universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Differentialrechnung - Ein didaktischer Vergleich von Universität und Schule“

Verfasserin

Alice Andrea Welzl

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramtsstudium UF Mathematik
UF Psychologie und Philosophie

Betreuerin / Betreuer: ao. Univ.-Prof. Dr. Peter Raith

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, Mai 2015

Unterschrift
(Alice Welzl)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich kurz die Gelegenheit nutzen und mich bei den Menschen bedanken, die mir in der Zeit meines Studiums stets hilfreich zur Seite gestanden haben.

Als erstes möchte ich mich bei meinem Großvater bedanken, der leider den Abschluss meines Studiums nicht mehr erleben kann. Er stand mir Zeit seines Lebens immer als große Stütze zur Seite.
Meiner Mutter danke ich, weil sie mein Fels in der Brandung ist, der meinen Launen immer mit Geduld und Liebe begegnet.
Meinem Lebensgefährten Christoph danke ich ebenso für seine Kraft mich auch in schwierigen Phasen aufzufangen.

Des Weiteren möchte ich mich wirklich ganz herzlich bei meinem Diplomarbeitsbetreuer ao. Univ.-Prof. Dr. Peter Raith für seine Unterstützung bedanken.

Last but not least danke ich meinen Freunden.
Lisa danke ich, dass sie mir mit Rat und Tat zur Seite stand und mich nicht verzagen ließ und dass sie einfach so ist wie sie ist.
Verena danke ich, weil sie für mich auch in schwierigen Zeiten immer ein offenes Ohr hat und mich mit ihrer positiven Art immer wieder aufmuntert.

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung 3

Danksagung 5

0) Einleitung 9

1) Mathematischer Hintergrund 11
1.1) Historischer Hintergrund der Differenzial 13
1.1.1) Historischer Beitrag der Differentialrechnung zur Entwicklung der Mathematik 13
1.1.2) Historischer Hintergrund der Differenzialrechnung in der Schule 18
1.2) Grundwissen 20
1.3) Lehrplan: AHS 22

2) Didaktischer Hintergrund 28
2.1) Unterrichtsprinzipien 28
2.1.1) konstitutive Unterrichtsprinzipien 29
2.2.2) Prinzipien der methodischen Gestaltung des Unterrichts 31
2.2) Didaktische Prinzipien im Mathematikunterricht 35
2.2.1) Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus versus operatives Prinzip 36
2.2.2) Das Prinzip des deduktiven Aufbaus 39
2.2.3) Das genetische Prinzip 41
2.2.4) Das Spiralprinzip 43
2.2.5) Mathematische Tätigkeit - Problemlösen 44

3) „Einführung“ des Themas Differentialrechnung in der Vorlesung 46
3.1) Aufbau der Vorlesungen zum Thema Differentialrechnung 47

3.1.1) „Differentialgleichung für LAK“ 47
3.1.2) „Schulmathematik 6: Differential- & Integralrechnung“ 49
3.2) Didaktische Prinzipien in den Vorlesungen 51
3.2.1) „Differentialgleichung für LAK“ 51
3.2.2) „Schulmathematik 6: Differential- & Integralrechnung“ 53

4) Einführung des Themas Differentialrechnung in der Schule 55
4.1) Schulbuchvergleich - Aufbau 55
4.1.1) „Thema Mathematik“ 56
4.1.2) „Mathematik verstehen“ 59
4.1.3) „Mathematik“ 62
4.1.4) „Dimension Mathematik“ 64
4.2) Schulbuchvergleich - Didaktische Prinzipien 67
4.2.1) „Thema Mathematik“ 67
4.2.2) „Mathematik verstehen“ 69
4.2.3) „Mathematik“ 71
4.2.4) „Dimension Mathematik“ 73
4.3) Fazit zu den Schulbüchern 75

Fazit 77

Zusammenfassung 79

Abstract 81

Quellenverzeichnis 82

Abbildungs- &Tabellenverzeichnis 84

Lebenslauf 85

0) Einleitung

Während eines Studiums gerät der Student in viele neue Situationen und muss neue Herausforderungen meistern. Eine dieser Herausforderungen ist, der Wechsel vom Schulalltag zu den universitären Gepflogenheiten. Zu meiner Schulzeit habe ich gerade im Fach der Mathematik die Erfahrung gemacht, dass selbstständiges Lernen noch nicht praktiziert wurde. Die Lehrer erklärten Formeln, gaben dazu passende Beispiele und schlussendlich konnte man bei der Schularbeit beweisen ob man das Gezeigte auch anwenden kann. Als ich dann im Studium die angebotenen Lehrveranstaltungen besuchte, fiel mir gleich ein großer Unterschied zur Lehr- und Lernstruktur dieser verschiedenen Bildungseinrichtungen auf. Die Universität versucht in den Lehrveranstaltungen die Werkzeuge der Mathematik aufzuschlüsseln, doch die Erarbeitung und das Verständnis sind Domänen, die ein Student sich selbstständig erarbeiten muss. Diese Eigenständigkeit, darf man einem Studenten durchaus zutrauen, doch ist er, wenn dies an Schulen nie trainiert wurde, damit erst einmal vor eine neue Situation gestellt. Nachdem ich Mathematik auf Lehramt studiert habe, ließ mich diese Diskrepanz während meiner gesamten Studienzeit nicht mehr los, und ich versuchte mich immer in die zukünftige Unterrichtssituation zu versetzen, um das selbstständige Lernen auch dort für meine Lehren anwendbar zu machen. So ist es nicht weiter überraschend, dass diese Problematik für mich auch zum Thema meiner Diplomarbeit wurde und ich bin dankbar hier einen Raum gefunden zu haben um meine Überlegungen diesbezüglich zu Papier bringen zu dürfen.

Es ist eine wunderbare Entwicklung der letzten Jahre, wie ich finde, dass „kompetenzorientierter Unterricht“ in den Schulen Einzug gefunden hat. Dies bedeutet nicht weniger, als einen ganzheitlichen Lernprozess bereits in der Schulsituation stattfinden zu lassen. Die Schüler sind dazu angehalten

Problemstellungen mit der Unterstützung des Lehrers gemeinsam zu bewältigen. Es ist nicht mehr die Aufgabe einer Lehrperson den Schülern ein fertiges Produkt mittels Frontalunterricht vorzusetzen, bei welchem nur wenige Lerntypen effizient arbeiten können, sondern der Lehrer rutscht in die dankbarere und kompetentere Rolle eines Beraters, der darauf achten soll, dass seine Schüler die Antwort auf Fragen selber finden. Durch diese elementare Veränderung des Unterrichts entstand die Fragestellung, mit der sich diese Diplomarbeit zu befassen versucht, nämlich ob diese didaktischen Prinzipien bereits im Lehrplan an Schulen sowie im Ausbildungsrahmen der Universität festgehalten wurde. Das bedeutet, wenn ein Lehrer kompetenzorientiert arbeiten möchte, müssen die Rahmenbedingungen im Lehrplan dafür ausgerichtet sein und darüber hinaus braucht er auch Schulbücher die diesen ganzheitlichen Lernprozess unterstützen.

Ich habe mir für meine Arbeit ein Thema der Mathematik ausgesucht, dessen Beitrag zur geschichtlichen Entwicklung eben dieser unerlässlich war, die Differenzialrechnung.

Anhand einer Schulbuchanalyse und der Analyse zweier Vorlesungen zum Thema Differentialrechnung soll die Frage beantwortet werden, ob heutzutage zwischen Universität und Schule in didaktischer Hinsicht noch ein großer Unterschied besteht.

Zu Gunsten der Lesbarkeit wird auf genderspezifische Formulierungen verzichtet.

1) Mathematischer Hintergrund

Wenn man nicht viel mit Mathematik zu tun hat, oder vor einer rebellischen Klasse steht hört man von deren Seite schnell „Was ist Mathematik überhaupt?“. Diese Frage kann durch einen Blick in den Duden schnell beantwortet werden: Mathematik ist eine „Wissenschaft, Lehre von den Zahlen, Figuren, Mengen, ihren Abstraktionen, den zwischen ihnen möglichen Relationen, Verknüpfungen“[1].

Doch der Hintergrund der Frage ist eher ein anderer. Viele Menschen können sich einfach nicht vorstellen was ein Mathematiker den ganzen Tag macht, da sie in ihren Köpfen mindestens zwei Vorurteile verankert haben. Nämlich, dass Mathematik nur aus Beispielen und Rechnungen bestehe und deshalb alle Mathematiker gute Kopfrechner seien müssen.[2]

Der zweite Irrglaube lässt manche Menschen davon überzeugt sein, dass es in der Mathematik keine neuen Errungenschaften gibt, da „ja eh alles von den alten Griechen und ihren Nachfolgern“ durchdacht und festgelegt wurde. Aus diesem Grund gäbe es nichts Neues mehr zu erforschen.[3]

Doch nach näherer Betrachtung der Materie kann diese Annahme schnell widerlegt werden, da nach den „alten Griechen“ sehr wohl noch viele weitere Mathematiker kamen, einige, die für das Thema dieser Arbeit am Wichtigsten sind, werden im Kapitel Historisches zur Differentialrechnung erwähnt und ihr Beitrag zur Geschichte der Differentialrechnung aufgezeigt.

---

[1] http://www.duden.de/rechtschreibung/Mathematik (Stand 27.4.2015)

[2] Vgl. http://homepage.univie.ac.at/karl.sigmund/homepagewasistmath.pdf (Stand 27.4.2015)

[3] Vgl. ebd.

Die falsche Annahme, es bestehe ein Stillstand in der mathematischen Forschung, kann dadurch revidiert werden, da heute viel mehr Mathematiker zusammen forschen und leben als in den Jahrhunderten davor.[4] Das die mathematische Forschung stets weiter wächst zeigt zum Beispiel, dass „In Österreich gehen 12-14 Prozent aller FWF Fördermittel an die Mathematik. Weltweit gibt es 500 wiss. Journale. Jedes Jahr werden Millionen von neuen Lehrsätzen entdeckt. Mathematik ist der unerlässliche Schlüssel für jede Hochtechnologie.“[5]

Spannend zu beleuchten wäre nun aufgrund welcher Basis so ein Irrglaube überhaupt entstehen kann. Eine Erklärung dürfte die Methodik der mathematischen Forschung darstellen. Alles was die Mathematik jemals erforscht, entdeckt und festgelegt hat, behält seine Gültigkeit und im Gegensatz zu anderen Wissenschaften auf das Erforschte aufgebaut und ergänzt und nichts verworfen oder für falsch erklärt wird. Das heißt in der Mathematik wird nicht verworfen und doch muss alles bewiesen, das bedeutet logisch von Grundannahmen ab- beziehungsweise hergeleitet werden. Diese Grundannahmen, auch Axiome genannt, bilden den Grundstock mathematischer Operationen, von welchen man Lehrsätze herleiten kann. Schon Euklid, im alten Griechenland, wusste, dass man um Mathematik betreiben zu können beweisen musste.[6]

---

[4] Vgl. ebd.

[5] http://homepage.univie.ac.at/karl.sigmund/homepagewasistmath.pdf (Stand 27.4.2015)

[6] Vgl. ebd.

1.1) Historischer Hintergrund der Differentialrechnung

1.1.1) Historischer Beitrag der Differentialrechnung zur Entwicklung der Mathematik

Die Differentialrechnung ist ein Teilgebiet der Analysis und in diesem Zusammenhang können wir die Historie eben jener auch inmitten der Geschichte der Analysis finden.

Wenn man Geschichtsbücher durchkämmt, erfährt man, dass die Differenzialrechnung erst durch die Anerkennung, beziehungsweise durch die Feststellung der damaligen Mathematiker, dass Differenzial- und Integralrechnung Umkehroperationen sind, zur Entstehung kam.[7]

Was die Mathematiker an der Materie so faszinierte, waren zum Beispiel die quantitative Beschreibung von Bewegungsabläufen, wie die Momentangeschwindigkeit eines Körpers, dessen Beschleunigung und die Verbindung zwischen diesen. Tangenten und Normalen an eine Kurve waren nicht so spannend, da in anderen Bereichen,wie zum Beispiel der Physik dies behandelt wurde. Descartes suchte eine Methode zur Konstruktion von Normalen, da durch die Spezifizierung von Tangenten und Normalen Extremwertprobleme aus der Physik, der Astronomie und der Mathematik bearbeitet werden konnten. Für weitere Probleme suchten Mathematiker schon seit Kepler nach Antworten, wie auszugsweise Fläche zwischen Kurven oder Schwerpunkte von Körpern.[8]

Die Lösung der Differenzialgleichung gibt Angaben über Funktionen und deren Änderungsraten preis. Weiters ist festzustellen, dass wenn Angaben über die

---

[7] Vgl. Maanen, van, 1999, S.43

[8] Vgl. ebd., S.44

Differentiale dx und dy gegeben sind, diese Informationen über die Abhängigkeit von x und y bekannt geben. Selbst mehr als ein Jahrhundert nach der Erfindung der Differentialrechnung wurden mit den Differenzialgleichungen noch immer verfahren als wären sie ganz gewöhnliche algebraische Gleichungen, doch die Differenzialgleichung wehrte sich durch ihre Komplexität gegen diese methodische Behandlung. Die Analyse der Differentialgleichung weist auf verschiedenste Probleme hin, da sie einerseits eine Gleichung also algebraische „Probleme" aufwirft, andererseits ihre Terme Funktionen sind und andere Probleme in der Vordergrund rücken. Die starke Bindung zwischen der Physik und der Differenzialgleichung hatte Auswirkung auf die Entfaltung des Gebiets, da anfangs physikalische Gleichungen im Mittelpunkt der Forschung standen. Schlussendlich kann man nicht sagen, dass die Geschichte der Differenzialgleichung ein schrittweise stattfindender Entwicklungsprozess war, da ihre Entstehung nicht auf notwendigen Abläufen hin zu einer konkreten Theorie beruht.[9]

Großen Mathematiker wie Leibniz, Newton, die Brüder Bernoulli, Marquis de L'Hospital und Euler sind bei dieser „Entdeckung" der Mathematik zu nennen. Doch als Begründer der Differenzialrechnung gelten fortan Leibniz und Newton, die unabhängig voneinander Theorien entwickelten. Die Ansätze der beiden waren unterschiedlich. Leibniz entwickelte sein Kalkül über das Tangentenproblem und Newton beschäftigte sich hierfür mit der Momentangeschwindigkeit.

> „Die Reichweite dieses Kalküls ist unermesslich: Er lässt sich sowohl auf mechanische als auch geometrische Kurven anwenden; Wurzelzeichen bereiten ihm keine Schwierigkeiten und sind oftmals sogar angenehm im Umgang; er lässt sich auf so viele Variablen erweitern, wie man sich nur wünschen kann; der Vergleich unendlich kleiner Größen aller Art gelingt mühelos. Und er erlaubt eine unendliche Zahl an überraschenden

[9] Archibald, 1999, S.411-412

> Entdeckungen über gekrümmte wie geradlinig Tangenten, Fragen *De maximis & minimis*, Wendepunkte und Spitzen von Kurven, Evoluten, Spiegelungs- und Berechnungskaustiken, […].“[10]

Dieses Zitat ist aus der ersten Auflage des Werkes „Analyse des infiniments petit, pour l’intelligence des lignes courbes“ (auf deutsch „Analysis des Unendlichkleinen, zum Verständnis der gekrümmten Kurven“) von Marquis de L’Hospital.

Als de L’Hospital starb, meldete Bernoulli, dass Teile der Arbeit von de L’Hospital von ihm selbst stammen. Diese Annahme Bernoullis wurde geprüft und das Ergebnis war, dass die Grundlagen der Differentialrechnung de L'Hospitals tatsächlich von Bernoulli stammten. In diesem Zusammenhang ist noch anzuführen, dass sich nicht nur Bernoulli sondern auch de L’Hospital von Leibniz inspirieren ließen.[11]

Die Schwierigkeit beziehungsweise das Problem, welches zu lösen angestrebt wird ist, dass wir eine Kurve $y= f(x)$ gegeben haben und wir wollen an jedem Punkt x die Steigung der Kurve bestimmen.

Die Motivationen, die hinter der Lösung des Problems stecken, wurden von den Ideen verschiedenster Mathematiker geprägt. Descartes wollte den Winkel unter dem sich zwei Kurven schneiden, berechnen und Fermat wollte nach Maxima und Minima einer Funktion suchen. Es gab noch verschiedene weitere Anreize das Problem zu lösen.[12]

> „Die lineare Funktion $y = ax + b$. Zusätzlich zum festenWert x betrachten wir den leicht verschobenen Wert $x + \Delta x$. Die zugehörigen y-Werte sind

---

[10] Marquis de L’Hospital zit n. Hairer, 2011, S. 87

[11] Vgl. Volkert, 1988, S.108

[12] Vgl. Hairer, Wanner, 2008, S.88

$y = ax + b$ und $y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$, also $\Delta y = a\Delta x$. Die Steigung der Geraden ist definiert durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und folglich gleich a.[…]"[13]

Nun wird die Parabel $y = x^2$ betrachtet und es wird festgelegt, dass wenn *x* um Δx erhöht wird, dann erhöht sich auch *y* auf $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ sodass gilt $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Daraus ist ersichtlich, dass die Steigung der Gerade gleich $2x + \Delta x$ ist. Nun lässt man Δx gegen Null gehen und man erkennt, dass sich die Sekantengleichung der Tangente der Parabel annähert. Hierzu überlegte sich Leibniz, dass Δx und Δy „unendlich klein" werden können und tauft sie *dx* und *dy*. Der Term $(dy)^2$, der „unendlich viel kleiner" werden kann als *2x dx* wird stiefmütterlich behandelt und daher erhalten wir $\frac{dy}{dx} = 2x$.[14]

Newton nahm von seinen Variablen *v*, *x*, *y*, *z* an, dass sie „allmählich und unaufhörlich anwachsend"[15]. Er schreibt weiter, dass er die Fluxionen mit $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ bezeichnen möchte. Als Fluxionen bezeichnet er „die Geschwindigkeit, um die jede Größe durch ihre allgemeine Bewegung wächst"[16]. Die Werte der Variablen folgten aus der Vernachlässigung der Terme. Sie wurden behandelt als wären sie Null. Newton weigerte sich stets diese Überlegungen zu veröffentlichen.[17] Newton erfasste durch den Satz: „Wenn eine Gleichung gegeben ist, die die Fluxionen von Größen enthält, dann bestimme man das

---

[13] Ebd., S.88

[14] Vgl. ebd., S.89

[15] Newton zit. n. Hairer, 2011, S.90

[16] Ebd., S.90

[17] Hairer, 2011, S.90

Verhältnis der Größen zueinander.“[18], das Grundproblem der Lösung einer Differenzialgleichung.

