DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Nach 25 Mal Schwarz muss doch Rot kommen

Paradoxa als Unterrichtseinstieg in verschiedene Themengebiete der Stochastik

verfasst von

Markus Zawrel

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, November 2014

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 412
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik
Betreut von:	ao. Univ.- Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Personen meine tiefe Verbundenheit aussprechen, denn ohne sie wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.
Große Dankbarkeit gilt vorab meinen Eltern und Großeltern, die es mir überhaupt ermöglicht haben, zu studieren und mich weiterzubilden.
Des Weiteren wäre ein Studium ohne die Unterstützung meines Bruders sowie Freundinnen und Freunden nur schwer vorstellbar oder möglich – diese Zeilen seien auch ihnen gewidmet.
Auch einem sehr lieben Menschen, der mich auf den richtigen Weg gebracht hat, möchte ich hier meinen Dank aussprechen.
Zudem möchte ich auch ao. Univ.- Prof. Mag. Dr. Peter Raith für die freundliche und hilfsbereite Betreuung dieser Diplomarbeit danken.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

„Das Schönste, was wir erleben können, ist das Geheimnisvolle.“ [1]

Dieses Zitat von Albert Einstein trifft auf viele Bereiche unseres Lebens zu – so auch auf die Schule. Es ist gerade dieses Geheimnisvolle, das es vermag Schülerinnen und Schüler in seinen Bann zu ziehen und Motivation zu wecken, wo vorher keine war. Für guten Unterricht ist es notwendig, dass Lernenden verschiedene Denkvorgänge ermöglicht werden: Vergleichen von Erscheinungen, Schaffen von neuen Lösungswegen, Feststellen von Widersprüchen und das Treffen von Schlussfolgerungen. [2] All diese Aspekte können bei der Arbeit mit Paradoxa und Trugschlüssen behandelt werden.
Vorab ist es wichtig, die beiden Begriffe zu definieren:

> *„Paradoxon: […] das zuerst bei den Stoikern formulierte augenscheinl. Widerspruchsvolle, das doch einen Sinn hat bzw. haben muß [sic]* [3]
>
> *„Trugschluß [sic]: ein auf einem Denkfehler beruhender falscher Schluß [sic]“* [4]

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik treten besonders häufig solche Paradoxa auf, denn hier ist es besonders leicht, einen Denkfehler zu begehen. [5] Dies ist der Grund, warum ich mich für dieses Themengebiet entschieden habe.
Stochastik ist ein wesentlicher Bestandteil des Oberstufenlehrplans [6] und der neuen zentralen Reifeprüfung [7]. Umso wichtiger ist es, gerade auch diese Kapitel didaktisch aufzuarbeiten und die Schülerinnen und Schüler mit verschiedenen Zugängen zu diesem Themenbereich zu fördern und zu fordern.

---
[1] [20] S.12
[2] vgl. [11] S.141f
[3] [24] S.144
[4] [25] S.29
[5] vgl. [22] S.9
[6] vgl. [3]
[7] vgl. [1]

In den folgenden Kapiteln werden verschiedenste Paradoxa und Trugschlüsse aus dem Gebiet der Stochastik betrachtet und näher erläutert. Die Auswahl erfolgte nach didaktischen Überlegungen, ist jedoch keinesfalls als vollständig oder zwingend anzusehen. Der Leserin und dem Leser sollten verschiedene Begriffe der Stochastik geläufig sein, um Rechenwege oder Beweise nachvollziehen zu können. Die Paradoxa und Trugschlüsse sollten aber für jede Interessierte und jeden Interessierten verständlich und lesbar sein.

1. Zwei historische Paradoxa

Der Ursprung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bei Glücksspielen im 17. Jahrhundert zu finden. [8]

Zwar gab es diverse Würfelspiele schon in der Antike, jedoch erst in der Neuzeit begannen sich Wissenschaftler näher mit den Gesetzmäßigkeiten dieser zu beschäftigen.

In dem folgenden Kapitel werden zwei dieser historischen Paradoxa näher erläutert und didaktisch aufgearbeitet. Dadurch wird auch ein Einblick in die Geschichte der Mathematik gewährt, die für einen lebendigeren Unterricht sorgen kann und somit nicht fehlen sollte. [9]

Es ist wichtig den Lernenden zu zeigen, dass sich Lösungen weiterentwickeln. Damals unlösbare Paradoxa können heute bereits von Anfängern bearbeitet werden. Bildung beinhaltet auch die Tatsache, dass Wissen nicht auf Dauer gesichert ist. [10] Dies erscheint vor allem im Bereich der Mathematik zu Beginn etwas überraschend.

Zu jedem der zwei Teilkapitel gibt es Arbeitsaufträge, mit deren Hilfe sich die Schülerinnen und Schüler näher mit den Paradoxa beschäftigen sollen.

Dadurch kann auch auf Verallgemeinerungen geschlossen, beziehungsweise können neue Varianten entdeckt werden. Die Probleme an sich, sollten von den Schülerinnen und Schülern jedoch leicht gelöst werden können. [11]

Da es sich hier um historische Beispiele handelt, sind diese stets im generischen Maskulinum geschrieben. Um die Authentizität zu wahren verzichten Teile dieser Kapitel ebenfalls darauf, das Femininum explizit anzusprechen.

[8] vgl. [15] S.76
[9] vgl. [15] S.82
[10] vgl. [11] S.155
[11] vgl. [15] S.82

1.1 Das Würfelparadoxon

Obwohl das folgende Beispiel sehr einfach ist, irrten sich auch große Wissenschaftler wie Leibnitz (einer der Begründer der Differential- und Integralrechnung) oder d'Alembert (einer der Verfasser der ersten französischen Enzyklopädie). [12]

Zwar handelt es sich aus heutiger Sicht nicht wirklich um ein Paradoxon, aber es soll zeigen, dass man nur allzu leicht versucht ist, ein Problem mit einer fehlerhaften intuitiven Vorstellung zu lösen.

1.1.1 Das Paradoxon

Der Wurf mit einem idealen Würfel kann zu folgenden Ausgängen führen: {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Würfelt man mit zwei idealen Würfeln gleichzeitig und betrachtet die Summe der Augenzahlen beider Würfel, so kann diese {2, 3, 4, … 10, 11, 12} ergeben.

Die Betrachtung soll nun nur auf den Ausgängen „9“ oder „10“ liegen. Es gibt je zwei Möglichkeiten ($9 = 4 + 5 = 3 + 6$ beziehungsweise $10 = 5 + 5 = 4 + 6$) diese Summe der Augenzahlen zu erhalten. Bei häufigerem Würfeln ist es jedoch viel wahrscheinlicher „9“ als „10“ zu würfeln. [13]

Ein idealer Würfel ist ein Würfel, bei dem jedes der Ereignisse {1, 2, 3, 4, 5, 6} mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ eintritt. [14]

Würfelt man hingegen mit drei Würfeln, so wird die Summe häufiger „10“ sein, als dass sie „9“ ergibt. [15]

Um nicht eine große Anzahl an Würfen selbst durchzuführen, wurde mit Hilfe des Programmes Geogebra ein Applet erzeugt, das eine zufällige Würfelserie durchführt und in einem Balkendiagramm darstellt. Die Anzahl der Würfe ist durch Eingabe in das betreffende Feld selbst wählbar.

Der Vorteil gegenüber dem klassischen Würfeln ist hier der Zeitfaktor wenn die Schülerinnen und Schüler eine solche Serie mit dem Applet untersuchen.

---

[12] vgl. [22] S.13
[13] vgl. [22] S.12
[14] vgl. [9] S.139
[15] vgl. [22] S.12

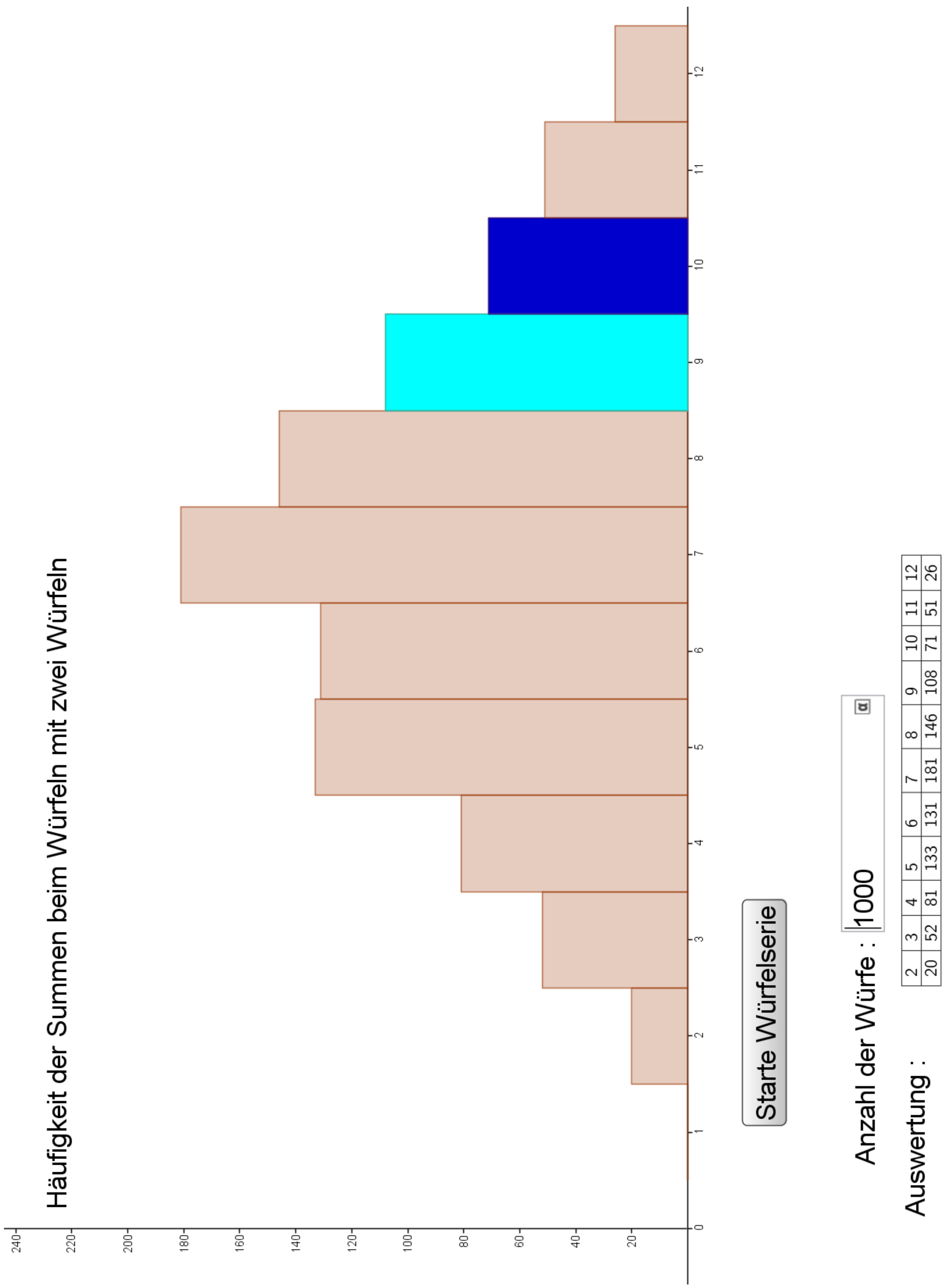


Abbildung 1: Fenster des Applets „Würfeln_mit_2_Würfeln“

Dieses Programm ist unter www.geogebratube.org/student/m212049 zu finden.

1.1.2 Erklärung des Paradoxons

Die Lösung ist relativ einfach. Sowohl Gerolamo Cardano („De Ludo Aleae“) als auch Galileo Galilei („Sopra le Scoperte dei Dadi“) hatten sie unabhängig voneinander in ihren Werken publiziert. [16]

Es muss neben den Augenzahlen der Würfel auch die Reihenfolge berücksichtigt werden. Es ergibt sich also:

$9 = 4 + 5 = 5 + 4 = 3 + 6 = 6 + 3$ beziehungsweise $10 = 4 + 6 = 6 + 4 = 5 + 5$

Man kann also 9 auf vier verschiedene Arten würfeln, 10 jedoch nur auf drei. Bei 36 möglichen Zahlenpaaren ergeben sich also folgende Wahrscheinlichkeiten: [17]

Chance für „9“ = $\frac{4}{36}$

Chance für „10“ = $\frac{3}{36}$

Bei drei Würfeln kann leicht nachgerechnet werden, dass es 25 verschiedene Arten gibt, eine „9“ zu erhalten, jedoch 26 verschiedene Arten, um zur Summe „10“ zu gelangen. Hier ist es also wahrscheinlicher eine „10“ zu würfeln.[18]

Dass dieses Beispiel auch schon in der Grundschule thematisiert werden kann, zeigt Wolfram Weustenfeld in seinem Artikel *„Alles nur eine Frage von Glück oder Pech“*. [19]

In einem Unterrichtsversuch behandelt er die Häufigkeitsverteilung der Augensummen zweier Würfel mit einer zweiten Klasse. Mit Hilfe von zweifarbigen Paaren magnetischer Würfelseiten erstellen die Schülerinnen und Schüler ein Balkendiagramm und in einem anschließenden Tippspiel wird das Ganze auch spielerisch bearbeitet.

[16] vgl. [22] S.12
[17] vgl. [22] S.12
[18] vgl. [22] S.12
[19] [27] S.2

Das Würfelparadoxon ist aber durchaus auch als Einstieg für höhere Schulstufen geeignet und kann im Unterricht dazu dienen, die Schülerinnen und Schüler mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff vertraut zu machen.[20]

Ein einfacher Arbeitsauftrag (Abbildung 2) soll zum Nachdenken animieren:

Arbeitsauftrag:

Ausgangspunkt ist folgendes Spiel: Man würfelt mit zwei Würfeln und addiert die Augensummen.

1) Welche Ergebnisse sind möglich und durch welche Würfe der einzelnen Würfel kommen sie zustande? Lege dazu eine Tabelle an!

Augensumme	Möglichkeiten (kleinere Zahl zuerst)
2	1+1
3	1+2
...	...

2) Führe mit dem Applet „Würfeln_mit_2_Würfeln“ mehrere Versuchsreihen durch und begründe, warum es sehr wahrscheinlich ist, die Summe „7“ zu erhalten

3) Sowohl „9“ als auch „10“ lassen sich durch jeweils zwei Möglichkeiten ($9 = 4 + 5 = 3 + 6$ beziehungsweise $10 = 5 + 5 = 4 + 6$) darstellen. Wieso tritt eine „9“ aber häufiger auf als eine „10“?

Abbildung 2: Arbeitsauftrag für den Unterricht zum Thema Würfelparadoxon

[20] vgl. [14] S.29

1.2 Das Aufteilungsparadoxon

Auch hier handelt es sich nicht um ein Paradoxon im engeren Sinn, jedoch haben die vielen falschen Lösungsversuche zu Legenden eines Paradoxons geführt. Das erste Mal publiziert wurde dieser Sachverhalt 1494 in Venedig. Fra Luca Paccioli schrieb das Problem, das wahrscheinlich sehr alt und arabischen Ursprungs ist, in seinem Werk „Summa de arithmetica geometria, proportioni et proportionalità" nieder. Die Lösung des Aufteilungsparadoxons erfolgte erst 1654 - unabhängig voneinander - durch Fermat und Pascal. Diese zwei Wissenschaftler standen in regem Briefkontakt, in welchem sie mathematische Probleme behandelten. Viele sehen hier die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung. [21]

1.2.1 Das Paradoxon

Ausgangspunkt ist ein gerechtes Spiel zwischen zwei Personen: beide Teilnehmer haben hier die gleiche Chance zu gewinnen. Die Spielregel besagt nun, dass derjenige der zuerst fünf Runden gewinnt, den ganzen Gewinn erhält. Pro Runde muss von beiden Spielern ein Einsatz getätigt werden. Ein Unentschieden ist bei diesem Spiel nicht möglich. Das Spiel muss- aus welchen Gründen auch immer - vor dem Ende abgebrochen werden, sodass es noch keinen Gewinner gibt.

Zu diesem Zeitpunkt hat Spieler A hat vier Runden gewonnen, Spieler B nur drei.

Nun stellt sich die Frage, wie der Gewinn aufzuteilen ist. [22]

1.2.2 Erklärung des Paradoxons

Zum näheren Verständnis der Tragweite des Problems seien zuerst zwei alternative Möglichkeiten angeboten, den Gewinn aufzuteilen, ehe zwei gerechte Aufteilungen angegeben werden:

Die folgenden Lösungen sind inhaltlich aus [15] *übernommen und werden nicht einzeln zitiert.*

[21] vgl. [22] S.18f

[22] vgl. [15] S.79

Fra Luca Pacciolis Lösungsvorschlag war es, die bereits gespielten Runden zu betrachten und somit im Verhältnis 4:3 zu teilen.
Niccolò Tartagglia erschien es grundsätzlich nur gerecht, wenn man dieses Problem juristisch lösen würde. Nach einer Aufteilung gefragt, gab er an, dass man entsprechend der getätigten Einsätze teilen sollte. Somit ergäbe sich:

$$(5 + 4 - 3) : (5 + 3 - 4) = 3 : 2$$

Blaise Pascal war der Meinung, dass das Augenmerk auf jenen Spielen liegen müsse, die noch zu gewinnen waren und nicht auf den bereits gewonnen Spielen. Er überlegte wie folgt:

> Gewinnt Spieler B, so stünde es unentschieden und jeder der beiden Spieler müsste die Hälfte bekommen. Die Chance für B das Spiel im nächsten Durchgang zu gewinnen ist $\frac{1}{2}$. Spieler B sollte somit die Hälfte der Hälfte ($\frac{1}{4}$) erhalten, was zur Aufteilung des Gewinns mit dem Verhältnis 3:1 führt.

> *„Nach heutiger Sprechweise wird also in diesem Lösungsweg ein Aspekt der Stochastik sichtbar.“* [23]

Pierre de Fermat bezog ebenfalls die zukünftigen Partien in seine Überlegungen mit ein und kam zu dem Schluss, dass spätestens nach zwei weiteren Partien ein Sieger feststehen muss. Diese zwei Partien untersuchte er näher:

1. Partie	2. Partie	Sieger (Ausgangssituation 4:3 für A)
A gewinnt	A gewinnt	Sieger ist A
A gewinnt	B gewinnt	Sieger ist A
B gewinnt	A gewinnt	Sieger ist A
B gewinnt	B gewinnt	Sieger ist B

Abbildung 3: Tabelle der möglichen Ausgänge [24]

[23] [15] S.80
[24] entnommen aus [15]

Betrachtet man Abbildung 3 so wird klar, dass in drei von vier Fällen Spieler A gewinnt, was ebenfalls zu dem Teilungsverhältnis von 3:1 führt.
Aus didaktischen Überlegungen kann man den Sachverhalt auch in einem Baumdiagramm darstellen:

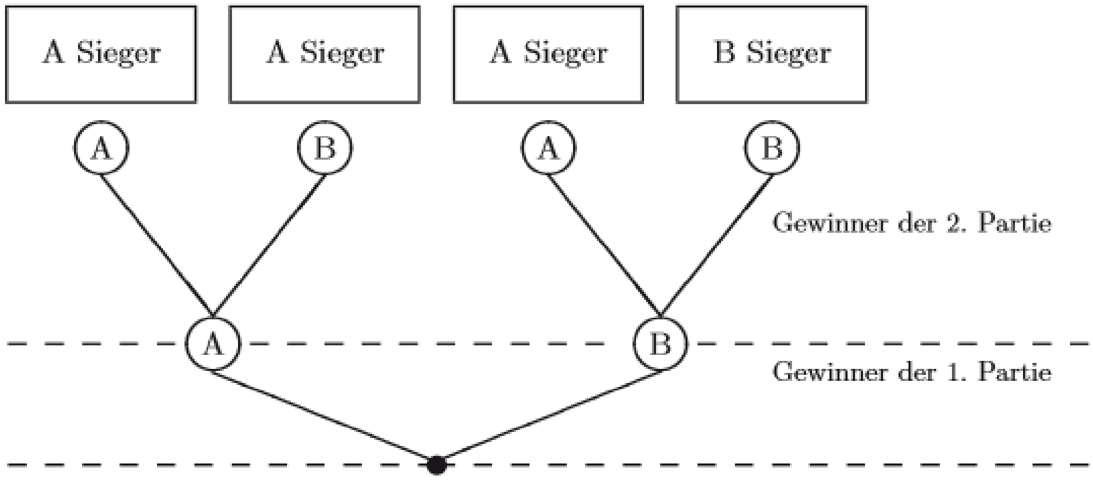


Abbildung 4: Baumdiagramm zum Aufteilungsparadoxon [25]

Pascal und Fermat machten sich auch Gedanken über eine allgemeine Lösungsformel, für den Fall, dass Spieler A noch *m* Runden und Spieler B noch *n* Runden gewinnen muss. Die Anzahl der fiktiven Runden, die noch gespielt werden ist dann $n + m - 1$. Alle noch möglichen Runden könnte man mit 2^{n+m-1} berechnen. [26]

Somit beträgt die Gewinnchance des ersten Spielers:

$$\frac{1}{2^{n+m-1}} \cdot \sum_{j=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{j}$$ **allgemeine Formel zur Aufteilung des Gewinns** [27]

[25] entnommen aus [15]
[26] vgl. [22] S.20
[27] vgl. [22] S.20

Beim Aufteilungsparadoxon sind den möglichen Beispielen und Übungen für den Unterricht keine Grenzen gesetzt. Zum einen können die Schülerinnen und Schüler zuerst versuchen die Lösungsversuche nachvollziehen und zum anderen selbst bei abgewandelten Spielen anwenden.

Hierzu kann man Abbildung 4 betrachten.

Arbeitsauftrag:

1) Lies dir den Text zum Aufteilungsparadoxon durch und versuche sowohl die falschen, als auch die gerechten Lösungswege nachzuvollziehen!

