

**KNOTENLINIEN UND KNOTENGEBIETE
VON EIGENFUNKTIONEN**

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Magister rerum naturalium

eingereicht von

JOSEF LEYDOLD

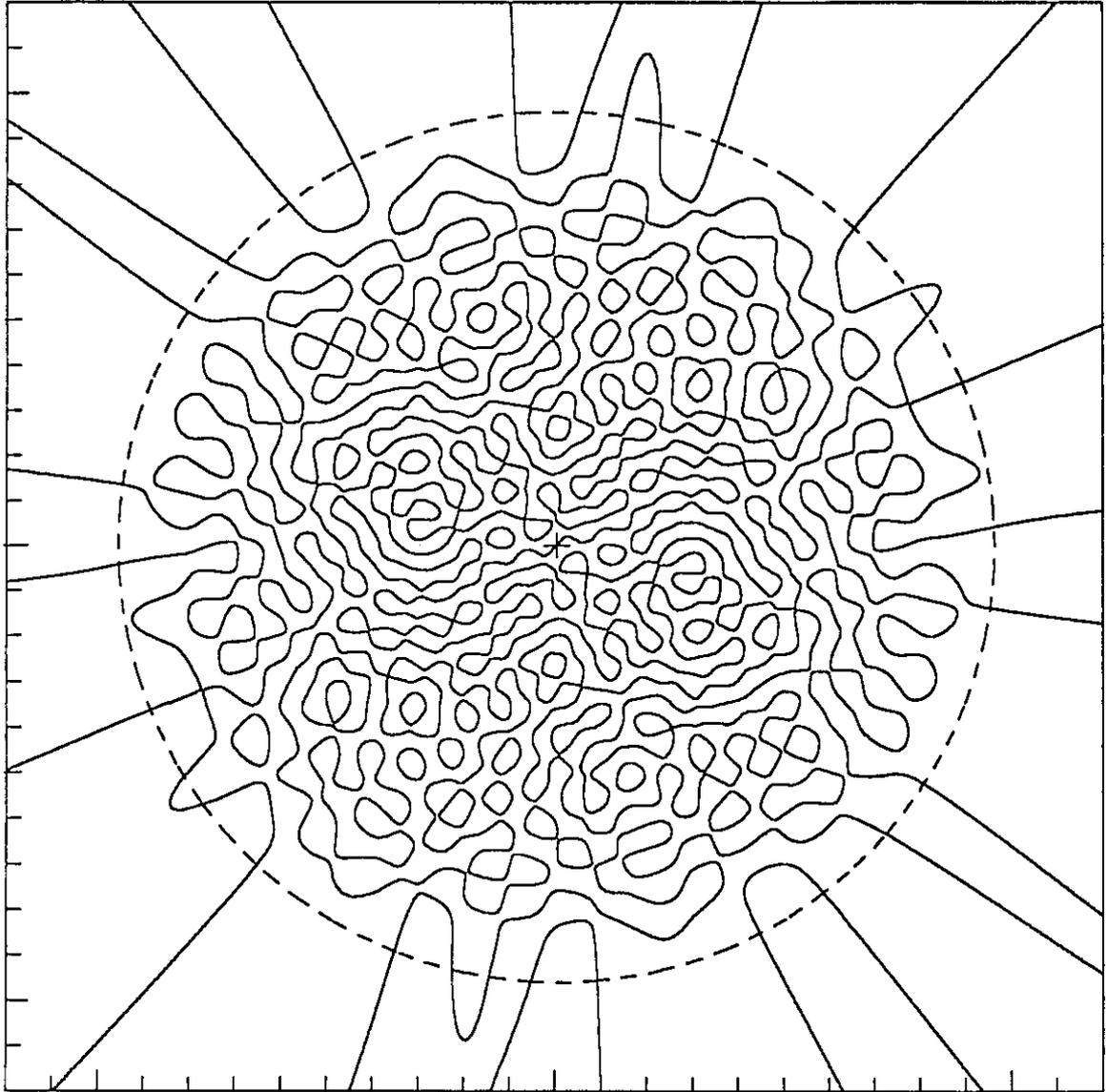
am Institut für Mathematik

und am Institut für theoretische Chemie

der Universität Wien

Wien, im April 1989

Meinen Eltern



Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

G.H. HARDY

An dieser Stelle möchte ich mich für die Hilfe all derer bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Bei Herrn Univ.-Doz. Dr. Thomas Hoffmann-Ostenhof für die interessante Fragestellung und für die vielen hilfreichen Diskussionen und Anregungen.

Bei allen Kollegen und Kolleginnen am Institut für theoretische Chemie für zahlreiche Hilfestellungen und das gute Arbeitsklima, insbesondere bei Dr. Walter Fontana und Mag. Wolfgang Schnabl für ihre Bemühungen, mir bei der Benützung von Computern und verschiedenen Ausgabegeräten zu helfen. Ebenso bei allen Kollegen und Kolleginnen aus Mathematik, Physik und Chemie, die mich während meines Studiums begleitet haben.

Herzlich bedanken möchte ich mich bei meinen Eltern, die mir dieses Studium ermöglichten.

Bei meiner Freundin Mojca Jenko für die moralische Unterstützung meiner Arbeit.

Ich möchte mich auch dafür bedanken, daß mir vom Institut für theoretische Chemie der Universität Wien die für die Erstellung der Bilder notwendigen Geräte zur Verfügung gestellt worden sind.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Kugelflächenfunktionen und Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators	8
3. Eine Identität	12
4. Wege in $E(h, M)$	16
5. Schranken an die Anzahl der Knotengebiete	23
6. Graphen von Nullstellenmengen	28
7. Beweis von Satz 3.1	39
8. Beweis von Lemma 4.4	50
9. Beweis von Satz 5.5	56
10. Beweis von Lemma 6.1 und Satz 6.2	77
Anhang	79
Literaturverzeichnis	80

1. Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir Nullstellen von Lösungen von SCHRÖDINGER-Gleichungen.

Sei

$$(-\Delta + h(x))\psi = 0, \forall x \in M, \psi \in L^2(M) \text{ reellwertig} \quad (1.1)$$

Dabei ist M eine C^∞ -RIEMANNsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und Δ der entsprechende LAPLACE-(BETRAMI)-Operator. $h \in C^\infty$ setzen wir immer als reellwertig voraus.

Auf Grund der elliptischen Regularität gilt [11]

$$\psi \in C^\infty(M).$$

Alle Funktionen, die (1.1) erfüllen, bilden einen Vektorraum, den wir mit $E(h, M)$ bezeichnen.

Zur Beschreibung der hier behandelten Probleme brauchen wir folgende

Definition 1.1:

- (1) $N(\psi) := \psi^{-1}(0)$ heißt *Nullstellenmenge* von ψ .
- (2) Eine Zusammenhangskomponente D von $M \setminus N(\psi)$ heißt *Knotengebiet* von ψ .
- (3) $\Omega(\psi)$ sei die Menge aller Knotengebiete von ψ .
- (4) $\mu(\psi) := |\Omega(\psi)|$ sei die Anzahl der Knotengebiete von ψ .

Bemerkung: Da jedes Knotengebiet ein Gebiet im topologischen Sinn ist, ist es auch wegzusammenhängend, d.h. die Begriffe Zusammenhangskomponente und Wegzusammenhangskomponente sind in diesem Fall gleichbedeutend (z.B. [2]).

Die Eigenschaften solcher Nullstellenmengen sind Gegenstand vieler Untersuchungen, und gerade in den letzten Jahren sind einige tiefliegende Resultate erzielt worden (z.B. [9]). Eine Zusammenfassung (bis zum Jahre 1984) diesbezüglicher Ergebnisse findet man etwa in [6].

Wir wollen uns hier einigen ganz speziellen Problemen widmen, die (abgesehen von denen in §5.) auch von der Fragestellung her neu zu sein scheinen. Dabei wollen wir ausschließlich den Fall betrachten, daß M 2-dimensional ist.

Um die hier interessanten Fragestellungen besser zu erläutern, betrachten wir zuerst einige Bilder. Die Abbildungen¹ 1.1 und 1.2 zeigen Nullstellen verschiedener Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators zum gleichen Eigenwert, d.h. die ψ

¹Diese Bilder wurden mit dem Graphikpaket ERLGRAPH 2.0M erstellt. Näheres siehe Anhang.

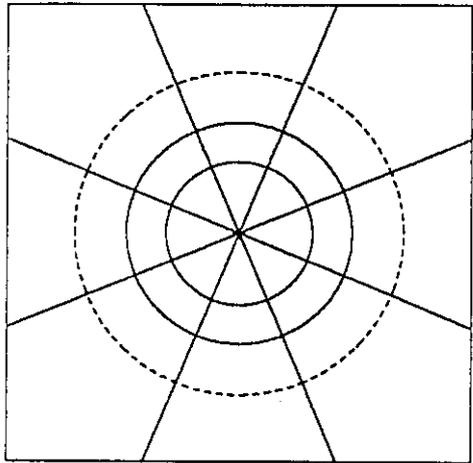


Bild 1

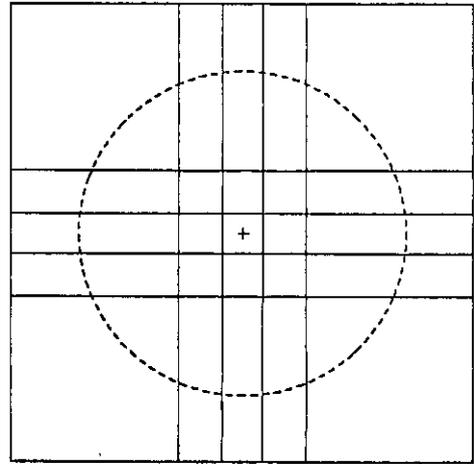


Bild 2

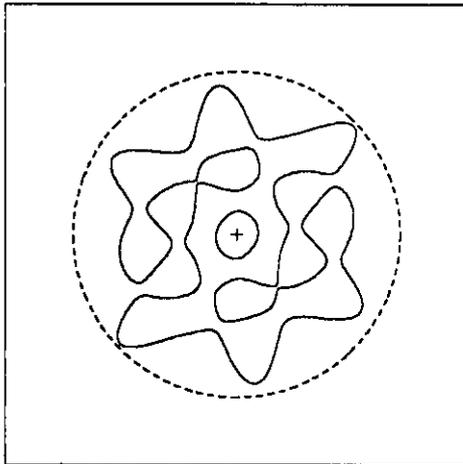


Bild 3

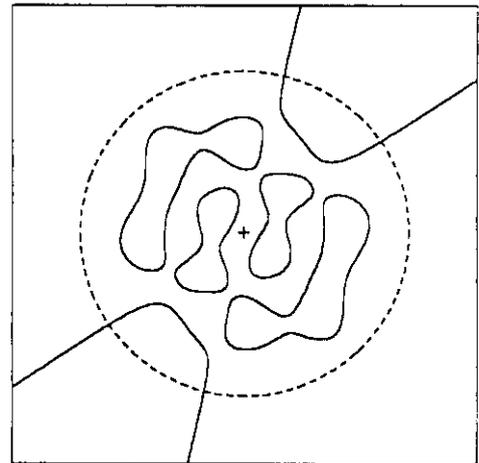


Bild 4

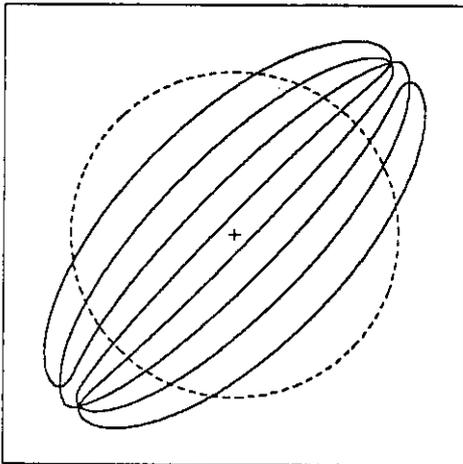


Bild 5

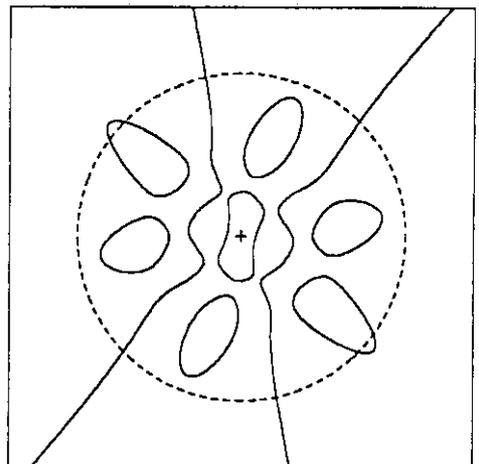


Bild 6

Abbildung 1.1: Nullstellenmengen von *Eigenfunktionen* des harmonischen Oszillators zum 9-fach entarteten *Eigenwert* (siehe §2.2)

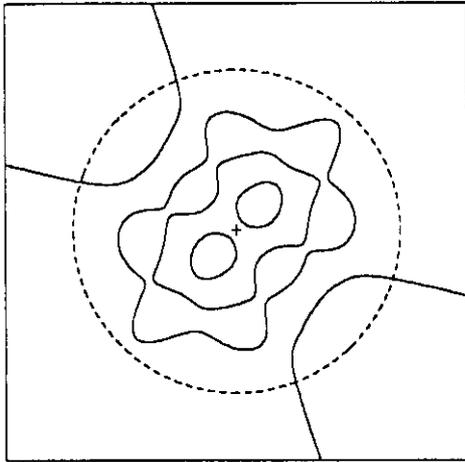


Bild 7

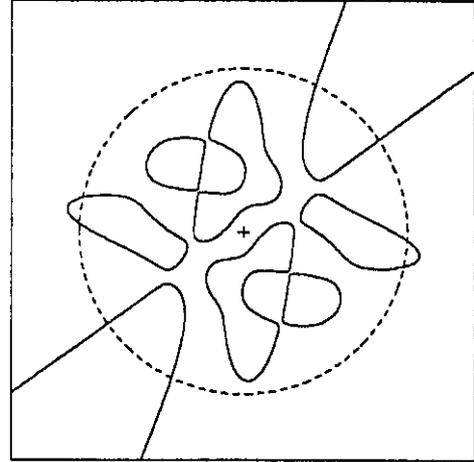


Bild 8

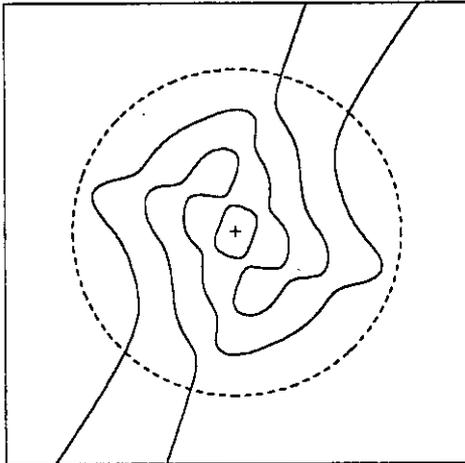


Bild 9

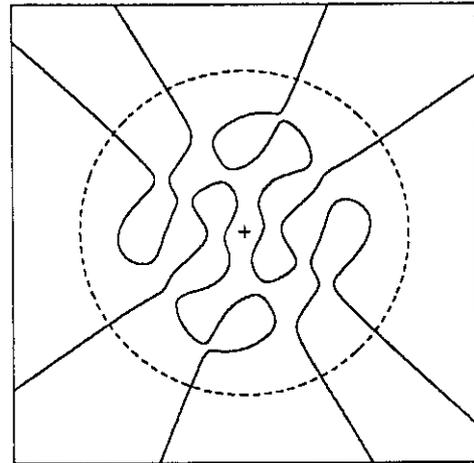


Bild 10

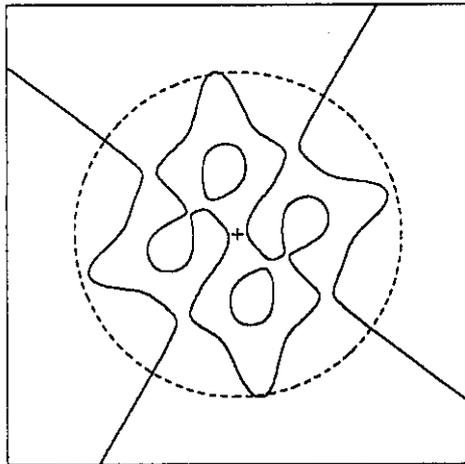


Bild 11

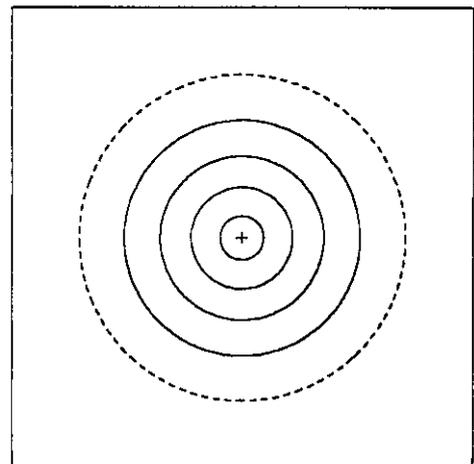


Bild 12

Abbildung 1.2: Nullstellenmengen von Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators zum 9-fach entarteten Eigenwert (siehe §2.2)

stammen alle aus demselben Eigenraum $E(h, M)$. (Der harmonische Oszillator wird in §2.2 behandelt und erklärt.) Trotzdem unterscheiden sich die Nullstellenmengen sehr stark. Manche weisen Symmetrien auf, wie z.B. die Bilder 1,2 und 12. Bei diesen handelt sich um Beispiele der in §2.2 besprochenen Basisfunktionen in kartesischen (Bild 2) und in Polarkoordinaten (Bilder 1 und 12). Das HERMITEpolynom in Bild 5 wurde erzeugt, indem man kritische Punkte erzwungen hat. Wir werden solche Funktionen für den Beweis von Satz 5.5 in §9. benötigen. Andere Funktionen besitzen sehr wenige (Bilder 3 und 9) oder sehr viele (Bilder 1 und 2) Knotengebiete. Wir werden uns in §5. überlegen, ob es für alle Eigenwerte immer eine Eigenfunktion mit so vielen bzw. so wenigen Knotengebieten gibt, und wie viele oder wenige es werden können. Wir werden später an Hand des Beispiels des harmonischen Oszillators Eigenschaften von Eigenfunktionen im Allgemeinen kennenzulernen, und diese Bilder zur Illustration der erhaltenen Resultate verwenden.

Ein Ziel unserer Arbeit wird also sein, etwas Ordnung in diese große Vielfalt zu bekommen. Wir werden daher untersuchen, was diesen Bildern gemeinsam ist, worin sie sich unterscheiden, oder wie man sie ineinander überführen kann. Zuletzt werden wir auch noch eine Einteilung der Nullstellenmengen in verschiedenen "Typen" versuchen. Dabei werden geometrische und topologische Überlegungen im Vordergrund stehen. Wir werden uns nicht mit generischem Verhalten wie z.B. in [16] oder mit dem Verhalten von Nullstellen von Eigenfunktionen zu sehr großen Eigenwerten, d.h. wenn die Energie sehr groß wird (Abbildung 1.3 zeigt ein Beispiel für eine Eigenfunktion mit großer Energie) befassen.

Nach dieser Motivation wollen wir zuerst einige bereits bekannte Eigenschaften von Nullstellen, die für unser Vorhaben sehr wichtig sein werden, erläutern und noch den wichtigen Begriff der "kritischen Nullstelle" einführen.

Auf Grund der HARNACKschen Ungleichung ([11]) gilt, daß jede lokale Lösung ψ von (1.1), die nicht identisch 0 ist, in jeder offenen Umgebung einer Nullstelle x_0 das Vorzeichen wechseln muß. Die geometrischen Konsequenzen für die Knotengebiete sind dann folgende:

Seien D_1 und D_2 Knotengebiete einer solchen Lösung ψ mit $\psi(x) > 0$ für alle $x \in D_1, D_2$, dann kann $\partial D_1 \cap \partial D_2$ nicht groß sein. Für unseren zweidimensionalen Fall läßt sich zeigen ([7]), daß dieser Durchschnitt aus isolierten Punkten besteht.

Diese Eigenschaft für die Knotengebiete erhält man aber auch aus dem Resultat von BERS, das wir hier für den zweidimensionalen Fall und angewendet auf unser Problem angeben wollen.

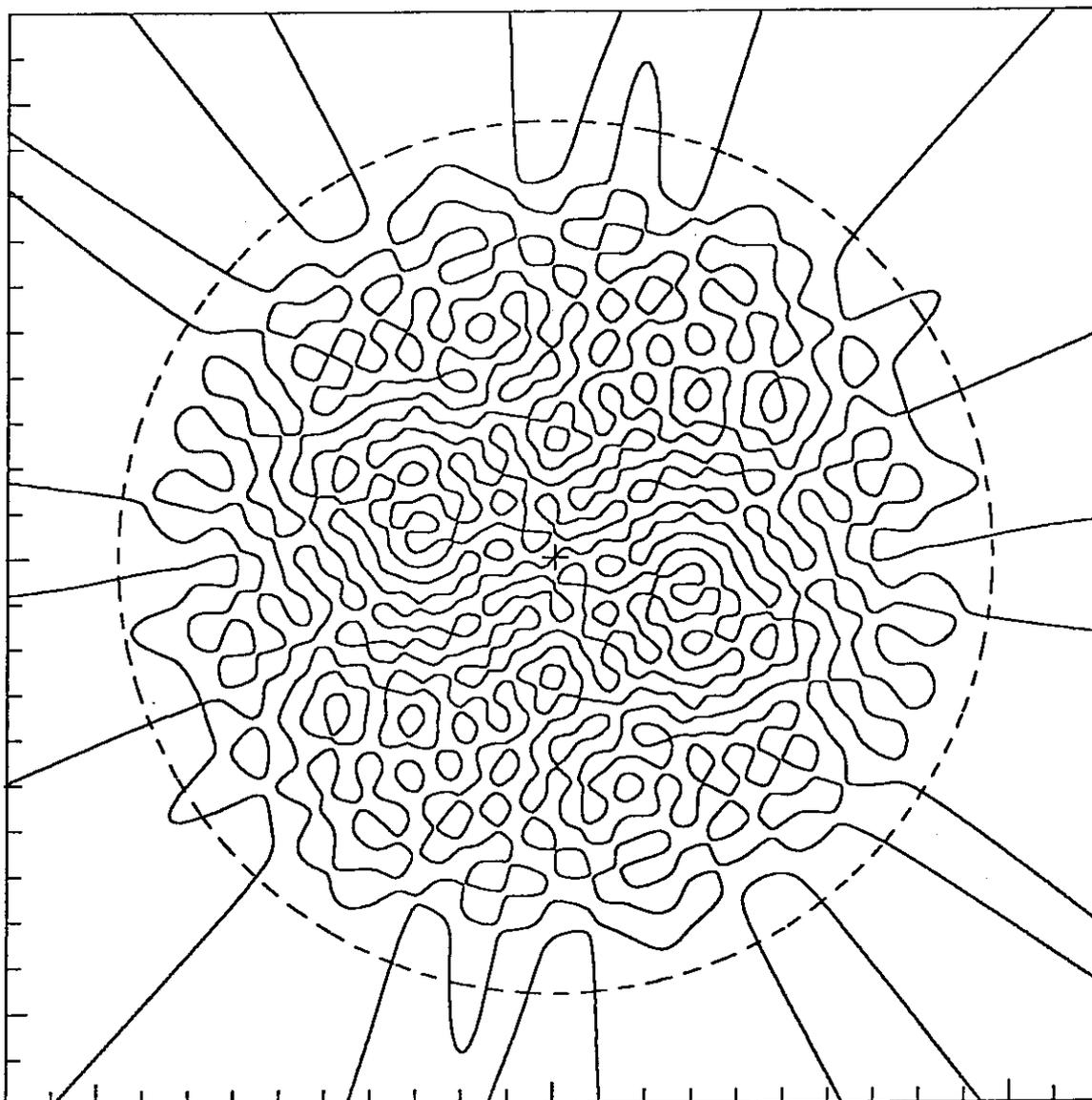


Abbildung 1.9: Nullstellenmenge einer Eigenfunktion des harmonischen Oszillators zum 46-fach entarteten Eigenwert (siehe §2.2)

Doch zuvor wollen wir noch einen Begriff einführen:

Definition 1.2:

Sei ψ eine Lösung von (1.1) mit einer Nullstelle x_0 . Dann läßt sich ψ nach homogenen Polynomen um x_0 (asymptotisch) entwickeln. Wir sagen:

ψ *verschwindet bei* $x_0 \in N(\psi)$ *mit Ordnung* $\varrho_\psi(x_0)=m$, wenn das erste nichtverschwindende homogene Polynom dieser Entwicklung vom Grad m ist. Falls $m \geq 2$, dann heißt x_0 *kritische Nullstelle von Ordnung* m von ψ . Die Menge aller kritischen Nullstellen bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(\psi)$.

Äquivalent zu dieser Definition ist, daß alle partiellen Ableitungen von ψ in x_0 bis zur Ordnung $m - 1$ verschwinden.

Satz 1.1: (Bers) [4]

Sei ψ eine Lösung von (1.1), $x_0 \in N(\psi)$ und $p_m(x)$ das erste nichtverschwindende homogene Polynom der Reihenentwicklung. Wegen der eindeutigen Fortsetzbarkeit von Eigenfunktionen ("unique continuation") ist $m \in \mathbb{N}$.

Dann ist p_m harmonisch und es gilt

$$\psi(x - x_0) = p_m(x - x_0) + O(|x - x_0|^{m+\varepsilon}),$$

wobei $\varepsilon \in (0, 1)$. D.h. aber, es gibt $a, b \in \mathbb{R}$, sodaß

$$p_m(x) = |x|^m (a \cos(m \cdot \arg x) + b \sin(m \cdot \arg x))$$

Aus diesem Satz folgt, daß die kritischen Nullstellen isoliert sind und die Nullstellenmengen außer bei kritischen Nullstellen lokal parametrisierbar sind. D.h. $N(\psi)$ läßt sich als Vereinigung von Bögen (=Bilder von stetigen Kurven) darstellen. Wir bezeichnen diese als *Knotenlinien*.

Man kann auch zeigen ([7]), daß es für jeden Punkt $x_0 \in N(\psi)$ mit $\varrho_\psi(x_0) = m$ einen lokalen C^1 -Diffeomorphismus $\Phi: M \rightarrow M$ gibt, sodaß

$$\psi(x_0) = p_m(\Phi(x_0)).$$

Korollar 1.2: [7]

Wenn sich Knotenlinien schneiden, dann bilden sie lokal ein äquiangulares System.

Bemerkung: Satz 1.1 gilt auch entsprechend im höheren Dimensionen, nur geht naturgemäß die Einfachheit verloren, und es gibt kein Analogon zum Korollar 1.2 (vgl. dazu [13]).

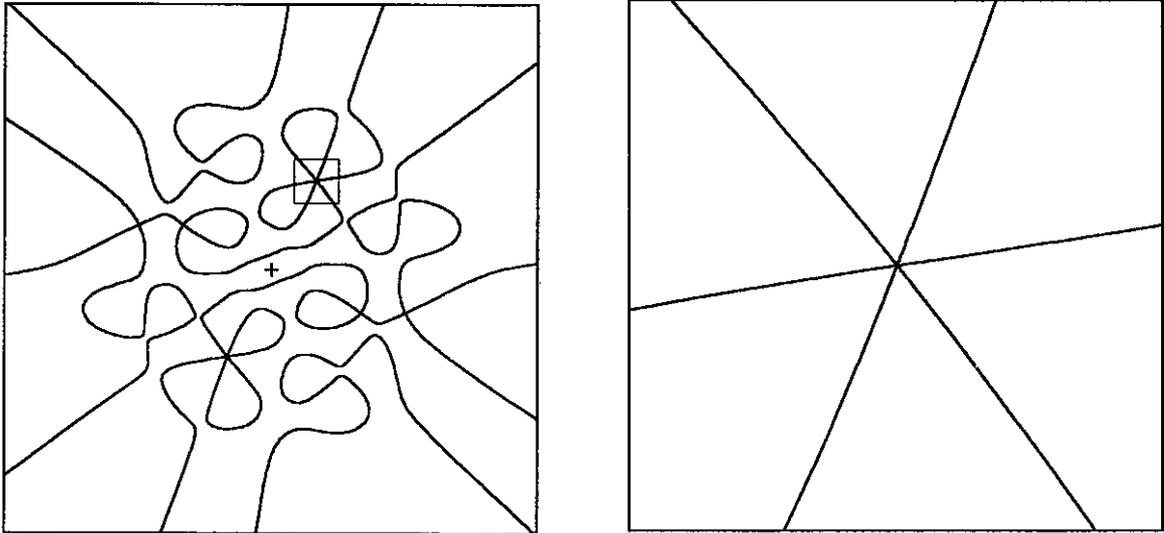


Abbildung 1.4: Illustration von Korollar 1.2 am Beispiel einer Eigenfunktion des harmonischen Oszillators.

Wir werden im folgenden nun den harmonischen Oszillator mit seinen Eigenfunktionen sowie die Kugelflächenfunktionen, die uns als Beispiele dienen, beschreiben (§2).

In §3. zeigen wir einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen der Anzahl der Knotenlinien, der Ordnungen aller kritischen Nullstellen einer Eigenfunktion und die der Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten ihrer Nullstellenmenge. Da sich dieser Satz (zur Zeit) nicht sinnvoll auf höhere Dimensionen verallgemeinern läßt, er aber für die folgenden Sätze von zentraler Bedeutung ist, erklärt sich die Einschränkung auf den zweidimensionalen Fall von selbst.

In §4. befassen wir uns mit stetigen Wegen im Eigenraum und wie sehr sich dabei die Knotenlinien ändern können. In §5. behandeln wir Schranken für die Anzahl der Knotengebiete. In §6. definieren Graphen von Nullstellenmengen und benützen diese um die verschiedenen "Nodal Pattern" zu charakterisieren.

2. Kugelflächenfunktionen und Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

Wir wollen nun die Eigenschaften der Knotengebiete und kritische Nullstellen von Eigenfunktionen am Beispiel zweier konkreter Probleme untersuchen.

2.1. Kugelflächenfunktionen:

Wir betrachten das Eigenwertproblem $(L^2 - \lambda)\psi = 0$ auf $M=S^2$, wobei $L^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta})$ der winkelabhängige Anteil des 3-dimensionalen LAPLACE-Operators mal r^2 ist (ϕ und θ sind die Winkelkoordinaten.). Es seien die

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(\ell - m)!(2\ell + 1)!}{(\ell + m)!4\pi}} P_{\ell}^m(\cos \theta) \cos m\phi$$

$$W_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(\ell - m)!(2\ell + 1)!}{(\ell + m)!4\pi}} P_{\ell}^m(\cos \theta) \sin m\phi$$

$$W_{\ell 0} \equiv 0$$

die normierten *Kugelflächenfunktionen*, wobei $\ell \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{0, \dots, \ell\}$ und $P_{\ell}^m(z)$ die assoziierten LEGENDREpolynome sind. Dann sei

$$\mathcal{L}(\ell, b)(\theta, \phi) := \sum_{m=0}^{\ell} (\alpha_m Y_{\ell m}(\theta, \phi) + \beta_m W_{\ell m}(\theta, \phi))$$

wobei $b = (\alpha_0, 0; \alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_{\ell}, \beta_{\ell}) \in \mathbb{R}^{2\ell+1} \times \{0\}$. Da $\mathcal{L}(\ell, b)$ linear in b ist, kann man o.B.d.A. $b \in S^{2\ell} \times \{0\}$, d.h. $|b|=1$, wählen.

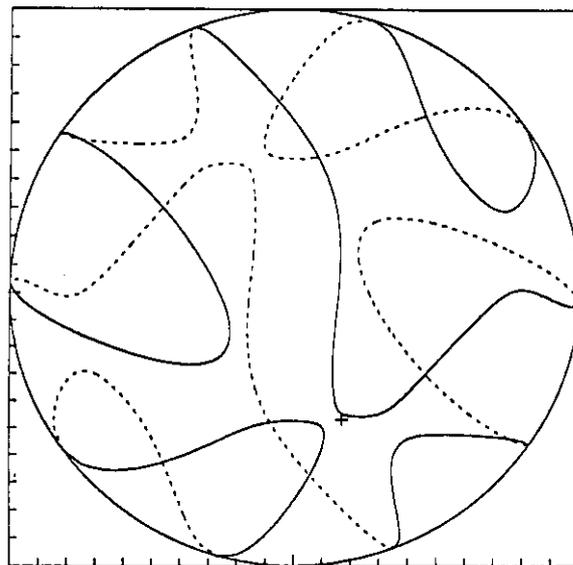


Abbildung 2.1

Lemma 2.1: ([5])

$(L^2 - \lambda)\psi = 0$ hat die Lösungen $\psi(\theta, \phi) = \mathcal{L}(\ell, b)(\theta, \phi)$ für $\lambda = \ell(\ell + 1)$, $\ell \in \mathbb{N}_0$. λ ist dabei $(2\ell + 1)$ -fach entartet.

Abbildung 2.1 zeigt die Nullstellen einer Kugelflächenfunktion.

Diese Lösungen sind die 3-dimensionalen harmonischen homogenen Polynome, restringiert auf S^2 .

2.2. Der harmonische Oszillator: $(-\Delta + |x|^2 - \lambda)\psi = 0$ auf $M = \mathbb{R}^2$.

Es seien die

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k! (n - 2k)!} (2x)^{n-2k}$$

die (bezüglich der Gewichtsfunktion $w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ normierten) HERMITEpolynome, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann bezeichnen wir

$$\mathcal{H}(n, a)(x) := \sum_{k=0}^n a_k H_k(x^1) H_{n-k}(x^2)$$

wobei $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist, als 2-dimensionalen HERMITEpolynome, oder einfach als HERMITEpolynome, wenn dies eindeutig ist. Da $\mathcal{H}(n, a)$ linear in a ist, kann man o.B.d.A. $a \in S^n$ wählen.

