologie des einpunktigen Raumes und der Mayer-Vietoris Sequenz. Kohomologien allgemeiner topologischer Räume sind durch die so genannten Eilenberg-Steenrod Axiome eindeutig bestimmt, siehe etwa [Di08, Paragraf 17.1] und [Di08, Paragraf 10.1].

**Beispiel 1.2.18.** Für die Kohomologie der  $n$ -dimensionalen Sphären  $S^n$  mit  $n \geq 1$  gilt:

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } k = 0, \text{ oder } k = n \\ \mathfrak{o}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.13)$$

Dies wird in [Mi08, Beispiel 11.13] mithilfe der Mayer-Vietoris Sequenz gezeigt.

**Beispiel 1.2.19.** Es sei  $p : M \rightarrow M/G$  ein triviales  $G$ -Hauptfaserbündel für eine kompakte Lie Gruppe  $G$ , dann ist

$$H^*(M) \cong H^*(M/G) \otimes H^*(G) \quad (1.14)$$

ein Isomorphismus.

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert ein Homöomorphismus  $M \cong M/G \times G$ , also wegen der Funktorialität der Kohomologie auch ein Isomorphismus  $H^*(M) \cong H^*(M/G \times G)$ , siehe Bemerkung 1.2.5 (iv). Da  $G$  eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, besitzt sie laut Bemerkung 1.2.15 (i) endlich dimensionale Kohomologie und wir können das Künneth Theorem 1.2.14 anwenden, um die Behauptung zu erhalten.  $\square$

**Bemerkung 1.2.20. (i)** Ein  $G$ -Hauptfaserbündel ist nach [Hu94, Korollar 4.8.3] genau dann trivial, wenn es einen (globalen) Schnitt besitzt. Im Allgemeinen ist es schwieriger, die Kohomologie eines  $G$ -Raumes  $M$  und die Kohomologie des Orbitraumes  $M/G$  mit der Kohomologie der wirkenden Lie Gruppe  $G$  in Relation zu bringen. Dazu müssten zumindest alle Orbits  $Gx = \pi([x])^{-1}$  isomorph zur Lie Gruppe sein. Für freie Wirkungen einer kompakten Lie Gruppe  $G$  ist dies in der Kategorie glatter Mannigfaltigkeiten immer der Fall, da laut Korollar 1.1.11  $(M, \pi, M/G, G)$  dann ein  $G$ -Hauptfaserbündel ist, also gemäß Bemerkung 1.1.7 (iv) die Lie Gruppe  $G$  frei und transitiv auf den Fasern wirkt. Aus Bemerkung 1.1.5 (i) folgt dann, dass  $\text{ev}_x : G \rightarrow Gx$  ein Diffeomorphismus ist. Im topologischen Setting gilt dies für freie Wirkungen einer kompakten Lie Gruppe  $G$ , falls die Translationsfunktion von  $M$  stetig ist, wie wir in Bemerkung 1.1.4 (iii) beobachtet haben. Diese beiden Fälle liegen nach den Bemerkungen 1.1.7 (iv) und (v) zum Beispiel für  $G$ -Hauptfaserbündel vor.

**(ii)** Für so genannte Sphärenbündel, i.e. orientierbare Faserbündel  $\mathcal{P} := (P, \pi, B, F)$ , deren Fasern  $F = S^m$  Sphären sind, existiert ein schöner Zusammenhang zwischen der Kohomologie des Totalraumes  $P$  und jener des Basisraumes  $B$ , welchen wir für glatte Mannigfaltigkeiten formulieren. Diesen liefert die (lange exakte) Gysin Sequenz:

$$\dots \xrightarrow{\pi^*} H_{\text{dR}}^k(P) \xrightarrow{\pi_*} H_{\text{dR}}^{k-m}(B) \xrightarrow{\epsilon} H_{\text{dR}}^{k+1}(B) \xrightarrow{\pi^*} H_{\text{dR}}^{k+1}(P) \xrightarrow{\pi_*} \dots$$

Dabei bezeichnen  $\pi^*$  den Pullback der natürlichen Projektion  $\pi : P \rightarrow B$ ,  $\pi_*$  die so genannte *Faserintegration*, siehe etwa [BT82, Kapitel I, Seite 61f.] und  $\epsilon(\omega) := \omega \wedge e$  das Wedge-Produkt mit der so genannten *Eulerklasse*  $e \in H^{m+1}(B)$ , siehe etwa [BT82, Kapitel II, Seite 116ff.]. Weitere Details dazu können in [BT82, Kapitel III, Seite 177ff.] oder auch in [GHV72, Paragraf VIII.1] gefunden werden. Für eine topologische Verallgemeinerung sei hier auf [Br97, Paragraf IV.7] resp. [Hat02, Seite 436ff.] verwiesen.

**Theorem 1.2.21** (De Rham). *Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit, dann existiert ein natürlicher Isomorphismus von der de Rham Kohomologie  $H_{\text{dR}}^*(M)$  in die singuläre Kohomologie  $H_{\text{sing}}^*(M)$ . Dieser wird von folgenden Abbildungen am Level der Kettenkomplexe induziert:*

$$\begin{aligned} j^* : C^k(M) &\rightarrow C_\infty^k(M) \\ \alpha &\mapsto (\sigma \mapsto \alpha(\sigma)) \\ k^* : \Omega^k(M) &\rightarrow C_\infty^k(M), \\ \omega &\mapsto \left( k^*(\omega) := \sigma \mapsto \int_{\Delta_k} \sigma^* \omega \right) \end{aligned}$$

Dabei bezeichne  $\sigma \in S_k^\infty(M)$ ,  $\sigma : \Delta_k \rightarrow M$  eine glatte Abbildung, i.e.  $\sigma$  besitzt eine glatte Ausdehnung von  $\Delta_k$  auf  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

*Beweis.* Ein Beweis kann in [Br97, Paragraf III.3] oder in [Wa83, Kapitel 5, Seite 205f.] gefunden werden. Für den Beweis wird das Theorem von Stokes für berandete Mannigfaltigkeiten mit Ecken benötigt.  $\square$

**Bemerkung 1.2.22.** Wie wir in Bemerkung 1.1.12 gesehen haben, induzieren  $G$ -äquivalente Morphismen  $f : M \rightarrow N$  freier Wirkungen kompakter Lie Gruppen Morphismen in den Orbiträumen, also nach Proposition 1.2.6 und Proposition 1.2.8 ebenfalls Algebromorphismen in der Kohomologie der Orbiträume in der entsprechenden Kategorie. Die Voraussetzung an die Wirkung ist dabei nur für glatte Mannigfaltigkeiten notwendig, um einen Sinn zu ergeben, da Orbiträume nicht freier Wirkungen im Allgemeinen keine glatten Mannigfaltigkeiten sind.

Wir werden im nächsten Kapitel die  $G$ -äquivalente Kohomologie von Räumen für nicht notwendigerweise freie Wirkungen definieren, die eine Verallgemeinerung der Kohomologie des Orbitraumes für freie Wirkungen sein wird. Diesen Spezialfall halten wir in folgender Definition fest.

**Definition 1.2.23** (Äquivalente Kohomologie freier Wirkungen). Es seien  $G$  eine kompakte Lie Gruppe und  $M$  ein  $G$ -Raum mit freier Wirkung. Die singuläre - resp. die de Rham Kohomologie des Orbitraumes von  $M$  bezeichnen wir mit  $H_G^*(M) := H^*(M/G)$  und nennen sie  $G$ -äquivalente Kohomologie von  $M$ .

**Bemerkung 1.2.24.** Alle Ergebnisse dieses Paragrafen erhalten wir also auch für die  $G$ -äquivalente Kohomologie, wenn wir  $G$ -Homotopien  $h : M \times I \rightarrow N$  verwenden, i.e.  $h$  ist eine Homotopie, sodass  $h_t$  für jedes  $t \in I$  eine  $G$ -äquivalente Abbildung ist. Diese faktorisieren nach Bemerkung 1.1.12 zu einer Homotopie  $h^G : M/G \times I \rightarrow N/G$ . Zum Beispiel induzieren Morphismen, die homotop bezüglich einer  $G$ -äquivalenten Homotopie sind, dieselben Homomorphismen in der  $G$ -äquivalenten Kohomologie.



## 2 Äquivariante Kohomologie der Kreislinie

Ziel dieses Kapitels ist es, auf zwei verschiedene Arten die  $G$ -äquivariante Kohomologie für den Spezialfall der Kreislinie  $G = S^1 \subseteq \mathbb{C}$  einzuführen. Im ersten Paragraphen befassen wir uns mit dem topologischen Setting, in dem wir ein Modell verwenden werden, das auf Armand Borel zurückgeht, siehe [Bo60]. Um die  $G$ -äquivariante Kohomologie glatter Mannigfaltigkeiten zu definieren, werden wir im zweiten Paragraphen zuerst alle notwendigen geometrischen Eigenschaften in die algebraische Sprache übersetzen, wobei die Idee hierfür auf Henri Cartan zurückgeht. Der Aufbau der folgenden zwei Paragraphen folgt in groben Zügen der Darstellung von [GS99, Kapitel 1 und 2], wo allgemeine Wirkungen beliebiger kompakter Lie Gruppen  $G$  auf topologischen Räumen und glatten Mannigfaltigkeiten behandelt werden.

### 2.1 Topologischer Zugang

Wir wollen also für allgemeine Wirkungen der  $S^1$  auf topologischen Räumen  $X$  eine Kohomologie definieren, welche die Kohomologie des Orbitraumes freier Wirkungen verallgemeinert. Für nicht freie Wirkungen würde zu viel Information der Gruppenwirkung verloren gehen, wenn wir einfach wieder die Kohomologie des Orbitraumes wählen würden. Die Idee ist, einen kontrahierbaren topologischen Raum  $F$  zu finden, auf dem die  $S^1$  frei wirkt, welche eine freie Wirkung auf dem Produkt  $X \times F$  induziert, indem wir die  $S^1$  komponentenweise wirken lassen. Wir müssen uns davon überzeugen, dass entsprechende Räume  $F$  existieren, sodass die  $S^1$ -äquivariante Kohomologie so eines Produktes wirklich eine Verallgemeinerung von Definition 1.2.23 darstellt und dass die Kohomologie unabhängig von der Wahl von  $F$  ist.

Um dies bewerkstelligen zu können, müssen wir noch einige Resultate über Faserbündel sammeln, die nicht für ganz beliebige topologische Räume gelten, aber zumindest für Faserbündel mit parakompakten Basen, denn in der angegebenen Literatur werden sie für Basen gezeigt, die eine lokal endliche Überdeckung besitzen, auf denen die Bündel trivialisieren. Für unsere Zwecke würde es genügen, sich auf  $CW$ -Komplexe<sup>12</sup> einzuschränken, denn topologische Räume  $Y$  lassen sich gemäß [Hat02, Paragraph 4.1]  $CW$ -approximieren, i.e. es gibt einen  $CW$ -Komplex  $Z$  und eine Abbildung  $f : Z \rightarrow Y$ , die einen Isomorphismus  $\pi_n(Z, z_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(z_0))$  in allen höheren Homotopiegruppen und nach [Hat02, Proposition 4.21] ebenfalls einen natürlichen Isomorphismus  $H_{\text{sing}}^*(Y) \rightarrow H_{\text{sing}}^*(Z)$  in der Kohomologie induziert, an der wir ja interessiert sind. Auf jeden Fall setzen wir fortan Parakompaktheit voraus.

---

<sup>12</sup>Für eine genaue Definition von  $CW$ -Komplexen sei hier auf [Hat02, Seite 5ff.] und für topologische Eigenschaften dieser auf [Hat02, Appendix, Seite 520ff.] sowie [Hat, Seite 35ff.] verwiesen. In Letzteren wird u.a. gezeigt, dass  $CW$ -Komplexe kompakt erzeugte, parakompakte Hausdorffräume sind.

**Definition 2.1.1** (Singuläre  $S^1$ -äquivariante Kohomologie). Es seien  $X$  und  $F$  zwei  $S^1$ -Räume und  $\mathcal{F} := (F, \pi, F/S^1, S^1)$  ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel mit kontrahierbarem Totalraum  $F$ . Die singuläre Kohomologie mit reellen Koeffizienten

$$H_{S^1}^*(X) := H_{\text{sing}}^*((X \times F)/S^1) \quad (2.1)$$

des Orbitraumes von  $X \times F$  bezüglich der komponentenweisen (freien) Wirkung nennen wir *singuläre  $S^1$ -äquivariante Kohomologie* von  $X$  und  $\mathcal{F}$  *universelles  $S^1$ -Bündel*.

**Bemerkung 2.1.2.** Wie bereits erwähnt, bedarf es noch einiger Arbeit, bevor wir in den Propositionen 2.1.6 und 2.1.7 zeigen können, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von  $\mathcal{F}$  und eine Verallgemeinerung von Definition 1.2.23 ist. Bevor wir schlussendlich in Proposition 2.1.10 die Existenz nachweisen, beschreiben wir in Bemerkung 2.1.8 noch Eigenschaften des  $S^1$ -Hauptfaserbündels  $\mathcal{F}$  aus Definition 2.1.1, welche in der Literatur als Definition universeller  $S^1$ -Bündel verwendet werden.

**Satz 2.1.3.** *Es sei  $\mathcal{P} := (P, p, B, F)$  ein Faserbündel mit kontrahierbarem Fasertyp  $F$ . Für jede Menge  $A \subseteq B$ , für die  $(B, A)$  ein relativer CW-Komplex<sup>13</sup> ist, lässt sich jeder Schnitt  $\tilde{s} : A \hookrightarrow P$  von  $\mathcal{P}$  auf ganz  $B$  ausdehnen, i.e. es existiert ein globaler Schnitt  $s : B \hookrightarrow P$  mit  $s|_A = \tilde{s}$ .*

*Für die Existenz eines globalen Schnittes genügt die Parakompaktheit der Basis  $B$ .*

*Beweis.* Gemäß [Hu94, Theorem 2.7.1] gilt der erste Teil der Aussage für Fasertypen  $F$ , die wegzusammenhängend sind, falls zusätzlich alle höheren Homotopiegruppen trivial sind. Beide Bedingungen sind für kontrahierbare Räume erfüllt. Erstere haben wir in Bemerkung 1.2.10 (iii) gezeigt und zweite folgt aus der Homotopieinvarianz der höheren Homotopiegruppen und der Tatsache, dass die höheren Homotopiegruppen des einpunktigen Raumes trivial sind, siehe etwa [Hat02, Kapitel 4].

Für den zweiten Teil der Aussage zeigen wir, dass  $p : P \rightarrow B$  für parakompakte Basen eine Homotopieäquivalenz ist, was die Existenz eines Schnittes impliziert. Dazu verwenden wir [Di08, Theorem (13.3.3)]. Dort wird gezeigt, dass für ein weiteres  $S^1$ -Hauptfaserbündel  $\mathcal{Q} = (Q, q, B, S^1)$  über derselben parakompakten Basis eine mit den Projektionen kommutierende Abbildung  $f : P \rightarrow Q$  eine Homotopieäquivalenz ist, falls sie lokal auf  $\mathcal{U} := \{U \subseteq B : \text{über } U \text{ trivialisieren } \mathcal{P} \text{ und } \mathcal{Q}\}$  faserweise eine Homotopieäquivalenz ist, i.e.  $f_b : P_b \rightarrow Q_b$  ist für jedes  $b \in U$  und jedes  $U \in \mathcal{U}$  eine Homotopieäquivalenz. Für unsere Zwecke setzen wir  $\mathcal{Q} = (B, \text{id}_B, B, S^1)$  und es verbleibt zu zeigen, dass zu jeder trivialisierenden Menge  $U$  von  $P$  die Abbildung  $p_b : P_b \rightarrow \{b\}$  eine Homotopieäquivalenz ist. Dies folgt aber sofort aus der Kontrahierbarkeit des Fasertyps  $F$ , der homöomorph zu den Fasern ist, denn  $p_b : P_b \rightarrow \{b\}$  entspricht eindeutig einer Abbildung  $g : F \rightarrow \mathbb{R}^0$  via den Homöomorphismen  $F \cong P_b$  und  $\mathbb{R}^0 \cong \{b\}$  und  $g$  ist eine Homotopieäquivalenz.  $\square$

<sup>13</sup>Ein relativer CW-Komplex  $(B, A)$  besteht aus einem topologischen Raum  $B$  und einem abgeschlossenen Teilraum  $A \subseteq B$ , aus dem  $B$  durch Ankleben von  $n$ -Zellen entsteht. Für  $A = \emptyset$  bedeutet dies, dass  $B$  selbst ein CW-Komplex ist. Falls in Satz 2.1.3 also  $B$  selbst ein CW Komplex ist, existieren immer globale Schnitte, falls der Fasertyp  $F$  kontrahierbar ist.

**Satz 2.1.4.** *Es seien  $\mathcal{X} = (X, p, X/S^1, S^1)$  ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel und  $F$  ein topologischer  $S^1$ -Raum. Die Schnitte des assoziierten Faserbündels  $\mathcal{X}_F = (X_F, p_f, X/S^1, F)$  stehen mittels der Identität  $s_\phi([x]) = [x, \phi_s(x)]$  in bijektiver Korrespondenz mit  $S^1$ -äquivarianten Abbildungen  $\phi_s : X \rightarrow F$ . Die Abbildungen sind also eindeutig dadurch bestimmt, dass sie folgendes Diagramm kommutativ machen:*

$$\begin{array}{ccc}
 X \times F & \xrightarrow{p^{X \times F}} & X_F = X \times_{S^1} F \\
 \text{pr}_1 \uparrow \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ | (\text{id}_X, \phi_s) \\ \downarrow \end{array} \right) & & \uparrow \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ s_\phi | \\ \downarrow \end{array} \right) p_F \\
 X & \xrightarrow{p} & X/S^1
 \end{array}$$

Außerdem sind zwei Schnitte genau dann homotop, wenn die zugehörigen  $S^1$ -äquivarianten Abbildungen  $S^1$ -homotop sind.

*Beweis.* In [Hu94, Theorem 4.8.1] wird der erste Teil der Satzes bewiesen. Es verbleibt zu zeigen, dass je zwei Schnitte  $s_0, s_1 : X/S^1 \hookrightarrow X_F$  genau dann homotop sind, sofern  $\phi_{s_0}, \phi_{s_1} : X \rightarrow F$  homotop bezüglich einer  $S^1$ -äquivarianten Homotopie sind.

Wir werden dies mit dem bereits gezeigten Teil des Satzes beweisen. Dazu beachten wir, dass  $\mathcal{X}^I := (X \times I, p \times \text{id}_I, X/S^1 \times I, S^1)$  ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel ist, falls wir die Wirkung der  $S^1$  trivial auf  $I$  ausdehnen, i.e.  $z(x, t) := (zx, t)$ . Das dazu assoziierte Faserbündel hat dann die Form  $\mathcal{X}_F^I = (X_F \times I, p_F \times \text{id}_I, X/S^1 \times I, F)$ , wenn wir  $(X \times I \times F)/S^1$  mit  $(X \times F)/S^1 \times I$  identifizieren. Homotopien  $h^s : X/S^1 \times I \rightarrow X_F$  stehen in Bijektion mit stetigen Abbildungen  $\tilde{h}^s : X/S^1 \times I \rightarrow X_F \times I$ ,  $([x], t) \mapsto (h_t^s([x]), t)$  und diese stehen nach dem ersten Teil des Satzes in Bijektion mit  $S^1$ -äquivarianten Abbildungen  $h^\phi : X \times I \rightarrow F$ , wobei die Wirkung auf  $I$  wieder trivial zu verstehen ist. Für jeden Raum  $Y$  und jedes  $t \in I$  sei  $\text{incl}_t^Y : Y \hookrightarrow Y \times I$ ,  $y \mapsto (y, t)$ , dann erhalten wir mit den naheliegenden Identifikationen das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & p^{X \times F} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 X \times F & \xrightarrow{\text{incl}_t^{X \times F}} & (X \times I) \times F & \xrightarrow{p^{X \times F} \times \text{id}_I} & X_F \times I & \xleftarrow{\text{incl}_t^{X_F}} & X_F \\
 \text{pr}_1 \uparrow \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ | (\text{id}_X, h_t^\phi) \\ \downarrow \end{array} \right) & & \text{pr}_{X \times I} \uparrow \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ | (\text{id}_{X \times I}, h^\phi) \\ \downarrow \end{array} \right) & & \tilde{h}^s | \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow p_F \times \text{id}_I \end{array} \right) & & h_t^s | \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow p_F \end{array} \right) \\
 X & \xrightarrow{\text{incl}_t^X} & X \times I & \xrightarrow{p \times \text{id}_I} & X/S^1 \times I & \xleftarrow{\text{incl}_t^{X/S^1}} & X/S^1 \\
 & & & & \downarrow p & & \uparrow
 \end{array}$$

Mit diesem sehen wir, dass Homotopien  $h^s : X/S^1 \times I \rightarrow X_F$  von Schnitten in bijektiver Korrespondenz mit  $S^1$ -äquivarianten Homotopien  $h^\phi : X \times I \rightarrow F$  stehen und zwar derart, dass sich die Zuordnung  $h^s \leftrightarrow h^\phi$  für jedes fixe  $t \in I$  auf die Zuordnung im ersten Teil des Satzes einschränkt, i.e.  $h_t^s = s_t$  genau dann, wenn  $h_t^\phi = \phi_{s_t}$  für  $t \in \{0, 1\}$ .  $\square$

**Korollar 2.1.5.** *Mit den Voraussetzungen aus Satz 2.1.4 sei weiters  $\mathcal{F} = (F, \pi, F/S^1, S^1)$  ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel, dann erhalten wir das folgende kommutative Diagramm mit der Identifikation  $X_F = X \times_{S^1} F \cong F \times_{S^1} X = F_X$ :*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \overset{\phi_s}{\dashrightarrow} & F \\
 p \downarrow & \nearrow s_\phi & \downarrow \pi \\
 X/S^1 & \xleftarrow[p_F]{} X_F \cong F_X \xrightarrow{\pi_X} & F/S^1
 \end{array} \tag{2.2}$$

*Falls zusätzlich  $F$  kontrahierbar ist, dann sind alle Schnitte des assoziierten Faserbündels  $\mathcal{X}_F = (X_F, p_F, X/S^1, F)$  homotop und somit sind nach Satz 2.1.4 auch alle  $S^1$ -äquivarianten Abbildungen  $X \rightarrow F$  homotop bezüglich  $S^1$ -äquivarianter Homotopien.*

*Beweis.* Der erste Teil des Korollars wird in [Hu94, Korollar 4.8.2] bewiesen. Es verbleibt zu zeigen, dass alle Schnitte  $s : X/S^1 \hookrightarrow X_F$  des assoziierten Faserbündels  $\mathcal{X}_F$  homotop sind. Da  $X/S^1$  parakompakt ist und die Faser  $F$  des assoziierten Faserbündels kontrahierbar ist, folgt wie im Beweis von Satz 2.1.3, dass  $p_F : X_F \rightarrow X/S^1$  eine Homotopieäquivalenz ist. Es seien  $s_0 : X/S^1 \hookrightarrow X_F$  eine Homotopieinverse, i.e.  $s_0 \circ p_F \simeq \text{id}_{X_F}$  und  $s : X/S^1 \hookrightarrow X_F$  ein beliebiger Schnitt, i.e.  $p_F \circ s = \text{id}_{X/S^1}$ , dann gilt:

$$s = \text{id}_{X_F} \circ s \simeq s_0 \circ p_F \circ s = s_0 \circ \text{id}_{X/S^1} = s_0$$

Also ist jeder Schnitt homotop zur Homotopieinversen, i.e. insbesondere sind je zwei Schnitte homotop zueinander.  $\square$

**Proposition 2.1.6.** *Definition 2.1.1 ist wohldefiniert, i.e. es gibt einen Isomorphismus*

$$H_{\text{sing}}^*((X \times F_1)/S^1) \cong H_{\text{sing}}^*((X \times F_2)/S^1) \tag{2.3}$$

*für je zwei  $S^1$ -Hauptfaserbündel  $\mathcal{F}^k = (F_k, \pi_k, F_k/S^1, S^1)$  mit kontrahierbaren Totalräumen  $F_k$  für  $k \in \{1, 2\}$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die assoziierten Faserbündel  $\mathcal{F}_{F_l}^k$  mit Faser  $F_l$  für  $k, l \in \{1, 2\}$ ,  $k \neq l$  und identifizieren deren Totalräume  $F_k \times_{S^1} F_l \cong F_l \times_{S^1} F_k =: P$ . Gemäß Satz 2.1.3 existieren globale Schnitte  $s_i : F_i/S^1 \hookrightarrow P$  dieser Faserbündel, da ihre Fasern kontrahierbar und ihre Basen parakompakt sind, und mit Satz 2.1.4 auch zugehörige  $S^1$ -äquivariante Abbildungen  $\phi_k : F_k \rightarrow F_l$ , die laut Korollar 2.1.5 folgendes Diagramm kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \phi_1 & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 F_1 & & & & F_2 \\
 \pi_1 \downarrow & & \phi_2 & & \downarrow \pi_2 \\
 F_1/S^1 & \xleftarrow[p_1]{} & P & \xrightarrow[p_2]{} & F_2/S^1
 \end{array}$$

Wir erhalten somit  $S^1$ -äquivariante Abbildungen  $\phi_l \circ \phi_k : F_k \rightarrow F_k$  und da  $F_k$  kontrahierbar sind, besagt Korollar 2.1.5, dass diese Abbildungen homotop zu den Identitäten

$\text{id}_{F_k}$  bezüglich  $S^1$ -äquivarianter Homotopien  $\tilde{h}^k : F_k \times I \rightarrow F_k$  sind. Wegen der  $S^1$ -Äquivarianz faktorisieren gemäß Bemerkung 1.1.12 die Abbildungen  $\text{id}_X \times \phi_k$  und  $\text{id}_X \times \tilde{h}^k$  zu Abbildungen  $\varphi_k : (X \times F_k)/S^1 \rightarrow (X \times F_k)/S^1$  und  $h^k : (X \times F_k)/S^1 \rightarrow (X \times F_k)/S^1$  und es gilt  $h_0^k = \text{id}_{(X \times F_k)/S^1}$  sowie  $h_1^k = \varphi_k \circ \phi_k$ . Damit sind  $(X \times F_1)/S^1$  und  $(X \times F_2)/S^1$  homotopieäquivalent, also existiert gemäß Korollar 1.2.12 ein Isomorphismus in der Kohomologie.  $\square$

**Proposition 2.1.7.** *Definition 2.1.1 ist eine Verallgemeinerung von Definition 1.2.23, i.e. falls  $\mathcal{X} = (X, p, X/S^1, S^1)$  ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel ist, dann erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus*

$$H_{\text{sing}}^*(X/S^1) \cong H_{S^1}^*(X). \quad (2.4)$$

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{F} = (F, \pi, F/S^1, S^1)$  ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel mit kontrahierbarem Totalraum  $F$ . Da  $\mathcal{X}$  ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel ist, stimmt die  $S^1$ -äquivariante Kohomologie  $H_{S^1}^*(X) = H_{\text{sing}}^*((X \times F)/S^1)$  von  $X$  mit jener des Totalraumes  $X_F = X \times_{S^1} F$  des assoziierten Faserbündels  $\mathcal{X}_F = (X_F, p_F, X/S^1, F)$  mit Fasertyp  $F$  überein, siehe Definition 1.1.13. Wir zeigen, dass  $p_F : X_F \rightarrow X/S^1$  den gewünschten natürlichen Isomorphismus induziert.