2) Wie müsste der Gewinn laut Fermat und Pascal aufgeteilt werden, wenn der Gewinner jener Spieler ist, der zuerst sechs Runden gewinnt und Spieler A bereits fünf Runden beziehungsweise Spieler B drei Runden gewonnen hätte?
Stelle den Sachverhalt auch durch eine Tabelle dar!

Abbildung 5: Arbeitsauftrag für den Unterricht zum Thema Aufteilungsparadoxon

2. Das Gesetz der Großen Zahlen

„Es gibt kaum andere mathematische Gesetzmäßigkeiten, die so oft mißverstanden [sic] wurden wie die Gesetze der Großen Zahlen.“ [28]

2.1 Das Paradoxon

Schon beim Spielen des klassischen Kinderspiels „Mensch ärgere dich nicht“, bei dem man eine „6“ zum Starten benötigt, beschäftigt man sich zum ersten Mal mit der Frage, warum zwar die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln $\frac{1}{6}$ = 0,1667 ist, aber eine Sechs nicht jedes sechste Mal auftritt.

Ein sehr eindrucksvolles Beispiel für die Fehlinterpretation des Gesetzes der Großen Zahlen ereignete sich 1913:

> *„Im schönen Casino von Monte Carlo, dem Las Vegas dieser Zeit, kam an diesem Tag 26 Mal in Folge die Kugel auf schwarzen Zahlen zu liegen.“* [29]

Betrachten wir die Wahrscheinlichkeit für 26mal „Rot“ beim Roulette:

$$\left(\frac{18}{37}\right)^{26} = 0{,}00000073\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist sehr klein. Deshalb begannen nach und nach die Spielerinnen und Spieler nur auf Rot zu setzen und ihre Einsätze zu erhöhen – und verloren.
Der Gedanke war, dass nach 16 Mal Schwarz in Folge nun doch endlich Rot auftreten müsste. [30]

[28] [22] S.41
[29] [17]
[30] vgl. [17]

Die Problematik liegt darin, dass man in das Gesetz mehr hineininterpretiert, als es wirklich aussagt:

Betrachten wir ein Spiel mit zwei gleichwahrscheinlichen Ausgängen (50:50 Chance) A und $\overline{A}$ – zum Bespiel einem Münzwurf mit Kopf und Zahl. Ergibt sich bei diesem Spiel oft Zahl, so sind viele Spielerinnen und Spieler davon überzeugt, dass sich auch aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen die Wahrscheinlichkeit für Kopf erhöht hat. [31]
Grund für diese Annahme ist der Gedanke, dass sich die Anzahl der Ausgänge A und $\overline{A}$ ausgleichen sollte.
Diesem Gedanken steht die Tatsache gegenüber, dass die Wahrscheinlichkeit für beide Ereignisse immer bei 50% liegt – Die Münze hat keine Erinnerung an den vorigen Wurf und die Wahrscheinlichkeit für Kopf und Zahl sind bei jedem Wurf gleich groß. [32]

Dieses Phänomen lässt sich auf einige Bereiche übertragen:
Das immerwährende Spielen derselben Zahlen beim Lotto legt den Verdacht nahe, die Spielerin oder der Spieler versuche mit seinen Zahlen zu gewinnen, da sie ja schon lange nicht mehr gezogen wurden.

Der Einfachheit halber betrachten wir in diesem Kapitel nur einen idealen, einen „Laplace-Würfel“ und eine ideale „Laplace Münze“, um die Berechnung nicht zu kompliziert zu gestalten.
Die Definition eines idealen Würfels wurde bereits in einem vorigen Kapitel gegeben- eine ideale Münze ist eine Münze, bei der die Ereignisse {Kopf, Zahl} jeweils mit $p = \frac{1}{2}$ eintreten. [33]

In diesem Kapitel wird zuerst der mathematische Formalismus behandelt und anschließend wird empirisch (mit Hilfe eines Applets und eines Arbeitsblattes) dieses Thema für die Schülerinnen und Schüler aufbereitet.

[31] [22] S.42
[32] [22] S.42
[33] vgl. [9] S.139

2.2 Das empirische Gesetz der großen Zahlen

„Mit wachsender Versuchszahl stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines beobachteten Ereignisses.“ [34]

Richard Edler von Mises kam auf die Idee, die Wahrscheinlichkeit über den Limes der relativen Häufigkeiten eines Ereignisses zu definieren. Seiner Ansicht nach galt, wenn man ein Zufallsexperiment anstatt endlich (*n*-mal) in Gedanken unendlich oft wiederholt, so würde die relative Häufigkeit $h_n(E)$ des Ereignisses E konvergieren und gelte dann als Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E. Die relative Wahrscheinlichkeit $h_n(E)$ ist der Quotient der Anzahl der gewünschten Ereignisse E durch die Gesamtzahl n der Versuche. [35]

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} h_n(E)$$

Somit müsste dann aber auch für jede positive Zahl ε ein n_ε existieren, sodass gilt:

$$| P(E) - \mathrm{h_n}(\mathrm{E}) | < \varepsilon \text{ für alle } n > \mathrm{n}_\varepsilon$$

Genau das ist aber nicht garantiert. Wie in der Abbildung 6 gezeigt, bewegt sich die relative Häufigkeit zwar in die ε –Umgebung, kann diese aber auch wieder verlassen.
Das empirische Gesetz der großen Zahlen garantiert also keinen Grenzwert im analytischen Sinn und ist daher - laut [9] - nicht zur Definition der Wahrscheinlichkeit geeignet.[36]

Jedoch ist auch zu bemerken, dass die relative Häufigkeit mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen die Wahrscheinlichkeit konvergiert und die Kritik an der Definition somit relativiert werden kann.

> *„Ein weiteres Missverständnis ist auch der Schluss, dass nicht nur die Schwankung der relativen Häufigkeit gegen Null geht sondern auch die Schwankung der absoluten Häufigkeit.“* [37]

---

[34] [9]. S145
[35] vgl. [9] S.145
[36] vgl. [9] S.145f
[37] [9] S.147

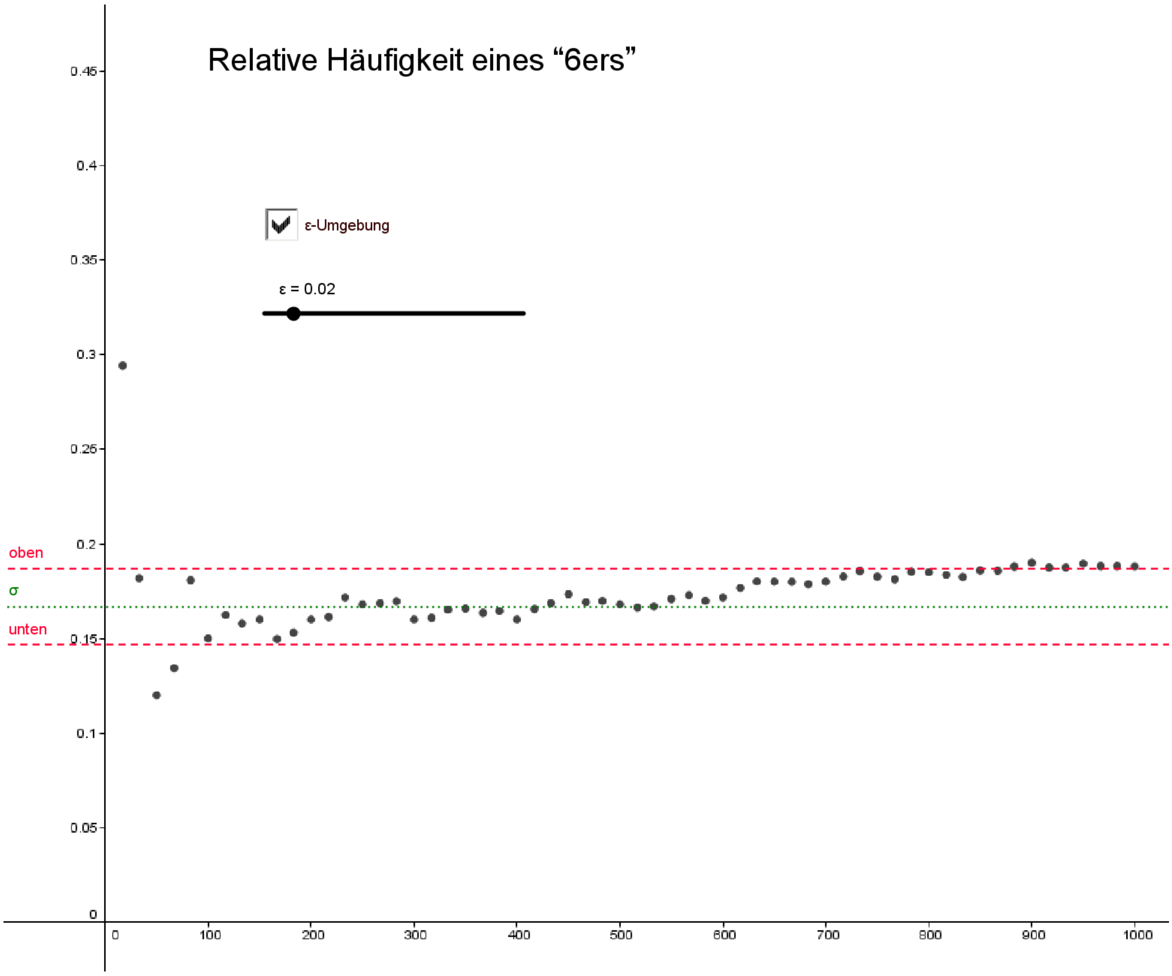


Abbildung 6: relative Häufigkeit eines „6ers" bei 1000 Versuchen

Hier wurde eine Würfelserie von 1000 Würfen auf die Anzahl der vorkommenden „6er" untersucht. Die ε –Umgebung $[\ \frac{1}{6} - \varepsilon\ ;\ \ \frac{1}{6} + \varepsilon\ ]$ ist mit den zwei roten Linien gekennzeichnet. Die relative Häufigkeit des Ereignisses {6 gewürfelt} wird nach jedem der 1000 Versuche auf der Ordinate aufgetragen. Auf der Abszisse ist die Anzahl der Versuche abgebildet.

Wie bereits erwähnt, zeigt die Abbildung, dass die relative Häufigkeit eines „6ers“ sich zwar in einer ε –Umgebung (hier ist ε mit 0,02 gewählt) bewegt, diese aber nach weiteren Versuchen auch wieder verlassen kann.
Um die Wahrscheinlichkeit betrachten zu können, mit der die relative Häufigkeit in einer ε –Umgebung bleibt, benötigen wir Bernoullis Gesetz der Großen Zahlen. Dieses gibt Aufschluss darüber, dass eine Abweichung von mehr als ε mit steigender Versuchsanzahl *n* immer unwahrscheinlicher wird. [38]
Eine etwas anschaulichere Interpretation mit Hilfe der Physik bietet Manfred Borovcnik in einer Tagung für Didaktik der Mathematik vom 13.3.2008 bis 18.3.2008 in Budapest im Kapitel „„„*Freudenthals“* Weg zum Gesetz der Großen Zahlen“: [39]

> *Die folgenden Ideen und Inhalte sind aus dem Vortag übernommen und werden daher nicht extra als Zitate angeführt. Direkte Zitate werden gekennzeichnet.*

Borovcnik bildet eine Analogie zwischen dem Streuen der relativen Häufigkeiten um einen Wert p und der Messung einer physikalischen Größe.

> *„Der Stabilisierung auf lange Sicht steht der volle, ungebremste Zufall der aktuellen Messergebnisse gegenüber.“* [40]

Betrachtet wird ein Experiment mit 5 Würfen (5er Serie) mit einer Münze. Bestimmt man nun die relative Häufigkeit von „Kopf“ in den jeweiligen 5er-Serien so zeigt sich die Wiederholststreuung der Messwerte, die - bis auf einige Ausreißer - zwischen 0,2 und 0,8 schwankt (Abbildung 7). Die Messwerte streuen gut ersichtlich um die Achse 0,5.

[38] vgl. [9] S.146
[39] [26] S.303f
[40] [26] S.303

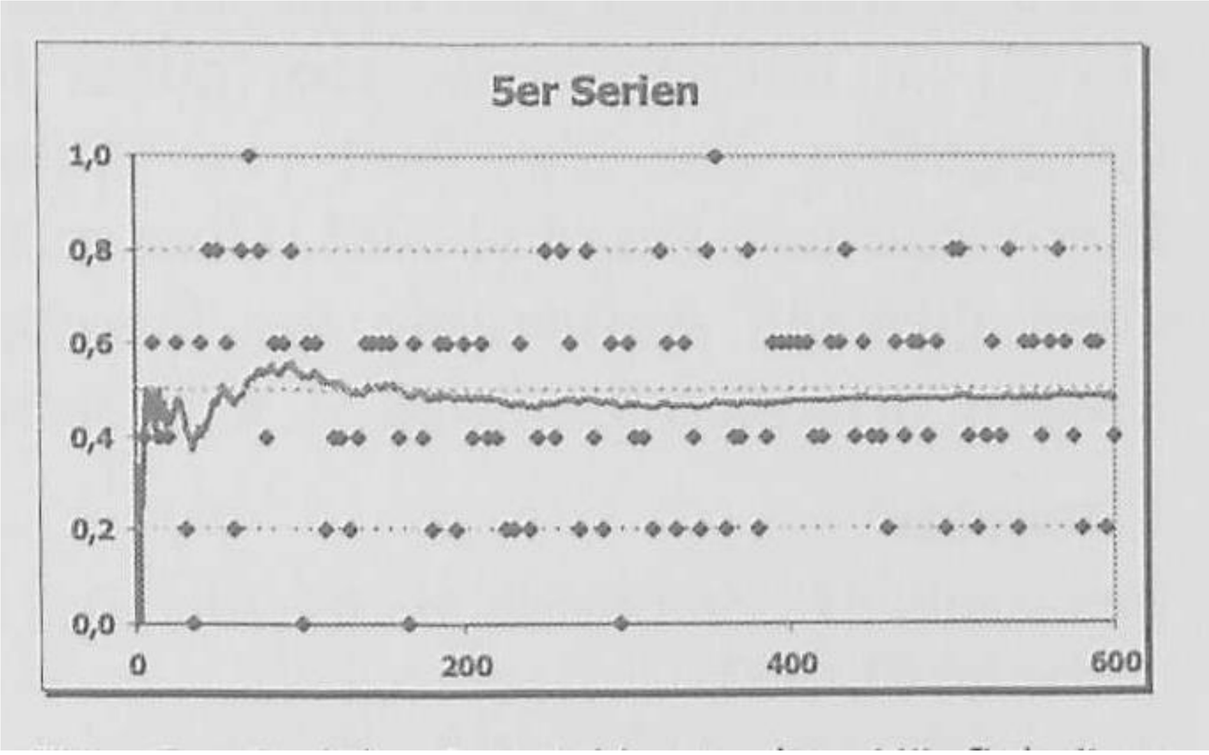


Abbildung 7: Stabile Entwicklung der Häufigkeiten trotz vollen Schwankens der aktuellen Serie [41]

Die Messtechnik spricht von der Präzession einer Messung:
Die Messwerte schwanken zwischen 0,2 und 0,8 und somit beträgt der Messfehler $\pm$ 0,3. Da dieser Messfehler zu groß ist, fasst man nun von der Messreihe jeweils zwei der 5er-Serien zusammen. Es ergeben sich also 10er-Serien, die jeweils wieder zu einer 20er-Serie zusammengefasst werden. So werden die Messwerte viel präziser (Abbildung 8).

[41] entnommen aus [26] S.303

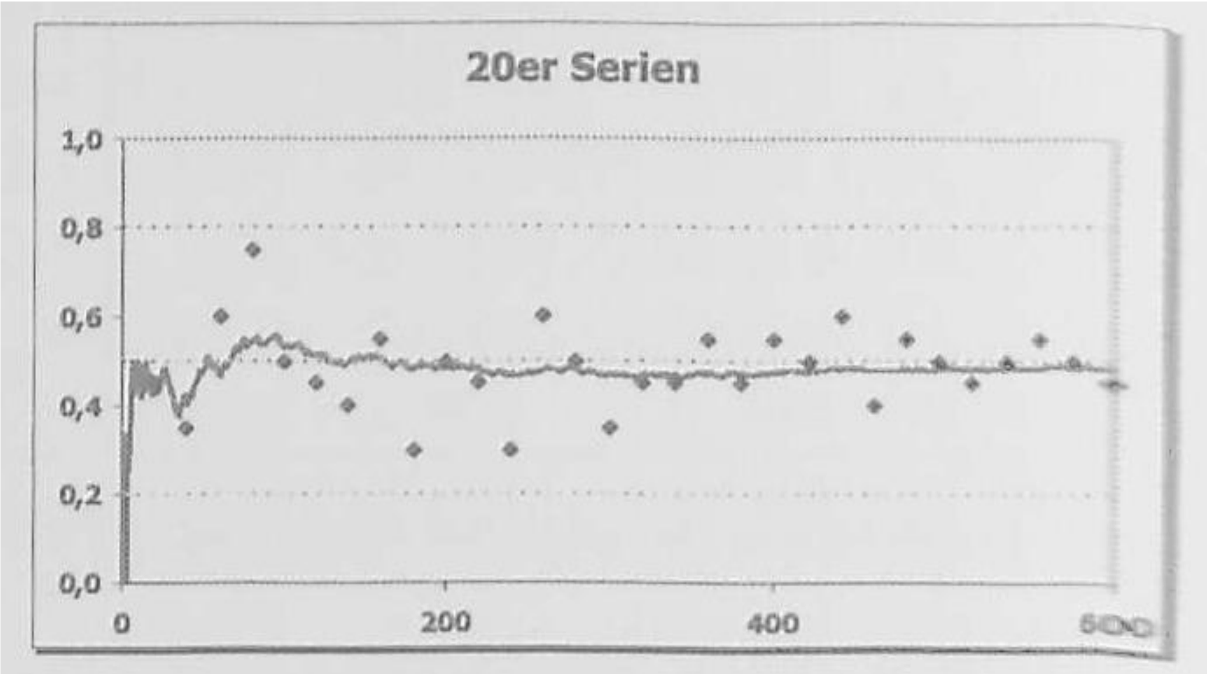


Abbildung 8: Messwerte aus 20er Serien [42]

> *„Es bedarf gar keiner Konvergenzaussage […] wenn die Länge der Serie über alle Maßen erhöht wird. Der Effekt darf ohne Vorbehalte von den bestehenden Daten übernommen werden.“* [43]

Bei einer Erhöhung der Daten auf 40er Serien darf man mit einer Verbesserung der Messung rechnen.

Hier wird also mit der Frage gearbeitet, wie genau eine Messung ist und der Begriff des Grenzwertes vermieden.

Zwar ist der Grenzwertbegriff für Bernoullis Gesetz der großen Zahlen notwendig, jedoch „[…] wird die Grenze des den Schülern angebotenen Bildungsgutes ganz klar dort liegen müssen, wo ihre Fassungskraft zu Ende ist, wo eine wirkliche Einsicht nicht mehr erwartet werden kann.“ [44]

[42] [26] S.304
[43] entnommen aus [26] S. 303
[44] [14] S.149

2.3 Bernoullis Gesetz der Großen Zahlen

Jakob Bernoulli (1654-1705) war der Erste, der eines der Gesetze der großen Zahlen beweisen konnte. [45] In seinem Buch „ars conjeectandi“ (Die Kunst des Rates) wurde der Sachverhalt zum ersten Mal erwähnt. Die Bezeichnung „Gesetz der großen Zahlen“ verwendete Bernoulli selbst nicht, sondern der Name wurde von Poisson eingeführt.[46]

Laut seinem Gesetz gilt folgendes:

Wirft man eine ideale (Laplace Münze) n-mal und bezeichnet man die Anzahl der erhaltenen Kopf-Würfe mit k, so nähert sich der Quotient $\frac{k}{n}$ mit wachsendem n-Wert dem Wert $\frac{1}{2}$. Den Quotienten $\frac{k}{n}$ nennen wir relative Häufigkeit der „Kopf-Würfe“.
In genauer Formulierung: Bezeichnen ε und δ beliebig kleine positive Zahlen und ist n genügend groß, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass $\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ erfüllt wird, mindestens 1- δ. Genügend groß bezieht sich hier auf den Zusammenhang von n in Abhängigkeit von ε und δ. [47]

Übertragen auf die die Suche nach „6ern“ beim „Mensch ärgere dich nicht“ würde die Formulierung wie folgt lauten:
Würfelt man genügend oft, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass $\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{6}\right| < \varepsilon$ erfüllt wird, mindestens 1- δ. Wobei k die Anzahl der „6er“ angibt und n die Anzahl der Würfe insgesamt.

Für Glücksspieler tritt bei einem „Kopf oder Zahl“– Spiel mit einer idealen Münze nun wie bereits erwähnt ein scheinbares Paradoxon auf:
Hat der Wurf mit der Münze oft „Zahl“ ergeben, so ist die Spielerin oder der Spieler der Meinung, dass sich dadurch auf Grund des Gesetzes der Großen Zahlen die Wahrscheinlichkeit für einen „Kopf-Wurf“ erhöht hat. Die Idee dahinter ist, dass sich nach einer großen Anzahl an Würfen die Anzahl von „Kopf-“ und „Zahl-Würfen“ ja ausgleichen muss.

[45] vgl. [22] S.41
[46] vgl. [22] S.41
[47] vgl. [22] S.41 f

Im Gegensatz dazu besitzt die Münze allerdings keine Erinnerung an bereits vergangene Ereignisse und die Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ oder „Zahl“ ist weiterhin jeweils $\frac{1}{2}$. [48]

Im Hinblick auf unser Würfelspiel würde das bedeuten, dass wenn bei den ersten Würfen jeweils die Ereignisse $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ eintreten, die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „eine Sechs würfeln“ gestiegen sein müsste.
Demgegenüber steht die Tatsache, dass der Würfel keine Erinnerung an bereits vergangene Würfe besitzt.