Lemma 2.2:

Der harmonische Oszillator hat die Lösungen $\psi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \cdot \mathcal{H}(n, a)(x)$, $a \in S^n$, für $\lambda = 2n + 2$, $n \in \mathbb{N}_0$. λ ist dabei $(n + 1)$ -fach entartet.

Beweis:

Da $(-\Delta + |x|^2 - \lambda) = (-\frac{\partial}{\partial x^1})^2 + (x^1)^2 - \lambda_1) + (-\frac{\partial}{\partial x^2})^2 + (x^2)^2 - \lambda_2)$, erhält man zwei unabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen, die von HERMITEpolynomen, multipliziert mit $e^{-\frac{(x^i)^2}{2}}$, gelöst werden ([1]). \square

Da $e^{-\frac{|x|^2}{2}} > 0 \forall x \in \mathbb{R}^2$, ist $N(\psi) = N(\mathcal{H}(n, a))$. Daher verschwindet ψ bei $x_0 \in N(\psi)$ mit Ordnung m genau dann, wenn $\mathcal{H}(n, a)$ bei $x_0 \in N(\mathcal{H}(n, a))$ mit Ordnung m verschwindet. Wir betrachten daher die Knotengebiete und kritischen Nullstellen der HERMITEpolynome $\mathcal{H}(n, a)$.

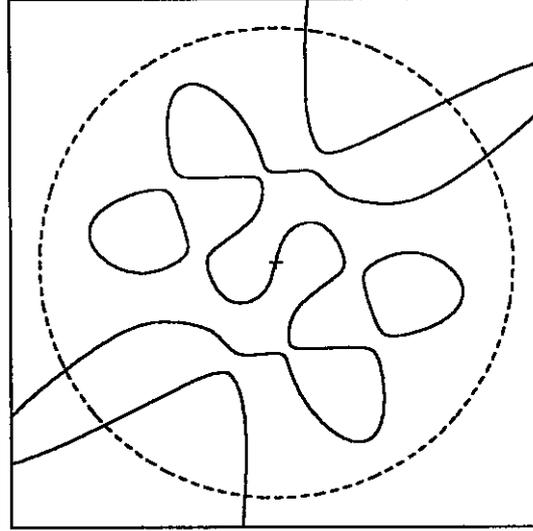


Abbildung 2.2: Beispiel für die Nullstellen einer Eigenfunktion des harmonischen Oszillators. Der strichlierte Kreis hat Radius $\sqrt{\lambda} = \sqrt{2n+2}$. Seine Bedeutung ist aus Lemma 2.4 ersichtlich.

In manchen Fällen ist es nützlich, die HERMITEpolynome in Polarkoordinaten darzustellen. Dazu benötigen wir

Lemma 2.3:

Es seien die $L_j^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{k!} \binom{j+\alpha}{j-k} x^k$, $j, \alpha \in \mathbb{N}_0$, die verallgemeinerten LAGUERREpolynome. Dann sind die

$$\psi(r, \vartheta) = e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^{n-2j} \cdot L_j^{(n-2j)}(r^2) \cdot e^{\pm i(n-2j)\vartheta}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ die einzigen beim Ursprung unbeschränkten Lösungen von

$$(-\Delta + r^2 - \lambda)\psi(r, \vartheta) = 0, \lambda = 2n + 2.$$

Nach diesem Lemma läßt sich jede Lösung des harmonischen Oszillators zum Eigenwert $\lambda = 2n + 2$ darstellen als

$$\mathcal{H}(n, c)(r, \vartheta) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \gamma_{nj} L_j^{(n-2j)}(r^2) \cdot r^{n-2j} \cdot (\alpha_j \cos(n-2j)\vartheta + \beta_j \sin(n-2j)\vartheta),$$

wobei $\gamma_{nj} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{j!}{(n-j)!}}$ ein Normierungsfaktor bezüglich der Gewichtsfunktion $w(r) = e^{-\frac{r^2}{2}}$ und $c = (\alpha_0, \beta_0; \dots; \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \beta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ aus S^n (bzw. aus $S^n \times \{0\}$ falls n gerade) ist.

Beweis von Lemma 2.3:

Sei $\psi(r, \vartheta) = f(r) \cdot g(\vartheta)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda \psi(r, \vartheta) &= (-\Delta + r^2)\psi(r, \vartheta) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right)(f(r) \cdot g(\vartheta)) = \\ &= -g(\vartheta) \cdot f''(r) - g(\vartheta) \cdot \frac{1}{r} f'(r) - \frac{1}{r^2} f(r) \cdot g''(\vartheta) + r^2 f(r) \cdot g(\vartheta) \end{aligned}$$

Daraus erhält man die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$g''(\vartheta) = -\ell^2 \cdot g(\vartheta), \text{ die gelöst wird durch } g(\vartheta) = e^{\pm i\ell\vartheta}$$

und

$$-f'' - \frac{1}{r} f'(r) + \left(r^2 - \lambda + \frac{\ell^2}{r^2}\right) f(r) = 0,$$

wobei ℓ beliebig ist.

Setzt man $f(r) = r^{-\frac{1}{2}} \cdot u(r)$ und $\lambda = 4j + 2\ell + 2$ ($j \in \mathbb{N}_0$), so erhält man

$$-u''(r) + \left(r^2 + \frac{1-4\ell^2}{4r^2} - 4j - 2\ell - 2\right)u(r) = 0.$$

Diese Gleichung wird gelöst durch

$$u(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^{\ell+\frac{1}{2}} \cdot L_j^{(\ell)}(r^2) \quad ([1]).$$

Also ist $f(r) = e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^\ell \cdot L_j^{(\ell)}(r^2)$. Da nach Lemma 2.1 $\lambda = 2n + 2$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, ist $2n + 2 = 4j + 2\ell + 2$, also $\ell = n - 2j$. Außerdem ist $\ell \notin \mathbb{Z}^-$, d.h. $j \in \{0, \dots, [\frac{n}{2}]\}$. \square

Da der \mathbb{R}^2 nicht kompakt ist, benötigen wir noch eine wichtige Eigenschaft der HERMITEpolynome:

Lemma 2.4:

Sei $\psi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \cdot \mathcal{H}(n, a)(x)$ eine Lösung des harmonischen Oszillators. Dann gilt für alle $D \in \Omega(\psi)$

$$D \cap B(0, \sqrt{2n+2}) \neq \emptyset,$$

wobei $B(0, \sqrt{2n+2}) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \sqrt{2n+2}\}$.

Bemerkung: $B(0, \sqrt{2n+2})$ ist der Bereich, wo die Energie λ kleiner als das Potential r^2 ist. In diesem Gebiet ist $\psi \Delta \psi \geq 0$.

Beweis von Lemma 2.4:

Angenommen $\exists D \in \Omega(\psi)$, mit $D \cap B(0, \sqrt{2n+2}) = \emptyset$. Dann wäre für $\lambda = 2n + 2$

$$0 = \int_D \psi(-\Delta + r^2 - \lambda)\psi dx = \int_D \underbrace{|\text{grad}\psi|^2}_{\geq 0} dx + \int_D \underbrace{(r^2 - \lambda)|\psi|^2}_{> 0} dx > 0$$

ein Widerspruch. \square

3. Eine Identität

Knotengebiete sind etwas sehr Instabiles. Durch geringfügiges Ändern einer Eigenfunktion $\psi \in E(h, M)$ kann sich die Anzahl der Knotengebiete stark ändern. Abbildung 3.1 veranschaulicht das am Beispiel des harmonischen Oszillators. Wird a etwas verändert, so sieht zwar $N(\mathcal{H}(n, a + \varepsilon))$ "fast genauso" aus wie $N(\mathcal{H}(n, a))$, aber $\mathcal{H}(n, a + \varepsilon)$ hat 13 Knotengebiete, während $\mu(\mathcal{H}(n, a)) = 21$.

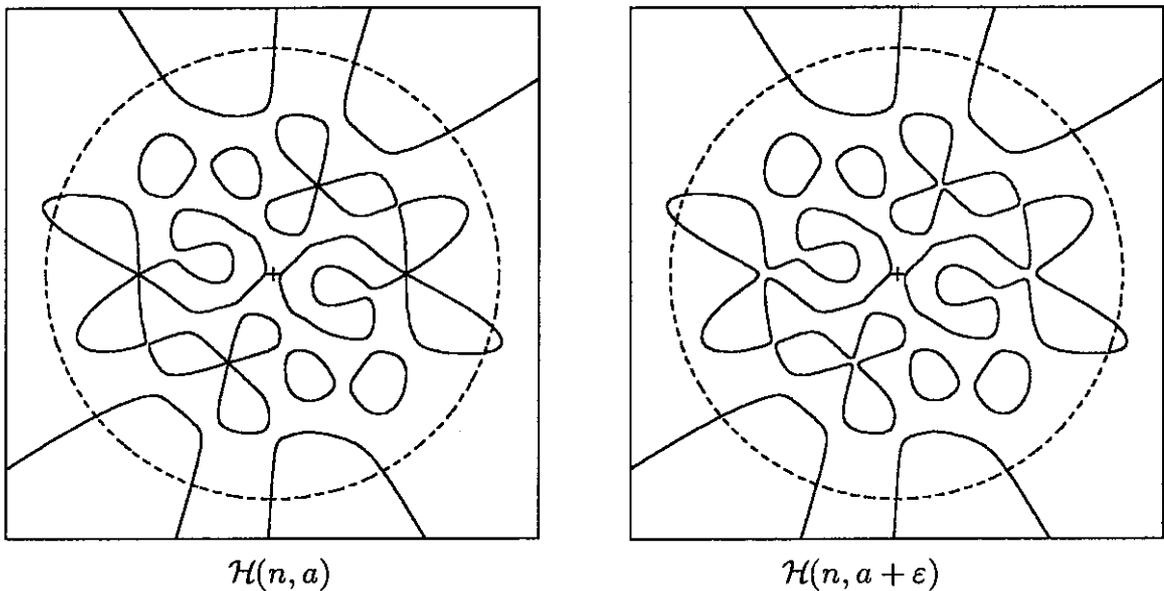


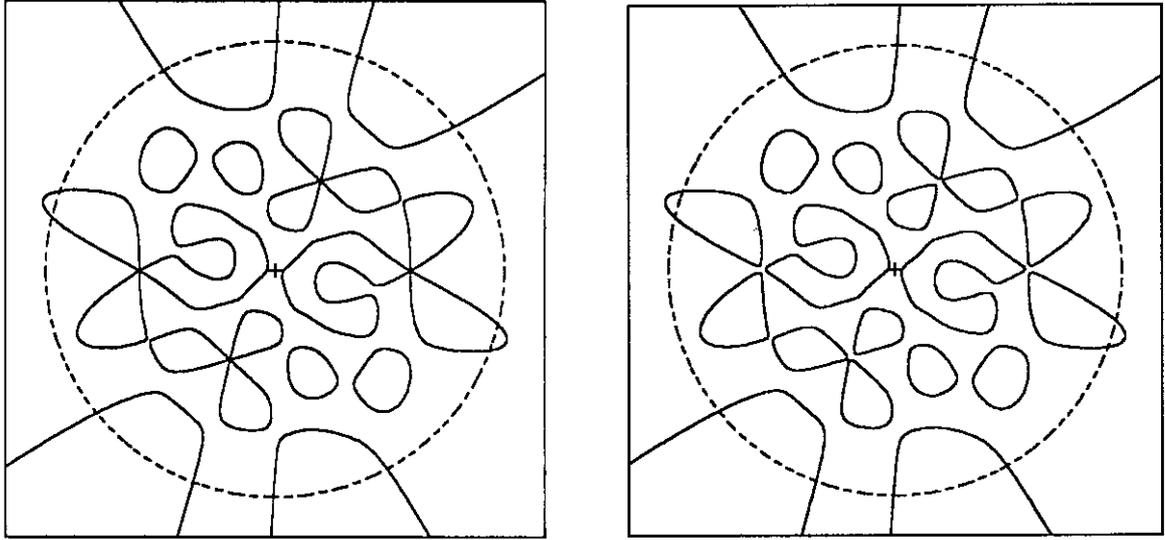
Abbildung 3.1

Wir wollen deshalb eine Funktion $E(h, M) \rightarrow \mathbf{Z}$ finden, die uns eine Aussage über $\mu(\psi)$ liefert, die aber nicht so stark variieren soll wie μ . So ist etwa im obigen Beispiel die Funktion

$$\psi \mapsto \mu(\psi) + |\mathcal{K}(\psi)| - \sum_{x \in \mathcal{K}(\psi)} \varrho_{\psi}(x)$$

konstant (ϱ_{ψ} ist die Ordnung der kritischen Nullstelle x). In Abbildung 3.2 leistet sie jedoch nicht das Gewünschte. Durch Hinzufügen eines weiteren Terms — nämlich in dem man auch noch die Wegzusammenhangskomponenten von $N(\psi)$ berücksichtigt — erhält man aber eine Funktion, die auf ganz $E(h, M)$ konstant ist.

Wir erhalten dabei ein Resultat, das EULERS Satz über Polyeder (z.B. in [2]) sehr ähnlich ist. Wir werden in §7.1 sogar sehen, daß man dieses auf eine moderne, allgemeinere Version dieses Theorems (z.B. in [17]) zurückführen kann. (Der in §7. gemachte Beweis ist aber bewußt elementar gehalten.)



$\mathcal{H}(n, a)$

$\mathcal{H}(n, a + \varepsilon)$

Abbildung 3.2

Zur genauen Formulierung dieser Identität benötigen wir zuerst die

Definition 3.1:

(1) Sei $M = S^2$ und $\psi \in E(h, S^2)$. Dann sei

$$\nu_\psi(x) := \varrho_\psi(x) - 1 \text{ für } x \in N(\psi)$$

$$\nu(\psi) := \sum_{x \in \mathcal{K}(\psi)} \nu_\psi(x) = \sum_{x \in \mathcal{K}(\psi)} \varrho_\psi(x) - |\mathcal{K}(\psi)|$$

$$\zeta(\psi) := |\{A \subseteq N(\psi) : A \text{ ist Wegzusammenhangskomponente von } N(\psi)\}|.$$

(2) Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $\psi \in E(h, \mathbb{R}^2)$. Dann sei

$$\nu_\psi(x) := \varrho_\psi(x) - 1 \text{ für } x \in N(\psi)$$

$$\varrho_\psi(\infty) := \frac{1}{2} \liminf_{R \rightarrow \infty} |\{A \subseteq N(\psi) \setminus B(0, R) : A \text{ ist Wegzusammenhangskomponente von } N(\psi) \setminus B(0, R)\}|$$

$$A \text{ ist Wegzusammenhangskomponente von } N(\psi) \setminus B(0, R)\}|$$

$$\nu_\psi(\infty) := \begin{cases} \varrho_\psi(x) - 1 & \text{falls } \sup_{x \in N(\psi)} |x| = \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\nu(\psi) := \sum_{x \in \mathcal{K}(\psi)} \nu_\psi(x) + \nu_\psi(\infty)$$

$$\zeta(\psi) := |\{A \subseteq N(\psi) : A \text{ ist Wegzusammenhangskomponente von } N(\psi),$$

$$A \text{ beschränkt}\}| + \begin{cases} 0 & \text{falls } \sup_{x \in N(\psi)} |x| < \infty \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Definition im Fall $M=\mathbb{R}^2$ klingt etwas kompliziert. Es gehen hier die Schwierigkeiten, die sich aus der fehlenden Kompaktheit des \mathbb{R}^2 ergeben ein. Mit Hilfe dieser Beziehungen läßt sich eine Identität formulieren. Man erhält

Satz 3.1:

Sei $M=S^2$ oder $M=\mathbb{R}^2$, $\psi \in E(h, M)$ und es gelte $\mu(\psi) < \infty$. Dann gilt:

$$\mu(\psi) - \nu(\psi) - \zeta(\psi) = 1$$

Wir werden später (§5.) sehen, daß die Bedingung $\mu(\psi) < \infty$ bei Eigenwertproblemen mit diskretem Spektrum immer erfüllt ist. Insbesondere gilt das für unsere Beispiele.

Beispiel zur Veranschaulichung:

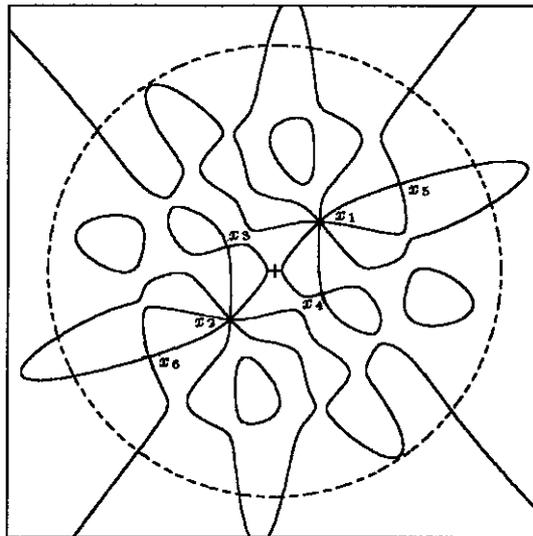


Abbildung 3.3

Abbildung 3.3 zeigt $N(\psi)$ für $\psi = \mathcal{H}(n, a)$ für ein $a \in S^n$.

Es gibt hier 6 kritische Nullstellen x_1, \dots, x_6 und es ist

$$\varrho_\psi(x_1) = \varrho_\psi(x_2) = 4$$

$$\varrho_\psi(x_3) = \varrho_\psi(x_4) = \varrho_\psi(x_5) = \varrho_\psi(x_6) = 2$$

$$\nu_\psi(\infty) = 1,$$

wie man leicht überprüfen kann. Also ist

$$\nu(\psi) = 2 \cdot (4 - 1) + 4 \cdot (2 - 1) + 1 = 11.$$

Da $\zeta(\psi) = 4 + 1 = 5$ muß

$$\mu(\psi) = 1 + \nu(\psi) + \zeta(\psi) = 1 + 11 + 5 = 17$$

sein. Daß das richtig ist, kann man durch Abzählen der Knotengebiete — falls man sich dabei nicht verzählt — leicht nachprüfen.

4. Wege in $E(h, M)$

Wir wollen nun untersuchen, wie stark sich die Knotenlinien verändern können, falls die Eigenfunktion ψ etwas gestört wird, oder mit anderen Worten: Wie variiert $N(\psi_t)$, wenn ψ_t , $t \in [0, 1]$ ein stetiger Weg in $E(h, M)$ ist?

So ist etwa $t \mapsto N(\psi_t)$ in einem gewissen Sinn stetig, da die kritischen Nullstellen isoliert sind. Aus energetischen Gründen muß auch die Fläche eines jeden Knotengebietes gleichmäßig nach unten beschränkt sein (D.h. sie muß größer als eine Konstante sein, die in ganz $E(h, M)$ gilt.). Es kann also nicht sein, daß ein Knotengebiet immer kleiner wird, bis es verschwunden ist.

Zuerst müssen wir noch klären, was wir unter "stetig" verstehen, d.h. bezüglich welcher Topologie die Stetigkeit gelten soll.

Es ist klar, daß man stets eine ON-Basis $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ von $E(h, M)$ finden kann, wenn $\dim E(h, M) = n$ endlich ist. Wir können die Eigenfunktionen darstellen als

$$\psi = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k.$$

Wir können damit jedem $\psi \in E(h, M)$ einen Vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ zuordnen, und jedem normierten ψ ein $a \in S^{n-1}$. Es ist daher $E(h, M) \cong \mathbb{R}^n$ (vgl. auch §2.).

Sei nun $t \mapsto \psi_t$ ein Weg in $E(h, M)$. Dann ist $t \mapsto a_t = (a_1^t, \dots, a_n^t)$ ein Weg in \mathbb{R}^n . Wir wollen natürlich, daß es genügt diesen Weg zu betrachten anstatt jenen im Eigenraum. Deshalb soll der Weg $t \mapsto a_t$ stetig bezüglich der üblichen (EUKLIDischen) Norm-Topologie sein, d.h.

$$\forall t_0 \in [0, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ soda\ss } |a_{t_0} - a_t| < \varepsilon \text{ falls } |t_0 - t| < \delta.$$

Da

$$\begin{aligned} \|\psi_t - \psi_{t_0}\|_2^2 &= \langle \psi_t - \psi_{t_0}, \psi_t - \psi_{t_0} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n (a_k^t - a_k^{t_0}) \psi_k, \sum_{l=1}^n (a_l^t - a_l^{t_0}) \psi_l \right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (a_k^t - a_k^{t_0})(a_l^t - a_l^{t_0}) \langle \psi_k, \psi_l \rangle = \sum_{k=1}^n (a_k^t - a_k^{t_0})^2 = |a_t - a_{t_0}|^2 \end{aligned}$$

ist der Weg $t \mapsto \psi_t$ unter diesen Voraussetzungen stetig bezüglich der L^2 -Norm. Es gilt daher:

$$\forall t_0 \in [0, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ soda\ss } \|\psi_{t_0} - \psi_t\|_2 < \varepsilon \text{ falls } |t_0 - t| < \delta.$$

Lemma 4.1:

Sei $M = S^2$ oder $M = \mathbb{R}^2$ und $E(h, M)$ endlichdimensional. $t \mapsto \psi_t$, $[0, 1] \rightarrow E(h, M)$ sei ein stetiger Weg (bezüglich der L^2 -Norm) mit $\|\psi_t\|_2 = 1$.

Dann gilt:

(1) $t \mapsto N(\psi_t)$ ist lokal stetig, d.h.

Für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq M$ gilt: $\forall t_0 \in [0, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,
sodaß $N(\psi_t) \cap K$ in einer ε -Umgebung von $N(\psi_{t_0}) \cap K$ enthalten ist, d.h.
 $N(\psi_t) \cap K \subset \{x \in K : d(x, N(\psi_{t_0})) < \varepsilon\}$, falls $|t - t_0| < \delta$.

(2) $\forall t_0 \in [0, 1], \forall x \in N(\psi_{t_0})$, für jede offene Umgebung $U(x)$ gibt es ein $\delta > 0$,
sodaß $U(x) \cap N(\psi_t) \neq \emptyset, \forall t \in [0, 1]$ mit $|t - t_0| < \delta$.

Bemerkung: Behauptung (2) sagt aus, daß Knotenlinien nicht plötzlich “entstehen”
oder “verschwinden” können. Sie können nur in M “herumwandern” und sich dabei
Schleifen von anderen Knotenlinien “ablösen” oder mit ihnen “verschmelzen”.

Bemerkung: Im Fall $M = S^2$ kann auch $K = S^2$ sein, d.h. hier gilt diese Stetigkeit
global.

Bemerkung: Wie wir oben gesehen haben, können wir den Weg $t \mapsto \psi_t$ auffassen
als Weg in S^{n-1} .

Zum Beweis dieses Lemmas brauchen wir eine andere Bedingung, nämlich
punktweise Stetigkeit. Es stellt sich aber heraus, daß diese unter den Voraussetzun-
gen von Lemma 4.1 immer gegeben ist:

Lemma 4.2:

Sei $E(h, M)$ endlichdimensional und $t \mapsto \psi_t$ ein stetiger Weg bezüglich der
 L^2 -Norm mit $\|\psi_t\|_2 = 1$. Dann ist dieser Weg auch punktweise stetig, d.h.

$\forall x \in M, \forall t_0 \in [0, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, sodaß $|\psi_{t_0}(x) - \psi_t(x)| < \varepsilon$
falls $|t - t_0| < \delta$.

Beweis:

Wir haben gesehen, daß $\psi_t = \sum_{k=1}^n a_k^t \psi_k$, wobei $a_t = (a_1^t, \dots, a_n^t) \in S^{n-1}$, und
es ist $\|\psi_t - \psi_{t_0}\|_2^2 = |a_t - a_{t_0}|^2$

Sei $x \in M$.

$$|\psi_t(x) - \psi_{t_0}(x)| = \left| \sum_{k=1}^n (a_k^t - a_k^{t_0}) \psi_k(x) \right| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n |a_k^t - a_k^{t_0}|}_{=\|a_t - a_{t_0}\|_1} \underbrace{|\psi_k(x)|}_{\leq \max_k |\psi_k(x)|}$$

Da $\|a_t - a_{t_0}\|_1 \leq \sqrt{n} |a_t - a_{t_0}| = \sqrt{n} \|\psi_t - \psi_{t_0}\|_2$ und $\max_{k=1, \dots, n} |\psi_k(x)| < \infty$ gilt weiters

$$|\psi_t(x) - \psi_{t_0}(x)| \leq \text{const} \cdot \|\psi_{t_0} - \psi_t\|_2 < \text{const} \cdot \varepsilon = \varepsilon',$$

falls $|t - t_0| < \delta$. Also ist $t \mapsto \psi_t$ punktweise stetig. \square

Beweis von Lemma 4.1:

Wir benützen nun, daß unter den Voraussetzungen des Lemmas punktweise
Stetigkeit gilt.

(2) Indirekt: Angenommen $\exists t_0 \in [0, 1]$ mit $x \in N(\psi_{t_0})$ und eine offene Umgebung $U(x)$, wo es $\forall \delta > 0$ ein $t \in [0, 1]$ mit $|t - t_0| < \delta$ gibt, sodaß $U(x) \cap N(\psi_t) = \emptyset$ ist.

Aus §1. wissen wir, daß ψ_{t_0} in x das Vorzeichen wechselt. Also ist

$$\{x' \in U(x) : \psi_{t_0}(x') > 0\} \neq \emptyset \text{ und} \\ \{x' \in U(x) : \psi_{t_0}(x') < 0\} \neq \emptyset.$$

Andererseits, falls $U(x) \cap N(\psi_t) = \emptyset$ für ein $t \in [0, 1]$, dann ist (o.B.d.A.) $\psi_t(x') > 0, \forall x' \in U(x)$.

Also gibt es ein $y \in U(x)$ mit $\psi_{t_0}(y) < 0$ und nach Annahme für alle $\delta > 0$ ein t mit $|t - t_0| < \delta$, wo $\psi_t(y) > 0$ ist. Daher gilt für so ein t :

$$|\psi_t(y) - \psi_{t_0}(y)| = |\psi_t(y)| + |\psi_{t_0}(y)| > |\psi_{t_0}(y)| > \varepsilon_0 > 0 \text{ für ein } \varepsilon_0 > 0.$$

Daher gibt es $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ kein $\delta > 0$, wo $\forall t \in [0, 1]$, mit $|t - t_0| < \delta$, $|\psi_t(y) - \psi_{t_0}(y)| < \varepsilon$ gilt. Ein Widerspruch zur punktweisen Stetigkeit von $t \mapsto \psi_t$.

(1) Sei $K \subseteq M$ kompakt, $t_0 \in [0, 1]$ und $\varepsilon > 0$. Sei weiters $U_\varepsilon := \{x \in K : d(x, N(\psi_{t_0})) < \varepsilon\}$.

Nach (2) gibt es ein $\delta_1 > 0$, sodaß für alle $t \in [0, 1]$, $|t - t_0| < \delta_1$ gilt: $U_\varepsilon \cap N(\psi_t) \neq \emptyset$. Sei daher O_1 die größte offene Teilmenge von K für die gilt: $N(\psi_t) \cap O_1 \subset U_\varepsilon \cap O_1, \forall t \in [0, 1], |t - t_0| < \delta_1$. Wegen (2) ist $O_1 \neq \emptyset$. Sei jetzt $A_1 \subset O_1$ eine abgeschlossene nichtleere Teilmenge.

Dann gibt es ein $\delta_2 > 0$, sodaß für alle $t \in [0, 1]$, $|t - t_0| < \delta_2$ gilt: $U_\varepsilon \setminus A_1 \cap N(\psi_t) \neq \emptyset$. Genauso wie oben sei O_2 die größte offene Teilmenge von $K \setminus A_1$, für die gilt: $N(\psi_t) \cap O_2 \subset U_\varepsilon \cap O_2, \forall t \in [0, 1], |t - t_0| < \delta_2$. $O_2 \neq \emptyset$ und $A_2 \subset O_2$ sei wieder eine abgeschlossene nichtleere Teilmenge von O_2 .

Genauso erhalten wir ein δ_3 und eine offene Teilmenge O_3 von $K \setminus (A_1 \cup A_2)$, usw.

Man erhält also eine offene Überdeckung O_1, O_2, \dots von K . Für jede dieser offenen Teilmengen gilt:

$$N(\psi_t) \cap O_i \subset U_\varepsilon \cap O_i, \forall t \in [0, 1], |t - t_0| < \delta_i \text{ für ein } \delta_i > 0.$$

Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung O_1, \dots, O_n . Dann sei $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Es gilt daher auf ganz K :

$$N(\psi_t) \cap K = N(\psi_t) \cap (O_1 \cup \dots \cup O_n) = (N(\psi_t) \cap O_1) \cup \dots \cup (N(\psi_t) \cap O_n) \subset \\ (U_\varepsilon \cap O_1) \cup \dots \cup (U_\varepsilon \cap O_n) = U_\varepsilon \cap K = U_\varepsilon \\ \text{falls } |t - t_0| < \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} = \delta. \square$$

Lemma 4.3:

Für alle $E(h, M)$, wo h nach unten beschränkt ist, gibt es eine Konstante V_0 , sodaß für alle $\psi \in E(h, M)$ und alle $D \in \Omega(\psi)$ gilt:

$$\text{vol}(D) \geq V_0,$$

wobei $\text{vol}(D)$ das LEBESGUEmaß von D ist.

Beweis:

Da h nach unten beschränkt ist, folgt dies aus dem Satz von FABER-KRAHN ([6], S. 86). \square

Das folgende Lemma, das wir in §8. beweisen werden, gibt uns an, wie die Ausdrücke $\mu(\psi)$, $\nu(\psi)$ und $\zeta(\psi)$ miteinander zusammenhängen, und wie stark sich ein Ausdruck ändern kann, wenn die Änderung der anderen bekannt ist.

Lemma 4.4:

Sei $M = S^2$ oder $M = \mathbb{R}^2$, $E(h, M)$ endlichdimensional und h nach unten beschränkt. $t \mapsto \psi_t$, $[0, 1] \rightarrow E(h, M)$ sei ein stetiger Weg bezüglich der L^2 -Norm mit $\|\psi_t\|_2 = 1$. Sei weiters

$$\begin{aligned} &\nu(\psi_t) \text{ konstant auf } [0, 1) \text{ und} \\ &\nu(\psi_1) = \nu(\psi_0) + \kappa \text{ für ein } \kappa \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Dann gilt

- (1) $\mu(\psi_t)$ und $\zeta(\psi_t)$ sind konstant auf $[0, 1)$ und es ist $\kappa \geq 0$, d.h. $\nu(\psi_1) \geq \nu(\psi_0)$.
- (2) $\mu(\psi_1) = \mu(\psi_0) + \kappa'$
 $\zeta(\psi_1) = \zeta(\psi_0) - \kappa''$
für $\kappa', \kappa'' \in \{0, \dots, \kappa\}$, wobei $\kappa'' \leq \zeta(\psi_0) - 1$ und $\kappa' + \kappa'' = \kappa$.

Lemma 4.4 sagt aus, daß sich die Anzahl der Knotengebiete (und die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von $N(\psi)$) nur dann ändern kann, wenn irgendwo eine kritische Nullstelle entsteht oder verschwindet. Außerdem erfahren wir, daß diese kritischen Nullstellen nicht “plötzlich verschwinden” und zugleich an einer anderen Stelle wieder “erscheinen” können.

Wir wenden nun dieses Lemma auf einen beliebigen stetigen Weg im Eigenraum $E(h, M)$ an. Dann erhalten wir

Satz 4.5:

Sei $M = S^2$ oder $M = \mathbb{R}^2$, $E(h, M)$ endlichdimensional und h nach unten beschränkt. $t \mapsto \psi_t$, $[0, 1] \rightarrow E(h, M)$ sei ein stetiger Weg bezüglich der L^2 -Norm mit $\|\psi_t\|_2 = 1$.

Wir definieren

$$\begin{aligned} \Xi^+ &:= \{t \in (0, 1] : \lim_{s \nearrow t} \nu(\psi_s) \neq \nu(\psi_t)\} \\ \Xi^- &:= \{t \in [0, 1) : \lim_{s \searrow t} \nu(\psi_s) \neq \nu(\psi_t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa^+ &:= \sum_{t \in \Xi^+} (\nu(\psi_t) - \lim_{s \nearrow t} \nu(\psi_s)) \\ \kappa^- &:= \sum_{t \in \Xi^-} (\nu(\psi_t) - \lim_{s \searrow t} \nu(\psi_s))\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$(1) \quad \kappa^+, \kappa^- \in \mathbb{N}_0$$

$$(2) \quad \mu(\psi_1) = \mu(\psi_0) + \kappa'$$

$$\zeta(\psi_1) = \zeta(\psi_0) - \kappa''$$

für $\kappa', \kappa'' \in \{-\kappa^-, \dots, \kappa^+\}$, wobei $\kappa' + \kappa'' = \kappa^+ - \kappa^-$, $\kappa' \geq -\mu(\psi_0) + 1$ und $\kappa'' \leq \zeta(\psi_0) - 1$.

Beweis:

Wir wollen diesen Satz nur für den Fall beweisen, daß $|\Xi^+ \cup \Xi^-| < \infty$. Andernfalls, wäre nämlich

$$\begin{aligned}\kappa^+ &:= \sum_{t \in \Xi^+} \underbrace{(\nu(\psi_t) - \lim_{s \nearrow t} \nu(\psi_s))}_{\geq 1 \text{ (wegen 4.4 (1))}} \geq |\Xi^+| = \infty,\end{aligned}$$

dann ist die Aussage des Satzes nicht sehr sinnvoll.

Sei $\mathcal{Z} = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1\} = \Xi^+ \cup \Xi^- \cup \{0, 1\}$ und $t'_j = \frac{1}{2}(t_j - t_{j-1})$ für $j = 1, \dots, m$.