Da  $F$  kontrahierbar ist und  $X/S^1$  parakompakt ist, existiert laut Satz 2.1.3 ein globaler Schnitt  $s : X/S^1 \hookrightarrow X_F$  von  $\mathcal{X}_F$ , i.e. es gilt  $p_F \circ s = \text{id}_{X/S^1}$ . Wenn wir  $X/S^1$  mit  $X/S^1 \times \mathbb{R}^0 = X \times_{S^1} \mathbb{R}^0 = X_{\mathbb{R}^0}$  identifizieren, liefern  $p_F \circ s$  und die Identität  $\text{id}_{X/S^1}$  Schnitte des zu  $\mathbb{R}^0$  assoziierten Faserbündels  $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^0}$  und sind deshalb nach Korollar 2.1.5 homotop, i.e.  $p_F$  ist eine Homotopieäquivalenz und gemäß Proposition 1.2.11 ist somit  $p_F^* : H_{\text{sing}}^*(X/S^1) \rightarrow H_{\text{sing}}^*(X_F) = H_{S^1}^*(X)$  ein Isomorphismus.  $\square$

**Bemerkung 2.1.8.** Es sei  $\mathcal{P} := (P, p, B, S^1)$  ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel.

(i) Für jeden parakompakten Raum  $A$  bezeichne  $\mathcal{B}_{S^1}(A)$  Menge aller Isomorphieklassen von  $S^1$ -Hauptfaserbündeln über  $A$ , wobei ein Isomorphismus zweier  $S^1$ -Hauptfaserbündel über  $A$  ein Isomorphismus der Totalräume ist, der mit den Projektionen kommutiert. Gemäß [Hu94, Theorem 4.10.1] erhalten wir einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der parakompakten, topologischen Räume mit Homotopieklassen von Abbildungen in die Kategorie der Mengen mit Abbildungen, wenn jedem Raum  $A$  die Menge  $\mathcal{B}_{S^1}^1(A)$  und jeder stetigen Abbildung  $f : A \rightarrow B$  die Abbildung  $f^* : \mathcal{B}_{S^1}(B) \rightarrow \mathcal{B}_{S^1}(A)$ ,  $\mathcal{P} \mapsto f^*\mathcal{P}$  zugeordnet wird.

Insbesondere bedeutet dies, dass homotope Abbildungen  $f \simeq g : A \rightarrow B$  isomorphe Pullback Bündel  $f^*\mathcal{P} \cong g^*\mathcal{P}$  besitzen.

(ii) In [Do63, Theorem 7.5.] wird gezeigt, dass ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel  $\mathcal{P}$  mit parakompakter Basis genau dann einen kontrahierbaren Totalraum besitzt, wenn es folgende Eigenschaft besitzt: Für jeden parakompakten, topologischen Raum  $A$  liefert der eben erwähnte Funktor einen Isomorphismus. Das bedeutet, dass jeder Totalraum  $Q$  eines  $S^1$ -Hauptfaserbündels  $\mathcal{Q} = (Q, q, A, S^1)$  isomorph zu einem Pullbackbündel von  $\mathcal{P}$  ist

und für je zwei isomorphe Pullbackbündel  $f^*\mathcal{P} \cong g^*\mathcal{P}$  über  $A$  gilt  $f \simeq g$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 Q & \xrightarrow{\cong} & f^*P & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\
 q \downarrow & \swarrow \text{pr}_1 & & & \downarrow p \\
 A & \xrightarrow{f} & & & B
 \end{array} \tag{2.5}$$

Universelle  $S^1$ -Hauptfaserbündel werden in der Literatur meist über diese Eigenschaft definiert. Der Isomorphismus in (2.5) ist gemäß [Hu94, Proposition 2.5.5] eindeutig dadurch bestimmt, dass er das Diagramm kommutativ macht.

**Bemerkung 2.1.9.** Wir betrachten für  $J := [0, \infty)$  den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

$$L^2(J) := \left\{ f : J \rightarrow \mathbb{C} : \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty \right\} / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation gegeben ist durch  $f \sim g$ , falls  $f \neq g$  höchstens auf einer Menge vom Maß null ist. Dieser ist ein separabler Hilbertraum mit innerem Produkt  $(f, g) := \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx$ . Dieses induziert eine Norm  $\|f\|^2 := (f, f) = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx$  und damit eine Metrik  $d(f, g) := \|f - g\|$ .

Laut [Ru87, Satz 3.14] liegt der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger  $C_c(J; \mathbb{C}) =: C_c(J)$  dicht in  $L^2(J)$ . Weiters ist gemäß [Ru87, Satz 6.16] der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen  $L^2(J)$  isometrisch isomorph zu seinem Dualraum  $L^2(J)'$ , i.e. der Raum der stetigen, linearen Abbildungen  $L^2(J) \rightarrow \mathbb{C}$ . Der Isomorphismus ist durch das innere Produkt gegeben

$$T : L^2(J) \rightarrow L^2(J)', \quad g \mapsto \left( T_g := f \mapsto \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx \right) \tag{2.6}$$

und die Isometrie  $\|g\| = \|T_g\|$  für alle  $g \in L^2(J)$  gilt bezüglich der Operatornorm

$$\|T_g\| := \sup_{\|f\|=1} \{|T_g(f)|\}.$$

**Proposition 2.1.10.** *Der Teilraum  $F := \{f \in L^2(J) : \|f\| = 1\} \subseteq L^2(J)$  liefert ein universelles  $S^1$ -Bündel  $\mathcal{F} = (F, \pi, F/S^1, S^1)$ .*

*Beweis.* Die  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = |z|^2 = 1\}$  wirkt auf  $F$  mittels der Einschränkung der Skalarmultiplikation von  $\mathbb{C}$  auf  $L^2(J)$ , denn  $\|z \cdot f\|^2 = \int_0^\infty |zf(x)|^2 dx = |z|^2 \|f\|^2 = 1$ , also  $z \cdot f \in F$  für alle  $z \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$  und  $f \in F$ . Sie wirkt frei, weil  $z \cdot f = f$  klarerweise  $z = 1$  impliziert.

Es ist  $L^2(J)$  als metrischer Raum parakompakt und ebenso  $F$  als abgeschlossener Teilraum, siehe etwa [Kr99, Theorem 1.3.8 und 1.3.10]. Da die natürliche Projektion  $\pi : F \rightarrow F/S^1$  nach Bemerkung 1.1.9 abgeschlossen ist und laut [En89, Theorem 5.1.33] solche Abbildungen die Parakompaktheit bewahren, ist  $F/S^1$  ebenfalls parakompakt. Mit Bemerkung 2.1.8 (ii) folgt der Rest der Aussage aus den folgenden zwei Lemmata 2.1.11 und 2.1.12.  $\square$

**Lemma 2.1.11.** *Der Teilraum  $F := \{f \in L^2(J) : \|f\| = 1\} \subseteq L^2(J)$  ist kontrahierbar.*

*Beweis.* Wir zeigen in zwei Schritten, dass die Identität  $\text{id}_F$  nullhomotop ist, genauer gesagt, dass sie homotop zur konstanten Abbildung  $c_g : F \rightarrow F, f \mapsto g$  ist, für ein  $g \in F$  mit  $\text{supp}(g) \subseteq [0, 1]$  mittels der zwei Homotopien:

$$h^1 : F \times I \rightarrow F, h_t^1(f) := x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x < t \\ f(x - t), & \text{falls } t \leq x < \infty \end{cases} \quad (2.7)$$

$$h^2 : F \times I \rightarrow F, h_t^2(f) := \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) h_1^1(f) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) g \quad (2.8)$$

Es gelten die Identitäten  $h_0^1 = \text{id}_F$  und  $h_1^1 = h_0^2$  und  $h_1^2 = c_g$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $h^1$  und  $h^2$  wirklich stetige Abbildungen in den entsprechenden Räumen sind. Dafür genügt es zu zeigen, dass diese Abbildungen partiell stetig, i.e. stetig in den einzelnen Variablen sind, da laut [Kr03, Proposition 3.2.8] partiell stetige Abbildungen zweier Variablen stetig sind, falls sie gleichmäßig stetig bezüglich einer Variable sind. Letzteres folgt in unserem Fall aus der Kompaktheit des Intervalles  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Für  $h^1$  gilt  $\|h_t^1(f)\|^2 = \int_0^\infty |h_t^1(f)(x)|^2 dx = \int_t^\infty |f(x - t)|^2 dx = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \|f\|^2 = 1$ , also  $h_t^1(f) \in F$  für alle  $t \in I$  und  $f \in F$ . Mit der Identität  $\|h_t^1(f)\| = \|f\|$  und aus der Linearität der Abbildung  $h_t^1$  in den  $f \in F$  folgt die Stetigkeit von  $h^1$  in den  $f \in F$ , denn für ein  $\varepsilon > 0$  beliebig, gilt  $\|h_t^1(f_1) - h_t^1(f_2)\| = \|h_t^1(f_1 - f_2)\| = \|f_1 - f_2\| < \varepsilon$ , falls  $\|f_1 - f_2\| < \delta_t := \varepsilon$ . Die Stetigkeit in den  $t \in I$  folgt aus der Tatsache, dass  $C_c(J)$  dicht in  $L^2(J)$  liegt, siehe Bemerkung 2.1.9. Für jedes  $f \in F$  gibt es also eine Funktion  $f_\varepsilon \in C_c(J) \subseteq L^2(J)$  mit  $\|f - f_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{6}$ . Mittels der Dreiecksungleichung folgt dann  $\|h_t^1(f) - h_s^1(f)\| \leq \|h_t^1(f) - h_t^1(f_\varepsilon)\| + \|h_t^1(f_\varepsilon) - h_s^1(f_\varepsilon)\| + \|h_s^1(f_\varepsilon) - h_s^1(f)\| = \|h_t^1(f - f_\varepsilon)\| + \|h_t^1(f_\varepsilon) - h_s^1(f_\varepsilon)\| + \|h_s^1(f_\varepsilon - f)\| < \frac{\varepsilon}{6} + \|h_t^1(f_\varepsilon) - h_s^1(f_\varepsilon)\| + \frac{\varepsilon}{6}$ , wobei wir im letzten Schritt wieder die Identität  $\|h_t^1(f)\| = \|f\|$  verwendet haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $0 \leq t < s \leq 1$ , dann gilt  $\|h_t^1(f_\varepsilon) - h_s^1(f_\varepsilon)\|^2 = \int_t^s |f_\varepsilon(x - t)|^2 dx + \int_s^\infty |f_\varepsilon(x - t) - f_\varepsilon(x - s)|^2 dx \leq M^2(s - t) + \int_{s-t}^\infty |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x - (s - t))|^2 dx$  für eine Konstante  $M \in \mathbb{R}$ . Da  $f_\varepsilon$  stetig ist, gibt es ein  $0 < \delta_f \leq (\frac{\varepsilon}{3M})^2$ , sodass für  $|s - t| < \delta_f$  der letzte Summand kleiner  $3(\frac{\varepsilon}{3})^2$  ist und insgesamt

$$\|h_t^1(f) - h_s^1(f)\| < \frac{\varepsilon}{6} + \sqrt{M^2 \frac{\varepsilon^2}{9M^2} + \frac{3\varepsilon^2}{9}} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$$

folgt. Somit ist die Abbildung (2.7) stetig und damit wirklich eine Homotopie.

Für die zweite Abbildung beachten wir, dass  $h_1^1(f)|_{[0,1)} \equiv 0$  und  $\text{supp}(g) \subseteq [0, 1]$  gelten, und somit folgt

$$\begin{aligned} \|h_t^2(f)\|^2 &= \int_0^\infty |\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) h_1^1(f)(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) g(x)|^2 dx \\ &= \int_0^1 |\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) g(x)|^2 dx + \int_1^\infty |\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) h_1^1(f)(x)|^2 dx \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \int_0^1 |g(x)|^2 dx + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \int_1^\infty |h_1^1(f)(x)|^2 dx \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \|g\|^2 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \|h_1^1(f)\|^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1 \end{aligned}$$

Also ist auch  $h_t^2(f) \in F$  für alle  $t \in I$  und  $f \in F$ . Diese Abbildung ist zwar nicht linear in den  $f \in F$ , es gilt aber die Identität  $h_t^2(f_1) - h_t^2(f_2) = \cos(\frac{\pi}{2}t) h_t^1(f_1 - f_2)$  und damit folgt die Stetigkeit in den  $f \in F$ , denn für ein beliebiges  $\varepsilon < 0$  ist dann  $\|h_t^2(f_1) - h_t^2(f_2)\| = |\cos(\frac{\pi}{2}t)|^2 \|h_t^1(f_1 - f_2)\| \leq \|f_1 - f_2\| < \varepsilon$  für  $\|f_1 - f_2\| < \delta_t := \varepsilon$ . Die Stetigkeit in den  $t \in I$  folgt hier aus der Stetigkeit der Sinus- und der Cosinusfunktion, denn für jedes  $f \in F$  gibt es ein  $\delta_f > 0$ , sodass  $|\cos(\frac{\pi}{2}t) - \cos(\frac{\pi}{2}s)| < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $|\sin(\frac{\pi}{2}t) - \sin(\frac{\pi}{2}s)| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $|t - s| < \delta_f$ . Damit folgt wieder mittels Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|h_t^2(f) - h_s^2(f)\| &= \|\cos(\frac{\pi}{2}t) h_1^1(f) + \sin(\frac{\pi}{2}t) g - \cos(\frac{\pi}{2}s) h_1^1(f) - \sin(\frac{\pi}{2}s) g\| \\ &= \|h_1^1(f) (\cos(\frac{\pi}{2}t) - \cos(\frac{\pi}{2}s)) + g (\sin(\frac{\pi}{2}t) - \sin(\frac{\pi}{2}s))\| \\ &\leq |\cos(\frac{\pi}{2}t) - \cos(\frac{\pi}{2}s)| \cdot \|h_1^1(f)\| + |\sin(\frac{\pi}{2}t) - \sin(\frac{\pi}{2}s)| \cdot \|g\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \|h_1^1(f)\| + \frac{\varepsilon}{2} \|g\| = \varepsilon \end{aligned}$$

Womit nun gezeigt wäre, dass auch die zweite Abbildung (2.8) eine Homotopie ist.  $\square$

**Lemma 2.1.12.** *Das Quadrupel  $\mathcal{F} = (F, \pi, F/S^1, S^1)$  ist ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel.*

*Beweis.* Es sei  $g \in F$  beliebig fixiert, dann gilt für  $T_g \in L^2(J)'$  aus (2.6)  $T_g(g) = (g, g) = \|g\| = 1 \neq 0$  und mit der Stetigkeit von  $T_g$  folgt, dass  $V_g := \{f \in F : T_g(f) \neq 0\}$  eine offene Umgebung von  $g$  ist. Da die natürliche Projektion  $\pi : F \rightarrow F/S^1$  nach Bemerkung 1.1.9 offen ist, ist auch  $\pi(V_g) =: U_g$  eine offene Umgebung von  $[g] \in F/S^1$ . Es gilt  $V_g = \pi^{-1}(\pi(V_g)) = F|_{U_g}$ , denn offensichtlich gilt  $V_g \subseteq F|_{U_g}$  und umgekehrt existiert für  $\check{f} \in F|_{U_g}$  ein  $f \in V_g$  mit  $\pi(\check{f}) = \pi(f)$  und somit ein  $z \in S^1$  mit  $\check{f} = zf$ , was  $T_g(\check{f}) = T_g(z \cdot f) = zT_g(f) \neq 0$  und damit  $\check{f} \in V_g$  zur Folge hat. Wir werden zeigen, dass  $A := T_g^{-1}(1) = \{h \in L^2(J) : T_g(h) = 1\}$  homöomorph zum Orbitraum  $F/S^1$  von  $F$  ist und ein  $S^1$ -äquivarianter Homöomorphismus von  $V_g$  nach  $A \times S^1$  bezüglich der Wirkung  $\tilde{z}(h, z) = (h, \tilde{z}z)$  für  $z, \tilde{z} \in S^1$  und  $h \in A$  existiert, sodass

$$\begin{array}{ccc} F & \supseteq & F|_{U_g} \xrightarrow[\varphi_{U_g}]{\cong} A \times S^1 \cong U_g \times S^1 \\ & & \downarrow \pi \quad \swarrow \text{pr}_1 \\ F/S^1 & \supseteq & U_g \end{array} \quad (2.9)$$

kommutiert. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$\varphi : V_g \rightarrow A \times S^1, f \mapsto \left( \frac{1}{T_g(f)} \cdot f, \frac{T_g(f)}{|T_g(f)|} \right) \quad (2.10)$$

Es ist per definitionem  $h \in A$  genau dann, wenn  $T_g(h) = 1$ . Aus der  $\mathbb{C}$ -Linearität von  $T_g$  folgt also für die erste Komponente  $\varphi_1$  von  $\varphi$ , dass  $T_g(\varphi_1(f)) = T_g(f)^{-1}T_g(f) = 1$  für alle  $f \in V_g$  gilt, also hat  $\varphi$  wirklich Werte in  $A \times S^1$ . Um die Umkehrabbildung von  $\varphi$  anzugeben, beachten wir zuerst, dass nach Bemerkung 2.1.9  $\|T_g\| = \|g\| = 1$  und somit für alle  $h \in A$  folgt, dass  $1 = |T_g(h)| \leq \|T_g\| \|h\| = \|h\|$  gilt. Mit diesem Wissen können wir die stetige Abbildung

$$\psi : A \times S^1 \rightarrow V_g, (h, z) \mapsto \frac{z}{\|h\|} \cdot h \quad (2.11)$$

bilden und aus der Linearität von  $T_g$  schließen, dass  $T_g(\psi(h, z)) = z\|h\|^{-1}T_g(h) \neq 0$  für alle  $h \in A$  und  $z \in S^1$  gilt, womit  $\psi$  Werte in  $V_g$  besitzt. Die Abbildung (2.11) ist offensichtlich  $S^1$ -äquivariant, denn  $\psi(\tilde{z}(h, z)) = \tilde{z}z\|h\|^{-1} \cdot h = \tilde{z}\psi(h, z)$ . Die  $S^1$ -Äquivarianz der Abbildung (2.10) folgt wie in Fußnote 6 auf Seite 16, sobald wir gezeigt haben, dass (2.10) und (2.11) zueinander invers sind, lässt sich aber auch ganz einfach direkt mit der Linearität von  $T_g$  nachrechnen. Aus Letzterer folgt ebenfalls mit  $T_g(h) = 1$  für alle  $(h, z) \in A \times S^1$

$$\varphi(\psi(h, z)) = \left( \frac{1}{T_g\left(\frac{z}{\|h\|} \cdot h\right)} \cdot h, \frac{T_g\left(\frac{z}{\|h\|} \cdot h\right)}{T_g\left(\frac{z}{\|h\|} \cdot h\right)} \right) = (h, z \frac{1}{|z|}) = (h, z)$$

für alle  $f \in V_g$

$$\psi(\varphi(f)) = \frac{T_g(f)}{|T_g(f)|} \frac{1}{\left\| \frac{1}{T_g(f)} \cdot f \right\|} \cdot \frac{1}{T_g(f)} \cdot f = f.$$

Wir müssen uns jetzt noch davon überzeugen, dass  $A$  homöomorph zu  $U_g$  ist. Für die erste Komponente  $\varphi_1 : V_g \rightarrow A$  von  $\varphi$  gilt  $\varphi_1(z \cdot f) = \varphi_1(f)$ , denn wegen der  $S^1$ -Äquivarianz von  $\varphi$  gilt  $\varphi(z \cdot f) = z\varphi(f) = (\varphi_1(f), z\varphi_2(f))$ . Damit faktorisiert  $\varphi_1$  zu einer stetigen Abbildung

$$\tilde{\varphi} : U_g \rightarrow A, [f] \mapsto \frac{1}{T_g(f)} \cdot f$$

mit stetiger Umkehrabbildung

$$\tilde{\psi} : A \rightarrow U_g, h \mapsto \left[ \frac{1}{\|h\|} \cdot h \right],$$

denn für alle  $h \in A$  gilt mit  $T_g(h) = 1$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\psi}(h)) = \frac{1}{T_g\left(\frac{1}{\|h\|} \cdot h\right)} \frac{1}{\|h\|} \cdot h = h$$

und für alle  $[f] \in U_g$  gilt mit  $\|f\| = 1$

$$\tilde{\psi}(\tilde{\varphi}([f])) = \left[ \frac{1}{\left\| \frac{1}{T_g(f)} \cdot f \right\|} \frac{1}{T_g(f)} \cdot f \right] = \underbrace{\frac{|T_g(f)|}{T_g(f)}}_{\in S^1} \cdot [f] = [f].$$

Schlussendlich erhalten wir dadurch auch die Kommutativität in (2.9), denn für alle  $f \in V_g$  gilt  $\text{pr}_1(\tilde{\psi}(\varphi_1(f)), \varphi_2(f)) = \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}[f]) = [f] = \pi(f)$ .  $\square$

## 2.2 Algebraischer Zugang über die Geometrie

Unser nächstes Ziel ist eine Verallgemeinerung der äquivarianten de Rham Kohomologie für beliebige Wirkungen der  $S^1$  auf glatten Mannigfaltigkeiten  $M$ . Zusätzlich soll diese für kompakte  $M$  bis auf natürliche Isomorphie mit der singulären  $S^1$ -äquivarianten Kohomologie  $H_{S^1}^*(M)$  übereinstimmen. Da zur Bestimmung der de Rham Kohomologie eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur notwendig ist, können wir nicht ohne weiteres wie im topologischen Fall für universelle  $S^1$ -Bündel  $F$  die de Rham Kohomologie vom Orbitraum  $(M \times F)/S^1$  bestimmen. Die Idee ist, die notwendigen geometrischen Eigenschaften mittels algebraischer Eigenschaften des de Rham Komplexes  $\Omega^*(M)$  zu charakterisieren.

**Definition 2.2.1** (Lie Algebra einer Lie Gruppe). Es sei  $G$  eine Lie Gruppe und  $\mu_g : G \rightarrow G$ ,  $a \mapsto ga$  die *Linksmultiplikation* mit einem Element aus  $g \in G$ . Nach Bemerkung 1.1.4 (i) sind dies Diffeomorphismen, also können wir den Pullback von Vektorfeldern  $\mu_g^* : \mathfrak{X}(G) \rightarrow \mathfrak{X}(G)$  bilden. Wir nennen  $\mathcal{L}(G) := \{\xi \in \mathfrak{X}(G) : \mu_g^* \xi = \xi \ \forall g \in G\}$  den Raum der *linksinvarianten Vektorfelder* und den Tangentialraum von  $G$  beim neutralen Element  $e \in G$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{g} := T_e(G)$ .<sup>14</sup>

Nach [Ča10, Proposition 1.3] liefert die Zuordnung  $\mathcal{L}(G) \rightarrow \mathfrak{g}$ ,  $\xi \mapsto \xi(e)$  einen linearen Isomorphismus mit inverser Abbildung  $v \mapsto \zeta_v := (g \mapsto T_e \mu_g(v)) \in \mathcal{L}(G)$  für alle  $v \in \mathfrak{g}$ . Ein linksinvariantes Vektorfeld ist somit eindeutig durch die Vorgabe beim neutralen Element bestimmt. Da nach [Ča10, Abschnitt 1.4] die Lie Klammer von linksinvarianten Vektorfeldern wieder linksinvariant ist, induziert diese eine Lie Klammer auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathfrak{g}$  mittels  $[u, v] := [\zeta_u, \zeta_v](e)$ , welchen wir die *Lie Algebra der Lie Gruppe*  $G$  nennen. Dabei ist eine *Lie Klammer* auf einem Vektorraum eine bilineare, Abbildung, die *antisymmetrisch* ist, i.e.  $[u, v] = -[v, u]$  und welche die *Jacobi Identität*  $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$  erfüllt.

**Proposition 2.2.2.** *Es sei  $G$  eine Lie Gruppe, dann gibt es für jedes linksinvariante Vektorfeld  $\xi \in \mathcal{L}(G)$  einen eindeutigen Lie Gruppenhomomorphismus  $c_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$  mit  $c'_\xi(t) = \xi(c_\xi(t))$ . Der Fluss von  $\xi$  ist dann durch  $\text{Fl}^\xi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ ,  $(t, g) \mapsto \mu_g(c_\xi(t))$  gegeben, also sind alle linksinvarianten Vektorfelder vollständig.<sup>15</sup>*

*Damit lässt sich die so genannte Exponentialabbildung der Lie Gruppe  $G$*

$$\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad v \mapsto \text{Fl}^{\zeta_v}(1, e) = c_{\zeta_v}(1), \quad (2.12)$$

*definieren und diese liefert einen lokalen Diffeomorphismus von einer Umgebung um  $0 \in \mathfrak{g}$  auf eine Umgebung vom neutralen Element  $e \in G$ .*

<sup>14</sup>Für einen lokalen Diffeomorphismus  $f : M \rightarrow N$  ist die Tangentialabbildung  $Tf : TM \rightarrow TN$  ein Isomorphismus und wir können den Pullback  $f^* \xi \in \mathfrak{X}(M)$  von  $\xi \in \mathfrak{X}(N)$  unter  $f$  definieren als  $f^* \xi := Tf^{-1} \circ \xi \circ f$ . Die Bedingung  $\mu_g^* \xi = \xi$  ist also äquivalent zur Bedingung  $T\mu_g \circ \xi = \xi \circ \mu_g$ . Analog lässt sich für Diffeomorphismen der Pushforward  $f_* \zeta \in \mathfrak{X}(N)$  von  $\zeta \in \mathfrak{X}(M)$  unter  $f$  definieren als  $f_* \zeta := Tf \circ \zeta \circ f^{-1}$ . Es gilt  $f^* \circ f_* = \text{id}_{\mathfrak{X}(N)}$  und  $f_* \circ f^* = \text{id}_{\mathfrak{X}(M)}$ .