Zur Auflösung des Paradoxons müssen wir uns näher mit dem Begriff „annähernd gleich oft“ auseinandersetzen. Eine Spielerin oder ein Spieler, die oder der denkt der **Unterschied** zwischen Kopf und Zahl darf nur sehr klein sein, unterliegt einem Trugschluss. Das Bernoulli'sche Gesetz spricht nur davon, dass sich der **Quotient** aus der Anzahl von „Zahl- Würfen“ und der Gesamtanzahl der Würfe sich $\frac{1}{2}$ annähert. [49]
Möglich wäre auch die Formulierung: Der **Quotient** der Anzahl der „Kopf-“ und der Anzahl der „Zahl- Würfe“ strebt gegen 1. Der Erinnerungslosigkeit der Münze würde es widersprechen, wenn auch der **Unterschied** zwischen den „Kopf-“ und „Zahl- Würfen“ klein bleiben würde. [50]

[48] vgl. [22] S.42
[49] vgl. [22] S.42
[50] vgl. [22] S.42

Mit Hilfe der Konvergenz der Wahrscheinlichkeit kann man das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen formulieren:

> *Man sagt von einer Folge von [paarweise unabhängigen (Anm.)] Zufallsveränderlichen X_1, X_2,… sie konvergiere in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsveränderliche X, wenn von $|X_n - X| \; > \; \varepsilon$ für jedes positive ε gegen 0 strebt, d.h., wenn $P(\,|X_n - X|\,) \rightarrow 0$ ist.* [51]

Nun ist es aber möglich, dass zwar die Folge der Zufallsveränderlichen X_1, X_2,… in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, jedoch das arithmetische Mittel der Folge nicht.[52]

Das arithmetische Mittel der Folge ist definiert durch: [53]

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Bezeichnet man den Erwartungswert der Zufallsveränderlichen mit μ so ist auch folgende Gleichung äquivalent:

$$lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \; > \; \varepsilon \right) = 0$$

schwaches Gesetz der Großen Zahlen[54]

[51] [22] S.43
[52] [22] S.43
[53] [22] S.43f
[54] [15] S.280

Um die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit zu beweisen, verwendet man die Tschebyschew-Bienayméschen Ungleichung:

Besitzt eine Zufallsveränderliche X den Erwartungswert E und die Varianz D^2 so gilt:

$$P\,(|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E}| > \varepsilon) \leq \frac{\boldsymbol{D}^2}{\boldsymbol{\varepsilon}^2}$$ **Tschebyschew-Bienaymésche Ungleichung** [55]

Die Tschebyschew-Bienaymésche Ungleichung ist nach dem russischen Mathematiker P. L. Tschebyschew und nach I. J. Bienaymé, einem französischen Mathematiker, benannt. Beide hatten zur selben Zeit und sogar in derselben Fachzeitschrift (J. Math. Pures Appl., IX. Ser., 12 (1867)) ihre Ungleichung publiziert.[56]

Der Beweis für die Tschebyschew-Bienaymésche Ungleichung kann in [15] auf S.276f nachgeschlagen werden.[57]

Wendet man die Tschebyschew-Bienaymésche Ungleichung nun auf die unabhängigen Zufallsveränderlichen X_1, X_2, … an, die jeweils dieselbe Verteilung mit endlicher Varianz D^2 haben, dann sieht man, dass das arithmetische Mittel gegen den gemeinsamen Erwartungswert X_i in Wahrscheinlichkeit konvergiert.
Denn die Varianz dieses arithmetischen Mittels beträgt $\frac{D^2}{n}$ und konvergiert daher für $n \to \infty$ gegen 0.[58]

55 [22] S.44
56 vgl. [22] S.44
57 [15] S.276
58 vgl. [22] S.44

Zum besseren Verständnis, sei auch dies angegeben:

Die folgenden Schritte sind aus [15] *und* [22] *entnommen und leicht adaptiert.*

Als Zufallsvariable fasst man die absolute Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses A (z.B.: den Wurf eines Sechsers“ auf und bezeichnet sie als X_n. Sie gibt an, wie oft das Ereignis A bei n Versuchen des Experiments auftritt.

Diese Zufallsgröße sei nun binomialverteilt mit den Parametern n und p.
Somit gilt:

$E(X_n) = n \cdot p$ und $V(X_n) = n \cdot p \cdot (p\text{-}1)$, wobei $V(X_n) = D(X_n)^2$ ist

Die relative Häufigkeit des Auftretens von A bei n Versuchen kann als Bruch angegeben werden:

$$h_n = \frac{X_n}{n}$$

Unter der Voraussetzung der Binomialverteilung gilt also:

$$E(h_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n \cdot p}{n} = p$$

$$V(h_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n \cdot p \cdot (p-1)}{n^2} = \frac{p \cdot (p-1)}{n}$$

Zur Zufallsvariable h_n lautet die Tschebyschew-Bienaymésche Ungleichung nun:

$$P(|h_n - E(h_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(h_n)}{\varepsilon^2}$$

$$P(|h_n - E(h_n)| > \varepsilon) \leq \frac{p \cdot (p-1)}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Mit der Voraussetzung der Binomialverteilung und dem Grenzübergang n → ∞ folgt:

$$P(|h_n - p)| > \varepsilon) = 0$$

Anmerkung:
Als Bernoulliexperiment bezeichnet man ein Experiment mit genau zwei Ausgangsmöglichkeiten, das n-mal unabhängig voneinander bei denselben Bedingungen ausgeführt wird. [59]
Die Definition einer binomialverteilten Zufallsgröße und deren Eigenschaften kann man in dem Skriptum zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie[60] im SS 1999 von Prof. Franz Hofbauer nachschlagen.

Dieses Gesetz gehört zu den schwachen Gesetzen der Großen Zahlen. Die schwachen Gesetze der Großen Zahlen beinhalten Aussagen über Konvergenzen in Wahrscheinlichkeiten. Die starken Gesetze der Großen Zahlen beziehen sich auf Konvergenzen mit Wahrscheinlichkeit 1.[61]
Auf die starken Gesetze soll hier nicht weiter eingegangen werden.

[59] [9] S.253
[60] [10] S.30f
[61] vgl. [22] S.44

2.4 Folgerungen

Relative Häufigkeit eines „6ers“

Welche Aussagen lassen sich jetzt über die relative Häufigkeit eines „6ers“ beim Würfeln mit einem fairen Würfel treffen?

Die Gleichung:

$$P\,(|h_n - E(h_n)| > \varepsilon) \leq \frac{p \cdot (p-1)}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Lässt sich durch folgende Annahme etwas einschränken:[62]

Das Maximum des Zählers der rechten Seite der Gleichung beträgt $\frac{1}{4}$.

Somit ergibt sich:

$$P\,(|h_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{1}{4 \cdot n \cdot \varepsilon^2}$$

Zudem gilt:

$$P\,(|h_n - p| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot n \cdot \varepsilon^2}$$

Beispiel: Ist der Würfel ein „fairer Würfel“? [63]

Angenommen jemand möchte überprüfen, ob ein Würfel fair ist und beobachtet das Auftreten der „6er“.

Die Person überprüft 1000 Würfe und kann nun folgende Überlegung machen:

„Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit bei 1000 Würfen um höchstens 10% abweicht“

[62] vgl. [9] S.269

[63] vgl. [9] S.270

Es gilt:

$$P\,(|h_n - p| \leq 0{,}1)\ \geq\ 1 - \frac{1}{4 \cdot 1000 \cdot 0{,}01}$$

$$P\,(|\ h_n - p| \leq 0{,}1)\ \geq\ 97{,}5\%$$

Mit mehr als 97,5%-iger Wahrscheinlichkeit sollte die Abweichung der relativen Häufigkeit vom Erwartungswert nicht größer als 0,1 sein.

Nun können Würfelserien mit 1000 Würfen betrachtet werden:

Serie 1	**1000 Würfe**	**150 „6er“**
Serie 2	**1000 Würfe**	**250 „6er“**

- Bei der ersten Serie ist die relative Häufigkeit eines „6ers“ 0,15.

  $P(\left|\ 0{,}15 - \frac{1}{6}\right| \leq 0{,}1)\ \geq\ 97{,}5\%$ **dieser Würfel ist ziemlich sicher fair**
- Bei der zweiten Serie ist die relative Häufigkeit eines „6ers“ 0,25.

  $P(\left|\ 0{,}25 - \frac{1}{6}\right| \leq 0{,}1)\ \geq\ 97{,}5\%$ **dieser Würfel ist ebenfalls fair**

Man sieht also, dass auch große Abweichungen durchaus im Bereich des Möglichen und sogar Alltäglichen liegen.

Vergleich empirisches Gesetz der Großen Zahlen und Bernoullis Gesetz der Großen Zahlen:

Mit Hilfe des empirischen Gesetzes der Großen Zahlen, kann man voraussagen, dass sich die relativen Häufigkeiten für große Versuchszahlen stabilisieren. Ab wie vielen Versuchen so eine „Stabilisierung“ eintritt, kann man aber nicht näher erläutern.

Das Bernoullische Gesetz der Großen Zahlen ist eine Grenzwertaussage über die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses E in einer vorgegebenen ε -Umgebung um die unbekannte Wahrscheinlichkeit *P(E)* verbleibt. [64]

[64] vgl. [9] S.270

2.5 Empirische Versuche und Arbeitsblatt

Es wurde ein Applet entwickelt, das es erlaubt, eine große Anzahl von verschiedenen Würfelserien zu untersuchen.
Dieses Programm ist unter www.geogebratube.org/student/m132177 zu finden.

Die Idee für dieses Applet lieferte „Das Unterrichtsexperiment“ [65] von Dr. Manfred Borovcnik. Anstelle von Excel wurde hier das Programm Geogebra genutzt, da dieses auch problemlos auf Tablets und Smartphones einsetzbar ist.

Die Funktionsweise des Programms wird nun näher erläutert:
Beim ersten Teil (Abbildung 9) ist die Anzahl der Würfe für den Benutzer variabel. In das Feld „Anzahl der Würfe“ kann die Anzahl der gewünschten Würfe eingetragen werden. Zu große Werte führen jedoch mangels Rechenkapazität zeitweise zu Problemen.
Mit dem Button „Starte Würfelserie“ beginnt der Computer zu „würfeln“ – das heißt mit Hilfe eines Zufallsgenerators werden Zahlen zwischen 1 und 6 erzeugt. Die Häufigkeit der Zahlen wird vom Computer gespeichert und in einem Balkendiagramm dargestellt. Die Darstellung geschieht etwas zeitverzögert, sodass der Eindruck entsteht, es würde wirklich gewürfelt.
Nach Erreichen der vorgegeben Wurfanzahl stoppt der Computer.

Als Auswertung erscheint eine Liste mit der absoluten Häufigkeit der gewürfelten Ereignisse.
Da die Zahl 6 für uns besonders interessant ist, ist dieser Balken blau dargestellt.

Der zweite Teil des Programms verwendet immer die Werte aus dem ersten Teil.

[65] vgl. [26] S.302

Teil 1

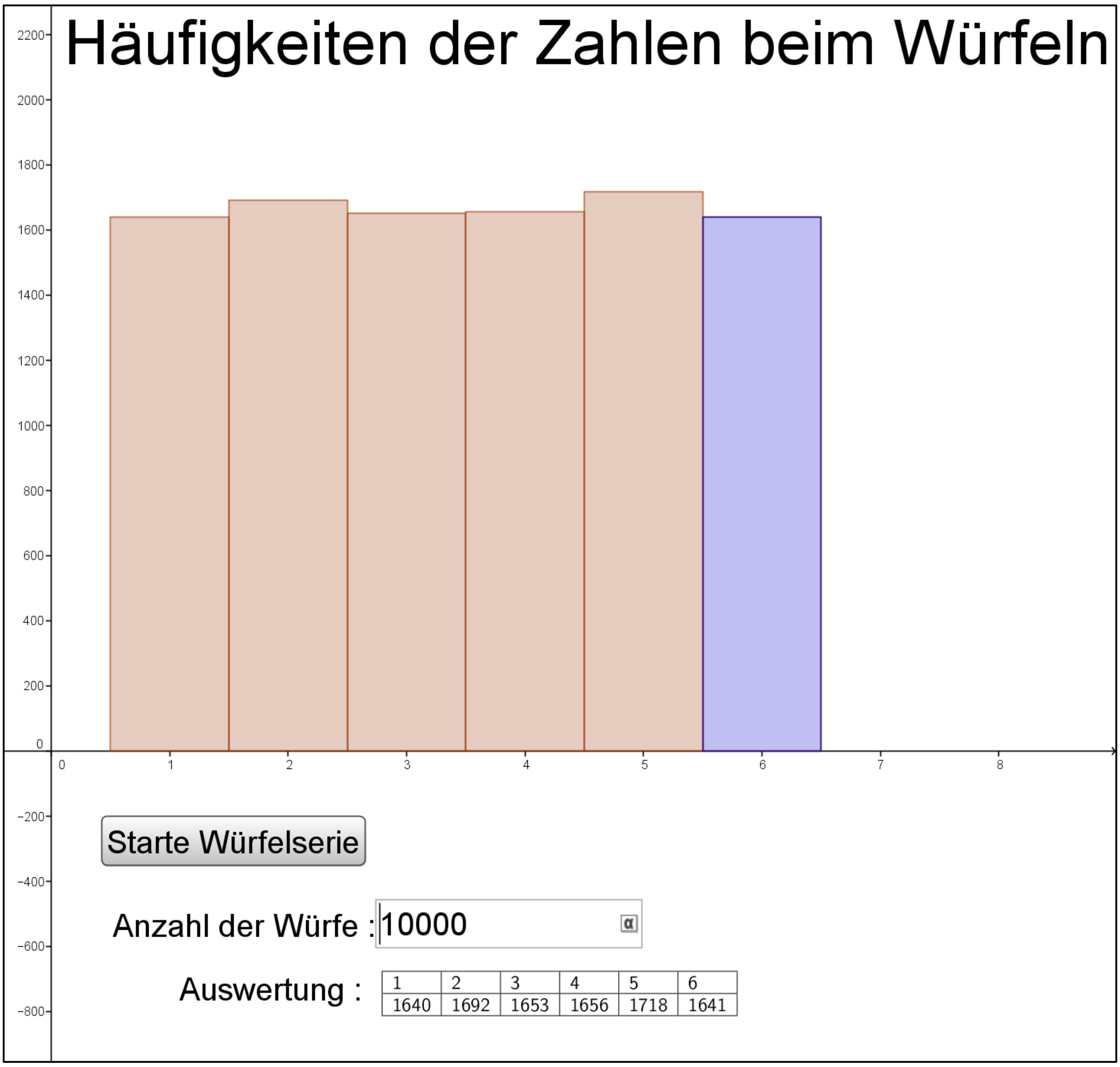


Abbildung 9: Fenster des Applets „Würfeln“, absolute Häufigkeiten

Hier wurde die Grafik einer Serie von 10 000 Würfen ausgewählt.

Der zweite Teil des Programms (Abbildung 10) beschäftigt sich mit der relativen Häufigkeit. Mit Hilfe des Schiebereglers kann der Benutzer den Wert für die ε- Umgebung auswählen und mit Hilfe des Kontrollkästchens lässt sich die entsprechende ε - Umgebung auch anzeigen.

Der Computer erzeugt basierend auf den Werten aus Teil 1 eine Grafik, in der die relative Häufigkeit eines „6ers“ zu verschiedenen Phasen (Würfen) der Wurfserie dargestellt wird:
Das bedeutet, dass nach jedem Wurf die relative Häufigkeit der „6er“ ausgewertet und dann entlang der Ordinatenachse aufgetragen wird. Auf der Abszisse sind die Werte der einzelnen Würfe dargestellt. Leider ist es aufgrund der Rechenleistung nicht möglich alle Punkte der Würfelserie darzustellen.

Zusätzlich wird eine grüne Linie für die vorausberechnete relative Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Würfeln einer Sechs“ angezeigt. Die wahlweise darstellbaren roten Linien zeigen die ε – Umgebung um die vorausberechnete relative Häufigkeit eines „6ers“ an.

Teil 2

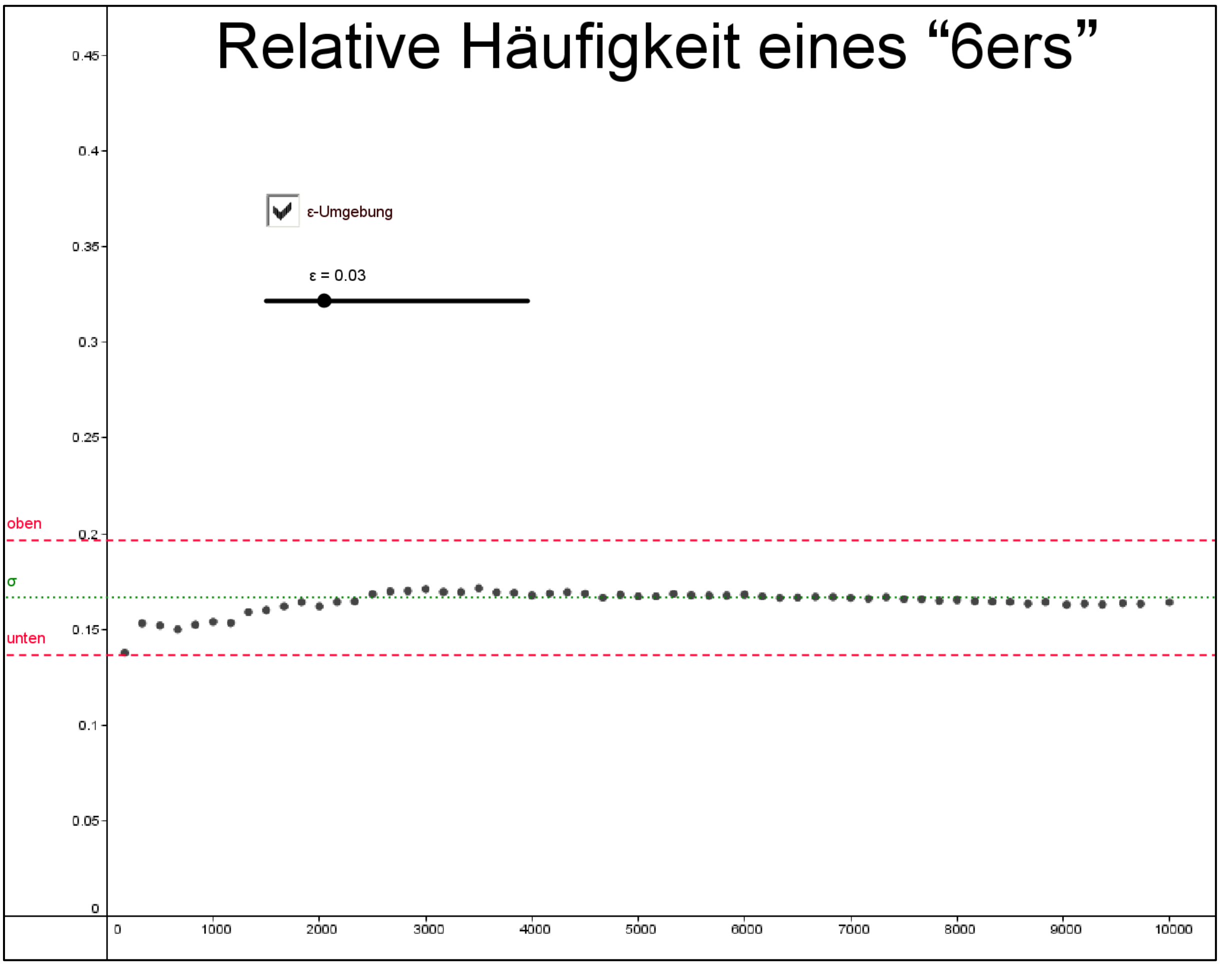


Abbildung 10: Fenster des Applets „Würfeln“, relative Häufigkeiten und ε - Umgebung

Ausgewählt wurde hier die Grafik mit den Werten:
Anzahl der Würfe = 10.000 und $\varepsilon = 0{,}03$

Graphisch betrachtet ist hier gut zu sehen, dass sich die relative Häufigkeit der „6er“-Würfe der tatsächlichen Häufigkeit zuerst zwar annähert, sich dann aber wieder entfernt.

2.6 Motivation für die Verwendung eines Applets

Die Entscheidung ein Applet zu verwenden, anstatt Stift und Papier, begründet sich durch folgende, didaktische Überlegung:

> *„Auch nach sehr langen Versuchsreihen ist es unseres Erachtens grundsätzlich unmöglich Schüler davon zu überzeugen, daß [sic]* $\frac{1}{6}$ *die Zahl ist, um die die relativen Häufigkeiten pendeln.*“ [66]

Hier ist es jeder Schülerin und jedem Schüler möglich, beliebig viele von diesen „langen Versuchsreihen“ hintereinander „durchzuspielen“. Dies geschieht noch dazu in sehr kurzer Zeit und bei jedem Benutzer mit unterschiedlichem Ausgang - die Überzeugungskraft ist somit viel stärker.

Der Einsatz neuer Medien im Unterricht ist zudem das Ziel von diversen Projekten im Unterrichtsministerium. So heißt es:

„Das Projekt KidZ (Laufzeit: 2013/14 – 2016/17) will die absehbare Zukunft, die „Normalität des Klassenzimmers“ im Jahr 2020 mit selbstverständlich integrierten und jederzeit verfügbaren digitalen Endgeräten mit den damit verbundenen Kommunikations-, Rezeptions- und Interaktionsmöglichkeiten bewusst vorwegnehmen und erforschen, genauso wie sich zB das eLSA-Netzwerk vor ca. 10 Jahren auf den Weg zu etwas gemacht hat, was nunmehr mit dem digi.komp-Konzept gelebte bzw. lebbare und jedenfalls von allen Schulen machbare und erwartbare Realität geworden ist“ [67]

Die Problematik mit Zufallszahlen, die durch den Computer generiert werden, wird im Anhang näher erläutert.