Weiters im Rahmen der geschichtlichen Entwicklung der Differenzialgleichung sind die Brüder Bernoulli zu nennen, die auf Basis der von Leibniz veröffentlichten Schrift „une énigme plutôt qu’une explication“ (1684) einen dritten Versuch der Entwicklung der Differenzialgleichung starteten. Johann Bernoulli unterrichtete in weiterer Folge nicht nur den Marquis de L’Hospital, der später mit seinem Buch „Analyse des infiniment petits“ der neuen Differentialrechnung zu großem Ansehen viel mehr sogar zu ihrem Durchbruch verhalf, sondern auch Euler. Er hielt fest, dass man unendlich kleine Zahlen zu jeder endlichen Größe hinzu zählen könne ohne ihren Wert zu verändern.[19]

Im späten 18. Jahrhundert wurde vom vorherrschenden Interesse nach speziellen Lösungsmethoden für Gleichungsgruppen bei der gewöhnlichen Differenzialgleichung abgesehen. Es gab keine neuen Forschungsergebnisse mehr, da den besten Mathematikern diesbezüglich nichts mehr einfiel. Es mussten tiefere Einsichten gewonnen werden, bevor neue Erkenntnisse zutage treten konnten. Mehrere Forschungsrichtungen konnten unterschieden werden. Als erstes wurde versucht direkt aus den Gleichungen Auskünfte über deren Ergebnisse zu ersehen. Die zweite Forschungsrichtung untersuchte die Anwendung der Geometrie damit aus ihrer Theorie und ihrem System leichter verständliche Schlüsse gezogen werden konnten. Die Betrachtung des Randweltproblems führte zu besserem Verständnis der gewöhnlichen und partiellen Differenzialgleichung und förderte die Entwicklung weiterer Theorien in diesem Bereich. Die vierte Forschungsrichtung beschäftigte sich mit der Systematisierung verschiedener Teile der Theorie und daraus entstanden

[18] Archibald, 1999, S.412

[19] Vgl., Hairer, 2011, S.90

verschiedene Methoden, zum Beispiel wurde eine komplette Theorie der partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung entwickelt.[20]

Es gab noch weitere Entwicklungen, durch die Einführung von Begriffen vor allem aus der komplexen Analysis. Man kann zum Abschluss sagen, dass die Differenzialgleichung, wie schon erwähnt eine der größten Errungenschaften der Mathematik war, besonders auch im 19. Jahrhundert als Treibkraft dafür sorgte, dass sich die Mathematik weiter entwickelte. In vielen Gebieten der Mathematik hatte die Differenzialgleichung bei der Entwicklung „ihre Finger im Spiel" und nur wenige wurden nicht von ihrem Einfluss geprägt.[21]

1.1.2) Historischer Hintergrund der Differentialrechnung in der Schule

Schon im Kapitel 1.1 wurde festgehalten, dass die Differenzialrechnung eine der größten und bahnbrechendsten Entwicklungen der Mathematik war. Doch auch wenn sie für die Forschung ein wichtiger Punkt ist und auch heute nicht mehr aus dem Lehrplan wegzudenken ist, war ihr Weg in die Schulbücher und in den Lehrstoff/Lehrplan kein leichter.

Obwohl Mathematik 1849 ein Hauptfach in der Mittelschule wurde und im 19. Jahrhundert die Differenzialrechnung nicht nur in der Wirtschaft sondern auch in der Technik und der Industrie zu deren Entfaltung beitrug, musste die Differential- und die Integralrechnung bis zum Anfang des 20. Jahrhunderts warten bis sie endlich ein Teil des Unterrichts wurde. Bevor die Infinitesimalrechnung ihren wohl verdienten Platz in der Schule einnehmen konnte, wurde anfangs der Versuch unternommen sie nicht zur

[20] Vgl., Archibald, 1999, S.431-432

[21] Vgl. ebd., S.432

Schulmathematik hinzu zu fügen, obwohl einige Problemstellungen die Verwendung des Gebietes verlangten. Doch endlich wurden am Ende des 19. Jahrhunderts Stimmen laut, welche die eine Reform des alteingesessenen Unterrichts forderten.[22]

Eine der Hauptängste war, dass eine solche Ergänzung des Lehrplans Kürzungen an anderer Stelle mit sich ziehen würde. Alois Höfler scheute keine Mühen die Differenzialrechnung in den Lehrplan hinein zu argumentieren, obwohl 1892 diese sogar verboten war. [23]

Der „Meraner Lehrplan“ von 1905, bei welchem die Bemühungen von Felix Klein eine maßgebliche Rolle spielten, war eine Art Grundlage, die bei der Erstellung eines neuen Lehrplan helfen sollte, wobei die Kommission, die für die Erstellung zuständig war, schon konkrete Vorstellungen für Lehrplan des Gymnasiums hatte. Sie war dafür, dass der Mathematikunterricht bis an die „Schwelle“ der Infinitesimalrechnung rechen soll, stellte es aber jedem Lehrer frei die „Schwelle“ zu übertreten.[24]

Nach weiteren Anstrengungen die Infinitesimalrechnung in den Lehrplan dauerhaft zu integrieren, wurden nicht nur die Teilgebiete ausgebaut, sondern die Anforderungen an den Mathematikunterricht insoweit verändert, dass die Schüler zu abstraktem Denken angeregt sowie zur praktischen Anwendung hingeführt werden sollten.[25]

---

[22] Vgl. Kapper, 1998, S.3, S.7

[23] Vgl. ebd., S.35-45

[24] Vgl. ebd., S.76-81

[25] Vgl. ebd., S.12, S.43-44

> „Dies Grundgesetz, denke ich, sollte auch der mathematische Unterricht wie jeder Unterricht überhaupt, wenigstens im allgemeinen befolgen: Er sollte, an die natürliche Veranlagung der Jugend anknüpfend, sie langsam auf demselben Wege zu höheren Dingen und schließlich auch zu abstrakten Formulierungen führen, auf dem sich die ganze Menschheit aus ihrem naiven Urzustande zu höherer Erkenntnis emporgerungen hat.“[26]

1.2) Grundwissen

Um uns an das Thema Differenzialrechnung/-gleichung heranzutasten, müssen wir zuerst die Vorbedingungen für die Thematik klären. Die wichtigsten Begriffe wie Funktion, Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit beziehungsweise ihre Definitionen sollen in diesem Kapitel festgehalten werden.

In der Mathematik werden Größen und ihre Zusammenhänge beschrieben. Die folgenden Definitionen sollen diese Zusammengehörigkeit erläutern.

In unserer Umwelt kann alles durch Größen und deren Abhängigkeiten oder Zusammenhängen beschrieben werden. Der Funktionsbegriff ist der zentrale Begriff in der Analysis und daher das beste Mittel diese Abhängigkeiten zu beschreiben.[27]

Nun liefert uns der Zusammenhang der Funktion und ihres Definitionsbereichs folgende Definition:

> „X und Y seien zwei nichtleere, aber ansonsten völlig beliebige Mengen. Unter einer Funktion oder Abbildung f von X nach (oder in) versteht man eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ in vollkommen eindeutiger Weise genau

[26] Blum, 1983, S.226

[27] Vgl., Heuser, 1990, S.103

> ein $y \in Y$ zuordnet. Dieses dem Element x zugeordnete Element y bezeichnen wir auch mit f(x) und nennen es den Wert der Funktion f an der stelle x oder das Bild von x unter f, während x ein Urbild von f (x) heißt. Wird die Definitionsmenge oder der Definitionsbereich, Y die Zielmenge von f genannt."[28]

Weiters ist noch der Grenzwert einer Funktion wichtig, der folgend definiert ist: „Die Funktion *f* sei auf X definiert und ξ sei ein Häufungspunkt von X. Genau dann strebt $f(x) \to \eta$ für $x \to \xi$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x \in X$ mir $0 < |x - \xi| < \delta$ immer $|f(x) - \eta| < \varepsilon$ ist."[29]

Die Stetigkeit ist im Zusammenhang mit den Funktionen auch noch wichtig: „Die Funktion f ist an einer Stelle ξ ihres Definitionsbereichs X genau dann stetig, wenn ξ ein isolierter Punkt von X oder $\lim_{x \to \xi} f(x)$ vorhanden und $= f(\xi)$ ist."[30]

Die Begriffe Stetigkeit und Grenzwert hängen eng mit dem Begriff Differenzierbarkeit zusammen, welche wie folgt definiert ist:

> „Die reelle Funktion f sei auf dem (völlig beliebigen) Intervall I definiert. Wir sagen, *f* se differenzierter im Punkt $\xi \in$ I, wenn $\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ oder, was das selbe ist, $\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ existiert und endlich ist; der Limes wird mit $f'(\xi)$ bezeichnet und die Ableitung von an der f an der Stelle ξ genannt."[31]

---

[28] Heuser, 1990, S.104

[29] Ebd., S.235

[30] Ebd., S.236

[31] Ebd.; S.261

So theoretisch dies hier wirken mag, ist es jedoch für die Behandlung des Themas Differentialrechnung essentiell. Zusätzlich sollen die Schüler ja nicht nur den Grundgedanken und die Rechenweisen verstehen, sondern sich auch der mathematische Fachausdrücke, sprich der mathematischen Sprache", bedienen lernen.

1.3) Lehrplan: AHS

Wenn wir den Lehrplan betrachten, können wir erkennen, dass er in einen allgemeinen und einen fachspezifischen Teil gegliedert ist. Nun im allgemeinen Teil findet man ausführliche Informationen über das allgemeine Bildungsziel, die allgemeinen didaktischen Grundsätze und die Schul- und Unterrichtsplanung. Diese drei Teile des allgemeinen Lehrplans verinnerlichen die Verbindlichkeit, die Verantwortlichkeit und die Freiräume, die bei der Umsetzung der Lehrplans zu berücksichtigen sind.[32]

Nicht nur die Funktion des Lehrplans und seine Gliederung sollten in Augenschein genommen werden, sondern im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit sollte der gesetzliche Auftrag stehen. Dieser wichtige Punkt, nachzulesen im § 34 des Schulorganisationsgesetzes, bezieht sich auf die Aufgabe allgemein bildender höherer Schulen, welche darin besteht, Schüler nicht nur zu einer „umfassenden und vertieften Allgemeinbildung" zu verhelfen, da sie auf die „Hochschulreife" vorzubereiten sind.[33]

---

[32] Vgl. http://www.gemeinsamlernen.at (Stand 29.4.2015)

[33] Vgl. ebd.

Nicht nur in § 32 werden die Aufgaben der Schule festgelegt. Im sogenannten Zielparagraphen dem § 2 des Schulorganisationsgesetzes werden die Aufgaben der österreichischen Schule erläutert:

> „(1) Die österreichische Schule hat die Aufgabe, an der Entwicklung der Anlagen der Jugend nach den sittlichen, religiösen und sozialen Werten sowie nach den Werten des Wahren, Guten und Schönen durch einen ihrer Entwicklungsstufe und ihrem Bildungsweg entsprechenden Unterricht mitzuwirken. Sie hat die Jugend mit dem für das Leben und den künftigen Beruf erforderlichen Wissen und Können auszustatten und zum selbsttätigen Bildungserwerb zu erziehen.
> Die jungen Menschen sollen zu gesunden und gesundheitsbewussten, arbeitstüchtigen, pflichttreuen und verantwortungsbewussten Gliedern der Gesellschaft und Bürgern der demokratischen und bundesstaatlichen Republik Österreich herangebildet werden. Sie sollen zu selbständigem Urteil, sozialem Verständnis und sportlich aktiver Lebensweise geführt, dem politischen und weltanschaulichen Denken anderer aufgeschlossen sein sowie befähigt werden, am Wirtschafts- und Kulturleben Österreichs, Europas und der Welt Anteil zu nehmen und in Freiheits- und Friedensliebe an den gemeinsamen Aufgaben der Menschheit mitzuwirken.
> (2) Die besonderen Aufgaben der einzelnen Schularten ergeben sich aus den Bestimmungen des II. Hauptstückes.
> (3) Durch die Erziehung an Schülerheimen und im Betreuungsteil ganztägiger Schulformen ist zur Erfüllung der Aufgabe der österreichischen Schule gemäß Abs. 1 beizutragen.“[34]

Nach den allgemeinen Aufgaben der Schule betrachten wir nun die allgemeinen didaktischen Grundsätze, nach denen die Lehrer selbstständig, aber unter Einhaltung der zugrunde gelegten „Rahmenbedingungen“, ihren Unterricht gestalten sollen. Lehrer sind bei der Planung und Durchführung ihres Unterrichts an Vorgaben und Richtlinien gebunden. In diesem Zusammenhang werden der Lehrperson auch gewisse Ziele vorgegeben, welche ich im Folgenden gerne beleuchten würde. Was muss ein Lehrer hier bedenken?

---

[34] http://www.jusline.at/index.phpcpid=ba688068a8c8a95352ed951ddb88783e&lawid=90&paid=2 (Stand 29.4.2015)

Er hat „ - Auswahl der Unterrichtsinhalte und Unterrichtserfahren zur Erreichung dieser Ziele vorzunehmen,
- im Unterricht Lernsituationen […] und zu unterstützen,
- vielfältige Zugänge zum Wissen zu eröffnen […]
- Gelegenheiten zu schaffen, Können zu entwickeln und anzuwenden […]“.[35]

Der Lehrer soll seinen Schülern also mithilfe der Unterrichtsgestaltung auf ihr weiteres Leben vorbereiten, in welchem sie dann auch durch ihr gesammeltes Wissen im Stande seien sollen verschiedenste Herausforderungen zu meistern.
Nach dem allgemeinen Teil des Lehrplans, der hier nur in seinen Grundzügen vorgestellt wurde, widmen wir uns dem fachspezifischen Teil, der geteilt ist in Bildungs- und Lehraufgaben, Kompetenzen, Aspekte, didaktische Grundsätze und dem Lehrstoff, all dies bezieht sich auf den Gegenstand in diesem Fall: Mathematik.

Die Bildungs- und Lehraufgabe ist klar definiert:

> „Der Mathematikunterricht soll beitragen, dass Schülerinnen und Schülern ihrer Verantwortung für lebensbegleitendes Lernen besser nachkommen können. Dies geschieht vor allem durch die Erziehung zu analytisch-folgerichtigem Denken und durch die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen.“[36]

Hierzu soll unsere Umwelt und die darin liegenden Vorgänge und Strukturen mit Hilfe von mathematischen Verfahren und Methoden veranschaulicht und

---

[35] http://www.gemeinsamlernen.at (Stand 29.4.2015)

[36] https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2, S. 1 (Stand 29.4.2015)

erläutert werden und dies kann man eigentlich als Kern des Mathematikunterrichts bezeichnen.

Weiters hat „guter“ Mathematikunterricht die Aufgabe verschiedene Kompetenzen zu vermitteln, die ebenfalls im Lehrplan beschrieben werden. Hier werden drei Kompetenzen angeführt: die Kompetenz im Umgang mit mathematischen Sachverhalten und Inhalten aus den verschiedenen Teilbereichen eine gewisse Vertrautheit aufzubauen. Die Kompetenz mathematische Begriffe mit deren Grundvorstellungen zu verbinden, indem Mathematik als präzise Sprache zur Beschreibung von Prozessen, Strukturen und Beziehungen gesehen wird.

Die dritte Kompetenz zielt auf die Ausbildung von mathematischen Fertigkeiten und Fähigkeiten ab, wie darstellend - interpretierendes Arbeiten, formal - operatives Arbeiten, experimentell - heuristisches Arbeiten und kritisch - argumentatives Arbeiten.

Diese vier Arbeitsweisen zeigen auf, wie der Lernende sein erworbenes Wissen anwenden soll. Er soll alltagssprachliche Situationen in mathematische Prozesse übersetzen, mathematische Verfahren und Methoden anwenden, Gesetzmäßigkeiten oder gewonnene Vermutungen untersuchen und vorgegebene Begründungen hinterfragen oder argumentieren.[37]

Der nächste angeführte Teil des fachspezifischen Lehrplans sind die verschiedenen Aspekte der Mathematik. Der schöpferisch - kreative Aspekt impliziert, dass das Denken, die Phantasie und die Kreativität angeregt, unterstützt und begünstigt werden. Die Schulung der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit sowie die Fähigkeit durch die mathematische Fachsprache zu argumentieren und zu kritisieren, wird mit dem sprachlichen Aspekt

[37] Vgl. ebd.

aufgezeigt. Erscheinungen in unserer Umwelt und ihre Beziehungen wahrzunehmen und sie in den eigenen Erfahrungsschatz einzubetten, thematisiert der erkenntnistheoretische Aspekt. Der pragmatisch - anwendungsorientierte Aspekt besagt, dass die Mathematik in vielen Bereichen und Studien Anwendung findet. Die letzten zwei Aspekte sind der autonome, in dem verankert ist, dass durch die Auseinandersetzung mit mathematischen Sachverhalten und Prozessen der Lernende dazu angehalten wird das eigenen Denken vor die Meinung anderer zu stellen und der kulturell - historische Aspekt, der Mathematik einen maßgeblichen unverzichtbaren Stellenwert in der Allgemeinbildung ausspricht.[38]

> „Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen.“[39]

Es werden auch verschiedene didaktische Grundsätze beschrieben, die ich aber hier nicht näher ausführen werde, da didaktische Prinzipien im nächsten Kapitel ausführlicher beleuchtet werden.

Das Einzige, das zum Lehrplan noch hinzugefügt werden muss, ist der Lehrstoff des Lehrplans. In diesem Fall nur der, der 7. Klasse und da auch nur der Teil über das in dieser Arbeit thematisierte Stoffgebiet der Differentialrechnung.

- Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als

[38] Vgl. ebd.