<sup>15</sup>Der Fluss eines Vektorfeldes  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  ordnet jedem Punkt  $x \in M$  seine eindeutige, maximale Integralkurve  $c_x : (t^-, t^+) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  mit  $-\infty \leq t^- < 0 < t^+ \leq \infty$  zu, i.e.  $c_x$  ist die Lösung zur gewöhnlichen Differentialgleichung  $c'_x(t) = \xi(c_x(t))$ ,  $c_x(0) = x$ . Es gilt sogar, dass  $D(\xi) := \{(t, x) : t \in (t^-, t^+)\} \subseteq \mathbb{R} \times M$  eine offene Menge, die Flussabbildung  $\text{Fl}^\xi : D(\xi) \rightarrow M$  eine glatte Abbildung und die Eigenschaft  $\text{Fl}^\xi(t + s, x) = \text{Fl}^\xi(s, \text{Fl}^\xi(t))$  erfüllt ist. Ein Vektorfeld heißt *vollständig*, falls  $D(\xi) = \mathbb{R} \times M$ . Für einen Beweis siehe etwa [Mi08, Paragraf I.3].

*Beweis.* Die ersten Teile werden in [Kr10, Lemma 3.4] und [Kr10, Folgerung 3.5] bewiesen, dass (2.12) ein lokaler Diffeomorphismus ist, in [Ča10, Theorem 1.8].  $\square$

**Korollar 2.2.3.** Für  $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ,  $v \mapsto c_{\zeta_v}(1)$  gelten für  $r, t \in \mathbb{R}$  folgende Identitäten:

- (i)  $\exp_G(0) = e$
- (ii)  $\exp_G(-v) = (\exp_G(v))^{-1}$
- (iii)  $\exp_G((t+r)v) = \exp_G(tv) \exp_G(rv)$

*Beweis.* Die Identitäten (i) bis (iii) können mit [Ba09, Satz 1.2 (3)] nachgerechnet werden. Dort wird für alle  $v \in \mathfrak{g}$  und  $r, t \in \mathbb{R}$  bewiesen, dass  $c_1(t) := c_{\zeta_{rv}}(t) = c_{\zeta_v}(rt) =: c_2(t)$  gilt, indem gezeigt wird, dass  $c_i$  beides Lie Gruppenhomomorphismen sind, die  $c'_i(t) = \zeta_{rv}(c_i(t))$  erfüllen.  $\square$

**Definition 2.2.4** (Graduierte Derivationen). Es sei  $\Omega = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega^k$  ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter Vektorraum. Mit  $\text{End}_l(\Omega)$  bezeichnen wir die *Endomorphismen vom Grad  $l$* , das sind lineare Abbildungen  $A : \Omega \rightarrow \Omega$ , für die  $A(\Omega^k) \subseteq \Omega^{k+l}$  gilt. Wir nennen die bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen assoziative,  $\mathbb{Z}$ -graduierte Algebra

$$\text{End}^*(\Omega) := \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \text{End}_l(\Omega) \subseteq \text{End}(\Omega),$$

die *graduierten Endomorphismen* von  $\Omega$ . Sofern höchstens endlich viele  $\Omega^k \neq \mathfrak{o}$  nicht trivial sind, gilt  $\text{End}^*(\Omega) = \text{End}(\Omega)$ . Ist  $\Omega$  zusätzlich eine  $\mathbb{Z}$ -graduierte  $\mathbb{R}$ -Algebra mit assoziativer Multiplikation  $\wedge$ , dann erhalten wir eine assoziative  $\mathbb{Z}$ -graduierte (Lie-) Teilalgebra von  $\text{End}^*(\Omega)$ , genannt die *graduierten Derivationen* von  $\Omega$  mittels

$$\text{Der}^*(\Omega) := \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \text{Der}_l(\Omega),$$

wobei  $\text{Der}_l(\Omega) \subseteq \text{End}_l(\Omega)$  die *graduierten Derivationen vom Grad  $l$*  bezeichnet und das sind Endomorphismen  $D$  vom Grad  $l$ , für die folgende Produktregel gilt:

$$D(u \wedge v) = D(u) \wedge v + (-1)^{l \cdot |u|} u \wedge D(v) \quad (2.13)$$

für alle homogenen Elemente  $u, v \in \Omega$ , wobei wir mit  $|\cdot|$  den Grad eines homogenen Elementes bezeichnen. Allgemein können wir auf einer assoziativen graduierten Algebra  $\Omega$  mit Multiplikation  $\wedge$  den *graduierten Kommutator*

$$[u, v]_\Omega := u \wedge v - (-1)^{|u| \cdot |v|} v \wedge u \quad (2.14)$$

für alle homogenen Elemente  $u, v \in \Omega$  definieren. Eine solche ist also genau dann graduiert kommutativ bezüglich der Verknüpfung  $\wedge$ , falls der graduierte Kommutator von je zwei Elementen verschwindet. Es lässt sich rein unter der Verwendung von (2.14) nachrechnen, dass der zugrunde liegende  $\mathbb{Z}$ -graduierte Vektorraum zusammen mit dem graduierten Kommutator dann eine *graduierte Lie Algebra* ist. Das bedeutet, dass eine bilineare Abbildung  $[\cdot, \cdot] : \Omega^i \times \Omega^j \rightarrow \Omega^{i+j}$  existiert, welche *graduiert antisymmetrisch* ist, i.e.  $[u, v] = (-1)^{|u| \cdot |v|} [v, u]$  und welche die so genannte *graduierte Jacobi Identität*  $(-1)^{|u| \cdot |w|} [u, [v, w]] + (-1)^{|v| \cdot |u|} [v, [w, u]] + (-1)^{|w| \cdot |v|} [w, [u, v]] = 0$  erfüllt.

**Beispiel 2.2.5.** Es sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit, dann ist der de Rham Komplex  $\Omega^*(M)$  mit dem Wedge-Produkt eine assoziative, graduiert kommutative  $\mathbb{R}$ -Algebra und das de Rham Differenzial  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  eine graduierte Derivation vom Grad 1. Für die folgenden Resultate in diesem Beispiel kann etwa [Mi08, Paragraf III.9] zum genaueren Studium herangezogen werden. Für Vektorfelder  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  lassen sich noch weitere Beispiele von Derivationen definieren. Der *Insertionsoperator* von  $\xi$

$$\iota_\xi : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M), \quad \iota_\xi \omega(\xi_2, \dots, \xi_k) := \omega(\xi, \xi_2, \dots, \xi_k) \quad (2.15)$$

ist eine Derivation vom Grad  $-1$  und die *Lie Ableitung* nach  $\xi$

$$L_\xi : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M), \quad L_\xi \omega := \frac{d}{dt} \left( (\text{Fl}_t^\xi)^* \omega \right) \Big|_{t=0} \quad (2.16)$$

eine Derivation vom Grad 0. Wir bezeichnen den graduierten Kommutator bezüglich der Verknüpfung  $\circ$  von Abbildungen auf  $\text{Der}(\Omega^*(M)) \subseteq \text{End}(\Omega^*(M))$  mit  $[\cdot, \cdot]$ , dann gelten die folgenden fundamentalen, differenzialgeometrischen Identitäten für alle  $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$[d, d] = 2(d \circ d) = 0 \quad (D1)$$

$$[d, L_\xi] = d \circ L_\xi - L_\xi \circ d = 0 \quad (D2)$$

$$[d, \iota_\xi] = d \circ \iota_\xi + \iota_\xi \circ d = L_\xi \quad (D3)$$

$$[L_\xi, L_\eta] = L_\xi \circ L_\eta - L_\eta \circ L_\xi = L_{[\xi, \eta]} \quad (D4)$$

$$[L_\xi, \iota_\eta] = L_\xi \circ \iota_\eta - \iota_\eta \circ L_\xi = \iota_{[\xi, \eta]} \quad (D5)$$

$$[\iota_\xi, \iota_\eta] = \iota_\xi \circ \iota_\eta + \iota_\eta \circ \iota_\xi = 0 \quad (D6)$$

**Definition 2.2.6** (Fundamentales Vektorfeld). Es sei  $M$  eine glatte  $G$ -Mannigfaltigkeit und  $\mathfrak{g}$  die Lie Algebra von  $G$ . Für jedes  $v \in \mathfrak{g}$  definieren wir das zugehörige *fundamentale Vektorfeld*  $\tilde{\zeta}_v \in \mathfrak{X}(M)$  auf  $M$  mittels

$$\tilde{\zeta}_v(x) := \frac{d}{dt} (\lambda_{\exp_G(-tv)}(x)) \Big|_{t=0} \quad (2.17)$$

und bezeichnen die Menge aller dieser Vektorfelder mit  $\mathcal{F}(M) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ . Weiters heißt die Wirkung der  $S^1$  auf  $M$  *lokal frei*, falls alle fundamentalen Vektorfelder mit  $0 \neq v \in \mathfrak{g}$  nirgends verschwinden.

**Bemerkung 2.2.7.** Es sei  $M$  eine  $G$ -Mannigfaltigkeit und  $\mathfrak{g}$  die Lie Algebra von  $G$ .

(i) Freie Wirkungen sind lokal frei. Wir nehmen indirekt an, dass  $G$  frei, aber nicht lokal frei auf  $M$  wirkt. Dann ist für ein  $x \in M$  und ein  $0 \neq v \in \mathfrak{g}$  die Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow M, \quad t \mapsto \lambda_{\exp_G(-tv)}(x)$$

auf einer Umgebung  $I$  von  $0 \in \mathbb{R}$  konstant. Dies hat für alle  $r \in I$  und  $g_r := \exp_G(-rv)$  laut Korollar 2.2.3 (i) zur Folge, dass  $g_r x = \lambda_{g_r}(x) = \lambda_{g_0}(x) = \lambda_e(x) = x$  und somit  $g_r \in G_x$  für alle  $r \in I$  gilt. Nach Proposition 2.2.2 ist  $\exp_G$  ein lokaler Diffeomorphismus um  $0 \in \mathbb{R}$ , also folgt  $G_x \neq \{e\}$ , was im Widerspruch dazu steht, dass  $G$  frei wirkt.

(ii) Die Zuordnung

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{F}(M), \quad v \mapsto \tilde{\zeta}_v \quad (2.18)$$

ist nach [Ba09, Satz 1.25] ein Lie Algebrahomomorphismus, i.e. eine lineare Abbildung, die mit der Lie Klammer in dem Sinne verträglich ist, dass  $\tilde{\zeta}_{[u,v]} = [\tilde{\zeta}_u, \tilde{\zeta}_v]$  gilt. Falls die Lie Gruppe  $G$  lokal frei wirkt, dann ist (2.18) sogar ein Isomorphismus<sup>16</sup> und damit auch  $\mathcal{L}(G) \cong \mathfrak{g} \cong \mathcal{F}(M)$ .

(iii) Indem wir (2.18) mit (2.15) und (2.16) aus Beispiel 2.2.5 kombinieren, erhalten wir lineare Abbildungen:

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_{-1}(\Omega^*(M)), v \mapsto \iota_{\tilde{\zeta}_v} =: \iota_v \quad (2.19)$$

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_0(\Omega^*(M)), v \mapsto L_{\tilde{\zeta}_v} =: L_v \quad (2.20)$$

Diese sind für lokal freie Wirkungen nach (ii) injektiv. Für eine Basis  $v_1, v_2, \dots, v_n$  von  $\mathfrak{g}$  definieren wir  $L_i$  und  $\iota_i$  als die entsprechenden Bilder von  $v_i$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Die  $L_i$  bilden also eine Basis eines Teilvektorraumes  $g_0 \subseteq \text{Der}_0(\Omega^*(M))$  und die  $\iota_i$  eine Basis eines Teilvektorraumes  $g_{-1} \subseteq \text{Der}_{-1}(\Omega^*(M))$ . Bezeichnen wir mit  $g_1 \subseteq \text{Der}_1(\Omega^*(M))$  noch den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, der vom de Rham Differential erzeugt wird, dann liefert die Einschränkung des Kommutators auf  $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} g_k \subseteq \text{Der}(\Omega^*(M))$  mit  $g_k = \mathfrak{o}$  für alle  $k \notin \{-1, 0, 1\}$  eine graduierte Lie Algebra, für die insbesondere die Gleichungen (D1) bis (D6) gelten. Als nächstes wollen wir diese Konstruktion unabhängig von glatten Mannigfaltigkeiten  $M$  machen.

**Definition 2.2.8** (Lie Superalgebra einer Lie Gruppe). Es seien  $G$  eine Lie Gruppe und  $v_1, v_2, \dots, v_n$  eine Basis ihrer Lie Algebra  $\mathfrak{g}$ . Mit  $c_{i,j}^k$  bezeichnen wir die Koeffizienten der eindeutigen Darstellung von  $[v_i, v_j] = \sum_k c_{i,j}^k v_k$ . Sei  $\tilde{\mathfrak{g}} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} g_k$  ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit  $g_k = \mathfrak{o}$  für alle  $k \notin \{-1, 0, 1\}$  dessen Basiselemente wir mit  $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n \in g_0$ ,  $\tilde{\iota}_1, \tilde{\iota}_2, \dots, \tilde{\iota}_n \in g_{-1}$  und  $\tilde{d} \in g_1$  bezeichnen. Weiters definieren wir auf  $\tilde{\mathfrak{g}}$  eine graduierte Lie Klammer  $[\cdot, \cdot]_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ , indem wir auf den Basiselementen für alle  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$[\tilde{d}, \tilde{d}]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = 0 \quad (\text{G1})$$

$$[\tilde{d}, \tilde{L}_i]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = 0 \quad (\text{G2})$$

$$[\tilde{d}, \tilde{\iota}_i]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = \tilde{L}_i \quad (\text{G3})$$

$$[\tilde{L}_i, \tilde{L}_j]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k \tilde{L}_k \quad (\text{G4})$$

$$[\tilde{L}_i, \tilde{\iota}_j]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k \tilde{\iota}_k \quad (\text{G5})$$

$$[\tilde{\iota}_i, \tilde{\iota}_j]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = 0 \quad (\text{G6})$$

definieren und mit Antisymmetrie und Bilinearität fortsetzen. Die resultierende Algebra  $\tilde{\mathfrak{g}}$  heißt die *Lie Superalgebra der Lie Gruppe  $G$* , vgl. [GS99, Seite 13f.].

<sup>16</sup>In [Ba09, Satz 1.25] wird dies gezeigt, sofern die Zusammenhangskomponente des Einselementes  $e \in G$  effektiv wirkt. Dabei heißt eine Wirkung *effektiv*, wenn deren induzierter Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow \text{Aut}(M), g \mapsto \lambda_g$  aus Bemerkung 1.1.4 injektiv ist. Falls  $G$  lokal frei wirkt, dann ist für jedes  $x \in M$  sogar  $\text{ev}_x : G \rightarrow M, g \mapsto gx = \lambda_g(x)$  injektiv auf der Zusammenhangskomponente von  $e \in G$ .

**Beispiel 2.2.9.** Insbesondere interessiert uns der Fall  $G = S^1$ . Die Lie Algebra  $\mathfrak{s}$  der  $S^1$  ist der Tangentialraum an  $1 \in S^1$  und dieser ist isomorph zum eindimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}$ . Wir bezeichnen mit  $\partial$  die Basis von  $\mathfrak{s}$ , mit

$$\tilde{\mathfrak{s}} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} s_k$$

die Lie Superalgebra der  $S^1$  und mit  $\tilde{l} \in s_{-1}$ ,  $\tilde{L} \in s_0$  und  $\tilde{d} \in s_1$  deren Basiselemente. Außerdem schreiben wir  $\tilde{L}_v := r\tilde{L}$  und  $\tilde{l}_v := r\tilde{l}$  für  $v = r\partial \in \mathfrak{s}$  mit  $r \in \mathbb{R}$ . Aus der Antisymmetrie der Lie Klammer auf  $\mathfrak{s}$  folgt  $0 = [\partial, \partial]_{\mathfrak{s}} = c_{1,1}^1 \partial$  und damit vereinfachen sich die Gleichungen (G1) bis (G6) zu

$$[\tilde{d}, \tilde{d}]_{\mathfrak{s}} = 0 \tag{S1}$$

$$[\tilde{d}, \tilde{L}]_{\mathfrak{s}} = 0 \tag{S2}$$

$$[\tilde{d}, \tilde{l}]_{\mathfrak{s}} = \tilde{L} \tag{S3}$$

$$[\tilde{L}, \tilde{L}]_{\mathfrak{s}} = 0 \tag{S4}$$

$$[\tilde{L}, \tilde{l}]_{\mathfrak{s}} = 0 \tag{S5}$$

$$[\tilde{l}, \tilde{l}]_{\mathfrak{s}} = 0 \tag{S6}$$

Also  $[s_{-1}, s_1]_{\mathfrak{s}} = s_0 = [s_1, s_{-1}]_{\mathfrak{s}}$  und  $[s_i, s_j]_{\mathfrak{s}} = 0$  sonst.

**Definition 2.2.10** ( $S^1$ -Stern Algebra). Es seien  $\Omega$  eine assoziative,  $\mathbb{Z}$ -graduiert kommutative Algebra mit Einselement  $\mathbf{1} \in \Omega^0$ , sodass  $\Omega^k = \mathfrak{o}$  trivial für alle  $k < 0$  sind und  $\mathfrak{s}$  die Lie Algebra sowie  $\tilde{\mathfrak{s}}$  die Lie Superalgebra der  $S^1$ . Weiters sei eine *Darstellung*

$$\rho : S^1 \rightarrow \text{Aut}^*(\Omega)$$

der  $S^1$  auf  $\Omega$  gegeben, i.e. ein Gruppenhomomorphismus, der jedem Element  $z \in S^1$  einen Algebrasomorphismus  $\rho_z : \Omega \rightarrow \Omega$  vom Grad null zuordnet und eine Wirkung  $\tilde{\mathfrak{s}} \times \Omega \rightarrow \Omega$ ,  $(\tilde{D}, \omega) \mapsto \tilde{D}\omega$  der  $\tilde{\mathfrak{s}}$  als Derivationen, i.e. wir können  $\tilde{\mathfrak{s}}$  mit einem Teilraum von  $\text{Der}(\Omega)$  identifizieren, resp. die von der Wirkung induzierte Abbildung

$$\tilde{\mathfrak{s}} \rightarrow \text{Der}^*(\Omega), \tilde{D} \mapsto (D := \omega \mapsto \tilde{D}\omega)$$

ist eine lineare Abbildung vom Grad 0, die sich mit den graduierten Lie Klammern verträgt und somit  $[\tilde{D}_i, \tilde{D}_j]_{\mathfrak{s}} \mapsto [D_i, D_j]_{\text{Der}(\Omega)}$  für alle  $\tilde{D}_k \in s_k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  erfüllt.

Wir nennen  $\Omega$  eine  $S^1$ -Stern Algebra, falls die Darstellung  $\rho$  und die Wirkung von  $\tilde{\mathfrak{s}}$  in folgendem Sinn verträglich sind: Für alle  $v \in \mathfrak{s}$ ,  $z \in S^1$  und  $D \in s_k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  soll

$$\left. \frac{d}{dt} \left( \rho_{\exp_{S^1}(tv)} \omega \right) \right|_{t=0} = L_v \omega \tag{V1}$$

$$[\rho_z, D]_{\text{End}^*(\Omega)} = \rho_z \circ D - D \circ \rho_z = 0 \tag{V2}$$

gelten, wobei wir für (V1) entweder eine passende Topologie auf  $\Omega$  voraussetzen oder verlangen, dass jedes Element  $\omega \in \Omega$  in einer endlich dimensionalen  $S^1$ -invarianten Teilalgebra  $A \subseteq \Omega$  liegt, i.e.  $\rho_z(A) \subseteq A$  gilt für alle  $z \in S^1$ .

Eine stetige lineare Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Pi$  zwischen  $S^1$ -Stern Algebren heißt  $S^1$ -Stern Morphismus vom Grad  $l$ , falls sie ein Algebrhomomorphismus ist, sodass  $f(\Omega^k) \subseteq \Pi^{k+l}$  und

$$[\rho_z, f]_{\text{Mor}(\Omega, \Pi)} := \rho_z^\Pi \circ f - f \circ \rho_z^\Omega = 0 \quad (\text{M1})$$

$$[D, f]_{\text{Mor}(\Omega, \Pi)} := D^\Pi \circ f - (-1)^{kl} f \circ D^\Omega = 0 \quad (\text{M2})$$

für alle  $z \in S^1$ ,  $\tilde{D} \in s_k$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt. Wir werden auch kurz  $[\rho_z, f] = \rho_z \circ f - f \circ \rho_z$  und  $[D, f] = D \circ f - (-1)^{kl} f \circ D$  schreiben, sofern keine Verwechslung möglich ist. Abbildungen die (M1) erfüllen, nennen wir auch  $S^1$ -äquivariant.

**Beispiel 2.2.11.** Für jede nichtleere, glatte  $S^1$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist der de Rham Komplex  $\Omega^*(M)$  eine  $S^1$ -Stern Algebra.

*Beweis.* Nach Bemerkung 1.2.5 ist  $\Omega^*(M)$  für nichtleere, glatte Mannigfaltigkeiten  $M$  eine assoziative, graduiert kommutative Algebra mit Einselement. Es ist

$$\rho : S^1 \rightarrow \text{Aut}^*(\Omega^*(M)), \quad z \mapsto (\lambda_z^{-1})^* = \lambda_{z^{-1}}^* \quad (2.21)$$

eine Darstellung der  $S^1$ , da nach Bemerkung 1.1.4 (i)  $\lambda_z : M \rightarrow M$ ,  $x \mapsto zx$  für alle  $z \in S^1$  ein Diffeomorphismus auf  $M$  ist und damit  $\lambda_{z^{-1}}^*$  wegen der Funktorialität des Pullbacks ein Isomorphismus auf  $\Omega^*(M)$ .

Wir ordnen  $\tilde{d} \in \tilde{\mathfrak{s}}$  dem de Rham Differenzial zu, welches aufgrund der Leibniz Regel 1.2.1 (iii) eine graduierte Derivation ist. Für die Basis  $\partial \in \mathfrak{s}$  ordnen wir  $\tilde{L} \in \tilde{\mathfrak{s}}$  und  $\tilde{\iota} \in \tilde{\mathfrak{s}}$  den graduierten Derivationen  $L_\partial \in \text{Der}_0(\Omega^*(M))$  aus (2.20) und  $\iota_\partial \in \text{Der}_{-1}(\Omega^*(M))$  aus (2.19) zu und setzen diese Zuordnungen linear auf ganz  $\tilde{\mathfrak{s}}$  fort. Auf diese Weise erhalten wir nach Bemerkung 2.2.7 (iii) einen Endomorphismus vom Grad 0

$$\langle \tilde{\iota} \rangle \oplus \langle \tilde{L} \rangle \oplus \langle \tilde{d} \rangle = \tilde{\mathfrak{s}} \longrightarrow \langle \iota_{\tilde{\zeta}_\partial} \rangle \oplus \langle L_{\tilde{\zeta}_\partial} \rangle \oplus \langle d \rangle \subseteq \text{Der}^*(\Omega^*(M)), \quad (2.22)$$

wobei die Verträglichkeit mit den graduierten Lie Klammern unter dieser Zuordnung gegeben ist, da die Lie Klammer auf  $\mathfrak{s}$  gerade so definiert wurde. Wir beachten, dass (2.22) für lokal freie Wirkungen nach Bemerkung 2.2.7 (iii) injektiv und somit ein Isomorphismus wäre, was im Allgemeinen nicht der Fall sein muss. Zum Beispiel verschwinden für triviale Wirkungen alle fundamentalen Vektorfelder überall, und damit auch  $L_\partial$  und  $\iota_\partial$ .

Nun müssen noch (V1) und (V2) gezeigt werden. Laut Korollar 2.2.3 (ii) gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \left( \rho_{\exp_{S^1}(tv)} \omega \right) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left( \lambda_{\exp_{S^1}(-tv)}^* \omega \right) \right|_{t=0}$$

und mit (2.20) aus Bemerkung 2.2.7 (iii) sowie (2.16) aus Beispiel 2.2.5

$$L_v \omega = L_{\tilde{\zeta}_v} \omega = \left. \frac{d}{dt} \left( \left( \text{Fl}_t^{\tilde{\zeta}_v} \right)^* \omega \right) \right|_{t=0}.$$

Um (V1) nachzuweisen, genügt es also  $\text{Fl}_t^{\tilde{\zeta}_v} = \lambda_{\exp_{S^1}(-tv)}$  zu zeigen. Dazu betrachten wir für  $x \in M$  die Kurve  $c_x : \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \lambda_{\exp_{S^1}(-tv)}(x)$ . Nach Korollar 2.2.3 (i) gilt

$c_x(0) = \lambda_{\exp_{S^1}(0)}(x) = \lambda_e(x) = \text{id}_M(x) = x$  und nach Korollar 2.2.3 (iii) und Bemerkung 1.1.4 (i) folgt

$$\begin{aligned} c'_x(r) &= \frac{d}{dt} c_x(t+r)|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\lambda_{\exp_{S^1}(-(t+r)v)}(x))|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} ((\lambda_{\exp_{S^1}(-tv)} \circ \lambda_{\exp_{S^1}(-rv)})(x))|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\lambda_{\exp_{S^1}(-tv)}(c_x(r)))|_{t=0} = \tilde{\zeta}_v(c_x(r)), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition des fundamentalen Vektorfeldes (2.17) verwendet haben. Gemäß Fußnote 15 auf Seite 38 ist  $c_x$  die eindeutige Integralkurve von  $\tilde{\zeta}_v$  durch  $x \in M$  und somit ist der Fluss von  $\tilde{\zeta}_v$  für jedes  $x$  gleich  $c_x(t) = \lambda_{\exp_{S^1}(-tv)}$ .