Wir bezeichnen mit $\sigma: [0, 1] \rightarrow E(h, M)$ den stetigen Weg $\sigma(t) := \psi_t$. Seien $\sigma_j, \tau_j: [0, 1] \rightarrow E(h, M)$ stetige Kurven gegeben durch

$$\sigma_j(s) := \sigma((1-s) \cdot t'_j + s \cdot t_j)$$

$$\tau_j(s) := \sigma((1-s) \cdot t'_j + s \cdot t_{j-1}) \quad j = 1, \dots, m.$$

Dann ist

$$\sigma_j(1) = \sigma(t_j) = \tau_{j+1}(1) \quad \text{für } j = 1, \dots, m-1$$

$$\sigma_j(0) = \sigma(t'_j) = \tau_j(0) \quad \text{für } j = 1, \dots, m$$

$$\tau_1(1) = \sigma(0)$$

$$\sigma_m(1) = \sigma(1)$$

und daher ist

$$\sigma = \tau_1^{-1} \cdot \sigma_1 \cdot \tau_2^{-1} \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \tau_m^{-1} \cdot \sigma_m.$$

Nun erfüllt aber jedes σ_j und jedes τ_j die Voraussetzungen von Lemma 4.4, da diese offensichtlich L^2 -stetig sind und $\nu(\sigma_j(s))$ bzw. $\nu(\tau_j(s))$ konstant auf $[0, 1)$ ist.

Daher gilt:

$$\nu(\sigma_j(1)) \geq \nu(\sigma_j(0)) = \lim_{s \nearrow 1} \nu(\sigma_j(s))$$

Genauso

$$\nu(\tau_j(1)) \geq \lim_{s \nearrow 1} \nu(\tau_j(s))$$

und somit

$$\nu(\tau_j^{-1}(0)) \geq \lim_{s \searrow 0} \nu(\tau_j^{-1}(s))$$

Also ist

$$\kappa_j^+ := (\nu(\sigma_j(1)) - \sigma_j(0)) \geq 0, \text{ für } j = 1, \dots, m$$

und

$$\kappa^+ = \sum_{t \in \mathbb{E}^+} (\nu(\sigma(t)) - \lim_{s \nearrow t} \nu(\sigma(s))) = \sum_{j=1}^m (\nu(\sigma_j(1)) - \lim_{s \nearrow 1} \nu(\sigma_j(s))) = \sum_{j=1}^m \kappa_j^+ \geq 0.$$

Genauso ist $\kappa^- \geq 0$ (Behauptung (1)).

Sei nun

$$\kappa_j'^+ = \mu(\sigma_j(1)) - \mu(\sigma_j(0))$$

$$\kappa_j'^- = \mu(\tau_j^{-1}(0)) - \mu(\tau_j^{-1}(1)) = \mu(\tau_j(1)) - \mu(\tau_j(0)).$$

Dann ist nach Lemma 4.4 $\kappa_j'^+ \leq \kappa_j^+$ und $\kappa_j'^- \leq \kappa_j^-$. Daher ist

$$\kappa' = \sum_{j=1}^m \kappa_j'^+ - \sum_{j=1}^m \kappa_j'^- \leq \sum_{j=1}^m \kappa_j^+ \leq \sum_{j=1}^m \kappa_j^+ = \kappa^+.$$

Und genauso ist

$$\kappa' \geq -\kappa^-.$$

Die Bedingung, daß $\kappa' \geq -\mu(\psi_0) + 1$ sein muß, ist trivial.

Analog erhält man die Behauptung für κ'' .

$\kappa' + \kappa'' = \kappa^+ - \kappa^-$ folgt aus Satz 3.1. \square

Abbildung 4.1 dient zur Illustration dieses Satzes.

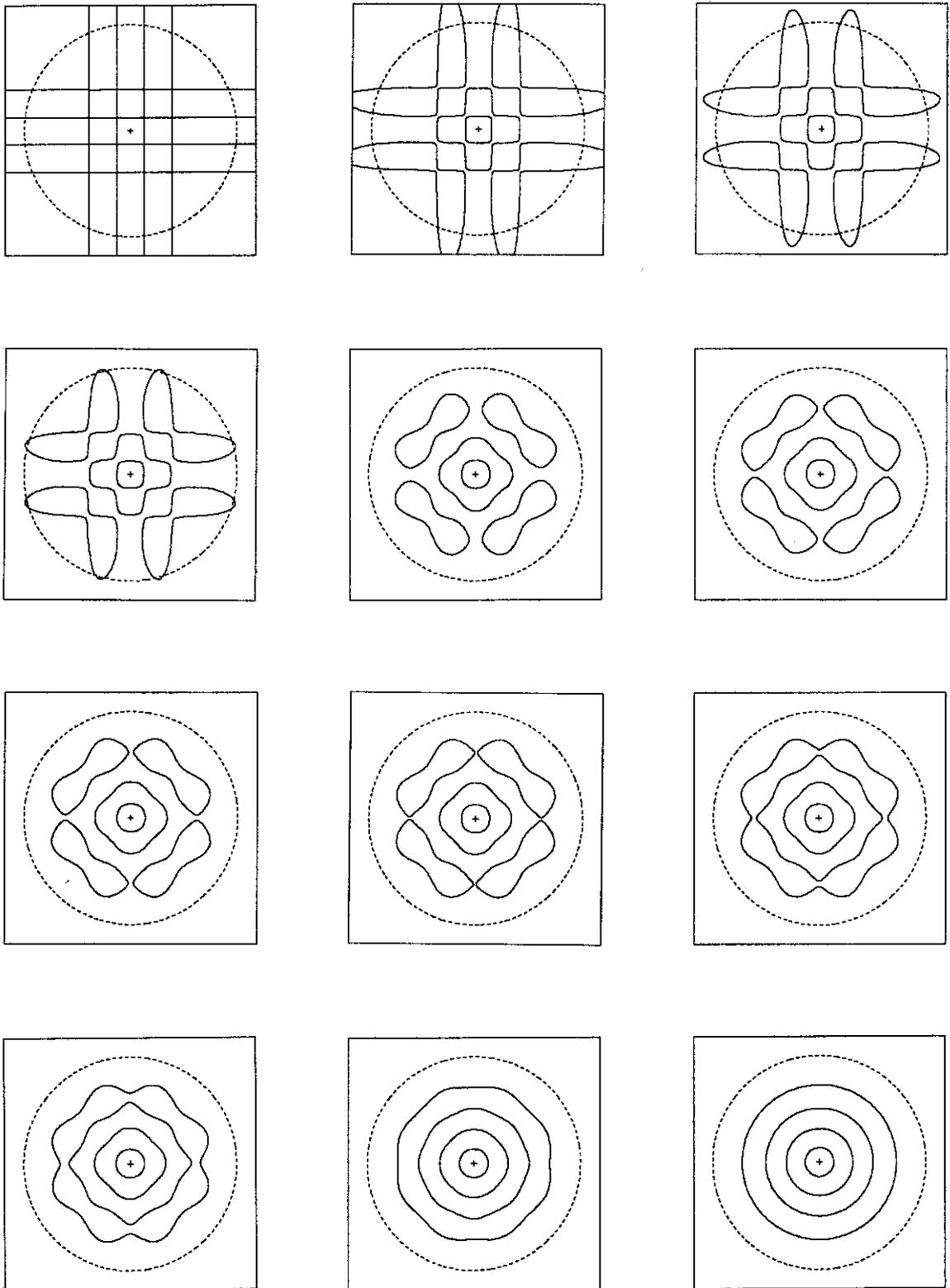


Abbildung 4.1

5. Schranken an die Anzahl der Knotengebiete

Wir wollen nun untersuchen, in wieviele Knotengebiete von ψ die Mannigfaltigkeit M zerfallen kann.

5.1 Obere Schranke

Aufbauend auf eine Schranke von COURANT (in [8]) hat CHENG folgende Ungleichung gezeigt (Schranken dieses Typs werden daher als COURANTSche Schranken bezeichnet):

Satz 5.1:

$(-\Delta + h(x) - \lambda)\psi = 0$, $h(x) \in C^\infty(M)$ auf einer RIEMANNschen Mannigfaltigkeit M (beliebiger Dimension) habe diskrete Eigenwerte $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, die nach ihrer Größe (mit Entartung) geordnet sind.

Sei ψ_k eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_k . Dann zerfällt $M \setminus N(\psi_k)$ in höchstens k Zusammenhangskomponenten, d.h.

$$\mu(\psi_k) \leq k$$

Beweis: ([7])

(Den Beweis dieses Satzes werden wir später brauchen, da wir im Satz 5.3 dieses Resultat durch Ausnützen der Symmetrieeigenschaften von HERMITEpolynomen bzw. Kugelflächenfunktionen verbessern wollen und dazu die gleiche Beweisidee benötigen.)

Angenommen $\mu(\psi_k) > k$, für ein ψ_k , d.h. ψ_k hätte die Knotengebiete $D_1, \dots, D_k, D_{k+1}, \dots$. Dann sei $\Phi_i = \psi_k$ auf D_i und $= 0$ auf $M \setminus D_i$ für $1 \leq i \leq k$ und $\Phi = \sum_{i=1}^k \alpha_i \Phi_i$ für $\alpha_i \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich Null, so gewählt, daß

$$\int_M |\Phi|^2 dx = 1$$

und Φ auf alle Eigenfunktionen ψ_l , $1 \leq l \leq k - 1$ orthogonal steht. Dies ist stets möglich, da der Raum aller dieser Funktionen Dimension $k - 1$ hat. Also ist

$$\int_M \Phi \cdot (-\Delta + h(x)) \Phi dx \geq \lambda_k.$$

Andererseits ist Φ_i auf D_i Eigenfunktion zum Eigenwert λ_k . Also ist

$$\int_M \Phi \cdot (-\Delta + h(x)) \Phi dx = \int_M \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \Phi_i \right) \cdot \left((-\Delta + h(x)) \sum_{j=1}^k \alpha_j \Phi_j \right) dx =$$

$$= \int_M \left(\sum_{i=k}^k \alpha_i \Phi_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \lambda_k \Phi_j \right) dx = \lambda_k \int_M |\Phi|^2 dx = \lambda_k.$$

Daher ist Φ nach dem Mini-Max-Prinzip eine Eigenfunktion von $(-\Delta + h(x))$, die aber auf $D_{k+1} \cup D_{k+2} \cup \dots$ verschwindet. Wegen der eindeutigen Fortsetzbarkeit von Eigenfunktionen müßte daher $\Phi \equiv 0$ sein. Widerspruch, da nicht alle $\alpha_i = 0$ waren. \square

Wenn wir diesen Satz auf unsere Beispiele anwenden, so erhalten wir

Korollar 5.2:

Es gilt:

- (1) $\mu(\mathcal{H}(n, a)) \leq \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$
- (2) $\mu(\mathcal{L}(\ell, b)) \leq \ell^2 + 1$

Beweis:

- (1) Sei $\lambda_k = 2n + 2$. Da $\lambda_k > 2i + 2$ genau dann, wenn $i < n$, und da jeder Eigenwert $\lambda = 2i + 2$ $(i + 1)$ -fach entartet ist und λ_k als erster der Eigenwerte $2n + 2$ angeordnet werden kann, ist

$$k = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (i + 1) + 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1.$$
- (2) Analog zu (1) ist

$$k = 1 + \sum_{i=0}^{\ell-1} (2i + 1) = \ell^2 + 1, \text{ wenn } \lambda_k = \ell(\ell + 1). \quad \square$$

Diese Abschätzung ist jedoch nicht scharf. Für die Kugelflächenfunktionen folgt das aus einem Satz von PLEIJEL oder aus einem allgemeineren Resultat von BERARD und MEYER. Und zwar ist ([3])

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(\psi_k)}{k} < 1$$

d.h. die COURANTSche Schranke wird höchstens bei endlich vielen Eigenwerten erreicht.

Wir können aber diese Schranke durch Ausnützen von Symmetrieeigenschaften etwas verbessern.

Satz 5.3:

Es gilt:

- (1) $\mu(\mathcal{H}(n, a)) \leq \frac{n^2}{2} + 2$
- (2) $\mu(\mathcal{L}(\ell, b)) \leq \ell^2 - \ell + 2$

Beweis:

(1) Da $\mathcal{H}(n, a)(-x) = (-1)^n \mathcal{H}(n, a)(x)$, ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}(n_1, a_1) \cdot \mathcal{H}(n_2, a_2) \cdot e^{-|x|^2} dx = 0,$$

falls $n_1 + n_2 = \text{ungerade}$, d.h. gerade HERMITEpolynome stehen orthogonal auf ungeraden und umgekehrt. Man kann daher diese Polynome in gerade und ungerade trennen.

Wegen der Inversions(anti)symmetrie betrachten wir für ein Polynom $\mathcal{H}(n, a)$ die offenen Mengen D' der Form $\{x : x \in D\} \cup \{x : -x \in D\}$ für die Knotengebiete $D \in \Omega(\mathcal{H}(n, a))$. Sei m die Anzahl dieser Mengen. Dann ist $\mu(\mathcal{H}(n, a)) \leq 2m$.

Sei nun λ_k der k -te Eigenwert mit inversions(anti)symmetrischer Eigenfunktion. Dann gilt ganz analog zum Beweis von Satz 5.1, daß $m \leq k$ ist, also $\mu(\mathcal{H}(n, a)) \leq 2k$, wenn $\mathcal{H}(n, a)(x) \cdot e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ Eigenfunktion zu λ_k ist.

Falls $\lambda_k = 2n + 2$, $n = \text{gerade}$, so muß wie in Korollar 5.2

$$k = 1 + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} (2i + 1) = \frac{n^2}{4} + 1 \text{ sein.}$$

Für $\lambda_k = 2n + 2$, $n = \text{ungerade}$, erhält man

$$k = 1 + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} ((2i - 1) + 1) = \frac{n^2}{4} + \frac{3}{4} \leq \frac{n^2}{4} + 1.$$

Also $\mu(\mathcal{H}(n, a)) \leq \frac{n^2}{2} + 2$.

(2) So wie in (1) ist $\mu(\mathcal{L}(\ell, b)) \leq 2k$, wenn $\mathcal{L}(\ell, b)$ Eigenfunktion zu λ_k ist, wobei λ_k der k -te jener Eigenwerte mit inversions(anti)symmetrischen Eigenfunktionen, ist.

Für $\lambda_k = \ell(\ell + 1)$, $\ell = \text{gerade}$, ist

$$k = 1 + \sum_{i=0}^{\frac{\ell}{2}-1} (2(2i) + 1) = \frac{1}{2}(\ell^2 - \ell + 2),$$

für $\ell = \text{ungerade}$ ist

$$k = 1 + \sum_{i=1}^{\frac{\ell-1}{2}} (2(2i - 1) + 1) = \frac{1}{2}(\ell^2 - \ell + 2). \quad \square$$

5.2 Untere Schranke

Für eine Abschätzung nach unten erhält man sofort, daß

$$\mu(\psi) \geq 2$$

ist, falls $N(\psi) \neq \emptyset$, da eine negative Funktion nicht orthogonal auf positive oder negative Funktion stehen kann.

Diese Schranke wird jedoch nicht immer erreicht. So folgt bei Kugelflächenfunktionen aus der Inversionssymmetrie, daß für gerades $\ell > 0$ die Eigenfunktion mindestens drei Knotengebiete hat ([14]). LEWY hat gezeigt, daß diese Schranke scharf ist.

Satz 5.4: ([14])

Es gilt für alle Kugelflächenfunktionen $\mathcal{L}(\ell, b)$:

$$\min_{b \in S^{2\ell} \times \{0\}} \mu(\mathcal{L}(\ell, b)) = \begin{cases} 1 & \text{für } \ell = 0 \\ 2 & \text{für } \ell > 0 \text{ gerade} \\ 3 & \text{für } \ell \text{ ungerade} \end{cases}$$

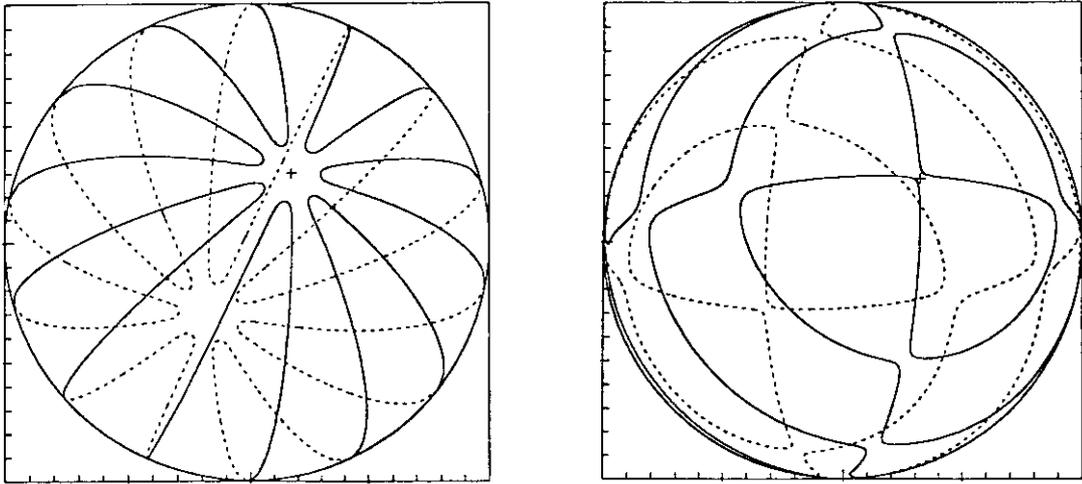


Abbildung 5.1: Die beiden Bilder zeigen für je ein ℓ gerade und ein ℓ ungerade die Kugelflächenfunktionen, die LEWY in seinem Beweis konstruiert hat.

Wir zeigen in §9. für die HERMITEpolynome ein ganz ähnliches Resultat.

Satz 5.5:

Es gilt für alle HERMITEpolynome $\mathcal{H}(n, a)$:

$$\min_{a \in S^n} \mu(\mathcal{H}(n, a)) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 3 & \text{für } n = 4k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abbildung 5.2 zeigt Beispiele von HERMITEpolynomen, deren Anzahl an Knotengebieten minimal ist. Die ersten drei Abbildungen sind jene Funktionen, die später in §9. für beliebiges n konstruiert werden.

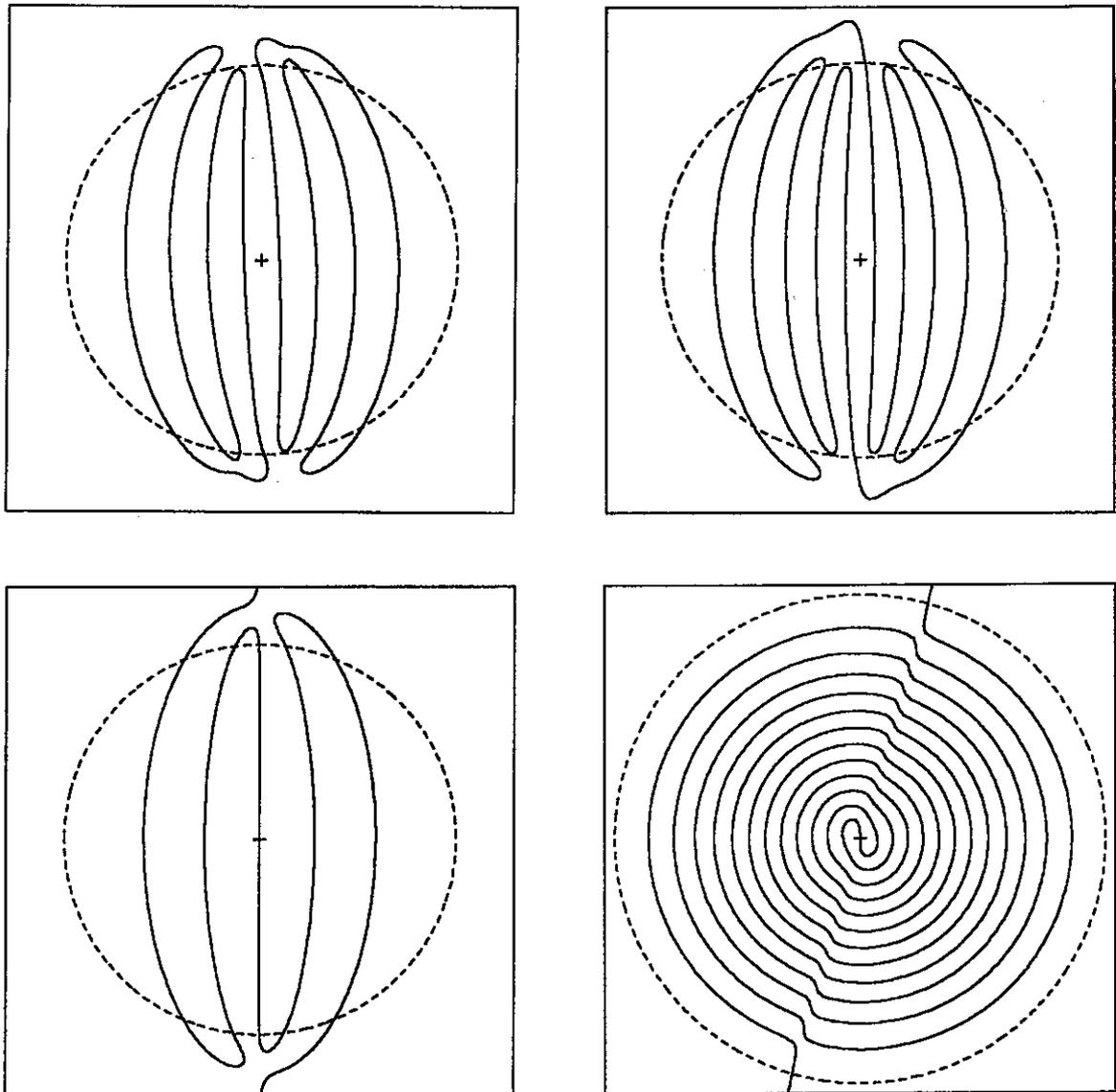


Abbildung 5.2: Beispiele von HERMITEpolynomen, die das Minimum an Knotengebieten tatsächlich annehmen.

6. Graphen von Nullstellenmengen

Wir wollen nun versuchen, die große Vielfalt von möglichen Nullstellenmengen zu charakterisieren. Insbesondere wollen wir verschiedene Nullstellenmengen oder $\Omega(\psi)$, die in einem gewissen Sinn gleich sind, als gleich erkennen. So etwa wollen wir $N(\psi_1)$ und $N(\psi_2)$ von zwei Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in E(h, M)$, die durch Drehen des Koordinatensystems ineinander übergeführt werden können, d.h. $\exists \eta \in [0, 2\pi)$, sodaß $\psi_1(r, \vartheta) = \psi_2(r, \vartheta + \eta)$, miteinander identifizieren.

Wir wollen deshalb jeder Nullstellenmenge einen Graphen zuordnen, und untersuchen, ob mit diesem Begriff eine Charakterisierung von Nullstellenmengen möglich ist. Ein Graph besteht aus einer Menge von Knoten (die aber im allgemeinen natürlich nichts mit unseren Knotengebieten und Knotenlinien zu tun haben) und einer Menge von Kanten, wobei uns diese eine Relation zwischen den Knoten angibt. Wir schreiben deshalb die Kanten als (ungeordnetes) Paar (v, v') von Knoten. Der Graph ist dann die Vereinigung dieser beiden Mengen (vgl. [15]). Wir sagen nun, daß ein Graph einer Nullstellenmenge $N(\psi)$ zugeordnet werden kann, wenn der Graph genau so viele Knoten enthält, wie ψ Knotengebiete besitzt, und außerdem die Kante (v, v') genau dann existiert, falls die entsprechenden Knotengebiete von ψ "benachbart" sind. Unter "benachbart" verstehen wir, daß der Schnitt der Ränder der beiden Knotengebiete eine Knotenlinie von ψ ist. Wir setzen ferner voraus, daß in diesem Graphen zwei Knoten immer nur durch eine Kante verbunden sind und daß es keine Kante gibt, die einen Knoten mit sich selbst verbindet. Der Graph soll dann "*Graph der Nullstellenmenge $N(\psi)$* " heißen.

Das fassen wir zusammen zur

Definition 6.1:

Seien ω und $\mathcal{E} \subseteq \omega \times \omega$ Mengen. Dann ist $\mathcal{G} = \omega \cup \mathcal{E}$ ein Graph, und es heißen ω die Menge der *Knoten* und \mathcal{E} die Menge der *Kanten* ([15]).

Sei $\psi \in E(h, M)$. \mathcal{G} heißt *Graph von $N(\psi)$* , falls es keine Kanten der Form (v, v) gibt, je zwei Knoten mit höchstens einer Kante verbunden sind, und es eine eindeutige Zuordnung

$$z_\psi: \omega \rightarrow \Omega(\psi)$$

gibt, sodaß für $D = z_\psi(v)$ und $D' = z_\psi(v')$ gilt:

$$(v, v') \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (\partial D \cap \partial D') \setminus \mathcal{K}(\psi) \neq \emptyset$$

Wir schreiben dann $\mathcal{G}(\psi)$, $\omega(\psi)$ und $\mathcal{E}(\psi)$.

Im Fall von $M = \mathbb{R}^2$ unterscheiden wir auch noch zwischen beschränkten und unbeschränkten Knotengebieten. Deshalb erweitern wir diese Definition, um diese Information in den Graphen einfließen zu lassen.

Definition 6.2:

Sei $M = \mathbb{R}^2$, $\psi \in E(h, M)$ und $\mathcal{G}(\psi)$ der Graph von $N(\psi)$. Weiters seien

$$\omega_0(\psi) := \{v \in \omega(\psi) : D \setminus B(0, R) \neq \emptyset, \forall R > 0, \text{ wobei } D = z_\psi(v) \in \Omega(\psi)\}$$

$$\omega_k(\psi) := \{v \in \omega(\psi) \setminus \omega_{k-1}(\psi) : \exists v' \in \omega_{k-1}(\psi), \text{ mit } (v, v') \in \mathcal{E}(\psi)\}$$

die Mengen der *Knoten von Hierarchie k*.

$\mathcal{G}(\psi) = \bigcup_k \omega_k(\psi) \cup \mathcal{E}(\psi)$ heißt dann *hierarchischer Graph von $N(\psi)$* .

Diese Graphen werden in der üblichen Weise (vgl. z.B. [15]) durch Punkte ($\hat{=}$ Knoten) und Kurven ($\hat{=}$ Kanten) dargestellt. Bei hierarchischen Graphen werden dabei die Knoten einer Hierarchie in je eine "Zeile" geschrieben, "oben" beginnenden mit jenen der 0-ten Hierarchie.

Beispiel:

Abbildung 6.1 zeigt Graphen der Nullstellen der Bilder 1 bis 12 aus den Abbildungen 1.1 und 1.2.

Als nächstes wollen wir klären, wann zwei Graphen gleich sind. Wir wollen, daß "ähnliche" Nullstellenmengen den gleichen Graphen haben, z.B. dann, wenn sich die beiden Mengen durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführen lassen. Zwei (hierarchische) Graphen sollen daher genau dann gleich sein, wenn jeder als (hierarchischer) Graph derselben Nullstellenmenge zugeordnet werden kann und es somit eine Bijektion zwischen ihnen gibt. Also

Definition 6.3:

Zwei Graphen $\mathcal{G}(\psi_1)$ und $\mathcal{G}(\psi_2)$ heißen *gleich*, falls es eine Bijektion $\beta: \omega(\psi_1) \rightarrow \omega(\psi_2)$ gibt, sodaß gilt:

(i) $(v, v') \in \mathcal{E}(\psi_1) \Leftrightarrow (\beta(v), \beta(v')) \in \mathcal{E}(\psi_2)$

(ii) Falls $\mathcal{G}(\psi_1)$ und $\mathcal{G}(\psi_2)$ hierarchische Graphen sind, dann ist

$$\beta(v_k) \in \omega_k(\psi_2) \text{ falls } v_k \in \omega_k(\psi_1).$$

Wir schreiben $\mathcal{G}(\psi_1) = \mathcal{G}(\psi_2)$.

Wir wissen aus §5., daß die Anzahl der Knotengebiete, die eine Funktion ψ aus $E(h, M)$ haben kann, für unsere Beispiele beschränkt ist. Also können mit obiger Definition von gleich höchstens endlich viele verschiedene Graphen für Nullstellenmengen von Funktionen aus $E(h, M)$ existieren. Wir haben somit aus der großen Vielfalt an möglichen Nullstellenmengen eine endliche Menge von Graphen gemacht.

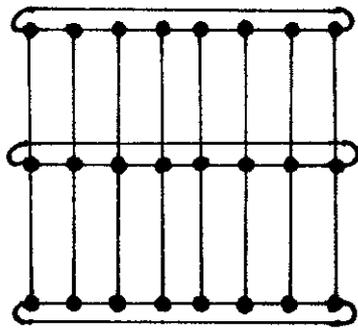


Bild 1

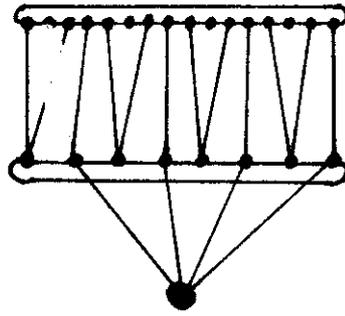


Bild 2



Bild 3

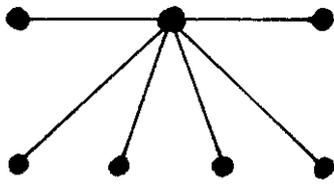


Bild 4

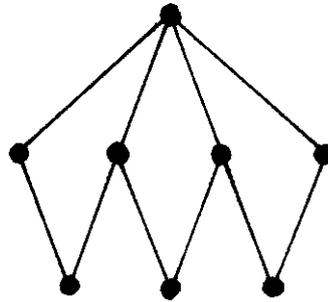


Bild 5

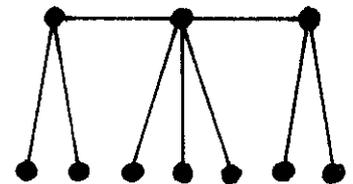


Bild 6

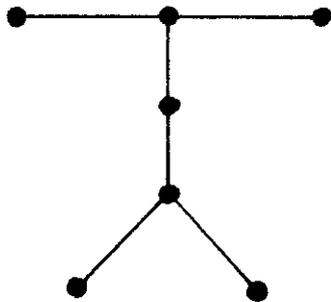


Bild 7

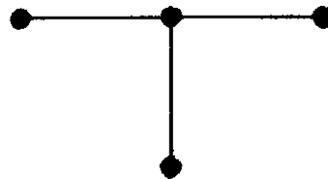


Bild 8

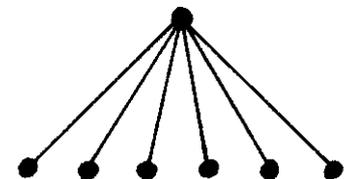


Bild 9



Bild 10

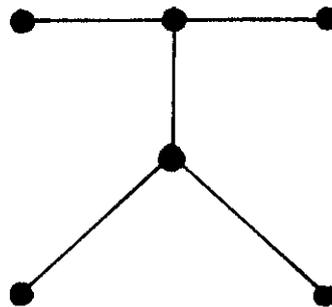


Bild 11



Bild 12

Abbildung 6.1: Graphen der Nullstellenmengen der Bilder 1 bis 12 aus den Abbildungen 1.1 und 1.2

Bevor wir nun weitergehen können, brauchen wir noch einige Begriffe.

Definition 6.4: ([15])

- (1) Ein Graph $\mathcal{G}(\psi)$ heißt *zusammenhängend*, falls $\forall v, v' \in \Omega(\psi)$, $v = v_0, v_1, \dots, v_m = v' \in \Omega(\psi)$ existieren, sodaß $(v_{j-1}, v_j) \in \mathcal{E}(\psi)$, $\forall j = 1, \dots, m$.
- (2) Ein Graph $\mathcal{G}(\psi)$ heißt *zyklisch*, falls $\mathcal{G}(\psi)$ zusammenhängend ist und $\forall v \in \Omega(\psi)$ genau $v', v'' \in \Omega(\psi)$, $v' \neq v''$, existieren, mit $(v, v') \in \mathcal{E}(\psi)$ und $(v, v'') \in \mathcal{E}(\psi)$.
- (3) $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}(\psi)$ heißt *Teilgraph* von $\mathcal{G}(\psi)$, falls $\omega' \subseteq \omega(\psi)$ und $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}(\psi) \cap (\omega' \times \omega')$. Die Begriffe *zusammenhängend* und *zyklisch* werden genauso definiert wie in (1) und (2).
- (4) Ein Graph $\mathcal{G}(\psi)$ heißt *Baum*, falls $\mathcal{G}(\psi)$ zusammenhängend ist und keine zyklischen Teilgraphen enthält. Äquivalent dazu ist, daß $\mathcal{G}(\psi)$, $|\omega(\psi)| - 1$ Kanten enthält, d.h. $|\mathcal{E}(\psi)| = |\omega(\psi)| - 1$.

Die Graphen $\mathcal{G}(\psi)$ haben folgende Eigenschaften (Beweis in §10.):

Lemma 6.1:

Sei $\psi \in E(h, M)$. Dann gilt:

- (1) $\mathcal{G}(\psi)$ ist zusammenhängend, falls M zusammenhängend ist.
- (2) Falls $\mathcal{G}(\psi)$ zyklische Teilgraphen enthält, dann ist $\mathcal{K}(\psi) \neq \emptyset$, d.h. ψ hat kritische Nullstellen.
- (3) Falls $\mathcal{K}(\psi) = \emptyset$, dann ist $\mathcal{G}(\psi)$ ein Baum.
- (4) Jeder zyklische Teilgraph von $\mathcal{G}(\psi)$ enthält geradzahlig viele Knoten.