Anbei findet sich noch ein Arbeitsblatt für Schülerinnen und Schüler zu dem Programm.

---

[66] [14] S.180
[67] [2]

2.7 Arbeitsblatt

Das empirische Gesetz der Großen Zahlen

Bei einem fairen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit eine „Sechs" zu würfeln $\frac{1}{6}$.
Ob nun bei jedem sechsten Wurf auch ein „Sechser" auftritt, wollen wir näher untersuchen.

1. Öffne dazu folgendes Applet: http://www.geogebratube.com/student/m132177
   Betrachte zunächst nur das linke Fenster!

   Führe 3 Würfelserien mit je 18 Würfen durch und trage die Anzahl der „Sechser" in die Tabelle ein!

18 Würfe	Runde 1	Runde 2	Runde 3
Anzahl der „Sechser"			

2. Wie groß ist jeweils die relative Häufigkeit eines „Sechsers" in den drei Runden?

18 Würfe	Runde 1	Runde 2	Runde 3
Relative Häufigkeit eines „Sechser"			

   Welche Aussage kannst du treffen, wenn du die relativen Häufigkeiten mit $\frac{1}{6}$ vergleichst?

3. Führe nun je drei Würfelserien mit 180 bzw. 1800 Würfen durch und berechne die relativen Häufigkeiten eines „Sechsers" in den einzelnen Runden!

180 Würfe	Runde 1	Runde 2	Runde 3
Anzahl der „Sechser"			
Relative Häufigkeit eines „Sechser"			

1800 Würfe	Runde 1	Runde 2	Runde 3
Anzahl der „Sechser"			
Relative Häufigkeit eines „Sechser"			

   Vergleiche die Ergebnisse mit jenen aus Aufgabe 2 bzw. mit $\frac{1}{6}$! Gibt es etwas Auffälliges?

4. Betrachte nun auch das rechte Fenster des Applets und führe noch einige Würfelserien (die Anzahl der Würfe kannst du selbst bestimmen) durch. Welche Aussage kannst du über die relative Häufigkeit eines „Sechsers" treffen, wenn die Anzahl der Würfe zunimmt?

3. Das Geburtstagsparadoxon

Dieses Kapitel handelt vom Geburtstagsparadoxon und vom Geburtstagsproblem. Es ist nach Vorlage des Kapitels „Das Geburtstagsproblem“ [68] *aufgebaut, beinhaltet aber eigene Aspekte und Ideen bezüglich Didaktik und Abfolge. Verwendete Formeln oder Schlussfolgerungen werden nicht extra zitiert.*

3.1 Das Paradoxon

Das Geburtstagsproblem könnte aus heutiger Sicht wie folgt dargestellt werden:
„Auf einem Skikurs mit 72 Schülerinnen und Schülern taucht die Frage auf, wie wahrscheinlich es denn sei, dass zwei Kinder am gleichen Tag Geburtstag hätten.“
Mögliche Fehlinterpretationen dieser Fragestellung könnten sich ergeben, wenn man fälschlicherweise fragt, wie wahrscheinlich es ist, dass zwei Kinder am 1. September Geburtstag haben. Ebenso wäre die Fragestellung verändert, wenn man eine Schülerin oder einen Schüler sucht, der an einem bestimmten Tag (dem Geburtstag des Lehrers) ebenfalls Geburtstag hat.

Diese Fragestellungen sollen in diesem Kapitel behandelt und voneinander unterschieden werden.
Der Einfachheit halber wird jedoch nicht die unterschiedliche Häufigkeit der Geburtstage an den einzelnen Tagen, Wochen und Monaten berücksichtigt. [69]
Man behandelt das Problem mit der Laplace-Annahme [70], dass die Wahrscheinlichkeit Geburtstag zu haben an jedem Tag gleich ist.
Eine weitere Vereinfachung ist die Beschränkung auf Jahre ohne Schalttage.

Wären auf dem Skikurs 366 Kinder anwesend, so würden mit 100%iger Sicherheit zwei Kinder am gleichen Tag Geburtstag feiern. Bei 365 Schülerinnen und Schülern wäre es möglich, dass jeder von ihnen an einem anderen Tag Geburtstag hätte.
Uns interessiert nun diese Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Fall eintritt.

[68] vgl. [9] S.201
[69] vgl. [21]
[70] vgl. [9] S.139

Die Anzahl der anwesenden Kinder wird mit n benannt.

Wesentlich ist es, die drei folgenden Ereignisse zu unterscheiden:

- *E_1: Mindestens zwei der n Kinder haben am gleichen Tag Geburtstag*
  (dies ist das gesuchte Ereignis des klassischen Geburtstagsproblems)
- *E_2: Mindestens zwei der n Kinder haben am 1. September Geburtstag*
- *E_3*: Mindestens ein Kind *hat am gleichen Tag Geburtstag wie der Lehrer.*

Betrachtung des Ereignisses E_1:

Hierzu müssten die einzelnen Fälle „2-“, „3-“, „ …- Kinder haben am gleichen Tag Geburtstag“ betrachtet werden. Als Vereinfachung bietet es sich an, das Gegenereignis

- $\overline{E_1}$: „*Alle n Kinder haben an verschiedenen Tagen Geburtstag*“

zu untersuchen.

Mögliche Fälle gibt es: 365^n.

Sollen alle n Personen an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben, so ergibt sich:

$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$

Damit folgt die Wahrscheinlichkeit:

$$P(E_1) = 1 - P(\overline{E_1})$$

$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

Betrachtet man nun die 72 Kinder aus dem Beispiel zu Beginn, sieht man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Kinder am gleichen Tag Geburtstag haben, nahezu 1 ist.

Ab 23 Schülerinnen und Schülern ist es wahrscheinlicher, dass zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, als dass dies nicht so ist.

Betrachtung des Ereignisses E_2:

Auch hier ist es günstiger, das Gegenereignis zu betrachten:

- $\overline{E_2}$: Alle n Kinder haben nicht am 1.September Geburtstag oder genau ein Kind hat am 1.September Geburtstag.

Hat keine Person am 1.September Geburtstag, so ergibt sich: $\frac{364^n}{365^n}$

Hat genau eine Person am 1.September Geburtstag, so ergibt sich: $\frac{n \cdot 364^{n-1}}{365^n}$

Damit folgt die Wahrscheinlichkeit:

$$P(E_2) = 1 - P(\overline{E_2})$$
$$= 1 - \left(\frac{364^n}{365^n} + \frac{n \cdot 364^{n-1}}{365^n} \right)$$

<u>Betrachtung des Ereignisses E_3:</u>

Wie gewohnt, erfolgt die Berechnung mit Hilfe des Gegenereignisses:

- $\overline{E_3}$: Keine der n Personen im Raum hat am gleichen Tag Geburtstag wie der Lehrer.

Mögliche Fälle gibt es: 365^n.
Da ein Tag nicht gewählt werden soll: 364^n.

Damit folgt die Wahrscheinlichkeit:

$$P(E_2) = 1 - P(\overline{E_3})$$
$$= 1 - \left(\frac{364^n}{365^n} \right)$$

Hier wäre die Wahrscheinlichkeit, dass eines der 72 Kinder am selben Tag wie der Lehrer Geburtstag hätte, nur etwa 18%. Um hier mit mehr als 50%iger Wahrscheinlichkeit eine Schülerin oder einen Schüler zu finden, müsste die Kindergruppe aus 253 Personen bestehen.

Der Unterschied dieser drei Berechnungen sticht ins Auge. Dennoch ist es sowohl bei Schülerinnen und Schülern als auch bei Studierenden bis heute ein zum Teil großes Problem:

> „*Und gerade weil die Verteilung zufällig ist und jeder Tag wie jeder andere betroffen sein kann, so erscheint es ‘natürlich’, ‘normal’, ‘plausibel’, ja ‘gerecht’, dass möglichst jeder Tag einmal dran kommt.*“ [71]

Die genaue Formulierung des Ereignisses ist bei diesen Berechnungen besonders wichtig, da es eben sonst zu Trugschlüssen kommen kann und die Ergebnisse falsch sind.
Zwar handelt es sich hier nicht wirklich um ein Paradoxon, jedoch sind die Resultate äußerst erstaunlich und überraschend.

[71] [9] S.201

Eine andere unerwartete Gegebenheit ist auch, dass zwar bei 57 anwesenden Personen die Wahrscheinlichkeit schon über 99,0% liegt, dass zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben - jedoch weitere 11 Personen notwendig sind, um die Wahrscheinlichkeit auf 99.9% zu erhöhen.

Es ist äußerst erstaunlich, dass hier weitaus mehr Personen notwendig sind. [72]

[72] vgl. [22] S.67

3.2 Empirische Versuche

Mit Geogebra wurde ein Programm geschrieben, mit dessen Hilfe man das Paradoxon näher betrachten kann. Es ist unter http://www.geogebratube.com/student/m137265 zu finden.

Dieses Applet kann zum einen zur genauen Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ereignisse:

- *Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben*
- *Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person an deinem Geburtstag auch Geburtstag hat*

verwendet werden.
Die Anzahl der Personen im Raum (der Anwender selbst zählt nicht mit) kann in ein Eingabefeld eingegeben werden. Mit Hilfe der im Kapitel bereits erläuterten Formeln wird hier die Wahrscheinlichkeit in Prozent auf vier Dezimalstellen genau berechnet.

Mit Hilfe des Schiebereglers kann die Anzahl n der Personen im Raum verändert werden. Die jeweilige Wahrscheinlichkeit wird dann in der Grafik eingezeichnet. Die Abszisse stellt die Anzahl der Personen dar und die Ordinate die jeweilige Wahrscheinlichkeit in Prozent.
Mit dem Button „Spur löschen“ kann man das Arbeitsblatt wieder in den Ausgangszustand zurücksetzen.
Der vertikale Schieberegler dient der Einstellung einer gewünschten „Sicherheitsgrenze“. Als Hilfe dient hier auch ein Eingabefeld, um die Werte genau eingeben zu können. Jede Anzahl von Personen, die zur Folge haben würde, dass die Wahrscheinlichkeit von zwei Personen mit dem gleichen Geburtstag größer oder gleich dieser Grenze ist, wird mit veränderter Farbe dargestellt.
Eine zusätzliche Funktion des Programms ist, dass man auch Schaltjahre mit dem Feld „Schaltjahr“ berücksichtigen kann. Die Anzahl der Tage wird dann von 365 auf 366 erhöht.

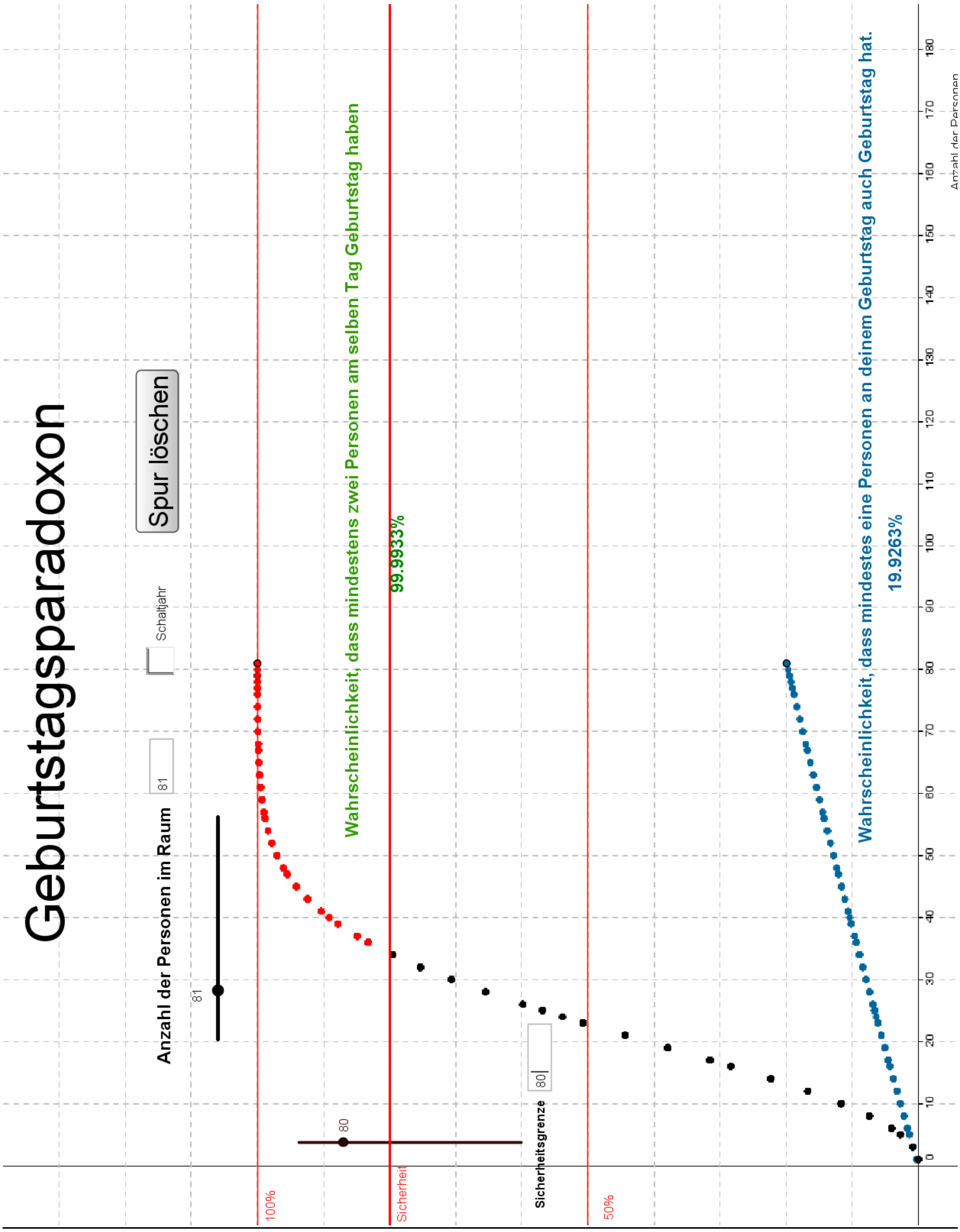


Abbildung 11: Fenster des Applets „Geburtstagsparadoxon“

Ausgewählt wurde hier eine Grafik mit den Werte n = 81 und der Grenze 80%.
Mit diesem Applet ist es möglich, rasch Werte zu finden, für die die Berechnung zum Teil sehr aufwendig wäre.

So ist es sehr einfach, folgende Tabelle zu erstellen:

Gruppengröße	**E_1 Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben (gerundet auf 2. DZ)**
2	0,27%
3	0,82%
4	1,64%
…	
21	44,37%
22	47,57%
23	50,73
…	
40	89,12
…	
50	97,03
…	
60	99,41
…	
67	99,84
68	99,87

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeiten für Ereignis E_1 in Abhängigkeit der Gruppengröße

Ausgewählt wurden hier nur einige besonders interessante Werte. So ist zu sehen dass ab einer Gruppengröße von 23 Kindern die Wahrscheinlichkeit über 50% liegt. Des Weiteren sieht man, dass die Änderung der Gruppengröße bei höheren Werten nicht mehr so stark zu einer Änderung der Wahrscheinlichkeit beiträgt.

3.3 Motivation für die Verwendung eines Applets

Auch hier stellt sich wieder die Frage, warum ein Applet sich besser eignet als der klassische Zugang mit Stift und Papier.

Abseits der Berechnungen mit expliziten Formeln können Schülerinnen und Schüler hier sehr einfach zu Werten kommen und Veränderungen der Wahrscheinlichkeit erforschen.

Dies ist besonders wichtig, da Aufgaben aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei vielen Kindern Interesse wecken und ein größeres Verlangen nach Lösungen an den Tag legen, als dies bei anderen Themenbereichen der Fall ist.[73]

Da die mathematischen Fähigkeiten der Lernenden aber unterschiedlich sind, wäre es sehr hinderlich, jene auszuschließen, die bei der Berechnung mittels Formeln Schwierigkeiten haben.

So ist es möglich, auch eben diesen Kindern einen Zugang zu den Lösungen der Fragestellungen zu gewähren.

Es steht hier mit dem Applet nicht die Fertigkeit H2 (Rechnen und Operieren) sondern H3 (Interpretieren) im Vordergrund. Die Handlungsbereiche sind den mathematischen Kompetenzen[74] der Sekundarstufe I und II entnommen.

Zudem gilt wie bereits im Kapitel „Das Gesetz der Großen Zahlen“ angesprochen, dass somit die Einbindung elektronischer Hilfsmittel in den Unterricht gewährleistet ist.

Der Inhaltsbereich H2 darf natürlich nicht außer Acht gelassen werden. So ist es durchaus auch sinnvoll, diese Aufgabe ohne den Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln zu lösen.

Dieser Punkt wird im Arbeitsblatt besonders behandelt.

Anbei findet sich noch ein Arbeitsblatt für Schülerinnen und Schüler zu dem Programm.

[73] vgl. [14] S.25

[74] [1]

3.4 Arbeitsblatt

Das Geburtstagsparadoxon

An einem Skikurs nehmen 72 Schülerinnen und Schüler teil. Während einer Abendveranstaltung taucht folgende Frage auf:

> **Frage 1:**
>
> Ist es wahrscheinlicher, dass unter den anwesenden Kindern zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben, oder nicht?

Um der Sache auf den Grund zu gehen, fragt ein Lehrer:

> Frage 2:
>
> Wie viele Personen haben am 1. September (dem Schulbeginn) Geburtstag?

1. Wird bei beiden Fragestellung nach derselben Wahrscheinlichkeit gesucht oder hat der Lehrer eine ganz andere Frage gestellt? Begründe deine Antwort durch eine logische Argumentation.

Unter dem Link http://www.geogebratube.com/student/m137265 ist ein Programm zu finden, mit dessen Hilfe du die folgenden Fragestellungen beantworten kannst:

2. Wie viele Personen müssen in einem Raum sein, sodass die Wahrscheinlichkeit größer ist, dass zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben, als, dass dem nicht so ist?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Kinder am 1. September Geburtstag haben?
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 72 Schülerinnen und Schülern zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?
5. Wie viele Personen müssen in einem Raum sein, sodass mit einer Sicherheit von 90% gesagt werden kann, dass es mindestens zwei Personen mit demselben Geburtstag gibt?

4. Das Simpson-Paradoxon

„Wenn man Statistik anwendet, steckt der Teufel oft im Detail. Manchmal suggerieren Zahlen ohne böse Absicht der Beteiligten das Gegenteil des eigentlichen Sachverhalts.“ [75]

4.1 Das Paradoxon

Betrachtet man ein bestimmtes Merkmal zuerst in verschiedenen Gruppen und dann in der Gesamtheit, so kann dies die Sichtweise sehr stark verändern. Dieses Phänomen hat der amerikanische Statistiker Edward Hugh Simpson ausführlich in dem Artikel „The Interpretation of Interaction in Contingency Tables“ behandelt und zu seinen Ehren wird eben dieser Sachverhalt „Simpson-Paradoxon“ genannt. [76]

Das folgende Beispiel ist aus dem Buch „Der Hund, der Eier legt“ von Hans-Peter Beck-Bornholdt und Hans-Hermann Dubben entnommen. [77]
Ideen und verschiedene Aspekte des Beispiels werden nicht extra zitiert. Wörtliche Zitate werden angeben.

Im Jahr 1973 bewarben sich an der Universität von Kalifornien in Berkeley 8442 Männer und 4321 Frauen. Nach dem Auswahlverfahren wurde festgestellt, dass 44% der Männer einen Studienplatz bekamen, aber nur 35% der Frauen zum Studium zugelassen wurden. Der Aufschrei in der Bevölkerung war groß und die Universität wurde der Diskriminierung von Frauen bezichtigt. Dies hatte eine sorgfältige Prüfung der Daten zur Folge, bei der festgestellt wurde, dass an den einzelnen Departements Frauen gegenüber Männern teilweise sogar bevorzugt wurden – was auch ein erklärtes Ziel der Universität war. Bei Betrachtung der gesamten Studentinnen und Studenten ergab sich aber der bereits erwähnte niedrige Prozentsatz der Zulassungen bei den Frauen. Was war also geschehen?
Die weiblichen Studienanwärterinnen hatten sich vorzugsweise in Departements mit einer niedrigen Zulassungsquote beworben, Männer an allen Departements in etwa gleicher Aufteilung. Dies führte zu einem Paradoxon.

[75] [9] S.120
[76] vgl. [9] S.122
[77] vgl. [6] S.184

Um den Sachverhalt näher zu klären, kann man folgende Tabellen und Erklärungen betrachten:

Die Idee für dieses Beispiel ist durch die Homepage der Hochschule Fulda entstanden: http://www2.hs-fulda.de/~grams/dnkfln.htm#_Xenophobie.
Aus didaktischen Gründen wurde das Beispiel etwas abgewandelt.

In einer fiktiven Stadt gibt es zwei Bevölkerungsgruppen: Gruppe A und Gruppe B. Des Weiteren besteht die Stadt aus zwei Stadtteilen, die durch einen Fluss getrennt sind: Stadtteil Unterfluss und Stadtteil Oberfluss.
Betrachtet wird nun zuerst der Anteil der kriminellen Personen jeder der zwei Gruppen in den einzelnen Stadtteilen.

Stadtteil Unterfluss	**Bevölkerung**	**Kriminelle**	**Prozentsatz**
Gruppe A	10.000	100	1%
Gruppe B	10.000	100	1%

Tabelle 2: Kriminalitätsstatistik Stadtteil Unterfluss

Stadtteil Oberfluss	**Bevölkerung**	**Kriminelle**	**Prozentsatz**
Gruppe A	2.000	2	0,1%
Gruppe B	18.000	18	0,1%

Tabelle 3: Kriminalitätsstatistik Stadtteil Oberfluss

Anhand der Tabelle 2 und 3 kann man erkennen, dass beide Bevölkerungsgruppen in den einzelnen Stadtteilen prozentuell gesehen „gleich kriminell“ sind. Außerdem ist zu erkennen, dass im Stadtteil Oberfluss deutlich weniger Verbrechen verübt werden, als im Stadtteil Unterfluss.