Um die Verträglichkeit (V2) der Darstellung mit der Wirkung nachzuweisen, genügt es, dies auf den Basiselementen nachzurechnen. Für das de Rham Differenzial ist dies gerade die Natürlichkeit 1.2.1 (iii), denn  $\rho_z \circ d = \lambda_{z^{-1}}^* \circ d = d \circ \lambda_{z^{-1}}^* = d \circ \rho_z$  für alle  $z \in S^1$ . Weil die  $S^1$  abelsch ist, gilt für  $z_1, z_2 \in S^1$

$$\rho_{z_1} \circ \rho_{z_2} = \lambda_{z_1^{-1}}^* \circ \lambda_{z_2^{-1}}^* = (\lambda_{z_2^{-1}} \circ \lambda_{z_1^{-1}})^* = \lambda_{(z_1 z_2)^{-1}}^* = \rho_{z_1 z_2} = \rho_{z_2 z_1} = \rho_{z_2} \circ \rho_{z_1}$$

und mit (V1), sowie der Linearität von  $\rho_z$  folgt dann für alle  $z \in S^1$ :

$$\begin{aligned} (\rho_z \circ L_\partial)(\omega) &= \rho_z \left( \frac{d}{dt} \rho_{\exp_{S^1}(t\partial)}(\omega) \right) |_{t=0} = \frac{d}{dt} (\rho_z \circ \rho_{\exp_{S^1}(t\partial)}(\omega)) |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\rho_{\exp_{S^1}(t\partial)} \circ \rho_z(\omega)) |_{t=0} = (L_\partial \circ \rho_z)(\omega). \end{aligned}$$

Als Letztes fehlt jetzt noch die Verträglichkeit von  $\iota_\partial$  mit  $\rho$ . Dafür zeigen wir zuerst, dass für das fundamentale Vektorfeld  $\tilde{\zeta}_v$  mit  $v \in \mathfrak{s}$  für alle  $z \in S^1$

$$\begin{aligned} \lambda_z^* \tilde{\zeta}_v &\stackrel{14}{=} T\lambda_z^{-1} \circ \tilde{\zeta}_v \circ \lambda_z(x) \stackrel{(2.17)}{=} T\lambda_{z^{-1}} \left( \frac{d}{dt} (\lambda_{\exp_{S^1}(-tv)}(\lambda_z(x))) \right) |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\lambda_{z^{-1}} \circ \lambda_{\exp_{S^1}(-tv)} \circ \lambda_z(x)) |_{t=0} = \frac{d}{dt} (\lambda_{\exp_{S^1}(-tv)}(x)) |_{t=0} = \tilde{\zeta}_v \end{aligned} \quad (2.23)$$

gilt, wobei wir im dritten Schritt die Kettenregel und im vierten die Kommutativität der Multiplikation auf der  $S^1$  verwendet haben. Damit folgt nun schlussendlich für alle  $\omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k \in \mathfrak{X}(M)$  und  $z \in S^1$ :

$$\begin{aligned} (\rho_z \circ \iota_\partial)(\omega)(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k) &= \lambda_{z^{-1}}^*(\iota_\partial \omega)(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k) = \\ &= (\iota_\partial \omega)(\lambda_z^* \xi_2, \lambda_z^* \xi_3, \dots, \lambda_z^* \xi_k) = && ((2.15), (2.19)) \\ &= \omega(\tilde{\zeta}_\partial, \lambda_z^* \xi_2, \lambda_z^* \xi_3, \dots, \lambda_z^* \xi_k) = \\ &= \omega(\lambda_z^* \tilde{\zeta}_\partial, \lambda_z^* \xi_2, \lambda_z^* \xi_3, \dots, \lambda_z^* \xi_k) = \\ &= (\lambda_{z^{-1}}^* \omega)(\tilde{\zeta}_\partial, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k) = \\ &= \iota_\partial(\lambda_{z^{-1}}^* \omega)(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k) = (\iota_\partial \circ \rho_z)(\omega)(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k). \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten und fünften Schritt verwendet, dass für den Pullback einer Differenzialform  $\nu \in \Omega^k(N)$  unter einem Diffeomorphismus  $f: M \rightarrow N$  für Vektorfelder  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k \in \mathfrak{X}(M)$  gilt  $f^* \nu(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) = \nu(f_* \eta_1, f_* \eta_2, \dots, f_* \eta_k)$  und gemäß Fußnote 14 auf Seite 38  $\lambda_z^* \xi = (\lambda_z^{-1})_* \xi = (\lambda_{z^{-1}})_* \xi$  gilt.  $\square$

**Beispiel 2.2.12.** Für jede glatte  $S^1$ -äquivariante Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist der Algebromorphismus  $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$  ein  $S^1$ -Stern Morphismus vom Grad 0.

*Beweis.* Für äquivariante Abbildungen gilt  $\lambda_z \circ f = f \circ \lambda_z$  für alle  $z \in S^1$  und daraus folgt (M1), denn für  $\rho_z$  aus (2.21) gilt dann

$$\rho_z \circ f^* = \lambda_{z^{-1}}^* \circ f^* = (f \circ \lambda_{z^{-1}})^* = (\lambda_{z^{-1}} \circ f)^* = f^* \circ \lambda_{z^{-1}}^* = f^* \circ \rho_z.$$

Für das de Rham Differential  $d$  ist (M2) gerade die Natürlichkeit 1.2.1 (iv) und für die Lie Ableitung folgt (M2) aus (V1), (M1) und der Linearität von  $f^*$ :

$$L_v(f^*(\omega)) = \frac{d}{dt}(\rho_{\exp_{S^1}(tv)}(f^*(\omega)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}((f^*(\rho_{\exp_{S^1}(tv)})(\omega)))|_{t=0} = f^*(L_v(\omega))$$

Um (M2) für den Insertionsoperator zu zeigen, beachten wir zuerst, dass für die fundamentalen Vektorfelder  $\tilde{\zeta}_v^M$  auf  $M$  und  $\tilde{\zeta}_v^N$  auf  $N$  zu  $v \in \mathfrak{s}$  für alle  $x \in M$  gilt:

$$\begin{aligned} T_x f(\tilde{\zeta}_v^M(x)) &= T_x f\left(\frac{d}{dt}(\lambda_{\exp_{S^1}(-tv)}(x))\Big|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}(f \circ \lambda_{\exp_{S^1}(-tv)}(x))\Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}(\lambda_{\exp_{S^1}(-tv)}(f(x)))\Big|_{t=0} = \tilde{\zeta}_v^N(f(x)) \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Kettenregel und die  $S^1$ -Äquivarianz von  $f$  verwendet. Damit folgt nun für alle  $\xi_2, \dots, \xi_k \in \mathfrak{X}(M)$  und  $x \in M$ :

$$\begin{aligned} (\iota_v(f^*\omega))_x(\xi_2, \dots, \xi_k) &= (f^*\omega)_x(\tilde{\zeta}_v^M, \xi_2, \dots, \xi_k) = \\ &= \omega_{f(x)}(Tf \circ \tilde{\zeta}_v^M, Tf \circ \xi_2, \dots, Tf \circ \xi_k) = \\ &= \omega_{f(x)}(\tilde{\zeta}_v^N \circ f, Tf \circ \xi_2, \dots, Tf \circ \xi_k) = \\ &= (\iota_v\omega)_{f(x)}(Tf \circ \xi_2, \dots, Tf \circ \xi_k) = (f^*(\iota_v\omega))_x(\xi_2, \dots, \xi_k) \end{aligned}$$

□

**Definition 2.2.13.** Es sei  $\Omega$  eine  $S^1$ -Stern Algebra. Weil  $0 = [\tilde{d}, \tilde{d}] \mapsto [d, d] = 2(d \circ d)$  und damit  $d \circ d = 0$  für  $d \in \text{Der}_1(\Omega)$  gilt, ist  $\Omega$  ein Kokettenkomplex und wir können analog zu Definition 1.2.3 und Bemerkung 1.2.7 für  $d^k := d|_{\Omega^k}$  die  $k$ -te Kohomologie von  $\Omega$  als  $H^k(\Omega) := \ker(d^k) / \text{img}(d^{k-1})$  und die Kohomologie von  $\Omega$  als

$$H^*(\Omega) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(\Omega)$$

definieren. Für glatte Mannigfaltigkeiten  $M$  gilt also  $H^*(\Omega^*(M)) = H_{\text{dR}}^*(M)$ .

Einen Kokettenkomplex nennen wir *azyklisch*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$H^k(\Omega) := \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{falls } k = 0 \\ \mathfrak{o}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist  $\mathbb{K}$  der dem Vektorraum  $\Omega$  zugrunde liegende Körper. Für kontrahierbare, glatte Mannigfaltigkeiten  $M$  ist  $\Omega^*(M)$  nach Beispiel 1.2.13 azyklisch.

Zwei  $S^1$ -Stern Morphismen  $f_0, f_1 : \Omega \rightarrow \Pi$  heißen *kettenhomotop*, wenn es eine lineare Abbildung  $q : \Omega \rightarrow \Pi$  vom Grad  $-1$  gibt mit  $f_1 - f_0 = d \circ q + q \circ d = [d, q]$ , welche  $S^1$ -äquivariant ist und  $[\iota, q] = \iota \circ q + q \circ \iota = 0$  erfüllt. So eine Abbildung heißt *Kettenhomotopie* und wir schreiben  $f_0 \simeq_q f_1$  oder kurz  $f_0 \simeq f_1$ . Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Pi$  heißt *Kettenhomotopieäquivalenz*, falls es einen  $S^1$ -Stern Morphismus  $g : \Pi \rightarrow \Omega$  gibt, sodass  $g \circ f \simeq \text{id}_\Omega$  und  $f \circ g \simeq \text{id}_\Pi$  gilt. Die  $S^1$ -Stern Algebren  $\Omega$  und  $\Pi$  nennen wir dann *kettenhomotopieäquivalent* und schreiben  $\Omega \simeq \Pi$ . Insbesondere sind Isomorphismen  $f : \Omega \rightarrow \Pi$  Kettenhomotopieäquivalenzen, denn für die inverse Abbildung  $g : \Pi \rightarrow \Omega$  von  $f$  gilt  $g \circ f - \text{id}_\Omega = 0 = [d, q]$  und  $f \circ g - \text{id}_\Pi = 0 = [d, q]$  für  $q = c_\circ := (\omega \mapsto 0)$ .

**Bemerkung 2.2.14.** Es seien  $\Omega$  und  $\Pi$  zwei  $S^1$ -Stern Algebren.

(i) Analog zu Bemerkung 1.2.5 (i) induziert die Multiplikation in  $\Omega$  eine wohldefinierte Multiplikation in  $H^*(\Omega)$ , weil per definitionem  $d \in \text{Der}_1(\Omega)$  und  $d$  somit nach (2.13)  $d(\omega \wedge \nu) = d\omega \wedge \nu \pm \omega \wedge d\nu = 0$  erfüllt, falls  $d\omega = 0 = d\nu$ .  $H^*(\Omega)$  ist also eine assoziative, graduiert kommutative Algebra mit Einselement.

(ii) Ebenso wie in 1.2.5 (iii) induziert jeder  $S^1$ -Stern Morphismus  $f : \Omega \rightarrow \Pi$  einen wohldefinierten Algebramorphismus  $f^* : H^*(\Omega) \rightarrow H^*(\Pi)$ ,  $[\omega] \mapsto [f(\omega)]$  nach (M2), weil mit  $d \circ f = f \circ d$  auch  $d(f(\omega)) = f(d(\omega)) = 0$  gilt, falls  $d(\omega) = 0$  für  $\omega \in \Omega$ .

(iii) Für jede Kettenhomotopie  $q : \Omega \rightarrow \Pi$  gilt  $[L, q] = L \circ q - q \circ L = 0$ , denn wegen (V1) und (M1) gilt:  $L \circ q = \frac{d}{dt}(\rho_{\text{exp}_{S^1}(t\partial)}(q(x)))|_{t=0} = q(\frac{d}{dt}(\rho_{\text{exp}_{S^1}(t\partial)}(x))|_{t=0}) = q \circ L$ .

**Proposition 2.2.15.** *Die Kohomologie liefert einen kovarianten Funktor von der Kategorie der  $S^1$ -Stern Algebren und  $S^1$ -Stern Morphismen in die Kategorie der assoziativen, graduiert kommutativen  $\mathbb{R}$ -Algebren mit Einselement und Algebramorphismen.*

*Inbesondere besitzen isomorphe  $S^1$ -Stern Algebren isomorphe Kohomologien.*

*Beweis.* Wir beachten, dass die Zusammensetzung zweier  $S^1$ -Stern Morphismen wieder einen  $S^1$ -Stern Morphismus ergibt und damit folgt die Behauptung aus Bemerkung 2.2.14 (i) und (ii), wobei noch die Existenz des Einselementes in der Kohomologie nachgewiesen werden sollte. Für  $1 \in \Omega^0$  gilt:  $d1 = d(1 \cdot 1) = d1 \cdot 1 + 1 \cdot d1 = 2d1$ , also  $d1 = 0$ , also repräsentiert  $[1] \in H^0(\Omega)$  eine Kohomologieklassse.  $\square$

**Korollar 2.2.16** (Kettenhomotopieinvarianz). *Zwei kettenhomotope  $S^1$ -Stern Morphismen induzieren dieselbe Abbildung in der Kohomologie und kettenhomotopieäquivalente Räume haben isomorphe Kohomologien.*

*Beweis.* Es seien  $f_0, f_1 : \Omega \rightarrow \Pi$  zwei  $S^1$ -Stern Morphismen, die kettenhomotop bezüglich der Kettenhomotopie  $q : \Omega \rightarrow \Pi$  sind. Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und alle  $\omega \in \Omega^k$  mit  $d\omega = 0$  gilt also  $(f_1 - f_0)(\omega) = (d \circ q + q \circ d)(\omega) = d(q(\omega)) + 0$  für  $q(\omega) \in \Omega^{k-1}$ ,  $(f_1 - f_0)(\omega) \in \text{img}(d^{k-1})$  und damit  $f_1^*([\omega]) - f_0^*([\omega]) = [(f_1)(\omega)] - [f_0(\omega)] = [(f_1 - f_0)(\omega)] = 0$ .

Der Rest der Aussage folgt wie in Korollar 1.2.12 mit dem einzigen Unterschied, dass wir hier gemäß Proposition 2.2.15 einen kovarianten Funktor vorliegen haben. Es gilt hier also  $g^* \circ f^* = (g \circ f)^* = \text{id}_\Pi^* = \text{id}_{H^*(\Pi)}$ , sofern  $f$  und  $g$  Kettenhomotopieäquivalenzen sind.  $\square$

**Definition 2.2.17** (Basische Elemente). Es sei  $\Omega$  eine  $S^1$ -Stern Algebra. Ein  $\beta \in \Omega$  heißt *basisches Element*, falls es folgende Identitäten erfüllt:

$$L(\beta) = 0 \tag{B1}$$

$$\iota(\beta) = 0 \tag{B2}$$

Wir nennen ein  $\omega \in \Omega$  ein  *$S^1$ -invariantes Element*, falls es (B1) erfüllt und ein *horizontales Element*, falls es (B2) erfüllt. Die Menge aller  $S^1$ -invarianten Elemente bezeichnen wir mit  $\Omega_{S^1}$  und die Menge aller basischen Elemente mit  $\Omega_{\text{bas}}$ .

**Bemerkung 2.2.18.** Sei  $\Omega$  eine  $S^1$ -Stern Algebra.

(i) Die Bedingung  $L(\omega) = 0$  ist äquivalent dazu, dass  $\rho_z(\omega) = \omega$  für alle  $z \in S^1$ . Für  $\omega \in \Omega_{S^1}$  gilt laut (V1) nämlich  $\frac{d}{dt}(\rho_{\exp_{S^1}(t\partial)}(\omega))|_{t=0} = L(\omega) = 0$  und damit ist  $\rho_{\exp_{S^1}(t\partial)}(\omega)$  konstant auf der  $S^1$ , weil diese zusammenhängend ist. Da sich jedes Element  $z \in S^1$  in der Form  $\exp_{S^1}(t_z\partial)$  für ein  $t_z \in \mathbb{R}$  schreiben lässt, gilt  $\rho_z(\omega) = \rho_{\exp_{S^1}(t_z\partial)}(\omega) = \rho_{\exp_{S^1}(0)}(\omega) = \rho_e(\omega) = \text{id}_\Omega(\omega) = \omega$ . Umgekehrt folgt mit der letzten Identität, dass  $\rho_{\exp_{S^1}(t\partial)}$  konstant auf der  $S^1$  ist, falls  $\rho_z(\omega) = \omega$  für alle  $z \in S^1$  und damit folgt, dass  $L(\omega) = \frac{d}{dt}(\rho_{\exp_{S^1}(t\partial)}(\omega))|_{t=0} = 0$  gilt.

(ii) Wir zeigen, dass die  $S^1$ -invarianten Elemente  $\Omega_{S^1}$  wieder eine  $S^1$ -Stern Algebra bilden. Da  $L : \Omega \rightarrow \Omega$  eingeschränkt auf  $\Omega_{S^1}$  per definitionem trivial wirkt, stimmt nach (i) die Darstellung  $\rho$  der  $S^1$  eingeschränkt auf  $\Omega_{S^1}$  mit der identischen Abbildung  $\text{id}_{\Omega_{S^1}}$  überein. Damit ist (V1) genauso wie die Verträglichkeit von  $\rho$  und  $L$  auf  $\Omega_{S^1}$  trivialerweise erfüllt. Weiters gilt  $d(\Omega_{S^1}) \subseteq \Omega_{S^1}$  und  $\iota(\Omega_{S^1}) \subseteq \Omega_{S^1}$ , denn mit (S2) gilt  $L(d\omega) = d(L(\omega)) = d0 = 0$  und mit (S5) gilt  $L(\iota(\omega)) = \iota(L(\omega)) = \iota(0) = 0$ . Damit folgt ebenfalls die Verträglichkeit von  $d$  und  $\iota$  mit  $\rho$ , also ist (V2) erfüllt.

(iii) Für eine  $S^1$ -Stern Algebra  $\Omega$  gilt  $d(\Omega_{\text{bas}}) \subseteq \Omega_{\text{bas}}$ , denn für  $\omega \in \Omega_{\text{bas}}$  gilt nach (S2)  $L(d\omega) = d(L\omega) = d0 = 0$  und damit laut (S4) auch  $\iota(d\omega) = L(d\omega) - d(\iota\omega) = 0 - d0 = 0$ . Da  $L$  und  $\iota$  per definitionem trivial auf  $\Omega_{\text{bas}}$  wirken und  $\rho_z$  nach (i) als Identität, ist  $\Omega_{\text{bas}}$  wieder eine  $S^1$ -Stern Algebra. Damit können wir nun folgende Definition einführen:

**Definition 2.2.19** (Basische Kohomologie). Es sei  $\Omega$  eine  $S^1$ -Stern Algebra und  $\Omega_{\text{bas}}$  die Teilalgebra der basischen Elemente. Wir bezeichnen die Faktorräume  $\ker(d_{\text{bas}}^k) / \text{img}(d_{\text{bas}}^{k-1})$  mit  $H_{\text{bas}}^k(\Omega) := H^k(\Omega_{\text{bas}})$  und nennen sie die  *$k$ -te basische Kohomologie* von  $\Omega$  und deren direkte Summe

$$H_{\text{bas}}^*(\Omega) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H_{\text{bas}}^k(\Omega) = H^*(\Omega_{\text{bas}})$$

die *basische Kohomologie* von  $\Omega$ .

**Lemma 2.2.20.** Es sei  $M$  eine glatte  $S^1$ -Mannigfaltigkeit mit freier Wirkung, dann induziert die natürliche Projektion  $p : M \rightarrow M/S^1$  einen natürlichen Isomorphismus in der Kohomologie:

$$H_{\text{dR}}^*(M/S^1) \cong H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M)) \tag{2.24}$$

*Beweis.* Nach Korollar 1.1.11 ist  $p : M \rightarrow M/S^1$  ein  $S^1$ -Hauptfaserbündel, also insbesondere eine Submersion. Wir zeigen zuerst, dass  $p^* : \Omega^*(M/S^1) \rightarrow \Omega^*(M)$  injektiv ist und somit einen Isomorphismus  $\Omega^*(M/S^1) \cong p^*(\Omega^*(M/S^1)) \subseteq \Omega^*(M)$  liefert. Da  $p^*$  eine lineare Abbildung ist, genügt es zu zeigen, dass diese Abbildung einen trivialen Kern besitzt. Für beliebige  $k \in \mathbb{Z}$  sei  $0 \neq \omega \in \Omega^k(M/S^1)$ , dann gibt es ein  $[x] \in M/S^1$  und  $v_1, v_2, \dots, v_k \in T_{[x]}(M/S^1)$  mit  $v_i \neq 0$ , sodass  $\omega_{[x]}(v_1, v_2, \dots, v_k) \neq 0$ . Da  $p$  eine Submersion, also insbesondere  $T_x p$  surjektiv ist, gibt es  $w_1, w_2, \dots, w_k \in T_x(M)$  mit  $T_x p(w_i) = v_i$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Wir erhalten  $(p^*\omega)_x(w_1, w_2, \dots, w_k) = \omega_{p(x)}(T_x p(w_1), T_x p(w_2), \dots, T_x p(w_k)) = \omega_{[x]}(v_1, v_2, \dots, v_k) \neq 0$ , also  $p^*(\omega) \neq 0$ .

Als nächstes zeigen wir, dass jedes  $\omega \in p^*(\Omega^*(M/S^1))$  ein basisches Element in  $\Omega^*(M)$  ist, i.e.  $p^*(\Omega^*(M/S^1)) \subseteq \Omega^*(M)_{\text{bas}}$ . Aus Bemerkung 1.1.9 folgt  $p \circ \lambda_z = p$  für alle  $z \in S^1$  und damit gilt  $\rho_z(p^*(\omega)) = \lambda_{z^{-1}}^*(p^*(\omega)) = (p \circ \lambda_{z^{-1}})^*(\omega) = p^*(\omega)$ , was nach Bemerkung 2.2.18 (i) äquivalent zu (B1) ist. Aus der Identität

$$T_p \circ \tilde{\zeta}_v(x) = T_p \circ \frac{d}{dt}(\lambda_{\exp_{S^1}(tv)}(x))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(p \circ \lambda_{\exp_{S^1}(tv)}(x))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(p(x))|_{t=0} = 0$$

folgt  $\iota_{\partial}(p^*\omega)_x(\xi_2, \dots, \xi_k) = (p^*\omega)_x(\tilde{\zeta}_{\partial}, \xi_2, \dots, \xi_k) = \omega_{p(x)}(T_p \circ \tilde{\zeta}_{\partial}, T_p \circ \xi_2, \dots, T_p \circ \xi_k) = \omega_{[x]}(0, T_p \circ \xi_2, \dots, T_p \circ \xi_k) = 0$ , also gilt auch (B2).

Umgekehrt müssen wir nun zeigen, dass jedes  $\beta \in \Omega^k(M)_{\text{bas}}$  Bild einer Differenzialform  $\tilde{\beta} \in \Omega^k(M/S^1)$  unter  $p^*$  ist, i.e. für alle  $x \in M$  und  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \mathfrak{X}(M)$  soll gelten:

$$\beta_x(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) = \tilde{\beta}_{[x]}(T_x p(\xi_1(x)), \dots, T_x p(\xi_k(x))) \quad (2.25)$$

Da  $p : M \rightarrow M/S^1$  eine Submersion ist, können wir (2.25) als Definition für  $\tilde{\beta}$  verwenden, sobald wir gezeigt haben, dass (2.25) nicht von den gewählten Urbildern abhängt. Seien  $\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_k \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $T_x p(\xi_i(x)) = T_x p(\eta_i(x))$ . Aus der Linearität von  $T_x p$  folgt  $0 = T_x p((\xi_i - \eta_i)(x))$ . In [Ba09, Satz 3.1] wird gezeigt, dass es dann  $v_i \in \mathfrak{g}$  in der Lie Algebra der  $S^1$  gibt mit  $(\xi_i - \eta_i)(x) = \tilde{\zeta}_{v_i}(x)$ . Mit  $\iota_{v_1}(\beta) = 0$  folgt:

$$\beta(\xi_1, \dots, \xi_k) - \beta(\eta_1, \dots, \eta_k) = \iota_{v_1} \beta(\tilde{\zeta}_{v_2}(x), \dots, \tilde{\zeta}_{v_k}(x)) = 0 \quad (2.26)$$

Und weil  $\beta$  linear ist, hängt es somit nicht von den gewählten Vektorfeldern ab. Aus  $L(\beta) = 0$  folgt mit Bemerkung 2.2.18 (i) für alle  $z \in S^1$ :

$$\beta_x(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) = \lambda_z^* \beta_x(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) = \beta_{zx}(T_x \lambda_z(\xi_1(x)), \dots, T_x \lambda_z(\xi_k(x)))$$

Und da gemäß Bemerkung 1.1.9  $T_{zx} p \circ T_x \lambda_z = T_x p$  gilt, folgt mit (2.26), dass  $\tilde{\beta}$  über (2.25) wohldefiniert ist und  $p^* \tilde{\beta} = \beta$  erfüllt.

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass  $\Omega^*(M)_{\text{bas}} = p^*(\Omega^*(M/S^1)) \cong \Omega^*(M/S^1)$  gilt. Aus Proposition 2.2.15 folgt damit, dass

$$H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M)) = H^*(\Omega^*(M)_{\text{bas}}) \cong H^*(\Omega^*(M/S^1)) = H_{\text{dR}}^*(M/S^1)$$

ein Isomorphismus ist. □

**Bemerkung 2.2.21.** Die basische Kohomologie liefert also für freie Wirkungen der  $S^1$  eine Verallgemeinerung der  $S^1$ -äquivarianten Kohomologie  $H_{S^1}^*(M) = H_{\text{dR}}^*(M/S^1)$  glatter Mannigfaltigkeiten  $M$ , siehe Definition 1.2.23. Wir wollen aber eine Kohomologie für beliebige Wirkungen der  $S^1$  auf  $M$  definieren, die für kompakte Mannigfaltigkeiten bis auf Isomorphie mit der singulären  $S^1$ -äquivarianten Kohomologie von  $M$  übereinstimmt, siehe Definition 2.1.1. Letztere ist für ein universelles  $S^1$ -Bündel  $(F, \pi, F/S^1, S^1)$  definiert als die  $S^1$ -äquivariante Kohomologie des Produktes  $M \times F$ , auf dem die  $S^1$  dann frei wirkt.

Wir müssen versuchen, diese Konstruktion im algebraischen Setting zu imitieren. Das Produkt der Räume übersetzt sich gemäß dem Künneth Theorem 1.2.14 in ein Tensorprodukt von  $S^1$ -Stern Algebren und die Kontrahierbarkeit von Räumen laut Beispiel 1.2.13 in die Azyklizität von  $S^1$ -Stern Algebren. Freie Wirkungen lassen sich jedoch schwer mittels Eigenschaften von  $S^1$ -Stern Algebren charakterisieren. Wie sich herausstellen wird, genügt es, sich auf lokal freie Wirkungen zu beschränken, um eine Verallgemeinerung zu erhalten.