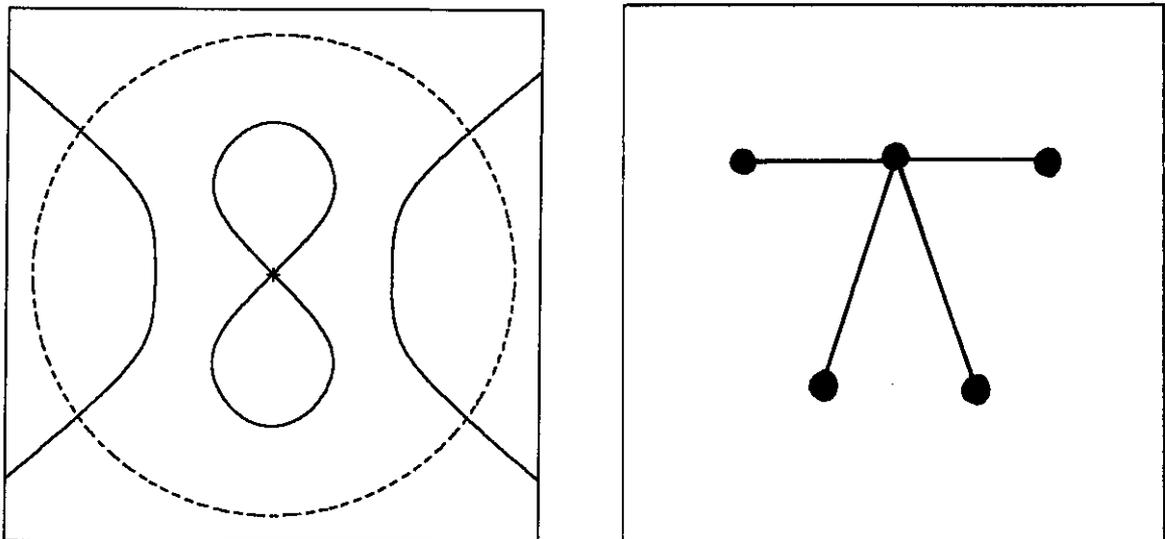


Abbildung 6.2: Die Umkehrung von (3) ist falsch

Bemerkung: Die Umkehrung von Behauptung (3) aus obigen Lemma ist falsch. Abbildung 6.2 zeigt eine Eigenfunktion $\psi \in E(h, M)$, die eine kritische Nullstelle enthält, deren Graph aber trotzdem ein Baum ist.

Jetzt wollen wir definieren, was ein “Nodal Pattern” ist. Wir haben gesehen, daß die Graphen wichtige Information über die Knotengebiete enthalten. Nur über die kritischen Nullstellen und über $\nu(\psi)$ enthalten sie nicht viel Information. Wir wollen daher diese beiden Begriffe zu dieser Definition verwenden.

Definition 6.5:

Sei $\psi \in E(h, M)$. Dann heißt das Tupel $(\mathcal{G}(\psi), \nu(\psi))$ *Nodal Pattern von ψ* .

Bemerkung: Diese Definition ist sicher nicht die einzig mögliche. Sie stellt sich aber für die Formulierung von Satz 6.2 als brauchbar heraus (siehe später).

Wir haben nun die große Anzahl an verschiedenen Nullstellenmengen auf eine endliche Menge reduziert. Es gilt aber i.A. nicht, daß die Menge aller $\psi \in E(h, M)$ mit gleichem Nodal Pattern wegzusammenhängend ist.

Beispiel: HERMITEpolynome

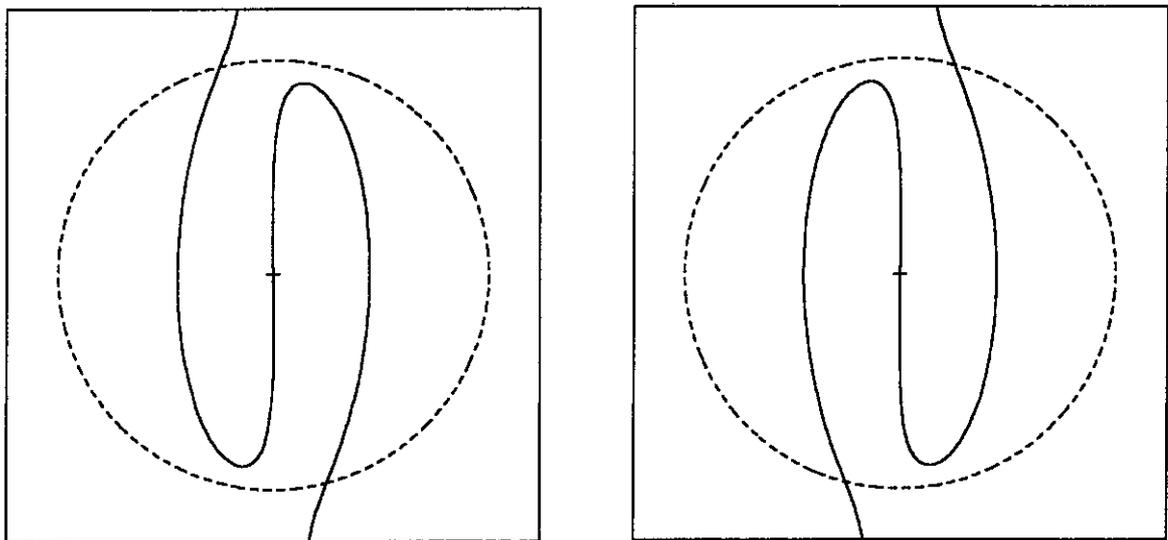


Abbildung 6.3

Falls n gerade ist, dann sind die Nodal Pattern von $\mathcal{H}(n, a)$ und $\mathcal{H}(n, -a)$ gleich. Die Funktionen lassen sich aber i.A. nicht durch stetige Veränderung ineinander überführen, ohne daß sich dabei das Nodal Pattern ändern würde.

Auch die zwei HERMITEpolynome in Abbildung 6.3 lassen sich nicht so ineinander überführen. Es müßte nämlich ein HERMITEpolynom von Ordnung $n = 3$ vorkom-

men, dessen einzige Knotenlinie eine Gerade wäre. Das ist aber im Fall $n \geq 1$ nicht möglich (vgl. die Darstellung in Polarkoordinaten aus §2.2).

Eine andere Möglichkeit Nodal Pattern zu definieren wäre folgende: Wir unterteilen den Raum der normierten Eigenfunktionen ($\cong S^n$, vgl. §4) in Mengen mit gleichem $\nu(\psi)$. Nodal Pattern seien dann Wegzusammenhangskomponenten (modulo Symmetrie) solcher Mengen.

Ob diese Definition mit der von uns gewählten übereinstimmt, bzw. welche Unterschiede sich zwischen ihnen ergeben, ist zur Zeit noch ungeklärt.

Wir wollen jetzt noch untersuchen, wie sich ein Nodal Pattern ändert, wenn man einen stetigen Weg in $E(h, M)$ entlangfährt (vgl. auch §4., Beweis in §10.).

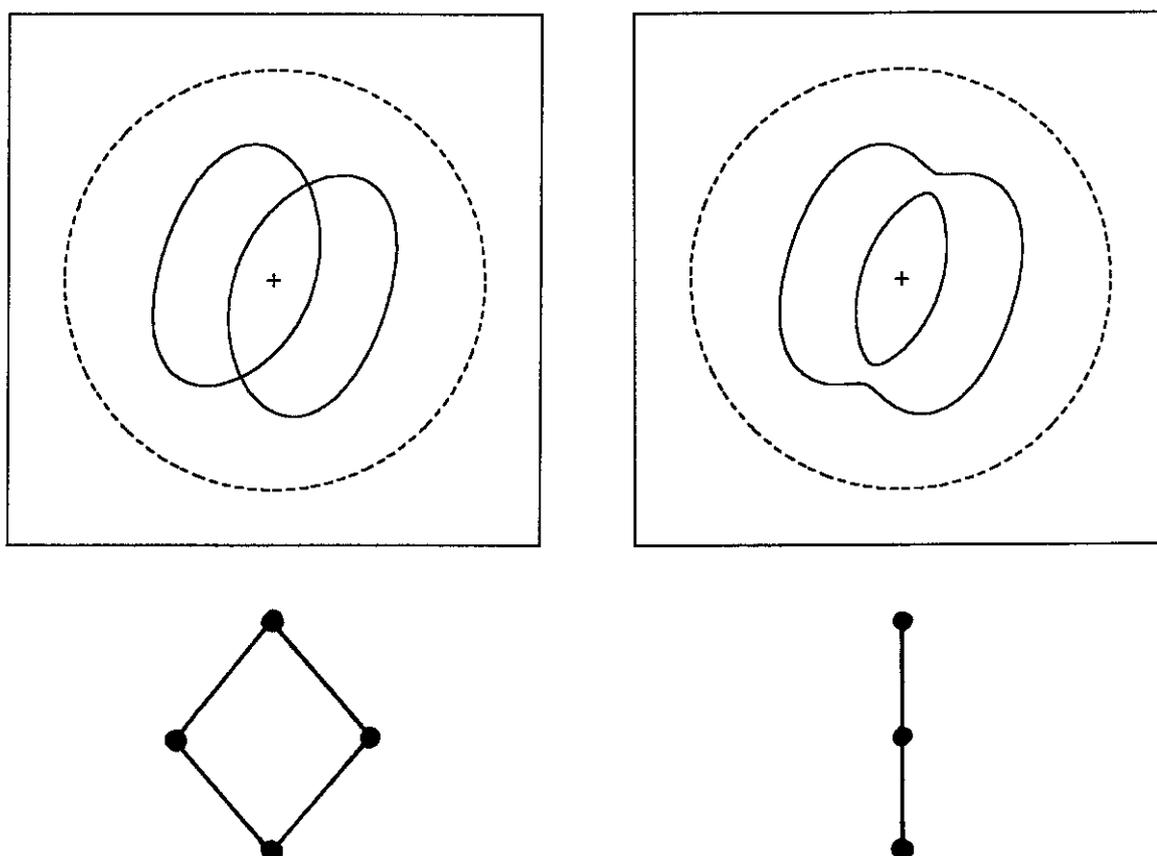


Abbildung 6.4

Satz 6.2:

Sei $M = S^2$ oder $M = \mathbb{R}^2$, $E(h, M)$ endlichdimensional und h nach unten beschränkt. $t \mapsto \psi_t$, $[0, 1] \rightarrow E(h, M)$ sei ein stetiger Weg bezüglich der L^2 -Norm mit $\|\psi_t\|_2 = 1$. Sei weiters

$$(\mathcal{G}(\psi_t), \nu(\psi_t)) = (\mathcal{G}(\psi_1), \nu(\psi_1)) \text{ für alle } t \in (0, 1].$$

Dann gilt

- (1) $\nu(\psi_0) \geq \nu(\psi_1)$ und $|\omega(\psi_1)| \leq |\omega(\psi_0)| \leq |\omega(\psi_1)| + (\nu(\psi_0) - \nu(\psi_1))$
- (2) $\mathcal{G}(\psi_1)$ geht aus $\mathcal{G}(\psi_0)$ durch "Verschmelzen" von Knoten hervor, d.h. es gibt eine surjektive Abbildung $s: \omega(\psi_0) \rightarrow \omega(\psi_1)$, mit der Eigenschaft $(v, v') \in \mathcal{E}(\psi_0) \Rightarrow (s(v), s(v')) \in \mathcal{E}(\psi_1)$, d.h. wenn zwei Knoten v, v' in $\mathcal{G}(\psi_0)$ durch eine Kante verbunden sind, dann sind auch deren Bilder $s(v), s(v')$ in $\mathcal{G}(\psi_1)$ durch eine Kante verbunden.

Die Abbildungen 6.4 und 6.5 veranschaulichen diesen Satz.

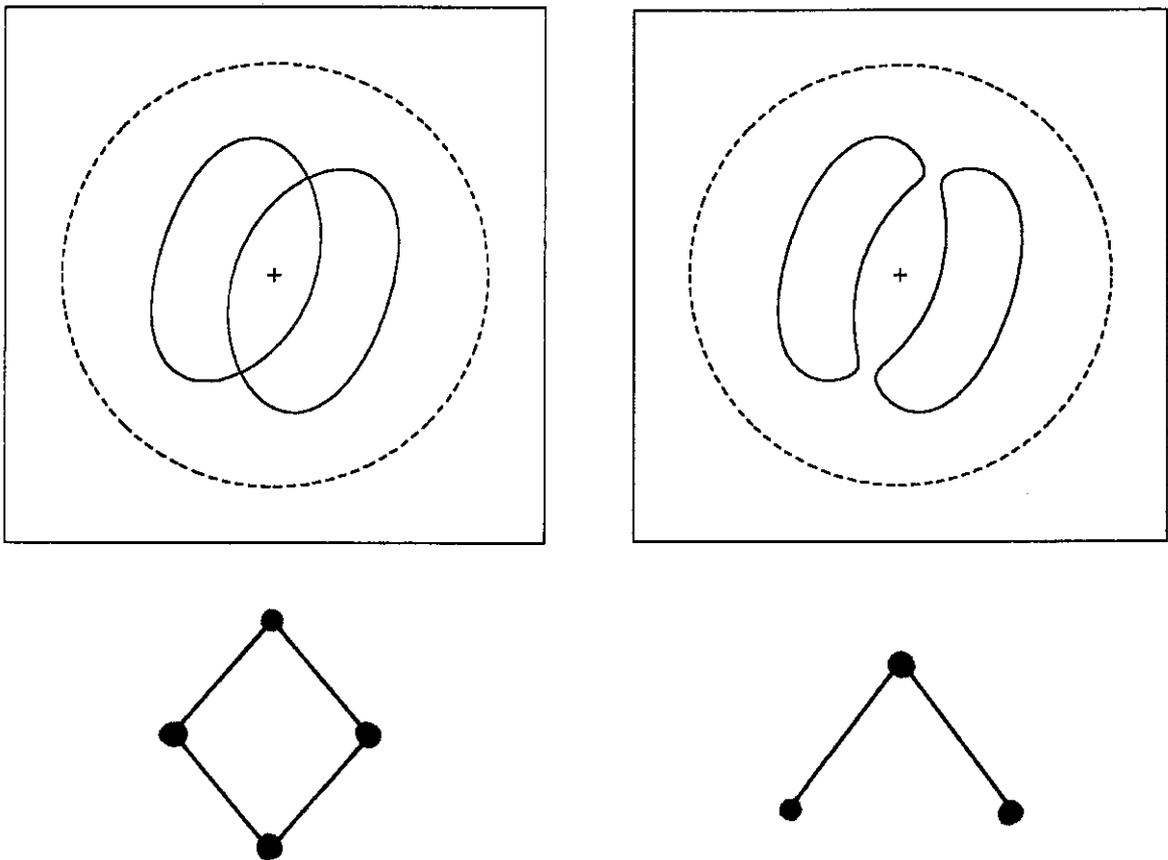


Abbildung 6.5

Bemerkung: Es ist nach diesem Satz auch möglich, daß man $\mathcal{G}(\psi_1)$ aus $\mathcal{G}(\psi_0)$ erhält, wenn die Zahl der Knoten gleich bleibt, aber die Zahl der Kanten größer

wird. Der Satz verbietet ja nur, daß dann die Kanten weniger werden. (Abbildung 6.6 veranschaulicht das an einem Beispiel.)

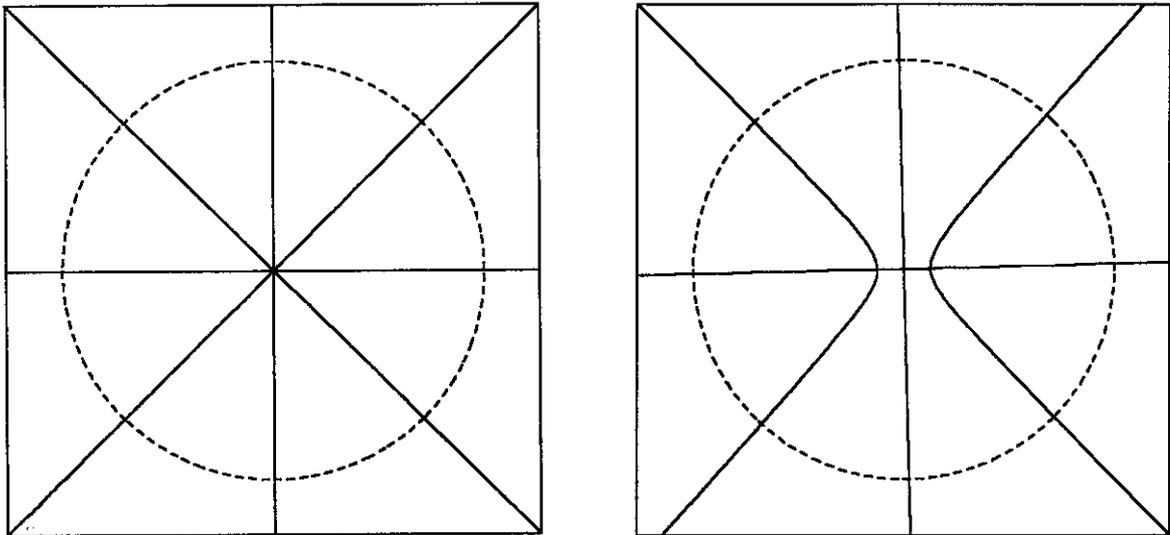


Abbildung 6.6

Wir wollen uns noch damit beschäftigen, wie die Teilmenge aller $\psi \in E(h, M)$, die kritische Nullstellen besitzen, aussieht. Wir erhalten dabei sehr leicht folgendes schöne Resultat:

Satz 6.3:

Falls $\dim E(h, M) \geq 7$, dann ist die Teilmenge aller normierten Eigenfunktionen mit kritischen Nullstellen wegzusammenhängend.

Bemerkung: In unseren beiden Beispielen ist die Voraussetzung dieses Satzes für hinreichend großes n bzw. ℓ immer erfüllt.

Beweis von Satz 6.3:

In §4. haben wir gesehen, daß $E(h, M) \cong \mathbb{R}^n$. Sei $\mathcal{A}(x)$ die Teilmenge des \mathbb{R}^n , wo für alle $a \in \mathcal{A}(x)$, x eine kritische Nullstelle von $\psi = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k$ ist, und $\mathcal{A} = \bigcup_{x \in M} \mathcal{A}(x)$ ist dann jene Teilmenge, wo es irgendeine kritische Nullstelle $x \in M$ gibt. In §1. haben wir gesehen, daß ψ genau dann bei $x \in M$ eine kritische Nullstelle (mindestens von Ordnung 2) besitzt, wenn die drei Bedingungen $\psi(x) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x^1} \psi(x) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x^2} \psi(x) = 0$ erfüllt sind. Also ist $\mathcal{A}(x)$ für alle $x \in M$ ein Unterraum des \mathbb{R}^n mit $\text{codim} \mathcal{A}(x) \leq 3$.

Seien $a, b \in \mathcal{A}$, mit Betrag 1, deren entsprechende Funktionen die kritischen Nullstellen x_a bzw. x_b haben. Dann gilt nach dem Dimensionssatz der linearen Algebra (z.B. in [10]):

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{A}(x_a) \cap \mathcal{A}(x_b)) &= \\ &= \underbrace{\dim(\mathcal{A}(x_a))}_{\geq n-3} + \underbrace{\dim(\mathcal{A}(x_b))}_{\geq n-3} - \underbrace{\dim(\mathcal{A}(x_a) + \mathcal{A}(x_b))}_{\leq n} \geq \\ &\geq (n-3) + (n-3) - n = n-6 \geq 1 \text{ nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

D.h. der Durchschnitt von $\mathcal{A}(x_a)$ und $\mathcal{A}(x_b)$ ist ein Unterraum von Dimension größer gleich 1. Daher enthält der Schnitt dieser beiden Teilräume auch Elemente aus S^{n-1} . Daher muß es auf der S^{n-1} einen stetigen Weg geben, der die beiden Punkte a und b miteinander verbindet. Also ist \mathcal{A} geschnitten mit der S^{n-1} wegzusammenhängend. \square

Bemerkung: Die Bedingung $\dim E(h, M) \geq 7$ ist sicherlich nicht notwendig. Man müßte dann allerdings in den Beweis dieses Satzes viel mehr investieren.

Interessant ist natürlich auch, wie das Komplement dieser Menge aussieht, also die Menge aller $\psi \in E(h, M)$ die keine kritischen Nullstellen besitzen.

Betrachten wir zuerst Eigenfunktionen auf der S^2 . Diese ist kompakt und es ist für derartige ψ , $\mathcal{K}(\psi) = \emptyset$ und $\nu(\psi) = \sum_{x \in \mathcal{K}(\psi)} \nu_\psi(x) = 0$. In §5. haben wir gesehen, daß es für alle ℓ eine Kugelflächenfunktion $\psi_0 = \mathcal{L}(\ell, b)$ ohne kritische Nullstellen gibt, wo die Anzahl der Knotengebiete minimal, d.h. 2 oder 3, wird. Andererseits gibt es eine Funktion $\psi_1 = Y_{\ell 0}$ ohne kritische Nullstellen, die $\ell + 1$ Knotengebiete besitzt (vgl. §2.1).

Sei nun $t \mapsto \psi_t$ ein beliebiger stetiger Weg von ψ_0 nach ψ_1 . Aus Satz 4.5 folgt, daß es eine Funktion ψ_{t_0} , $t_0 \in (0, 1)$ geben muß, wo $\nu(\psi_{t_0}) > 0$ ist, falls $\mu(\psi_0) \neq \mu(\psi_1) = \ell + 1$ ist, d.h. ψ_{t_0} besitzt kritische Nullstellen. Das ist aber für alle $\ell \geq 3$ immer erfüllt.

Wir können also zusammenfassen:

In der Menge aller normierten Kugelflächenfunktionen zum Eigenwert $\ell(\ell + 1)$ ist die Teilmenge der Funktionen ohne kritische Nullstellen für $\ell \geq 3$ nicht wegzusammenhängend.

Bei den HERMITEpolynomen ist die Situation nicht so einfach. Zwar ist wieder $\mathcal{K}(\mathcal{H}(n, a)) = \emptyset$, aber $\nu(\mathcal{H}(n, a)) = \nu_{\mathcal{H}}(\infty)$ kann > 0 sein. Abbildung 6.7 verdeutlicht die Schwierigkeit: Eine mögliche kritische Nullstelle tritt "im Unendlichen" auf. Wir wollen aber auch nicht, daß wir nur die Menge untersuchen, wo

$\nu(\mathcal{H}(n, a)) = 0$ ist. Alle Funktionen, deren Nullstellenmenge nicht beschränkt ist, werden dann nicht berücksichtigt. Die Einpunktkompaktifizierung wie im Satz 3.1 scheint hier nicht auszureichen.

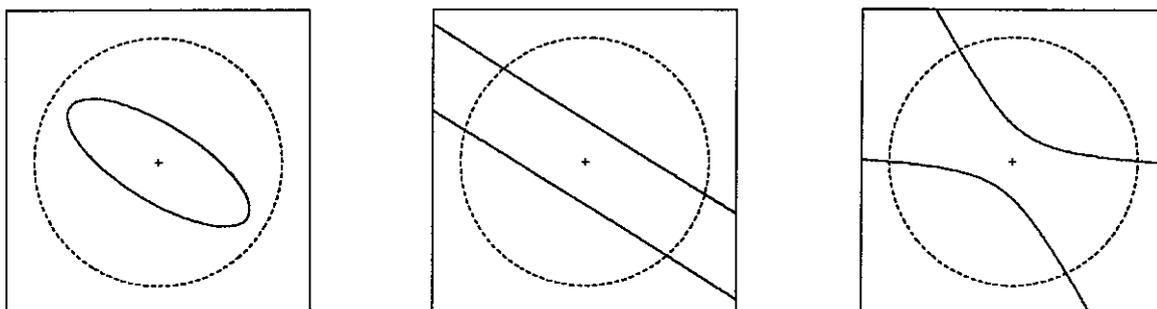


Abbildung 6.7

Wir betrachten daher die projektive Ebene \mathbb{P}^2 als Kompaktifizierung des \mathbb{R}^2 . Zur Definition von kritischen Nullstellen auf der Ferngerade verwenden wir, daß sich alle HERMITEpolynome durch homogene Polynome darstellen lassen. Genauer: Es gibt für alle $\mathcal{H}(n, a)$ ein homogenes Polynom p_n vom Grad n , sodaß gilt ([12]):

$$\mathcal{H}(n, c)(r, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k p_n(2r, \vartheta).$$

Wir sagen daher:

$\mathcal{H}(n, c)$ hat eine *ferne Nullstelle in Richtung ϑ von Ordnung m* , falls das korrespondierende homogene Polynom p_n im Punkt $(1, \vartheta)$ mit Ordnung m verschwindet. Wenn $m \geq 2$, dann sprechen wir von einer *fernen kritischen Nullstelle* in Richtung ϑ .

Aus geometrischen Überlegungen folgt, daß dann die Knotenlinien von $\mathcal{H}(n, c)$ asymptotisch zu m parallelen Geraden in Richtung ϑ nach ∞ laufen. Es ist dann natürlich die Summe der Ordnungen über alle fernen kritischen Nullstellen gleich $\varrho_{\mathcal{H}}(\infty)$ (vgl. Definition 3.1 (2)).

Wenn man nun wie in §4. eine stetigen Weg im Eigenraum betrachtet, dann müssen auch die Nullstellen der korrespondierenden homogenen Polynome p_n auf der S^1 stetig "herumwandern". Wie man sich leicht überlegen kann, kann sich die Summe der Ordnungen dieser Nullstellen nur dann ändern, wenn irgendwo ein kritischer Punkt von gerader Ordnung (≥ 2) verschwindet.

Wir können nun genauso vorgehen wie bei den Kugelflächenfunktionen. Es gibt

nach Satz 5.5 ein HERMITEpolynom mit minimaler Anzahl an Knotengebieten, sowie ein HERMITEpolynom ohne (ferne) kritische Nullstellen mit wesentlich mehr Knotengebieten, falls n hinreichend groß ist. Dann gibt es für jeden beliebigen stetigen Weg wegen Satz 4.5 eine Funktion, wo kritische Nullstellen auftreten oder sich $\nu_{\mathcal{H}}$ ändert. Wenn keine kritischen Nullstellen im Endlichen entstehen, dann muß sich aber $\varrho_{\mathcal{H}}(\infty)$, somit die Summe über die Ordnungen der fernen Nullstellen und deshalb die Summe über die Ordnungen der Nullstellen von p_n ändern. Dies geht aber nur, wenn eine ferne kritische Nullstelle auftritt.

Durch diese Erweiterung der Definition von “kritischer Nullstelle” auf die Ferngerade der projektiven Ebene, erhalten wir ein ähnliches Resultat für die HERMITEpolynome wie oben für die Kugelflächenfunktionen.

7. Beweis von Satz 3.1

Wie man aus den Schwierigkeiten bei der Formulierung des Satzes für den \mathbb{R}^2 bereits ahnen kann, macht sich die fehlende Kompaktheit hier sehr störend bemerkbar. Wir behandeln daher zuerst den Fall $M=S^2$. Diesen fassen wir dann als die 1-Punkt kompaktifizierung des \mathbb{R}^2 auf, um den zweiten Fall behandeln zu können.

7.1 $M = S^2$

Wir beweisen diesen Satz durch Induktion nach der Anzahl der Knotenlinien, wobei wir nur den JORDANSCHEN Kurvensatz (z.B. in [17]) benützen wollen. Wir wollen aber den Satz viel allgemeiner für eine Klasse von Mengen beweisen, für die wir nur die wesentlichsten Eigenschaften — nämlich, daß $N(\psi)$ aus einer Vereinigung von Bögen besteht — voraussetzen. Die Eigenschaft, daß diese Mengen Nullstellen von Eigenfunktionen sind, geht in diesen Satz gar nicht direkt ein und würde den Beweis nicht vereinfachen.

Definition 7.1:

Sei $C \subseteq S^2$ eine Menge, für die gilt:

- (i) C läßt sich darstellen als endliche Vereinigung von Bildern stetiger Kurven

$$\gamma_i: [0, 1] \rightarrow S^2, \quad i \in \mathcal{J}, \quad |\mathcal{J}| < \infty \quad C = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} \mathcal{Jm}\gamma_i$$

wobei $\mathcal{Jm}\gamma = \gamma([0, 1])$ das Bild der Kurve γ ist, für die gilt:

- (ii) γ_i ist injektiv auf $[0, 1]$ und
 $\gamma_i(1) \neq \gamma_i(t) \quad \forall t \in (0, 1)$ für alle $i \in \mathcal{J}$,
d.h. der einzige mögliche Doppelpunkt einer Kurve γ_i ist der Endpunkt $\gamma_i(0) = \gamma_i(1)$.
- (iii) $\mathcal{Jm}\gamma_i \cap \mathcal{Jm}\gamma_j = \{\gamma_i(0), \gamma_i(1)\} \cap \{\gamma_j(0), \gamma_j(1)\}$ für alle $i, j \in \mathcal{J}, i \neq j$,
d.h. zwei beliebige Kurven können sich nur in den Endpunkten schneiden.

Dann heißt C , \mathcal{N} -Menge (in S^2).

Die Menge aller stetigen Kurven $\gamma_i, i \in \mathcal{J}$, heißt eine *Darstellung von C* . Wir bezeichnen diese mit $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$. So eine Darstellung einer \mathcal{N} -Menge ist natürlich nicht eindeutig. Man kann z.B. eine Kurve stets “in zwei Teile” zerlegen.

(Bemerkung: Auch \emptyset ist eine \mathcal{N} -Menge.)

Es ist nun nach §1 klar, daß für jedes ψ mit nur endlich vielen kritischen Nullstellen und $\zeta(\psi) < \infty$, $N(\psi)$ so eine \mathcal{N} -Menge ist. Es gibt aber noch ganz andere \mathcal{N} -Mengen (siehe Abbildung 7.1).

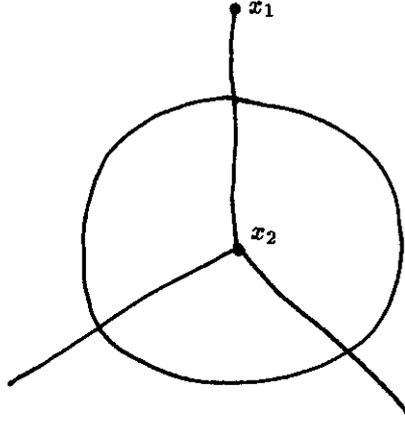


Abbildung 7.1: Beispiel einer \mathcal{N} -Menge.

Wir wollen nun Satz 3.1 für beliebige \mathcal{N} -Mengen formulieren und beweisen. Dazu brauchen wir

Definition 7.2:

Sei C eine \mathcal{N} -Menge. Dann sei

- (1) $\tilde{\Omega}(C)$ die Menge aller Wegzusammenhangskomponenten von $S^2 \setminus C$. Wir wollen diese einfach als “Komponenten” der Menge $S^2 \setminus C$ bezeichnen.

$$\tilde{\mu}(C) := |\tilde{\Omega}(C)|$$

- (2) $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C) := \bigcup_{i \in \mathcal{J}} \{\gamma_i(0), \gamma_i(1)\}$

- (3) $\tilde{\varrho}_C(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (|\{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(0) = x\}| + |\{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(1) = x\}|) & \text{für } x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C) \\ 1 & \text{für } x \in C \setminus \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C) \end{cases}$

$$\tilde{\nu}_C(x) := \tilde{\varrho}_C(x) - 1 \text{ für } x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)$$

- (4) $\tilde{\nu}(C) := \sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \tilde{\nu}_C(x)$

- (5) $\tilde{\zeta}(C) := |\{A \subseteq C : A \text{ ist Wegzusammenhangskomponente von } C\}|$

Bemerkung: In der Definition von $\tilde{\varrho}_C(x)$ geht die Darstellung $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$ nur scheinbar ein. Die Zahl $\tilde{\varrho}_C(x)$ gibt nämlich im Prinzip nur an, in wieviele Wegzusammenhangskomponenten $C \setminus \{x\}$ in einer kleinen Umgebung von x zerfällt.

Bemerkung: $\tilde{\varrho}_C(x)$ kann bei bestimmten \mathcal{N} -Mengen — im Gegensatz zu Nullstellenmengen von Eigenfunktionen — auch halbzahlige Werte annehmen (vgl. Abb. 7.1: $\tilde{\varrho}_C(x_1) = \frac{1}{2}$ und $\tilde{\varrho}_C(x_2) = \frac{3}{2}$).

Für später brauchen wir auch noch

Definition 7.3:

- (1) Eine Darstellung $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$ einer \mathcal{N} -Menge C heißt *minimal*, falls für alle $x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)$ mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
 - (i) $\tilde{\nu}_C(x) \neq 0$
 - (ii) x ist der einzige Punkt aus $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)$ auf einer Wegzusammenhangskomponente von C .
- (2) Eine Darstellung $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$ von C heißt *Verfeinerung* von der Darstellung $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$ von C , falls $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}}(C) \subseteq \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)$.

Satz 7.1:

Sei C eine \mathcal{N} -Menge. Dann ist

$$\tilde{\mu}(C) - \tilde{\nu}(C) - \tilde{\zeta}(C) = 1.$$

Zum Beweis benötigen wir das folgende

Lemma 7.2:

Sei C eine \mathcal{N} -Menge mit Darstellung $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$. Dann gilt:

- (1) $\sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \tilde{\varrho}_C(x) = |\mathcal{J}|$
- (2) $\sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \tilde{\nu}_C(x) = |\mathcal{J}| - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)|$
- (3) $\tilde{\nu}(C)$ ist unabhängig von der gewählten Darstellung von C .