Eine Zusammenfassung für die ganze Stadt ergibt sich, wenn man die Bevölkerung und die Anzahl der kriminellen Personen der zwei Stadtteile addiert.

gesamte Stadt	**Bevölkerung**	**Kriminelle**	**Prozentsatz**
Gruppe A	12.000	102	0,85%
Gruppe B	28.000	118	0,42%

Tabelle 4: Kriminalitätsstatistik gesamte Stadt

Paradoxerweise ist nun die Kriminalität prozentuell bei der Gruppe A mehr als doppelt so groß als bei Gruppe B.
Zwar sind beide Gruppen in beiden Stadtteilen gleich kriminell, betrachtet man aber die gesamte Stadt, so weist Gruppe A eine viel höhere Kriminalitätsrate auf.

In der Literatur sind zahlreiche Verweise und Beispiele zum Simpson-Paradoxon zu finden.
Da im Mathematikunterricht aber auch ein Schwerpunkt auf „*Mensch und Gesellschaft*" [78] gelegt werden soll, bietet sich dieses Beispiel besonders an. Es kann auch als Ausgangspunkt für Diskussionen über die Arbeit mit Statistiken in der Politik herangezogen werden.

4.2 Erklärungen zum Paradoxon

Eine graphisch sehr anschauliche Erklärung gibt Jörg Mayer in der Zeitschrift „Stochastik im Schulunterricht" in seinem Kapitel „Simpson". [79]
Er vergleicht das Paradoxon mit dem Zusammenschütten von unterschiedlich stark konzentrierten Säuren:

N_1 Liter einer p_1- prozentigen Säure werden mit N_2 Liter einer p_2- prozentigen Säure vermengt. Als Ergebnis erhält man $(N_1 + N_2)$ Liter p- prozentige Säure, wobei gilt:[80]

$$p = \frac{N_1 \cdot p_1 + N_2 \cdot p_2}{N_1 + N_2}$$

[78] vgl. [3]
[79] [16] S.42f
[80] vgl. [16] S.42f

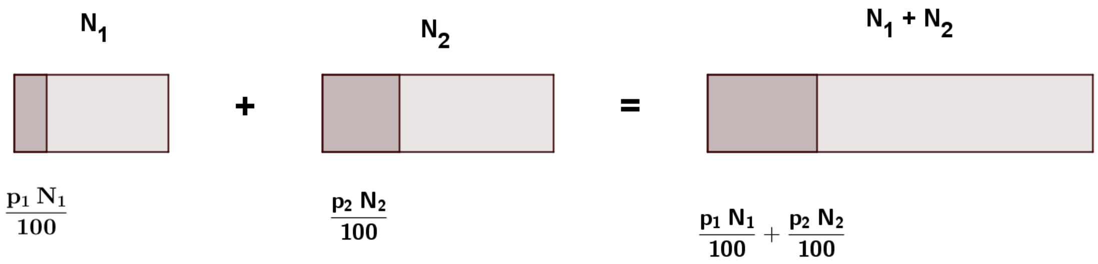


Abbildung 12: Mischung von verschieden konzentrierten Säuren [81]

Nun kann man diese Teilverhältnisse auch visualisieren:

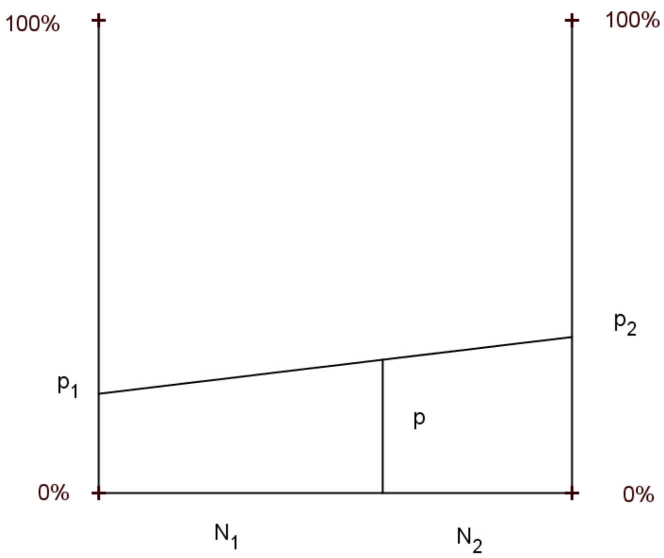


Abbildung 13: Visualisierung der Teilverhältnisse [82]

In Abbildung 13 sieht man, dass durch die unterschiedlichen Größen von N_1 und N_2 der Abschnitt für p nicht genau in der Mitte liegt, sondern etwas in Richtung p_2 verschoben ist. Je nach Verhältnis der Menge der Ausgangssäuren verschiebt sich also der Säuregehalt der Mischlösung.

Nun soll auch das Beispiel zur Stadt visualisiert werden. Dies geschieht mit einem Applet.

Dieses ist unter http://tube.geogebra.org/student/m219545 zu finden.

[81] nach [16]
[82] nach [16]

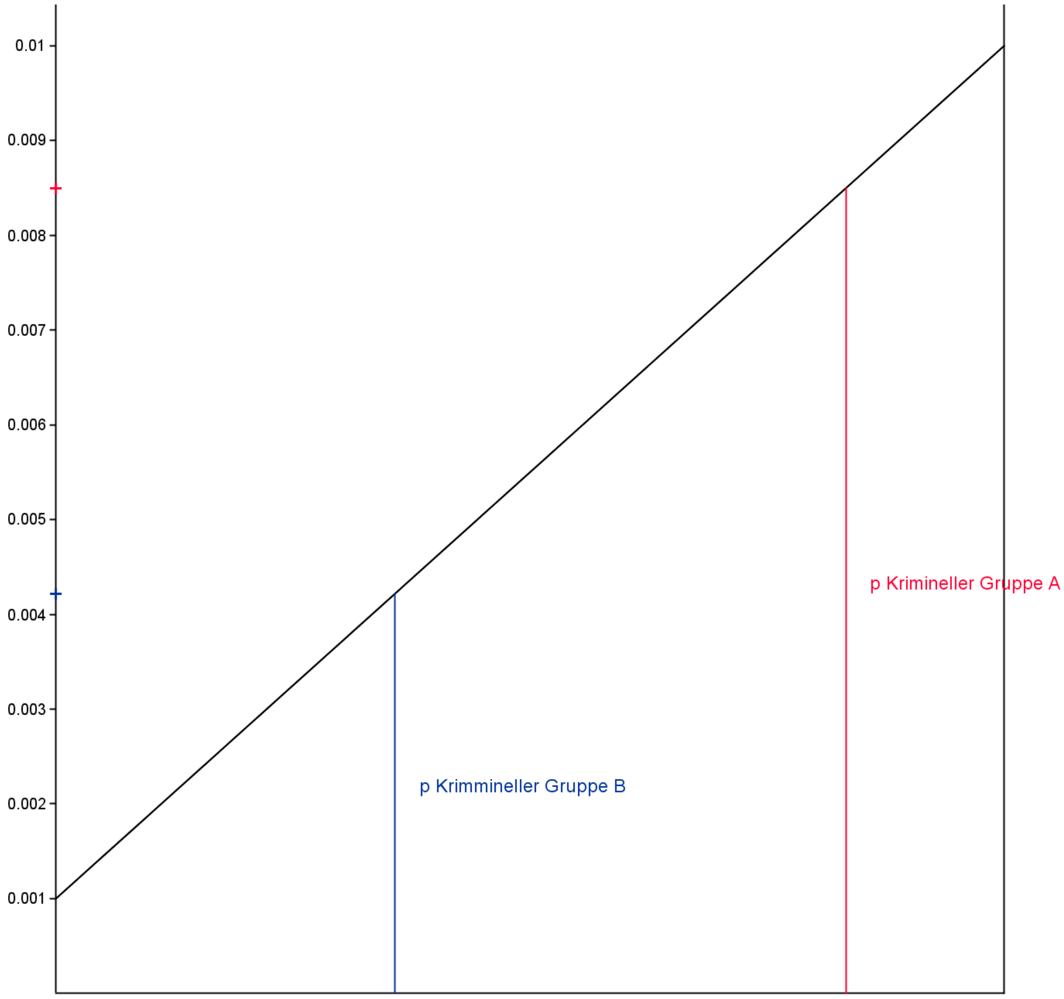


Abbildung 14: Ausschnitt aus einem Fenster des Applets „Simpson-Paradoxon“

Man kann in Abbildung 14 erkennen, dass der relative hohe Anteil der Gruppe A an der Bevölkerung des Stadtteils Unterfluss – in welchem ja wie bereits erwähnt deutlich mehr Verbrechen verübt werden – eine hohe Auswirkung auf den Prozentsatz der Kriminellen unter den Personen der Gruppe A hat. Da die meisten Personen der Gruppe B im Stadtteil Oberfluss wohnen, ist es hier genau gegenläufig.

Da diese Visualisierung alleine noch nicht zum angestrebten Durchblick führt [83], ist das Applet auch interaktiv gestaltet und es lassen sich einige Parameter ändern. Die Grunddaten sind aus den Tabellen 2 und 3 übernommen.

[83] vgl. [16] S.44

Stadtteil Unterfluss	Bevölkerung	Kriminelle	Prozentsatz
Gruppe A	8940	100	0.01119
Gruppe B	8820	100	0.01134
–	–	–	–
Stadtteil Oberfluss	Bevölkerung	Kriminelle	Prozentsatz
Gruppe A	3060	2	0.00065
Gruppe B	19180	18	0.00094

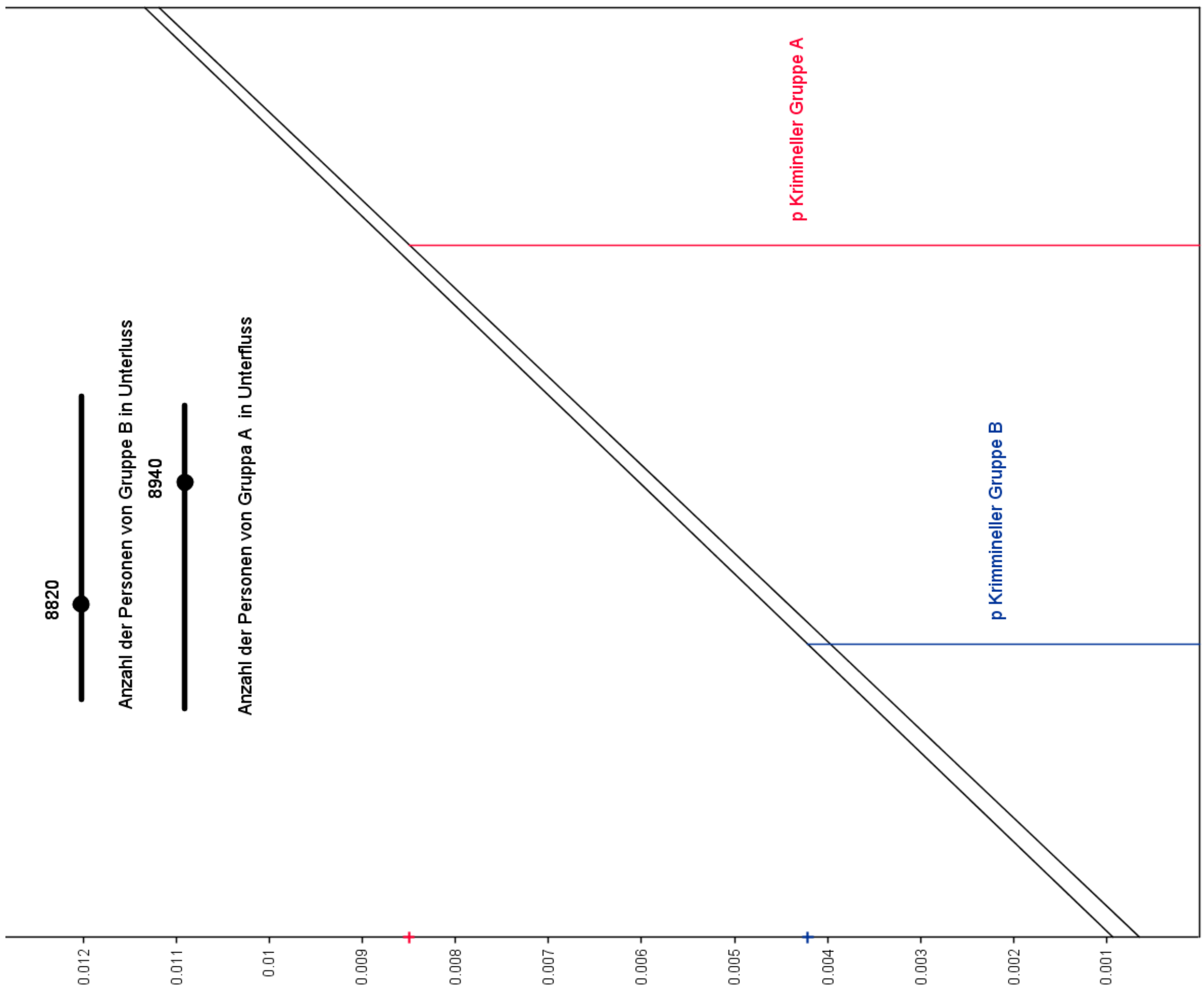


Abbildung 15: Fenster des Applets „Simpson-Paradoxon“

Die Gesamtzahl der Personen der einzelnen beiden Gruppen in der gesamten Stadt ist konstant. Die Verteilung der Personen auf die einzelnen Stadtteile ist durch den Benutzer frei wählbar. Die betreffenden Werte können aus der Tabelle neben der Grafik abgelesen werden. So bieten sich viele Möglichkeiten, die Werte näher zu untersuchen und auf Paradoxa aufmerksam zu werden.

Wie man in Abbildung 15 sieht, ist es auch möglich zu zeigen, dass Gruppe A in beiden Stadtteilen eine geringere Kriminalitätsrate aufweist als Gruppe B – dennoch wäre dann bei Betrachtung der gesamten Stadt die Kriminalitätsrate unter den Personen der Gruppe A höher.

Rückblickend ist so auch das Beispiel der Universität Berkeley zu erklären. Wie bereits erwähnt, bewarben sich viele Studentinnen bei Departements mit einer höheren Ablehnungsrate. So wirkt sich eben diese höhere Ablehnungsrate viel stärker auf den Prozentsatz der Gesamtablehnungen aus. Eine Visualisierung der Thematik ist aber hier nur schwer umsetzbar.

> *„Simpsons Paradoxon ist außerordentlich gefährlich, denn es ist leicht zu übersehen.“* [84]
> *„Die Tragweite von Simpsons Paradoxon ist daher kaum zu überschätzen.“* [85]

Werden beispielsweise bei großen Studien zu Arzneimitteln und Therapieansätzen verschiedene Einzelstudien von Krankenhäusern zu einer Gesamtstudie zusammengefasst, so ist es möglich, dass Daten verfälscht oder unterschlagen werden. [86] Ebenso ist es möglich, dass sich eine Therapie bei Einzelbetrachtung als wirksam erweist, jedoch bei einer Zusammenfassung der Ergebnisse eine schlechtere oder sogar negative Wirkung zeigt. [87]
Im folgenden Kapitel ist dazu ein Beispiel angeführt.

[84] [6] S.184
[85] [6] S.185
[86] vgl. [6] S.184
[87] vgl. [22] S.133

4.3 Ein Fallbeispiel zum Simpson- Paradoxon

Wie bereits erwähnt, tritt das Simpson- Paradoxon häufig bei klinischen Studien auf. Dieses Kapitel bietet einen Einblick in die dadurch entstehende Problematik.

Die Daten sind aus [22] *entnommen.*

Ein Medikament wird bei mehreren Gruppen auf seine Wirksamkeit überprüft. Die Studie besteht aus jeweils zwei Teilstudien bei Männern und Frauen. Abschließend wird dann die gesamte Gruppe betrachtet:

Männer

	nach Behandlung	ohne Behandlung
geheilt	700	80
nicht geheilt	800	130

Frauen

	nach Behandlung	ohne Behandlung
geheilt	150	400
nicht geheilt	70	280

Zusammen

	nach Behandlung	ohne Behandlung
geheilt	850	480
nicht geheilt	870	410

Tabelle 5: Studie zur Wirksamkeit eines Medikaments

Sowohl bei den Männern, als auch bei den Frauen war die Heilungsrate wesentlich höher, wenn sie mit dem Medikament behandelt wurden. [88]

[88] vgl. [22] S.133

Betrachten wir zuerst die Gruppe der Männer:

Die Heilungsrate mit Behandlung beträgt: $\frac{700}{1500}$ = 0,47

Die Heilungsrate ohne Behandlung beträgt: $\frac{80}{210}$ = 0,38

Die statistische Signifikanz soll mit einem χ^2 - Unabhängigkeitstest nachgewiesen werden.

Die Vorgehensweise beim Unabhängigkeitstest kann bei [10] *nachgelesen werden. Die einzelnen Schritte werden hier nicht näher erläutert.*

	nach Behandlung	ohne Behandlung	
geheilt	700	80	780
nicht geheilt	800	130	930
	1500	210	1710

Somit ergibt sich:

	nach Behandlung	ohne Behandlung
geheilt	684,21	95,79
nicht geheilt	813,78	114,21

Die Nullhypothese H_0 lautet: Medikamentengabe und Heilungserfolg sind unabhängig.

$$U = \frac{(700-684{,}21)^2}{684{,}21} + \frac{(80-95{,}79)^2}{95{,}79} + \frac{(800-813{,}78)^2}{813{,}78} + \frac{(130-114{,}21)^2}{114{,}21} = 5{,}38$$

Für α = 0,05 und f = 1 ergibt sich aus der Tabelle (siehe Anhang 3) der Wert 3,841 Da dieser Wert kleiner als 5,38 ist, kann die Nullhypothese abgelehnt werden.

Bei Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 können wir es als erwiesen ansehen, dass Medikamentengabe und Heilungserfolg bei den Männern nicht unabhängig sind.

<u>Betrachten wir nun die Gruppe der Frauen:</u>

Die Heilungsrate mit Behandlung beträgt: $\frac{150}{220} = 0{,}68$

Die Heilungsrate ohne Behandlung beträgt: $\frac{400}{680} = \ 0{,}59$

Auch hier wollen wir die statistische Signifikanz mit einem χ^2 - Unabhängigkeitstest nachweisen.

	nach Behandlung	ohne Behandlung	
geheilt	150	400	550
nicht geheilt	70	280	350
	220	680	900

Somit ergibt sich:

	nach Behandlung	ohne Behandlung
geheilt	134,44	415,56
nicht geheilt	85,56	264,44

Die Nullhypothese H_0 lautet: Medikamentengabe und Heilungserfolg sind unabhängig.

$$U = \frac{(150-134{,}44)^2}{134{,}44} + \frac{(400-415{,}56)^2}{415{,}56} + \frac{(70-85{,}56)^2}{85{,}56} + \frac{(280-264{,}44)^2}{264{,}44} = 6{,}13$$

Da 6,13 größer als 3,841 ist, kann die Nullhypothese abgelehnt werden.
Bei Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 können wir es als erwiesen ansehen, dass Medikamentengabe und Heilungserfolg bei den Frauen nicht unabhängig sind.

Sowohl bei den Männern, als auch bei den Frauen war die Heilungsrate deutlich höher, wenn sie mit dem Medikament behandelt wurden. [89]

[89] vgl. [22] S.133

Die gemischte Gruppe:

	nach Behandlung	ohne Behandlung	
geheilt	850	480	1330
nicht geheilt	870	410	1280
	1720	890	2610

Die Heilungsrate mit Behandlung beträgt: $\frac{850}{1720}$ = 0,49

Die Heilungsrate ohne Behandlung beträgt: $\frac{480}{890}$ = 0,54

In der gemischten Gruppe tritt plötzlich eine negative Wirkung bei Verwendung des Medikamentes ein. Durch die Einnahme werden die Chancen auf Heilung geringer.
Hier tritt das Simpson- Paradoxon in Erscheinung. Über die Zulassung des Medikamentes muss ausgiebig diskutiert werden.

4.4 Arbeitsblatt

Das Simpson- Paradoxon

In einer Stadt leben zwei Personengruppen: Gruppe A und Gruppe B. Zudem ist die Stadt in zwei Stadtteile gegliedert, die Unterfluss und Oberfluss genannt werden.

Vor einer Wahl wird zu beiden Stadtteilen eine Kriminalitätsstatistik veröffentlicht:

Stadtteil Unterfluss	Bevölkerung	Kriminelle	Prozentsatz
Gruppe A	10.000	100	
Gruppe B	10.000	100	

Stadtteil Oberfluss	Bevölkerung	Kriminelle	Prozentsatz
Gruppe A	2.000	2	
Gruppe B	18.000	18	

1. Berechne den Prozentsatz der Kriminellen beider Personengruppen und in beiden Stadtteilen und triff auch eine Aussage bezüglich der Kriminalitätsrate beider Gruppen und beider Stadtteile!

Um auch die gesamte Stadt beurteilen zu können, wurde auch folgende Tabelle erstellt:

gesamte Stadt	Bevölkerung	Kriminelle	Prozentsatz
Gruppe A	12.000	102	
Gruppe B	28.000	118	

2. Berechne auch hier die Prozentsätze der kriminellen Personen und triff wieder eine - für einen Wahlkampf geeignete – Aussage!

3. Vergleiche nun deine Lösungen aus Aufgabe 1 und Aufgabe 2 und beschreibe den Widerspruch.

Öffne das Applet http://tube.geogebra.org/student/m219545! Hier kannst du mit Hilfe der Schieberegler die Verteilung der Bevölkerung in der Stadt verändern. Die rote Strecke stellt jeweils den Prozentsatz, der Kriminellen der Gruppe A dar, die blaue der der Gruppe B.