**Definition 2.2.22** (Zusammenhangselement). Es sei  $\Omega$  eine  $S^1$ -Stern Algebra. Ein Element  $\theta \in \Omega^1$  vom Grad 1 heißt *Zusammenhangselement*, falls es die Identitäten

$$\iota(\theta) = 1 \tag{Z1}$$

$$L(\theta) = 0 \tag{Z2}$$

erfüllt. Nach Bemerkung 2.2.18 (i) bedeutet (Z2), dass  $\theta$  invariant unter der Wirkung der  $S^1$  ist. Falls  $\Omega$  ein Zusammenhangselement besitzt, sagen wir, dass  $\Omega$  Bedingung (Z) erfüllt.

**Bemerkung 2.2.23.** Es sei  $M$  eine glatte  $S^1$ -Mannigfaltigkeit.

(i) Für  $\Omega^*(M)$  ist die Existenz eines Elementes  $\theta \in \Omega^1(M)$ , welches (Z1) erfüllt, äquivalent dazu, dass die Wirkung der  $S^1$  lokal frei auf  $M$  ist. Um dies einzusehen, verwenden wir die Tatsache, dass eine Riemann-Metrik<sup>17</sup>  $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  einen linearen Isomorphismus zwischen den Vektorfeldern und den 1-Formen auf  $M$  mittels der Zuordnung  $\sharp : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ ,  $\xi \mapsto (\xi^\sharp := \eta \mapsto g(\xi, \eta))$  liefert und wir bezeichnen die Inverse Zuordnung mit  $\flat : \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ,  $\omega \mapsto \omega^\flat$ . Dabei ist  $\omega^\flat$  das eindeutige Vektorfeld, für welches  $g(\omega^\flat, \eta) = \omega(\eta)$  gilt. Mit Beispiel 2.2.11 erhalten wir somit die Identität

$$(\iota_\partial \theta)_x = \theta_x(\tilde{\zeta}_\partial(x)) = g_x(\theta^\flat(x), \tilde{\zeta}_\partial(x)) \in \mathbb{R} \tag{2.27}$$

für alle  $x \in M$  und  $\theta \in \Omega^1(M)$ . Mit (2.27) sehen wir, dass die Existenz einer Differentialform  $\theta \in \Omega^1(M)$ , welche Bedingung (Z1) erfüllt, zur Folge hat, dass das fundamentale Vektorfeld  $\tilde{\zeta}_\partial$  nirgends verschwindet. Falls umgekehrt die  $S^1$  lokal frei auf  $M$  wirkt, liefert  $\tilde{\zeta}_\partial^\flat =: \theta \in \Omega^1(M)$  eine 1-Form, die Bedingung (Z1) erfüllt.

<sup>17</sup>Jede parakompakte Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt eine *Riemann-Metrik*, i.e. ein glattes (0,2)-Tensorfeld  $g$ , das jedem Punkt  $x \in M$  ein Skalarprodukt  $T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnet. Details können in [Mi08, Paragraf V.22] gefunden werden.

(ii) Falls die  $S^1$  lokal frei auf  $M$  wirkt, dann erfüllt  $\Omega^*(M)$  Bedingung (Z). Nach (i) ist dies äquivalent zur Existenz eines Elementes  $\tilde{\theta} \in \Omega^1(M)$ , welches (Z1) erfüllt. Im Allgemeinen wird dieses nicht (Z2) erfüllen, dies kann jedoch immer erreicht werden, wenn es über die  $S^1$  wie folgt gemittelt wird:

$$\theta := \int_{S^1} \rho_z(\tilde{\theta}) dz := \int_0^1 \rho_{e^{2\pi i t}}(\tilde{\theta}) dt$$

Mit dieser Definition gilt  $\int_{S^1} dz = 1$  und  $\rho_z(\theta) = \theta$  für alle  $z \in S^1$ , denn für ein  $z_s = e^{2\pi i s} \in S^1$  gilt:

$$\begin{aligned} \rho_{z_s}(\theta) &= \rho_{e^{2\pi i s}} \circ \int_0^1 \rho_{e^{2\pi i t}}(\tilde{\theta}) dt = \int_0^1 \rho_{e^{2\pi i s}} \circ \rho_{e^{2\pi i t}}(\tilde{\theta}) dt = \\ &= \int_0^1 \rho_{e^{2\pi i(s+t)}}(\tilde{\theta}) dt = \int_s^{s+1} \rho_{e^{2\pi i t}}(\tilde{\theta}) dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 \rho_{e^{2\pi i t}}(\tilde{\theta}) dt = \theta \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt die Linearität von  $\rho_{z_s}$  verwendet und im fünften Schritt haben wir substituiert. Im sechsten Schritt haben wir die Periode der Abbildung  $t \mapsto e^{2\pi i t}$  verwendet. Allgemein gilt für eine integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow B$  mit Periode  $p \in \mathbb{R}$  für alle  $r \in (0, p)$ :

$$\begin{aligned} \int_r^{r+p} f(x) dx &= \int_r^p f(x) dx + \int_p^{r+p} f(x) dx = \\ &= \int_r^p f(x) + \int_0^r \underbrace{f(x+p)}_{=f(x)} dx = \int_0^p f(x) dx \end{aligned} \quad (*)$$

(iii) Die Bedingung (Z) für eine  $S^1$ -Stern Algebra ist also unser Pendant zu lokal freien Wirkungen der  $S^1$  auf Mannigfaltigkeiten. Wie in Bemerkung 2.2.21 besprochen, müssen wir noch Tensorprodukte von  $S^1$ -Stern Algebren behandeln, um eine Verallgemeinerung der  $S^1$ -äquivarianten Kohomologie für beliebige  $S^1$  Wirkungen zu erhalten.

**Definition 2.2.24** (Tensorprodukt). Es seien  $\Omega$  und  $\Pi$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Das *Tensorprodukt* von  $\Omega$  und  $\Pi$  ist ein Vektorraum  $\Omega \otimes \Pi$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung  $\otimes : \Omega \times \Pi \rightarrow \Omega \otimes \Pi$ , welcher die universelle Eigenschaft erfüllt, dass für jeden  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $A$  und jede bilineare Abbildung  $a : \Omega \times \Pi \rightarrow A$  genau eine bilineare Abbildung  $\alpha : \Omega \otimes \Pi \rightarrow A$  existiert, welche folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \Pi & \xrightarrow{\otimes} & \Omega \otimes \Pi \\ & \searrow a & \swarrow \exists! \alpha \\ & & A \end{array} \quad (2.28)$$

Es gilt also  $a(\omega, \pi) = \alpha(\omega \otimes \pi)$  für alle  $\omega \in \Omega$  und  $\pi \in \Pi$ .

**Bemerkung 2.2.25.** Es seien  $\Omega$  und  $\Pi$  zwei  $\mathbb{Z}$ -graduierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume.

(i) In [JS06, Lemma VII.10.2.] wird gezeigt, dass das Tensorprodukt bis auf Isomorphie durch die universelle Eigenschaft (2.28) eindeutig bestimmt ist und dessen Existenz wird in [JS06, Satz VII.10.3.] nachgewiesen.

(ii) Laut [JS06, Satz VII.10.7.] erhalten wir für  $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Omega = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Omega^i$  und  $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \Pi = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \Pi^j$  einen Isomorphismus:

$$\Omega \otimes \Pi \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i+j=k} (\Omega^i \otimes \Pi^j), \quad (\omega \otimes \pi) \mapsto (\omega_i \otimes \pi_j)_{i+j=k}$$

(iii) Falls  $(\Omega, \cdot)$  und  $(\Pi, \circ)$  graduierte Algebren sind, dann wird mit

$$(\omega_1 \otimes \pi_1) \wedge (\omega_2 \otimes \pi_2) := (-1)^{|\omega_2| \cdot |\pi_1|} (\omega_1 \cdot \omega_2) \otimes (\pi_1 \circ \pi_2) \quad (2.29)$$

$(\Omega \otimes \Pi, \wedge)$  zu einer graduierten Algebra. Sie ist assoziativ resp. graduiert kommutativ, falls es  $(\Omega, \cdot)$  und  $(\Pi, \circ)$  sind. Im Falle der Existenz von Einselementen  $\mathbf{1}^\Omega \in \Omega^0$  und  $\mathbf{1}^\Pi \in \Pi^0$  liefert  $\mathbf{1} := \mathbf{1}^\Omega \otimes \mathbf{1}^\Pi \in \Omega^0 \otimes \Pi^0 \cong (\Omega \otimes \Pi)^0$  ein Einselement von  $\Omega \otimes \Pi$ .

(iv) Für lineare Abbildungen  $\mathbb{Z}$ -graduierter Algebren  $b : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  vom Grad  $k$  und  $c : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$  vom Grad  $l$  gibt es genau eine Abbildung  $b \otimes c : \Omega_1 \otimes \Pi_1 \rightarrow \Omega_2 \otimes \Pi_2$  mit  $(b \otimes c)(\omega \otimes \pi) = b(\omega) \otimes c(\pi)$  für alle  $\omega \in \Omega_1$  und  $\pi \in \Pi_1$ , denn die Abbildung  $\Omega_1 \times \Pi_1 \rightarrow \Omega_2 \otimes \Pi_2$ ,  $(\omega, \pi) \mapsto b(\omega) \otimes c(\pi)$  ist bilinear, also gilt die Behauptung nach (2.28). Der Grad der Abbildung  $b \otimes c$  ist  $k + l$ , denn für  $\omega \otimes \pi \in \Omega_1^i \otimes \Pi_1^j \subseteq (\Omega \otimes \Pi)^{i+j}$  ist  $b(\omega) \otimes c(\pi) \in \Omega_2^{i+k} \otimes \Pi_2^{j+l} \in (\Omega \otimes \Pi)^{(i+j)+(k+l)}$ .

(v) Wir betrachten die Endomorphismen auf  $\Omega$  und  $\Pi$  aus Definition 2.2.4. Mit der Multiplikation aus (iii) bezüglich der Verknüpfungen können wir  $\text{End}^*(\Omega) \otimes \text{End}^*(\Pi)$  als assoziative, graduierte Teilalgebra von  $\text{End}^*(\Omega \otimes \Pi)$  auffassen. Dies wird in [GS99, Paragraf 2.2, Seite 16] nachgerechnet.

**Lemma 2.2.26.** *Das Tensorprodukt zweier  $S^1$ -Stern Algebren ist wieder eine  $S^1$ -Stern Algebra. Falls eine Bedingung (Z) erfüllt, dann gilt dies auch für das Tensorprodukt.*

*Beweis.* Es seien  $\Omega$  und  $\Pi$  zwei  $S^1$ -Stern Algebren. Nach Bemerkung 2.2.25 (iii) ist deren Tensorprodukt  $\Omega \otimes \Pi$  eine assoziative, graduiert kommutative Algebra mit Einselement.

Für jedes  $z \in S^1$  sind  $\rho_z^\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$  und  $\rho_z^\Pi : \Pi \rightarrow \Pi$  lineare Abbildungen vom Grad 0, also gibt es nach Bemerkung 2.2.25 (iv) für jedes  $z \in S^1$  eine eindeutige Abbildung  $\rho_z : \Omega \otimes \Pi \rightarrow \Omega \otimes \Pi$ ,  $\omega \otimes \pi \mapsto \rho_z^\Omega(\omega) \otimes \rho_z^\Pi(\pi)$  vom Grad 0. Diese Abbildungen liefern einen Gruppenhomomorphismus  $\rho : S^1 \rightarrow \text{Aut}^*(\Omega \otimes \Pi)$ ,  $z \mapsto \rho_z$ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} \rho_{z_1 z_2}(\omega \otimes \pi) &= \rho_{z_1 z_2}^\Omega(\omega) \otimes \rho_{z_1 z_2}^\Pi(\pi) = \\ &= \rho_{z_1}^\Omega(\rho_{z_2}^\Omega(\omega)) \otimes \rho_{z_1}^\Pi(\rho_{z_2}^\Pi(\pi)) = \\ &= \rho_{z_1}(\rho_{z_2}^\Omega(\omega) \otimes \rho_{z_2}^\Pi(\pi)) = \rho_{z_1}(\rho_{z_2}(\omega \otimes \pi)) \end{aligned}$$

Damit folgt  $\rho_z \circ \rho_{z^{-1}} = \rho_e = \rho_{z^{-1}} \circ \rho_z$  und  $\rho_e(\omega \otimes \pi) = \rho_e^\Omega(\omega) \otimes \rho_e^\Pi(\pi) = \text{id}_\Omega(\omega) \otimes \text{id}_\Pi(\pi) = \text{id}_{\Omega \otimes \Pi}(\omega \otimes \pi)$ , wobei die letzte Umformung nach Bemerkung 2.2.25 (iv) gilt.

Für  $\tilde{D} \in \tilde{s}_k$  definieren wir auf den homogenen Elementen  $\omega_i \otimes \pi_j \in \Omega^i \otimes \Pi^j \subseteq (\Omega \otimes \Pi)^{i+j}$ , siehe Bemerkung 2.2.25 (ii):

$$D^{\Omega \otimes \Pi}(\omega_i \otimes \pi_j) := D^\Omega(\omega_i) \otimes \pi_j + (-1)^{ki} \omega_i \otimes D^\Pi(\pi_j) \quad (2.30)$$

Damit wird  $D := D^{\Omega \otimes \Pi}$  zu einer Derivation bezüglich der von  $\Omega$  und  $\Pi$  am Tensorprodukt induzierten Multiplikation, siehe Bemerkung 2.2.25 (iii), erfüllt also:

$$D((\omega_i \otimes \pi_j) \wedge (\omega_m \otimes \pi_n)) = D(\omega_i \otimes \pi_j) \wedge (\omega_m \otimes \pi_n) + (-1)^{k(i+j)} (\omega_i \otimes \pi_j) \wedge D(\omega_m \otimes \pi_n)$$

Um dies zu zeigen werden lediglich die Definitionen (2.29) und (2.30) sowie die Derivationseigenschaft (2.13) von  $D^\Omega$  und  $D^\Pi$  benötigt. Dies liefert also eine Wirkung der Lie Superalgebra  $\tilde{s}$  der  $S^1$  auf dem Tensorprodukt.

Da das Tensorprodukt eine bilineare Abbildung ist und  $\Omega$  sowie  $\Pi$  jeweils (V1) erfüllen, folgt für alle  $v \in \mathfrak{s}$  und  $\omega_i \otimes \pi_j \in \Omega^i \otimes \Pi^j$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \left( \rho_{\exp_{S^1}(tv)}(\omega_i \otimes \pi_j) \right) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \left( \rho_{\exp_{S^1}(tv)}^\Omega \omega_i \otimes \rho_{\exp_{S^1}(tv)}^\Pi \pi_j \right) \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left( \rho_{\exp_{S^1}(tv)}^\Omega \omega_i \right) \right|_{t=0} \otimes \pi_j + \omega_i \otimes \left. \frac{d}{dt} \left( \rho_{\exp_{S^1}(tv)}^\Pi \pi_j \right) \right|_{t=0} \\ &= L_v^\Omega \omega_i \otimes \pi_j + \omega_i \otimes L_v^\Pi \pi_j \\ &= L_v^\Omega \omega_i \otimes \pi_j + (-1)^{0 \cdot i} \omega_i \otimes L_v^\Pi \pi_j \stackrel{(2.30)}{=} L_v^{\Omega \otimes \Pi}(\omega_i \otimes \pi_j) \end{aligned}$$

und somit gilt (V1) für  $\Omega \otimes \Pi$ . Aus der Linearität von  $\rho_z$  für alle  $z \in S^1$  und weil  $\Omega$  sowie  $\Pi$  jeweils (V2) erfüllen, folgt für alle  $z \in S^1$ ,  $\tilde{D} \in \tilde{\mathfrak{s}}$  sowie  $\omega_i \otimes \pi_j \in \Omega^i \otimes \Pi^j$

$$\begin{aligned} (D \circ \rho_z)(\omega_i \otimes \pi_j) &= D(\rho_z^\Omega(\omega_i) \otimes \rho_z^\Pi(\pi_j)) \stackrel{(2.30)}{=} \\ &= D^\Omega(\rho_z^\Omega(\omega_i)) \otimes \rho_z^\Pi(\pi_j) + (-1)^{ki} \rho_z^\Omega(\omega_i) \otimes D^\Pi(\rho_z^\Pi(\pi_j)) \stackrel{(V2)}{=} \\ &= (\rho_z^\Omega(D^\Omega(\omega_i))) \otimes \rho_z^\Pi(\pi_j) + (-1)^{ki} \rho_z^\Omega(\omega_i) \otimes (\rho_z^\Pi(D^\Pi(\pi_j))) = \\ &= \rho_z(D^\Omega(\omega_i) \otimes \pi_j) + (-1)^{ki} \rho_z(\omega_i \otimes (D^\Pi(\pi_j))) = \\ &= \rho_z \left( (D^\Omega(\omega_i) \otimes \pi_j) + (-1)^{ki} \omega_i \otimes D^\Pi(\pi_j) \right) = (\rho_z \circ D)(\omega_i \otimes \pi_j) \end{aligned}$$

und damit gilt (V2) für  $\Omega \otimes \Pi$ . Insgesamt haben wir also gezeigt, dass das Tensorprodukt zweier  $S^1$ -Stern Algebren wieder eine ist und es bleibt zu zeigen, dass es Bedingung (Z) erfüllt, sofern dies für  $\Omega$  oder  $\Pi$  gilt.

Es erfülle  $\Pi$  Bedingung (Z), i.e. es existiert ein  $\theta \in \Pi^1$  mit  $\iota^\Pi(\theta) = 1$  und  $L^\Pi(\theta) = 0$ . Wir behaupten, dass  $\mathbf{1} \otimes \theta \in \Omega^0 \otimes \Pi^1 \subseteq (\Omega \otimes \Pi)^1$  ein Zusammenhangselement von  $\Omega \otimes \Pi$  ist. Für alle  $\omega$  gilt  $D^\Omega(\omega) = D^\Omega(\mathbf{1} \cdot \omega) = D^\Omega(\mathbf{1}) \cdot \omega + \mathbf{1} \cdot D^\Omega(\omega) = D^\Omega(\mathbf{1}) \cdot \omega + D^\Omega(\omega)$ , also folgt  $D(\mathbf{1}) = 0$  für alle  $\tilde{D} \in \tilde{\mathfrak{s}}$ . Damit folgen die beiden Identitäten:

$$\begin{aligned} \iota(\mathbf{1} \otimes \theta) &= \iota^\Omega(\mathbf{1}) \otimes \theta + \mathbf{1} \otimes \iota^\Pi(\theta) = \iota^\Pi(\theta) = 1 \\ L(\mathbf{1} \otimes \theta) &= L^\Omega(\mathbf{1}) \otimes \theta + \mathbf{1} \otimes L^\Pi(\theta) = L^\Pi(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Also ist dies ein Zusammenhangselement, i.e.  $\Omega \otimes \Pi$  erfüllt Bedingung (Z). Ähnlich lässt sich dies zeigen, falls  $\Omega$  Bedingung (Z) erfüllt.  $\square$

**Definition 2.2.27** ( $S^1$ -äquivariante de Rham Kohomologie). Es seien  $\Lambda$  eine azyklische  $S^1$ -Stern Algebra, die Bedingung (Z) erfülle und  $\Omega$  eine beliebige  $S^1$ -Stern Algebra. Mit  $H_{S^1}^*(\Omega) := H_{\text{bas}}^*(\Omega \otimes \Lambda)$  bezeichnen wir die  $S^1$  äquivariante Kohomologie von  $\Omega$ . Für eine glatte  $S^1$ -Mannigfaltigkeit  $M$  nennen wir

$$H_{S^1}^*(\Omega^*(M)) = H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda) = H^*((\Omega^*(M) \otimes \Lambda)_{\text{bas}})$$

die  $S^1$ -äquivariante de Rham Kohomologie von  $M$ .

**Bemerkung 2.2.28.** Wie in Paragraf 2.1 müssen wir noch zeigen, dass azyklische  $S^1$ -Stern Algebren existieren, die Bedingung (Z) erfüllen, dass Definition 2.2.27 unabhängig von der Wahl der azyklischen  $S^1$ -Stern Algebren und eine Verallgemeinerung der Definition 1.2.23 ist. Außerdem wollen wir zeigen, dass dieser hier eingeführte Begriff für kompakte, glatte Mannigfaltigkeiten mit Definition 2.1.1 aus dem vorigen Paragrafen bis auf natürliche Isomorphie übereinstimmt. Mit diesen Aufgaben werden wir uns im nächsten Kapitel dieser Arbeit beschäftigen.



### 3 Äquivariante Version des de Rham Theorems

Im letzten Kapitel dieser Arbeit soll die folgende äquivariante Version des de Rham Theorems bewiesen werden:

**Theorem 3.0.1.** *Es sei  $M$  eine kompakte, glatte  $S^1$ -Mannigfaltigkeit, dann stimmt die  $S^1$ -äquivariante de Rham Kohomologie von  $M$  mit der singulären  $S^1$ -äquivariante Kohomologie von  $M$  überein, i.e. es existiert ein natürlicher Isomorphismus:*

$$H_{S^1}^*(\Omega^*(M)) \cong H_{S^1}^*(M) \tag{3.1}$$

Für die singuläre  $S^1$ -äquivariante Kohomologie von  $M$  benötigen wir einen kontrahierbaren Raum  $F$  mit einer freien  $S^1$ -Wirkung und parakompaktem Orbitraum  $F/S^1$  und für die  $S^1$ -äquivariante de Rham Kohomologie von  $M$  eine azyklische  $S^1$ -Stern Algebra  $\Lambda$ , welche Bedingung (Z) erfüllt. Wir werden im ersten Paragraphen  $F$  und  $\Lambda$  aus den Sphären  $S^{2k+1} \subseteq \mathbb{C}^k$  ungerader Dimension derart konstruieren, dass sie in einer Beziehung zueinander stehen, die es uns erlauben wird, deren Kohomologien zu vergleichen und zeigen damit insbesondere, dass azyklische  $S^1$ -Stern Algebren mit Bedingung (Z) existieren.

Im zweiten Paragraphen werden wir zeigen, dass es den oben erwähnten natürlichen Isomorphismus zwischen den beiden Modellen der äquivarianten Kohomologie gibt. Ein zentrales Resultat mit dem wir dessen Existenz in Bemerkung 3.2.5 verifizieren, beweisen wir in Korollar 3.2.10 am Ende dieser Arbeit. Dieses liefert in Korollar 3.2.11 insbesondere die Unabhängigkeit der Definition 2.2.27 von der gewählten azyklischen  $S^1$ -Stern Algebra und zeigt in Korollar 3.2.12, dass Definition 2.2.27 eine Verallgemeinerung von Definition 2.1.1 ist.

#### 3.1 Limiten

Mit  $\mathfrak{K}$  bezeichnen wir in diesem Paragraphen die Kategorie topologischer Räume mit stetigen Abbildungen resp. die Kategorie von Vektorräumen mit linearen Abbildungen.

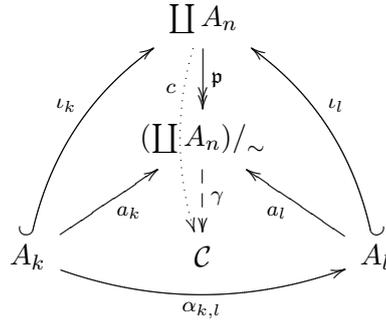
**Definition 3.1.1** (Direkter Limes). Für eine gerichtete<sup>18</sup> Menge  $I$  seien  $A_k$  mit  $k \in I$  eine Familie von Objekten einer Kategorie  $\mathfrak{K}$  und  $\alpha_{k,l} : A_k \rightarrow A_l$  für  $k \leq l$  Morphismen,

---

<sup>18</sup>Eine Menge  $I$  heißt *gerichtete Menge*, wenn es eine Relation  $\leq$  gibt, die reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und nach oben filtrierend ist. Eine Relation  $\leq$  auf einer Menge  $I$  heißt *reflexiv*, falls  $k \leq k$  für alle  $k \in I$  gilt, *transitiv*, falls aus  $k \leq l$  und  $l \leq m$  stets  $k \leq m$  folgt, *antisymmetrisch*, falls aus  $k \leq l$  und  $l \leq k$  stets  $k = l$  folgt, und (nach oben) *filtrierend*, falls für je zwei  $k, l \in I$  ein  $m \in I$  existiert, für das  $k \leq m$  und  $l \leq m$  gilt.



$a_k := \mathbf{p} \circ \iota_k = \mathbf{p}|_{A_k} : A_k \rightarrow \mathcal{A}$  die universelle Eigenschaft (3.2) erfüllt.



*Beweis.* Nach der universellen Eigenschaft des Koproduktes (3.3) ist  $\mathbf{p}$  der eindeutige Morphismus, der  $a_k = \mathbf{p} \circ \iota_k = \mathbf{p}|_{A_k}$  erfüllt. Es gilt dann  $a_k(x) = a_l \circ \alpha_{k,l}(x)$  für jedes  $x \in A_k$  und alle  $l \in I$  mit  $k \leq l$ , denn  $x \sim \alpha_{k,l}(x) =: y \in A_l$  mit  $m = l$  und damit  $a_k(x) = \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(y) = a_l(y) = a_l(\alpha_{k,l}(x))$ .