Beweis:

- (1)
$$\begin{aligned} \sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \tilde{\varrho}_C(x) &= \\ &= \sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \frac{1}{2} \left(|\{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(0) = x\}| + |\{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(1) = x\}| \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left| \bigcup_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(0) = x\} \right| + \left| \bigcup_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(1) = x\} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|\{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(0) \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)\}| + |\{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(1) \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)\}| \right) = |\mathcal{J}| \end{aligned}$$

da $\{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(0) = x\} \cap \{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(0) = x'\} = \emptyset$ für $x \neq x'$
- (2)
$$\sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \tilde{\nu}_C(x) = \sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} (\tilde{\varrho}_C(x) - 1) = |\mathcal{J}| - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)|$$
- (3) Sei $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$. Dann ist aber $|\mathcal{I}| - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}}(C)| = |\mathcal{J}| - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)|$, da für alle $x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}}(C) \setminus \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)$, $\tilde{\varrho}_C(x) = 1$ ist, ansonst wären (ii) und (iii) aus Definition 7.1 verletzt, und daher $\tilde{\nu}_C(x) = 0$. Seien nun $\mathcal{D}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{D}_{\mathcal{J}_2}$ zwei beliebige

Darstellungen von C . Dann gibt es eine Verfeinerung $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$ von $\mathcal{D}_{\mathcal{J}_1}$ und $\mathcal{D}_{\mathcal{J}_2}$ mit $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}}(C) = \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}_1}(C) \cup \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}_2}(C)$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(C) &= \sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}_1}(C)} \tilde{\nu}_C(x) = |\mathcal{J}_1| - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}_1}(C)| = \\ &= |\mathcal{I}| - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}}(C)| = |\mathcal{J}_2| - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}_2}(C)|. \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn γ ein stetiger Weg in M ist, dann bezeichnen wir mit $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$ den *inversen Weg* zu γ .

Wenn γ_1 und γ_2 zwei stetige Wege in M mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ sind, dann sei

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \text{ d.h. der Weg, den man erhält, wenn}$$

zuerst γ_1 und dann γ_2 mit doppelter Geschwindigkeit durchläuft, das *Produkt* dieser beiden Wege.

Beweis von Satz 7.1:

Induktion nach $|\mathcal{J}|$.

Sei $\tilde{\eta}(C) := 1 + \tilde{\zeta}(C) - |\mathcal{J}| - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)| = 1 + \tilde{\zeta}(C) + \tilde{\nu}(C)$ wegen Lemma 7.2. Zu zeigen ist $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\eta}(C)$.

Induktionsanfang: $|\mathcal{J}| = 0$, d.h. $C = \emptyset$.

Dann ist $|\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)| = 0$, $\tilde{\zeta}(C) = 0$ und somit $\tilde{\eta}(C) = 1$. Andererseits ist $S^2 \setminus C = S^2$ wegzusammenhängend, also $\tilde{\mu}(C) = 1$.

Induktionsschritt: Sei C eine \mathcal{N} -Menge und $\gamma := \gamma_{i_0}$ für ein $i_0 \in \mathcal{J}$ und $\mathcal{J}' := \mathcal{J} \setminus \{i_0\}$. Dann ist $|\mathcal{J}'| = |\mathcal{J}| - 1$ und $C' := \bigcup_{i \in \mathcal{J}'} \mathcal{J}m\gamma_i$ automatisch eine \mathcal{N} -Menge. Es gibt eine Komponente G von $S^2 \setminus C'$, sodaß $\mathcal{J}m\gamma \setminus \{\gamma(0), \gamma(1)\} \subset G$, ansonst gäbe es in $\mathcal{J}m\gamma$ einen stetigen Weg, der zwei Punkte aus verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von $S^2 \setminus C'$ verbindet und $\mathcal{J}m\gamma$ daher C' schneiden würde.

Behauptung 1: Wenn γ eine JORDANKurve (= einfach geschlossene stetige Kurve) ist, oder wenn γ ein Teil einer JORDANKurve Γ ist, d.h. es gibt einen stetigen injektiven Weg γ' in C' mit $\gamma'(0) = \gamma(1)$, $\gamma'(1) = \gamma(0)$ und $\Gamma = \gamma' \cdot \gamma$, dann besteht $G' \setminus \mathcal{J}m\gamma$ aus genau 2 Wegzusammenhangskomponenten, und es ist $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(C' \cup \mathcal{J}m\gamma) = \tilde{\mu}(C') + 1$.

Beweis: Falls γ bereits eine JORDANKurve ist, dann sei $\Gamma = \gamma$. Nach dem JORDANSchen Kurvensatz teilt Γ die S^2 in genau 2 Gebiete und daher in genau 2 Wegzusammenhangskomponenten K_1 und K_2 , und es ist $\partial K_1 = \partial K_2 = \mathcal{J}m\Gamma$. Sei nun G' eine beliebige Komponente von $S^2 \setminus C'$, $G' \neq G$. Dann ist $G' \cap K_1$ entweder $= G'$ oder $= \emptyset$, da $\mathcal{J}m\Gamma \cap \overline{G'} \subset \partial G'$. Hingegen ist $G \cap K_1 \neq \emptyset$, da eine genügend

kleine Umgebung von $\gamma(t) \in \partial K_1$ für $t \in (0, 1)$ nur mehr die Komponente G schneidet. Da die obigen Überlegungen für alle JORDANKURVEN Γ gelten, können wir ein γ'' so wählen, daß $\Gamma' := \gamma'' \cdot \gamma$ den Rand von $K_1 \cap G$ bildet. Also ist $K_1 \cap G$ wegzusammenhängend. Dasselbe gilt analog auch für K_2 . G zerfällt also in 2 Wegzusammenhangskomponenten, und alle anderen Komponenten bleiben unverändert, somit $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(C') + 1$.

Behauptung 2: Wenn $\gamma(0)$ oder $\gamma(1) \notin C'$ und $\gamma(0) \neq \gamma(1)$, dann ist $G \setminus \mathcal{Jm}\gamma$ wegzusammenhängend, und es ist $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(C')$.

Beweis: O.B.d.A. sei $\gamma(1) \notin C'$. Sei γ' ein stetiger injektiver Weg in $G \setminus \mathcal{Jm}\gamma \cup \{\gamma(0), \gamma(1)\}$ von $\gamma(1)$ nach $\gamma(0)$. Dann ist $\Gamma := \gamma' \cdot \gamma$ eine JORDANKURVE. $\tilde{C} := C' \cup \mathcal{Jm}\Gamma$ ist wieder eine \mathcal{N} -Menge. Also ist $\tilde{\mu}(\tilde{C}) = \tilde{\mu}(C') + 1$. Andererseits erfüllt auch $C \cup \mathcal{Jm}\gamma' = C' \cup \mathcal{Jm}\gamma \cup \mathcal{Jm}\gamma' = C' \cup \mathcal{Jm}\Gamma = \tilde{C}$ und γ diese Bedingung, daher ist $\tilde{\mu}(\tilde{C}) = \tilde{\mu}(C) + 1$. Da der Durchschnitt von $\mathcal{Jm}\gamma$ mit allen anderen Komponenten stets leer ist, gilt $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(\tilde{C}) - 1 = \tilde{\mu}(C')$.

Nun zum eigentlichen Induktionsschritt:

Sei die Behauptung für $|\mathcal{J}| = m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) bereits gezeigt. Sei $|\mathcal{J}| = m + 1$. Dann ist $|\mathcal{J}'| = m$ und es gilt nach Induktionsvoraussetzung $\tilde{\mu}(C') = \tilde{\eta}(C')$. Wir müssen nun 5 Fälle unterscheiden:

Fall 1: $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \cap C' = \emptyset$, d.h. $\mathcal{Jm}\gamma$ und C' lassen sich nicht durch einen stetigen Weg in C verbinden, somit $\tilde{\zeta}(C) = \tilde{\zeta}(C') + 1$.

Fall 1.1: $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Dann ist $|\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)| = |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}'}(C')| + 1$ und daher $\tilde{\eta}(C) = 1 + \tilde{\zeta}(C) + |\mathcal{J}| - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)| = 1 + \tilde{\zeta}(C') + 1 + |\mathcal{J}'| + 1 - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}'}(C')| - 1 = \tilde{\eta}(C') + 1$. Andererseits ist γ eine JORDANKURVE und daher ist nach Behauptung 1, $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(C') + 1$ und somit $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(C') + 1 = \tilde{\eta}(C') + 1 = \tilde{\eta}(C)$.

Fall 1.2: $\gamma(0) \neq \gamma(1)$.

Dann ist $|\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)| = |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}'}(C')| + 2$ und $\tilde{\eta}(C) = \tilde{\eta}(C')$. Andererseits ist wegen Behauptung 2, $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(C')$.

Fall 2: $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \cap C' \neq \emptyset$, o.B.d.A. $\gamma(0) \in C'$.

Fall 2.1: $\gamma(1) \notin C'$.

Dann ist $\gamma(0) \neq \gamma(1)$, daher $\tilde{\zeta}(C) = \tilde{\zeta}(C')$, $|\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)| = |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}'}(C')| + 1$ und $\tilde{\eta}(C) = \tilde{\eta}(C')$. Andererseits ist nach Behauptung 2, $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(C')$.

Fall 2.2: $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \subset C'_1$, wobei C'_1 eine Wegzusammenhangskomponente von C' ist. Entweder ist γ bereits eine JORDANKURVE ($\gamma(0) = \gamma(1)$), oder aber es gibt in C'_1 einen injektiven stetigen Weg γ' von $\gamma(1)$ nach $\gamma(0)$ und $\Gamma = \gamma' \cdot \gamma$ ist eine JORDANKURVE (γ' läßt sich aus verschiedenen γ_i oder γ_i^{-1} , die C'_1 bilden,

konstruieren). Daher ist wegen Behauptung 1, $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(C') + 1$. Andererseits ist $|\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)| = |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}'}(C')|$ und daher $\tilde{\eta}(C) = \tilde{\eta}(C') + 1$.

Fall 2.3: $\gamma(0) \in C'_1$, $\gamma(1) \in C'_2$, wobei die C'_i zwei verschiedene Wegzusammenhangskomponenten von C' sind. Dann ist $|\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)| = |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}'}(C')|$ und $\tilde{\zeta}(C) = \tilde{\zeta}(C') - 1$, da γ zwei Wegzusammenhangskomponenten miteinander verbindet. Also $\tilde{\eta}(C) = \tilde{\eta}(C')$.

Sei nun genauso wie im Beweis von Behauptung 2, γ' ein stetiger injektiver Weg in $G \setminus \mathcal{I}m\gamma$ von $\gamma(1)$ nach $\gamma(0)$. Dann ist $\Gamma := \gamma' \cdot \gamma$ wieder eine JORDANKurve und man erhält für $\tilde{C} := C' \cup \mathcal{I}m\gamma'$, $\tilde{\mu}(\tilde{C}) = \tilde{\mu}(C') + 1$. Genauso für C , $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(C') + 1$. Also ist auch $\tilde{\mu}(C) = \tilde{\mu}(C')$. \square

Es ist klar, daß für alle $\psi \in E(h, M)$, die den Bedingungen von Satz 3.1 genügen, gilt

$$\tilde{\Omega}(N(\psi)) = \Omega(\psi), \text{ somit auch } \tilde{\mu}(N(\psi)) = \mu(\psi) \text{ und } \tilde{\zeta}(N(\psi)) = \zeta(\psi)$$

und wegen Satz 1.1

$$\tilde{\rho}_{N(\psi)}(x) = \rho_{\psi}(x) \text{ für alle } x \in N(\psi).$$

Außerdem ist $\mathcal{K}(\psi) \subseteq \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(N(\psi))$. Da $\tilde{\nu}_{N(\psi)}(x) = \nu_{\psi}(x) = 0$ für alle $x \notin \mathcal{K}(\psi)$, ist auch

$$\tilde{\nu}(N(\psi)) = \nu(\psi).$$

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß $N(\psi)$ eine \mathcal{N} -Menge ist.

Lemma 7.9:

Sei C eine Menge, für die die Voraussetzungen wie in Definition 7.1 gelten, wobei aber die Voraussetzung $|\mathcal{J}| < \infty$ entfällt. Außerdem erweitern wir die Definitionen 7.2 und 7.3 auf solche Mengen.

Falls nun $\tilde{\mu}(C) < \infty$ und $\tilde{\nu}_C(x) \geq 0$ für alle $x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)$, dann ist C eine \mathcal{N} -Menge.

Beweis:

Wir wählen eine minimale Darstellung für C . Es ist zu zeigen, daß unter den gegebenen Voraussetzungen $|\mathcal{J}| < \infty$ ist.

Seien $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \dots \subseteq \mathcal{J}$ Teilmengen von \mathcal{J} mit $|\mathcal{J}_k| < \infty$ für alle k , $\bigcup_k \mathcal{J}_k = \mathcal{J}$ und $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2 \subset \dots \subset \mathcal{J}$. Dann sind die $C_k := \bigcup_{i \in \mathcal{J}_k} \mathcal{I}m\gamma_i$, \mathcal{N} -Mengen, für die Satz 7.1 gilt. Wir können die \mathcal{J}_k so wählen, daß $\tilde{\zeta}(C_k) \leq \tilde{\zeta}(C_{k+1})$ ist. Dann ist auf jeden Fall $\tilde{\zeta}(C_k) + \tilde{\nu}(C_k) \leq \tilde{\zeta}(C_{k+1}) + \tilde{\nu}(C_{k+1})$, da im schlechtesten Fall, wo doppelt so viele Punkte wie Kurven zu $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}_k}(C_k)$ hinzukommen, sehr viele neue Wegzusammenhangskomponenten entstehen müssen. Da aber nach Voraussetzung die Darstellung von C minimal, $\tilde{\nu}_C(x) \geq 0$, und daher $\tilde{\nu}_C(x) > 0$ ist, falls x nicht der einzige Punkt aus $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)$ auf dieser Wegzusammenhangskomponente von C ist, kann

man die \mathcal{J}_k so wählen, daß C_{k+1} mehr Wegzusammenhangskomponenten enthält als C_k oder $\tilde{\nu}(C_{k+1}) > \tilde{\nu}(C_k)$ ist. Dann ist

$$\tilde{\nu}(C_{k+1}) + \tilde{\zeta}(C_{k+1}) \geq 1 + \tilde{\nu}(C_k) + \tilde{\zeta}(C_k)$$

und damit

$$\tilde{\nu}(C_{k+1}) + \tilde{\zeta}(C_{k+1}) \geq k + \tilde{\nu}(C_1) + \tilde{\zeta}(C_1).$$

Also ist nach Satz 7.1

$$\tilde{\mu}(C_{k+1}) = 1 + \tilde{\nu}(C_{k+1}) + \tilde{\zeta}(C_{k+1}) \geq k + 1 + \tilde{\nu}(C_1) + \tilde{\zeta}(C_1) = k + \tilde{\mu}(C_1).$$

Nun wird aber durch Hinzufügen von neuen Kurven $\tilde{\mu}(C_k)$ nicht kleiner, also

$$\tilde{\mu}(C_1) \leq \tilde{\mu}(C_2) \leq \dots \leq \tilde{\mu}(C_{k+1}) \leq \tilde{\mu}(C).$$

Daher ist

$$k + \tilde{\mu}(C_1) \leq \tilde{\mu}(C_{k+1}) \leq \tilde{\mu}(C) < \infty.$$

k ist also kleiner ∞ , dh. es gibt nur endlich viele endliche Teilmengen von \mathcal{J} , d.h. \mathcal{J} selbst muß endlich sein. \square

Da die von uns untersuchten Nullstellenmengen die Voraussetzungen des obigen Lemmas erfüllen, erhalten wir

Lemma 7.4:

Sei $\psi \in E(h, M)$ für $M = S^2$ und $\mu(\psi) < \infty$. Dann ist $N(\psi)$ eine \mathcal{N} -Menge, und es gilt:

$$\mu(\psi) = \tilde{\mu}(N(\psi)), \nu(\psi) = \tilde{\nu}(N(\psi)), \zeta(\psi) = \tilde{\zeta}(N(\psi)).$$

Damit erhalten wir zusammen mit Satz 7.1 die Aussage von Satz 3.1 für den Fall $M = S^2$. \square

Bemerkung: Wir benützen diese Vorgangsweise, da die Begriffe, die wir hier definiert haben, auch in anderen Beweisen (§§ 8., 9. und 10.) sehr nützlich sind, und weil diese Vorgangsweise eher elementar ist. Man setzt nur den JORDANSchen Kurvensatz voraus.

Eine andere Beweisidee erhält man auch folgendermaßen:

Wenn die \mathcal{N} -Menge C aus Definition 7.1 wegzusammenhängend ist, dann bilden die Punkte aus $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)$ zusammen mit den Kurven γ_i (ohne die Randpunkte) und den Komponenten von $S^2 \setminus C$ eine endliche CW -Zerlegung der S^2 (Definition in [17]). Aus einem Satz der algebraischen Topologie ([17]) folgt dann, daß

$$\chi(S^2) := \# \text{ der Komponenten} - \# \text{ der Kurven} + \# \text{ der Punkte}$$

invariant bezüglich der gewählten CW -Zerlegung ist. Die Zahl $\chi(S^2)$ wird als EULER-Charakteristik bezeichnet und beträgt in unserem Fall 2. Verwendet man diese Methode zum Beweis von Satz 7.1, so müßte man viel mehr verwenden als bei

unserer Vorgangsweise (EULER-Charakteristik von CW-Komplexen), hätte aber den Vorteil, daß man damit ähnliche Resultate für Nullstellenmengen auf kompakten RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten mit Geschlecht größer als 0 zeigen könnte, während der JORDANSche Kurvensatz bereits am Torus falsch ist.

7.2 $M = \mathbb{R}^2$

Wir halten auch hier an der im ersten Fall gewählten Vorgangsweise fest und definieren zuerst “ \mathcal{N} -Mengen im \mathbb{R}^2 ”, für die wir die Behauptung zeigen. Dies machen wir indem, wir solche Mengen mittels stereographischer Projektion in die S^2 einbetten, dort den Abschluß der Bilder bilden (d.h. wir geben den Nordpol zu den Bildern dazu, falls die ursprünglichen Mengen im \mathbb{R}^2 unbeschränkt waren) und zeigen, daß diese dann \mathcal{N} -Mengen in S^2 sind.

Bemerkung: Wir könnten natürlich sofort die Nullstellenmengen mittels stereographischer Projektion in die S^2 einbetten und dort genauso weitergehen. Es ist aber für später nützlich, die Knotenlinien von der Eigenschaft, Nullstellen zu sein, loslösen zu können.

Definition 7.4:

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Menge für die gilt:

(i) C läßt sich darstellen als endliche Vereinigung von Bildern stetiger Kurven

$$\gamma_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad i \in \mathcal{J}_f, \quad |\mathcal{J}_f| < \infty$$

$$\gamma_i: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad i \in \mathcal{J}_\infty, \quad |\mathcal{J}_\infty| < \infty$$

$$C = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} \mathcal{I}m \gamma_i, \quad \mathcal{J} := \mathcal{J}_f \cup \mathcal{J}_\infty.$$

wobei $\lim_{t \rightarrow 1} |\gamma_i| = \infty, \forall i \in \mathcal{J}_\infty$, für die gilt:

(ii) γ_i ist injektiv auf $[0, 1)$ für alle $i \in \mathcal{J}_f$ und $\gamma_i(1) \neq \gamma_i(t), \forall t \in (0, 1)$ für alle $i \in \mathcal{J}$

(iii) $\mathcal{I}m \gamma_i \cap \mathcal{I}m \gamma_j = \begin{cases} \{\gamma_i(0), \gamma_i(1)\} \cap \{\gamma_j(0), \gamma_j(1)\} & \forall i, j \in \mathcal{J}_f, i \neq j \\ \{\gamma_i(0), \gamma_i(1)\} \cap \{\gamma_j(0)\} & \forall i \in \mathcal{J}_f, i \in \mathcal{J}_\infty \\ \{\gamma_i(0)\} \cap \{\gamma_j(0)\} & \forall i, j \in \mathcal{J}_\infty, i \neq j \end{cases}$

Dann heißt C , \mathcal{N} -Menge (im \mathbb{R}^2).

Die Menge aller stetigen Kurven $\gamma_i, i \in \mathcal{J}$, heißt eine *Darstellung von C* . Wir bezeichnen diese Darstellungen mit \mathcal{D}_C .

Definition 7.5:

Sei C eine \mathcal{N} -Menge. Dann sei

- (1) $\tilde{\Omega}(C)$ die Menge aller Wegzusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Wir wollen diese einfach als “Komponente” der Menge $\mathbb{R}^2 \setminus C$ bezeichnen.

$$\tilde{\mu}(C) := |\tilde{\Omega}(C)|$$

- (2) $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C) := \bigcup_{i \in \mathcal{J}_f} \{\gamma_i(0), \gamma_i(1)\} \cup \bigcup_{i \in \mathcal{J}_\infty} \{\gamma_i(0)\}$

- (3) $\tilde{\varrho}_C(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (|\{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(0) = x\}| + |\{i \in \mathcal{J}_f : \gamma_i(1) = x\}|) & \text{für } x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C) \\ 1 & \text{für } x \in C \setminus \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C) \end{cases}$

$$\tilde{\varrho}_C(\infty) := \frac{1}{2} |\mathcal{J}_\infty|$$

$$\tilde{\nu}_C(x) := \tilde{\varrho}_C(x) - 1 \text{ für } x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)$$

$$\tilde{\nu}_C(\infty) := \begin{cases} \varrho_C(x) - 1 & \text{falls } \sup_{x \in C} |x| = \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (4) $\tilde{\nu}(C) := \sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \tilde{\nu}_C(x) + \tilde{\nu}_C(\infty)$

- (5) $\tilde{\zeta}(C) := |\{A \subseteq C : A \text{ ist Wegzusammenhangskomponente von } C,$

$$A \text{ beschränkt}\}| + \begin{cases} 0 & \text{falls } \sup_{x \in C} |x| < \infty \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit können wir analog zum ersten Fall folgende Behauptungen formulieren:

Satz 7.5:

Sei C eine \mathcal{N} -Menge. Dann ist

$$\tilde{\mu}(C) - \tilde{\nu}(C) - \tilde{\zeta}(C) = 1.$$

Lemma 7.6:

Sei C eine \mathcal{N} -Menge mit Darstellung $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$. Dann gilt:

- (1) $\sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \tilde{\varrho}_C(x) + \tilde{\varrho}_C(\infty) = |\mathcal{J}|$

- (2) $\sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \tilde{\nu}_C(x) + \tilde{\nu}_C(\infty) = |\mathcal{J}| - |\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)| - \begin{cases} 0 & \text{falls } \sup_{x \in C} |x| < \infty \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$

- (3) $\tilde{\nu}(C)$ ist unabhängig von der gewählten Darstellung von C .

Lemma 7.7:

Sei C eine Menge, für die die Voraussetzungen wie in Definition 7.4 gelten, wobei aber $|\mathcal{J}|$ auch ∞ sein kann. Außerdem erweitern wir die Definitionen 7.3 und 7.5 auf solche Mengen.

Falls nun $\tilde{\mu}(C) < \infty$, $\tilde{\nu}_C(x) \geq 0$ für alle $x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)$ und $\tilde{\nu}_C(\infty) \neq -\frac{1}{2}$, dann ist C eine \mathcal{N} -Menge.

Beweis von Satz 7.5 und der Lemmata 7.6 und 7.7:

Sei $\hat{\sigma}: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{\text{Nordpol}\}$ die stereographische Projektion und $\sigma := \iota \circ \hat{\sigma}: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$, wobei $\iota: S^2 \setminus \{\text{Nordpol}\} \hookrightarrow S^2$ die kanonische Einbettung ist. Dann sind die $\tilde{\gamma}_i := \sigma \circ \gamma_i$ stetige Kurven in S^2 . Falls eine derartige Kurve nur auf dem halboffenen Intervall $[0, 1)$ definiert ist, dann sei $\tilde{\gamma}_i(1) := \lim_{t \rightarrow 1} \tilde{\gamma}_i(t)$, und das ist nach Konstruktion der Nordpol. Diese Kurven erfüllen alle die Bedingungen (ii) und (iii) von Definition 7.1. $\tilde{C} := \overline{\sigma(C)}$ ist somit eine \mathcal{N} -Menge in S^2 , bzw. erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 7.3. Da $\hat{\sigma}$ ein Diffeomorphismus ist, und als solcher genau die wegzusammenhängenden Mengen in solche überführt, ist

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\sigma(C)) &= \tilde{\mu}(C) \text{ und es gilt:} \\ \tilde{\zeta}(\sigma(C)) &= |\{\tilde{A} \subseteq \tilde{C} : \tilde{A} \text{ ist Wegzusammenhangskomponente von } \tilde{C}, \\ &\quad \tilde{A} \not\ni \text{Nordpol}\}| + \begin{cases} 0 & \text{falls } \tilde{C} \not\ni \text{Nordpol} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = \\ &= |\{A \subseteq C : A \text{ ist Wegzusammenhangskomponente von } C, \\ &\quad A \text{ beschränkt}\}| + \begin{cases} 0 & \text{falls } \sup_{x \in C} |x| < \infty \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = \tilde{\zeta}(C). \end{aligned}$$

Ebenso ist für alle $x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}_{\sigma(C)}(\sigma(x)) &= \frac{1}{2} \cdot \left(|\{i \in \mathcal{J} : \tilde{\gamma}_i(0) = \sigma(x)\}| + |\{i \in \mathcal{J} : \tilde{\gamma}_i(1) = \sigma(x)\}| \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(|\{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(0) = x\}| + |\{i \in \mathcal{J} : \gamma_i(1) = x\}| \right) = \tilde{\varrho}_C(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}_{\sigma(C)}(\text{Nordpol}) &= \frac{1}{2} \cdot |\{i \in \mathcal{J} : \tilde{\gamma}_i(1) = \text{Nordpol}\}| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot |\{i \in \mathcal{J} : \lim_{t \rightarrow 1} \tilde{\gamma}_i(t) = \text{Nordpol}\}| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot |\{i \in \mathcal{J} : \lim_{t \rightarrow 1} \gamma_i(t) = \infty\}| = \frac{1}{2} |\mathcal{J}_\infty| = \tilde{\varrho}_C(\infty). \end{aligned}$$

Somit ist $\tilde{\nu}(\sigma(C)) = \tilde{\nu}(C)$ und Lemma 7.5 bewiesen, da Lemma 7.1 für die \mathcal{N} -Menge $\sigma(C)$ gilt.

Lemma 7.6 folgt genauso, da

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(C)} \tilde{\varrho}_C(x) + \tilde{\varrho}_C(\infty) &= \sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(\sigma(C)) \setminus \{\text{Nordpol}\}} + \tilde{\varrho}_{\sigma(C)}(\text{Nordpol}) = \\ &\text{— wobei } \tilde{\varrho}_{\sigma(C)}(\text{Nordpol}) = 0 \text{ sei, falls } \text{Nordpol} \notin \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(\sigma(C)) \text{—} \\ &= \sum_{x \in \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}(\sigma(C))} = |\mathcal{J}|, \text{ wegen Lemma 7.2.} \end{aligned}$$

Die zweite Aussage erhält man analog, indem man wieder unterscheidet, ob C unbeschränkt — und daher $\sigma(C) \not\ni \text{Nordpol}$ — ist, oder nicht.

Lemma 7.7 läßt sich genauso beweisen wie Lemma 7.3, wenn man (7.5) statt (7.1) verwendet. \square

Da nun $\varrho_\psi(\infty)$ im Grunde definiert war durch $\tilde{\varrho}_{N(\psi)}(\infty)$ (man vergleiche die Definitionen 3.1 und 7.5), erhält man genauso wie im ersten Fall mittels dieser Lemmata

Lemma 7.8:

Sei $\psi \in E(h, M)$ für $M = \mathbb{R}^2$ und $\mu(\psi) < \infty$. Dann ist $N(\psi)$ eine \mathcal{N} -Menge, und es gilt:

$$\mu(\psi) = \tilde{\mu}(N(\psi)), \nu(\psi) = \tilde{\nu}(N(\psi)), \zeta(\psi) = \tilde{\zeta}(N(\psi)).$$

Damit erhalten wir zusammen mit Satz 7.5 die Aussage von Satz 3.1 für den Fall $M = \mathbb{R}^2$.

Somit ist Satz 3.1 vollständig bewiesen. \square

8. Beweis von Lemma 4.4

8.1 Fall $M = S^2$

Wir benützen wieder die gleiche Idee, wie in §7., und fassen $N(\psi_t)$ als \mathcal{N} -Menge auf, die sich stetig verändert, d.h. wir haben dann stetige Abbildungen des Einheitsquadrats auf M , die eingeschränkt auf $[0, 1] \times \{t\}$ die Kurven der Darstellung von $N(\psi_t)$ sind.

Genauso wie im Beweis von Satz 3.1 müssen wir wieder zwischen der kompakten S^2 und dem nichtkompakten \mathbb{R}^2 unterscheiden.

Definition 8.1:

Sei $\mathcal{C} = \{C_t \subset S^2, t \in [0, 1]\}$ eine 1-parametrische Familie von (nichtleeren) \mathcal{N} -Mengen. Es sei

\mathcal{J}_t die (nicht eindeutig bestimmte) Indexmenge für C_t

$\gamma_i^t, i \in \mathcal{J}_t$, die Kurven der Darstellung $\mathcal{D}_{\mathcal{J}_t}$,

$\mathcal{K}_{\mathcal{J}_t}(C_t) = \bigcup_{i \in \mathcal{J}_t} \{\gamma_i^t(0), \gamma_i^t(1)\}$ die Menge der Endpunkte der Kurven, die wir einfach mit \mathcal{K}_t bezeichnen wollen.

Falls sich \mathcal{J}_t so finden lassen, sodaß gilt:

- (i) $\mathcal{J}_t = \mathcal{J}, \forall t \in [0, 1)$, für ein \mathcal{J}
- (ii) $|\mathcal{K}_t| = k_0, \forall t \in [0, 1)$, für ein $k_0 \in \mathbb{N}$
- (iii) Die Abbildungen definiert durch

$$\gamma_i(t, s) := \begin{cases} \gamma_i^t(s) & \text{für } i \in \mathcal{J}_t \\ x_i \in \mathcal{K}_t & \text{für } i \in (\mathcal{J} \cup \mathcal{J}_1) \setminus \mathcal{J}_t \end{cases} \text{ für } t \in [0, 1]$$
 sind stetig für alle $i \in (\mathcal{J} \cup \mathcal{J}_1)$ (bezüglich der üblichen EUKLIDischen Topologie).
- (iv) $\exists V_0 > 0$, sodaß \forall Zusammenhangskomponenten K von $S^2 \setminus C_t, \forall t \in [0, 1]$ gilt: $\text{vol}(K) \geq V_0$.

dann heißt \mathcal{C} , \mathcal{N} -Schar.

So wie für \mathcal{N} -Mengen heißt die Menge aller Abbildungen $\gamma_i, i \in \mathcal{J} \cup \mathcal{J}_1$ eine *Darstellung von \mathcal{C}* . Wir bezeichnen diese wieder mit $\mathcal{D}_{\mathcal{J} \cup \mathcal{J}_1}$.

Wir werden später sehen, daß für die stetigen Wege $t \mapsto \psi_t$ von Lemma 4.4 $N(\psi_t)$ solche \mathcal{N} -Scharen sind. So ist die Voraussetzung (iv) unmittelbar durch Lemma 4.3 gegeben. (iii) folgt aus der Stetigkeit, die wir in Lemma 4.1 gezeigt haben. Die Bedingungen (i),(ii) entsprechen den Voraussetzungen des Lemmas. Wir werden daher zuerst die Aussage von Lemma 4.4 für solche \mathcal{N} -Scharen beweisen (vgl. die Vorgangsweise von §7.).

Lemma 8.1:

Sei \mathcal{C} eine \mathcal{N} -Schar und es gelte:

$$\tilde{\nu}(C_1) = \tilde{\nu}(C_0) + \kappa \text{ f\"ur ein } \kappa \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt:

- (1) $\tilde{\nu}(C_t)$ ist konstant auf $[0, 1)$, und $\kappa \geq 0$, d.h. $\tilde{\nu}(C_1) \geq \tilde{\nu}(C_0)$
- (2) $\tilde{\mu}(C_t)$ und $\tilde{\zeta}(C_t)$ sind konstant auf $[0, 1)$
- (3) $\tilde{\mu}(C_1) = \tilde{\mu}(C_0) + \kappa'$
 $\tilde{\zeta}(C_1) = \tilde{\zeta}(C_0) - \kappa''$
 f\"ur $\kappa', \kappa'' \in \{0, \dots, \kappa\}$, wobei $\kappa'' \leq \tilde{\zeta}(C_0) - 1$ und $\kappa' + \kappa'' = \kappa$.

Zum Beweis dieses Lemmas ben\"otigen wir zuerst einige Behauptungen.

Lemma 8.2:

F\"ur eine \mathcal{N} -Schar \mathcal{C} mit Darstellung $\mathcal{D}_{\mathcal{J} \cup \mathcal{J}_1}$ gilt:

$$\gamma_i(0, \delta_i) = \gamma_j(0, \delta_j) \Rightarrow \gamma_i(t, \delta_i) = \gamma_j(t, \delta_j) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\gamma_i(0, \delta_i) \neq \gamma_j(0, \delta_j) \Rightarrow \gamma_i(t, \delta_i) \neq \gamma_j(t, \delta_j) \quad \forall t \in [0, 1]$$

f\"ur alle $i, j \in \mathcal{J} \cup \mathcal{J}_1$, wobei $\delta_k \in \{0, 1\}$.

Beweis:

Da alle $\gamma_i(\cdot, \delta_i)$ und $d(\cdot, \cdot)$ (= EUKLIDISCHE METRIK) stetig sind, sind die Mengen $T(i, \delta_i; j, \delta_j) := \{t \in [0, 1] : \gamma_i(t, \delta_i) = \gamma_j(t, \delta_j)\} = \left(t \mapsto d(\gamma_i(t, \delta_i), \gamma_j(t, \delta_j))\right)^{-1}(0)$ abgeschlossen in $[0, 1]$.