[39] Ebd. S.2

Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen

- Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen
- Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen
- Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)
- Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen
- Lösen von Extremwertaufgaben
- Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit
- Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung

2) Didaktischer Hintergrund

2.1) Unterrichtsprinzipien

Was kann man unter diesem Begriff verstehen? Was sind Unterrichtsprinzipien? „Unterrichtsprinzipien sind für alle Fächer geltende Grundsätze oder Handlungsregeln der Unterrichtsgestaltung. Ihre Beachtung vergrößert und sichert die Effizienz und die Qualität des Unterrichts.“[40]

Es werden zwischen für den Unterricht grundlegenden Prinzipien, den konstitutiven, und denen die für die Unterrichtsgestaltung auf jeden Fall beachtet werden sollen, den Prinzipien der methodischen Gestaltung des Unterrichts, auch regulierende, unterschieden. Die konstitutiven Prinzipien werden als Basis für die Prinzipien der methodischen Gestaltung des Unterrichts gesehen. Beide Prinziparten wurden aus zwei Annahmen legitimiert, nämlich einerseits was guten Unterricht und andererseits was effektiven Unterricht ausmacht. Heutzutage wird aus dem Zusammenspiel von Lehrplan- und Schulvorgaben, Lerninhalten, Zielsetzungen und Ausgangslage und Besonderheit der Lernenden die Qualität des Unterrichts ermessen. Die Effektivität des Unterrichts kann im Großen und Ganzen daran eruiert werden, als man darauf achtet ob die Schüler einerseits den erwarteten Lernerfolg beziehungsweise -zuwachs erzielt haben und andererseits ob sie durch Aufbau und Sicherung der Selbst-, Sozial- und Sachkompetenz das Lehrziel zu ihrem Lernziel übergeführt haben.[41]

---

[40] Wiater, 2008, S.6

[41] Vgl. ebd.

2.2.1) konstitutive Unterrichtsprinzipien

Wir haben bereits geklärt, was Unterrichtsprinzipien sind und warum wir sie brauchen. Die Frage, die noch nicht geklärt ist, wie „Unterricht“ beziehungsweise „unterrichten“ eigentlich definiert werden kann. Seit J. F. Herbart wird durch das „Didaktische Dreieck“, welches aus dem Zusammenspiel von Lehrer, Schüler und Stoff oder Inhalt besteht, das Unterrichten als wechselwirkendes Agieren darstellt. Damit verdeutlicht er die elementaren Grundbestandteile, welche für erfolgreiches Verständnis notwendig sind. Der Lehrer ist dem nach das Verbindungsglied zwischen Inhalt und Schüler und daher muss er seinen Unterricht auf drei Punkte orientiert, Schüler, Sache und Handlung, gestalten. Diese drei Punkte die Schülerorientierung, die Sachorientierung und die Handlungsorientierung sind die Basis für alle Unterrichtsprinzipien, ohne welcher kein Unterricht stattfinden sollte.[42]

„Schülerorientiert unterrichten meint daher, die Lehrerzentriertheit zugunsten einer Unterrichts aufgeben, der vom Schüler her, mit dem Schüler zusammen und auf den Schüler hin geplant und gestaltet ist.“[43]

Dies bedeutet den Unterricht so zu gestalten, dass die Wesensmerkmale des Schülers berücksichtigt, auf seine Entwicklungsstufe geachtet und die selbstständige Entwicklung seiner Fähigkeiten bedacht werden.[44] Diese Punkte muss jeder Lehrer in seiner Planung des Unterrichts einfließen lassen, um auf den Schüler Rücksicht zu nehmen. So entscheidet sich ob er die Klasse vor der er steht erreichen kann und die Schüler auch in der Lage sind die an sie gestellten Anforderungen zu bewältigen. Vernachlässigt ein Lehrer einen

---

[42] Vgl. ebd. S.8

[43] Ebd., S.9

[44] Vgl. ebd. S.9

schülerorientierten Unterricht so findet er sich schnell vor irritierten Gesichtern wieder deren Selbstständigkeit in weiterer Folge natürlich auch gehemmt ist.

„Die Sachorientierung besagt, dass die Unterrichtsthemen sachgerecht behandelt werden müssen sowie beim Schüler zu Sachverstand und zu einer sachlichen Einstellung führen sollen."[45]

In der Verbindung Lehrer- Schüler dreht es sich prinzipiell um eine Sache beziehungsweise einen Inhalt, der dem Schüler vom Lehrer nahegebracht werden soll. Hier muss beachtet werden, dass sich die Sachorientierung in drei Teile aufspaltet nämlich in die Sachgerechtigkeit, in den Sachverstand und in die Sachlichkeit. Sachgerechtigkeit bedeutet nicht anderes, als die Vermittlung von konkreten, den neuesten wissenschaftlichen Standards genügenden Informationen. Weiters müssen diese Inhalte natürlich akkurat didaktisch aufbereitet an die Schüler herangetragen werden. „Sachverstand" wird in diesem Fall also auch als „Sachkompetenz" verstanden. Ist jemand also in einem Sachgebiet versiert, wird ihm als Experte auch „Sachverstand" zugesprochen. Das Ziel des Lehrers und seines Unterrichts ist der Erwerb von dem Sachverstand eines jeden Schülers. Der letzte Teil ist die Sachlichkeit. Sie ist im Prinzip der objektive, emotionslose Umgang mit der Sache.[46]

„Die Handlungsorientierung des Unterrichts beachtet, dass Lernen eine aktive, selbst gesteuerte Tätigkeit des individuellen Schülers/der individuellen Schülerin ist"[47]

Bei dem Unterrichtsprinzip Handlungsorientierung wird darauf abgezielt, dass der ganze Prozess nicht nur des Unterrichtens sondern vor allem des Lernens

---

[45] Ebd., S.10

[46] Vgl. ebd., S.11f

[47] Ebd., S.14

eine aktive Handlung darstellt, die vom Schüler von sich aus getätigt werden muss. Der Schüler wird durch einen Lerninhalt angeregt tätig zu werden, zu lernen beziehungsweise dazu zu lernen. Dies geschieht natürlich nur, wenn der Schüler seine Aktivität als sinnvoll erachtet. So ist es schließlich in sämtlichen Situationen, da jeder Mensch für sich abwägt, ob eine Handlung seine Neugier oder seine Bedürfnisse befriedigt und wenn dies der Fall ist, wird er tätig.Also trifft dieses Prinzip natürlich auch auf den Lernprozess eines Schülers zu. Der Unterricht soll so gestaltet werden, dass die Schüler zu einem selbstständigen und selbstverantwortlichen Lernen angehalten werden und nicht nur eine theoretische Ahnung von Sinnhaftigkeit und Bedeutung erhalten. Erst durch das eigenständige Denken kann ein Hinterfragen und Experimentieren stattfinden, welches ein verinnerlichendes Lernen voraussetzt.[48]

2.2.2) Prinzipien der methodischen Gestaltung des Unterrichts

Diese Prinzipien der methodischen Gestaltung des Unterrichts sind im Gegensatz zu den vorher erwähnten konstitutiven Prinzipien bei der konkreten Planung und Gestaltung von Unterrichtssequenzen einzusetzen. Ich werde sie daher nur kurz aufzählen, da sie für mein weiteres Vorhaben in dieser Arbeit nicht relevant sind, aber meiner Meinung nach trotzdem Erwähnung finden sollen.

Diese acht Prinzipien wären Selbsttätigkeit, Differenzierung, Veranschaulichung, Motivierung, Ganzheit, Zielorientierung/ Zielverständigung, Strukturierung und Ergebnissicherung/Nachhaltigkeit.
Im Buch „Unterrichtsprinzipien“ von Werner Wiater wird zu jedem Prinzip eine Art Definition oder Erklärung angeführt, die für meine Anführung ausreicht.

---

[48] Vgl. ebd., S.13f

> „Das Unterrichtsprinzip Selbsttätigkeit besagt, dass Schülerinnen/Schülern Gelegenheit gegeben werden soll, einen Sachverhalt mit Hilfe ihrer individuellen Lern- und Handlungsmöglichkeiten zu bearbeiten, damit sie dabei ihre Selbstständigkeit, Selbstbestimmung und Selbstidentität entwickeln können.“[49]

Hier wird auf die Ausbildung von Selbständigkeit abgezielt. Schüler sollen im Unterricht so vorbereitet werden, dass sie mit ihrem erworbenen Wissen nicht nur die „Hausübungen“ oder andere vom Lehrer gestellten Aufgaben lösen können, sondern auch in Alltagssituationen selbstständig agieren können.

„Das Unterrichtsprinzip Differenzierung verlangt, dass die Heterogenität der Schülerinnen/Schüler einer Lerngruppe oder Klasse schul- und unterrichtsorganisatorisch berücksichtigt werden.“[50]

Der Unterricht soll nicht nach der Persönlichkeit des Lehrers gestaltet werden, sondern bei der Vorbereitung von Unterrichtssequenzen und auch bei der Schulorganisation soll auf die Verschiedenartigkeit der einzelnen Schüler einbezogen werden.

„Das Unterrichtsprinzip Veranschaulichung fordert, Lerninhalte so aufzubereiten, das sich Schülerinnen/Schüler über Sinneseindrücke eine genaue Vorstellung und ein sachgemäße Kenntnis davon verschaffen können.“[51]

Da es verschiedenste Lerntypen gibt, soll im Unterricht der Stoff nicht immer auf die gleiche Weise dargeboten werden, sondern durch den Einsatz verschiedener Medien und Methoden den Schülern präsentiert werden. Im

---

[49] Ebd., S.16

[50] Ebd., S.28

[51] Ebd., S.42

heutigen Computerzeitalter erweitern sich diese Möglichkeiten natürlich um ein Vielfaches. Dies erschließt nicht nur dem Schüler neue Möglichkeit sich den Stoff einzuverleiben sondern auch der Lehrer kann neue Aufbereitungsmöglichkeiten anwenden.

„Das Unterrichtsprinzip Motivierung drückt aus, dass im Unterricht die Lern- und Leistungsbedürfnisse der Schülerinnen und Schüler geweckt, erhalten und berücksichtigt werden sollen."[52]

Der Unterricht soll so gestaltet und der Stoff so aufbereitet sein, dass die Schüler dadurch angespornt werden im Unterricht aufzupassen und sich den Unterrichtsinhalt zu verinnerlichen. Ohne motivierte Schüler hat jeder Lehrer ein schweres Los, denn den ganzen Tag in desinteressierte Gesichter zu blicken kann kein schönes Gefühl sein und schmälert die Motivation und so beginnt ein nicht konstruktiver Teufelskreis für beide Seite. Das bedeutet man ist „seines Glückes eigener Schmied", je ambitionierter man an das Aufbereiten des Stoffes herangeht, desto mehr Schüler kann man motivieren und desto mehr wird man dadurch animiert.

„Das Unterrichtsprinzip Ganzheit verlangt, Unterrichtsinhalte mehrperspektivisch zu behandeln und dabei den Schülern/Schülerinnen ein bedeutungsvolles Lernen mit Kopf, Herz und Hand zu ermöglichen."[53]

Hier wäre zu ergänzen, dass zuerst die Aufspaltung in die einzelnen Blickwinkel des Zusammenspiels zwischen Person des Schülers, dessen Auffassungsgabe und des Unterrichtsinhalts ermöglicht auf die einzelnen Punkte einzugehen und sie bestmöglich zu interpretieren und daraus Schlüsse für den Unterricht zu ziehen. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse befähigen

---

[52] Ebd., S.51

[53] Ebd., S.62

aus den Einzelteilen wieder eine Einheit ein Ganzes zu bilden, welches dem Schüler ein Lernen mit all seinen Sinnen beziehungsweise ein ganzheitliches Lernen ermöglicht.

„Das Unterrichtsprinzip Zielorientierung/Zielverständigung verlangt, die Ziel-Inhalts-Dimension des Unterrichts an schrittweise zu erreichenden Zielen auszurichten, diese aber mit den Schülern kommunikativ zu verhandeln."[54]

Bei der Vorbereitung von Unterrichtssequenzen sollte sich jeder Lehrer überlegen, was die Schüler nach dieser Einheit verinnerlicht haben sollen beziehungsweise welches Ziel in einer vorbereiteten Einheit verfolgt wird. Die Schüler werden allmählich an das Ziel herangeführt und sie versuchen wiederum mit Fragen herauszufinden, ob sie das zugrundeliegende Unterrichtsziel erfasst und richtig verstanden haben.

> „Das Unterrichtsprinzip Strukturierung fordert, dass sich der Erwerb von Wissen, Einstellungen und Verhaltensweisen beim Schüler in Form eines geordneten Aufbaus vollziehen soll. Dazu müssen die Struktur des Lerninhalts, die Struktur des Lernenden und die Struktur der Methode zusammenpassen."[55]

Der Unterricht muss so vorbereitet und gehalten werden, dass eine klares Gerüst zu erkennen ist, nach dem die Schüler das geforderte Wissen, Einstellungen und Verhalten erarbeiten können. Damit das passieren kann, muss vorausgesetzt werden, dass die einzelnen Systeme Lerninhalt, Schüler und Methode harmonieren.

> „Das Unterrichtsprinzip Ergebnissicherung/Nachhaltigkeit fordert didaktische Maßnahmen, damit Schülerinnen und Schüler die im Unterricht erworbenen beabsichtigten und förderlichen Lerneffekte

[54] Ebd., S.71

[55] Ebd., S.81

> systematisch verinnerlichen und dauerhaft im Gedächtnis verfügbar haben."[56]

Es hat keinen Sinn wenn Schüler den Stoff, der ihnen vermittelt wird, nicht in ihrem Kopf abspeichern, so dass er beständig dort verankert ist. Damit einem Schüler dies gelingt müssen Initiativen ergriffen werden. Im Mathematikunterricht zum Beispiel haben wir die Hausübung, also Übungen zur Festigung des Gelernten.

Diese acht Unterrichtsprinzipien sollen die Gestaltung des Unterrichts vereinfachen, da man sich an die Richtlinien halten und sie als Grundgerüst einsetzten, kann. Man erkennt auch, dass sie unvermeidbar miteinander verbunden sind, also ineinander übergehen. Einige der Prinzipien sind so stark verknüpft, dass das eine ohne das andere Element gar nicht existieren kann, wie zum Beispiel das Prinzip der Veranschaulichung und der Motivation.

2.2) Didaktische Prinzipien im Mathematikunterricht

Wenn man die Begriffsdefinitionen der beiden Wörter im Wörterbuch nachschlägt, ergeben sich folgende Definitionen: didaktisch bedeutet: „das Lehren und Lernen, die Vermittlung von Lehrstoff betreffend;[..]"[57] und Prinzip ist eine „allgemein gültige Regel, die jemand zur Richtlinie seines Handelns macht, durch die er sich in seinem Denken und Handel leiten lässt; Grundsatz"[58]. Laut Definition sind also die Didaktischen Prinzipien Grundsätze beziehungsweise Richtlinien, die sich auf das Vermitteln von Lehrstoff

---

[56] Ebd., S.90

[57] http://www.duden.de/rechtschreibung/didaktisch (Stand 29.4.2015)

[58] http://www.duden.de/rechtschreibung/Prinzip (Stand 29.4.2015)

beziehen. Sie sollen helfen im Unterricht die idealen Lernbedingungen für Schüler zu schaffen, damit diese die vorgegebenen Aufgaben, die die Schule beziehungsweise die Gesellschaft an sie stellt, so gut wie möglich meistern können. Für mich, als angehende Lehrperson, ist die Einhaltung solcher Richtlinien eine Herausforderung, denn nicht für jede Unterrichtseinheit und den dazugehörigen Lehrstoff können die selben Prinzipien benutzt werden. Das Ausbalancieren der Kooperation der verschiedenen Prinzipien sowie das Anwenden der zum Stoff passenden Prinzipien ist die erste große Hürde für jeden Lehrer, die er überwinden muss am Weg zum optimalen Unterricht.

In den folgenden Unterpunkten werden verschiedene didaktische Prinzipien angeführt. Was in der Theorie mit klaren Abgrenzungen gut klingt, kann in der Praxis schnell verschwimmen. So entstehen meist praktische Mischformen der verschiedenen Prinzipien. [59]

2.2.1) Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus versus operatives Prinzip

In diesem Prinzip wird festgelegt, dass die Mathematik als logisch-systematisch strukturierte Wissenschaft nur durch ein logisch-systematisches Aufeinanderfolgen von Lehrstoff den Lernenden näher gebracht werden kann. Dieser Aufbau des Lernprozesses soll den besten Lernerfolg nach sich ziehen. Das Erlernen der Mathematik kann dem Erklimmung einer Leiter verglichen werden, bei der man Sprosse für Sprosse nach oben klettert. Dem nach wird der zu erlernende Stoff in Teile gespalten und nach seiner Schwierigkeit und dem logischen Zusammenhang in eine Reihenfolge gebracht. Das wichtigste an

[59] Vgl. Hauer-Typpelt, 1998, S.118

diesem Prinzip ist also die Zerlegung der Inhalte in möglichst kleine Stücke und die Abkapselung der Schwierigkeiten.[60]

Die Kritik am linear-sukzessiven Aufbau wurde am Zweifel vieler Mathematikdidaktiker begründet, da ein gestückelt angesetzter Lerninhalt weiter im Lernprozess einfließt beziehungsweise beibehalten wird. Weiters kommt es bei der Einhaltung des linear-sukzessiven Aufbaus automatisch zu einem sogenannten „Vorratslernen". Das bedeutet, dass in gewissen Lernsituationen Definitionen oder Begriffe auftauchen, die im Moment nicht benötigt werden, daher also als „Vorrat" für den geeigneten Moment der Anwendung aufgehoben wird.[61]

Aufgrund der laut werdenden Kritik wurde ein Gegenstück zum linear-sukzessiven Aufbau entwickelt, nämlich das „operative Prinzip". Es lässt zu, dass einzelne Teile eines Inhaltes aufgezeigt werden ohne auf die Verbindung der einzelnen Teile zu vergessen. Es betrachtet die Lerninhalte als operatives Ganzes und beachtet deshalb auch die Beziehungen zwischen ihnen. [62]

---

[60] Vgl. Hauer-Typpelt, 1998, S.119

[61] Vgl. ebd.

[62] Vgl. ebd.