Für jedes Objekt  $\mathcal{C} \in \mathfrak{K}$  und Morphismen  $c_k : A_k \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $c_k = c_l \circ \alpha_{k,l}$  für alle  $k \leq l$  gibt es wieder nach (3.3) genau einen Morphismus  $c : \coprod A_n \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $c_k = c \circ \iota_k = c|_{A_k}$ . Dieser faktorisiert zu einem Morphismus  $\tilde{c} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  für den  $c = \tilde{c} \circ \mathbf{p}$  gilt, denn für alle  $x \sim y$  gibt es ein  $m \in I$  mit  $k, l \leq m$ , sodass  $c(x) = c_k(x) = c_m(\alpha_{k,m}(x)) = c_m(\alpha_{l,m}(y)) = c_l(y) = c(y)$  ist. Außerdem erfüllt er  $c_k = c \circ \iota_k = \tilde{c} \circ \mathbf{p} \circ \iota_k = \tilde{c} \circ a_k$ . Sei nun  $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  ein weiterer Morphismus, der  $\gamma \circ a_k = c_k$  erfüllt, dann folgt aus  $c_k = \gamma \circ a_k = \gamma \circ \mathbf{p} \circ \iota_k$  wegen der Eindeutigkeit von  $c$ , dass  $\gamma \circ \mathbf{p} = c = \tilde{c} \circ \mathbf{p}$  und damit, weil  $\mathbf{p}$  surjektiv ist,  $\gamma = \tilde{c}$  gelten muss.  $\square$

**Beispiel 3.1.3.** Es sei  $I$  eine beliebige Indexmenge.

(i) Das Koprodukt topologischer Räume  $X_k$  mit  $k \in I$  ist die disjunkte Vereinigung  $\sqcup X_n := \bigcup_{n \in I} \{n\} \times X_n$  zusammen mit den Inklusionen  $\iota_k : X_k \hookrightarrow \sqcup X_n$ ,  $x \mapsto (k, x)$  und trägt die finale Topologie bezüglich der  $\iota_k$ , i.e. die feinste Topologie, sodass noch alle  $\iota_k$  stetig sind. Eine Funktion  $f : \sqcup X_n \rightarrow Y$  ist also genau dann stetig, wenn es alle  $f \circ \iota_k$  sind. Damit die wie in Bemerkung 3.1.2 konstruierte Menge  $\mathcal{X}$  mit Abbildungen  $f_k : A_k \rightarrow \mathcal{X}$  eines direkt gerichteten Systems  $\{X_k, f_{k,l}\}$  der Kategorie topologischer Räume zu einem topologischen Raum mit stetigen Abbildungen wird, stattdessen wir ihn mit der finalen Topologie bezüglich der  $f_k$  aus. Dies ist äquivalent zur Forderung, dass  $\mathcal{X}$  die Quotiententopologie, i.e. die finale Topologie bezüglich  $\mathbf{p}$  tragen soll, denn  $f_k = \mathbf{p} \circ \iota_k$ . Eine Funktion  $\gamma : \mathcal{X} \rightarrow Y$  ist somit genau dann stetig, wenn es alle „Einschränkungen“  $\gamma \circ f_k : A_k \rightarrow Y$  sind. Der direkte Limes topologischer Räume existiert also immer.

(ii) Das Koprodukt von Vektorräumen  $V_k$  mit  $k \in I$  entspricht der direkten Summe  $\bigoplus V_n = \{(x_n)_{n \in I} : x_n \in V_n, \text{ fast alle } x_n = 0\}$  zusammen mit den natürlichen Inklusionen  $\iota_k : V_k \hookrightarrow \bigoplus V_n$ . Die Vektorräume  $\mathbb{C}^k$  zusammen mit den Inklusionen  $\text{inkl}_{k,l} : \mathbb{C}^k \hookrightarrow \mathbb{C}^l$ ,  $(z_1, z_2, \dots, z_k) \mapsto (z_1, z_2, \dots, z_k, 0, 0, \dots, 0)$  für  $k \leq l \in \mathbb{N}$  bilden ein direkt gerichtetes System und wenn wir die  $\mathbb{C}^k$  mit den Teilräumen  $\mathbb{C}^k \times \mathfrak{o} \subseteq \mathbb{C}^l$  identifizieren, erhalten wir mit (3.4)  $\varinjlim \mathbb{C}^n = \bigcup \mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, \dots) : z_n \in \mathbb{C}^n \text{ fast alle } z_k = 0\} =: \mathbb{C}^\infty$  mit natürlichen Inklusionen  $i_k : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ ,  $(z_1, z_2, \dots, z_k) \mapsto (z_1, z_2, \dots, z_k, 0, 0, \dots)$ .



eindeutigen Morphismus  $f : \mathcal{F} \rightarrow \prod B_n$ , sodass  $f_m = \pi_m \circ f$  für alle  $m \in I$  gilt und somit für alle  $l, m \in I$  folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc}
 & \prod B_n & \\
 \pi_l \swarrow & \uparrow & \searrow \pi_m \\
 B_l & \exists! f & B_m \\
 f_l \swarrow & \uparrow & \searrow f_m \\
 & \mathcal{F} & 
 \end{array} \tag{3.6}$$

Für jedes feste  $k \in I$  gibt es für  $\mathcal{F} = B_m$ ,  $f_m = \text{id}_{B_m}$  und  $f_l$  beliebig für alle  $l \in I$  genau eine Abbildung  $f : B_m \rightarrow \prod B_n$  mit  $\text{id}_{B_m} = \pi_m \circ f$ , also ist  $\pi_m$  surjektiv. Mengentheoretisch wird das Produkt beschrieben durch  $\prod B_n := \{(x_n)_{n \in I} : x_n \in B_n\}$  zusammen mit Projektionen  $\pi_m : \prod B_n \rightarrow B_m$ ,  $(x_n)_{n \in I} \mapsto x_m$ .

**Bemerkung 3.1.6.** Wir können den inversen Limes eines invers gerichteten Systemes  $\{B_m, \beta_{m,l}\}$  als Teilmenge des Produktes beschreiben:

$$\varprojlim B_n = \left\{ (x_n)_{n \in I} \in \prod B_n : \beta_{m,l}(x_m) = x_l \ \forall m \geq l \right\} =: \widetilde{\prod} B_n \tag{3.7}$$

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{B}$  obige Teilmenge des Produktes  $\prod B_n$  und mit  $i$  die natürliche Inklusion. Es gilt nun zu zeigen, dass  $\mathcal{B}$  zusammen mit den Morphismen  $b_m := \pi_m \circ i = \pi_m|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow B_m$  die universelle Eigenschaft (3.5) erfüllt:

$$\begin{array}{ccc}
 & \prod B_n & \\
 \pi_l \swarrow & \uparrow i & \searrow \pi_m \\
 B_l & \widetilde{\prod} B_n & B_m \\
 b_l \swarrow & \uparrow \delta & \searrow b_m \\
 & \mathcal{D} & \\
 & \beta_{m,l} & 
 \end{array}$$

*Beweis.* Nach der universellen Eigenschaft des Produktes (3.6) ist  $i$  der eindeutige Morphismus, der  $b_m = \pi_m \circ i = \pi_m|_{\mathcal{B}}$  erfüllt. Es gilt dann  $b_l = \beta_{m,l} \circ b_m$  für alle  $l \leq m$ , denn für jedes  $x := (x_n)_{n \in I} \in \mathcal{B}$  gilt  $b_l(x) = \pi_l(x) = x_l = \beta_{m,l}(x_m) = \pi_m(\beta_{m,l}(x_m)) = b_m(\beta_{m,l}(x))$ .

Für jedes Objekt  $\mathcal{D} \in \mathfrak{A}$  und Morphismen  $d_m : \mathcal{D} \rightarrow B_m$  mit  $d_l = \beta_{m,l} \circ d_m$  für alle  $l \leq m$  gibt es wieder nach (3.3) genau einen Morphismus  $d : \mathcal{D} \rightarrow \prod B_n$  mit  $d_m = \pi_m \circ d$ . Dessen Bild liegt schon ganz in  $\mathcal{B}$ , denn bezeichnen wir mit  $d(x) := (y_n)_{n \in I}$  das Bild eines  $x \in \mathcal{D}$ , dann gilt  $\beta_{m,l}(y_m) = \beta_{m,l}(\pi_m(d(x))) = \beta_{m,l}(d_m(x)) = d_l(x) = \pi_l(d(x)) = y_l$  für alle  $l \leq m$ . Daraus folgt auch die Identität  $d_m = \pi_m \circ d = \pi_m|_{\mathcal{B}} \circ d = b_m \circ d$ . Sei nun  $\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  ein weiterer Morphismus, der  $d_m = b_m \circ \delta$  erfüllt, dann gilt  $d_m = b_m \circ \delta = \pi_m|_{\mathcal{B}} \circ \delta = \pi_m \circ i \circ \delta$ . Aus der Eindeutigkeit von  $d$  folgt also  $i \circ \delta = d$  und weil das Bild von  $d$  schon in  $\mathcal{B}$  liegt  $\delta = d$ .  $\square$

**Beispiel 3.1.7. (i)** Das Produkt  $\prod Y_n$  topologischer Räume  $Y_m$  mit  $m \in I$  für eine beliebige Indexmenge  $I$  trägt die initiale Topologie bezüglich der natürlichen Projektionen  $\pi_m$ , i.e. die grösste Topologie, sodass noch alle  $\pi_m$  stetig sind. Damit für ein invers gerichtetes Systems  $\{Y_m, g_{m,l}\}$  topologischer Räume die wie in Bemerkung 3.1.6 konstruierte Teilmenge  $\mathcal{Y}$  des Produktes zusammen mit den natürlichen Projektionen  $p_m := \pi_m|_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \rightarrow Y_m$  zu einem topologischen Raum wird, stattdessen wir sie mit der initialen Topologie der  $p_m$  oder äquivalent mit der Spurtopologie des Produktes aus. In [Kr99, Seite 17f.] wird gezeigt, dass für diese Topologie gilt, dass eine Funktion  $\delta : X \rightarrow \mathcal{Y}$  genau dann stetig ist, wenn es alle Komponentenfunktionen  $p_m \circ \delta : X \rightarrow Y_m$  sind. Der inverse Limes topologischer Räume existiert also immer.

**(ii)** Das Produkt  $\prod V_n$  von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen  $V_m$  mit  $m \in I$  für eine beliebige Indexmenge  $I$  ist auf natürliche Weise wieder ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, indem alle Operationen komponentenweise erfolgen, i.e.  $(v_n)_{n \in I} + (u_n)_{n \in I} = (v_n + u_n)_{n \in I}$  und  $\kappa(v_n)_{n \in I} = (\kappa v_n)_{n \in I}$ . Für ein invers gerichtetes System  $\{V_m, \varphi_{m,l}\}$  ist die wie in Bemerkung 3.1.6 konstruierte Teilmenge  $\mathcal{V}$  des Produktes ein Teilvektorraum, da aus der Linearität der Abbildungen  $\varphi_{m,l}$  die Teilraumeigenschaften  $v + w \in \mathcal{V}$  und  $\kappa v \in \mathcal{V}$  für alle  $v, w \in \mathcal{V}$  und  $\kappa \in \mathbb{K}$  folgen. Der inverse Limes von Vektorräumen existiert also immer.

**(iii)** Für zwei invers gerichtete Systeme von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen  $\{V_m, \nu_{m,l}\}_{m,l \in \mathbb{Z}}$  und  $\{W_m, \omega_{m,l}\}_{m,l \in \mathbb{Z}}$  seien  $\mathcal{V} = \varprojlim V_m$  und  $\mathcal{W} = \varprojlim W_m$  zusammen mit den natürlichen Projektionen  $v_m : \mathcal{V} \rightarrow V_m$  und  $w_m : \mathcal{W} \rightarrow W_m$ . Für ein  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n \mapsto n - \kappa$  seien weiters  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen  $\Phi_m : V_{\phi(m)} \rightarrow W_m$  vom Grad  $\kappa$  für alle  $m \in \mathbb{Z}$  gegeben. Falls die  $\Phi_m$  mit den  $\nu_{m,l}$  und den  $\omega_{m,l}$  für alle passenden  $l \leq m$  kommutieren, dann induzieren sie eine eindeutige  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ , sodass folgendes Diagramm für alle  $k \leq l \leq m$  kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longleftarrow & V_{\phi(k)} & \xleftarrow{\nu_{\phi(l), \phi(k)}} & V_{\phi(l)} & \xleftarrow{\nu_{\phi(m), \phi(l)}} & V_{\phi(m)} & \xleftarrow{v_{\phi(m)}} & \mathcal{V} = \varprojlim V_n & (3.8) \\
& & \downarrow \Phi_k & \# & \downarrow \Phi_l & \# & \downarrow \Phi_m & \# & \downarrow \exists! \Phi \\
\cdots & \longleftarrow & W_k & \xleftarrow{\omega_{l,k}} & W_l & \xleftarrow{\omega_{m,l}} & W_m & \xleftarrow{w_m} & \mathcal{W} = \varprojlim W_n
\end{array}$$

*Beweis.* Ein  $x := (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \prod V_n$  ist nach (3.7) genau dann in  $\mathcal{V}$ , wenn  $\nu_{m,l}(x_l) = x_l$  für alle  $l \leq m$  gilt. Wir definieren

$$\Phi(x) := (\Phi_n(x_{\phi(n)}))_{n \in \mathbb{Z}} \in \prod W_n \quad (3.9)$$

Es gilt  $\Phi(x) \in \mathcal{W}$ , da  $\omega_{m,l}(\Phi_m(x_{\phi(m)})) = \Phi_l(\nu_{\phi(m), \phi(l)}(x_{\phi(m)})) = \Phi_l(x_{\phi(l)})$  für alle  $l \leq m$  ist. Außerdem macht  $\Phi$  das Diagramm (3.8) kommutativ, denn  $\Phi_m(\nu_{\phi(m)}(x)) = \Phi_m(x_{\phi(m)}) = w_m(\Phi(x))$ . Dies impliziert  $\omega_{m,l} \circ (\Phi_m \circ \nu_{\phi(m)}) = \Phi_l \circ \nu_{\phi(m), \phi(l)} \circ \nu_{\phi(m)} = \Phi_l \circ \nu_{\phi(l)}$  gilt und aus der universellen Eigenschaft (3.5) von  $\mathcal{W}$  schließen wir nun die Eindeutigkeit von  $\Phi$ . Die  $\mathbb{K}$ -Linearität von  $\Phi$  folgt wegen (3.9) aus jener der  $\Phi_m$ .  $\square$

**(iv)** Zu (ii) ist noch zu beachten, dass  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  nicht a priori stetig sind, da die direkten Limes  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  im Allgemeinen unendlichdimensional sein können und lineare Abbildung auf unendlichdimensionalen Vektorräumen nicht notwendigerweise stetig sein müssen. Stattdessen wir diese Vektorräume jedoch wie in (i) mit der

Initialtopologie der Projektionen  $w_m$  und  $v_m$  aus, dann sind alle  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen  $\Phi$ , die wie in (3.9) konstruiert werden, genau dann stetig, wenn es alle  $\Phi_m$  sind. Denn nach (i) ist  $\Phi$  genau dann stetig, wenn es alle  $w_m \circ \Phi = \Phi_m \circ v_{\phi(m)}$  sind.

(v) Für ein invers gerichtetes System  $\{B_m, \beta_{m,l}\}_{m,l \in I}$  einer Kategorie  $\mathfrak{K}$  mit inversem Limes  $\mathcal{B}$  und natürlichen Projektionen  $b_m$  folgt aus der Injektivität aller  $\beta_{m,l}$  die Injektivität aller  $b_m$  und falls  $I$  abzählbar ist, folgt aus der Surjektivität aller  $\beta_{m,l}$  die Surjektivität aller  $b_m$ . Dies wird in [ES52, Theorem VIII.3.4.] bewiesen.

In [ES52, Theorem VIII.3.6.] wird weiters gezeigt, dass der inverse Limes eines invers gerichteten Systems nichtleerer resp. kompakter Räume selbst nichtleer resp. kompakt ist und falls die Objekte hausdorffsch sind, ist der inverse Limes im Allgemeinen zwar nicht wieder hausdorffsch, aber zumindest abgeschlossen im Produkt.

**Bemerkung 3.1.8.** (i) Die eingeführten Begriffe in den Definitionen 3.1.1 und 3.1.5 sind durch ihre universellen Eigenschaften eindeutig bestimmt. Dies lässt sich in allen Fällen auf die gleiche Art und Weise beweisen. Hier soll nur kurz die Beweisidee angeführt werden.

Angenommen zwei Objekte  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathfrak{K}$  einer Kategorie erfüllen beide dieselbe universelle Eigenschaft, dann gibt es jeweils eine eindeutige Abbildung  $\chi_i : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{X}_j$  vom einen Objekt in das andere. Die zwei Verknüpfungen dieser Abbildungen  $\chi_i \circ \chi_j : \mathcal{X}_j \rightarrow \mathcal{X}_j$  für  $i, j \in \{1, 2\}$  mit  $i \neq j$  sind Endomorphismen, welche dieselben Verträglichkeiten wie die Identität auf dem jeweiligen Objekt besitzen. Wieder aus der universellen Eigenschaft folgt, dass die Verknüpfungen schon mit den Identitäten auf den jeweiligen Objekten übereinstimmen müssen, also ist die Abbildung  $\chi_1 : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$  ein Isomorphismus.

(ii) Was wir in Bemerkung 3.1.4 (i) für den direkten Limes eines direkt gerichteten Systems erwähnten, gilt auch für den inversen Limes eines invers gerichteten Systems, dass er, sofern er existiert, mit dem inversen Limes eines jeden Teilsystems übereinstimmt, siehe auch Fußnote 19 auf Seite 58. Dies wird in [ES52, Korollar 3.16.] gezeigt. Insbesondere stimmen zwei Elemente  $(x_n)_{n \in I}$  und  $(y_n)_{n \in I}$  genau dann überein, wenn es eine kofiltrierende Menge  $I' \subseteq I$  gibt, sodass  $(x_k)_{k \in I'} = (y_k)_{k \in I'}$  gilt.

(iii) In [Kr08, Bemerkung 3.40] wird gezeigt, dass direkte Limiten mit endlichen Produkten und inverse Limiten mit endlichen Koproducten vertauschen. Wir werden später in der Kategorie topologischer Räume  $\varinjlim(X_n \times Y_n) = \varinjlim X_n \times \varinjlim Y_n$  und in der Kategorie von Vektorräumen  $\varinjlim(V_n \oplus W_n) = \varinjlim V_n \oplus \varinjlim W_n$  verwenden.

**Proposition 3.1.9.** *Der direkte Limes der Sphären ungerader Dimension  $S^{2k-1} \subseteq \mathbb{C}^k$  bezüglich der natürlichen Inklusionen  $i_{k,l} : S^{2k-1} \hookrightarrow S^{2l-1}$*

$$\varinjlim S^{2k-1} = \{z \in \mathbb{C}^\infty : \|z\| = 1\} =: S^\infty \quad (3.10)$$

*zusammen mit der finalen Topologie der Inklusionen  $i_k : S^{2k-1} \hookrightarrow S^\infty$  liefert ein universelles  $S^1$ -Bündel  $(S^\infty, \pi, S^\infty/S^1, S^1)$  bezüglich der Wirkung der  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ , die von der Skalarmultiplikation des  $\mathbb{C}$ -Vektorraumes  $\mathbb{C}^\infty$  induziert wird.*

*Beweis.*  $S^\infty$  ist ein freier  $S^1$ -Raum: Nach Bemerkung 3.1.4 (i) können wir, wenn wir jede Sphäre als Teilmenge aller höher dimensionalen Sphären auffassen, den direkten Limes als Vereinigung  $\bigcup S^n$  aller Sphären annehmen. Jedes Element  $z \in \bigcup S^n$  liegt also in einer Sphäre  $S^{2k-1} \subseteq \mathbb{C}^k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Mit Beispiel 3.1.3 (ii) erhalten wir also die Identität (3.10). Durch das Einschränken der Skalarmultiplikation  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$  erhalten wir eine freie Wirkung der  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  auf  $S^{2k-1} \subseteq \mathbb{C}^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq \infty$  und somit ebenfalls auf  $S^\infty$ .

$(S^\infty, \pi, S^\infty/S^1, S^1)$  ist ein universelles  $S^1$ -Bündel: Um dies zu zeigen, geben wir zuerst eine alternative Beschreibung von  $(S^\infty, \pi, S^\infty/S^1, S^1)$  an. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  liefert die natürliche Inklusion  $S^{2k-1} \hookrightarrow \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$  einen Homöomorphismus zwischen dem Orbitraum  $S^{2k-1}/S^1$  und dem komplex projektiven Raum  $\mathbb{C}P^{k-1}$ , wobei die inverse Abbildung von  $\nu_k : \mathbb{C}^k \setminus \{0\} \rightarrow S^{2k-1}$ ,  $z \mapsto |z|^{-1} \cdot z$  induziert wird.<sup>21</sup> Die Inklusionen  $i_{k,l} : S^{2k-1} \hookrightarrow S^{2l-1}$  sind klarerweise  $S^1$ -äquivariant, faktorisieren also nach Bemerkung 1.1.12 zu Inklusionen  $j_{k,l} : \mathbb{C}P^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^{l-1}$  bezüglich derer wir den direkten Limes der komplex projektiven Räume wieder als Vereinigung  $\bigcup \mathbb{C}P^n =: \mathbb{C}P^\infty$  mit zugehörigen Inklusionen  $j_k : \mathbb{C}P^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ , bezüglich derer  $\mathbb{C}P^\infty$  die initiale Topologie tragen soll, realisieren können. Da die Hopf Abbildungen  $\varphi_k : S^{2k-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{k-1}$  mit den  $j_{k,l}$  kommutieren, gibt es zu den stetigen Abbildungen  $j_k \circ \varphi_k : S^{2k-1} \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$  gemäß der universellen Eigenschaft (3.4) eine eindeutige stetige Abbildung  $\varphi : S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$  mit  $j_k \circ \varphi_k = \varphi \circ i_k$ , die also folgendes Diagramm für alle  $k \in \mathbb{N}$  kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} S^{2k-1} & \xhookrightarrow{i_k} & S^\infty \\ \varphi_k \downarrow & \# & \downarrow \varphi \\ \mathbb{C}P^{k-1} & \xhookrightarrow{j_k} & \mathbb{C}P^\infty \end{array} \quad (3.11)$$

Wir können also  $\mathbb{C}P^\infty$  als den Orbitraum von  $S^\infty$  auffassen, dessen Topologie mit der Quotiententopologie von  $\varphi$  übereinstimmt. In [Hat02, Seite 6f.] wird gezeigt, dass  $S^\infty$  und  $\mathbb{C}P^\infty$  *CW*-zerlegbar, also insbesondere parakompakt sind und da  $(S^\infty, \varphi, \mathbb{C}P^\infty, S^1)$  laut [Hu94, Paragraf 4.11] und [Hu94, Theorem 4.12.5] ein universelles  $S^1$ -Hauptfaserbündel ist, gilt gemäß Bemerkung 2.1.8 (ii), dass  $S^\infty$  kontrahierbar ist.  $\square$

**Proposition 3.1.10.** *Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  ist der inverse Limes der de Rham Komplexe  $\Omega^k(S^{2m-1})$  mit den von den Inklusionen  $i_{l,m} : S^{2l-1} \hookrightarrow S^{2m-1}$  induzierten Pullback Abbildungen  $p_{m,l}^k := i_{m,l}^* : \Omega^k(S^{2m-1}) \rightarrow \Omega^k(S^{2l-1})$  gegeben durch:*

$$\Lambda^k(S^\infty) := \{(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}} : \omega_m \in \Omega^k(S^{2m-1}), p_{m,l}(\omega_m) = \omega_l\} \quad (3.12)$$

Der Vektorraum  $\Lambda^*(S^\infty) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda^k(S^\infty)$  kann zu einer azyklischen  $S^1$ -Stern Algebra gemacht werden, die Bedingung (Z) erfüllt.

<sup>21</sup>Die komplex projektiven Räume  $\mathbb{C}P^k := \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} / \sim$  sind durch folgende Äquivalenzrelation definiert: Zwei Elemente  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  sind äquivalent  $z_1 \sim z_2$ , falls eine komplexe Zahl  $\eta \in \mathbb{C}$  existiert, für die  $\eta z_1 = z_2$  gilt. Die natürliche Projektion  $\varphi_k : S^{2k-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{k-1}$  wird auch *Hopf Abbildung* genannt. Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  ist  $\mathbb{C}P^k$  als stetiges Bild der Sphäre  $S^{2k+1}$  kompakt und wegzusammenhängend.

*Beweis.* Fassen wir die Sphären als glatte Mannigfaltigkeiten auf, dann induzieren die natürlichen Inklusionen der Sphären für  $l \leq m$  lineare Abbildungen

$$p_{m,l}^k := \iota_{l,m}^* : \Omega^k(S^{2m-1}) \twoheadrightarrow \Omega^k(S^{2l-1}), \quad (3.13)$$

die für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  ein invers gerichtetes System  $\{\Omega^k(S^{2m-1}), p_{m,l}^k\}$  von Vektorräumen liefert, die mit einer Topologie ausgestattet sein sollen. Dazu kann eine beliebige Norm gewählt werden, denn wegen der Kompaktheit der Sphären sind alle äquivalent. Gemäß Beispiel 3.1.7 existiert der inverse Limes von Vektorräumen und laut (3.7) in Bemerkung 3.1.6 besitzt er die in (3.12) beschriebene Form. Seine Projektionen bezeichnen wir mit  $p_m^k : \Lambda^k(S^\infty) \twoheadrightarrow \Omega^k(S^{2m-1})$ ,  $\omega \mapsto \omega^m$ . Versehen wir  $\Lambda^k(S^\infty)$  mit der initialen Topologie dieser Projektionen, dann folgt die Behauptung aus den Lemmata 3.1.11 bis 3.1.13.  $\square$

**Lemma 3.1.11.**  $\Lambda^k(S^\infty)$  ist eine  $S^1$ -Stern Algebra.

*Beweis.* Nach dem Beweis von Proposition 3.1.9 sind die Sphären ungerader Dimension  $S^1$ -Mannigfaltigkeiten mit freier Wirkung und nach Beispiel 2.2.11 sind ihre de Rham Komplexe  $S^1$ -Stern Algebren. Wir werden in diesem Beweis wiederholt Gebrauch von Beispiel 3.1.7 (iii) und (iv) machen, indem wir Abbildungen auf  $\Lambda^*(S^\infty)$  komponentenweise auf allen de Rham Komplexen  $\Omega^k(S^{2m-1})$  definieren werden, die dann wieder stetig und linear sind, sofern sie komponentenweise stetig, linear und für alle  $l, m \in \mathbb{N}$ ,  $l \leq m$  mit den natürlichen Projektionen  $p_{m,l}^k : \Omega^k(S^{2m-1}) \rightarrow \Omega^k(S^{2l-1})$  verträglich sind. Des weiteren sind die so erhaltenen Abbildungen eindeutig durch die Bedingung, dass sie mit den Projektionen  $p_m^k : \Lambda^k(S^\infty) \rightarrow \Omega^k(S^{2m-1})$  kommutieren sollen, bestimmt.

Zuerst definieren wir eine Multiplikation auf  $\Lambda^*(S^\infty)$

$$\Lambda^k(S^\infty) \times \Lambda^l(S^\infty) \rightarrow \Lambda^{k+l}(S^\infty), \quad (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \wedge (\nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\omega_n \wedge \nu_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

die assoziativ und graduiert kommutativ ist, da dies komponentenweise stimmt und sie mit den Projektionen verträglich ist.

Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  sowie alle  $m \in \mathbb{N}$  und  $z \in S^1$  haben wir mit (2.21) aus Beispiel 2.2.11 lineare Isomorphismen  $\rho_z^{k,m} : \Omega^k(S^{2m-1}) \rightarrow \Omega^k(S^{2m-1})$  vom Grad 0, die mit den Projektionen  $p_{m,l}^k$  verträglich sind und erhalten eindeutige lineare Abbildungen

$$\rho_z^k : \Lambda^k(S^\infty) \rightarrow \Lambda^k(S^\infty), \quad (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\rho_z^{k,n}(\omega_n))_{n \in \mathbb{N}},$$

wobei die Komponenten  $\rho_z^{k,m}$  Algebrasomorphismen sind und damit auch die  $\rho_z^k$ . Außerdem wird damit  $\rho^k : S^1 \rightarrow \text{Aut}^*(\Lambda^k(S^\infty))$ ,  $z \mapsto \rho_z^k$  zu einem Gruppenhomomorphismus, weil  $\rho_{z_1 z_2}^k = (\rho_{z_1 z_2}^{k,n})_{n \in \mathbb{N}} = (\rho_{z_1}^{k,n} \circ \rho_{z_2}^{k,n})_{n \in \mathbb{N}} = \rho_{z_1}^k \circ \rho_{z_2}^k$  für alle  $z_1, z_2 \in S^1$  gilt.

Es seien  $\mathfrak{s}$  die Lie Algebra der  $S^1$  und  $\partial \in \mathfrak{s}$  ihre Basis, dann erhalten wir wie in Bemerkung 2.2.7 (iii) für jedes  $m \in \mathbb{N}$  Derivationen  $\iota_\partial^m, L_\partial^m, d^m : \Omega^*(S^{2m-1}) \rightarrow \Omega^*(S^{2m-1})$  vom Grad  $-1, 0$  und  $1$ , die mit den Projektionen verträglich sind. Die Basis  $\tilde{\iota}, \tilde{L}, \tilde{d}$  der Lie Superalgebra  $\tilde{\mathfrak{s}}$  der  $S^1$  ordnen wir folgenden Abbildungen zu:

$$\begin{aligned} \iota : \Lambda^k(S^\infty) &\rightarrow \Lambda^{k-1}(S^\infty), & (\omega_m^k)_{m \in \mathbb{N}} &\mapsto (\iota_\partial^m(\omega_m))_{m \in \mathbb{N}} \\ L : \Lambda^k(S^\infty) &\rightarrow \Lambda^k(S^\infty), & (\omega_m^k)_{m \in \mathbb{N}} &\mapsto (L_\partial^m(\omega_m))_{m \in \mathbb{N}} \\ d : \Lambda^k(S^\infty) &\rightarrow \Lambda^{k+1}(S^\infty), & (\omega_m^k)_{m \in \mathbb{N}} &\mapsto (d(\omega_m))_{m \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Das ergibt eine Wirkung der  $\tilde{\mathfrak{s}}$  auf  $\Lambda^k(S^\infty)$  als Derivationen, wieder weil die Abbildungen komponentenweise Derivationen sind. Die Verträglichkeit (V2) folgt auch aufgrund der komponentenweisen Verträglichkeit, die wir in Beispiel 2.2.11 nachgerechnet haben. Um (V1) zu zeigen, müssen wir jedoch ein wenig anders argumentieren.

Es seien  $\omega := (\omega_m^k)_{m \in \mathbb{N}} \in \Lambda^k(S^\infty)$  und  $v \in \mathfrak{s}$ , dann haben wir für jedes  $m \in \mathbb{N}$  eine stetige, mit den Projektionen  $p_{m,l}^k$  kommutierende Abbildung:

$$g_m^k : \mathbb{R} \rightarrow \Omega^k(S^{2m-1}), \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t} \cdot (\rho_{\exp_{S^1}(tv)}^{k,m}(\omega_m) - \omega_m), & \text{falls } t \neq 0 \\ L_v^m \omega_m, & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

Gemäß der universellen Eigenschaft (3.5) des inversen Limes existiert somit genau eine stetige Abbildung  $g^k : \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^k(S^\infty)$ , für die  $p_m^k \circ g^k = g_m^k$  gilt, sie hat also die Form:

$$g^k : \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^k(S^\infty), \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t} \cdot (\rho_{\exp_{S^1}(tv)}^k(\omega) - \omega), & \text{falls } t \neq 0 \\ L_v \omega, & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

Da die Abbildung stetig in  $0 \in \mathbb{R}$  ist folgt

$$L_v \omega = g^k(0) = \lim_{t \rightarrow 0} g^k(t) = \frac{1}{t} \cdot (\rho_{\exp_{S^1}(tv)}^k(\omega) - \rho_{\exp_{S^1}(0v)}^k(\omega)) = \left. \frac{d}{dt} (\rho_{\exp_{S^1}(tv)}^k(\omega)) \right|_{t=0}$$

und damit gilt (V1). □

**Lemma 3.1.12.**  $\Lambda^*(S^\infty)$  ist azyklisch.

*Beweis.* Wir zeigen, wie in [GS99, Proposition 2.5.3], dass für jedes  $k \in \mathbb{N}$  jedes Element  $\omega := (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda^k(S^\infty)$ , welches  $d\omega = 0$  erfüllt, schon das Bild eines  $\nu \in \Lambda^{k-1}(S^\infty)$  unter  $d$  ist. Damit sind dann alle  $k$ -ten Kohomologien, für  $1 \leq k$  trivial, und somit  $\Lambda^*(S^\infty)$  azyklisch.

Es seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\omega := (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda^k(S^\infty)$  mit  $d\omega = 0$  beliebig fixiert. Nach Beispiel 1.2.18 gilt für alle  $l > \frac{k+1}{2}$ :

$$\circ = H_{\text{dR}}^k(S^{2l-1}) = H^k(\Omega^k(S^{2l-1})) \quad (3.14)$$

Das bedeutet, dass es für jedes  $l > \frac{k+1}{2}$  ein  $\tilde{\nu}_l \in \Omega^{k-1}(S^{2l-1})$  gibt, das  $d\tilde{\nu}_l = \omega_l$  erfüllt. Wir fixieren ein  $l_0 > \frac{k+1}{2}$  und definieren

$$\tilde{\nu} := (\tilde{\nu}_n)_{n \geq l_0} \in \prod_{n \geq l_0} \Omega^{k-1}(S^{2n-1}) : d\tilde{\nu}_n = \omega_n. \quad (3.15)$$

Ausgehend von  $\tilde{\nu}_{l_0}$  werden wir induktiv ein  $\nu := (\nu_m)_{m \geq l_0}$  konstruieren, das  $d\nu_m = \omega_m$  und  $p_{n,m}\nu_n = \nu_m$  für alle  $n \geq m \geq l_0$  erfüllt. Weil  $\{m \in \mathbb{N} : m \geq l_0\}$  eine kofiltrierende Menge von  $\mathbb{N}$  ist, stimmt so ein Element laut Bemerkung 3.1.8 (ii) mit genau einem Element in  $\Lambda^k(S^\infty)$  überein. Da  $d$  mit den Projektionen vertauscht, folgt dann auch für alle  $m \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq l_0 \geq m$ , dass  $d\nu_m = d(p_{n,m}\nu_n) = p_{n,m}(d\nu_n) = p_{n,m}(\omega_n) = \omega_m$  gilt und somit folgt  $d\nu = \omega$ .

Es sei  $\nu_{l_0} := \tilde{\nu}_{l_0}$ . Für ein bereits definiertes Element  $\nu_m \in \Omega^{k-1}(S^{2m-1})$  mit  $m \geq l_0$ , welches  $d\nu_m = \omega_m$  und  $p_{m,l}\nu_m = \nu_l$  für alle  $l \in \mathbb{N}$  mit  $l_0 \leq l \leq m$  erfüllt, setzen wir  $a := m < m+1 =: b$ . Das folgende Diagramm liefert eine Übersicht zur Konstruktion eines Elementes  $\nu_{m+1} \in \Omega^{k-1}(S^{2m+1})$ , welches die geforderten Eigenschaften besitzt.

$$\begin{array}{ccc}
\omega_a \in \Omega^k(S^{2a-1}) & \xleftarrow{p_{b,a}} & \Omega^k(S^{2b-1}) \ni \omega_b \\
d \uparrow & \# & \uparrow d \\
\nu_a \in \Omega^{k-1}(S^{2a-1}) & \xleftarrow{\quad} & \Omega^{k-1}(S^{2b-1}) \ni \tilde{\nu}_b \\
d \uparrow & \# & \uparrow d \\
\alpha \in \Omega^{k-2}(S^{2a-1}) & \xleftarrow{p_{b,a}} & \Omega^{k-2}(S^{2b-1}) \ni \beta
\end{array}$$

Es gilt

$$d(p_{b,a}(\tilde{\nu}_b) - \nu_a) = p_{b,a}(d\tilde{\nu}_b - d\nu_a) \stackrel{(3.15)}{=} p_{b,a}(\omega_b) - \omega_a = \omega_a - \omega_a = 0$$

Weil  $a = m \geq l_0 > \frac{k+1}{2}$  gibt es nach (3.14) ein  $\alpha \in \Omega^{k-2}(S^{2a-1})$  mit

$$d\alpha = p_{b,a}(\tilde{\nu}_b) - \nu_a \in \Omega^{k-1}(S^{2a-1}) \quad (3.16)$$

und da die Projektionen surjektiv sind, existiert weiters ein  $\beta \in \Omega^{k-2}(S^{2b-1})$  mit  $p_{b,a}(\beta) = \alpha$ . Damit erhalten wir schlussendlich ein Element

$$\nu_b := \tilde{\nu}_b - d\beta \in \Omega^{k-1}(S^{2b-1}), \quad (3.17)$$

welches  $d\nu_b = d(\tilde{\nu}_b) + dd\beta \stackrel{(3.15)}{=} \omega_b$  und  $p_{b,a}(\nu_b) \stackrel{(3.17)}{=} p_{b,a}(\tilde{\nu}_b) - d\alpha \stackrel{(3.16)}{=} \nu_a$  erfüllt.  $\square$

**Lemma 3.1.13.**  $\Lambda^*(S^\infty)$  erfüllt Bedingung (Z).

*Beweis.* Wir zeigen diese Behauptung wie in [GS99, Proposition 2.5.4]. Für alle  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq n$  seien  $\pi_{n,k} : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto z_k$  die lineare Projektion auf die  $k$ -te Komponente und  $\overline{\pi_{n,k}}$  die Projektion auf die komplex konjugierte Zahl der  $k$ -ten Komponente. Wir fassen diese glatten Abbildungen für alle  $k \leq n$  als Elemente von  $\Omega^0(S^{2n-1})$  auf und bilden

$$\theta_n := \sum_{k=1}^n \pi_{n,k} \cdot d\overline{\pi_{n,k}} \in \Omega^1(S^{2n-1}).$$

Diese 1-Form kommutiert offensichtlich mit den Projektionen  $p_{m,l}$  aus (3.13), also erhalten wir ein Element

$$\theta := (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda^1(S^\infty).$$

Dieses erfüllt die Bedingungen (Z1) und (Z2), ist also ein Zusammenhangselement.  $\square$

## 3.2 Der Beweis

Mit den Objekten  $S^\infty$  und  $\Lambda^*(S^\infty)$  aus den Propositionen 3.1.9 und 3.1.10 können wir die äquivarianten Kohomologien  $H_{S^1}^*(M) = H_{\text{sing}}^*((M \times S^\infty)/S^1)$  sowie  $H_{S^1}^*(\Omega^*(M)) = H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda^*(S^\infty))$  in den jeweiligen Kategorien bilden. Um die Kohomologien vergleichen zu können, müssen wir uns zuerst überlegen, wie sich die Limiten mit der Kohomologie vertauschen lassen, bevor wir in Bemerkung 3.2.5 mit dem Beweis des Theorems 3.0.1 beginnen.

**Lemma 3.2.1.** *Es sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit, dann existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$H_{\text{sing}}^*((M \times S^\infty)/S^1) \cong \varprojlim H_{\text{sing}}^*((M \times S^{2m-1})/S^1).$$

*Beweis.* Mit der Identität  $S^\infty = \bigcup S^{2m-1}$  und wenn wir mit  $M \times S^{2m-1} \hookrightarrow M \times S^{2m+1}$  auch  $(M \times S^{2m-1})/S^1 \hookrightarrow (M \times S^{2m+1})/S^1$  als Teilräume auffassen, können wir laut Bemerkung 3.1.4 (i)

$$M_{S^\infty} := (M \times S^\infty)/S^1 = \varinjlim ((M \times S^{2m-1})/S^1) = \bigcup (M \times S^{2m-1})/S^1 \quad (3.18)$$

identifizieren. In [Hat02, Proposition 3F.5.] wird gezeigt, dass ein von der universellen Eigenschaft der Limiten induzierter natürlicher Isomorphismus

$$H_{\text{sing}}^*(\varinjlim A_m) \cong \varprojlim H_{\text{sing}}^*(A_m) \quad (3.19)$$

für  $CW$ -Komplexe  $\mathcal{A} = \varinjlim A_m$  existiert.

Da die  $S^1$  frei auf den Sphären wirkt, induziert sie eine freie Wirkung auf den kompakten Produkten  $M \times S^{2m-1}$  und weil auf diesen Mannigfaltigkeitsstrukturen existieren, besitzen dessen Orbiträume laut Korollar 1.1.11 ebenfalls glatte Strukturen. Als Bild kompakter Mengen unter den natürlichen Projektionen sind diese wieder kompakt. Nach [Hat02, Korollar A.9., Seite 527] sind kompakte Mannigfaltigkeiten homotopieäquivalent zu  $CW$ -Komplexen, also folgt mit der Identität (3.18), dass  $M_{S^\infty}$  homotopieäquivalent zu einem  $CW$ -Komplex der Form  $\mathcal{A} = \varinjlim A_m = \bigcup A_m$  ist. Da die Kohomologie gemäß Korollar 1.2.12 homotopieinvariant ist, folgt mit (3.19) die Behauptung.  $\square$

**Definition 3.2.2** (Mittag-Leffler Bedingung). Es sei  $\{V_n, \varphi_{n,m}\}_{m,n \in \mathbb{N}_0}$  ein invers gerichtetes System von Vektorräumen mit linearen Abbildungen  $\varphi_{n,m} : V_n \rightarrow V_m$ . Wir sagen  $\{V_n, \varphi_{n,m}\}$  erfüllt die *Mittag-Leffler Bedingung*, falls für jedes  $l \in \mathbb{N}_0$  ein  $m \geq l$  existiert, sodass für alle  $m \geq l$  die Identität  $\text{img}(\varphi_{m,l}) = \text{img}(\varphi_{n,l})$  gilt.

$$\dots \longleftarrow \Omega_l^* \begin{array}{c} \xleftarrow{\varphi_{m,l}} \\ \xleftarrow{\varphi_{n,l}} \end{array} \Omega_m^* \begin{array}{c} \xleftarrow{\varphi_{n,m}} \\ \xleftarrow{\varphi_{n,l}} \end{array} \Omega_n^* \longleftarrow \dots$$

Insbesondere ist diese Bedingung erfüllt, wenn alle Abbildungen  $\varphi_{n,m} : V_n \twoheadrightarrow V_m$  surjektiv sind.

**Proposition 3.2.3.** *Es sei  $\{\Omega_n^*, f_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}_0}$  ein invers gerichtetes System von Kokettenkomplexen  $\Omega_n^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_n^k$  mit Kokettenabbildungen  $f_{n,m} : \Omega_n^k \rightarrow \Omega_m^k$ , welches die Mittag Leffler Bedingung erfüllt. Es existieren natürliche Isomorphismen*

$$H^k(\varprojlim \Omega_n) \cong \varprojlim H^k(\Omega_n)$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , für die  $\{H^k(\Omega_n^*), f_{n,m}^*\}_{n,m \in \mathbb{N}_0}$  die Mittag Leffler Bedingung erfüllt.

*Beweis.* Dies wird in [We97, Proposition 3.5.7 und Theorem 3.5.8] bewiesen.  $\square$

**Korollar 3.2.4.** *Es sei  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von kompakten Teilmannigfaltigkeiten  $M_n$  der Dimension  $n \in \mathbb{N}$ , dann existieren für alle  $k \in \mathbb{Z}$  natürliche Isomorphismen*

$$H^k(\varprojlim \Omega^*(M_n)) \cong \varprojlim H^k(\Omega^*(M_n)), \quad (3.20)$$

Falls die  $S^1$  frei auf den  $M_n$  wirkt, dann gilt dies auch für die basische Kohomologie.

*Beweis.* Die natürlichen Inklusionen  $i_{m,n} : M_m \hookrightarrow M_n$  induzieren surjektive Abbildungen  $p_{n,m} := i_{m,n}^* : \Omega^*(M_n) \rightarrow \Omega^*(M_m)$ , also erfüllt  $\{\Omega^*(M_n), p_{n,m}\}$  die Mittag-Leffler Bedingung. Sei nun  $k \in \mathbb{Z}$  beliebig fixiert. Da  $\Omega^k(M_n) = \mathfrak{o}$  für alle  $M_n$  mit  $\dim(M_n) > k$  und die Dimensionen der Mannigfaltigkeiten monoton wachsend sind, gibt es ein  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $H^k(\Omega^k(M_n)) = \mathfrak{o}$  für alle  $n \geq m$ . Insbesondere sind alle Abbildungen  $p_{n,l}$  trivial, falls  $n \geq m$  und  $l \in \mathbb{N}_0$  beliebig. Also erfüllt  $\{H^k(\Omega^k(M_n)), p_{n,m}\}$  die Mittag-Leffler Bedingung. Mit Proposition 3.2.3 folgt also die Behauptung.

Für den zweiten Teil der Aussage beachten wir, dass sich der Beweis von Lemma 3.1.11 eins zu eins auf Folgen von Teilmannigfaltigkeiten, auf denen die  $S^1$  frei wirkt, anwenden lässt, i.e. die direkte Summe der inversen Limes  $\Lambda^k(M_\infty)$  der  $S^1$ -Stern Algebren  $\Omega^k(M_n)$  ist wieder eine  $S^1$ -Stern Algebra. Insbesondere ist also der inverse Limes der basischen  $S^1$ -Stern Algebren  $\Omega^k(M_n)_{\text{bas}}$  wieder eine basische  $S^1$ -Stern Algebra, da auf ihnen die Differentialoperatoren  $\iota^n$  und  $L^n$  per definitionem trivial wirken, also triviale Differentialoperatoren am inversen Limes induzieren. Wir erhalten

$$\left(\varprojlim \Omega^k(M_n)\right)_{\text{bas}} =: \Lambda^k(M_\infty)_{\text{bas}} = \varprojlim \left(\Omega^k(M_n)_{\text{bas}}\right), \quad (3.21)$$

weil jedes Element  $\omega := (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \Lambda^k(M_\infty)$  mit  $\iota(\omega) = 0 = L(\omega)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  auch  $\iota^n(\omega_n) = 0 = L^n(\omega_n)$  erfüllt. Laut Lemma 2.2.20 gilt  $\Omega^*(M_n)_{\text{bas}} \cong \Omega^*(M_n/S^1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ , weil die  $S^1$  frei auf allen Mannigfaltigkeiten wirkt. Auf  $\Omega^*(M_n/S^1)$  können wir (3.20) anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} H_{\text{bas}}^k \left( \varprojlim \Omega^*(M_n) \right) &= H^k \left( \left( \varprojlim \Omega^k(M_n) \right)_{\text{bas}} \right) && (3.21) \\ &= H^k \left( \varprojlim \left( \Omega^k(M_n)_{\text{bas}} \right) \right) && (\text{Lemma 2.2.20}) \\ &\cong H^k \left( \varprojlim \left( \Omega^k(M_n/S^1) \right) \right) && (3.20) \\ &\cong \varprojlim \left( H^k \left( \Omega^*(M_n/S^1) \right) \right) && (\text{Lemma 2.2.20}) \\ &\cong \varprojlim \left( H^k \left( \Omega^*(M_n)_{\text{bas}} \right) \right) = \varprojlim \left( H_{\text{bas}}^k \left( \Omega^*(M_n) \right) \right) \end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung 3.2.5** (Beweis von Theorem 3.0.1). Es sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit. Mit  $S^\infty$  und  $\Lambda^*(S^\infty)$  versuchen wir nun die zwei eingeführten  $S^1$ -äquivalenten Kohomologie Modelle zu vergleichen, um herauszufinden, was uns noch zum Vervollständigen des Beweises der äquivalenten Version des de Rham Theorems fehlt:

$$\begin{aligned}
H_{S^1}^k(M) &= H_{\text{sing}}^k((M \times S^\infty)/S^1) && \text{(Lemma 3.2.1)} \\
&\cong \varprojlim H_{\text{sing}}^k((M \times S^{2n-1})/S^1) && \text{(De Rham 1.2.21)} \\
&\cong \varprojlim H_{\text{dR}}^k((M \times S^{2n-1})/S^1) && \text{(Lemma 2.2.20)} \\
&\cong \varprojlim H_{\text{bas}}^k(\Omega(M \times S^{2n-1})) && \text{(Korollar 3.2.4)} \\
&\cong H_{\text{bas}}^k(\varprojlim(\Omega^*(M \times S^{2n-1}))) && (*) \\
H_{S^1}^k(\Omega^*(M)) &= H_{\text{bas}}^k(\Omega^*(M) \otimes \Lambda^*(S^\infty))
\end{aligned}$$

( $\star$ ): Für den Beweis der  $S^1$ -äquivalenten Version des de Rham Theorems 3.0.1 müssen wir also noch einen natürlichen Isomorphismus

$$H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M) \otimes \varprojlim(\Omega^*(S^{2n-1}))) \cong H_{\text{bas}}^*(\varprojlim(\Omega^*(M \times S^{2n-1}))) \quad (3.22)$$

finden, wobei wir fortan die direkte Summe der inversen Limites von  $\Omega^k(M \times S^{2n-1})$  mit  $\Lambda^*(M \times S^\infty)$  bezeichnen werden. Wir können  $\Omega^*(M) \otimes \Lambda^*(S^\infty)$  als Teilalgebra von  $\Lambda^*(M \times S^\infty)$  auffassen, da  $\Omega^*(M) \otimes \Omega^*(S^{2n-1}) \subseteq \Omega^*(M \times S^{2n-1})$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Dadurch wird (3.22) zu

$$H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda^*(S^\infty)) \cong H_{\text{bas}}^*(\Lambda^*(M \times S^\infty)), \quad (3.23)$$

wobei wir zeigen werden, dass der Isomorphismus von den Inklusionen induziert wird. Um dies zu bewerkstelligen, werden wir in Korollar 3.2.10 beweisen, dass ein  $S^1$ -Stern Morphismus zwischen zwei  $S^1$ -Stern Algebren, welche Bedingung (Z) erfüllen, genau dann einen Isomorphismus in deren Kohomologien induziert, wenn er einen Isomorphismus in der basischen Kohomologie induziert. Unter dieser Annahme werden wir den Beweis von Theorem 3.0.1 vollenden und anschließend im Rest dieses Paragraphen daran arbeiten, obige Behauptung zu verifizieren.

Da  $\Lambda^*(S^\infty)$  laut Proposition 2.2.23 eine  $S^1$ -Stern Algebra ist, die Bedingung (Z) erfüllt, gilt dies mit Lemma 2.2.26 auch für  $\Omega^*(M) \otimes \Lambda^*(S^\infty)$ . Wie im Beweis von 3.2.4 folgt, dass  $\Lambda^*(M \times S^\infty)$  eine  $S^1$ -Stern Algebra ist. Als Zusammenhangselement von  $\Lambda^*(M \times S^\infty) \supseteq \Omega^*(M) \otimes \Lambda^*(S^\infty)$  können wir jenes von  $\Omega^*(M) \otimes \Lambda^*(S^\infty)$  wählen, womit auch  $\Lambda^*(M \times S^\infty)$  Bedingung (Z) erfüllt. Es lassen sich nun die Kohomologien dieser beiden  $S^1$ -Stern Algebren vergleichen:

$$\begin{aligned}
H^*(\Lambda^*(M \times S^\infty)) &= H^*(\varprojlim \Omega^*(M \times S^{2n-1})) && \text{(Korollar 3.2.4)} \\
&\cong \varprojlim H^*(\Omega^*(M \times S^{2n-1})) && \text{(Künneth 1.2.14)} \\
&\cong \varprojlim (H^*(\Omega^*(M)) \otimes H^*(\Omega(S^{2n-1}))) && (\Delta) \\
&\cong H^*(\Omega^*(M)) \otimes \varprojlim (H^*(\Omega(S^{2n-1}))) && \text{(Korollar 3.2.4)} \\
&\cong H^*(\Omega^*(M)) \otimes H^*(\Lambda^*(S^\infty)) \cong H^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda^*(S^\infty)) && (*)
\end{aligned}$$

Wobei (\*) aus der algebraischen Version des Künneth Theorems folgt, siehe etwa [Di08, Paragraf 11.10] und ( $\Delta$ ) aus den universellen Eigenschaften des Tensorproduktes und des inversen Limes. Mit Korollar 3.2.10 folgt (3.23) und damit  $H_{S^1}^*(M) \cong H_{S^1}^*(\Omega^*(M))$ .

**Proposition 3.2.6.** *Jede  $S^1$ -Stern Algebra  $\Omega$ , die Bedingung (Z) erfüllt, induziert eine natürliche lange exakte Sequenz von Kohomologien, i.e. für jede weitere  $S^1$ -Stern Algebra  $\Lambda$ , die Bedingung (Z) erfüllt und jeden  $S^1$ -Stern Morphismus  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  kommutiert das folgende Diagramm der induzierten langen exakten Sequenzen:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\delta} & H^k(\Omega_{\text{bas}}) & \xrightarrow{i^*} & H^k(\Omega_{S^1}) & \xrightarrow{\iota^*} & H^{k-1}(\Omega_{\text{bas}}) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(\Omega_{\text{bas}}) & \xrightarrow{i^*} & \cdots \\ & & \downarrow f_{\text{bas}}^* & \# & \downarrow f_{S^1}^* & \# & \downarrow f_{\text{bas}}^* & \# & \downarrow f_{\text{bas}}^* & & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta} & H^k(\Lambda_{\text{bas}}) & \xrightarrow{i^*} & H^k(\Lambda_{S^1}) & \xrightarrow{\iota^*} & H^{k-1}(\Lambda_{\text{bas}}) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(\Lambda_{\text{bas}}) & \xrightarrow{i^*} & \cdots \end{array} \quad (3.24)$$

Dabei bezeichne  $i : \Omega_{\text{bas}} \hookrightarrow \Omega_{S^1}$  die natürliche Inklusion,  $f_{\text{bas}}, f_{S^1}$  die Einschränkungen von  $f$  auf die Teilkomplexe  $\Omega_{\text{bas}}$  resp.  $\Omega_{S^1}$  und  $\delta : H^{*-1}(\Omega_{\text{bas}}) \rightarrow H^{*+1}(\Omega_{\text{bas}})$  den so genannten Einhängungshomomorphismus, der für  $\beta \in \Omega_{\text{bas}}$  mittels

$$\delta([\beta]) = [i^{-1}(d(\iota^{-1}(\beta)))] \quad (3.25)$$

definiert und unabhängig von der Wahl der Urbilder ist.