Sei nun U der Durchschnitt aller $T(i, \delta_i; j, \delta_j)$, die $t = 0$ enthalten, d.h. f\"ur diese i, δ_i, j, δ_j gilt $\gamma_i(0, \delta_i) = \gamma_j(0, \delta_j)$, und V die Vereinigung aller $T(i, \delta_i; j, \delta_j)$, die $t = 0$ *nicht* enthalten, d.h. f\"ur diese i, δ_i, j, δ_j gilt $\gamma_i(0, \delta_i) \neq \gamma_j(0, \delta_j)$. Da nach Voraussetzung $|\mathcal{J}_t| < \infty$, $\forall t \in [0, 1]$, ist $|\mathcal{J} \cup \mathcal{J}_1| < \infty$ und daher sind U und V abgeschlossenen in $[0, 1]$. Dann sind aber auch $U' = U \setminus \{1\}$ und $V' = V \setminus \{1\}$ abgeschlossen in $[0, 1)$ mit der Spurtopologie. Es gilt:

$U' \cup V' = [0, 1)$, ansonst w\"are bei $t_0 \in [0, 1) \setminus (U' \cup V')$, $|\mathcal{K}_{t_0}| > k_0$, und

$U' \cap V' = \emptyset$, da bei $t_0 \in U' \cap V'$, $|\mathcal{K}_{t_0}| < k_0$ w\"are. (Widerspruch zu Definition 8.1(ii))

Also ist $U' = [0, 1) \setminus V'$ und daher offen in $[0, 1)$. Da $[0, 1)$ zusammenh\"angend und $0 \in U'$, ist $U' = [0, 1)$ und $V' = \emptyset$ (2. Behauptung).

Da U' offen in $[0, 1)$, ist $U = \overline{U'} = \overline{[0, 1)} = [0, 1]$ (1. Behauptung). \square

Lemma 8.3:

Sei \mathcal{C} eine \mathcal{N} -Schar. Dann gilt:

- (1) $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}$ und somit $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$
- (2) Die Definition der γ_i aus Voraussetzung (iii) l\"a\ss t sich einfach schreiben als

$$\gamma_i(t, s) := \begin{cases} x_i \in \mathcal{K}_1 & \text{falls } t = 1 \text{ und } i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1 \\ \gamma_i^t(s) & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{J}_t \subseteq \mathcal{J}$.

Angenommen es gibt ein $i \in \mathcal{J}_t \setminus \mathcal{J}$. Dann wäre $\gamma_i(t, s) = x_i(t) \in \mathcal{K}_t$ für alle $t \in [0, 1)$ und $\gamma_i(1, s) = \gamma_i^1(s)$. D.h. $\forall s \in (0, 1)$ ist $\gamma_i(t, s) = x_i(t) = \gamma_i(t, 0)$, $\forall t \in [0, 1)$ und $\gamma_i(1, s) \neq \gamma_i(1, 0)$ (Def. 7.1 (ii)). Seien nun γ_i' und γ_i'' zwei Abbildungen mit $\gamma_i'(t, 1) = \gamma_i(t, s) = \gamma_i''(t, 0)$ für ein $s \in (0, 1)$, sodaß $\gamma_i(t, \cdot) = \gamma_i'(t, \cdot) \cdot \gamma_i''(t, \cdot)$, $\forall t \in [0, 1]$. Ersetzt man γ_i durch diese beiden Abbildungen, so erhält man wieder eine \mathcal{N} -Schar, und es gilt $\gamma_i'(0, 1) = \gamma_i'(0, 0)$ aber $\gamma_i'(1, 1) = \gamma_i(1, s) \neq \gamma_i(1, 0) = \gamma_i'(1, 0)$. Widerspruch zu Lemma 8.2. \square

Im folgenden Lemma wird die Eigenschaft (iv) verwendet. Diese sagt nämlich aus, daß ein Knotengebiet nicht beliebig klein werden kann. Daher muß auch gelten, daß eine Knotenlinie, die ein Knotengebiet umrandet, nicht beliebig kurz werden kann.

Lemma 8.4:

Sei \mathcal{C} ein \mathcal{N} -Schar und $\mathcal{J}' := \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1$. Dann gibt es in $\bigcup_{i \in \mathcal{J}'} \mathcal{Jm}\gamma_i^0$ keine geschlossenen Kurven.

Bemerkung: Die γ_i^t für $i \in \mathcal{J}'$ sind genau jene Kurven, die sich auf einen Punkt zusammenziehen.

Beweis von Lemma 8.4:

Sei $\gamma^0(\cdot) := \tilde{\gamma}_{i_1}(0, \cdot) \cdot \tilde{\gamma}_{i_2}(0, \cdot) \cdot \dots \cdot \tilde{\gamma}_{i_n}(0, \cdot)$, eine geschlossene Kurve, wobei $\tilde{\gamma}_{i_k}(0, s) = \gamma_{i_k}(0, s)$ oder $= \gamma_{i_k}(0, 1 - s)$. Dann ist aber wegen Lemma 8.2 auch γ^t eine geschlossene Kurve. Da $\gamma^t(s): [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^2$ stetig ist, ist auch die Bogenlänge der Kurve $\text{len}(\gamma^t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ stetig. Angenommen $\gamma^1(s) = x_i$, dann würde $\text{len}(\gamma^t)$ und damit auch das LEBESQUEMAß von zumindest einer Zusammenhangskomponente von $S^2 \setminus \mathcal{Jm}\gamma^t$ beliebig klein werden. Widerspruch zu (iv). \square

Nachdem wir nun einige Eigenschaften dieser \mathcal{N} -Scharen kennengelernt haben, kommen wir nun zum

Beweis von Lemma 8.1:

(1) $\tilde{\nu}(C_t) = \text{const.}$ auf $[0, 1)$ folgt direkt aus (i)+(ii).

Zeigen: $\tilde{\nu}(C_1) \geq \tilde{\nu}(C_0)$

Nach Lemma 7.2(2) ist $\tilde{\nu}(C_0) = |\mathcal{J}_0| - |\mathcal{K}_0|$. Wegen Lemma 8.4 gibt es in

$\bigcup_{i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1} \mathcal{J}m\gamma_i^0$ keine geschlossene Kurven. Also muß mit jeder Kurve γ_i^0 , die zu einer konstanten Kurve x_i wird, ein Punkt aus \mathcal{K}_0 verschwinden. Daher ist

$$|\mathcal{J}_0| - |\mathcal{J}_1| = |\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1| \leq |\mathcal{K}_0| - |\mathcal{K}_1|$$

und somit

$$\tilde{v}(C_0) = |\mathcal{J}_0| - |\mathcal{K}_0| \leq |\mathcal{J}_1| - |\mathcal{K}_1| = \tilde{v}(C_1).$$

(3) Zeigen: $\tilde{\zeta}(C_1) \leq \tilde{\zeta}(C_0)$, d.h. $\kappa'' \geq 0$.

Angenommen es wäre $\tilde{\zeta}(C_1) > \tilde{\zeta}(C_0)$. Dann gäbe es $i, j \in \mathcal{J}$, $i \neq j$, sodaß $\gamma_i(0, 0)$ und $\gamma_j(0, 0)$ in derselben Wegzusammenhangskomponente von C_0 , aber $\gamma_i(1, 0)$ und $\gamma_j(1, 0)$ in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von C_1 liegen. Wegen Lemma 8.2 ist $\gamma_i(0, 0) \neq \gamma_j(0, 0)$. Es gibt aber einen stetigen Weg $\gamma^0 := \tilde{\gamma}_{i_1}(0, \cdot) \cdot \dots \cdot \tilde{\gamma}_{i_n}(0, \cdot)$ von $\gamma_i(0, 0)$ nach $\gamma_j(0, 0)$, wobei $\tilde{\gamma}_{i_k}(t, s) = \gamma_{i_k}(t, s)$ oder $= \gamma_{i_k}(t, 1 - s)$. Daher ist $\gamma_i(0, 0) = \tilde{\gamma}_{i_1}(0, 0)$, $\tilde{\gamma}_{i_1}(0, 1) = \tilde{\gamma}_{i_2}(0, 0)$, \dots , $\tilde{\gamma}_{i_n}(0, 1) = \gamma_j(0, 0)$ und wegen Lemma 8.2 $\gamma_i(1, 0) = \tilde{\gamma}_{i_1}(1, 0)$, $\tilde{\gamma}_{i_1}(1, 1) = \tilde{\gamma}_{i_2}(1, 0)$, \dots , $\tilde{\gamma}_{i_n}(1, 1) = \gamma_j(1, 0)$. Also ist γ^1 ein stetiger Weg in C_1 von $\gamma_i(1, 0)$ nach $\gamma_j(1, 0)$, Widerspruch zur Annahme.

Zeigen: $\kappa'' \leq \kappa$

Angenommen $\tilde{\zeta}(C_1) = \tilde{\zeta}(C_0) - \kappa'' < \tilde{\zeta}(C_0) - \kappa$, also $\kappa'' > \kappa$. Da nach Definition von \mathcal{C} eine Wegzusammenhangskomponente von C_0 nicht "verschwinden" kann — es muß zumindest noch ein Punkt in C_1 erhalten bleiben (vgl. (iii)) — muß es $i_k, j_k \in \mathcal{J}$, $k \in \{1, \dots, \kappa''\}$, geben, für die gilt:

Die $\gamma_{i_k}(0, 0)$, $\gamma_{j_k}(0, 1)$ liegen auf κ'' verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von C_0 $\gamma_{i_k}(1, 0)$ und $\gamma_{j_k}(1, 0)$ jedoch auf der gleichen Wegzusammenhangskomponente von C_1 . Wir können sogar annehmen, daß $\gamma_{i_k}(1, 0) = \gamma_{j_k}(1, 0)$ (Andernfalls geht man genauso vor wie oben und erhält solche i_k, j_k).

\mathcal{K}_1 enthält nun sicherlich um diese κ'' weniger Punkte als \mathcal{K}_0 . Genauso reduziert jede Kurve γ_i^0 , die sich auf einen Punkt x_i zusammenzieht (d.h. $i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1$), $|\mathcal{K}_0|$ um 1, da es nach Lemma 8.4 in $\bigcup_{i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1} \mathcal{J}m\gamma_i^0$ keine geschlossenen Kurven gibt. Also ist

$$|\mathcal{K}_1| = |\mathcal{K}_0| - |\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1| - \kappa'' - \delta,$$

wobei nach Lemma 8.2 $\delta \in \mathbb{N}_0$ ist.

Da $|\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1| = |\mathcal{J}| - |\mathcal{J}_1|$ gilt

$$\tilde{v}(C_1) = |\mathcal{J}_1| - |\mathcal{K}_1| = |\mathcal{J}_1| - |\mathcal{K}_0| + |\mathcal{J}| - |\mathcal{J}_1| + \kappa'' + \delta = \tilde{v}(C_0) + \kappa'' + \delta > \tilde{v}(C_0) + \kappa,$$

ein Widerspruch zur Annahme.

Also ist $\kappa'' \in \{0, \dots, \kappa\}$ und trivialerweise $\kappa'' \leq \tilde{\zeta}(C_0) - 1$.

Aus Satz 7.1 folgt,

$$\tilde{\mu}(C_1) - \tilde{v}(C_1) - \tilde{\zeta}(C_1) = \tilde{\mu}(C_0) + \kappa' - \tilde{v}(C_0) - \kappa - \tilde{\zeta}(C_0) + \kappa'' = 1.$$

Also ist $\kappa' + \kappa'' = \kappa$ und $\kappa' \in \{0, \dots, \kappa\}$.

(2) Zeigen: $\check{\zeta}(C_t) = \check{\zeta}(C_0) \quad \forall t \in [0, 1]$

Sei $t_0 \in [0, 1]$ beliebig. Dann ist $C' = \{C'_t = C_{\frac{t}{t_0}}, t \in [0, 1]\}$ eine \mathcal{N} -Schar mit $\tilde{\nu}(C'_1) = \tilde{\nu}(C'_0)$. Also ist $\check{\zeta}(C_{t_0}) = \check{\zeta}(C'_1) = \check{\zeta}(C'_0) = \check{\zeta}(C_0)$.

Analog für $\tilde{\mu}(C_t)$. \square

Beweis von Lemma 4.4:

Nach Lemma 7.4 wissen wir, daß alle $N(\psi_t)$ eine \mathcal{N} -Menge in S^2 sind. Sei $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}(M)$, $\sigma(t) = N(\psi_t)$, wobei $\mathbb{P}(M)$ die Potenzmenge von M ist. $\{\sigma(t) : t \in [0, 1]\}$ ist dann eine 1-Parameter-Familie von nichtleeren \mathcal{N} -Mengen.

Wir zeigen, daß man σ in Teilkurven σ_j zerlegen kann, d.h. es gibt Kurven σ_j mit $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \dots$, wobei jedes σ_j eine \mathcal{N} -Schar ist.

Bedingung (iv) von Definition 8.1 ist wegen Lemma 4.3 immer erfüllt. Außerdem gilt wegen Lemma 7.2:

$$\begin{aligned} & \tilde{\nu}(\sigma(t)) = \text{const.} \wedge |\mathcal{K}_t| = \text{const.} \text{ auf Teilintervall } V \subseteq [0, 1] \\ \Leftrightarrow & \tilde{\nu}(\sigma(t)) = \text{const.} \wedge |\mathcal{J}_t| = \text{const.} \text{ auf Teilintervall } V \subseteq [0, 1] \\ \Leftrightarrow & \tilde{\nu}(\sigma(t)) = \text{const.} \wedge \text{man kann } \mathcal{J}_t \text{ so wählen, daß } \mathcal{J}_t = \mathcal{J} \text{ für ein } \mathcal{J}, \text{ auf} \\ & \text{Teilintervall } V \subseteq [0, 1] \end{aligned}$$

Wir wählen für alle $t \in [0, 1]$ eine minimale Darstellung $\mathcal{D}_{\mathcal{J}_t}$ für σ_t .

Sei nun $\tau \in [0, 1]$ beliebig. $\sigma(\tau)$ habe Darstellung $\mathcal{D}_{\mathcal{J}_\tau}$. Dann gibt es $\forall i \in \mathcal{J}_\tau$, $\forall x \in \mathcal{Jm}\gamma_i^\tau$, und für jede Umgebung $U(x)$ ein Teilintervall $V \subseteq [0, 1]$, $\tau \in V$, wo $U(x) \cap \sigma(t) \neq \emptyset$, $\forall t \in V$ (Lemma 4.1(2)).

Andererseits gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein Teilintervall $V_\varepsilon \subseteq [0, 1]$, sodaß $\forall t \in V_\varepsilon$, $\sigma(t)$ in der ε -Umgebung von $\sigma(\tau)$, d.i. die Vereinigung der ε -Umgebungen der $\mathcal{Jm}\gamma_i^\tau$, $i \in \mathcal{J}_\tau$, liegt (Lemma 4.1(1)).

Wir wählen nun \mathcal{J}_t so, daß folgendes möglichst $\forall \varepsilon > 0$ gelten soll:

$\mathcal{Jm}\gamma_i^t$ ist in der ε -Umgebung von $\mathcal{Jm}\gamma_i^\tau$ enthalten, $\forall t \in V_\varepsilon$, wobei γ_i^t , $i \in \mathcal{J}_t$, die Kurven der Darstellung für $\sigma(t)$ sind.

Sei nun $\tau \ni (t_1, t_2) = V(\tau) \subseteq [0, 1]$ ein offenes Teilintervall, wo $\mathcal{J}_t = \mathcal{J}_\tau$ gewählt werden kann (Wir nehmen vorerst an, daß dieses offene Intervall existiert.). Dann ist obige Zuordnung eindeutig.

Falls für ein $i \in \mathcal{J}_\tau$, $\gamma_i^t(\delta_i)$ ($\delta_i \in \{0, 1\}$) auf einem Intervall eine kritische Nullstelle von ψ_t ist, dann ist $t \mapsto \gamma_i^t(\delta_i)$ stetig (Lemma 4.1). Falls $\gamma_i^t(\delta_i)$ keine kritische Nullstelle von ψ_t ist, dann kann man die Endpunkte der Kurven wegen der Stetigkeit von $t \mapsto \sigma(t)$ und da $\tilde{\nu}_{\sigma(t)}(\gamma_i^t(\delta_i)) = 0$ so wählen, daß auch dann $t \mapsto \gamma_i^t(\delta_i)$ für alle $i \in \mathcal{J}_\tau$ und alle δ_i stetig ist. Außerdem kann man aus demselben Grund die Kurven γ_i^t immer so parametrisieren, daß

$(t, s) \mapsto \gamma_i^t(s)$ auf $V(\tau) \times [0, 1]$ stetig ist.

Also erfüllt $\sigma(t)$ auf $V(\tau)$ die Bedingungen (i)–(iii) von Lemma 8.1.

Sei nun $V_1 = [t_1, \bar{t}]$ und $V_2 = [\bar{t}, t_2]$, wobei $\bar{t} = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$. Dann ist $V_1 \cup V_2 = \overline{V(\tau)}$ und es sind

$(\sigma_\tau^1)^{-1}(t) := \sigma(t \cdot t_1 + (1 - t) \cdot \bar{t})$ auf V_1 und

$\sigma_\tau^1(t) := \sigma(t \cdot t_2 + (1 - t) \cdot \bar{t})$ auf V_2 \mathcal{N} -Scharen.

$\sigma_\tau := \sigma_\tau^1 \cdot \sigma_\tau^2$

Da $\tilde{\nu}(\sigma(t)) = \nu(\psi_t)$ auf ganz $\overline{V(\tau)} \setminus \{1\}$ konstant ist, ist wegen Lemma 8.1 $\mu(\psi_t) = \tilde{\mu}(\sigma(t))$ und $\zeta(\psi_t) = \tilde{\zeta}(\sigma(t))$ konstant auf $\overline{V(\tau)} \setminus \{1\}$.

Falls $t_2 = 1$, dann gilt für $\sigma(t)$ die Aussage von Lemma 8.1 genauso. Somit ist Lemma 4.4 auf $\overline{V(\tau)}$ gezeigt.

Aus Gründen der Stetigkeit müssen jene Punkte τ , wo man kein derartiges offenes Teilintervall $V(\tau)$ finden kann, isoliert sein. Es gibt daher ein $\tau' \in [0, 1]$, sodaß $\tau \in \overline{V(\tau')}$. Also müssen die $\overline{V(\tau)}$ ganz $[0, 1]$ überdecken, und es gibt höchstens abzählbar viele verschiedene Intervalle. Wir wollen die σ_τ so nummerieren, daß

$$\sigma_1(1) = N(\psi_1), \sigma_1(0) = \sigma_2(1), \sigma_2(0) = \sigma_3(1), \dots$$

Es sei

$$\varsigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_{j-1} \cdot \dots \cdot \sigma_1.$$

Dann gilt die Aussage von Lemma 4.4 für alle ς_j und somit für $\sigma(t)$.

Damit ist Lemma 4.4 für den Fall $M = S^2$ bewiesen. \square

8.2 Fall $M = \mathbf{R}^2$

Wir bilden die C_t mittels der stereographischen Projektion auf die S^2 ab und schließen die Bilder so wie in §7.2 durch Hinzugabe des Nordpols ab. Durch die gleiche Vorgangsweise wie im Beweis der Lemmata 7.5–7.7 erhält man einen stetigen Weg $t \mapsto \tilde{C}_t$ in S^2 und somit über Fall 8.1 die Aussage des Satzes für den Fall $M = \mathbf{R}^2$.

Damit ist Lemma 4.4 vollständig bewiesen. \square

9. Beweis von Satz 5.5

Der Fall $n = 0$ ist trivial, da dann $\mathcal{H}(n, a) = \text{const} \neq 0$ ist. Daher ist $N(\psi) = \emptyset$ und es gibt nur das Knotengebiet $D = \mathbb{R}^2$.

Für die anderen Fälle zeigen wir zuerst, daß im Fall $n = 4k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n, a)$ mindestens drei Knotengebiete haben muß. Danach konstruieren wir HERMITEpolynome, die zeigen, daß die untere Schranke von §5. auch tatsächlich angenommen wird. Dabei werden wir immer zwischen n ungerade und n gerade unterscheiden, die beiden Fälle, wo n durch 4 teilbar und wo n gerade aber nicht durch 4 teilbar ist, gemeinsam behandeln. Dies machen wir, indem wir zuerst HERMITEpolynome mit kritischen Nullstellen hoher Ordnung konstruieren und diese geringfügig mit geeigneten Funktionen stören.

Lemma 9.1:

Falls $n = 4k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann besitzt $\mathcal{H}(n, a)$ mindestens 3 Knotengebiete, d.h.

$$\mu(\mathcal{H}(4k, a)) \geq 3 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

Nach §2.2 läßt sich $\mathcal{H}(n, a)$ darstellen in der Form

$$\alpha_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} L_{\frac{n}{2}}(r^2) + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^j \gamma_{nj} L_j^{(n-2j)}(r^2) \cdot r^{n-2j} \cdot (\alpha_j \cos(n-2j)\vartheta + \beta_j \sin(n-2j)\vartheta).$$

Angenommen $\mathcal{H}(4k, a)$ hätte für ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $a \in \mathbb{R}^{4k+1}$ nur 2 Knotengebiete. Da $N(\mathcal{H}(4k, a)) \neq \emptyset$ und die Funktion an diesen Knotenlinien das Vorzeichen wechselt, gibt es ein positives und ein negatives Knotengebiet.

Dann ist $\alpha_0 \neq 0$, d.h. $\mathcal{H}(4k, a)(0) \neq 0$. Ansonst hätte $\mathcal{H}(4k, a)$ beim Ursprung eine kritische Nullstelle und somit nach Satz 3.1 mindestens 3 Knotengebiete.

Daher gibt es ein Knotengebiet D , das den Ursprung enthält. Dieses darf nicht unbeschränkt sein, sonst gäbe es einen injektiven stetigen Weg σ in \mathbb{R}^2 mit $\sigma(0) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow 1} |\sigma(t)| = \infty$, der ganz in D liegt. Wegen der Inversionssymmetrie liegt aber auch $\sigma' = -\sigma$ in D . Daher teilt nach Satz 7.5 $\mathcal{I}\sigma \cup \mathcal{I}\sigma'$ den \mathbb{R}^2 in 2 Wegzusammenhangskomponenten. Also gäbe es wegen der Inversionssymmetrie in jedem dieser beiden Komponenten mindestens ein Knotengebiet mit entgegengesetztem Vorzeichen, also insgesamt mindestens 3.

Aus diesem Grund kann es auch nicht zwei unbeschränkte Knotengebiete geben, da

ja eines davon den Ursprung enthalten müßte.

Also gibt es ein $R > 0$, sodaß $\mathcal{H}(4k, a)(r, \vartheta) \neq 0$ für alle $\vartheta \in [0, 2\pi)$ und alle $r > R$.

Da es aber für $\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^j \gamma_{nj} L_j^{(n-2j)}(r^2) \cdot r^{n-2j} \cdot (\alpha_j \cos(n-2j)\vartheta + \beta_j \sin(n-2j)\vartheta)$ stets ein ϑ gibt, wo dieser Ausdruck = 0 wird und bei ϑ das Vorzeichen wechselt, muß α_0 hinreichend groß sein, d.h. für große r dominiert der radialsymmetrische Anteil des Polynoms.

Nun ist $L_{\frac{n}{2}}(r^2) = \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^l}{l!} \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-l} r^{2l}$, also ist $L_{\frac{n}{2}}(0) > 0$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} L_{\frac{n}{2}}(r^2) > 0$, da $\frac{n}{2} = 2k$ gerade ist.

Da es ein negatives und ein positives Knotengebiet gibt, ist das positive unbeschränkt und enthält den Ursprung, ein Widerspruch zu oben. \square

Jetzt wollen wir HERMITEpolynome erzeugen, die nur mehr 2 bzw. 3 Knotengebiete besitzen. Dazu konstruieren wir zuerst HERMITEpolynome mit kritischen Nullstellen hoher Ordnung.

Lemma 9.2:

(1) Sei n ungerade, $n \geq 3$.

Dann gibt es ein $a \in S^n$, sodaß sich $N(\mathcal{H}(n, a))$ darstellen läßt durch 2 Punkte x_1 und $-x_1$, $x_1 \neq 0$, und $n+2$ Kurven, wobei n Kurven die Punkte x_1 und $-x_1$ verbinden und je eine Kurve von beiden Punkten nach ∞ laufen. x_1 (und somit $-x_1$) ist eine kritische Nullstelle von Ordnung $\frac{n+1}{2}$. x_1 und $-x_1$ sind die einzigen kritischen Nullstellen. (vgl. Abbildung 9.1)

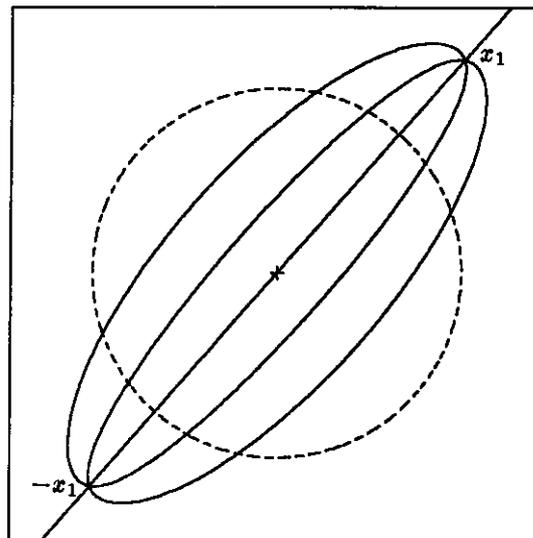


Abbildung 9.1: Illustration von Lemma 9.1 (1) für $n = 5$.

(2) Sei $n = 4k + 2$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$.

Dann gibt es ein $a \in S^n$, sodaß sich $N(\mathcal{H}(n, a))$ darstellen läßt durch 4 Punkte $x_1, -x_1, x_2$ und $-x_2$, alle verschieden, und $n + 2$ Kurven, wobei je $\frac{n}{2}$ Kurven die Punkte x_1 und $-x_2$ bzw. $-x_1$ und x_2 und je eine Kurve, die bei geeigneter Wahl dieser Punkte außerhalb von $B(0, \sqrt{2n + 2})$ liegen, x_1, x_2 bzw. $-x_1, -x_2$ verbinden. x_1 und x_2 (und somit $-x_1$ und $-x_2$) sind kritische Nullstellen von Ordnung $k + 1$. $x_1, -x_1, x_2$ und $-x_2$ sind die einzigen kritischen Nullstellen. (vgl. Abbildung 9.2)

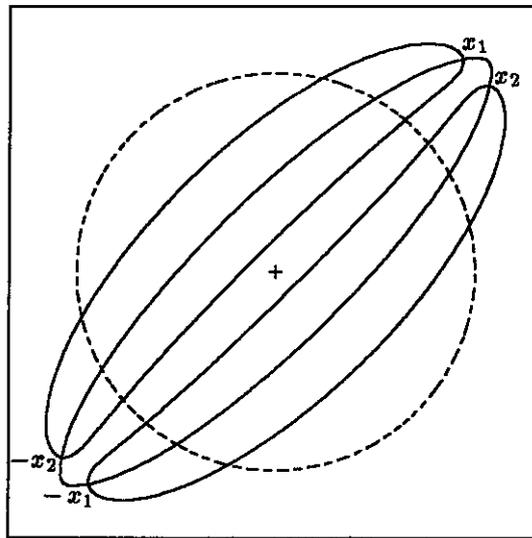


Abbildung 9.2: Illustration von Lemma 9.1 (2) für $n = 6$.

(3) Sei $n = 4k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$.

Dann gibt es ein $a \in S^n$, sodaß sich $N(\mathcal{H}(n, a))$ darstellen läßt durch 4 Punkte $x_1, -x_1, x_2$ und $-x_2$, alle verschieden, und $n + 2$ Kurven, wobei je $\frac{n}{2} - 1$ Kurven die Punkte x_1 und $-x_2$ bzw. $-x_1$ und x_2 , je eine Kurve, die bei geeigneter Wahl dieser Punkte außerhalb von $B(0, \sqrt{2n + 2})$ liegen, x_1, x_2 bzw. $-x_1, -x_2$ und 2 Kurven die Punkte x_1 und $-x_1$ verbinden. x_1 und x_2 (und somit $-x_1$ und $-x_2$) sind kritische Nullstellen von Ordnung $k + 1$ bzw. k . $x_1, -x_1, x_2$ und $-x_2$ sind die einzigen kritischen Nullstellen. (vgl. Abbildung 9.3)

Beweis:

Um diesen Beweis lesbar zu halten, wird er in viele kleine Schritte zerlegt, die wir mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen wollen. Auf diese Weise können wir wichtige Resultate, die wir öfters benötigen (auch wenn einige davon eher trivial sind), sammeln, um später bequem darauf verweisen zu können, was den Nachteil einer nicht ganz kontinuierlichen Beweisführung wieder wettmacht.

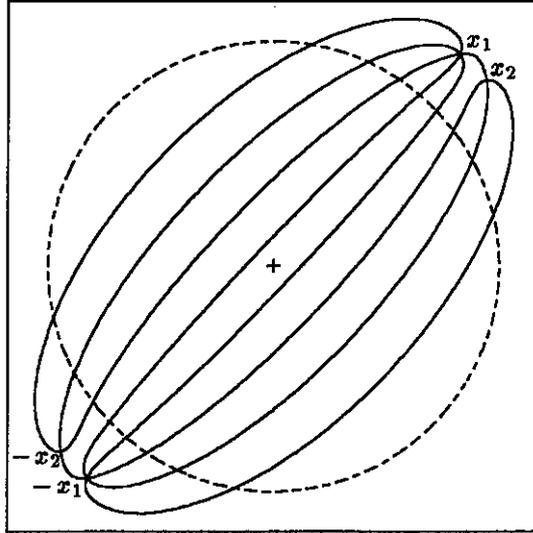


Abbildung 9.3: Illustration von Lemma 9.1 (3) für $n = 8$.

Zuvor definieren wir noch $B := B(0, \sqrt{2n+2})$ und $\overline{B^c} := \overline{\mathbb{R}^2 \setminus B}$, um die Lesbarkeit etwas zu erhöhen.

(a) Wir wählen eine Darstellung von $N(\mathcal{H}(n, a))$ (als \mathcal{N} -Menge), die je einen Punkt aus jeder Wegzusammenhangskomponente von $N(\mathcal{H}(n, a)) \cap \partial B$ sowie die geforderten Punkte enthält, sonst aber minimal sein soll. Jede Kurve dieser Darstellung ist somit entweder ganz in B oder ganz in $\overline{B^c}$ (oder ganz in beiden). Achtung: Im folgenden seien die Knotenlinien die Kurven dieser Darstellung.

Die folgenden Schritte geben uns Auskunft darüber, wie man HERMITEpolynome mit kritischen Nullstellen erzeugen kann.

(b) Um an einem beliebigem Punkt x eine kritische Nullstelle von Ordnung m zu erzwingen, muß der Koeffizientenvektor a , $2m - 1$ Bedingungen erfüllen (Lemma 9.3).

(c) Der Koeffizientenvektor a eines normierten (d.h. $\|a\| = 1$) HERMITEpolynoms $\mathcal{H}(n, a)$ kann (höchstens) n l.u. Bedingungen genügen, da der Eigenwert $\lambda = 2n + 2$, $(n + 1)$ -fach entartet ist, und daher $a \in S^n$.

(d) Falls x eine kritische Nullstelle von Ordnung m ist, dann wegen der Inversions(anti)symmetrie auch $-x$.

Nun einige geometrische Aspekte von Knotenlinien:

(e) Sei g eine Gerade in \mathbb{R}^2 . Dann ist $\mathcal{H}(n, a)$ eingeschränkt auf diese Gerade ein Polynom in einer Variablen vom Grad $\leq n$. Daher besteht $N(\mathcal{H}(n, a)) \cap g$

entweder aus höchstens n Punkten oder aus ganz g .

Mit $g_z: x^{(2)} = z$ bezeichnen wir Geraden parallel zur $x^{(1)}$ -Achse.

(f) Sei $K = \partial B(0, r)$ ein Kreis um den Ursprung. Dann ist $\mathcal{H}(n, a)$ eingeschränkt auf K ein trigonometrisches Polynom von Ordnung $n_K \leq n$, wobei n_K gerade (ungerade) ist, falls n gerade (ungerade) ist. Das folgt unmittelbar aus der Darstellung von $\mathcal{H}(n, a)$ in Polarkoordinaten (siehe §2.2). Es gilt außerdem, daß entweder alle Wegzusammenhangskomponenten von $N(\mathcal{H}(n, a)) \cap K$ — und damit insbesondere wenn $K = \partial B$ — Punkte sind, oder $K \subseteq N(\mathcal{H}(n, a))$.

Die nächsten Punkte sagen etwas über die Lage von Knotenlinien aus.

(g) Von einer kritischen Nullstelle in $\overline{B^c}$ darf höchstens eine Knotenlinie nach ∞ laufen, da es ansonst ein Knotengebiet ganz in $\overline{B^c}$ gäbe (Widerspruch zu Lemma 2.4).

Genauso: Wenn die kritischen Nullstellen x_1, \dots, x_l in $\overline{B^c}$ mit Knotenlinien in $\overline{B^c}$ verbunden sind, dann darf es höchstens eine Knotenlinie geben, die bei $\{x_1, \dots, x_l\}$ beginnt und bis ∞ läuft.

(h) Genauso darf es keine zwei Kurven in $\overline{B^c}$ (auch nicht solche, die aus mehreren Knotenlinien zusammengesetzt sind) geben, die zwei kritische Nullstellen in $\overline{B^c}$ verbinden. Ansonst erhielte man eine geschlossene Kurve ganz in $\overline{B^c}$.

Genauso gibt es in $\overline{B^c}$ keine Schleifen, d.h. geschlossen Kurven, an eine kritische Nullstelle.