Tabelle[63]: Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus versus operatives Prinzip - die wichtigsten Merkmale

Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus	**Operatives Prinzip**
Zerlegung in kleine Einheiten	Gesamtbehandlung zusammengehörender Einheiten;
Isolierung schwieriger Einheiten	Simultanabhandlung
Isolierung mathematischer Methoden	verschiedener Schwierigkeitsgrade,
Isolierung mathematischer Gebiete	Methoden und/oder Gebiete;
Fertigkeitsübungen	operative Durcharbeiten zwischen Einführung
Regellernen	und Übung; breitangelegte Phase des
Vorratslernen	experimentierenden, spielerischen Lernens und Übens

In dieser Tabelle sieht man die jeweiligen wichtigsten Merkmale der Prinzipien gegenübergestellt.

Einer der Didaktiker, welcher das operative Prinzip ergänzen und modifizieren wollte, war Erich C. Wittmann. Er baute das Merkmal der „Simultanbehandlung“ zu dem Integrationsprinzip aus. Er legte fest, dass man besser mit seiner Umwelt kooperieren kann, wenn man über vollständige Einsichten beziehungsweise Schemata verfüge und diese in Beziehungsnetzen verankert. Dem Unterricht kommt also die Aufgabe zu, nämlich diese Beziehungsnetze und Sinnzusammenhänge zu entwickeln. Weiters forderte Wittmann, dass man dem linear-sukzessiven Aufbau den Rücken kehrt und das Prinzip des Lernens in Zusammenhängen und das Prinzip der integrierenden Wiederholung in den Vordergrund des Lernen rücken sollte. Dies bedeutet das im Unterricht das integrieren des Inhalts in die besagten Beziehungsnetze

[63] Ebd., S.120

bereits bei seiner Erarbeitung erfolgen soll und dies würde in separaten Wiederholungsstunden am besten umsetzbar sein.[64]

Meiner Meinung nach wäre also als logische Konsequenz einer Verbindung oder Verschmelzung der besten Merkmale des linear-sukzessiven Aufbaus und des operativem Prinzip die beste Lösung. Einerseits können Lerninhalte in kleine Teile zerlegt werden und damit Probleme gesondert betrachtet und Schritt für Schritt erläutert werden, und andererseits wird der Gesamtkomplex, und damit der Sinnzusammenhang, nicht ausser Acht gelassen. So kann auch das „Vorratslernen“ vermieden werden und außerdem kann es die Motivation der Schüler beim selbstständigen Lösen von Problemstellungen steigern.

2.2.2) Das Prinzip des deduktiven Aufbaus

Bei diesem Prinzip rückt die logisch-systematische Anordnung des Stoffinhalts noch stärker in den Fokus als es bei dem linear-sukzessiven Aufbau der Fall ist. Dadurch soll eine enge Verbindung mit der Mathematik als exakte und allgemeingültig Wissenschaft hergestellt und die Theorien, sowie Axiome, Sätze und Definitionen sollen logisch-systematischen Abfolge unmittelbar an den Schüler weitergegeben werden. Weitere mathematische Inhalte sollen, ausgehend von den Definitionen und Sätzen, her- beziehungsweise abgeleitet werden. An den Schüler wird nur noch die Anforderung gestellt, den fertigen Lerninhalt in seinem Wissen zu verankern und ihn wenn nötig wiederzugeben oder besser gesagt ihn jederzeit abrufen zu können.[65]

Streng genommen gehört das Prinzip des deduktiven Aufbaus nicht zu den didaktischen Prinzipien, doch seine Verbreitung im Gebiet der Mathematik und

---

[64] Vgl. ebd., S.120

[65] Vgl. ebd., S.124

Eigenschaften wie genaue Begriffserklärung, das zur Verfügungstellen von später benötigten Sätzen oder Axiomen oder auch seine Bemühung möglichst allgemein gültig zu sein, legitimiert es, in ausgewählten und geeigneten Unterrichtseinheiten eingesetzt zu werden. Es gibt in der Mathematik keine andere Methode, mit der das gleiche fachliche Ziel, die Bereitstellung einer Wissensbasis, mit weniger Zeit und Aufwand erreicht wird.

Andere didaktische Prinzipien setzen in ihrer Anwendung fachliches Hintergrundwissen und diffizile Fähigkeiten voraus, egal ob von der Anwendung und des Beherrschens der Lehrsätze und Rechenregeln, oder vom Lösen von Gleichungssystemen die Rede ist.[66]

Das deduktive Prinzip ist in der Universität in vielen Bereichen nicht wegzudenken und aufgrund dieser Feststellung ist eine Verwendung in der Schule unumgänglich. Hier soll auf einer möglichst niedrigen Ebene der Begriffsbildung gearbeitet werden, dabei sei zu beachten, dass sogenannte Vorratslernen, welches im vorigen Kapitel schon erwähnt wurde, vermieden werden soll.[67]

Je nach Autor liegen die zentralen Angelpunkte der Kritik an der deduktiven Methode anders, trotzdem lassen sich Hauptkritikpunkte herausfiltern.

Erstens wird festgelegt, dass mathematische Prozesse und Gesetzmäßigkeiten nicht erlernt oder verstanden werden können, wenn sie durch eine logisch-systematische Hierarchie als fertiges „Produkt“ dargeboten werden. Weiters werden bei der deduktiven Methode heuristische Tätigkeiten, wie experimentieren, prüfen oder vermuten, total außer Acht gelassen. Diese sind jedoch wichtig in der Mathematik. Aus dieser Überlegung lässt sich der dritte

---

[66] Vgl. ebd., S.125

[67] Vgl. ebd., S.125

Kritikpunkt ableiten, da auch in der Geschichte der Mathematik nicht nach einem deduktiv-axiomatischen Schema vorgegangen wurde. Der letzte Kritikpunkt bezieht sich darauf, dass die Denkentwicklung oder Verbindung der Mathematik mit anderen Interessen der Schüler keine Rolle spielt.[68]

2.2.3) Das genetische Prinzip

Der genetische Unterricht rückt Entwicklungsprozesse in den Mittelpunkt und behandelt Ergebnisgewinnung eher als untergeordnete Aufgabe des Unterrichts.

„Die Echtheit des mathematischen Unterrichts … beginnt also genau dort, wo wirkliche Mathematik ihren Ursprung hat: bei den Fragestellungen. […][69]

Aus diesem Zitat von Wittenberg kann man auf die Basis des genetischen Prinzips schließen. Den Schülern sollen nicht fertige Theorien vorgeworfen werden, sondern durch Fragen und Problemstellungen sollten sie aktiv an die Materie herangeführt werden und dazu angehalten werden die Theorien wiederzuentdecken.

> „Die Mathematik wird nicht als Fertigprodukt vorgegeben, sie soll durch Schüler vielmehr wiederentdeckt werden. Das soll allerdings nicht bedeuten, daß jeder Schüler den gesamten historischen Prozeß des Finden mit allen Irrtümern durchstehen muß oder soll.“[70]

Das genetische Prinzip ist aus dem Mathematikunterricht von heute nicht mehr auszuklammern, da genau der Hintergrund dieses Prinzips die Basis für den bestehenden Unterricht bildet.

---

[68] Vgl. ebd., S.126

[69] Wittenberg zit. n. Führer, 1997, S.56

[70] Christmann zit. n. Hauer-Typpelt, 1998, S.127

In der Vorlesung „Einführung in die Fachdidaktik“ wurde auch der genetische Mathematikunterricht behandelt. Hier wurde festgehalten wie entwickelnder Unterricht aussehen soll. Bei jedem Thema wird an das Vorwissen der Schüler angeknüpft werden, was eine Schwierigkeit darstellt, da nicht immer alle Schüler die selbe Wissensbasis zur Verfügung haben. Begriffe und Definitionen sollen erst dann den Schülern zugemutet werden wenn es der Unterrichtsstoff beziehungsweise die Aufgabenstellung dies verlangt. Aber wenn sie einmal in den Unterricht eingeführt wurden, müssen sie zum besseren Verständnis und zur nachhaltigen Sicherung verwendet werden.

Die einzelnen Begriffe, Sätze oder Definitionen werden nicht einfach aufgezählt und mit stupiden Memorierenden verknüpft, sondern durch Problemstellungen herausgefiltert, entwickelt beziehungsweise hergeleitet werden. Aus diesen Problemlösungen können schlussendlich weiter Problematiken konstruiert werden. Der Schüler soll durch Spezialfälle stückweise an den allgemeinen Fall herangeführt werden. Für ein besseren Verständnis arbeitet man also nicht von Anfang an mit Verallgemeinerungen, sondern mit konkreten Fallbeispielen, dessen Darbietung der einzelnen Themengebiete das Ziel sein soll. Wichtig hierfür ist die lückenlos und sprungfreie Erarbeitung relevanter Informationen, welche der besseren Verarbeitung und Verankerung des Gelernten dienen soll.[71]

Der Sinn dieser Vorgehensweise ist eine schlichte Kompetenzorientierung welche durch selbstständiges Denken eine Art „Aha-Effekt“ auslösen soll und die Schüler dadurch ermutigt und motiviert. Dadurch wird sein Verständnis für die Materie erweitert und vertieft und alles was selbst erarbeitet wurde, wird schneller in das Wissen eingebettet.

[71] Vgl. Malle, 2004

2.2.4) Das Spiralprinzip

Das Spiralprinzip hat seinen Namen, aufgrund der Art und Weise wie der Lehrstoff immer wieder wiederholt, neu aufbereitet oder auf einer anderen Ebene vereinfacht dargestellt wird, also spiralförmig immer wieder zu Tage tritt. Im Mathematikunterricht sollen verschieden Inhalte schon auf früheren Ebenen in vereinfachter Form eingeführt werden und dann immer wieder variiert und umformuliert werden damit er für die komplexeren Inhalte später schon im Grundstock vorhanden ist und mit ihm gearbeitet werden kann. So werden die Inhalte im Gedächtnis verankert und können jederzeit abgerufen werden.[72]

Der Lernpsychologe J. S. Bruner legte die Basis zu diesem Prinzip, das nicht nur „Spiralprinzip" sondern auch „Prinzip der immanenten Wiederholung" genannt wurde. „An den Anfang setzen wir die Hypothese: Jedem Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden."[73]

> „1. Das *„Prinzip der immanenten Wiederholung"* hat sich als Stoffreduktionprinzip der Lehrplan- und Lehrgangskonstruktion bewährt. Dabei ist vorausgesetzt, daß das Auswahlproblem für *exemplarische Lerngegenstände* anderweitig sinnvoll entschieden wurden.
> 2. Mit dem „Spiralprinzip" sollten aber nicht nur besonders bedeutende Stoffe, sondern auch wenige, ausgewählte lohnende Frageweisen, Strategien, Heuristiken und Methoden der Begriffsbildung entfalten, bewußtgemacht, vertieft und verankert werden, die vernünftigerweise als fachspezifische oder allgemeine *„fundamentale Idee"* in Frage kommen. […]"[74]

Es kann nur nochmal betont werden, dass das Spirialprinzip ein wichtiges Fundament zur Verinnerlichung von mathematischen Inhalten darstellt. Durch

---

[72] Vgl. Blum, 1983, S.233

[73] Ebd., S.233

[74] Führer, 1997, S.64

das ständige Wiederaufgreifen, Erweitern und Verdeutlichen können von Grund auf auch komplexere mathematische Begriffe im Gedächtnis der Lernenden aufgebaut und verankert werden. Hier wird auch die Lernmotivation gefördert, denn wenn ein neues Thema angesprochen wird der Schüler aber herausfindet, das bekannte Erläuterungen, die er in seinem Grundwissen eingebettet hat, Basis dafür sind, wird schneller in den Lernprozess einsteigen.

Das bedeutet jedoch auch das Stoffinhalte, die nicht wiederholt werden, ohne Vernetzung bleiben und daher schneller in Vergessenheit geraten.

2.2.5) Mathematik als Tätigkeit - Problemlösen

Die bisher genannten Prinzipien lassen eine wichtige Fragestellung offen, nach der Aktivität der Schüler im Unterricht.

Wenn von einem schüleraktivem Unterricht gesprochen wird, dann wird nicht das allseits beliebte passive Zuhören, sondern selbstständiges Denken und Tätigkeiten, Problemlösen und Analysieren gemeint. Dies wird auch als „entdeckendes“ Lernen bezeichnet. Damit wird die Problemlösebereitschaft erhöht, da das entdeckende Lernen motiviert Probleme selbst zu lösen und das impliziert das der Stoff besser verankert ist und somit sicheres Wissen darstellt. Die Schüler bilden dadurch eine Fähigkeit aus, die sie das bereits gelernte auf andere Situationen anwenden lässt, selbst in außer-mathematischen Bereichen können die erlernte Problemlösungsstrategien angewendet werden und steigert dadurch die Fähigkeit Probleme zu lösen.[75]

Nun stellt dies den Lehrer vor eine Schwierigkeit, soll er dem Schüler freie Hand lassen, ihn forschen und entdecken lassen und auch Misserfolge aus

[75] Vgl Hauer-Typpelt, 1998, S.130-131

denen er auch lernen kann, erleben lassen oder soll er den Schülern die ausgereiften Ideen der vorherigen Mathematikergenerationen auf sicherem Wege präsentieren. Letzteres wäre auch sicherer für die Erreichung des Lehrziels, da der erste Weg einen enormen Zeitaufwand in sich birgt. Der Zeitfaktor spielt im ganzen Unterrichtssystem eine große Rolle. Besonders bei der Methode des entdeckenden Lernen sollte Zeit keine große Beachtung finden, doch ohne jegliche Zeitvorgaben, wäre es für alle Beteiligten eine „never-ending Story" und das Lehrziel könnte nicht erreicht werden.[76]

Die große Kunst wird es sein, eine Art Mischform zu konstruieren, in der auf lange Sicht gesehen durch Schüleraktivität kognitive Strategien aufgebaut und aber auch in kürzeren Etappen durch Lehreraktivität die fachspezifischen Kenntnisse beizubringen und zu festigen sind.

Was im Mathematikunterricht aber durchaus zu Anwendung kommen sollte, um den Bereich des entdeckenden Lernen abzudecken sind Projektarbeiten.
Dieses Prinzip findet sich im zweiten Teil der Zentralmatura wieder, der auf das Problemlösen ausgerichtet ist

[76] Vgl. Hauer-Typpelt, 1998, S.132-134

3) „Einführung“ des Themas Differenzialrechnung in der Vorlesung

Im Laufe unseres Studiums beschäftigen wir uns viel mit der Analysis. Schon im ersten Abschnitt durchläuft von der „Einführung in die Analysis“ über die „Analysis in einer Variable“ bis hin zur „Reelle Analysis in mehreren und komplexe Analysis in einer Variablen“. Erst im zweiten Studienabschnitt beschäftigt man sich mit dem Teilgebiet: mit der Differenzialrechnung. Um die Definitionen und Sätze, die zu diesem Thema gehören zu verbinden, wollen wir uns den Aufbau dieser bestimmten Vorlesung ansehen, wie uns Studenten dieses Thema näher gebracht. Hierbei ist anzumerken, dass man wahlweise eine zweite Vorlesung zu diesem Thema im Rahmen der Schulmathematikvorlesungen, die Schulmathematik 6: Differenzial- und Integralrechnung, besuchen kann. Auch hier habe ich vor den Aufbau näher zu beleuchten.

Die Problematik, welche sich ein Professor hierbei stellen muss, ist die unterschiedliche Wissensgrundlage vieler Studenten

Alle Informationen, die ich hier verwende sind aus der Mitschrift zu „Differenzialgleichung für LAK“[77] vom Wintersemester 2011 und das Skriptum aus „Schulmathematik 6: Differential- Integralrechnung“ auch vom Wintersemester 2011[78].

[77] Vortragender: ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

[78] Vortragende: Prof. Mag. Dr. Maria Koth

3.1) Aufbau der Vorlesungen zum Thema Differenzialrechnung

Anders als bei den Schulbüchern, die im nächsten Kapitel analysiert werden, können bei den Vorlesung Mitschriften, die maximal selber farblich gestaltet werden können, nichts anders als der Aufbau näher betrachtet werden. Auch Skripten oder Bücher für das Studium glänzen nicht gerade mit ihrer Farbgebung, was auch meiner Meinung nach nicht notwendig ist, da bei Studenten ein grundsätzliches Interesse anzunehmen ist, welches nicht erst durch Kolorierung motiviert werden muss.

Großteils ist die Gestaltung der Vorlesung vom Professor abhängig, er entscheidet wie er seinen Vortrag abhält, natürlich im Rahmen der festgelegten Definitionen, Sätze und Beweise, sprich den Inhalt den er zu vermitteln hat.
So ist es unmöglich zwei Vorlesungen miteinander zu vergleichen, daher stütze ich mich vorrangig auf den Aufbau des Skripts und Mitschrift, wodurch ich didaktische Prinzipien abzuleiten versuche.

3.1.1) „Differentialgleichung für LAK“

Die Mitschrift hat ein Großkapitel und wird dann unterteilt in viele Unterpunkte, die einen übersichtlichen Ablauf darstellen soll. Manche unterteilen sich dann nochmals in kleinere Abschnitte. Die einzelnen Abschnitte sind anderes aufgebaut, das heißt es wird nicht wie in zum Beispiel Schulbücher immer gleich vorgegangen, also immer mit Definition, Aufgaben und so weiter, sondern jeder Unterpunkt wird anhand seines Inhalts gestaltet. Die Einleitung dessen, ist natürlich auch vom Professor abhängig.

Diese Art Skript startet mit einer Einleitung, in der zuerst geklärt wird, was Differentialgleichung bedeutet, gefolgt von Schreibweise Erläuterungen. Dann der erste „Satz“, in den Vorlesungen dreht sich alles prinzipiell um Sätze,

Definitionen, Korollare, Bemerkungen und Beweise. Wenn man einen Satz also vorgibt folgt sofort ein Beweis, um die Richtigkeit dieses Satzes zu untermauern. Dann folgt ein ausgearbeitetes Beispiel, welches zuvor angeführte Wissen näher erklären und verdeutlichen soll. Sie sind meistens sehr lang und ausführlich, da der zugrundeliegende Inhalt auch anspruchsvoller ist, als man es von der Schule her gewöhnt ist.

Im nächsten Abschnitt wird dann durch Definitionen und Beispiele erläutert was eine Differentialgleichung ist und es werden verschiedene Formeln und Bemerkungen angegeben. Ebenso werden auch bei den Beispielen verschiedene Lösungsmethoden angeführt. Von den Kapiteln „Was ist eine Differentialgleichung“, über speziellere Betrachtungen hin zu den Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und das sind erst die ersten drei von vielen mehr, die den Studenten die Differentialgleichung näher bringen sollen.