4. Verändere die Verteilung der Bevölkerung und beobachte die Kriminalitätsstatistik der gesamten Stadt, beziehungsweise jene der einzelnen Stadtteile!

5. Schreibe deine Beobachtungen aus Aufgabe 4 nieder!

4.5 Weitere paradoxe Beispiele der beschreibenden Statistik

In diesem Unterkapitel sollen weitere interessante Phänomene der beschreibenden Statistik besprochen werden, die jedoch eher sehr kurz gehalten und einfach erklärt sind und deshalb kein eigenes Kapitel füllen würden. Jörg Mayer hat diese in seinem Artikel „Einfache Paradoxien der beschreibenden Statistik“ [90] näher behandelt.

Manche Ideen sind aus jenem Artikel übernommen und um eigene didaktische Überlegungen erweitert.

Der Begriff „Mehrheit“:

Betrachtet man ein Glücksspiel von zwei Spielern A und B, das in drei Serien jeweils drei Mal gespielt wurde, so ist folgendes Ergebnis möglich:

1. Serie	BAA	Sieger ist A
2. Serie	BBB	Sieger ist B
3. Serie	ABA	Sieger ist A

Tabelle 6: Ein Glücksspiel in drei Serien

Die mittlere Spalte gibt die jeweiligen Gewinner der drei Einzelspiele in der Serie an.
Wertet man nun die Spiele aus, so erkennt man, dass A zwei von drei Serien gewonnen hat. Ebenso ist ersichtlich, dass B fünf von neun Spielen gewonnen hat.
Je nachdem, welchen Aspekt man betrachtet, ändert sich auch der Gesamtsieger.

Als Unterrichtsform könnte hier ein Rollenspiel mit anschließender Diskussion gewählt werden.

[90] [16] S.27ff

Mehrheitswahlrecht

Bei Wahlen muss zwischen Mehrheitswahlrecht und Verhältniswahlrecht unterschieden werden:

> *„Ziel des Verhältniswahlrechts ist, die Mandate verhältnismäßig nach der Verteilung der Wählerstimmen zu vergeben."* [91]
>
> Beim Mehrheitswahlrecht *„[…] steht in jedem Wahlkreis nur eine Kandidatin/ ein Kandidat pro Partei zur Wahl und diejenige/ derjenige mit den meisten Stimmen erhält das Mandat. Die Stimmen, die für die Kandidatinnen/ die Kandidaten der anderen Parteien abgegeben wurden, verfallen."* [92]
>
> Es kann also vorkommen, *„daß [sic] eine Partei zwar in der Mehrheit der Wahlkreise siegt, ohne aber die Mehrheit der (Ur-)wählerstimmen auf sich vereinigen zu können."* [93]

In unserem Beispiel soll wie folgt gewählt worden sein:

1.Wahlkreis	BAA	Sieger ist Partei A
2.Wahlkreis	BBB	Sieger ist Partei B
3.Wahlkreis	ABA	Sieger ist Partei A

Tabelle 7: fiktives Wahlverhalten

Als Sieger der Wahl wäre hier Partei A zu nennen, obwohl sie nur etwa 44% der Stimmen erreicht haben und Partei B etwa 56%.

Verändert man hingegen die Wahlkreisaufteilung und fasst die drei Wahlkreise zu einem Wahlkreis zusammen, so wäre Partei B der Sieger des Wahlkreises.

Die Auswahl und Festlegung der Wahlkreise ist also für den Ausgang der Wahl mitverantwortlich.

[91] [7]
[92] [8]
[93] [16] S.28

Das Problem der Transitivität

Die Definition der Transitivität lautet:

> Sei R eine Relation auf einer Menge M. R heißt transitiv, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt, dass
>
> $$a\,R\,b \;\wedge\; b\,R\,c \;=>\; a\,R\,c.$$ [94]

Aus didaktischen Gründen sei hier ein Beispiel zur Transitivität angegeben:
Schüler Z ist Schüler der 1a Klasse, die 1a Klasse ist eine Klasse der Schule XY, also ist Schüler Z auch Schüler der Schule XY.

Paradox erscheint nun folgendes Wurfergebnis dreier Spieler:

	Wurf 1	Wurf 2	Wurf 3
Spieler A	2	2	6
Spieler B	3	3	3
Spieler C	4	1	4

Tabelle 8: Wurfergebnisse dreier Spieler

Gewürfelt wurde hier mit einem idealen Würfel. Verglichen werden immer zwei Spieler und Sieger eines Wurfes soll derjenige sein, der die niedrigere Augenzahl hat.

Vergleicht man nun jeweils zwei Spieler, so kann man sagen, dass A gegen B gewonnen hat und B gegen C gewonnen hat, da ihre Augenzahlen jeweils in zwei von drei Fällen niedriger sind. Überraschend ist nun, dass Spieler C aber gegen Spieler A gewonnen hat, da auch in zwei von drei Spielen die Augenzahl niedriger ist.
Man sieht also, dass hier keine Transitivität auftritt – andernfalls hätte ja A auch Sieger gegen C sein müssen.

[94] vgl. [19] S.145

5. Das Drei-Türen-Problem

Das Drei-Türen-Problem hat seine Bekanntheit durch eine amerikanische Fernsehshow der 1990er Jahre erlangt. In der Endrunde von „Let‘s make a deal“ war es der Kandidatin oder dem Kandidaten möglich, ein Auto zu gewinnen – ebenso war es aber auch möglich, nur eine Ziege zu gewinnen. [95] Deshalb wird das Drei-Türen-Problem oft auch als Ziegenparadoxon bezeichnet. [96]

5.1 Das Problem

Bei der besagten Quizshow konnte der Spieler zwischen drei Türen wählen. Hinter einer Tür war der Hauptgewinn – ein Auto, hinter den anderen beiden Türen eine Ziege, als Symbol für eine Niete. Nachdem sich die Kandidatin oder der Kandidat nun für eine Türe entschieden hatte, öffnete der Moderator - Monty Hall - eine der beiden anderen Türen. Hier sei gesagt, dass immer eine Türe geöffnet wurde, hinter der eine Ziege stand, da das Spiel ja sonst zu Ende gewesen wäre. Nun hatte die Spielerin oder der Spieler noch die Möglichkeit, bei „seiner“ Türe zu verbleiben, oder doch noch zu wechseln. Mit dem Problem, ob nun die Strategie „Bleiben“ oder die Strategie „Wechseln“ vorteilhafter wäre, beschäftigte sich Marilyn vos Savant in einer Kolumne. Sie gilt als die Frau mit dem höchsten jemals gemessenen Intelligenzquotienten. Ihr Rat „Wechseln“ löste auch unter vielen Fachleuten großen Aufruhr aus. [97]

„Der „gesunde Menschenverstand“ verleitet viele zu der Einschätzung, dass beides gleich gut [ist].“ [98]

[95] vgl. [9] S.206
[96] vgl. [12] S.345
[97] vgl. [9] S.207
[98] [9] S.207

Eine Abänderung des Spiels für den Unterricht wäre zum Beispiel durch folgendes Spiel möglich:

Es gibt drei verschiedenfarbige verschlossene Becher, wobei zwei davon leer sind und einer Süßigkeiten für die Klasse enthält. In Anlehnung an „Let's make a deal“ sollen sich die Schülerinnen und Schüler nun für einen Becher auswählen. Die Lehrerin oder der Lehrer öffnet einen leeren Becher und die Lernenden sollen entscheiden, ob sie nun den anderen Becher wählen wollen oder weiterhin den Inhalt des Bechers vom Anfang wollen. Voraussetzung ist natürlich, dass es den Schülerinnen und Schülern nicht möglich ist die Inhalte der Becher zu erahnen.

Dieser spielerische Einstieg bietet eine größere Motivation sich mit der Problematik auseinanderzusetzen. Zudem können die Schülerinnen und Schüler die Problemstellung im Unterricht selbst bearbeiten. [99] Durch diese Herangehensweise wird außerdem auch mehr Wert auf die „*mathematischen Kompetenzen*“ [100] des Lehrplans gelegt.

Um jeder Schülerin und jedem Schüler die Möglichkeit zu geben, sich individuell mit dem Problem zu beschäftigen, wurde ein Applet erstellt. Wäre die Gruppe, die sich mit dem Problem beschäftigt, zu groß - sprich: die ganze Klasse - so würde dies nicht allen erlauben, an den Denkprozessen und Erkenntnisprozessen teilzunehmen. [101]
Zu finden ist dieses Applet unter: http://www.geogebratube.org/student/m235661

[99] vgl. [12] S.350
[100] vgl. [3]
[101] vgl. [12] S.350

Passend zu dem bereits genannten Beispiel gibt es drei verschiedenfarbige Becher, die - wie in Abbildung 16 zu sehen ist - durch Quadrate dargestellt werden. Um „einen Becher zu wählen“ klickt man auf den Kreis unterhalb des Quadrates. Dadurch wird ein anderes Feld aufgedeckt – unter dem natürlich keine Süßigkeiten sind. Nun hat man die Möglichkeit, seine Wahl von vorhin zu bestätigen und erneut auf denselben Kreis zu klicken oder den Inhalt des anderen noch verdeckten „Becher“ anzusehen.

Bei Gewinn erhöht sich die Anzahl der Siege, bei der falschen Wahl die Anzahl der Niederlagen. Um ein neues Spiel zu beginnen, wählt man die Schaltfläche „Neues Spiel“ und um die Zähler zurückzusetzen, den Button „Reset“.

Mit diesem Programm kann man in einer großen Serie untersuchen, ob bei der stetigen Strategie „Bleiben“ die Anzahl der Siege oder Niederlagen überwiegt. Ebenso kann man danach ausprobieren, wie sich diese Anzahl bei der Strategie „Wechseln“ verändert.

Die Farben sind aus didaktischen Gründen gewählt, da es bei der Begründung und Argumentation einfacher ist, von einem farbigen Becher zu sprechen, als von Toren oder Türen. Bei jedem neuen Spiel werden die Farben zufällig und unabhängig vom „Gewinnbecher“ auf die einzelnen Quadrate verteilt.

In Abbildung 16 wurde gerade an der Strategie „Bleiben“ festgehalten – man sieht eine deutlich höhere Anzahl an Niederlagen als Siegen.

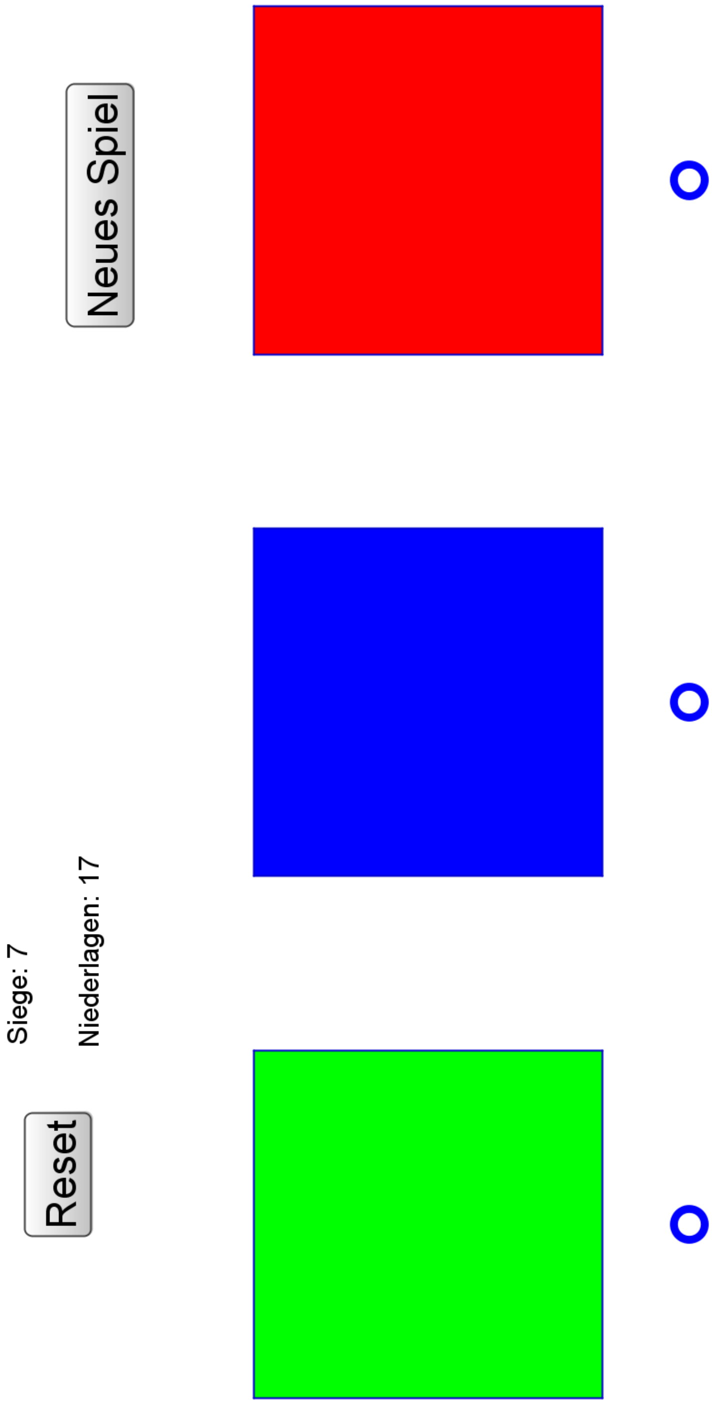


Abbildung 16: Fenster des Applets „Das Drei-Türen-Problem“

5.2 Lösung des Problems

Ein häufiges Gegenargument zur Lösung „Wechseln" ist:

„Es gibt noch zwei Türen, hinter einer steht das Auto. Dann sollte es doch gleich sein, welche Tür gewählt wird. Die Chancen sind gleich, nämlich jeweils $\frac{1}{2}$*."* [102]

Bei dieser Argumentation wird jedoch der Vorgeschichte des Problems zu wenig Beachtung geschenkt. Der tatsächlichen Lösung des Problems kann man sich auf mehrere Arten nähern. Hier sind einige Erklärungsversuche ausgewählt:

Dass die Strategie „Wechseln" die Chance auf Sieg erhöht, erhält man durch folgende Überlegung: Das Spiel wird auf 100 Türen mit 99 Ziegen und einem Auto erweitert. Man wählt eine Türe und der Moderator öffnet 98 Türen mit jeweils einer Ziege dahinter. Am Ende bleiben nun zwei Türen über – hinter einer das Auto, hinter der anderen die Ziege. Bei der Strategie „Wechseln" verliert man nur, wenn man von Beginn an die Türe mit dem Auto gewählt hatte – in allen anderen Fällen würde man nun durch „Wechseln" gewinnen. Aber die Chance, von Anfang an die richtige Türe gewählt zu haben, beträgt nur ein Prozent. [103]

Man kann auch näher darauf eingehen, sodass man das Spiel nicht einmal zu Ende spielen muss, um über den Ausgang Bescheid zu wissen. Wählt man zu Beginn eine Ziege, führt die Strategie „Wechseln" zu einem Sieg – wählt man zu Beginn das Auto, siegt man mit der Strategie „Bleiben". Da es zwei Ziegen, aber nur ein Auto gibt und die Chance, eines der drei Dinge zu wählen, jeweils $p = \frac{1}{3}$ ist, gewinnt man durch „Wechseln" in zwei von drei Fällen.[104]

Eine andere Herangehensweise an die Fragestellung ist jene mit Hilfe von zahlreichen Experimenten. Der Vergleich der relativen Häufigkeiten von diesen vielen Versuchen lässt einen Schluss auf die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu. Der Modellbildungsprozess ist hier klar ersichtlich. [105] Diese zahlreichen Experimente können, wie bereits beschrieben, mit dem Applet durchgeführt werden.

---

[102] [15] S.205
[103] vgl. [15] S.207
[104] vgl. [12] S.348
[105] vgl. [15] S.205

Eine andere sehr einfache Erklärung ist auch das Durchdenken der verschiedenen Fälle. Um dies zu erleichtern, kann man den Sachverhalt auch graphisch darstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gehen wir davon aus, die Kandidatin oder der Kandidat wählt Tür Eins.

Folgende Fälle sind nun möglich:

Auto	Ziege	Ziege

Ziege	Auto	Ziege

Ziege	Ziege	Auto

Tabelle 9: Anschauliche Erklärung des Drei-Türen-Problems

Wurde die erste Türe gewählt und die Ziegen und das Auto sind wie in der ersten Zeile verteilt, so öffnet der Moderator entweder die zweite oder die dritte Türe. In diesem Fall würde „Bleiben“ zum Gewinn des Autos führen.
In der zweiten Zeile wurde wieder die erste Tür gewählt und der Spielleiter hat nun nur noch die Möglichkeit, die dritte Türe zu öffnen, um das Spiel nicht vorzeitig zu beenden. Für einen Sieg ist hier die Strategie „Wechseln“ zielführend.
Die Verteilung der dritten Zeile und die Wahl der ersten Türe haben zur Folge, dass der Moderator die mittlere Türe öffnet. Auch hier gewinnt die Spielerin oder der Spieler durch „Wechseln“

Hier erkennt man ganz klar, dass für einen Sieg in zwei von drei Fällen die Strategie „Wechseln“ von Vorteil ist. Die Annahme, dass zu Beginn Tür Eins gewählt wurde, lässt sich natürlich auch in allen anderen Variationen durchspielen und darstellen.

Auch rechnerische Lösungen dieser Aufgabe sind denkbar. Hierzu muss man einige Annahmen treffen:

„Der Kandidat wählt zufällig eine Tür aus. Das Auto wurde zufällig hinter einer der drei Türen platziert. Der Moderator wählt zur Öffnung immer eine Ziegentür, und zwar eine vom Kandidaten nicht gewählte Ziegentüre.“ [106]

Diese Annahmen sind für die weitere Berechnung wichtig, denn würde der Moderator beispielsweise zufällig eine der beiden anderen Türen öffnen und nicht die Türe mit der Ziege dahinter, so würde sich eine völlig neue Spielsituation ergeben. [107]

Nun kann man diese Aufgabe mit Hilfe eines Baumdiagramms [108] darstellen oder mit bedingten Wahrscheinlichkeiten [109] rechnen.

Die Lösung durch ein Baumdiagramm ist nach [12] *gestaltet, wurde jedoch etwas abgeändert.*

Wir gehen wir wieder davon aus, dass die Spielerin oder der Spieler Tür Eins gewählt hat. Es ergeben sich nun vier mögliche Äste des Baumdiagramms:

A: Das Auto ist hinter der ersten Türe (*A1*) und der Moderator öffnet die zweite Türe (*M2*)
B: Das Auto ist hinter der ersten Türe (*A1*) und der Moderator öffnet die zweite Türe (*M3*)
C: Das Auto ist hinter der ersten Türe (*A2*) und der Moderator öffnet die zweite Türe (*M3*)
D: Das Auto ist hinter der ersten Türe (*A3*) und der Moderator öffnet die zweite Türe (*M2*)

[106] [15] S.205
[107] vgl. [15] S.205
[108] vgl. [12] S.346
[109] vgl. [15] S.206

Das dazu passende Baumdiagramm sieht dann wie folgt aus:

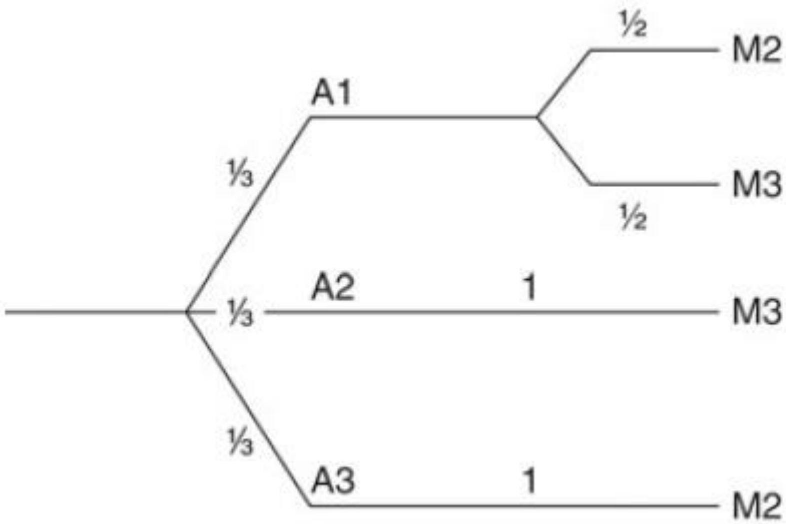


Abbildung 17: Baumdiagramm zum Drei-Türen-Problem [110]

Nun kann man die Wahrscheinlichkeiten der vier Äste berechnen:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(D) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

In den Fällen C und D führt „Wechseln" zum Sieg. Es ergibt sich somit eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $p = \frac{2}{3}$ für diese Strategie.

Auch hier sei wieder zu erwähnen, dass die Annahme, die Kandidatin oder der Kandidat habe Tür Eins gewählt, durch eine andere ersetzt werden und das Beispiel dann erneut betrachtet werden kann. Dennoch tritt dasselbe Ergebnis ein: „Wechseln" ist die bessere Strategie.

[110] entnommen aus [12]

Bei der Berechnung mittels bedingter Wahrscheinlichkeit wird auf [15] *zurückgegriffen.*

Das Spiel ist bereits so weit fortgeschritten, dass sich die Kandidatin oder der Kandidat für Tür eins entschieden hat und der Moderator Tür Drei geöffnet hat. Es stellt sich nun die Frage, ob ein Wechsel zu Tür Zwei von Vorteil ist.

Es sei nun *A1* das Ereignis: Das Auto ist hinter Tür Eins
Es sei nun *A2* das Ereignis: Das Auto ist hinter Tür Zwei
Es sei nun *A3* das Ereignis: Das Auto ist hinter Tür Drei

M1 sei das Ereignis: Der Moderator öffnet Tür Eins
M2 sei das Ereignis: Der Moderator öffnet Tür Zwei
M3 sei das Ereignis: Der Moderator öffnet Tür Drei

Mit Hilfe des Satzes von Bayes lässt sich nun die bedingte Wahrscheinlichkeit $P\ (A2|M3)$ berechnen.