(i) Es gibt keine stetige Kurve in $N(\mathcal{H}(n, a)) \cap \overline{B^c}$, die die kritischen Nullstellen x und $-x$ verbindet. Ansonst gäbe es wegen der Inversions(anti)symmetrie eine zweite. Widerspruch zu (h).

(j) Seien $x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_l, -x_l$ kritische Nullstellen von $\mathcal{H}(n, a)$ in $\overline{B^c}$ von Ordnung m_1, m_2, \dots, m_l . Sei $m = m_1 + m_2 + \dots + m_l$. Dann ist $2m \leq n + 2l - 1$.

Beweis: Wir können o.B.d.A. annehmen, daß kein x_i in ∂B liegt. Ansonst betrachten wir $B' = (0, \sqrt{2n+2} - \varepsilon)$ anstatt B , wobei ε zumindest so klein gewählt werden soll, daß in $B \setminus B'$ keine kritischen Nullstellen liegen, und es keinen Punkt in $N(\mathcal{H}(n, a)) \cap \partial B$ gibt, der Endpunkt von Kurven nur aus $\overline{B^c}$ oder B ist, d.h. Kurven an diesen Punkten von $\overline{B^c}$ nach B gehen. Ist ε hinreichend klein, so bleiben die Punkte (a) bis (i) richtig, wie man sich leicht überzeugen kann.

Es sei nun

q die Anzahl der Knotenlinien, die ganz in B^c liegen,

q_∞ die Anzahl derjenigen davon, die auch bis ∞ laufen,

$$q_f = q - q_\infty,$$

p die Anzahl der Knotenlinien in $\overline{B^c}$, die B schneiden und

$r = p + q$ die Anzahl aller Knotenlinien in $\overline{B^c}$.

Dann ist wegen (f) $p \leq 2n$. Da jeder kritische Punkt x_i nicht mit einer Kurve ganz in $\overline{B^c}$ mit $-x_i$ verbunden sein darf (i) und wegen der Aussagen von (g, h) ist $q \leq 2l$. Außerdem gilt genauso, daß $q_f \leq 2l - 2$. Sei nun N' die \mathcal{N} -Menge $N(\mathcal{H}(n, a)) \cap \overline{B^c}$. Deren Darstellung besteht aus den r Knotenlinien und aus den Punkten $x_i, -x_i$ und $N(\mathcal{H}(n, a)) \cap \partial B$. Dann ist nach Lemma 7.6

$$\begin{aligned} r &= \sum_{x \in \mathcal{K}_{\mathcal{J}}(N')} \tilde{\varrho}_{N'}(x) + \tilde{\varrho}_{N'}(\infty) = \\ &= \sum_{x \in \cup\{x_i, -x_i\}} \tilde{\varrho}_{N'}(x) + \sum_{x \in \mathcal{K}_{\mathcal{J}}(N') \setminus (\cup\{x_i, -x_i\})} \tilde{\varrho}_{N'}(x) + \tilde{\varrho}_{N'}(\infty). \end{aligned}$$

Es ist nach §7.2, $\tilde{\varrho}_{N'}(x) = \tilde{\varrho}_{N(\mathcal{H}(n, a))}(x) = \varrho_{\mathcal{H}(n, a)}(x)$, $\forall x \in \cup\{x_i, -x_i\}$. Außerdem ist $\mathcal{K}_{\mathcal{J}}(N') \setminus (\cup\{x_i, -x_i\}) = N(\mathcal{H}(n, a)) \cap \partial B$, und für alle Punkte aus dieser Menge ist $\tilde{\varrho}_{N'}(x) = \frac{1}{2}$, da diese ja keine kritischen Nullstellen von $\mathcal{H}(n, a)$ sind und eine Knotenlinie dort von $\overline{B^c}$ nach B gehen muß, laut Voraussetzung.

Da $|N(\mathcal{H}(n, a)) \cap \partial B| = p$, ist r weiter gleich

$$= \underbrace{\sum_{x \in \cup\{x_i, -x_i\}} \varrho_{\mathcal{H}(n, a)}(x)}_{2m} + \underbrace{\sum_{x \in N(\mathcal{H}(n, a)) \cap \partial B} \tilde{\varrho}_{N'}(x) + \tilde{\varrho}_{N'}(\infty)}_{\frac{p}{2}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 2m + \frac{p}{2} + \tilde{\varrho}_{N'}(\infty) &= r = p + q = p + q_f + q_\infty \\ 2m &= \frac{p}{2} + q_f - \tilde{\varrho}_{N'}(\infty) + q_\infty \leq \frac{p}{2} + q_f + \frac{1}{2}q_\infty, \text{ laut Definition 7.5} \\ &= \frac{p}{2} + \frac{1}{2}(q + q_f), \text{ da } q_\infty = q - q_f \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}p}_{\leq n} + \underbrace{\frac{1}{2}q}_{\leq l} + \underbrace{\frac{1}{2}q_f}_{\leq l-1} \text{ wie oben bereits gezeigt wurde.} \\ &\leq n + l + l - 1 = n + 2l - 1. \quad \square \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir Behauptung (1) von Lemma 9.2:

Sei $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Nach (b, c, d) kann man bei den Punkten $x_1 = (0, c)$ und $-x_1$ für beliebiges $c > \sqrt{2n+2}$ kritische Nullstellen von Ordnung k erzwingen. Da $2k = n + 2 - 1$ ist, gibt es nach (j) keine weiteren kritischen Nullstellen in $\overline{B^c}$.

Von x_1 bzw. $-x_1$ müssen genau je $2k - 1 = n$ Knotenlinien beginnen, die B schneiden, und je eine muß bis ∞ laufen. Denn: Wegen (f) dürfen das höchstens $2k - 1$ viele sein, wegen (g) darf aber höchstens eine der $2k$ Kurven bis ∞ laufen. Außerdem darf x_1 und $-x_1$ nicht mit einer Kurve in $\overline{B^c}$ verbunden sein (i).

Also besteht für alle $\sqrt{2n+2} < z < c$, $g_z \cap N(\mathcal{H}(n, a))$ aus genau n Punkten und

der Koeffizient von $H_n(x^{(1)}) \cdot H_0(x^{(2)})$ ist ungleich 0. Für große $x^{(2)}$ überwiegen aber die anderen Terme. Daher müssen diese Koeffizienten um so kleiner sein, je größer c gewählt ist.

Also besteht für hinreichend großes c , $N(\mathcal{H}(n, a)) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : -c < x^{(2)} < c\}$ aus mindestens n Kurven, die (außerhalb dieses Streifens fortgesetzt) x_1 und $-x_1$ verbinden. Es sind sogar genau n viele, da es wegen (f) nicht mehr geben kann. Wegen (h) kann es in $\overline{B^c}$ auch keine weiteren Schleifen geben.

Somit ist (1) gezeigt.

Jetzt zeigen wir die Behauptungen (2) und (3). Sei daher von nun an n gerade.

(k) Wenn es in $\overline{B^c}$ die vier kritischen Nullstellen $x_1, -x_1, x_2, -x_2$ von Ordnung m_1 bzw. m_2 mit $m_1 + m_2 = \frac{n}{2} + 1$ gibt, dann sind das die einzigen kritischen Nullstellen in $\overline{B^c}$ und bei x_i beginnen genau $2m_i - 1$ Knotenlinien, die B schneiden.

Beweis: Da $2m = 2(m_1 + m_2) = n + 2 \leq n + 4 - 1$, würde bei weiteren kritischen Nullstellen in $\overline{B^c}$ die Summe über alle Ordnungen nicht mehr (j) erfüllen. Daher kann es nur diese kritischen Nullstellen in $\overline{B^c}$ geben.

Nun gilt: Wegen (f) dürfen höchstens $2n = 2((2m_1 - 1) + (2m_2 - 1))$ Knotenlinien B schneiden. Wegen (h) gibt es von jedem dieser Punkte nur höchstens je eine Knotenlinie zu den anderen drei Punkten. Wegen (i) kann aber keine Knotenlinie x_1 mit $-x_1$ bzw. x_2 mit $-x_2$ verbinden. Es genügt daher zu zeigen, daß von x_i entweder eine Knotenlinie bis ∞ oder zu einem anderen Punkt x_j geht. Dann folgt aus obigem sofort die Behauptung.

Angenommen es gäbe zwei Kurven die von x_1 nach ∞ bzw. nach x_2 (oder $-x_2$) gehen. Dann müssen wegen (g) bei x_2 , $2m_2 - 1$ und bei x_1 , $2m_1 - 2$, also insgesamt $2m_1 + 2m_2 - 3 = n - 1$, Knotenlinien beginnen, die B schneiden, und die nur in B fortgesetzt sind, da sie ansonst x_1 und x_2 in $\overline{B^c}$ verbinden oder eine Schleife an einen der beiden Punkte bilden würden (Widerspruch zu (h)). D.h. aber, $\mathcal{H}(n, a)$ eingeschränkt auf ∂B ist ein trigonometrische Polynom vom Grad $n - 1$ und ändert bei allen Nullstellen das Vorzeichen. Widerspruch zu (f), da $n - 1$ im Gegensatz zu n ungerade ist. \square

Nach (b, c, d) können wir HERMITEpolynome $\mathcal{H}(n, a_\varepsilon)$ mit den kritischen Nullstellen $x_1 = (-\varepsilon, c)$, $x_2 = (\varepsilon, c)$, $-x_1, -x_2$ von Ordnung m_1, m_2 mit $m_1 + m_2 = \frac{n}{2} + 1$ für beliebiges $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $c > \sqrt{2n + 2}$, ε_0 fest, erzeugen.

Wegen (k) wissen wir, daß das die einzigen kritischen Nullstellen in $\overline{B^c}$ sind, und daß von x_1 genau $2m_1 - 1$ und von x_2 genau $2m_2 - 1$ Knotenlinien ausgehen, die B schneiden. Also besteht für alle $\sqrt{2n + 2} < z < c$, $g_z \cap N(\mathcal{H}(n, a_\varepsilon))$ aus genau

n Punkten und der Koeffizient von $H_n(x^{(1)}) \cdot H_0(x^{(2)})$ ist ungleich 0. Für große $x^{(2)}$ überwiegen aber die anderen Terme. Daher müssen diese Koeffizienten um so kleiner sein, je größer c gewählt ist.

Für hinreichend großes c besteht $N(\mathcal{H}(n, a_\varepsilon))$ daher im Bereich $\{x \in \mathbb{R}^2 : -c < x^{(2)} < c\}$ aus genau n Kurven, die $\{x_1, x_2\}$ mit $\{-x_1, -x_2\}$ verbinden. Wegen (e, f) kann es in diesem Bereich keine weiteren Knotenlinien mehr geben.

(l) Wegen der Inversionssymmetrie ist für hinreichend großes c , $\mathcal{H}(n, a_\varepsilon)(0) \neq 0$.

(m) Es gibt je eine Knotenlinie, die x_1 und x_2 bzw. $-x_1$ und $-x_2$ verbindet, wenn ε hinreichend klein ist.

Beweis: Die Knotenlinien, die von x_1 (bzw. x_2) ausgehen, aber nicht B schneiden, können nicht zu $-x_2$ (bzw. $-x_1$) gehen, da ansonst $g_0 \cap N(\mathcal{H}(n, a_\varepsilon))$ aus $n+2$ Punkten bestünde, ein Widerspruch zu (e). Es genügt also zu zeigen, daß diese nicht bis ∞ gehen können und daher x_1 mit x_2 bzw. $-x_1$ mit $-x_2$ verbinden.

Um bei $x_1 = (-\varepsilon, c)$ und $x_2 = (\varepsilon, c)$ diese kritischen Punkte zu erzwingen, müssen nach (b) $(2m_1 - 1) + (2m_2 - 1) = n$ Bedingungen erfüllt sein. Man muß also ein Gleichungssystem von n Gleichungen in n Unbekannten (da $a_\varepsilon \in S^n$) lösen. Die korrespondierende $(n \times n)$ -Matrix A_ε hat für alle ε den Rang n . Ansonst könnte man eine Gleichung durch eine neue ersetzen, und man könnte so an einer beliebigen Stelle eine Nullstelle des Polynoms erzwingen, z.B. im Ursprung. Aus (l) folgt aber, daß $\mathcal{H}(n, a_\varepsilon)(0) \neq 0$ ist, ein Widerspruch. Da außerdem alle Koeffizienten von A_ε stetig von ε abhängen, läßt sich A_ε stets invertieren und die Koeffizienten von A_ε^{-1} ändern sich stetig. Es gibt also einen stetigen Weg $\sigma: (0, 1] \rightarrow E(h, M)$, sodaß $\mathcal{H}(n, \sigma(\varepsilon))$ in $x_1 = (-\varepsilon, c)$ und $x_2 = (\varepsilon, c)$ kritische Nullstellen von Ordnung m_1 und m_2 besitzen.

Sei $\sigma(0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\varepsilon)$. $\mathcal{H}(n, \sigma(0))$ hat dann wegen Lemma 4.1 bei $\bar{x} = (0, c)$ eine kritische Nullstelle, von der wie von $\{x_1, x_2\}$ n Knotenlinien ausgehen, die B schneiden. Die Ordnung dieser kritischen Nullstellen ist daher mindestens $\frac{n}{2}$. Wegen (j) dürfen keine Knotenlinien bis ∞ gehen, die Ordnung muß daher gleich $\frac{n}{2}$ sein. Wegen Lemma 4.1 gibt es daher ein ε_1 , sodaß $\forall \varepsilon < \varepsilon_1$ keine Knotenlinien bis ∞ laufen. \square

Sei $n = 4k + 2$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen (2):

Wir wählen $m_1 = m_2 = k + 1$. Da $m_1 + m_2 = 2k + 2 = \frac{n}{2} + 1$ gehen n Kurven von $\{x_1, x_2\}$ durch B nach $\{-x_1, -x_2\}$, und zwar $\frac{n}{2}$ Kurven von x_1 nach $-x_2$ und $\frac{n}{2}$ Kurven von x_2 nach $-x_1$, da sich sonst Kurven in B schneiden müßten, was nach Konstruktion nicht möglich ist.

Sei $n = 4k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Wir zeigen (3):

Wir wählen $m_1 = k+1$ und $m_2 = k$. Genauso wie in oben folgt, daß je $2k-1 = \frac{n}{2}-1$ Kurven von x_1 nach $-x_2$ bzw. von x_2 nach $-x_1$ und zwei Kurven von x_2 nach $-x_2$ gehen.

Somit ist Lemma 9.2 gezeigt. \square

Es bleibt jetzt noch das in Punkt (b) des obigen Beweises verwendete Lemma zu zeigen.

Lemma 9.3:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig, $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^2$ eine kritische Nullstelle mindestens von Ordnung m von $\mathcal{H}(n, a)$. Wenn

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}} \right)^{m-j} \mathcal{H}(n, a) \right) (x_0) = 0 \quad 0 \leq j \leq m$$

für ein j =gerade und ein j =ungerade, dann gilt dies für alle j , d.h. alle partiellen Ableitungen von Ordnung m verschwinden beim Punkt x_0 . Dann ist aber x_0 eine kritische Nullstelle von Ordnung $m+1$.

Aus diesem Lemma folgt sofort, daß immer nur zwei Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn wir erzwingen wollen, daß alle partiellen Ableitungen von Ordnung m an einer Stelle x_0 verschwinden sollen, falls bereits alle partiellen Ableitungen kleinerer Ordnung an dieser Stelle 0 sind. Da wir für eine einfache Nullstelle der Funktion nur eine Bedingung fordern müssen, folgt daraus die Behauptung (b) des Beweises.

Beweis von Lemma 9.3:

Der Einfachheit halber setzen wir $\mathcal{H}(x) := \mathcal{H}(n, a)(x)$. Aus §2.2 wissen wir, daß x_0 eine kritische Nullstelle von Ordnung m von \mathcal{H} genau dann ist, wenn x_0 eine kritische Nullstelle von Ordnung m von $\mathcal{H}(n, a)(x) \cdot e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ ist. Außerdem haben wir in §1. bereits bemerkt, daß dann alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $m-1$ an dieser Stelle verschwinden.

Fall $m = 1$: Dieser Fall ist trivial, da j nur die Werte 0 und 1 annehmen kann.

Fall $m \geq 2$: Zeigen zuerst: Unter den Voraussetzungen des Satzes ist

$$\left(\Delta \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}} \right)^{k-j} \mathcal{H} \right) (x_0) = 0, \quad \forall 0 \leq j \leq k, \quad \forall 0 \leq k \leq m-1.$$

Beweis: Es ist

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x),$$

wobei $H_n(x)$ das (eindimensionale) HERMITEpolynom von Ordnung n ist ([1]). Daher ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{k-j} \mathcal{H}(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{k-j} \sum_{l=0}^n a_l H_l(x^{(1)}) H_{n-l}(x^{(2)}) = \\ &= \sum_{l=0}^n a_l 2^j (l)_j H_{l-j}(x^{(1)}) 2^{k-j} (n-l)_{k-j} H_{n-l-k+j}(x^{(2)}) \\ &\quad \text{wobei } (l)_j = l \cdot (l-1) \cdot \dots \cdot (l-j+1) \text{ und } H_i \equiv 0 \text{ f\"ur } i < 0. \\ &= \sum_{l=0}^n (2^k (l)_j (n-l)_{k-j} a_l) H_{l-j}(x^{(1)}) H_{n-l-k+j}(x^{(2)}). \end{aligned}$$

Also ist entweder

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{k-j} \mathcal{H} \equiv 0 \text{ und damit auch } \Delta \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{k-j} \mathcal{H} \right) \equiv 0.$$

oder

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{k-j} \mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(n-k, a')(x) =: \mathcal{H}'_{k,j},$$

$$a' \in \mathbb{R}^{n-k} \text{ entsprechend gew\"ahlt, da } (l-j) + (n-l-k+j) = n-k,$$

ist wieder ein (zweidimensionales) HERMITEpolynom ist.

Als solches mu\B $\mathcal{H}'_{k,j}(x) \cdot e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ wieder L\"osung des harmonischen Oszillators sein.

Nach Voraussetzung gilt au\Berdem

$$\mathcal{H}'_{k,j}(x_0) = 0, \forall 0 \leq j \leq k, \forall 0 \leq k \leq m-1.$$

Es gilt daher

$$-\Delta \left(\mathcal{H}'_{k,j}(x_0) \cdot e^{-\frac{|x_0|^2}{2}} \right) + \underbrace{|x_0|^2 \cdot \mathcal{H}'_{k,j}(x_0) \cdot e^{-\frac{|x_0|^2}{2}}}_{=0} = \lambda \cdot \underbrace{\mathcal{H}'_{k,j}(x_0) \cdot e^{-\frac{|x_0|^2}{2}}}_{=0}.$$

Also ist $-\Delta \mathcal{H}'_{k,j}(x_0) = 0$ wie behauptet, da $e^{-\frac{|x_0|^2}{2}} > 0$.

$$\text{Sei nun } \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{m-j} \mathcal{H}(x_0) = 0 \text{ f\"ur ein } j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq m.$$

Falls $j-2 \geq 0$, dann gilt nach obiger Behauptung

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^{j-2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{m-j} \mathcal{H}(x_0) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^{j-2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{m-j} \mathcal{H}(x_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^{j-2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{m-j} \mathcal{H}(x_0) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{m-j} \mathcal{H}(x_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^{j-2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{m-j+2} \mathcal{H}(x_0) \end{aligned}$$

Also ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^{j-2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{m-(j-2)} \mathcal{H}(x_0) = 0$$

Analog erh\"alt man falls $j \leq m-2$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^{j+2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{m-(j+2)} \mathcal{H}(x_0) = 0.$$

Wir erhalten also: Wenn $\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\right)^{m-j} \mathcal{H}(x_0) = 0$ f\"ur ein j gerade, so gilt dies auch f\"ur alle geraden $j \in \mathbb{N}$, und genauso, falls dies f\"ur ein ungerades j gilt, so auch f\"ur alle anderen. \square

Jetzt wollen wir Satz 5.5 beweisen, indem wir für alle n , Funktionen konstruieren, die die untere Schranke annehmen.

Die vielen Bilder in den folgenden Beweisen, sollen dazu dienen, die Vorgangsweise zu illustrieren und das wiederzugeben, was im Text mit großem Aufwand an Symbolen und Fallunterscheidungen nur mühsam beschrieben werden kann.

Beweis für den Fall n ungerade:

Für $n = 1$ ist $N(\mathcal{H}(1, a))$ eine Gerade durch den Ursprung und damit die Behauptung trivial.

Sei also $n \geq 3$. Sei $\psi_1(x)$ ein HERMITEPOLYNOM, wie in Lemma 9.2 konstruiert, und $\psi_2(x) = \psi_2(x^{(1)}, x^{(2)}) = H_0(x^{(1)}) \cdot H_n(x^{(2)})$.

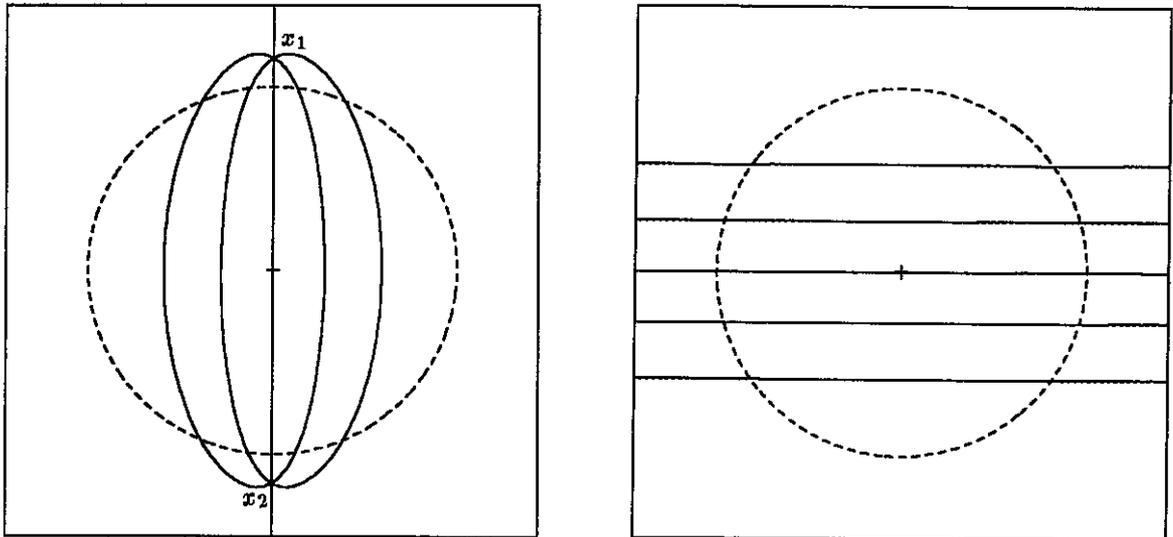


Abbildung 9.4: ψ_1 und ψ_2 für den Fall $n = 5$

Wir zeigen: $\psi_\epsilon := \psi_1 + \epsilon\psi_2$ besitzt für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ nur 2 Knotengebiete.

ψ_1 hat als kritische Nullstellen nur $x_1 = (0, x_1^{(2)})$ und $x_2 = -x_1$ mit Ordnung $m = \frac{n+1}{2}$.

Es sei $U_{i,\delta}$ eine δ -Umgebung von x_i . Dort sieht ψ_1 so aus:

$$\psi_1(x_i + h) = p_m(h) + O(|h|^{m+1})$$

wobei p_m ein harmonisches homogenes Polynom vom Grad m ist (vgl. §1.). Da $x_i \notin N(\psi_2)$, wechselt ψ_2 in $U_{i,\delta}$ nicht das Vorzeichen, wenn $\delta > 0$ genügend klein gewählt ist. Daher verschwinden bei ψ_ϵ für alle $\epsilon > 0$ die kritischen Nullstellen in $U_{i,\delta}$. Aus den Behauptungen von §8. (vgl. Lemma 8.2 und Beweis von Lemma 4.4) folgt, daß für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ keine kritischen Nullstellen außerhalb

dieser δ -Umgebung auftreten können. ψ_ε hat also keine derartigen Punkte mehr. Außerdem dürfen keine weiteren Knotenlinien entstehen. Es genügt daher wegen Satz 3.1 zu zeigen, daß die Knotenlinien von ψ_ε wegzusammenhängend sind.

Es sei z die größte Nullstelle von $H_n(x^{(2)})$. Dann sind g_z und g_{-z} Knotenlinien von ψ_2 (wobei $g_z : x^{(2)} = z$ eine Gerade parallel zur $x^{(1)}$ -Achse ist) und $z < \sqrt{2n+2}$.

Es sei $\{v_1, \dots, v_n\} = N(\psi_1) \cap g_z$, wobei $v_i^{(1)} < v_{i+1}^{(1)}$. Dann ist $\{-v_1, \dots, -v_n\} = N(\psi_1) \cap g_{-z}$. $\{v_1, \dots, v_n, -v_1, \dots, -v_n\}$ ist in $N(\psi_1) \cap N(\psi_2)$ und somit in $N(\psi_\varepsilon)$ enthalten.

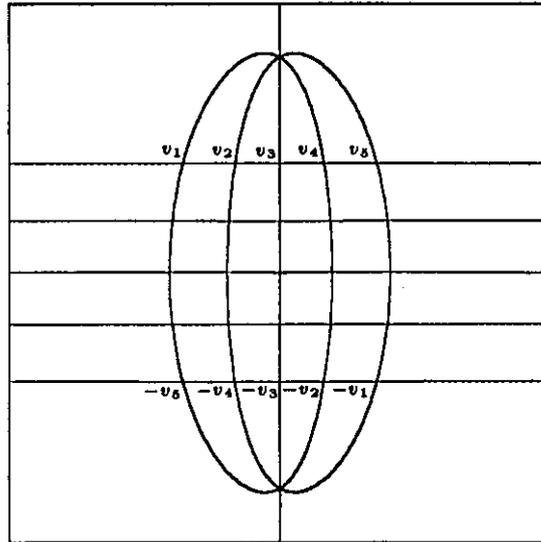


Abbildung 9.5: Lage der v_i

Also gibt es wegen Lemma 4.1 in $N(\psi_\varepsilon)$ genau n Kurven, die v_1 mit $-v_n$, v_2 mit $-v_{n-1}$, \dots , v_n mit $-v_1$ verbinden.

Wegen Satz 3.1 hat ψ_1 , $n+1$ Knotengebiete, die wir mit D_0, \dots, D_n bezeichnen, wobei

$$v_1 \in \partial D_0; \dots; v_i, v_{i+1} \in \partial D_i; \dots; v_n \in \partial D_n$$

gelten soll. Bildet man den Durchschnitt mit den beiden in $x^{(2)}$ -Richtung unbeschränkten Knotengebieten von ψ_2 , so erhält man $2n+2$ Gebiete $G_0^+, \dots, G_n^+, G_0^-, \dots, G_n^-$, wobei $G_i^+ \subset D_i$ und $G_i^+ \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : x^{(2)} > 0\}$ ist. Der Rand jedes dieser Knotengebiete enthält einen im Abschluß dieses Gebietes wegzusammenhängenden Teil der Knotenlinien von ψ_ε .

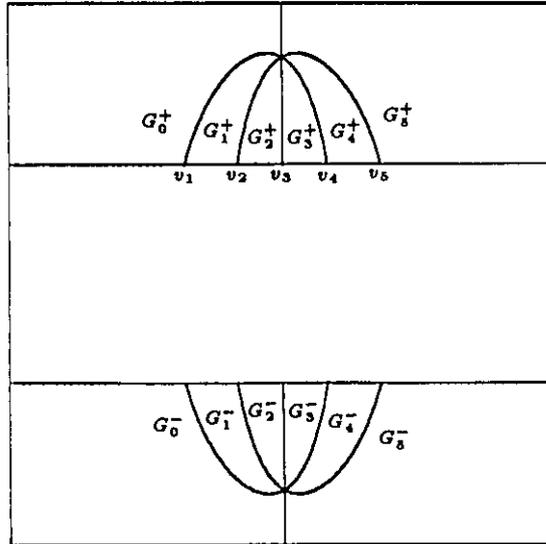


Abbildung 9.6: Bezeichnung der G_i^i

Durch geeignete Wahl des Vorzeichens ist wegen der Inversionsantisymmetrie $\psi_1 > 0$ auf

$$G_0^+, G_1^+, \dots, G_{n-1}^+; G_0^-, G_2^-, \dots, G_{n-1}^-$$

und $\psi_1 < 0$ auf

$$G_1^+, G_3^+, \dots, G_n^+; G_1^-, G_3^-, \dots, G_n^-$$

Genauso ist (durch geeignete Wahl des Vorzeichens) $\psi_2 > 0$ auf allen G_i^+ und $\psi_1 < 0$ auf allen G_i^- .

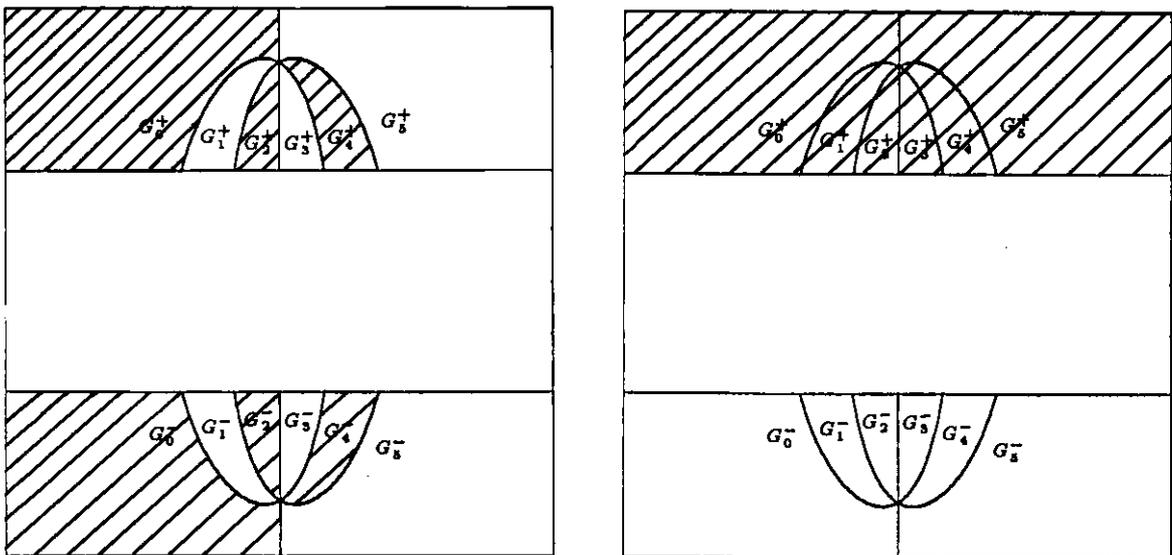


Abbildung 9.7: Gebiete wo $\psi_1 > 0$ (linkes Bild) bzw. $\psi_2 > 0$ (rechtes Bild)

Also besitzen ψ_1 und ψ_2 das gleiche Vorzeichen auf

$$G_0^+, G_1^+, \dots, G_{n-1}^+; G_1^-, G_3^-, \dots, G_n^-$$

und entgegengesetztes Vorzeichen auf

$$G_1^+, G_3^+, \dots, G_n^+; G_0^-, G_2^-, \dots, G_{n-1}^-.$$

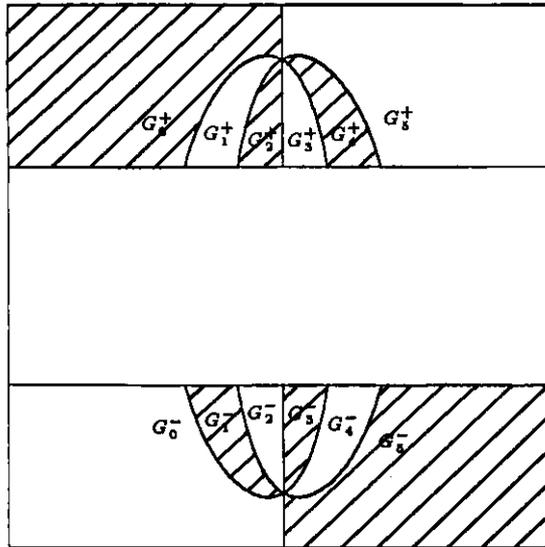


Abbildung 9.8: Gebiete wo ψ_1 und ψ_2 entgegengesetztes Vorzeichen haben

Da die v_i in $\overline{\cup G_i^i}$ die einzigen gemeinsamen Nullstellen von ψ_1 und ψ_2 sind, liegt nach dem Zwischenwertsatz in jedem Gebiet, wo $\psi_1 \cdot \psi_2 < 0$ ist, ein Teil der Knotenlinien von ψ_ε , der dort auch wegzusammenhängend ist, falls ε hinreichend klein ist (folgt aus Lemma 4.1). Die Gebiete mit $\psi_1 \cdot \psi_2 > 0$ und die Ränder aller dieser Gebiete hingegen enthalten bis auf die Punkte $v_0, \dots, v_n, -v_1, \dots, -v_n$ keine Knotenlinien von ψ_ε .

Nach dem bisher gesagtem gibt es in G_n^+ eine Knotenlinie von ψ_ε die von v_n nach ∞ geht. Dieser Punkt v_n ist durch eine Knotenlinie mit $-v_1$ verbunden, die fortgesetzt ist in G_{n-1}^- und somit $-v_1$ mit $-v_2$ verbindet. $-v_2$ ist aber genauso mit v_{n-1} und weiter mit v_{n-2} verbunden, usw. So gelangt man zu $-v_n$ und von dort wieder nach ∞ .

Auf diese Weise haben wir ganz $N(\psi_\varepsilon)$ mit einem stetigen Weg durchlaufen. (vgl. dazu Abbildung 9.9)

Beweis für den Fall $n = 4k$, für ein $k \in \mathbb{N}$:

Für $n = 4$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}^3$, sodaß $N(\mathcal{H}(4, a))$ aus zwei Kreisen um den Ursprung besteht (vgl. die Darstellung der HERMITEpolynome in Polarkoordinaten), sodaß damit die Behauptung trivial ist.