Bei den einzelnen Beispiel wird oft auch nach „Fällen“ der Anforderungen unterschieden. Hier wird prinzipiell vom Spezialfall zur Verallgemeinerung gearbeitet. Wichtige Sätze wie der Existenz- und Eindeutigkeitssatz werden detailliert beschrieben und beweisen. Zusätzlich werden elementare Lösungsmethoden, wie die „Trennung der Variablen“, „exakte Differentialgleichung“ oder „Bernoulli’sche Differenzialgleichung“ besprochen. Die Vorlesung geht hin zum Newtonverfahren, das sich als Anwendung in den Schulbüchern wiederfindet und meist nur mehr als Zusatz oder im Wahlpflichtfach unterrichtet wird.

Diese Vorlesung ist eine der im zweiten Abschnitt des Lehramtsstudiums Mathematik verlangten. Je nach Semester wird sie von einem anderen Professor vorgetragen.

3.1.2) „Schulmathematik 6: Differenzial- und Integralrechnung“

Diese Vorlesung ist im Rahmen der schulmathematischen Ausbildung zu wählen und beinhaltet Differential- und Integralrechnung. Ich werde mich im folgenden jedoch nur auf den Teil der Differentialrechnung beziehen. Diese Vorlesung kann man im Prinzip als Verbindungsglied zwischen Universität und Schule sehen. Sie beinhaltet den Aufbau sowie den Stoff, der in der AHS verlangt wird einerseits, und andererseits versucht sie zu unterstreichen, und zukünftigen Lehrern beizubringen, wie genau eben dieser Stoff in der Schule den Lernenden nähergebracht werden kann und soll.

Hier wurde den Studenten ein gedrucktes käuflich zu erwerbendes Skriptum zur Verfügung gestellt. Das Skript ist ohne farbliche Gestaltung, wie anfangs erwähnt halte ich das bei Studenten auch nicht notwendig, doch wenn es bei den älteren Lernenden welche gibt, die besser mit farblicher Untermalung den Stoff verinnerlichen können, dann sind sie auf sich selbst gestellt. Wir finden hier kein Inhaltsverzeichnis wie bei einem Buch, sondern wenn man das Skriptum aufschlägt sieht man im Deckblatt die wichtigsten Ableitungen elementarer Funktionen auf einen Blick. Als nächstes erblickt man den AHS-Oberstufenlehrplan aufgelistet und zwar die für das Thema entsprechenden Punkte. Für die Vorlesung werden die selben Begriffe und Definitionen verwendet wie in der Schule und zusätzlich durch die dazugehörige Übungen erläutert, wie man den Unterricht zum Thema Differenzialrechnung gestalten könnte. Gleich darunter befindet sich eine Information zu den Aufgaben im Anhang, die laut Auskunft auf die zwei, zu diesem Zeitpunkt, verbreitetsten Schulbücher Bezug nehmen. Das Skript ist in Kapitel unterteilt, die wieder Unterkapitel enthalten. Am Anfang des ersten Kapitels „Grundbegriffe der Differenzialrechnung“ wird aufgelistet worum in dem vorliegenden Thema überhaupt geht. Dann folgt eine kurze Beschreibung womit angefangen wird und wie in weiterer Folge die anderen Kapitel darauf aufbauen

beziehungsweise wie zu den anderen Punkten übergeleitet wird. Gestartet wird mit dem Differenzenquotient. Erklärungen wie dieser motiviert ist und ein Beispiel folgen. Hier wird dann die Definition vom Differenzenquotienten festgehalten und grafische Veranschaulichungen. Im Anschluss wird auf die passenden Beispiele im Anhang hingewiesen, indem die Beispielnummern und die Abkürzung aus welchem der beiden Bücher die Aufgaben sind, festgehalten. Dann wird noch angeführt wie der Differenzenquotient zu deuten ist und ein Beispiel aus dem ein Satz folgert wird angeführt. Dazwischen gibt es immer kleine sehr kurze Textpassagen, die noch weitere Informationen geben.

Man kann nicht sagen, dass jedes Kapitel beziehungsweise jeder Punkt gleich abgehandelt wird mit Definition, Satz und Beispiel, aber im Großen und Ganzen wiederholt sich der Aufbau des ersten Punktes in ein oder der anderen Art wieder, manchmal mit mehr Erklärungen oder mit einem längeren ausgearbeiteten Beispiel. Was immer gleich bleibt, ist die Klärung der „Worum-geht-es-Frage“.

Das letzte Kapitel heißt „Vorschläge der Erweiterung“, hier werden Themen angeführt die man im Rahmen der Differentialrechnung noch bearbeiten könnte und auch ergänzende Beweise verschiedener Sätze werden aufgelistet, die man zum Beispiel im Rahmen eines Wahlpflichtfachs Mathematik durcharbeiten kann.

Die Abfolge der Kapitel ist an den Lehrplan angelehnt beziehungsweise wie wir ihn schon ungefähr aus der Schule kennen, was es auch für die Studenten leichter macht alles nachzuvollziehen.

3.2) Didaktische Prinzipien in den Vorlesungen

Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, erfolgt, genauso wie die Analyse des Aufbaus, auch die Analyse der auch hoffentlich zugrundeliegenden didaktischen Prinzipien der Vorlesungen, anhand der Mitschrift beziehungsweise des Skriptums. Was eine Schwierigkeit darstellt und zusätzlich wird dieses Problem verstärkt, da es sich um zwei so unterschiedliche Vorlesungen handelt. Die eine bildet die Verbindung zwischen Universität und Schule und beinhaltet den selben Stoffrahmen. Die andere baut auf dieser Basis auf und behandelt höhere Mathematik, die in der Schule nicht oder nur sehr vereinfacht vorkommt. Im Gegensatz zur Schule ist während der Vorlesung keine Zeit für das Rechnen von Beispielen, also hat jede Vorlesung eine verpflichtende „Übung“, eine zum Vorlesungsthema passende Lehrveranstaltung in der Beispiele vorbereitet und analysiert und den restlichen Studenten vorgetragen werden müssen. Hier soll versucht werden nicht nur verschiedene Lösungswege auf die Beispiele anzuwenden, sondern auch die bestmögliche Methode für den Unterricht zu finden.
Wie am Ende des Kapitels 2 erwähnt, verwischen die Grenzen der didaktischen in der Praxis zu sogenannten Mischformen. Die didaktischen Prinzipien, die möglicherweise in den Vorlesungen verankert sind, werden auch nicht im vollem Umfang vorhanden sein.

3.2.1) „Differentialgleichung für LAK“

Auch wenn sich diese Vorlesung, im Gegensatz zur Schulmathematikvorlesung, nicht an den Lehrplan stützt, so wird sie trotzdem der Anforderung des Prinzips des linear-sukzessiven Aufbaus gerecht, da sie einen logisch-systematischen Abfolge der einzelnen aufeinander aufbauenden Themen aufweist. Die vom Prinzip geforderte Stückelung können wir hier auch

erkennen. Doch wird unter keinen Umständen der Zusammenhang, das große Ganze außer Acht gelassen, so wie es das operative Prinzip zur Aufgabe stellt. Die ausgedehnte Experimentierphase kann nicht in der Vorlesung stattfinden, dafür müssen die Studenten zusätzliche eine Lehrveranstaltung also eine „Übung“ besuchen, in der Beispiele gerechnet und eigenständig Lösungen gefunden werden müssen wodurch ein reger Austausch über das Thema zwischen den Studenten herrscht. Hier könnte die „Übung“ sozusagen als separate Wiederholungsstunde, wie es das operative Prinzip für die Wissensfestigung vorsieht, angesehen werden.

Das Prinzip des deduktiven Aufbaus verlangt nicht nur eine logisch-systematische Abfolge der Inhalte, die wir bereits festgestellt haben, sondern die Bereitstellung fertiger Lerninhalte, wie Definitionen und so weiter. Auch das ist in der Vorlesung gegeben, denn nicht alles kann bis ins kleinste Detail zerpflückt werden, das würde auch auf der Universität den Zeitrahmen der Veranstaltungen sprengen. Auch wenn die Studenten Definitionen und Beweise vorgefertigt präsentiert bekommen, sind sie trotzdem angehalten selbst die einzelnen Inhalte durch zu denken, denn sonst hätten sie bei der Prüfung am Ende des Semesters keine Chance, da hier meist auf Verständnis die Fragen gestellt werden.

Bei der didaktischen Prüfung der Vorlesung auf Grund des genetischen Prinzip kann man festhalten, dass an das Vorwissen der Studenten angeknüpft wird und die einmal eingeführten Definitionen und Sätze werden sofort zur Erklärung des nächsten Inhalts verwendet, also wird kein „Vorratslernen“ unterstützt. Zusätzlich wird auf die Verallgemeinerung meist durch zuerst zu bearbeitende Spezialfälle hingeführt. Die Darstellung der Themengebiete erfolgt lückenlos. Die Studenten werden ständig aufgefordert selber Schlüsse zu ziehen und selbstständig zu denken beziehungsweise die einzelnen Inhalte zu verinnerlichen.

Durch das ständige Wiederholen, Erweitern und Verdeutlichen der einzelnen Inhalte kann das Gelernte besser verankert werden und das fordert das Spiralprinzip.

Da ich die Vorlesung selbst besucht habe, kann ich im Rahmen des letzten Prinzips etwas über die Tätigkeit der „Lernenden“ sagen. In der Vorlesung herrschte geringere Aktivität als in der Übung, dort wurde hingegen mehr über Lösungen und Lösungswege diskutiert.
Es wurde nun gezeigt, dass diese Vorlesung eine Mischung zwischen den verschiedenen Prinzipien darstellt, da sie die wichtigsten Merkmale beinhaltet.

3.2.2) „Schulmathematik 6: Differenzial- und Integralrechnung“

Da dieses Skriptum nach der Anlehnung an den Lehrplan gestaltet ist, unterstellen wir eine logisch-systematische Struktur, die vom Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus verlangt wird. Auch die Stückelung in kleinere Teile ist gegeben, da das Skriptum in Kapitel unterteilt ist. Die zusätzliche vom Prinzip erwartete Einteilung in Schwierigkeitsebenen wird außer Acht gelassen, was meiner Meinung nach, bei Studenten auch nicht erforderlich ist, da dies eigentlich nur eine Wiederholung der bereits gelernten Unterrichtsstoffes darstellt und darauf abzielt die Vermittlung des Themas näher zu bringen. Dem operativem Prinzip wird genüge getan, da der Zusammenhang des ganzen Themas nicht vernachlässigt wird. Die Experimentierphase wird nur insoweit berücksichtigt, dass die Studenten die Beispiele im Anhang eigenständig lösen können und sollen. Dies wird auch in der eingangs erwähnten „Übung“ verlangt. Experimentieren können die Studenten mit den verschiedenen Lösungswegen oder Methoden, die sie für den späteren Unterricht in der Lehrveranstaltung ausprobieren sollen.

Dem Prinzip deduktiven Aufbaus wird durch der im Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus besprochenen logisch-systematischen Abfolge der Lehrstoffs entsprochen. Weiters werden zwar fertige Lerninhalte vorgegeben, doch sind die Studenten dazu angehalten dies nicht einfach so anzunehmen sonder durch eigenständiges Hinterfragen die Inhalte durch zu denken.

Die Punkte des genetischen Prinzips werden nun begutachtet. Im Skript wird an das Vorwissen der Studenten angeknüpft und Definitionen, Sätze und Beweise werden „erst“ dann eingeführt, wenn sie benötigt werden, dazu ist noch zu sagen, dass die meisten dieser Merksätze den Studenten schon bekannt sein sollten.

Die „Anforderung des „immer-wieder-Wiederholens“ des Spiralprinzips wird auch erfüllt, da die einzelnen Inhalte aufeinander aufbauen und damit jeder vorherige Teil Basis für den nächsten ist und daher müssen sie immer wieder wiederholt werden. Sie werden sogar wieder aufgegriffen, erweitert und verdeutlicht, sowie es das Prinzip fordert.

Das letzte Prinzip der „Mathematischen Tätigkeit“ untersucht die Aktivität der „Schüler“. Da ich selbst diese Vorlesung besucht habe, kann ich sagen, dass unter den Studenten reger Informationsaustausch herrschte, besonders in der „Übung“ war die Aktivität sehr hoch.

Man kann also vermerken, dass die Schulmathematikvorlesung eine Mischung aus den signifikantesten Punkten der zu untersuchenden Prinzipien aufweist und dass eine Mischform die beste Lösung für die Lernbasis darstellt.

4) Einführung des Themas Differentialrechnung in der Schule

Es wurde nun erläutert wie die Differenzialrechnung an der Universität eingeführt wird. Nun wollen wir die Einführung des Themas in der Schule näher betrachten. Da jede Schule sich selbst aussuchen kann welches Schulbuch sie verwendet, will ich zu erst einen Vergleich von vier der Gängigsten durchführen, um Gleichheiten oder auch Unterschiede in der Einführungsart aufzuzeigen.

Ich werde analysieren wie das Thema der Differentialgleichung in den Schulbüchern aufgebaut ist, in welche Reihenfolge werden die einzelnen Definitionen eingeführt, wie ist der Aufbau der einzelnen Abschnitte und zu guter Letzt werde ich versuchen bei jedem Buch die in Kapitel 2) besprochenen didaktischen Prinzipien der einzelnen Bücher heraus zu filtern.

Ich beschränke mich genauso wie in Kapitel 1.3) Lehrplan auf die 7. Klasse AHS. Es werden zwar in der 5.und 6. Klasse bereits die Vorkenntnisse wie Funktionen und Stetigkeit thematisiert, doch in der 7. wird die Differentialrechnung erstmals erwähnt.

4.1) Schulbuchvergleich - Aufbau

Ich beschränke mich genauso wie in Kapitel 1.3) Lehrplan auf die 7. Klasse AHS. Es werden zwar in der 5.und 6. Klasse bereits die Vorkenntnisse wie Funktionen und Stetigkeit thematisiert, doch in der 7. wird die Differentialrechnung erstmals erwähnt.

4.1.1) „Thema Mathematik“

Die Aufteilung in „Thema Mathematik“ im Inhaltsverzeichnis zeigt, dass zuerst die Grundlagen der Differenzialrechnung angeführt werden, dann wird das Thema der komplexen Zahlen eingeschoben, bevor die Eigenschaften der Funktionen im Rahmen der Differentialrechnung besprochen werden. Das letzte Thema in diesem Buch sind dann, nach Einschub weiterer zwei Themen, die Anwendung der Differenzialrechnung, wie zum Beispiel das Newton-Verfahren. Außerdem wird im Inhaltsverzeichnis gekennzeichnet welche Kapitel nur im Lehrplan für Realgymnasien beziehungsweise Ergänzungsstoff sind.

Die erste Seite des Kapitels „Differentialrechnung - Grundlagen“ ist eine bildliche und bunte Zusammenfassung des Themas, so werden die Schüler auf den Inhalt das Kapitels visuell vorbereitet. Zusätzlich steht über den Illustrationen noch ein kurzer einführender Kommentar.

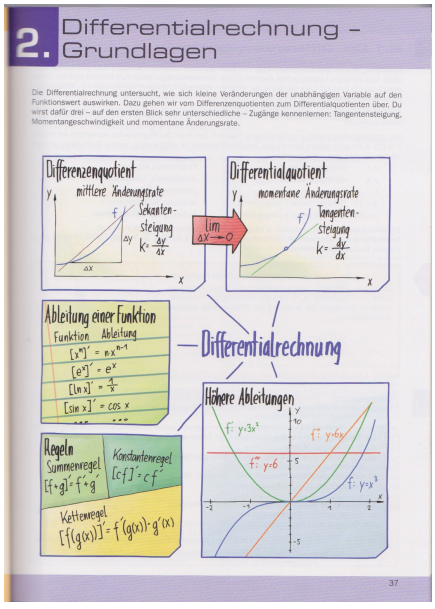


Abbildung 1: Titelblatt des Kapitel Differentialrechnung-Grundlagen in „Thema Mathematik 7“ (2013, S.37)

Am Anfang des Abschnitts über den Differenzenquotient wird erwähnt was eine Funktion ist und einzelne Zeichen und Symbole, die später noch gebraucht werden, erklärt. Dann wird der Differenzenquotient definiert und gleich

darunter wird mittels „Grundvorstellung“ die Definition erläutert. Die Definition ist farblich hinterlegt. Dann folgen Aufgaben, um das gerade Gelernte anzuwenden. Der nächste Punkt beschreibt wie eine Tangente an eine Kurve gelegt wird, mit einer kurzen historischen Erklärung und wieder einer „Grundvorstellung“ und der Definition was eine Tangente ist. Auch hier folgen wieder Aufgaben zur Einübung des Themas. Dieses Thema wird im Inhaltsverzeichnis als Ergänzungsstoff gekennzeichnet.

Als nächster Punkt wird der Differentialquotient mittels dreier Zugänge definiert. Als erstes wird der Differentialquotient als Tangentensteigung beschrieben, wieder „Grundvorstellung“ und Definition und Aufgaben.. Der nächste Zugang erfolgt über die Momentangeschwindigkeit, in deren Definition der Grenzwert erwähnt wird doch nicht gesondert wiederholt oder erläutert wird. Nach den „Grundvorstellungen“ wurden Bilder einer Kugelbahn zu Illustration eingefügt. Um nicht bei jedem weiteren Punkt erwähnen zu müssen, dass „Grundvorstellungen“, Definitionen und Beispiele vorliegen, nehmen ich dies vorweg. Schlussendlich wird der Differentialquotient als momentane Änderungsrate definiert.

Weiters sei noch zu erwähnen, dass in jedem Abschnitt bereits ausgearbeitete Beispiele integriert sind. Bei den Übungsaufgaben wird in drei Schwierigkeitsstufen, grundlegend-einfache, weiterführende und anspruchsvolle Aufgaben unterschieden und zusätzlich werden die Aufgaben gekennzeichnet, die die Entwicklung der mathematischen Grundkompetenz und des dazugehörigen Wissens fördern und ob es empfehlenswert wäre das Beispiel in einer Gruppenarbeit oder mit Technologieeinsatz zu lösen, wird auch angezeigt.

Der weitere Aufbau geht zum Grenzwert und zur Ableitung einer Funktion. Hier wird die Definition des Grenzwertes angeführt die im vorherigen

Abschnitt ausgelassen wurde. Bei diesem Punkt wird auch das graphische Differenzieren besprochen.