Unter bedingter Wahrscheinlichkeit $P\ (B|A)$ versteht man, das Eintreten eines Ereignisses *B* unter der Bedingung des Ereignisses *A*. Sie ist definiert durch: [111]

$$P\ (B|A) := \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (A)}$$

Aus dieser Definition lässt sich auch leicht der Satz von Bayes zeigen:

$$P\ (B|A) = \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (A)} = \frac{\frac{P\ (A \cap B)}{P\ (B)} \cdot P\ (B)}{P\ (A)} = \frac{P\ (A|B) \cdot P\ (B)}{P\ (A)}$$ **Satz von Bayes** [112]

$P\ (A2|M3)$ gibt also die Wahrscheinlichkeit an, dass der Gewinn hinter Tür Zwei ist, wenn der Moderator Tür Drei öffnet.
$P\ (A1|M3)$ hingegen gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Gewinn hinter Tür Eins ist, wenn der Moderator Tür Drei öffnet.

[111] vgl. [9] S.169
[112] vgl. [10]

Laut dem Satz von Bayes gilt also:

$$P(A2|M3) = \frac{P\ (A2) \cdot P\ (M3|A2)}{P\ (M3)}$$

Da das Auto zufällig hinter einer der Türen ist, gilt:

$$P\,(A1) = P\,(A2) = P\,(A3) = \frac{1}{3}$$

Die Wahrscheinlichkeit *P (M3)* lässt sich berechnen durch:

$$P\,(M3) = P(M3|A1) \cdot P\,(A1) + P(M3|A2) \cdot P\,(A2) + P(M3|A3) \cdot P\,(A3)$$

Da der Moderator nur Ziegentüren öffnen darf, ergibt sich für $P\,(M3|A3)$ die Wahrscheinlichkeit $p = 0$. Für $P\,(M3|A1)$ erhält man die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$, da der Spielmacher zwischen Tür Zwei und Tür Drei wählen kann. Die Wahrscheinlichkeit für $P(M3|A2)$ ist $p = 1$, da Tür Eins geöffnet wurde, hinter Tür Zwei der Gewinn ist und er somit Tür Drei öffnen muss.

Setzt man nun alle Werte in die Formel ein, ergibt sich:

$$P(A2|M3) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Würde die Spielerin oder der Spieler bei Tür Eins bleiben, ergäbe sich:

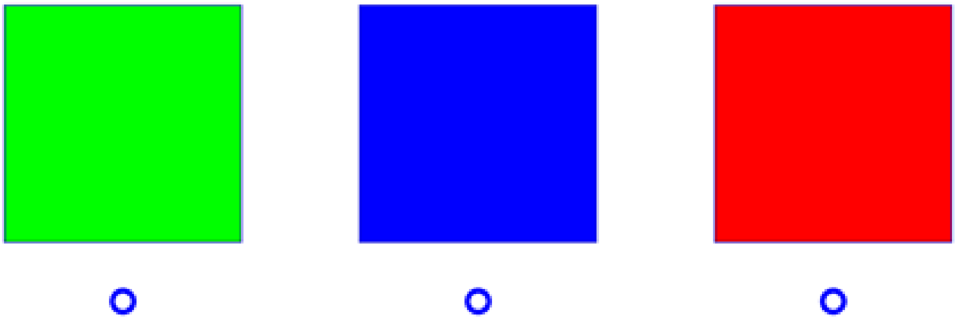
$$P(A1|M3) = \frac{P\ (A1) \cdot P\ (M3|A1)}{P\ (M3)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Man sieht also, dass sich der Wechsel zu Tür Zwei lohnt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg ist doppelt so groß.

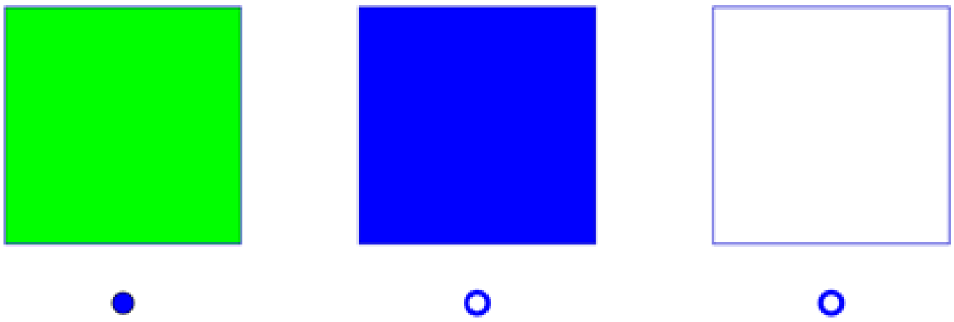
5.3 Arbeitsblatt

Das Drei-Türen-Problem

In einem Spiel gibt es drei verschiedene Becher – Grün, Blau und Gelb. Unter einem Becher sind Süßigkeiten für die Klasse – unter den anderen beiden Nichts.



Stell dir vor du wählst nun den grünen Becher und erfährst danach, das Süßigkeiten nicht unter dem roten Becher waren.



Jetzt hast du die Möglichkeit entweder weiterhin den Inhalt des grünen Bechers zu bekommen, oder zum Inhalt des blauen Bechers zu wechseln.

Ist es besser zu **„Wechseln“** zu **„Bleiben“** oder ist es bei beiden Möglichkeiten gleich wahrscheinlich, dass du die Süßigkeiten gewinnst?

1. Entscheide dich, wie du nun vorgehen magst und begründe deine Wahl logisch nachvollziehbar!

2. Öffne den Link http://www.geogebratube.org/student/m235661 und führe 30 Spiele durch! Um nachzuprüfen, ob deine Entscheidung aus Aufgabe 1 auch gewinnbringend ist, behalte deine Spielstrategie („Wechseln“ oder „Bleiben“) in allen Spielen bei. Welchen Becher du zu Beginn auswählst, ist deine Entscheidung.

3. Welche Beobachtung kannst du machen, wenn du die Anzahl der Siege und Niederlagen beobachtest? Was schließt du daraus?

6. Das St. Petersburger Paradoxon

„[…] mathematische Untersuchungen können zu Ergebnissen führen, die in der Praxis absurd erscheinen.“ [113]

Nach Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgten viele Wissenschaftler und Gelehrte lange dem Gedanken, dass der gesunde Menschenverstand in Zahlen ausgedrückt sei. An der Akademie von St. Petersburg wurde jedoch im 18. Jahrhundert eine Arbeit veröffentlicht, die für Aufsehen sorgte. Die mathematischen Berechnungen schienen in einem Widerspruch zur Vernunft zu stehen. Verfasst hatte die Arbeit Daniel Bernoulli – ein Mitglied jener Familie, die sich intensiv mit Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigte. Bekannt war das Problem jedoch auch schon früher und tauchte auch in einem Briefwechsel zwischen Nikolaus Bernoulli - Cousin von Daniel Bernoulli - und Montmort auf. [114]

6.1 Das Paradoxon

Im St. Petersburger Spiel wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis sich zum ersten Mal Kopf ergibt. Wird nach dem ersten Mal Kopf geworfen, so erhält die Spielerin oder der Spieler zwei Geldeinheiten von der Spielbank, erscheint nach dem zweiten Wurf Kopf, so gewinnt man vier Geldeinheiten. Im Gedanken kann man dies nun fortsetzen und so ergibt sich bei dem Wurf von Kopf nach *n* Würfen ein Gewinn von 2^n Geldeinheiten.
Nun stellt sich die Frage, wie viel Einsatz muss die Spielerin oder der Spieler zahlen, sodass es sich um ein gerechtes Spiel handelt. Egal, welchen Einsatz man nun bereit ist zu zahlen – das Spiel wird nie gerecht sein. [115]

Wie bereits zuvor erwähnt, ist eine faire Münze eine Münze, bei der Kopf und Zahl mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ auftreten.
Ein Spiel wird dann als gerecht angesehen, wenn der Mittelwert, beziehungsweise Erwartungswert des reinen Gewinns gleich null ist. [116]

[113] [4] S.19
[114] vgl. [22] S.34f
[115] vgl. [22] S.35
[116] vgl. [22] S.35

6.2 Der Erwartungswert eines Gewinns

Wegen der Wichtigkeit des Erwartungswertes für das weitere Verständnis des St. Petersburger Paradoxons soll dieses Unterkapitel einen kurzen Einstieg in den Themenbereich bieten. Denn ein Kriterium dafür, ob man ein Glücksspiel wagen sollte oder doch lieber darauf verzichtet, ist der Erwartungswert des Gewinns. [117]

Folgendes Beispiel soll das verdeutlichen:

Die Idee zu dem Beispiel stammt aus [4]. *Der Inhalt wurde allerdings abgeändert.*

Es werden vier Spiele angeboten, bei denen die Höhe des Gewinns, aber auch die Wahrscheinlichkeit für diesen Gewinn, unterschiedlich ist. Die Zufallsvariable ist hier *A* und kann in jedem Spiel zwei Werte mit der Wahrscheinlichkeit (*P (A)*) annehmen:

Spiel 1	Gewinn *A*	Wahrscheinlichkeit des Gewinns *P (A)*
	0 €	0,9
	10 €	0,1

Spiel 2	Gewinn *A*	Wahrscheinlichkeit des Gewinns *P (A)*
	0 €	0,999 999
	1.000.000 €	0,000 001

Spiel 3	Gewinn *A*	Wahrscheinlichkeit des Gewinns *P (A)*
	0 €	0,999 999 999 999
	1.000.000.000.000 €	0,000 000 000 001

Spiel 4	Gewinn *A*	Wahrscheinlichkeit des Gewinns *P (A)*
	0€	0,5
	10€	0,5

Tabelle 10: Vier verschiedene Spiele

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen *X* wird berechnet durch: [118]

$$E\,(X) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P\,(X = a_i)$$

[117] vgl. [4] S.19

[118] siehe [13]

Für die vier Spiele ergibt sich also:

Spiel 1: $E(A) = 0 \cdot 0{,}9 + 10 \cdot 0{,}1 = 1$

Spiel 2: $E(A) = 1$

Spiel 3: $E(A) = 1$

Spiel 4: $E(A) = 5$

Bei den ersten drei Spielen ist der Erwartungswert des Gewinns gleich eins. Um ein gerechtes Spiel zu gewährleisten, sollte also die Spielerin oder der Spieler einen Einsatz von jeweils 1 € tätigen. Beim letzten Spiel wäre ein Einsatz von 5€ als gerecht zu erachten.

Die Betrachtung soll nun auf den ersten drei Spielen liegen, bei denen die Gewinnerwartung ja jeweils gleich ist. Was die Spiele jedoch unterscheidet ist, dass man beim ersten Spiel mit zehn-prozentiger Wahrscheinlichkeit einen kleinen Gewinn erzielen kann. Beim zweiten Spiel kann man mit der Wahrscheinlichkeit von einem Millionstel einen hohen Gewinn erzielen – jedoch wird man ziemlich sicher nichts gewinnen. Beim dritten Spiel kann man zwar einen riesigen Gewinn erzielen, die Wahrscheinlichkeit dafür ist aber praktisch null. [119]

Als Maß für das Risiko bei den einzelnen Spielen könnte man die Varianz der Auszahlung betrachten. Die Varianz einer Zufallsvariablen *X* wird wie folgt berechnet: [120]

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} (a_i - E(X))^2 \cdot P(X = a_i)$$

Spiel 1: $V(A) = (0-1)^2 \cdot 0{,}9 + (10-1)^2 \cdot 0{,}1 = 9$

Spiel 2: $V(A) = 999\,999$

Spiel 3: $V(A) = 999\,999\,999\,999$

Je höher die Varianz ist, desto mehr Risiko beinhaltet also ein gerechtes Spiel. [121]

[119] vgl. [4] S.19
[120] siehe [13]
[121] vgl. [4] S.19

6.3 Mögliche Lösungen für das St. Petersburger Paradoxon

Da, wie bereits besprochen, beim St. Petersburger Spiel ein gerechtes Spiel gefordert wird, müssen wir zuerst den Erwartungswert des Verlustes der Bank berechnen:

$$E(A) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Man sieht, dass die Bank durchschnittlich einen unendlich großen Geldbetrag verliert. Also müsste die Spielerin oder der Spieler einen unendlich großen Geldbetrag als Einsatz zahlen.[122]

Aber es wäre wohl niemand bereit, für dieses Spiel einen Einsatz von 200 € zu bezahlen. Man würde nur gewinnen, wenn sieben Mal Zahl auftritt, bevor Kopf geworfen wird. Trotz dieses hohen Einsatzes wäre es für die Bank immer noch kein gerechtes Spiel. [123]

Beim St. Petersburger Paradoxon liegt die Problematik darin, dass die Reihe, die den Erwartungswert definiert, abzählbar unendlich ist, aber nicht konvergiert. Somit ist der Erwartungswert nicht definiert. [124]

Um zu einer Lösung zu kommen, muss das Spiel etwas abgeändert werden. Im Folgenden sind Vorschläge verschiedener Mathematiker näher angeführt:

Daniel Bernoulli meinte, dass es ab einer gewissen Geldsumme egal sei, ob man diese Summe gewinnt oder eine noch größere.

> *„Ob jemand 2^{50} € (>10^{15} €) gewinnt oder eine noch größere Summe ist in der Realität völlig egal“* [125]

Das heißt, die Spielerin oder der Spieler bekommt maximal 2^{50} Geldeinheiten ausbezahlt, auch wenn sie oder er schon das 51te Spiel spielt.

[122] vgl. [22] S.35
[123] vgl. [9] S.239
[124] vgl. [9] S.236
[125] [9] S.240

So ergibt sich für den Erwartungswert des Gewinns: [126]

$$E(A) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{49} \cdot \frac{1}{2^{49}} + \left(\frac{1}{2^{50}} + \frac{1}{2^{51}} + \ldots \right) \cdot 2^{50}$$

$$= 49 + \frac{1}{2^{50}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \right) \cdot 2^{50}$$

$$= 49 + \frac{1}{2^{50}} \cdot 2^{51} = 49 + 2 = 51$$

Dass die Summe der Reihe $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...)$ gegen zwei konvergiert, kann leicht nachgerechnet werden.

Bernoulli nannte diesen Wert, den „moralischen“ Erwartungswert des Spiels. Zu dieser Zeit war der Begriff „moralisch“ ein anderer Begriff für „vernünftig“ und „annehmbar“.[127]

Auch der Mathematiker **Georges Louis le Clerc de Buffon** beschäftigte sich intensiv mit dem St. Petersburger Spiel. Er war der Ansicht, dass alle Wahrscheinlichkeiten, die kleiner als 0,0001 waren außer Acht gelassen werden können. Auf diese Zahl kam Buffon nach der Betrachtung von Sterbetafeln. Er stellte fest, dass mit dieser Wahrscheinlichkeit ein gesunder Mann Mitte 50 plötzlich sterben würde – *„da jedoch kein Mensch dieses Alters diese Furcht hege seien alle Wahrscheinlichkeiten kleiner oder gleich 10^{-4} für null und nichtig zu halten.“* [128] Bei weiteren experimentellen Untersuchungen stellte Buffon sogar fest, dass alle Wahrscheinlichkeiten die kleiner als 10^{-3} sind vernachlässigt werden können. Da somit alle Terme ab dem zehnten Term als null betrachtet werden können, ergibt sich ein fairer Einsatz von 10 €. [129]

[126] nach [9] S.240
[127] vgl. [4] S.21
[128] [4] S.22
[129] vgl. [4] S.22

William Fellner beschäftigte sich ebenso mit dem St. Petersburger Paradoxon und kam zu dem Schluss, dass es eine Möglichkeit gibt, die Einsätze so festzulegen, dass das Spiel gerecht wird. Die Einsätze müssten so festgelegt werden, dass sie davon abhängen, wie viel Spiele bereits gespielt wurden.

Bezeichnet man die Anzahl der Proben mit *n*, so gilt das Spiel dann als gerecht, „ *[...] wenn für immer größer werdende Werte von n der Quotient aus dem angehäuften Gewinn* G_n *und dem angehäuften Einsatz* R_n *gegen 1 strebt [...]* “[130]

Es muss für jedes ε > 0 gelten:

$$P\left(\left|\frac{G_n}{E_n} - 1\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Diese Relation drückt eine ähnliche Stabilitätseigenschaft für G_n aus, wie das bereits behandelte Gesetz der Großen Zahlen.

Fellner zeigte, dass das Spiel gerecht ist, wenn der Einsatz $E_n = n \, log_2 \, n$ beträgt. Bei dem St. Petersburger Paradoxon kann es aber keine endliche Konstante *k* geben, sodass das Spiel durch $E_n = k \, n$ gerecht wird – bei Fellners Beweis hängt E_n aber eben von der Anzahl der Spiele ab. [131]

Um sich dem Paradoxon experimentell zu nähern ließ **Buffon** ein Kind 2048- mal spielen und bestimmte dadurch die mittlere Auszahlung. Auch **Augustus de Morgan** führte ähnliche Experimente durch. Aus didaktischen Gründen wird der Einsatz eines Zufallsgenerators am Computer vermieden und stattdessen die Tabelle von Buffon und de Morgan angegeben. In Anhang 1 ist - wie bereits erwähnt - die Problematik der durch den Computer generierten Zufallszahlen näher erläutert.

[130] [22]
[131] vgl. [22] S.36

Wurffolge[8]	Auszahlung an S	BUFFONs Kind	DE MORGAN (1)	DE MORGAN (2)	DE MORGAN (3)
W	1	1061	1048	1017	1039
ZW	2	494	507	547	480
Z^2W	4	232	248	235	267
Z^3W	8	137	99	118	126
Z^4W	16	56	71	72	67
Z^5W	32	29	38	32	33
Z^6W	64	25	17	10	19
Z^7W	128	8	9	9	10
Z^8W	256	6	5	3	3
Z^9W	512		3	2	4
$Z^{10}W$	1024		1	1	
$Z^{11}W$	2048		0	1	
$Z^{12}W$	4096		0	0	
$Z^{13}W$	8192		1	0	
$Z^{14}W$	16384		0	0	
$Z^{15}W$	32768		1	1	
…	…				
$Z^{2^N-1}W$	…				
Z^{2^N}	0				
totale Auszahlung		10057	53238	45595	11515
Auszahlung pro gewertetem Spiel		4,91	26,0	22,26	5,62

Abbildung 18: Ergebnisse der Experimente von Buffon und de Morgan [132]

In Abbildung 19 können die Ausgänge dieser experimentellen Spiele beobachtet werden. Wichtig ist jedoch, dass mit einer etwas abgewandelten Form des Paradoxons gearbeitet wurde:

Wird hier beim ersten Mal Kopf geworfen, so erhält die Spielerin oder der Spieler einen Euro Erscheint Kopf nach dem zweiten Mal, so ist der Gewinn zwei Euro. In der Literatur treten beide Varianten des Spiels häufig auf – um den Erwartungswert des Einsatzes des in diesem Kapitel zu Beginn beschriebenen Spiels zu erhalten, muss der Wert aus der Tabelle verdoppelt werden.

[132] entnommen aus [4] S.25

Zudem kann der Münzwurf hier anstatt Kopf oder Zahl entweder Zahl oder Wappen ergeben.

Bei Buffons Kind ergibt sich also ein gerechtes Spiel bei einem Einsatz von 9,82€. 32€, 44,52€ beziehungsweise 11,24€ wären bei de Morgans Spielserien der Einsatz für ein gerechtes Spiel. [133]

Interessant ist auch die Frage, welche Gewinnauszahlung man überhaupt erleben kann:
Würde eine Person 70 Jahre jeden Tag sechs Stunden lang spielen und ein Spiel im Schnitt zwei Minuten dauern, so hätte sie etwa 4,6 Millionen Spiele hinter sich gebracht. Das längste Spiel hat dabei eine Serie von 22-mal Kopf – man kann also Wahrscheinlichkeiten, die kleiner als 2^{-23} sind, ohne Bedenken vernachlässigen.

Stellt sich einer Leserin oder einem Leser am Ende des Kapitels nun die Frage, wie Bernoulli und Montmort überhaupt auf das St. Petersburger Paradoxon stießen, kann eine Antwort darauf im Anhang nachgelesen werden. [134]

[133] vgl. [4] S.25f
[134] vgl. [4] S.20

6.4 Arbeitsblatt

Das St. Petersburger Paradoxon

Ob man ein Spiel wagen soll, oder doch lieber darauf verzichtet, hängt vom Erwartungswert des Gewinnes im Vergleich zum getätigten Einsatz ab.

Den Erwartungswert des Gewinns kannst du mit folgender Formel berechnen:

$E(X) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P\ (X = a_i)$ wobei a_i den möglichen Gewinnbeschreibt und $P\ (X = a_i)$ die Wahrscheinlichkeit dafür

Auf einem Jahrmarkt wird folgendes Spiel angeboten:

> **Spiel 1:**
>
> Nachdem man einen Einsatz von 3,50€ gezahlt hat, darf man mit einem großen Schaumstoffwürfel würfeln. Man gewinnt bei dem Spiel jenen Geldbetrag, der durch die Augenzahl dargestellt wird (Zeigt der Würfel eine „6" so erhält man 6€.

1. Berechne die Gewinnerwartung bei Spiel 1 und entscheide dann, ob du spielen möchtest, oder lieber darauf verzichtest!

Von einem gerechten Spiel spricht man dann, wenn der Einsatz und die Gewinnerwartung gleich groß sind.

2. Handelt es sich beim Jahrmarktsspiel um ein gerechtes Spiel oder ist einer der beiden Parteien (Spieler – Spielleiter) im Vorteil? Begründe deine Aussage!

Nach dem Besuch des Marktes hat dich die Spiellust gepackt und du fährst ins Casino. Hier gibt es folgendes Spiel:

> **Spiel 2:**
>
> Eine ideale Münze wird so lange geworfen, bis sich zum ersten Mal Kopf ergibt. Wird nach dem ersten Mal Kopf geworfen, so erhält die Spielerin oder der Spieler zwei Geldeinheiten von der Spielbank, erscheint nach dem zweiten Wurf Kopf, so gewinnt man vier Geldeinheiten. Im Gedanken kann man dies nun fortsetzen und so ergibt sich bei dem Wurf von Kopf nach *n* Würfen ein Gewinn von 2^n Geldeinheiten.