*Beweis.* Wir zeigen, dass

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \xrightarrow{0} & \Omega_{\text{bas}}^* & \xrightarrow{i} & \Omega_{S^1}^* & \xrightarrow{\iota} & \Omega_{\text{bas}}^{*-1} & \xrightarrow{0} & 0 \\ & & \downarrow f_{\text{bas}} & \# & \downarrow f_{S^1} & \# & \downarrow f_{\text{bas}} & & \\ 0 & \xrightarrow{0} & \Lambda_{\text{bas}}^* & \xrightarrow{i} & \Lambda_{S^1}^* & \xrightarrow{\iota} & \Lambda_{\text{bas}}^{*-1} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von kurzen exakten Sequenzen von Kokettenkomplexen mit Kokettenabbildungen  $f_{\text{bas}}$  und  $f_{S^1}$  ist, denn mit [Mi08, Theorem III.11.8] folgt dann, dass (3.24) ein kommutatives Diagramm langer exakter Sequenzen von Kohomologien und dass  $\delta$  mittels (3.25) ein wohldefinierter Homomorphismus sind.

Wir beachten zuerst, dass  $\Omega_{\text{bas}} \subseteq \Omega_{S^1} \subseteq \Omega$  und  $\Lambda_{\text{bas}} \subseteq \Lambda_{S^1} \subseteq \Lambda$  nach Bemerkung 2.2.18  $S^1$ -Stern Algebren, also insbesondere Kokettenkomplexe sind. Außerdem gilt für die Einschränkungen von  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$ , dass  $f(\Omega_{S^1}) \subseteq \Lambda_{S^1}$  und  $f(\Omega_{\text{bas}}) \subseteq \Lambda_{\text{bas}}$ , denn aus (M2) folgt  $L(f(\omega)) = f(L(\omega)) = f(0) = 0$  für  $\omega \in \Omega_{S^1}$  und  $\iota(f(\beta)) = f(\iota(\beta)) = f(0) = 0$  für  $\beta \in \Omega_{\text{bas}}$ . Somit schränkt sich  $f$  zu  $S^1$ -Stern Morphismen ein, welche wieder mit (M2) Kokettenabbildungen sind. Damit kommutiert  $f_{\text{bas}}$  mit  $i$  und gemäß (M2) auch  $f_{S^1}$  mit  $\iota$ . Jetzt müssen wir noch bei den einzelnen Kettenkomplexen die Exaktheit nachrechnen.

*Exaktheit bei  $\Omega_{\text{bas}}^*$ :* Die natürliche Inklusion ist klarerweise injektiv.

*Exaktheit bei  $\Omega_{S^1}^*$ :* Ein Element  $\omega \in \Omega_{S^1}^*$  liegt per definitionem genau dann im Kern von  $\iota$ , wenn es ein basisches Element ist, also im Bild von  $i : \Omega_{\text{bas}}^* \hookrightarrow \Omega_{S^1}^*$  liegt.

*Exaktheit bei  $\Omega_{\text{bas}}^{*-1}$ :* Zuerst beachten wir, dass  $\iota(\Omega_{S^1}^*) \subseteq \Omega_{\text{bas}}^{*-1}$  gilt, denn für  $\omega \in \Omega_{S^1}^k$  folgt  $L(\iota(\omega)) = \iota(L(\omega)) = \iota(0) = 0$  aus (S5) und  $\iota(\iota(\omega)) = 0$  aus (S6). Damit erfüllt  $\iota(\omega)$  die Bedingungen (Z1) und (Z2), liegt also in  $\Omega_{\text{bas}}^{k-1}$ .

Um die Surjektivität von  $\iota$  zu zeigen müssen wir die Bedingung (Z) von  $\Omega$  verwenden. Wir werden nämlich mit der Existenz eines Zusammenhangselementes  $\theta \in \Omega^1$  einen Schnitt von  $\iota$  konstruieren, der die Surjektivität von  $\iota$  impliziert. Die Abbildung

$$c : \Omega_{\text{bas}}^{k-1} \rightarrow \Omega_{S^1}^k, \beta \mapsto (-1)^{k-1} \cdot \beta \wedge \theta$$

erfüllt  $c(\Omega_{\text{bas}}^{* - 1}) \subseteq \Omega_{S^1}^*$ , denn:

$$L(c(\beta)) = L(\pm \beta \wedge \theta) \stackrel{(2.13)}{=} \pm \underbrace{L(\beta) \wedge \theta}_{=0 \wedge \theta \text{ (B1)}} \pm \underbrace{\beta \wedge L(\theta)}_{=\beta \wedge 0 \text{ (Z2)}} = 0$$

Außerdem gilt  $\iota \circ c = \text{id}_{\Omega_{\text{bas}}^{k-1}}$ , denn:

$$\iota(c(\beta)) = (-1)^{k-1} \iota(\beta \wedge \theta) \stackrel{(2.13)}{=} (-1)^{k-1} \cdot \left( \underbrace{\iota(\beta) \wedge \theta}_{=0 \wedge \theta \text{ (B2)}} + (-1)^{1-k} \cdot \underbrace{\beta \wedge \iota(\theta)}_{=\beta \wedge 1 \text{ (Z1)}} \right) = \beta$$

Damit sind alle notwendigen Voraussetzungen erfüllt.  $\square$

**Proposition 3.2.7.** *Es sei  $\Omega$  eine vollständige<sup>22</sup>  $S^1$ -Stern Algebra, dann induziert die natürliche Inklusion  $i : \Omega_{S^1} \hookrightarrow \Omega$  einen natürlichen Isomorphismus in der Kohomologie.*

*Beweis.* Wir werden zeigen, dass  $i$  eine Kettenhomotopieäquivalenz ist, genauer werden wir nachrechnen, dass die Abbildung

$$g : \Omega \rightarrow \Omega_{S^1}, \omega \mapsto \int_{S^1} \rho_z(\omega) dz := \int_0^1 \rho_{e^{2\pi i r}}(\omega) dr \quad (3.26)$$

ein  $S^1$ -Stern Morphismus ist, für den  $g \circ i = \text{id}_{\Omega_{S^1}}$  und  $i \circ g \simeq \text{id}_{\Omega}$  für eine Kettenhomotopie  $q : \Omega \rightarrow \Omega$  gilt. Damit folgt nach Korollar 2.2.16 die Behauptung.

Wie in Bemerkung 2.2.23 (ii) gilt  $\int_{S^1} dz = 1$  und  $\rho_z(g(\omega)) = g(\omega)$ , also liegt das Bild von  $g$  in  $\Omega_{S^1}$ . Damit folgt für alle  $\nu \in \Omega_{S^1}$  mit Bemerkung 2.2.18 (i):

$$(g \circ i)(\nu) = g(\nu) = \int_{S^1} \rho_z(\nu) dz = \int_{S^1} \nu dz = \nu = \text{id}_{\Omega_{S^1}}(\nu)$$

Mit dem Hauptsatz der Integral- und Differenzialrechnung folgt für alle  $\omega \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} g(\omega) - \omega &= \int_{S^1} \rho_z(\omega) dz - \int_{S^1} \omega dz = \\ &= \int_0^1 \rho_{e^{2\pi i r}}(\omega) - \rho_{e^0}(\omega) dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^r \frac{d}{dt} (\rho_{e^{2\pi i t}}(\omega)) \Big|_{t=s} ds dr = \end{aligned}$$

<sup>22</sup>Ein normierter Vektorraum  $V$  heißt *vollständig*, falls jede Cauchy Folge in  $V$  konvergiert. Diese benötigen wir in dieser Proposition für die Integrale.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^r \frac{d}{dt} (\rho_{e^{2\pi i(t+s)}}(\omega))|_{t=0} ds dr = \\
&= \int_0^1 \int_0^r \underbrace{\frac{d}{dt} (\rho_{e^{2\pi i t}}(\rho_{e^{2\pi i s}}(\omega)))|_{t=0}}_{\stackrel{(V1)}{=} L_v(\rho_{e^{2\pi i s}}(\omega)) \text{ für ein } v \in \mathfrak{s}} ds dr \stackrel{(S3)}{=} (\rho_{z_s} := \rho_{e^{2\pi i s}}) \\
&= \int_0^1 \int_0^r (d \circ \iota_v + \iota_v \circ d)(\rho_{z_s}(\omega)) ds dr \stackrel{(V2)}{=} \\
&= d \circ \underbrace{\int_0^1 \int_0^r (\iota_v \circ \rho_{z_s})(\omega) ds dr}_{=: q} + \int_0^1 \int_0^r (\iota_v \circ \rho_{z_s})(d\omega) ds dr = d(q(\omega)) + q(d\omega)
\end{aligned}$$

Und da  $q$  eine lineare Abbildung  $\Omega \rightarrow \Omega$  vom Grad  $-1$  ist, die  $\iota \circ q = 0 = q \circ \iota$  und somit  $[\iota, q] = 0$  erfüllt, ist dies die gesuchte Kettenhomotopie.  $\square$

**Korollar 3.2.8.** *Je zwei vollständige  $S^1$ -Stern Algebren  $\Omega$  und  $\Lambda$ , die Bedingung (Z) erfüllen, induzieren für jeden  $S^1$ -Stern Morphismus  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  ein kommutatives Diagramm langer exakter Sequenzen:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{bas}}^k(\Omega) & \xrightarrow{i^*} & H^k(\Omega) & \xrightarrow{p^*} & H_{\text{bas}}^{k-1}(\Omega) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{bas}}^{k+1}(\Omega) & \xrightarrow{i^*} & \cdots \\
& & \downarrow f_{\text{bas}}^* & \# & \downarrow f^* & \# & \downarrow f_{\text{bas}}^* & \# & \downarrow f_{\text{bas}}^* & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{bas}}^k(\Lambda) & \xrightarrow{i^*} & H^k(\Lambda) & \xrightarrow{p^*} & H_{\text{bas}}^{k-1}(\Lambda) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{bas}}^{k+1}(\Lambda) & \xrightarrow{i^*} & \cdots
\end{array} \quad (3.27)$$

Dabei bezeichne  $i : \Omega_{\text{bas}} \hookrightarrow \Omega$  die natürliche Inklusion und  $p : \Omega \rightarrow \Omega_{\text{bas}}$  die Abbildung  $p = \iota \circ g$ , wobei  $g$  die Abbildung (3.26) aus dem Beweis von Proposition 3.2.7 ist. Der Einhängungshomomorphismus  $\delta : H^{*-1}(\Omega_{\text{bas}}) \rightarrow H^{*+1}(\Omega_{\text{bas}})$  ist dann wieder von der Form (3.25).

*Beweis.* Für den ersten Teil des Korollars betrachten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega_{\text{bas}}^* & \hookrightarrow & \Omega_{S^1}^* & \xrightarrow{\iota} & \Omega_{\text{bas}}^{*-1} \\
& \searrow i & \uparrow g & \nearrow p & \\
& & \Omega^* & & 
\end{array}$$

Nach Proposition 3.2.7 induziert  $g$  einen Isomorphismus in der Kohomologie, der eingesetzt in die lange exakte Sequenz (3.24) aus Proposition 3.2.6 die gewünschte lange exakte Sequenz (3.27) liefert.

Der Einhängungshomomorphismus  $\delta$  hat analog zum Beweis von 3.2.6 die Form  $\delta([\omega]) = [i^{-1}(d(p^{-1}(\omega)))] = [i^{-1}(d(g^{-1}(\iota^{-1}(\omega))))]$ . Da dies unabhängig von der Wahl der Urbilder ist, können wir darauf verzichten, ein Urbild von  $g$  zu wählen, weil  $g$  auf  $\Omega_{S^1}^*$  als Identität wirkt.  $\square$

**Bemerkung 3.2.9.** Für kompakte  $S^1$ -Mannigfaltigkeiten  $M$  mit freier Wirkung stimmt die lange exakte Sequenz aus Korollar 3.2.8 gerade mit der Gysin Sequenz

$$\dots \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(M/S^1) \xrightarrow{\pi^*} H_{\text{dR}}^k(M) \xrightarrow{\pi^*} H_{\text{dR}}^{k-1}(M/S^1) \xrightarrow{\delta} H_{\text{dR}}^{k+1}(M/S^1) \longrightarrow \dots$$

des  $S^1$ -Hauptfaserbündels  $\pi : M \rightarrow M/S^1$  überein, siehe Bemerkung 1.2.20 (ii).

**Korollar 3.2.10.** *Es seien  $\Omega$  und  $\Lambda$  zwei vollständige<sup>23</sup>  $S^1$ -Stern Algebren, welche Bedingung (Z) erfüllen. Ein  $S^1$ -Stern Morphismus  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  induziert genau dann einen Isomorphismus  $H^*(\Omega) \cong H^*(\Lambda)$  in der Kohomologie, wenn er einen Isomorphismus  $H_{\text{bas}}^*(\Omega) \cong H_{\text{bas}}^*(\Lambda)$  in der basischen Kohomologie induziert.*

*Beweis.* Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  genau dann einen Isomorphismus induziert, wenn selbiges für  $f_{\text{bas}} : \Omega_{\text{bas}} \rightarrow \Lambda_{\text{bas}}$  gilt.

*Induktionsanfang:* Da für  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k < 0$  nach Voraussetzung  $\Omega^k = \mathfrak{o} = \Lambda^k$  gilt, sind sowohl alle  $k$ -ten Kohomologien, als auch die basischen Kohomologien trivial und erfüllen somit die Behauptung. Der Fall  $n = 0$  wäre für den Beweis nicht notwendig, liefert aber ein nettes Nebenresultat. Nach Korollar 3.2.8 ist

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{o} = H_{\text{bas}}^{-2}(\Omega) & \xrightarrow{0} & H_{\text{bas}}^0(\Omega) & \xrightarrow{i^*} & H^0(\Omega) & \xrightarrow{0} & H_{\text{bas}}^{-1}(\Omega) = \mathfrak{o} \\ & & \downarrow f_{\text{bas}}^* & & \downarrow f^* & & \\ \mathfrak{o} = H_{\text{bas}}^{-2}(\Lambda) & \xrightarrow{0} & H_{\text{bas}}^0(\Lambda) & \xrightarrow{i^*} & H^0(\Lambda) & \xrightarrow{0} & H_{\text{bas}}^{-1}(\Lambda) = \mathfrak{o} \end{array}$$

eine exakte Sequenz und damit  $i^*$  ein Isomorphismus in der nullten Kohomologie. Also ist die nullte Kohomologie immer isomorph zur nullten basischen Kohomologie.

*Induktionsschritt:* Es sei die Behauptung für alle  $k$ -ten Kohomologien mit  $k < n$  gezeigt. Für den Induktionsschritt werden wir das fünfer Lemma verwenden.<sup>24</sup> Wir betrachten folgenden Teil des kommutativen Diagramms (3.27) langer exakter Sequenzen aus Korollar 3.2.8:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{n-1}(\Omega) & \longrightarrow & H_{\text{bas}}^{n-2}(\Omega) & \longrightarrow & H_{\text{bas}}^n(\Omega) & \longrightarrow & H^n(\Omega) & \longrightarrow & H_{\text{bas}}^{n-1}(\Omega) & \longrightarrow & H_{\text{bas}}^{n+1}(\Omega) & (3.28) \\ \downarrow \cong & & \cong \downarrow \cong & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong & & \cong \downarrow \cong & & \cong \downarrow & \\ H^{n-1}(\Lambda) & \longrightarrow & H_{\text{bas}}^{n-2}(\Lambda) & \longrightarrow & H_{\text{bas}}^n(\Lambda) & \longrightarrow & H^n(\Lambda) & \longrightarrow & H_{\text{bas}}^{n-1}(\Lambda) & \longrightarrow & H_{\text{bas}}^{n+1}(\Lambda) \end{array}$$

Falls die Kohomologie von  $\Omega$  und  $\Lambda$  übereinstimmt, dann gelten mit der Induktionsannahme alle rechts von den senkrechten Pfeilen markierten Isomorphismen in (3.28) und mit dem fünfer Lemma, folgt die Isomorphie  $H_{\text{bas}}^n(\Omega) \cong H_{\text{bas}}^n(\Lambda)$ . Falls die basische Kohomologie von  $\Omega$  und  $\Lambda$  übereinstimmt, gelten alle links von den senkrechten Pfeilen markierten Isomorphismen und es folgt die Isomorphie  $H^n(\Omega) \cong H^n(\Lambda)$ . Damit wäre die Behauptung auch für  $k = n$  gezeigt.  $\square$

<sup>23</sup>Alle  $S^1$ -Stern Algebren, die wir bisher als Limiten solcher konstruiert haben, sind vollständig.

<sup>24</sup>Das fünfer Lemma besagt, dass in einem kommutativen Diagramm zweier horizontaler exakter Sequenzen von jeweils fünf Gruppen die Isomorphie der mittleren senkrechten Abbildung aus der Isomorphie der vier äußeren senkrechten Abbildungen folgt. Für einen Beweis siehe [Mi08, Lemma III.11.9].

**Korollar 3.2.11.** *Definition 2.2.27 ist wohldefiniert, i.e. für alle glatten Mannigfaltigkeiten  $M$  existiert ein Isomorphismus*

$$H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda_1) \cong H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda_2)$$

für je zwei azyklische  $S^1$ -Stern Algebren, welche Bedingung (Z) erfüllen.

*Beweis.* Gemäß Korollar 3.2.10 genügt es zu zeigen, dass es einen Isomorphismus

$$H^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda_1) \cong H^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda_2)$$

gibt. Dessen Existenz folgt aus der algebraischen Version des Künneth Theorems und der Azyklizität der beiden  $S^1$ -Stern Algebren, denn diese liefern folgende Isomorphismen:

$$\begin{aligned} H^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda_1) &\cong H^*(\Omega^*(M)) \otimes H^*(\Lambda_1) \\ &\cong H^*(\Omega^*(M)) \otimes H^*(\Lambda_2) \cong H^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda_2) \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.2.12.** *Definition 2.2.27 ist eine Verallgemeinerung von Definition 1.2.23, i.e. falls  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit freier  $S^1$ -Wirkung ist, dann existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$H_{\text{dR}}^*(M/S^1) \cong H_{S^1}^*(\Omega^*(M)).$$

*Beweis.* Es sei  $\Lambda$  eine azyklische  $S^1$ -Stern Algebra, welche Bedingung (Z) erfüllt. Mit der algebraischen Version des Künneth Theorems erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus:

$$H^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda) \cong H^*(\Omega^*(M)) \otimes H^*(\Lambda) \cong H^*(\Omega^*(M)) \quad (3.29)$$

Da die Wirkung der  $S^1$  frei, also insbesondere lokal frei ist, folgt mit Bemerkung 2.2.23 (ii), dass  $\Omega^*(M)$  Bedingung (Z) erfüllt. Somit faktorisiert (3.29) gemäß Korollar 3.2.10 zu einem natürlichen Isomorphismus

$$H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M) \otimes \Lambda) \cong H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M)), \quad (3.30)$$

wobei die linke Seite von (3.30) gerade die Definition von  $H_{S^1}^*(\Omega^*(M))$  ist. Für die rechte Seite von (3.30) gibt es laut Lemma 2.2.20 einen natürlichen Isomorphismus  $H_{\text{dR}}^*(M/S^1) \cong H_{\text{bas}}^*(\Omega^*(M))$ , womit die Behauptung gezeigt wäre. □



# Literaturverzeichnis

- [Ba09] Helga Baum, *Eichfeldtheorie, eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009.
- [Bo60] Armand Borel, *Seminar on Transformation Groups*. Annals of Mathematics studies **46**, Princeton University Press, 1960.
- [BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate texts in Mathematics **82**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.
- [Br97] Glen E. Bredon, *Sheaf Theory*. Second Edition. Graduate texts in Mathematics **170**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [BJ73] Theodor Bröcker und Klaus Jänich, *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [Ča10] Andreas Čap, *Lie Groups*. Lecture notes. Wien, 2010. <http://www.mat.univie.ac.at/~cap/files/LieGroups.pdf> [Online Zugriff am 21.09.2012]
- [Ča11] Andreas Čap, *Differentialgeometrie 1*. Lecture notes. Wien, 2011. <http://www.mat.univie.ac.at/~cap/files/diffgeom.pdf> [Online Zugriff am 01.10.2012]
- [Di08] Tammo Tom Dieck, *Algebraic Topology*. EMS textbooks in mathematics, European Mathematical Society, Zürich, 2008.
- [Do63] Albrecht Dold, *Partitions of Unity in the Theory of Fibrations*. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 78, No. 2, pp. 223-255, 1963.
- [En89] Ryszard Engelking, *General Topology*. Sigma series in pure mathematics **6**, Heldermann, Berlin, 1989.
- [ES52] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton Mathematical Series **15**, Princeton University Press, 1952.
- [GHV72] Werner H. Greub, Stephen Halperin and Ray Vanstone, *Connections, Curvature, and Cohomology. De Rham Cohomology of Manifolds and Vector Bundles*. Pure and applied mathematics **47,I**, Academic Press, New York, 1972.

- [GHV73] Werner H. Greub, Stephen Halperin and Ray Vanstone, *Connections, Curvature, and Cohomology. Lie Groups, Principal Bundles and Characteristic Classes*. Pure and applied mathematics **47,II**, Academic Press, New York, 1973.
- [GS99] Victor Guillemin and Shlomo Sternberg, *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory*. Mathematics past and present. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1999.
- [Hat02] Allen E. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf> [Online Zugriff am 08.01.2012]
- [Hat] Allen E. Hatcher, *Vector Bundles and K-theory*. Unvollständige Vorabversion frei erhältlich unter <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf> [Online Zugriff am 02.02.2013]
- [Hu94] Dale Husemöller, *Fibre Bundles*. Third edition. Graduate texts in Mathematics **20**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [JS06] Jens C. Jantzen und Joachim Schwermer, *Algebra*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2006.
- [Kr99] Andreas Kriegl, *Topologie*. Lecture notes. Wien, 1999. <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/topologie.pdf> [Online Zugriff am 28.11.2012]
- [Kr03] Andreas Kriegl, *Analysis 1*. Lecture notes. Wien, 2003. <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/Analysis/Ana1-V0.pdf> [Online Zugriff am 29.03.2013]
- [Kr07] Andreas Kriegl, *Differentialgeometrie*. Lecture notes. Wien, 2007. <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/diffgeom.pdf> [Online Zugriff am 10.10.2012]
- [Kr08] Andreas Kriegl, *Kategorientheorie*. Lecture notes. Wien, 2008. <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/category.pdf> [Online Zugriff am 05.02.2013]
- [Kr10] Andreas Kriegl, *Lie Gruppen*. Lecture notes. Wien, 2010. <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/2010WS.pdf> [Online Zugriff am 29.9.2012]
- [Mi08] Peter Michor, *Topics in Differential Geometry*. Graduate studies in Mathematics **93**. American Mathematical Society, Providence, 2008.
- [Ru87] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*. Third Edition. McGraw-Hill international editions: Mathematics series, McGraw-Hill, New York, 1987.

- [St51] Norman Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton mathematical series **14**, Princeton University Press, New York, 1951.
- [Wa83] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable Manifolds and Lie Groups*. Second Edition. Graduate texts in mathematics **94**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [We97] Charles A. Weibel, *An introduction to homological Algebra*. Cambridge studies in advanced mathematics **38**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.



# Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das Theorem von de Rham, welches besagt, dass es für glatte Mannigfaltigkeiten einen natürlichen Isomorphismus zwischen der de Rham Kohomologie und der singulären Kohomologie gibt, auf  $S^1$ -äquivariante Kohomologien verallgemeinert. Dazu werden im ersten Kapitel die wichtigsten Eigenschaften von Hauptfaserbündeln und der Kohomologietheorie behandelt. Für freie Wirkungen der  $S^1$  kann die Kohomologie des Orbitraumes als äquivariantes Modell der Kohomologie herangezogen werden. Für nicht freie Wirkungen werden im zweiten Kapitel ein topologisches Modell, das auf Armand Borel und ein algebraisches Modell, das auf Henri Cartan zurückgeht, eingeführt. Für das Borel-Modell einer  $S^1$ -äquivarianten Kohomologie eines topologischen Raumes  $X$  dient die Kohomologie des Orbitraumes des Produktes von  $X$  mit dem Totalraum eines universellen  $S^1$ -Hauptfaserbündels. Für das algebraische Modell werden zuerst die Eigenschaften der Differentialformen von Mannigfaltigkeiten, auf denen die  $S^1$  lokal frei wirkt, algebraisch charakterisiert, um danach die Konstruktion des topologischen Modells im algebraischen Setting zu imitieren. Im dritten Kapitel werden die für die beiden Modelle benötigten Objekte mithilfe von Limiten aus den Sphären ungerader Dimension konstruiert, mit denen sich dann die Kohomologien vergleichen lassen und gezeigt werden kann, dass es für kompakte, glatte Mannigfaltigkeiten einen natürlichen Isomorphismus zwischen diesen beiden Modellen gibt.



# Lebenslauf

## Persönliche Information

Name	Jan Andreas Pretnar
Geburtsdatum	25. September 1984
Geburtsort	Klagenfurt
Muttersprache	Deutsch-Slowenisch
email	janandreasp@yahoo.de

## Ausbildung

Seit 10/2004	Diplomstudium Mathematik an der Universität Wien
06/2003	Matura mit ausgezeichnetem Erfolg
1995-2003	BRG Klagenfurt-Viktring mit besonderer Berücksichtigung der musischen Ausbildung (Bildnerischer Zweig)
1991-1995	VS Mohorjeva-Hermagoras (zweisprachig)

## Tätigkeiten

9/2011-03/2012	Österreichische Kinderfreunde, Landesorganisation Wien Lernhilfe im Hort
1/2006-07/2010	Universität Wien, Fakultät für Mathematik Tutor
03/2009	Ausstellung „IMAGINARY - Mit den Augen der Mathematik“ Koordinator und Betreuer
1/2004-09/2004	Österreichisches Bundesheer Präsenzdienst

## Andere Aktivitäten

Seit 2007	Volume Media Verlags GmbH Betreuer von Volume Promotion-Ständen auf diversen Festivals
-----------	---