Die weitere Abfolge der Kapitel gehen von der „Stetigkeit - Differentierbarkeit“ über Ableitungsregeln hin zu den „höheren Ableitungen“ und der „Ableitung der Umkehrfunktion und implizites Differenzieren“. Nach diesen Punkten findet man einige Seiten mit gemischten Übungsaufgaben, wieder nach Schwierigkeitsgrad eingeteilt. Nach den „vermischte“ Aufgaben befindet sich ein Abschnitt der „Sprache der Mathematik“ heißt, bei dem die Schüler angehalten werden die dort zu findenden Aufgaben durch genauer mathematischer Formulierung zu lösen. Dann kommt eine bunt gestaltete Informationsseite, die noch interessante mathematischen Anwendungen enthält.
Am Ende des Abschnitts „Differentialrechnung - Grundlagen“ wird eine „Kapitelcheckliste“ angeführt, die einen Überblick über den gelernten Inhalt auf einer Seite bietet. Anschließend werden die Grundkompetenzen für die Matura aufgelistet, wo die Schüler verschiedene Aussagen über ihr Können dieser ankreuzen können. Zum krönenden Abschluss werden Aufgaben angeführt, die das Verständnis der Grundkompetenzen des Kapitels stärken sollen, um eine ungefähren Einblick in Maturaaufgaben zu erhaschen. Lösungen finden sich hier allerdings keine.

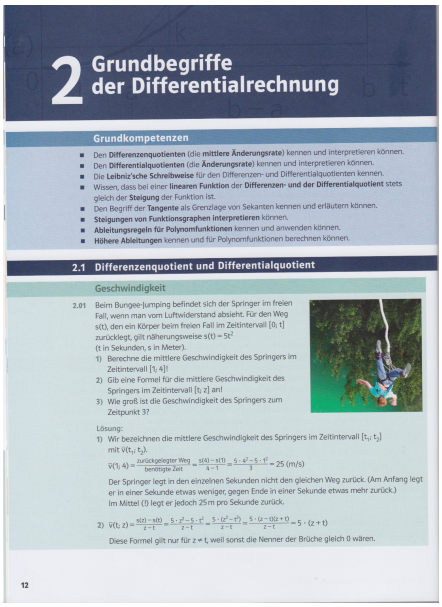
Die anderen zwei, für die Differenzialrechnung interessanten Kapitel, „Differenzialrechnung - Eigenschaften von Funktionen“ und „Anwendung der Differentialrechnung“ sind genauso aufgebaut. Wieder wird an Hand einer bunten Illustration der Inhalte der Kapitel auf der ersten Seite begonnen und in den einzelnen Unterpunkten finden sich „Grundvorstellungen“, Definitionen und Beispiele. Auch das Ende ist gleich gestaltet mit der „Checkliste“ und den Kompetenzaufgaben.

Alles in allem ist dieser Aufbau der Übersicht, meiner Meinung nach, sehr übersichtlich und für Schüler anregend und interessant aufbereitet.

4.1.2) „Mathematik verstehen“

Im Gegensatz zum vorherigen Schulbuch finden wir im Inhaltsverzeichnis von „Mathematik verstehen“ keine eingeschobenen Kapitel zwischen den einzelnen Ausführungen der Differentialrechnung. Hier heißen die einzelnen Oberkapitel „Grundbegriffe der Differentialrechnung“, „Untersuchen von Polynomfunktionen“, „Untersuchen weiterer Funktionen“ und „Exaktifizierung der Differentialrechnung“ und auch ihre Unterpunkte heißen anders als in „Thema Mathematik“.

In diesem Schulbuch ist die erste Seite des Themas farblich sehr schlicht gehalten, Blau- und Grüntöne, die in der Farbenlehre als eher kalt aber beruhigend gelten. Das erste, das hier angeführt wird, sind hier sogenannte „Grundkompetenzen“, die ich aber eher als Lehrziele deuten würde. Sie werden unterteilt durch ein hellblaues oder dunkelblaues Quadrat. Hellblau bedeutet „Grundkompetenzen, die in Hinblick auf den Lehrplan erforderlich sind“ und dunkelblau heißt „Grundkompetenzen, die für die zentrale Reifeprüfung unverzichtbar sind“. Dann geht es schon los mit einem ausgearbeiteten einführenden Beispiel, über Geschwindigkeit, zum ersten Thema „Differenzenquotient und Differentialquotient“.



2 Grundbegriffe der Differentialrechnung

Grundkompetenzen

- Den **Differenzenquotienten** (die **mittlere Änderungsrate**) kennen und interpretieren können.
- Den **Differentialquotienten** (die **Änderungsrate**) kennen und interpretieren können.
- Die **Leibniz'sche Schreibweise** für den Differenzen- und Differentialquotienten kennen.
- Wissen, dass bei einer **linearen Funktion** der **Differenzen- und der Differentialquotient** stets gleich der **Steigung** der Funktion ist.
- Den Begriff der **Tangente** als Grenzlage von Sekanten kennen und erläutern können.
- **Steigungen von Funktionsgraphen interpretieren** können.
- **Ableitungsregeln für Polynomfunktionen** kennen und anwenden können.
- **Höhere Ableitungen** kennen und für Polynomfunktionen berechnen können.

2.1 Differenzenquotient und Differentialquotient

Geschwindigkeit

2.01 Beim Bungee-Jumping befindet sich der Springer im freien Fall, wenn man vom Luftwiderstand absieht. Für den Weg $s(t)$, den ein Körper beim freien Fall im Zeitintervall $[0; t]$ zurücklegt, gilt näherungsweise $s(t) = 5t^2$ (t in Sekunden, s in Meter).

1) Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Springers im Zeitintervall $[1; 4]$!
2) Gib eine Formel für die mittlere Geschwindigkeit des Springers im Zeitintervall $[t; z]$ an!
3) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Springers zum Zeitpunkt 3?

Lösung:

1) Wir bezeichnen die mittlere Geschwindigkeit des Springers im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ mit $\bar{v}(t_1; t_2)$.

$$\bar{v}(1; 4) = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{benötigte Zeit}} = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{5 \cdot 4^2 - 5 \cdot 1^2}{3} = 25\ (\text{m/s})$$

Der Springer legt in den einzelnen Sekunden nicht den gleichen Weg zurück. (Am Anfang legt er in einer Sekunde etwas weniger, gegen Ende in einer Sekunde etwas mehr zurück.) Im Mittel (!) legt er jedoch 25 m pro Sekunde zurück.

2) $\bar{v}(t; z) = \frac{s(z) - s(t)}{z - t} = \frac{5 \cdot z^2 - 5 \cdot t^2}{z - t} = \frac{5 \cdot (z^2 - t^2)}{z - t} = \frac{5 \cdot (z - t)(z + t)}{z - t} = 5 \cdot (z + t)$

Diese Formel gilt nur für $z \neq t$, weil sonst die Nenner der Brüche gleich 0 wären.

12

Abbildung 2: Titelblatt des Kapitels Grundbegriffe der Differentialrechnung in „Mathematik verstehen 7“ (2013, S.12)

Nach diesem anschaulichen Beispiel finden wir noch eine Erklärung warum das so gehandhabt wird und anschließend eine Definition, die farblich hinterlegt ist und auch einzelne Beweise findet man in den Unterkapiteln nach den Definitionen. Für die Einführung der Begriffe Änderungsgeschwindigkeit und Änderungsrate werden wieder erklärende Beispiel angeführt. Im Anschluss werden Differenzenquotient und Differentialquotient definiert. Auch hier wird in der Definition des Differentialquotienten natürlich der Grenzwert einbezogen, doch wie in „Thema Mathematik“ wird er nicht an Ort und Stelle definiert, erklärt oder wiederholt. Dann geht es wieder an die Übungsaufgaben, um das Gelernte anzuwenden. Die Übungsaufgaben sind geordnet nach Grundkompetenzen und Vertiefung, das wird den Schülern nicht neben der Beispielsnummer angezeigt sondern als eine Art Überschrift. Zusätzlich haben manche Beispiele Symbole neben ihrer Nummer, diese werden am Anfang des Buches erklärt sie bedeuten, Partnerarbeit, Gruppenarbeit und Technologieeinsatz. Das letzte bedeutet zusätzlich, dass auf der Homepage noch Ergänzungsmaterial zu finden ist.

Weiters werden die „Geometrische Deutungen des Differenzen- und Differentialquotienten“ mit den einzelnen Zugängen mit Definitionen erläutert.

Auch hier wird alles mit Beispielen veranschaulicht. In diesem Abschnitt werden vertiefende Aufgaben gestellt, in denen die Schüler anhand des Differentialquotienten verschiedene Formeln selbst ableiten und definiert sollen. Weiters werden die „Ableitungsregeln für Polynomfunktionen“ durch Definitionen, Sätze und Beweise erörtert. Die vertiefenden Aufgaben haben einen eigenen Abschnitt für Beweisaufgaben, die die Schüler zum selbstständigen herleiten und beweisen angehalten werden. Im Laufe des einzelnen Abschnitte sind auch graphische Abbildungen zu finden, die zum besseren Verständnis dienen sollen.

Am Ende des Oberkapitels finden wir auf einigen Seiten eine „Kontrolle: Grundwissen und Grundkompetenzen“, dies sind Beispiele um den in dem vergangenen Kapitel erlebten Stoff zu wiederholen und zu kontrollieren ob die Schüler die Anforderungen, die in den Grundkompetenzen festgelegt waren, erreichen können.

Die weiteren Oberkapitel sind genauso aufgebaut mit hier und da leichten Abweichungen. Das nächste fängt nicht mit einem ausgearbeiteten Einführungsbeispiel, sondern einer Wiederholung über das Monotonieverhalten und die Extremstellen einer Funktion. Hier folgt eine Definition der anderen. Doch im Großen und Ganzen sind sie gleich aufgebaut. Am Ende des Buches sind Multiple-Choice-Aufgaben angehängt, die die Schüler beantworten und dann auch selbst korrigieren können. Das ist ein Pluspunkt, da ich nicht extra noch ein Lösungsheft kaufen muss sondern alles an Ort und Stellen habe.

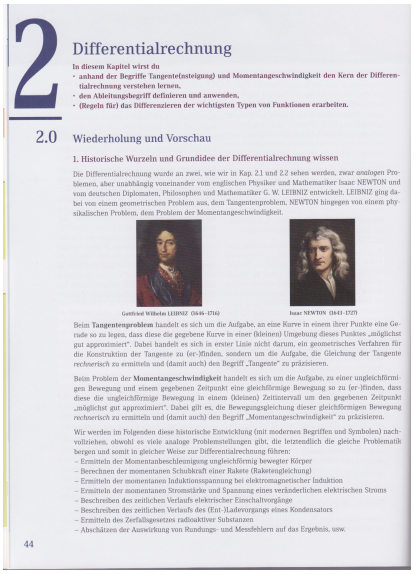
Auch dieses Buch hat, meiner Meinung nach, seine Vorteile. Besonders erwähnenswert finde ich die einführenden und erläuternden Beispiele, die den Schülern vorzeigen was zu tun ist und wie die weiteren Aufgaben zu lösen sind.

4.1.3) „Mathematik“

Das dritte Buch der Analyse teil seine Kapitel, die zum Thema Differenzialrechnung gehören folgendermaßen auf: „Differentialrechnung“, „Kurvendiskussion - Funktionsmodelle“ und „Einige Anwendungen der Differentialrechnung“. Auch hier werden die Kapitel die zur Differentialrechnung gehören nicht durch andere eingeschobene Kapitel unterbrochen. Neben den einzelnen Kapiteln und Unterpunkten sind die vom Lehrplan ausgewiesenen Kompetenzinhalte in drei beziehungsweise vier Kategorien gekennzeichnet, nämlich Lehrinhalte für drei Unterrichtswochenstunden, Lehrinhalte für mehr als drei Unterrichtswochenstunden und vertiefende Lehrinhalte für drei Unterrichtswochenstunden.Das vierte Symbol bezeichnet sehr anspruchsvolle Kompetenzen, die wahlweise erworben werden können. Wenn man das Ende des Inhaltsverzeichnis betrachtet dann sieht man auf den ersten Blick, dass in diesem Buch die Beispiele nach drei „Kompetenz-Niveaus“ unterschieden werden, nämlich nach „Grundkompetenz“, bei denen Grundwissen und -fertigkeiten einzeln anzuwenden sind, „Höherwertigen Grundkompetenzen“ , bei denen mehrere einzelne Kompetenzen zusammenwirken müssen, und „Höchstwertigen Grundkompetenzen“, wo durch eigenständiges reflektierendes Wissen durch Verknüpfung verschiedener Fertigkeiten, kreativem Denken eigenständigem Entwickeln von Modellen die Beispiele gelöst werden können. Auch ein Hinweis auf den offiziellen Grundkompetenzenkatalog wird gegeben. Zusätzlich werden Symbole angeführt, die ein Beispiel zum ersten oder zweiten Teil der Matura zugehörig ausweisen.

Wenn man das erste, für uns relevante, Kapitel aufschlägt sieht man sofort, dass hier im Gegensatz zu den anderen bis jetzt besprochenen Lehrbücher sehr viel Text steht. Das Kapitel wird eingeleitet mit ein paar Zeilen, die den Schülern

erklären soll, was sie nun erwartet. Dann wird der historische Hintergrund des Themas erläutert. Die Überschriften der einzelnen Abschnitte sind wie Lehrziele formuliert, also zum Beispiel: „Historische Wurzeln und Grundidee der Differenzialrechnung wissen“. Anfangs wird hier nicht viel mit Farben gearbeitet, doch sind zum besseren Verständnis Abbildungen eingefügt.



2 Differentialrechnung

In diesem Kapitel wirst du
- anhand der Begriffe Tangente(nsteigung) und Momentangeschwindigkeit den Kern der Differenzialrechnung verstehen lernen,
- den Ableitungsbegriff definieren und anwenden,
- (Regeln für) das Differenzieren der wichtigsten Typen von Funktionen erarbeiten.

2.0 Wiederholung und Vorschau

1. Historische Wurzeln und Grundidee der Differentialrechnung wissen

Die Differentialrechnung wurde an zwei, wie wir in Kap. 2.1 und 2.2 sehen werden, zwar *analogen* Problemen, aber unabhängig voneinander vom englischen Physiker und Mathematiker Isaac NEWTON und vom deutschen Diplomaten, Philosophen und Mathematiker G. W. LEIBNIZ entwickelt. LEIBNIZ ging dabei von einem geometrischen Problem aus, dem Tangentenproblem, NEWTON hingegen von einem physikalischen Problem, dem Problem der Momentangeschwindigkeit.

Beim **Tangentenproblem** handelt es sich um die Aufgabe, an eine Kurve in einem ihrer Punkte eine Gerade so zu legen, dass diese die gegebene Kurve in einer (kleinen) Umgebung dieses Punktes „möglichst gut approximiert“. Dabei handelt es sich in erster Linie nicht darum, ein geometrisches Verfahren für die Konstruktion der Tangente zu (er-)finden, sondern um die Aufgabe, die Gleichung der Tangente *rechnerisch* zu ermitteln und (damit auch) den Begriff „Tangente“ zu präzisieren.

Beim Problem der **Momentangeschwindigkeit** handelt es sich um die Aufgabe, zu einer ungleichförmigen Bewegung und einem gegebenen Zeitpunkt eine gleichförmige Bewegung so zu (er-)finden, dass diese die ungleichförmige Bewegung in einem (kleinen) Zeitintervall um den gegebenen Zeitpunkt „möglichst gut approximiert“. Dabei gilt es, die Bewegungsgleichung dieser gleichförmigen Bewegung *rechnerisch* zu ermitteln und (damit auch) den Begriff „Momentangeschwindigkeit“ zu präzisieren.

Wir werden im Folgenden diese historische Entwicklung (mit modernen Begriffen und Symbolen) nachvollziehen, obwohl es viele analoge Problemstellungen gibt, die letztendlich die gleiche Problematik bergen und somit in gleicher Weise zur Differentialrechnung führen:
- Ermitteln der Momentanbeschleunigung ungleichförmig bewegter Körper
- Berechnen der momentanen Schubkraft einer Rakete (Raketengleichung)
- Ermitteln der momentanen Induktionsspannung bei elektromagnetischer Induktion
- Ermitteln der momentanen Stromstärke und Spannung eines veränderlichen elektrischen Stroms
- Beschreiben des zeitlichen Verlaufs elektrischer Einschaltvorgänge
- Beschreiben des zeitlichen Verlaufs des (Ent-)Ladevorgangs eines Kondensators
- Ermitteln des Zerfallsgesetzes radioaktiver Substanzen
- Abschätzen der Auswirkung von Rundungs- und Messfehlern auf das Ergebnis, usw.

44

Abbildung 3: Titelblatt des Kapitels Differenzialrechnung in „Mathematik 7“ (2011, S.44)

Hier wird mit dem Tangentenproblem gestartet und anhand dessen der Differenzen- und der Differentialquotient definiert. Auffallend ist ab hier die bunte aber dezente Gestaltung. Definitionen und Sätze haben verschiedene Farben. Sie sind jedoch nicht farblich hinterlegt wie bei einem Buch zuvor, sondern gleich in der Farbe abgedruckt. Auch ausgearbeitete Erläuterungsbeispiele sind hier zu finden, die auch in einer anderen Farbe gedruckt sind. Dazwischen befinden sich noch kurze Erklärungen und dazugehörige Abbildungen. So wie bei den anderen Büchern sind am Ende der einzelnen Abschnitte, hier der Lehrziel-Abschnitte, Übungsaufgaben zur Festigung des erlernten. Diese sind, wie schon angeführt, nach Kompetenzen beziehungsweise nach Schwierigkeit durch Punkte markiert. Auch Mischaufgaben werden angeboten. Was auch noch auffällt ist das jedes Kapitel, nicht nur die Unterpunkte aufweist, sondern gefünftelt ist. Als erstes ist immer

eine „Wiederholung und Vorschau“, die das bereits erwähnte historische in sich birgt, dann sind die einzelnen Unterkapitel mit ihren als Lehrziel formulierten Punkten und zum Schluss ist ein sogenannter „Rückblick und Ausblick“ festgehalten, in dem bereits gelernte Inhalte miteinander verknüpft werden. Der vierte Bereich wird ein „Kompetenzcheck“ angeführt, der das gelernte Wissen nochmals überprüfen soll. Die Schüler könne hier testen ob sie alle Fertigkeiten, die für diese Kapitel gefordert wurde, wirklich ihr eigen nennen können. Die Lösungen zur Selbstüberprüfung befinden sich am Schluss des Lehrbuches. Zu guter Letzt wird noch als „Exkurs“ ein alltagsbezogener Teil eingefügt der den Schülern zeigen soll wofür man das gerade erarbeitete Kapitel im außerschulischen Leben verwendet.