3. Berechne die Gewinnerwartung von Spiel 2 und gib an, wie hoch der Einsatz sein müsste, sodass es sich um ein gerechtes Spiel handelt!

7. Blitzparadoxa

In diesem Kapitel sollen zwei weitere spannende Paradoxa behandelt werden, die im Unterricht nicht fehlen sollten. Auf Grund der mathematischen Komplexität der Rechenvorgänge ist es aber für die Schülerinnen und Schüler einfacher, sich von der Geschichte rund um die Paradoxa begeistern zu lassen, als einzelne Rechenschritte selbst nachzuvollziehen. Auf Grund dessen sind die Kapitel etwas kürzer gehalten.

7.1 Das Paradoxon der ersten Ziffer

Schon im Jahr 1881 machte ein Leser des American Journal of Mathematics auf eine Tatsache aufmerksam, der erst 60 Jahre später Frank Benford wieder Aufmerksamkeit schenkte. Schilderungen zu Folge soll Benford – er war Ingenieur bei der General Electrics Company – beim Durchblättern einer vielstelligen Logarithmustafel festgestellt haben, dass die Seiten des Buches am Anfang wesentlich verschmutzter waren als am Ende. In einer Logarithmentafel sind die Logarithmen verschiedener Zahlen der Größe nach geordnet. Benford schloss daraus, dass Logarithmen von eins oder zwei wesentlich häufiger nachgeschlagen wurden als jene, von höheren Zahlen. [135]

7.1.1 Das Paradoxon

Wählt man eine beliebige Tafel – eine Tafel physikalischer Konstanten, die Tafel der Zweierpotenzen mit ganzzahligen Exponenten – so sind die ersten Ziffern der Tafel nicht gleichverteilt. Benford gab eine Formel zur Berechnung der relativen Häufigkeit der ersten Ziffern an.
Die relative Häufigkeit einer Ziffer k lässt sich berechnen durch: [136]

$$\log_{10}\left(\frac{1}{k}+1\right)$$

Anhand dieser Formel lässt sich eine Tabelle aufstellen, in der die relativen Häufigkeiten der ersten Ziffer dargestellt sind.

[135] vgl. [22] S.189
[136] vgl. [22] S.189

Erste Ziffer	Relative Häufigkeit
1	0,30
2	0,18
3	0,13
4	0,10
5	0,08
6	0,07
7	0,06
8	0,05
9	0,05

Tabelle 11: Relative Häufigkeit der Ziffer als erste Ziffer [137]

„Der Satz von Benford behauptet nicht, daß [sic]in jeder Tafel Eins die häufigste Anfangsziffer wäre [...], er behauptet nur, daß [sic] die Tafeln auffallend mehr Einsen als z.B. Neunen als erste Ziffer enthalten"[138]

Untersucht man die zweite oder dritte Ziffer, so sind diese aber annähernd gleich verteilt. [139]

7.1.2 Erklärung des Paradoxons:

Betrachtet man die Tafel der Zweierpotenzen, so wird klar, dass 2^n nur dann mit einer Eins beginnt, wenn eine ganze Zahl *s* existiert, sodass: [140]

$$10^s \leq 2^n \leq 2 \cdot 10^s$$

gilt. So liegt zum Beispiel 128 (= 2^7) zwischen 100 (= 10^2) und 200 (= $2 \cdot 10^2$).

Wenn *n* genügend groß ist, dann ist $\frac{s}{n}$ in etwa gleich $\log_{10} 2$ ist. Betrachtet man also die ersten n Potenzen von zwei, dann beginnt jede $(\log_{10} 2)$ – te, das sind in etwa 30 Prozent, mit der Ziffer eins.[141]

[137] nach [22] S.189
[138] [22] S.189
[139] vgl. [22] S.191
[140] vgl. [22] S.190
[141] vgl. [22] S.190

7.2 Das Paradoxon des Schenkens

Rémond de Montmort schrieb das erste ausführliche Buch, das sich ausschließlich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung befasste. In diesem Werk, das 1708 in Paris veröffentlicht wurde, ist auch eine „Variante des Paradoxons des Schenkens" behandelt. [142]

7.2.1 Das Paradoxon

Eine Gruppe von Personen will einander folgendermaßen beschenken: Jede beziehungsweise jeder bringt ein Geschenk mit. Nachdem alle Geschenke zusammengelegt und durchmischt wurden, werden sie zufällig an die Gruppe verteilt. In dem Glauben, sein eigenes Geschenk mit einer nur sehr kleinen Wahrscheinlichkeit zurück zu bekommen, erscheint dies als gerechte Methode. Jedoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person genau ihr eigenes Geschenk wieder zurück bekommt, viel größer als die Wahrscheinlichkeit, dass es keiner beziehungsweise keinem passiert. Bei nur zwei Personen wäre die Wahrscheinlichkeit natürlich genau 50%. [143]

7.2.2 Erklärung des Paradoxons

Besteht die Gesellschaft aus *n* Personen, so ist die Anzahl der Geschenke ebenfalls gleich *n*. Nach [13] können die Geschenke auf *n!* Arten verteilt werden. Betrachtet man nun die Anzahl der Fälle, in denen niemand sein eigenes Geschenk erhält, so ergibt sich: [144]

$$\binom{n}{0} n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \binom{n}{3} (n-3)! + \cdots + (-1)^n \, 0!$$

Betrachtet man nun das Verhältnis von günstigen zu möglichen Fällen so ergibt sich: [145]

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Treffen beispielsweise fünf Personen zusammen und tauschen Geschenke aus, so würde sich eine Wahrscheinlichkeit von nur p_n = 0,37 ergeben, dass niemand sein eigenes Geschenk erhält.

[142] vgl. [22] S.30
[143] vgl. [22] S.30
[144] vgl. [22] S.30
[145] vgl. [22] S.31

Zwar beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine bestimmte Person ihr Geschenk bekommt $\frac{1}{n}$ und dieser Wert strebt gegen null, wenn *n* unendlich groß wird, aber *„ […] wie dieses Paradoxon zeigt, wird „aus kleinen Bächen ein Fluß [sic]““* [146]

[146] [22] S.31

Anhang 1: Problematik von Zufallszahlen, die durch den Computer generiert wurden

> *„Die durch einen Computer erzeugten Zufallszahlen sind aber keine echten Zufallszahlen, denn sie werden nach streng deterministischen Algorithmen (Rechenverfahren) erzeugt.“* [147]

Hier ist schon die grundlegende Problematik bei der Arbeit mit computergenerierten Zufallszahlen zu sehen.

<u>Beispiel:</u>

Die angegebenen zwei Serien von je 120 ganzen Zahlen von 1 bis 6 könnten Protokolle von 120 Würfen mit einem Laplace-Würfel sein:

Serie 1:

1 3 4 2 5 6 6 3 2 1 4 4 5 3 2 1 1 4 3 6
3 2 2 4 5 3 3 1 1 4 1 5 3 2 1 6 6 5 4 3
2 4 1 1 2 4 3 6 6 1 4 5 5 2 3 4 1 1 2 6
4 3 3 2 1 6 6 5 4 1 3 2 2 4 3 2 1 4 6 5
3 2 1 4 6 5 3 2 1 4 6 5 3 2 1 4 6 5 3 2
1 4 6 5 3 2 1 4 6 5 3 2 1 4 6 5 3 2 1 4

Serie 2:

1 2 3 2 4 1 1 2 5 2 6 3 4 6 3 4 2 4 3 4
6 5 6 3 2 5 6 1 5 1 3 1 4 1 4 6 5 6 6 2
3 4 6 2 4 2 1 5 3 5 4 6 4 5 6 5 3 3 5 6
4 2 6 1 6 1 2 4 3 4 2 5 4 5 3 5 2 3 4 2
3 6 3 1 3 2 4 3 5 3 6 2 2 1 5 1 5 6 3 6
4 5 1 3 1 6 1 3 2 1 6 1 3 4 5 4 5 3 2 5

Abbildung 19: Eine Serie von Zufallszahlen [148]

[147] [15] S.216
[148] entnommen aus [15] S.217

Hier gibt es nun einige Auffälligkeiten:
Bei näherer Betrachtung fällt auf, dass sich in Serie eins ab einer bestimmten Stelle stets die Zahlen 3, 2, 1, 4, 6 und 5 wiederholen.
In Serie zwei stimmt nur in 4 Fällen die Zahl mit ihrem Vorgänger, beziehungsweise Nachfolger überein. Es wären jedoch etwa 20 dieser „Doppelzahlen“ zu erwarten.[149]

Echte Zufallszahlen zu erzeugen ist zum Beispiel mit Hilfe von physikalischen Generatoren möglich. Man kann Schwankungen von elektrischen Feldern oder radioaktive Zerfälle betrachten und aus diesen rein zufälligen Ereignissen eine Reihe von Zufallszahlen generieren. [150]

Um mit dem Computer Zufallszahlen zu generieren, gibt es viele unterschiedliche Verfahren, die teilweise immer weiter verfeinert wurden: John von Neumann quadrierte zehnstellige Zahlen, nahm aus dem Ergebnis wieder die zehn mittleren Stellen und quadrierte diese erneut. Eine andere Möglichkeit ist die sogenannte Kongruenzmethode, bei der mit dem Rest einer Division zweier großer Zahlen gearbeitet wird. [151]

Dennoch handelt es sich bei Zufallszahlen, die mit dem Computer erzeugt wurden, immer um „Pseudozufallszahlen“ - deterministisch bestimmte Zufallszahlen. Ob diese Zahlen den Anforderungen an echte Zufallszahlen genügen, ist teilweise strittig. [152] Zur Lösung dieser Problematik gibt es unterschiedliche Verfahren. So zum Beispiel den Kolmogorov-Smirnov-Test oder den Poker-Test. Auf beide Verfahren soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden. Sie können aber bei [5] nachgelesen werden.

Die Einsatzfähigkeit von „Pseudozufallszahlen“ ist aber dennoch gewährleistet, wenn sie bestimmten Kriterien genügen. So sollten keine kurzen Schleifen mit ständiger Wiederholung der Zahlenfolgen vorkommen, wie das in Serie eins der Fall war. [153]

[149] vgl. [15] S.217
[150] vgl. [5]
[151] vgl. [18]
[152] vgl. [5]
[153] vgl. [15] S.216

Anhang 2: Spiele vor dem St. Petersburger- Spiel

Nikolaus Bernoulli und Rémond de Montmort diskutieren in ihren Briefwechseln auch folgendes Problem:

> *„Problem 4: Ein Bankhalter B verspricht einem Spieler S seinen écu, wenn beim Würfeln mit einem Würfel beim ersten Wurf eine Sechs (0Treffer) fällt, zwei écus, wenn die erste Sechs beim zweiten Wurf fällt, usw., n écus, wenn die erste Sechs beim n-ten Wurf fällt. Welchen Einsatz muss S leisten, damit das Spiel fair ist"* [154]

Man merkt hier, dass es sich um eine sehr ähnliche Variante zum St. Petersburger-Spiel handelt. Um einen Einsatz zu finden, der das Spiel fair werden lässt, muss man den Erwartungswert der Auszahlung berechnen. p sei die Trefferwahrscheinlichkeit und q die Wahrscheinlichkeit für keinen Treffer:

Die folgende Berechnung ist nach [4]

$$
\begin{aligned}
E(A) &= 1p + 2qp + 3q^2p + \dots + nq^{n-1}p + \dots \\
&= p\,(1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots) \\
&= p \cdot \frac{d}{dq}\,(q + q^2 + \dots + q^n + \dots) \\
&= p \cdot \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{q-1}\right) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

Bernoulli stellte fest, dass sechs écu ein fairer Einsatz sei und dass die Wartezeit auf den ersten Treffer sechs Spiele beträgt.

Für neue Überlegungen wurde von den beiden die Auszahlung des Gewinns auf 2, 4, 8, …, 2^n abgeändert und das Paradoxon vom unmöglichen Erwartungswert erkannt.

[154] [4] S.20

Anhang 3: Kritische Werte von χ^2

f	$\alpha_0 = 0{,}05$	$\alpha_0 = 0{,}01$
1	3.841	6.635
2	5.991	9.210
3	7.815	11.345
4	9.488	13.277
5	11.070	15.086
6	12.592	16.812
7	14.067	18.475
8	15.507	20.090
9	16.919	21.666
10	18.307	23.209
11	19.675	24.725
12	21.026	26.217
13	22.362	27.688
14	23.685	29.141
15	24.996	30.578
16	26.296	32.000
17	27.587	33.409
18	28.869	34.805
19	30.144	36.191
20	31.410	37.566
21	32.671	38.932
22	33.924	40.289
23	35.172	41.638
24	36.415	42.980
25	37.652	44.314
26	38.885	45.642
27	40.113	46.963
28	41.337	48.278
29	42.557	49.588
30	43.773	50.892

Abbildung 20: Kritische Werte von χ^2 [155]

[155] entnommen aus [13]

Anhang 4: Lösungen zu den Arbeitsblättern

Lösungen

Das empirische Gesetz der Großen Zahlen:

1. - 3. Individuelle Werte
4. Mit wachsender Versuchszahl stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines beobachteten Ereignisses

Das Geburtstagsparadoxon:

1. Nein – Frage 2 sucht an einem bestimmten Tag - Frage 1 an allen Tagen.
2. 23 Personen
3. 0,55%
4. 99,95%
5. 41 Personen

Das Simpson- Paradoxon:

1. jeweils 1% bzw. jeweils 0,1% - beide Gruppen sind gleich kriminell
2. 0,85% bzw. 0,42% - Gruppe A ist krimineller als Gruppe B
3. Betrachtet man die einzelnen Stadtteile sind beide gleich kriminell, betrachtet man die gesamte Stadt ist Gruppe A krimineller.
4. -
5. z.B.: Es ist möglich, dass Gruppe B in beiden Stadtteilen krimineller ist, aber in der gesamten Stadt dennoch Gruppe A eine höhere Kriminalitätsrate aufweist.

Das Drei-Türen-Problem:

1. –
2. Wechseln: das Verhältnis von Gewinnen zu Niederlagen sollte 2:1 sein
   Bleiben: das Verhältnis von Gewinnen zu Niederlagen sollte 1:2 sein
   Achtung: Das Verhältnis kann durch die geringe Anzahl der Spiele auch deutlich abweichen.
3. Es ist besser mit der Strategie „Wechseln" zu spielen.

Das St. Petersburger Paradoxon:

1. Die Gewinnerwartung ist 3€. Nein, weil der Einsatz höher als die Gewinnerwartung ist.
2. Nein, der Spielleiter ist im Vorteil.
3. Der Erwartungswert des Gewinns ist unendlich groß – ein gerechtes Spiel ist nicht möglich.

Literaturverzeichnis

[1] bifi. [Online]. Available: https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_2013-11-05.pdf. [Zugriff am 10. 10. 2014].

[2] bmbf. [Online]. Available: http://elsa20.schule.at/kidz-klassenzimmer-der-zukunft/projektuebersicht/. [Zugriff am 30. 08. 2014].

[3] bmbf. [Online]. Available: https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2. [Zugriff am 10. 10. 2014].

[4] F. Barth und R. Haller, „Stochastik in der Schule 30 (2010) Nr. 1“.

[5] J. Baumeister. [Online]. Available: http://www.math.uni-frankfurt.de/~numerik/lehre/Vorlesungen/Comp_Fin09/skript/n-shell3.pdf. [Zugriff am 30. 10. 2014].

[6] H.-P. Beck-Bornholdt und H.-H. Dubben, Der Hund, der Eier legt, 1997.

[7] Bundeskanzleramt. [Online]. Available: https://www.help.gv.at/Portal.Node/hlpd/public/content/99/Seite.993121.html. [Zugriff am 20. 10. 2014].

[8] Bundeskanzleramt. [Online]. Available: https://www.help.gv.at/Portal.Node/hlpd/public/content/99/Seite.990122.html. [Zugriff am 20. 10. 2014].

[9] A. Büchter und H.-W. Henn, Elementare Stochastik Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[10] F. Hofbauer. [Online]. Available: http://www.mat.univie.ac.at/~peter/lehre/lm/wktheorie.pdf. [Zugriff am 3 10 2014].

[11] R. Hutterer, Humanistische Pädagogik, 2008.

[12] F. P. Kirsten Heckmann, Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe 1, Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2012.

[13] Kraft, Hruby, Bürger, Unfried und Götz, Mathematische Formelsammlung, öbv hpt, 2004.

[14] H. Kütting, *Didaktik der Stochastik,* Wissenschaftsverlag, 1994.

[15] H. Kütting und M. J. Sauer, Elementare Stochastik : mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2011 ; 3., stark erweiterte Auflage.

[16] J. Mayer, „Einfache Paradoxien der beschreibenden Statistik,“ *Stochastik in der Schule 15 (1995) Nr.2,* 1995.

[17] G. Renner. [Online]. Available: http://diepresse.com/home/spectrum/spielundmehr/1416186/Des-Spielers-Fehler?from=suche.intern.portal. [Zugriff am 30. 08. 2014].

[18] R. Rojas, „www.welt.de,“ [Online]. Available: http://www.welt.de/wissenschaft/article1924410/Wie-kommt-der-Zufall-in-den-PC.html. [Zugriff am 30. 10. 2014].

[19] H. Schichl und R. Steinbauer, Einführung in das mathematische Arbeiten, Springer Spektrum, 2009.

[20] C. Selig, Albert Einstein: Mein Weltbild, Ullstein, 2005.

[21] Statsitik Austria. [Online]. Available: http://www.statistik.at/web_de/presse/066854. [Zugriff am 18. 07. 2014].

[22] G. J. Székely, Paradoxa Klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechung und mathematischer Statistik, Thun und Frankfurt am Main: Verlag Harri deutsch, 1990.

[23] G. Timm, „http://www2.hs-fulda.de/~grams/," 1999. [Online]. Available: http://www2.hs-fulda.de/~grams/dnkfln.htm#_Xenophobie. [Zugriff am 3. 10. 2014].

[24] Verlagsgruppe Bertelsmann, „Die große Bertelsmann Lexikon Bibliothek," in *Band 14*, Lexikothekverlag, 1972, 1983c.

[25] Verlagsgruppe Bertelsmann, „Die große Bertelsmann Lexikon Bibliothek," in *Band 19*, Lexikothekverlag, 1972, 1983c.

[26] É. Vásárhely [Hrsg.], „Beiträge zum Mathematikunterricht 2008 : Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 13.3.2008 bis 18.3.2008 in Budapest," 2008.

[27] W. Weustenfeld, „Alles nur eine Frage von Glück oder Pech?," *Stochastik in der Schule 27 (2007) Nr. 3,* 2007.

[28] M. Zawrel, „http://tube.geogebra.org," [Online]. Available: http://tube.geogebra.org/student/m219545.

[29] M. Zawrel, „http://www.geogebratube.org," [Online]. Available: http://www.geogebratube.org/student/m212049.

[30] M. Zawrel, „http://www.geogebratube.org," [Online]. Available: http://www.geogebratube.com/student/m137265.

[31] M. Zawrel, „http://www.geogebratube.org," [Online]. Available: http://www.geogebratube.org/student/m132177.

[32] M. Zawrel, „http://www.geogebratube.org," [Online]. Available: http://www.geogebratube.org/student/m235661. [Zugriff am 30. 10. 2014].

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Markus Zawrel
Geburtstag:	05. Februar 1987
Geburtsort:	Wien
Eltern:	Reinhold Zawrel (Bankangestellter)
	Renate Zawrel, geb. Kahl (Bankangestellte)
Geschwister:	Christoph

Bildungsweg:

1993 - 1997	Volksschule Kleinreifling
1997 - 2005	Bundesrealgymnasium Waidhofen an der Ybbs
Juni 2005	Reifeprüfung mit gutem Erfolg bestanden
Oktober 2006:	Beginn des Studium an der Universität Wien
	UF Mathematik und UF Physik
seit September 2010	Lehrer am RG/WRG 8, Feldgasse

Zusammenfassung

Der Untertitel der Arbeit – „Paradoxa als Unterrichtseinstieg in verschiedene Themengebiete der Stochastik“ – beschreibt diese Arbeit recht treffend. Anhand paradoxer und überraschender Beispiele der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, wird ein möglicher Einstieg in verschiedene Themenbereiche der Stochastik geboten. Diese unerwarteten Begebenheiten sollen die Motivation der Schülerinnen und Schüler stärken, sich mit diesem wichtigen Teilbereich der Mathematik auseinanderzusetzen.

Am Anfang jedes Kapitels werden die Paradoxa und ihre geschichtlichen Hintergründe näher erläutert. In den anschließenden weiteren Erklärungen wird ein jeweils sehr unterrichtsnaher Zugang und Erklärungsansatz angeboten. Um die Anschaulichkeit in vielen Bereichen zu erhöhen, wird auch mit eigens programmierten Applets gearbeitet. Am Ende jedes Kapitels ist ein Arbeitsblatt angefügt, mit Hilfe dessen die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen festigen sollen und der Unterrichtsertrag somit auch evaluiert werden kann.

Abstract

The subtitle of this master thesis – *Paradoxes as an Introduction in Teaching of Various Topics of Stochastics* – describes this project rather appropriately. By means of paradoxical and surprising examples of probability calculation and statistics, a possible access to different subject areas of stochastics will be provided. These unexpected occurrences should encourage schoolchildren's motivation to deal with this important subarea of mathematics.

At the beginning of each chapter, paradoxes and their historical background will be explained in more detail. In subsequent explanations, a very educative access and approach will be offered. In order to increase presentiveness in many areas, specially created applets will be used. At the end of each chapter, one worksheet will be attached, which should help schoolchildren to consolidate their acquired knowledge and to reflect upon the school day.