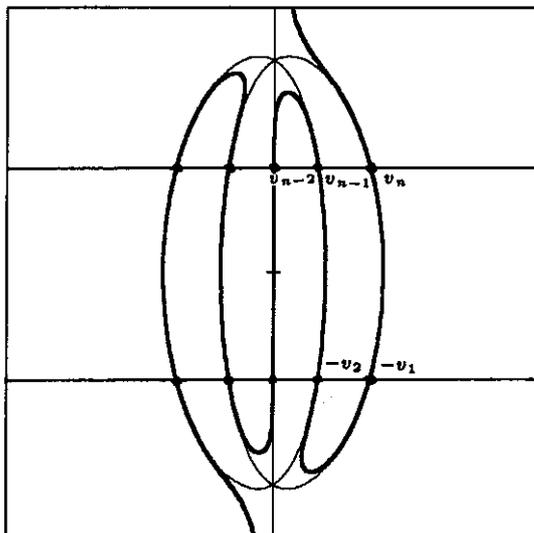


Abbildung 9.9: Das konstruierte ψ_ϵ für $n = 5$

Sei $n \geq 8$. Sei $\psi_1(x)$ ein HERMITEPolynom, wie in Lemma 9.2 konstruiert, und $\psi_2(x) = \psi_2(x^{(1)}, x^{(2)}) = H_1(x^{(1)}) \cdot H_{n-1}(x^{(2)})$.

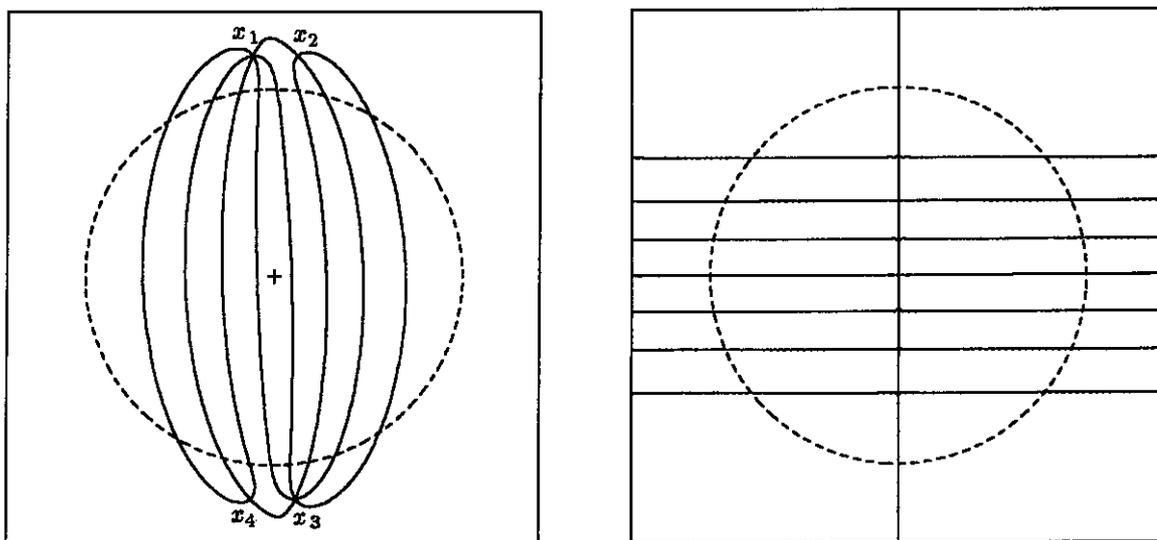


Abbildung 9.10: ψ_1 und ψ_2 für den Fall $n = 8$

Wir zeigen: $\psi_\epsilon := \psi_1 + \epsilon\psi_2$ besitzt für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ nur 3 Knotengebiete.

ψ_1 hat als kritische Nullstellen nur $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)})$, $x_2 = (-x_1^{(1)}, x_1^{(2)})$, $x_3 = -x_1$ und $x_4 = -x_2$ mit Ordnungen $\rho_{\psi_1}(x_1) = \rho_{\psi_1}(x_3) = k+1$ und $\rho_{\psi_1}(x_2) = \rho_{\psi_1}(x_4) = k$. Genauso wie im Fall n ungerade zeigt man, daß ψ_ϵ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$

keine kritischen Nullstellen mehr besitzt, und keine Knotenlinien neu entstanden sind. Es genügt daher wegen Satz 3.1 zu zeigen, daß die Knotenlinien von ψ_ε in 2 Wegzusammenhangskomponenten zerfallen.

Es sei z die größte Nullstelle von $H_{n-1}(x^{(2)})$. Dann sind g_z und g_{-z} Knotenlinien von ψ_2 und $z < \sqrt{2n+2}$.

Es sei $\{w_1, \dots, w_n\} = N(\psi_1) \cap g_z$, wobei $w_i^{(1)} < w_{i+1}^{(1)}$. $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ seien diejenigen Punkte aus $N(\psi_1) \cap N(\psi_2)$, die sich durch je eine Knotenlinie von $N(\psi_1)$, die ganz in einem Knotengebiet von $N(\psi_2)$ liegt, mit x_1 oder x_2 verbinden lassen. Das sind genau $n+1$ viele, da $\rho_{\psi_1}(x_1) + \rho_{\psi_1}(x_2) = \frac{n}{2} + 1$, aber eine Knotenlinie x_1 mit x_2 verbindet, daher die $x^{(2)}$ -Achse $\subset N(\psi_2)$ schneidet und somit dieser Punkt sowohl mit x_1 und als auch mit x_2 verbunden ist. Dieser Punkt sei v_0 . Die v_i werden so bezeichnet, daß entweder $v_i = w_i$, falls $v_i \in g_z$ oder v_i sich durch eine Knotenlinie von ψ_1 , die durch keine kritische Nullstelle geht, mit w_i verbinden läßt. Dann ist $\{v_1, \dots, v_n, -v_1, \dots, -v_n\}$ in $N(\psi_1) \cap N(\psi_2)$ und somit in $N(\psi_\varepsilon)$ enthalten.

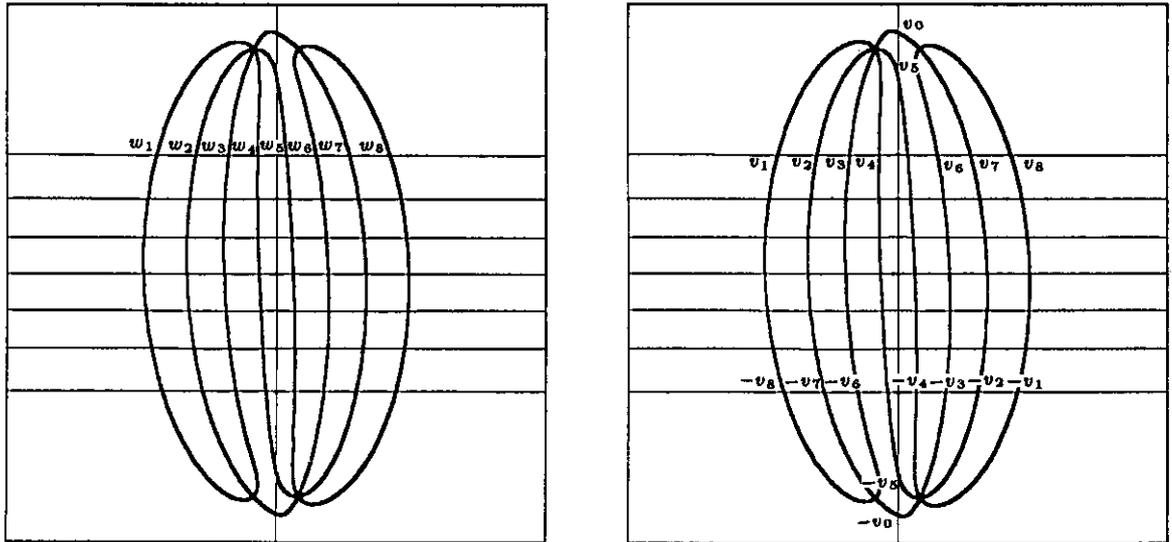


Abbildung 9.11: Lage der w_i und v_i

Also gibt es wegen Lemma 4.1 in $N(\psi_\varepsilon)$ genau n Kurven, die v_1 mit $-v_n$, v_2 mit $-v_{n-1}$, \dots , v_n mit $-v_1$ verbinden.

Bildet man den Durchschnitt der Knotengebiet von ψ_1 mit jenen von ψ_2 , so erhält man Gebiete, wobei jedes x_i im Rand von $2m$ Gebieten enthalten ist. Wir bezeichnen diese mit

$G_0^1, \dots, G_{\frac{n}{2}+1}^1; G_{\frac{n}{2}+2}^2, \dots, G_n^2, G_0^3; G_0^3, \dots, G_{\frac{n}{2}+1}^3; G_{\frac{n}{2}+2}^4, \dots, G_n^4, G_0^4$,
wobei

$x_i \in \partial G_i^i$ und
 $v_0, v_1 \in \partial G_0^1; v_1, v_2 \in \partial G_1^1; \dots; v_{\frac{n}{2}+1}, v_0 \in \partial G_{\frac{n}{2}+1}^1$
 $v_{\frac{n}{2}+2}, v_0 \in \partial G_{\frac{n}{2}+2}^2; v_{\frac{n}{2}+3}, v_{\frac{n}{2}+2} \in \partial G_{\frac{n}{2}+3}^2; \dots; v_n, v_{n-1} \in \partial G_n^2; v_0, v_n \in \partial G_0^2$
 sein soll. Die anderen werden so bezeichnet, daß
 $G_i^3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x \in G_i^1\}$
 $G_i^4 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x \in G_i^2\}$

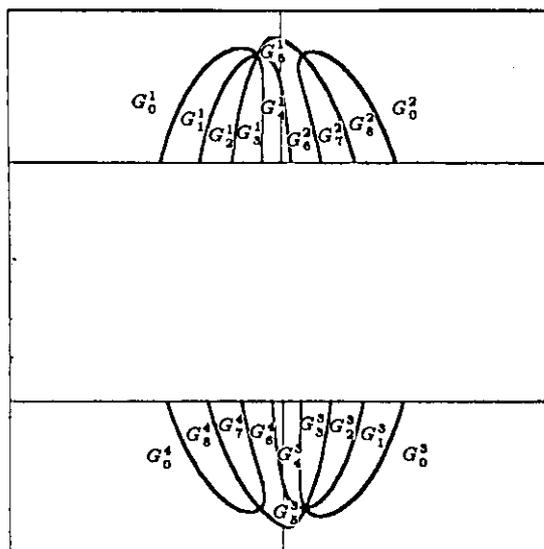


Abbildung 9.12: Bezeichnung der G_i^i

Der Rand jedes dieser Knotengebiete enthält einen im Abschluß dieses Gebietes wegzusammenhängenden Teil der Knotenlinien von ψ_ϵ .

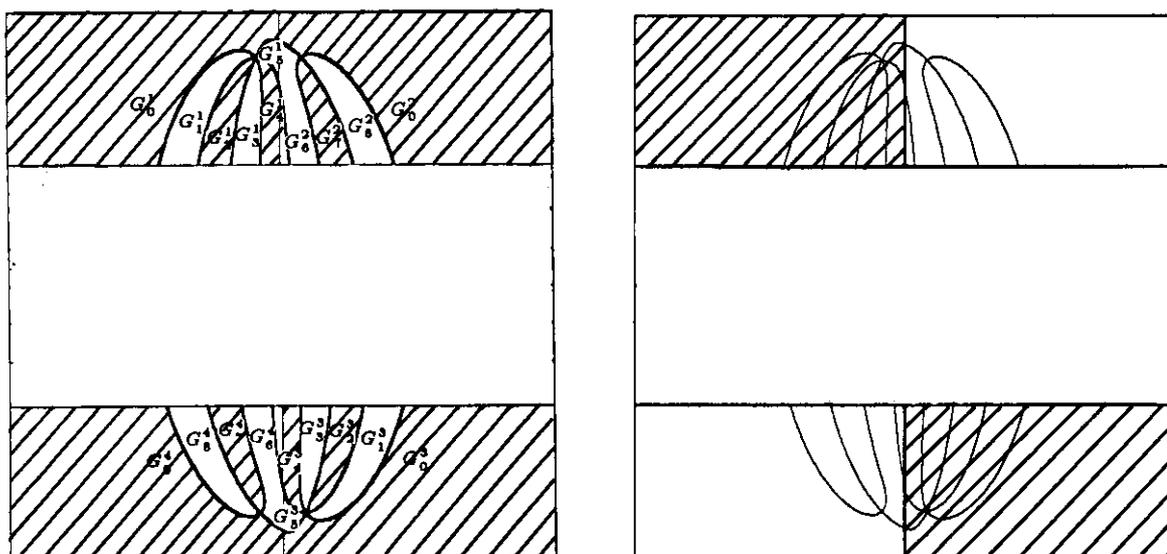


Abbildung 9.13: Gebiete wo $\psi_1 > 0$ (linkes Bild) bzw. $\psi_2 > 0$ (rechtes Bild)

Durch geeignete Wahl des Vorzeichens ist wegen der Inversionssymmetrie

$\psi_1 > 0$ auf

$$G_0^1, G_2^1, \dots, G_{\frac{n}{2}}^1; G_{\frac{n}{2}+3}^2, G_{\frac{n}{2}+5}^2, \dots, G_{n-1}^2, G_0^2;$$

$$G_0^3, G_2^3, \dots, G_{\frac{n}{2}}^3; G_{\frac{n}{2}+3}^4, G_{\frac{n}{2}+5}^4, \dots, G_{n-1}^4, G_0^4$$

und $\psi_1 < 0$ auf

$$G_1^1, G_3^1, \dots, G_{\frac{n}{2}+1}^1; G_{\frac{n}{2}+2}^2, G_{\frac{n}{2}+4}^2, \dots, G_n^2;$$

$$G_1^3, G_3^3, \dots, G_{\frac{n}{2}+1}^3; G_{\frac{n}{2}+2}^4, G_{\frac{n}{2}+4}^4, \dots, G_n^4$$

Genauso ist (durch geeignete Wahl des Vorzeichens) $\psi_2 > 0$ auf allen G_i^1 und G_i^3 und $\psi_1 < 0$ auf allen G_i^2 und G_i^4 .

Also besitzen ψ_1 und ψ_2 das gleiche Vorzeichen auf

$$G_0^1, G_2^1, \dots, G_{\frac{n}{2}}^1; G_{\frac{n}{2}+2}^2, \dots, G_n^2;$$

$$G_0^3, G_2^3, \dots, G_{\frac{n}{2}}^3; G_{\frac{n}{2}+2}^4, \dots, G_n^4$$

und entgegengesetztes Vorzeichen auf

$$G_1^1, G_3^1, \dots, G_{\frac{n}{2}+1}^1; G_{\frac{n}{2}+3}^2, \dots, G_{n-1}^2, G_0^2;$$

$$G_1^3, G_3^3, \dots, G_{\frac{n}{2}+1}^3; G_{\frac{n}{2}+3}^4, \dots, G_{n-1}^4, G_0^4$$

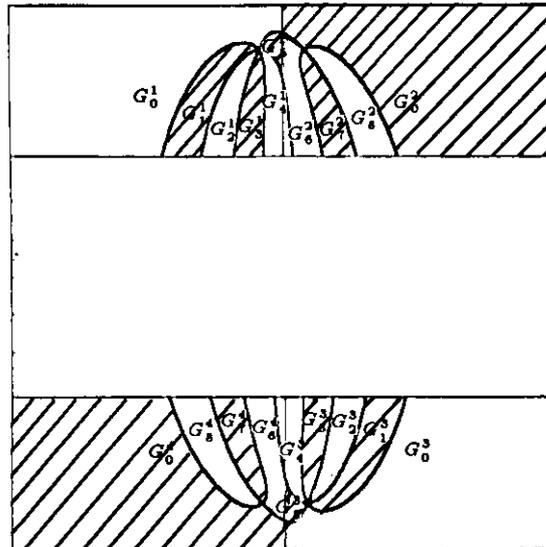


Abbildung 9.14: Gebiete wo ψ_1 und ψ_2 entgegengesetztes Vorzeichen haben

Da die v_i in $\overline{\cup G_i^j}$ die einzigen gemeinsamen Nullstellen von ψ_1 und ψ_2 sind, liegt nach dem Zwischenwertsatz in jedem Gebiet, wo $\psi_1 \cdot \psi_2 < 0$ ist, ein Teil der Knotenlinien von ψ_ϵ , der dort auch wegzusammenhängend ist, falls ϵ hinreichend klein ist (folgt aus Lemma 4.1). Die Gebiete mit $\psi_1 \cdot \psi_2 > 0$ und die Ränder aller dieser Gebiete hingegen enthalten bis auf die Punkte $v_0, \dots, v_n, -v_0, -v_1, \dots, -v_n$ keine Knotenlinien von ψ_ϵ .

Nach dem obem gesagtem gibt es in G_0^2 eine Knotenlinie von ψ_ϵ die von v_0 nach v_n geht. Dieser Punkt v_n ist durch eine Knotenlinie mit $-v_1$ verbunden, die fortgesetzt ist in G_1^3 und somit $-v_1$ mit $-v_2$ verbindet. $-v_2$ ist aber genauso mit v_{n-1} und weiter mit v_{n-2} verbunden, usw., bis man zum Punkt $-v_{-\frac{n}{2}}$ gelangt. Von dort kommt man zu $v_{\frac{n}{2}+1}$, wo die Knotenlinie in $G_{\frac{n}{2}+1}^1$ fortgesetzt ist. Wegen der Inversionssymmetrie erhält man genauso einen geschlossenen Weg durch $-v_0$. Auf diese Weise haben wir ganz $N(\psi_\epsilon)$ mit zwei verschiedenen stetigen Wegen durchlaufen.

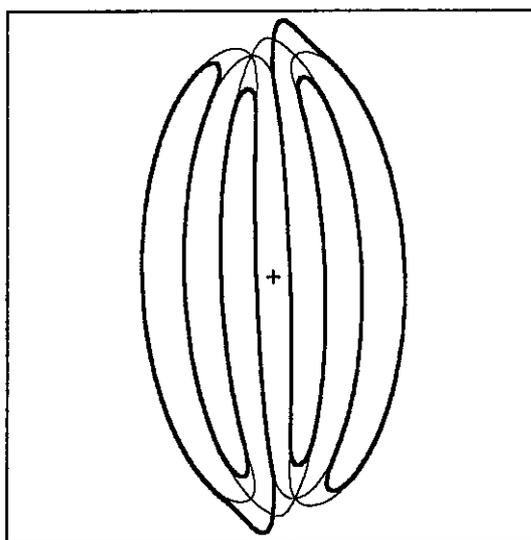


Abbildung 9.15: Das konstruierte ψ_ϵ für $n = 8$

Beweis für den Fall $n = 4k + 2$, für ein $k \in \mathbb{N}_0$:

Für $n = 2$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}^3$, sodaß $N(\mathcal{H}(2, a))$ ein Kreis um den Ursprung (vgl. die Darstellung der HERMITEpolynome in Polarkoordinaten) und damit die Behauptung trivial ist.

Sei $n \geq 6$. Wir gehen genauso vor wie im Fall $n = 4k + 2$. Sei wieder $\psi_1(x)$ ein HERMITEpolynom, wie in Lemma 9.2 konstruiert, und $\psi_2(x) = \psi_2(x^{(1)}, x^{(2)}) = H_1(x^{(1)}) \cdot H_{n-1}(x^{(2)})$.

Wir zeigen jetzt: $\psi_\epsilon := \psi_1 + \epsilon\psi_2$ besitzt für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ nur 2 Knotengebiete.

ψ_1 hat als kritische Nullstellen nur $x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)})$, $x_2 = (-x_1^{(1)}, x_1^{(2)})$, $x_3 = -x_1$ und $x_4 = -x_2$ mit Ordnung $m = k + 1$.

Man kann nun die Schritte des obigen Beweises genauso nachvollziehen. Die etwas geänderten Bezeichnungen sowie die erhaltenen Resultate sind aus Abbildung 9.17 ersichtlich.

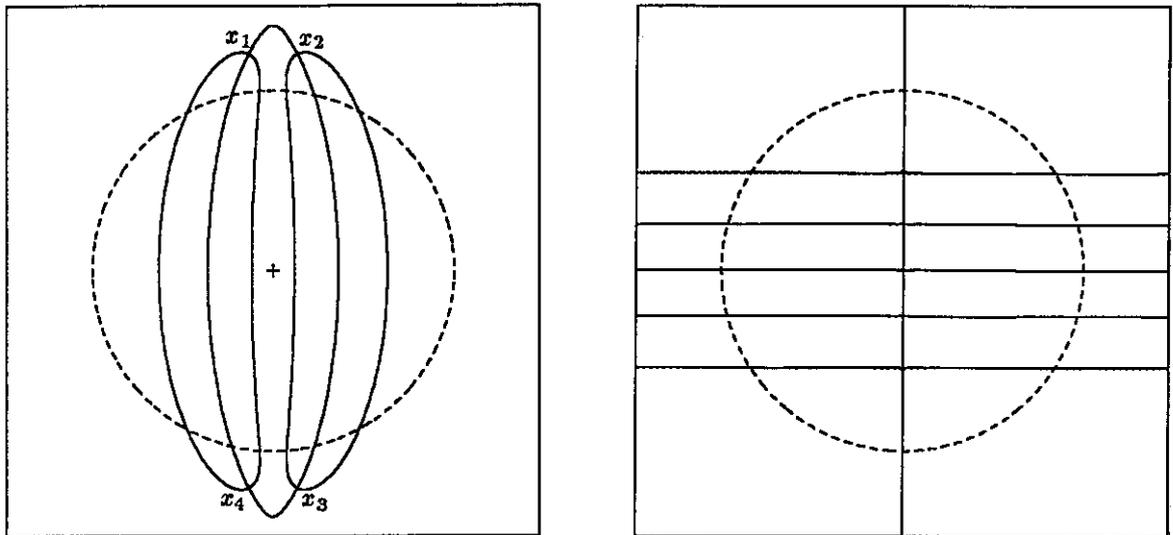


Abbildung 9.16: ψ_1 und ψ_2 für den Fall $n = 6$

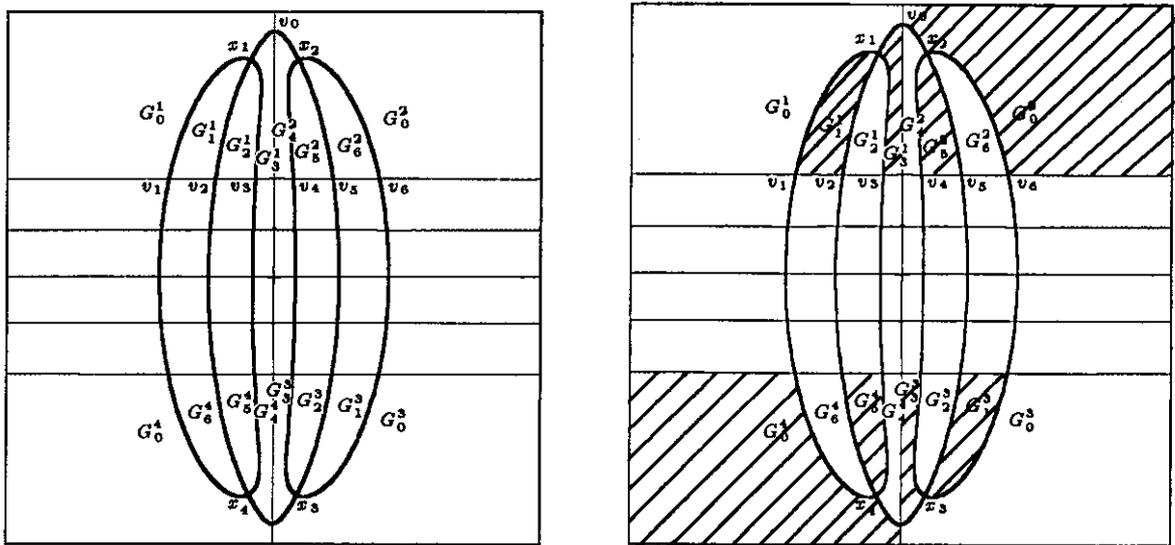


Abbildung 9.17: Lage der x_i , v_i und G_i^j für $n = 6$, sowie Gebiete wo ψ_1 und ψ_2 entgegengesetztes Vorzeichen annehmen

Jetzt gibt es daher so wie oben in G_0^2 eine Knotenlinie von ψ_ε die von v_0 nach v_n geht. Dieser Punkt v_n ist durch eine Knotenlinie mit $-v_1$ verbunden, die fortgesetzt ist in G_1^3 und somit $-v_1$ mit $-v_2$ verbindet. $-v_2$ ist aber genauso mit v_{n-1} und weiter mit v_{n-2} verbunden, usw., bis man zum Punkt $-v_0$ gelangt. Von

dort gelangt man wegen der Inversionssymmetrie zurück zu v_0 . Auf diese Weise haben wir ganz $N(\psi_\varepsilon)$ mit einem stetigen Weg durchlaufen.

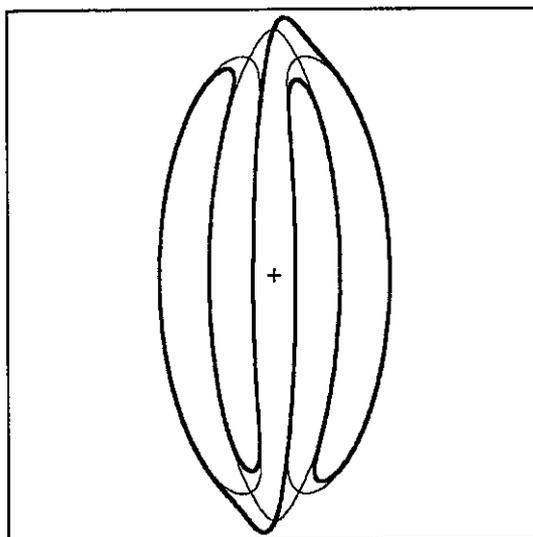


Abbildung 9.18: Das konstruierte ψ_ε für $n = 6$

Somit ist Satz 5.5 gezeigt. \square

10. Beweis von Lemma 6.1 und Satz 6.2

Wir können nun die in den §§7. und 8. geleistete Arbeit ausnützen und diese beiden Sätze sehr leicht beweisen.

Beweis von Lemma 6.1:

(1) ist trivial

(2) Wir wählen eine minimale Darstellung von $N(\psi)$. Sei \mathcal{G}' ein zyklischer Teilgraph von $\mathcal{G}(\psi)$ mit k Knoten. Dann seien die D_1, D_2, \dots, D_k die Knotengebiete von ψ , die den Knoten des Teilgraphen \mathcal{G}' entsprechen. Dann gibt es einen stetigen Weg τ in M , der durch alle diese Knotengebiete läuft und $N(\psi)$ in genau k Punkten schneidet.

Wenn keiner dieser Punkte eine kritische Nullstelle von ψ ist, dann sei γ eine Kurve der Darstellung von $N(\psi)$, die von τ geschnitten wird. γ kann keine geschlossene Kurve sein. Andernfalls müßte der Weg τ von einem Knotengebiet D_j über $\mathcal{Jm}\gamma$ in ein Knotengebiet D_l führen, und von dort wieder über $\mathcal{Jm}\gamma$ zurück nach D_j , da nach obiger Annahme $\mathcal{Jm}\tau \cap \gamma(0) = \emptyset$, falls $\gamma(0) = \gamma(1)$ eine kritische Nullstelle ist. Dann müßte aber τ , $N(\psi)$ mindestens $k + 1$ mal schneiden.

$\mathcal{Jm}\gamma$ darf daher nicht eine Wegzusammenhangskomponente von $N(\psi)$ sein. Da die Darstellung minimal war, muß daher $\rho_\psi(\gamma(0)) = \tilde{\rho}_{N(\psi)}(\gamma(0)) \geq 2$, also $\gamma(0)$ eine kritische Nullstelle sein (vgl. Definition 7.3(1)).

(3) \Leftrightarrow (2)

(4) gilt, da die Eigenfunktionen ψ bei den Knotenlinien lokal aussehen wie harmonische homogene Polynome (§1.). \square

Beweis von Satz 6.2:

(1) folgt unmittelbar aus Lemma 4.4

(2) Wir können wieder wie im Beweis von Lemma 4.4 den Weg $\sigma(t) := N(\psi_t)$ in Teilwege σ_j zerlegen, wo jedes σ_j eine \mathcal{N} -Schar bildet. Sei σ_1 der Teilweg, der auf $[0, t_1]$ definiert ist.

Nach Lemma 8.2 können nur bei $t = 0$ zwei Punkte $\gamma_i^t(\delta_i)$ und $\gamma_j^t(\delta_j)$, die auf $(0, t_1]$ verschieden sind, gleich werden, d.h. $\gamma_i^t(\delta_i) \neq \gamma_j^t(\delta_j)$ für $t > 0$ und $\gamma_i^1(\delta_i) = \gamma_j^1(\delta_j)$. γ_i^t und γ_j^t sind Kurven der Darstellung von $N(\psi_t)$. Wir wissen aus Lemma 4.4, daß dabei keine Knotengebiete verschwinden können, es können aber neue entstehen. Diese sind mit solchen Knotengebieten verbunden, die genauso aus den Knotengebieten entstanden sind, die mit dem ursprünglichen Knotengebiet verbunden waren. Daraus folgt, daß sich die im Lemma geforderte surjektive

Abbildung stets finden läßt, da die Knoten der Graphen über die eindeutige Zuordnung z_{ψ_t} mit den Knotengebieten von ψ_t identifiziert sind. \square

Anhang

Die Abbildungen dieser Diplomarbeit wurden mit Hilfe der Programmbibliothek "Erlanger Graphik-System (ERLGRAPH 2.0M)" (1984) unter Benützung der Universitätsrechenanlage und einem Laserdrucker am Institut für theoretische Chemie der Universität Wien hergestellt.

Aus dem Programmpacket wurde die Routine CTRF, die zu einer gegebenen REAL-Funktion beliebige Höhengschichtlinien zeichnet, verwendet, um die Knotenlinien darzustellen. Die verwendeten Funktionen sind jene aus §2. Um die Übersichtlichkeit und Richtigkeit der Programme zu gewährleisten, besonders in Hinblick auf Anpassung an die gerade aktuellen Probleme, wurden die Polynome nicht in eine andere — für den Computer einfachere — Form gebracht. Die dadurch bedingte geringere Genauigkeit und der etwas größere Rechenaufwand wurde in Kauf genommen. Die Bilder für großes n sind sicherlich nicht mehr sehr genau (hohe Potenzen von $x!$), diese Bilder dienen aber weniger zum Aufstellen irgendwelcher Vermutungen, sondern dazu, um etwas Einblick in die Komplexität des Problems zu gewinnen.

Um Beispiele für HERMITEpolynome mit kritischen Nullstellen zu erhalten, wurden derartige Punkte "erzwungen", d.h. es wurden Punkte des \mathbb{R}^2 und Ordnungen des Verschwindens bei diesen Punkten festgelegt und die Koeffizienten der Funktion dementsprechend bestimmt. Dabei wurde der letzte Koeffizient a_n gleich 1 gesetzt und unter Ausnützung von Lemma 9.3 ein (unterbestimmtes) Gleichungssystem erstellt. Alle Lösungen davon ergeben HERMITEpolynome mit den geforderten kritischen Nullstellen. Um eine Lösung zu erhalten, wurde die Routine F04JDF aus der Programmbibliothek NAGLIB verwendet. Diese errechnet die bezüglich der 2-Norm kleinste Lösung.

Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMOWITZ M., STEGUN I. A.: Handbook of mathematical functions, Dover, New York (1968)
- [2] ARMSTRONG M.A.: Basic Topology, Springer, New York (1983)
- [3] BERARD P., MEYER D.: Inegalites isoperimetrique et applications, Ann. Sci. Ec. Norm. Super., Paris **15**, 513–542 (1982)
- [4] BERS L.: Local behaviour of solutions of general linear elliptic equations, Commun. Pure Appl. Math. **8**, 473–496 (1955)
- [5] BRONSTEIN I.N., SEMENDJAJEW K.A.: Taschenbuch der Mathematik, Teuber (1987)
- [6] CHAVEL I.: Eigenvalues in riemannian geometry, Academic Press, New York (1984)
- [7] CHENG S. Y.: Eigenfunctions and nodal sets, Comment. Math. Helvetici **51**, 43–55 (1976)
- [8] COURANT R, HILBERT D.: Methoden der mathematischen Physik, Vol. 1, 3. Auflage, Springer (1968)
- [9] DONNELLY H., FEFFERMAN CH.: Nodal sets of eigenfunctions on RIEMANNIAN manifolds, Invent. math. **93**, 161–183 (1988)
- [10] FISCHER G.: Lineare Algebra, Braunschweig (1981)
- [11] GILBARG D., TRUDINGER N.S.: Elliptic partial differential equations of second order, Berlin, Heidelberg, New York (1977)
- [12] HOFFMANN-OSTENHOF M., HOFFMANN-OSTENHOF TH., SWETINA J.: Asymptotics and continuity properties near infinity of solutions of SCHRÖDINGER-equations in exterior domains, Ann. Inst. H. Poincare **46**, 247–280 (1987)
- [13] HOFFMANN-OSTENHOF M., HOFFMANN-OSTENHOF TH.: On the local behaviour of nodes of solutions of SCHRÖDINGER equations in dimensions ≥ 3 , Manuskript (1989)
- [14] LEWY H.: On the minimum of domains in which the nodal lines of spherical harmonics divide the sphere, Commun. PDE **2**, 1233–1244 (1977)
- [15] MAYEDA W.: Graph Theory, Wiley, New York (1972)

- [16] UHLENBECK K.: Generic properties of eigenfunctions, *Am. J. Math.* **98**, 1059–1078 (1976)
- [17] VICK J. W.: *Homology Theory*, New York – London (1973)