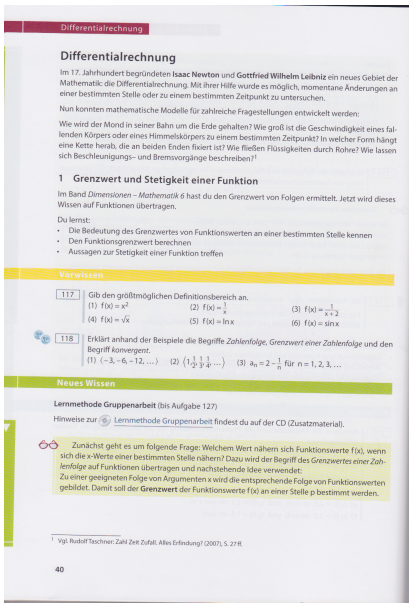
Bei diesem Lehrbuch finde ich die dezente Farbgebung nicht nur sehr zweckdienlich sondern auch sehr angenehm zubrachten. Die historischen Hintergründe zu jedem Kapitel finde ich sehr interessant und auch der „Exkurs“ in den Alltagsgebrauch ist eine gelungene Art Hinweis für die Schüler, dass Mathematik nicht nur im Unterricht gebraucht und angewendet wird. Was mich zusätzlich besonders anspricht sind die Abschnitte „Wiederholung und Vorschau“ und „Rückblick und Ausblick“, die den Schülern einen Überblick über das zu erwartende und das gerade gelernte Stoffgebiet gibt.

4.1.4) „Dimension Mathematik“

Noch vor dem Inhaltsverzeichnis richtet sich das Vorwort an die des Buch benützenden Schüler. Hier wird das Konzept des Buches und die Schwerpunkte erläutert. Es wird festgehalten, dass die mathematischen Inhalte, die Lernziele und die Grundkompetenzen, welche mittels Symbol gekennzeichnet sind, sich immer am Anfang jedes Kapitels befinden. Jedes

Kapitel ist in drei „Lernschritte“ gegliedert. Im ersten Schritt sollen das „Vorwissen“, das der Schüler bereits erworben hat, aktiviert werden. Im zweiten Schritt soll „Neues Wissen“ erarbeitet werden. Hier wird angemerkt, dass sich „Lesetexte“ und Aufgaben in kleinen Erarbeitungssequenzen abwechseln. Der „Erarbeitungsteil“ ist durch einen grünen Balken markiert. Im letzten Lernschritt soll des erworbene Wissen durch Aufgaben gefestigt und vertieft werden. Einzelne Aufgaben, die den Erwerb einer erforderlichen Grundkompetenz unterstützen sind mit einem Symbol gekennzeichnet, sowie sehr aufwendige Beispiele. Zusätzlich werden durch ein Symbol Hinweise zu Themen gegeben, für die sich eine vorwissenschaftliche Arbeit eignen würden.
Die Aufgaben sind auch mit Symbolen ausgewiesen, ob man diese in Partner- oder Gruppenarbeit besser bearbeiten soll. Dieses Lehrbuch hat eine CD beiliegen, auf der Lernmethoden und zusätzliches Lernmaterial gespeichert sind. Die Verwendung der CD ist auch mit einem Zeichen im Buch markiert.
Im Gegensatz zu den anderen bereits besprochenen Büchern ist hier das Thema Differentialrechnung nicht in verschiedene Großkapitel unterteilt, sondern es existiert nur ein großes Kapitel, das alle Inhalte vereinigt.

Auf der ersten Seite des Kapitels findet man eine kurze historische Einweisung in das Thema. Im Anschluss werden, im Gegensatz zu den anderen Büchern, die Begriffe des Grenzwertes und der Stetigkeit für Funktionen angeführt.



Differentialrechnung

Differentialrechnung

Im 17. Jahrhundert begründeten **Isaac Newton** und **Gottfried Wilhelm Leibniz** ein neues Gebiet der Mathematik: die Differentialrechnung. Mit ihrer Hilfe wurde es möglich, momentane Änderungen an einer bestimmten Stelle oder zu einem bestimmten Zeitpunkt zu untersuchen.

Nun konnten mathematische Modelle für zahlreiche Fragestellungen entwickelt werden:

Wie wird der Mond in seiner Bahn um die Erde gehalten? Wie groß ist die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers oder eines Himmelskörpers zu einem bestimmten Zeitpunkt? In welcher Form hängt eine Kette herab, die an beiden Enden fixiert ist? Wie fließen Flüssigkeiten durch Rohre? Wie lassen sich Beschleunigungs- und Bremsvorgänge beschreiben?[1]

1 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

Im Band *Dimensionen – Mathematik 6* hast du den Grenzwert von Folgen ermittelt. Jetzt wird dieses Wissen auf Funktionen übertragen.

Du lernst:
- Die Bedeutung des Grenzwertes von Funktionswerten an einer bestimmten Stelle kennen
- Den Funktionsgrenzwert berechnen
- Aussagen zur Stetigkeit einer Funktion treffen

Vorwissen

117 Gib den größtmöglichen Definitionsbereich an.
(1) $f(x) = x^2$ (2) $f(x) = \frac{1}{x}$ (3) $f(x) = \frac{1}{x+2}$
(4) $f(x) = \sqrt{x}$ (5) $f(x) = \ln x$ (6) $f(x) = \sin x$

118 Erklärt anhand der Beispiele die Begriffe *Zahlenfolge*, *Grenzwert einer Zahlenfolge* und den Begriff *konvergent*.
(1) $(-3, -6, -12, \ldots)$ (2) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ (3) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Neues Wissen

Lernmethode Gruppenarbeit (bis Aufgabe 127)

Hinweise zur Lernmethode Gruppenarbeit findest du auf der CD (Zusatzmaterial).

Zunächst geht es um folgende Frage: Welchem Wert nähern sich Funktionswerte f(x), wenn sich die x-Werte einer bestimmten Stelle nähern? Dazu wird der Begriff des *Grenzwertes einer Zahlenfolge* auf Funktionen übertragen und nachstehende Idee verwendet:
Zu einer geeigneten Folge von Argumenten x wird die entsprechende Folge von Funktionswerten gebildet. Damit soll der **Grenzwert** der Funktionswerte f(x) an einer Stelle p bestimmt werden.

[1] Vgl. Rudolf Taschner: Zahl Zeit Zufall. Alles Erfindung? (2007), S. 27 ff.

40

Abbildung 4: Titelblatt des Kapitels Differentialrechnung in „Dimension Mathematik 7“ (2013, S.40)

Nach der Überschrift sind die für den nächsten Abschnitt erforderlichen Lernziele aufgezählt. Als nächstes werden im "Vorwissensbereich" Beispiele zur Wiederholung des Definitionsbereichs und des Grenzwertes von Zahlenfolgen zur Bearbeitung angeführt. Der Bereich für "Neues Wissen" wird unterteilt in Textinformationen, Definitionen und kurze Übungsbeispiele. Text und Definitionen sind farblich hervorgehoben. Der Aufgabenbereich ist mit einer anderen Farbe hinterlegt. Hier sind auch verschiedene Aufgabentypen angeführt und wie schon erwähnt auch die Grundkompetenzbeispiele sind gekennzeichnet, doch gibt es hier keinen gesonderten Bereich der nochmal Beispiele enthält in der Form der zentral Matura Beispiele. Das nächste Kapitel ist dann wie gewohnt der Differnzenquotient. Die weiteren Kapitel sind genau so aufgebaut. Im Anhang des Buches sind Themen für vorwissenschaftliche Arbeiten aufgelistet und danach befindet sich eine Art Formelheft.

An diesem Lehrbuch finde ich die Aufbereitung gut. Das gleich mit der Grenzwertdefinition begonnen wird, hat mir am besten gefallen, da in den anderen Büchern zwar der Ausdruck in den Definitionen verwendet wird, doch nicht gleich erklärt oder wiederholt wird. Das wenige Beispiele wie sie bei der Zentralmatura verwendet werden im Buch zu finden sind, ist meiner Meinung

nach ein kleiner Minuspunkt, doch wird der durch die mitgelieferte CD wieder ausgeglichen.

4.2) Schulbuchvergleich - Didaktische Prinzipien

In diesem Abschnitt möchte ich versuchen herauszufinden, welche in Kapitel 2) dieser Arbeit erläuterten didaktischen Prinzipien, in den vier verschiedenen Schulbüchern versteckt liegen. Wie am Ende des zweiten Kapitels erwähnt, haben die didaktischen Prinzipien in der Praxis keine klaren Grenzen, deshalb werde ich die mir am wichtigsten erscheinenden Punkte nennen und diese den dazugehörigen Prinzipien zuordnen. Es wird passieren, dass nicht alle „Anforderungen" eines Prinzips erreicht werden. Darum werde ich einzelne Punkte der Prinzipien herausnehmen und zu einer Art Mischform zusammenfügen.

4.2.1) „Thema Mathematik"

Im vorherigen Abschnitt habe ich den Aufbau des Buches „Thema Mathematik" zum Thema gemacht, nun gehe ich jedes einzelne in Kapitel 2) beschriebene didaktische Prinzipien durch und versuche die „Anforderungen" die das Buch erfüllt explizit darzustellen. Wir starten mit dem Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus und seinem „Gegenspieler" dem operativem Prinzip. Durch den Aufbau des Buches ist ersichtlich, dass es sich hier um ein logisches und sukzessives Aufeinanderfolgen des Lehrstoffes handelt, das zusätzlich in kleinere Abschnitte unterteilt ist. Also vom Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus erkennen wir in diesem Buch nicht nur den stufenweisen Aufbau sondern auch das unterteilen in kleinere „Stücke", zwar nicht in der genauen

Weise wie es das Prinzip vorsieht, hier werden die kleinen Teile nicht aus den Zusammenhang gerissen, sondern das große Thema wird unterteilt in seine einzelnen Bestandteile. Zum zweiten wichtigen Punkt des Prinzips, der Abgrenzung der Schwierigkeiten, brauchen wir uns nur die Aufgabeneinteilung in die drei Stufen ansehen. Also auch das hätten wir in diesem Buch verankert. Vom operativem Prinzip können wir die Voraussetzung hernehmen die beim linear-sukzessivem Aufbau als fehlend beanstandet wurde, die ganzheitliche Betrachtung des Inhalts inklusive der Zusammenhänge der einzelnen Bestandteile. Durch den Lehrstoff, der ja „durchgebracht" werden muss, ist für die geforderten breitangelegten Phasen des experimentieren nur zum Selbststudium im Rahmen der „Hausübung" Zeit. Die Fragestellungen der Aufgaben, die mit zum Beispiel „argumentiere" beginnen, motivieren die Schüler dazu ihr Gelerntes durch zu denken und in eigenen Worten Schlüsse daraus zu ziehen. Da das Prinzip des deduktiven Aufbaus eine Verschärfung des Prinzips des linear-sukzessiven Aufbaus im Hinblick auf die logisch-systematische Anordnung des Stoffinhalts ist, können wir auch hier vermerken diese Anforderung des Prinzips ist in diesem Buch gezeigt. Auch die einzelnen Definitionen und Grundkompetenzen werden in dieser logischen Abfolge angeordnet und ganz dem Prinzip entsprechend den Schülern zum Lernen zugeführt. Hier ist noch anzumerken, dass den Schülern kein vorgefertigtes „Produkt" dargeboten wird, sondern die Beispiele nach richtiger Bearbeitung zum gewünschten Ergebnis führen. Das bedeutet, abschließend findet man im „Teste-dein-Wissen-Bereich" nach jedem Kapitel eine Überprüfungssequenz bei der das Prinzip des deduktiven Aufbaus erfolgreich ausgeklammert wird.

Das nächste Prinzip ist das Genetische. Beim genetischen Unterricht soll an das Vorwissen der Schüler angeknüpft werden, zum Einstiege in das Thema sind hier keine Wiederholungen für die nächsten Themen, aber im weiteren Verlauf des Inhaltes ist zu erkennen das ein Thema auf das andere aufbaut. Die

Definitionen sollen erst dann zutage treten wenn sie benötigt werden um das auch im linear-sukzessivem Aufbau kritisierte „Vorratslernen“ zu eliminieren.

In diesem Buch wird, meiner Meinung nach, ein Begriff erst weit nach seiner Ersterwähnung definiert, die anderen findet man dort wo sie gebraucht werden. Ein Punkt des genetischen Unterrichts könnte man als nicht erfüllt ansehen und zwar die lückenlose Behandlung des Themas, da Kapitel, die nichts mit der Differenzialrechnung zu tun haben, zwischen den relevanten Kapitel eingeschoben sind. Die weiteren „Anforderungen" des genetischen Unterrichts sind nicht in vollem Umfang gegeben.

Nun zum Spiralprinzip, die wichtigste „Voraussetzung“ für dieses ist das immer wieder aufgreifen der Inhalte um sie in diesem Rahmen zu erweitern und zu vertiefen. Das immer wieder Aufgreifen erfolgt schon alleine durch die Übungsbeispiele beziehungsweise durch die Checklisten gegeben.

Das letzte von mir in Kapitel 2 angeführte Prinzip, die mathematische Tätigkeit kann ich im Rahmen dieser Schulbuch Analyse nicht mit einbeziehen, da es dabei um die Aktivität der Schüler ankommt, die kann ich anhand eines Buches nicht feststellen. Doch denke ich, dass durch den Bereich der mathematischen Anwendungen die Schüler sich motivierter dem Stoff stellen und dies könnte die Aktivität im Unterricht steigern.

Was man nun zu diesem Lehrbuch „Thema Mathematik“ sagen kann, ist das hier eine Mischform, die, meiner Meinung nach, die wichtigsten „Voraussetzungen“ der einzelnen Prinzipien vereinigt.

4.2.2) „Mathematik verstehen“

So wie beim vorherigen Buch starten wir mit dem linear-sukzessiven Prinzip. Hier ist wieder festzustellen, dass ein logisch-systematischer Ablauf der

themenrelevanten Kapitel stattfindet. Der Aufbau einspricht also den „Anforderungen“. Da in keinem Buch die Gliederung außer Acht gelassen wird, können wir auch hier sagen, dass das Lehrbuch in kleinere Stücke unterteilt ist. Auch das einteilen in Schwierigkeitsstufen liegt durch die Übungsbeispiele, die nach Komplexität geordnet sind, vor. Der Zusammenhang der einzelnen Unterpunkte ist auch, wie es das operative Prinzip vorsieht, gegeben. Die experimentierende und eigenständig denkende Phase wird auch hier durch die Beispiele gegeben, die etwa die Schüler auffordern „zu zeigen“, dass wenn eine Funktion streng monoton steigend ist, der Differenzenquotient von der Funktion positiv ist. Durch solche Angaben lernen die Schüler ihr erworbenes Wissen auf verschiedenste Problemstellungen zuzuschneiden nachdem sie darüber nachgedacht haben, wie das konkrete Problem zu lösen ist.

Zum Prinzip des deduktiven Aufbau kann gesagt werden, dass wir in diesem Buch teils „fertige Produkte“, wie vorgegebene Definitionen oder Sätze vorhanden sind und teils doch wieder auf das eigenständige durchdenken und experimentieren, sprich eigene Formeln herleiten, dargestellt werden.

Wir finden auch in Anlehnung an den genetischen Unterricht zutreffende „Voraussetzungen“, wie Definitionen werden dann festgelegt wenn sie benötigt werden, oder es wird durch den Aufbau eine Anknüpfung an das Vorwissen gewährleistet. So wie schon angeführt wird auch das selbstständige Denken und hinterfragen der Inhalte zur Erarbeitung weiterer Definitionen zum Zwecke des besseren Verständnis der Materie, durch die Fragestellungen im Buch, unterstützt.

Auch dem Spiralprinzip wird genüge getan, da das immer wieder Aufgreifen der einzelnen Inhalte ist in diesem Lehrwerk im Sinne gegeben, da die Aufgabenstellung eine Wiederholung und Erweiterung beziehungsweise eine Verdeutlichung des Stoffes fordert.

Auch hier kann die Aufbereitung des Buches nichts über die Schüleraktivität aussagen. Die verschiedene Anordnung oder farbliche Gestaltung der Bücher lässt auch keine Spekulationen zu, ob dies den Schülern mehr oder weniger zusagt. Jede Klasse ist verschieden, eigentlich hat jeder einzelne Schüler andere Vorlieben was die Gestaltung seines Lernstoffes angeht.

Das Fazit zu diesem Buch ist das des Vorherigen sehr ähnlich, da wir auch hier eine Mischung aus den wichtigsten „Anforderungen" der didaktischen Prinzipien vermerken können.

4.2.3) „Mathematik"

Um dieses Lehrbuch anhand der didaktischen Prinzipien zu analysieren, starten wir wieder mit dem Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus beziehungsweise mit seinem Gegenpart, dem operativem Prinzip. Wie schon erwähnt sind die wichtigsten Punkte aus diesen beiden die Zerlegung der Inhalte in kleinere Abschnitte, die Abkapselung der Schwierigkeiten und vom operativem Prinzip die Betrachtung der Inhalte als Ganzes und die Phase des experimentellen Durcharbeiten des Stoffes. Die Abfolge der Kapitel weist auch hier auf einen logisch-systematischen Aufbau hin und da die Inhalte in kleiner Unterkapitel aufgeteilt sind, haben wir auch die geforderte Stückelung der Inhalte in diesem Buch verankert. Schon im Inhaltsverzeichnis werden wie bereits angeführt in vier Kompetenzniveaus unterteilt, also ist die Schwierigkeitsabgrenzung nicht nur durch die verschiedene Anspruchsebene der Beispiele gegeben, sondern auch durch die einzelnen Teilinhalte. Dem operativem Prinzip wird auch genüge getan, da die Inhalte aufeinander aufbauen und somit der Zusammenhang des großen Ganze nicht vernachlässigt. Das Experimentieren wird bei den Beispielen, die in drei Schwierigkeitskategorien unterteilt sind, mit „Höchstwertigen

Grundkompetenzen“, die sogar damit ausgewiesen sind, dass durch eigenständiges reflektierendes Wissen verschiedene Fertigkeiten verknüpft werden, gefördert.

Für die „Vorgaben“ des Prinzips des deduktiven Aufbaus haben wir schon beim vorherigen Prinzip festgehalten, dass ein logisch-systematischer Aufbau der Inhalte vorliegt. Es werden den Schülern auch die geforderten fertigen Lerninhalte geliefert und da jedes Unterkapitel miteinander verbunden ist und aufeinander aufbaut ist auch die Her- beziehungsweise Ableitung voneinander gegeben. Doch entgegen des Prinzips des deduktiven Aufbaus werden das selbstständige Denken und Handeln, wie experimentieren und selbst die Inhalte durcharbeiten, gefördert.

Nun zu den „Anforderungen“ des genetischen Prinzips, welches verlangt, dass die Themen an das Vorwissen der Schüler anknüpfen, das sie auch tun, denn in diesem Lehrbuch befindet sich immer am Anfang jedes Kapitels eine Abschnitt mit „Wiederholung und Vorschau“ und natürlich durch den systematischen Aufbau, da die Abschnitte aufeinander aufbauen. Ich habe keine unnötig zu früh erwähnten Definitionen bemerkt und die die eingeführt wurden, werden gleich bei den Beispielen verwendet. Die einzelnen Inhalte werden lückenlos den Schülern dargeboten und die Informationen, die sie zur Lösung der Beispiele benötigen werden ihnen geliefert. Dadurch wird das selbstständige Denken der Schüler gefördert und gefordert.

Das nächste zu begutachtende Prinzip ist das Spiralprinzip. Die wichtigste „Vorgabe“ sind das „immer-wieder-Aufgreifen“ von Inhalten, um diese besser zu Verinnerlichen. Dies wird gewährleistet, durch die Bearbeitung der Beispiele, die nicht nur immer anspruchsvoller werden, also eine sogenannte Erweiterung der Schwierigkeit in sich bergen, sondern auch durch die „Mischbeispiele“ die verschiedene Inhalte mit einander verknüpfen und dadurch das wieder Aufgreifen bereits gelernter Definitionen, Sätze oder

Problemstellungen zum Thema machen, damit die Schüler die Lehrinhalte besser verinnerlichen.

Über die Schüleraktivität kann ich auch hier nichts sagen, aber ich denke, dass einige Schüler die historischen Informationen und den Bereich der mathematischen Anwendungen ansprechend finden und dadurch vielleicht mehr Interesse an der Materie entwickeln.

Die Verknüpfung der wichtigsten „Anforderungen“ der einzelnen Prinzipien ist auch hier, wie bei den Büchern davor, verankert und dadurch stellt auch dieses Lehrbuch eine gelungene Mischung der Prinzipien dar.

4.2.4) „Dimension Mathematik“

Über den logisch-systematischen Aufbau des Buches kann nicht gestritten werden, da auch in diesem Buch alles was mit der Differenzialrechnung in einem Großabschnitt enthalten ist und die Abfolge der Unterpunkte logisch und nachvollziehbar gestaltet ist. Um weiters auf das Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus einzugehen, werden die einzelnen Kapitel in drei „Lernschritte“ unterteilt, also ist auch das erforderliche stückweise Erarbeiten und die Differenzierung nach Schwierigkeiten gegeben. Der Gesamtzusammenhang wird auch nicht außer Acht gelassen, also ist der wichtigste Punkt des operativen Prinzips abgedeckt. Durch die beiliegende CD sind die Schüler angehalten eigenständig Aufgaben durch zu denken und zu bearbeiten, wir können die geforderte Übungsphase abhaken.

Wie in jedem Schulbuch gibt es „fertige Lerninhalte“, die die Schüler einfach nur verinnerlichen müssen, so wie es das Prinzip des deduktiven Aufbaus vorsieht, doch das selbstständige Denken wird nicht vernachlässigt, also wird das Prinzip des deduktiven Aufbaus durch den, in seiner Kritik festgelegt, Punkt eingeschränkt.

Genau wie es der genetische Unterricht fordert, werden die einzelnen Unterkapitel in die Bereiche „Vorwissen“, „Neues Wissen“ und „Aufgaben“ gedrittelt und damit wird gezeigt, dass an das Vorwissen der Schüler angeknüpft wird. Im Erarbeitungsteil werden Definitionen und Sätze durch Beispiele erklärt und dies verbessert, wie verlangt, die nachhaltige Sicherung. Die verschiedenen auf der CD vorhandenen Übungszettel und weiteren Beispiele fördern die Selbstständigkeit der Schüler und motivieren die Schüler weitere Aufgaben zu lösen und sich mit der Materie näher auseinander zu setzen und dadurch werden die Wissensinhalte, die wiedergegeben werden sollen, besser verankert und können auf andere Problemstellungen angewandt werden.

Das Spiralprinzip und seine „Anforderung“ des „Immer-Wieder-Wiederholens“ wird hier gleich auf einen Blick gezeigt, durch die Einteilung der Kapitel in verschiedene „Lernschritte“, da das „Vorwissen“ gelernt beziehungsweise wiederholt wird und auf dieser Basis das „Neue Wissen“ aufgebaut wird und zusätzlich wird durch die Aufgaben der Verdeutlichungseffekt befriedigt. Dadurch können die Wissensinhalte verankert werden und jeder Zeit auf verschiedene Problemstellungen angewendet werden.
Die Schüleraktivität im Unterricht ist auch bei diesem Lehrbuch nicht ersichtlich, doch kann ich mir vorstellen, dass durch die Zusatzinformationen und Aufgaben auf der CD zum selbstständigen Arbeiten motiviert werden und der Unterricht dadurch zusätzlich belebt wird.

Wir können also festhalten, dass in diesem Lehrbuch eine gelungene Mischung zwischen vorgegebenen Inhalten und dem selbstständigen Denken und Arbeiten gefasst ist. Die wichtigsten Punkte der Prinzipien werden hier verbunden.

4.3) Fazit zu den Schulbüchern

Jedes dieser vier Lehrbücher wurde nun anhand seines Aufbaus und der in ihm verankerten didaktischen Prinzipien analysiert und wir konnten feststellen, dass sich die Bücher zwar in ihrer Aufbereitung, wie der Farbgebung, Unterteilung oder einzelnen Informationsgebungen unterscheiden, aber die Grundstruktur ist in allen gleich. Die Vorbereitung auf die Zentralmatura lösen auch alle vier durch ihre Aufgabenstellung und die symbolische Ausweisung der wichtigsten Punkte sehr gut.

Die Lehrbücher verinnerlicht eine gelungene Mischform der wichtigsten „Anforderungen" der didaktischen Prinzipien und befriedigen nicht nur den Wunsch der vorgefertigten Lerninhalte, die von den Schülern nur mehr in ihr Wissen verankert und bei Bedarf wiedergegeben werden sollten, sondern auch die Forderung nach eigenständigem Denken und Erarbeiten von Lerninhalten, das durch die Aufgaben beziehungsweise Problemstellung in den Büchern gewährleistet wird. Der logisch-systematische Aufbau beziehungsweise Abfolge der Lehrinhalte ist durch die Anlehnung an den Lehrplan und die in ihm festgelegten Inhalte gegeben.

Wenn ich mich als zukünftiger Lehrer für eines dieser Schulbücher entscheiden müsste, fiele mir die Auswahl sehr schwer, da ich in jedem Buch seine Vorzüge sehe und jedes einzelne seine Daseinsberechtigung durch seine Gestaltung und die Vermittlung des Themas hat. Das Buch, das nach weiteren Überlegungen beziehungsweise nochmaligen Durchsehen, für mich persönlich am Geeignetsten scheint, ist das Lehrbuch „Mathematik". Da es, meiner Meinung nach, die gelungenste Strukturierung der Inhalte aufweist und zusätzlich, wie schon erwähnt, die Abschnitte „Wiederholung und Vorschau" und „Rückblick und Ausblick", sowie den historischen Hintergrund und mathematische

Anwendung der Themen im außerschulischen Leben, in einer sehr ansprechenden und anspruchsvollen Art und Weise vereinigt.

Fazit

Ziel dieser Arbeit war es, zu untersuchen, in wie weit die Bildungsinstitutionen, Schule und Universität, sich gleichen, beziehungsweise unterscheiden. Bezüglich der Menge des Lehrstoffes und des Schwierigkeitsgrades ist natürlich, und vollkommen legitim, die Universität ein Spitzenreiter, welcher auf hohem Niveau vertiefende mathematische Prozesse lehrt. Nichts desto trotz sind dies nur weitere Ausführungen von Grundlagen, die zu einer Allgemeinbildung zu zählen sind, welche an der Schule ihren berechtigen Platz gefunden haben. Entscheidend ist nun die Art und Weise der Vermittlung dieser Grundlagen, da die Methode des Lernens ein unerlässliches Werkzeug für weitere Wissensgenerierung ist. Dafür bekommen Lehrer didaktische Inhalte an der Universität vermittelt, brauchen jedoch in der Ausübung ihrer Tätigkeit auch Lehrbücher mit welchen sie in der Schule mit den Schülern operieren können. Deshalb ergab meine Untersuchung eben dieser Materialien eine erfreuliches Ergebnis. Alle vier Schulbücher und die Unterlagen der Universität wiesen methodische Merkmale der didaktischen Prinzipien auf, welche ich im Detail erklärt und untersucht habe. Schwerpunkte der einzelnen didaktischen Disziplinen sind natürlich unterschiedlich in die mathematischen Inhalte eingeflochten, doch alles folgt einem logisch nachvollziehbaren Konzept, bei dem ganzheitliches Lernen generiert wird. Somit hat ein Mathematiklehrer eine Bandbreite an Materialien, welche ihm qualitativ hochwertigen Unterricht ermöglicht. Auch wenn eine Schule sich auf ein bestimmtes Lehrbuch fixiert, hat der Lehrer die Möglichkeit seinen privaten Fundus an Materialien aufzustocken und dadurch den Unterricht für die verschiedenen Lerntypen zu öffnen.

Darüber hinaus decken die didaktischen Prinzipien der Schule sich auch mit denen der Universität. Die didaktischen Anforderungen der Universität wurden nun auch in für den Schulalltag brauchbar umgesetzt. Eine Formel

wird nicht mehr an die Tafel geklatscht und kommentarlos für Beispiele herangezogen, sondern ist nun ein vom Lehrer geschickt eingesetztes Hilfswerkzeug um Schüler mit einem „Aha-Erlebnis“ zur gewünschten Lösung zu bringen. Dadurch entsteht eine detektivische Freude beim Schüler Inhalte zu erproben und Formeln selbstständig zu erarbeiten, wodurch ganzheitliches Lernen stattfinden kann. So besteht eine Mischform der wichtigsten Merkmale der didaktischen Prinzipien, die darauf abzielt eine generelle Kompetenz zu schulen, mit Problemstellungen eigenständig umgehen zu können.

Universität und Schule sind nun verwandtere Institutionen wenn es um die Didaktik der Mathematik geht, und folgen somit den gleichen Überzeugungen.

Dies ist in meinen Augen eine sehr wünschenswerte und produktive Entwicklung, welche einen Spagat zwischen Theorie und anwendbarem Wissen schafft.

Zusammenfassung

Diese Arbeit versucht die Frage zu klären, ob ein Vergleich zwischen Schule und Universität im Hinblick auf das Thema Differenzialrechnung unter didaktischen Gesichtspunkten zu ziehen ist.
Die vier großen Kapitel dieser Arbeit beschäftigen sich mit den nachstehenden Punkten:

- Den mathematischen Hintergrund der Differenzialrechnung in seinem historischen Kontext und die Einführung des Themas in den Lehrplan der AHS.
- Die didaktischen Prinzipien, die im Mathematikunterricht impliziert sein sollten.
- Eine Analyse des Aufbaus zweier im Lehramtsstudium der Mathematik erforderlichen Vorlesungen zum Thema Differenzialrechnung unter Einbeziehung der didaktischen Prinzipien.
- Eine Lehrbuchanalyse der vier gängigsten Schulbücher bezüglich ihres Aufbaus des Themas Differenzialrechnung unter Einbeziehung der didaktischen Prinzipien.

Das erste Kapitel behandelt den historischen Hintergrund der Differentialrechnung und in weiterer Folge seinen mühsamen Einzug in den Lehrplan der AHS. Hier werden auch Definitionen, die für das Grundwissen der Differentialrechnung entscheidend sind, angeführt.

Im Kapitel zwei wird auf den didaktischen Hintergrund des Mathematikunterrichts eingegangen und didaktische Prinzipien näher erläutert.

Das dritte Kapitel beinhaltet eine Analyse des Aufbaus zweier Universitätsvorlesungen zum Thema Differenzialrechnung und dieser wird anhand der didaktischen Prinzipien durchleuchtet.

Im vierten Kapitel wird der Aufbau der vier gängigsten Schulbücher zum Thema Differentialrechnung und die ihm zugrundeliegenden didaktischen Prinzipien analysiert.

Abstract

The paper in hand aims at identifying whether the didactic contexts of school and university can be compared regarding the topic differential calculus.

The following aspects are covered in the four main chapters:

• The mathematical background and historical context of differential calculus, as well as its introduction to the syllabus of the AHS

• The didactic principles that mathematics lessons should contain

• An analysis of two compulsory lectures on differential calculus for students who study mathematics to become a teacher by means of the didactic principles

• A structural analysis of the four major school books on differential calculus by means of the didactic principles

Chapter One is concerned with the historical background of differential calculus and the difficulties encountered during the process of including the topic into the syllabus of the AHS. Moreover, it contains some basic definitions.

Chapter Two provides insight into the didactic background of mathematics lessons and explains the didactic principles.

Chapter Three analyses the structure of two university lectures on differential calculus by means of the didactic principles.

Finally, Chapter Four contains an analysis of the four major school books on differential calculus and the didactic principles on which they are based.

Quellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

Archibald, Thomas: „Differentialgleichungen: Ein historischer Überblick bis etwa 1900“, in: Jahnke, Hans Niels (Hg.): *Geschichte der Analysis*. Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag 1999, 411-448.

Bleier, Gabriele; Lindenberg, Judith; u.a.: *Dimension Mathematik. Teil 7*. 2.Aufl., Wien: E. Dorner Verlag 2013

Blum, Werner: *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1983.

Brand,Clemens; Dorfmayr Anita; u.a.: *Thema Mathematik. Teil 7*. 3. Aufl., Linz: Veritas Verlag 2013.

Führer, Lutz: *Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen*. Braunschweig/Wiesbaden: Viewer Verlag 1997.

Götz, Stefan; Reichel, Hans-Christian (Hg.): *Mathematik. Teil 7*. Wien: öbv 2011.

Hairer, Ernst; Wanner, Gerhard: *Analysis in historischer Entwicklung*. Übersetzt v. Andreas Lochmann, Berlin: Springe 2011.

Hauer - Typpelt, Petra: Dissertation: *Zugänge zur Normalverteilung und ihre fachdidaktische Analyse.* Wien: 1998.

Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* 9. Aufl., Stuttgart: B. G. Teubner 1990.

Kapper, Gerhard: Diplomarbeit: *Die mathematische Unterrichtsreform am Anfang des 20. Jahrhunderts in Österreich*. Wien: 1998.

Koth, Maria: Skriptum zur Vorlesung: *Schulmathematik 6. Differential- und Integralrechnung*. Wien: Wintersemester 2011/2012.

Krauthausen, Günter; Scherer, Petra: *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag 2001.

Maanen, Jan van: „Vorläufer der Differential- und Integralrechnung“, in:

Jahnke, Hans Niels (Hg.): *Geschichte der Analysis*. Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag 1999, 43-88.

Malle, Günther; Koth Maria; u.a.: *Mathematik verstehen. Teil 7*. Wien: öbv 2013.

Raith, Peter: Mitschrift zur Vorlesung: *Differentialgleichungen für LAK*. Wien: Wintersemester 2011/2012.

Volkert, Klaus: *Geschichte der Analysis*. Mannheim/Wien/Zürich: B.I. Wissenschaftsverlag 1988.

Vollrath, Hans-Joachim: *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag 2001.

Wiater, Werner: *Unterrichtsprinzipien. Prüfungswissen- Basiswissen Schulpädagogik*. 3.Aufl., Donauwörth: Auer Verlag 2008.

Internetquellen

http://www.duden.de/rechtschreibung/Mathematik (Stand 27.4.2015)

http://homepage.univie.ac.at/karl.sigmund/homepagewasistmath.pdf

(Stand 27.4.2015)

http://www.gemeinsamlernen.at (Stand 29.4.2015)

http://www.jusline.at/index.phpcpid=ba688068a8c8a95352ed951ddb88783e&lawid=90&paid=2
(Stand 29.4.2015)

Abbildungs- & Tabellenverzeichnis

Tabelle: Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus versus operatives Prinzip - die wichtigsten Merkmale, Seite 38.

Abbildung 1: Titelblatt des Kapitel Differentialrechnung- Grundlagen in „Thema Mathematik 7“, Seite 56.

Abbildung 2: Titelblatt des Kapitels Grundbegriffe der Differentialrechnung in „Mathematik verstehen 7“, Seite 60.

Abbildung 3: Titelblatt des Kapitels Differenzialrechnung in „Mathematik 7“, Seite 63.

Abbildung 4: Titelblatt des Kapitels Differentialrechnung in „Dimension Mathematik 7“, Seite 66.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Vorname/ Nachname	Alice Welzl
E-Mail	alice.welzl@gmx.at
Staatsangehörigkeit	Österreich
Geschlecht	Weiblich
Familienstand	ledig

Aus- und Weiterbildung

Zeitraum	seit 2007 Lehramtsstudium Mathematik und Psychologie/ Philosophie diverse Praktika im Rahmen des Lehramtsstudiums - GRG 19/ Bi 26 Billrothgymnasium, Wien - G11 BG/ BRG Geringergasse, Wien - BHAK und BHAS Wien 10
Zeitraum	2003 - 2007 Studium der Rechtswissenschaften, Uni Wien
Zeitraum	1994 - 2003 BRG/ BORG Schloss Traunsee, Gmunden
Zeitraum	1990 - 1994 Volksschule, Linz