DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Kompendium zum Kontextkatalog der Zentralmatura in Mathematik

Verfasser

Karl Stöckl

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 412 406

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramtsstudium UF Physik UF Mathematik

Betreuer: Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Abstract

Im Jahr 2015 wird in Österreich erstmals die AHS Reifeprüfung in Mathematik standardisiert und zentral durchgeführt. Ein Schwerpunkt ist die praktische Anwendung der Mathematik. Dazu werden manche Kontexte im Rahmen der Klausur erklärt, andere werden als bekannt vorausgesetzt. Einen Überblick dieser bekannten „außermathematischen" Begriffe aus Physik und Finanzmathematik ist im Kontextkatalog des Bifie zu finden.

Im ersten Teil der Diplomarbeit wird mit Hilfe von Interviews untersucht, wie sehr Lehrerinnen und Lehrer mit dieser neuen Schwerpunktsetzung schon vertraut sind und wie sie damit umgehen. Weiters wird gefragt, welche Hilfestellung sich Lehrerinnen und Lehrer dazu wünschen.

Mit Hilfe der empirisch gewonnen Daten aus den Interviews wird ein Kompendium für Physik und Finanzmathematik entwickelt und vorgestellt. Dieses Kompendium, welches als Lehr- und Lernbuch konzipiert ist, bettet u. a. bisher bekannte passende Aufgaben des Bifie in eine sinnvolle und übersichtliche Reihenfolge ein. Dabei ergänzen einander notwendige Theorie und durchgerechnete Beispiele.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mit ihrer Unterstützung zur Realisierung dieser Diplomarbeit beigetragen haben.

Ich bedanke mich sehr herzlich bei Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz für die sehr gute und konstruktive Betreuung während der gesamten Diplomarbeit. Sein sorgfältiges Korrekturlesen und die didaktischen und inhaltlichen Korrekturvorschläge waren ein unverzichtbarer Teil des Entstehungsprozesses.

Ich danke dem Wiener Stadtschulrat und den jeweiligen DirektorInnen für die Genehmigung von Lehrerinterviews. Ohne die freundlichen Lehrerinnen und Lehrer, die ihre Zeit und ihr Wissen für die Interviews zur Verfügung gestellt haben, wäre die Umsetzung dieser Diplomarbeit nicht möglich gewesen, ihnen allen bin ich zu großem Dank verpflichtet.

Ein besonderer Dank gilt auch HR Mag. Reingard Glatz für ihre Unterstützung und OStR. Prof. Mag Gabriela Rösler für ihre Verbesserungsvorschläge in Rechtschreibung und Grammatik. Weiters möchte ich mich bei meinen Arbeitskolleginnen und Arbeitskollegen für oftmaliges gutes Zureden bedanken.

Meine Freundin Kathrin war mir der wichtigste Rückhalt und bekräftigte mich in meinem Handeln. Besonderer Dank gebührt meiner Familie und meiner Schwiegerfamilie für die finanzielle und mentale Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Kennen Sie die Lösung? „Um eine Stahlfeder aus der Ruhelage um x cm zu dehnen, ist die Kraft $F(x)$ erforderlich. Geben Sie an, was in diesem Kontext mit dem Ausdruck $\int_0^5 F(x)dx$ berechnet wird"?

Sind Sie PhysiklehrerIn, so ist die Interpretation des Terms $\int_0^5 F(x)dx$ für Sie wahrscheinlich kein Problem. Unterrichten Sie neben Mathematik nicht Physik und standen vielleicht schon in der Schule etwas auf Kriegsfuß mit der Physik, so kann es durchaus sein, dass Sie die Interpretation des Terms $\int_0^5 F(x)dx$ nicht kennen. Wenn Sie AHS-MathematiklehrerIn von Beruf sind, dann sollten Sie ab 2015 diesen Ausdruck kennen, dies ist nämlich auch Inhalt der neuen standardisierten Reifeprüfung in Mathematik.

Verschiedene Begriffe aus der Welt der Finanzmathematik und der Physik wurden im sogenannten Kontextkatalog (Bifie, SSRM, ab S. 19) gesammelt. Diese Begriffe und deren Anwendungen werden als bekannt vorausgesetzt, d. h. sie müssen z. B. bei der Matura nicht mehr extra erklärt werden. Andere Kontexte werden auch vorkommen, diese werden aber im jeweiligen Zusammenhang erklärt.

Da finanzmathematische und physikalische Anwendungen in der Mathematik nicht unbedingt Teil des Lehramtsstudiums sind, will ich mit der vorliegenden Diplomarbeit ein Nachschlagewerk für diese Kontexte schaffen. Mit Hilfe empirisch gewonnener Daten aus LehrerInnen- Interviews wurden von mir ein Kompendium für Physik und ein Kompendium für Finanzmathematik erstellt. Jedes Kompendium dient als Lern- und Nachschlagewerk. Die zur Lösung der Beispiele notwendige Theorie ist beigefügt. Zu sämtlichen Beispielen gibt es eine Komplettlösung.

Apropos Lösung: Mit dem Ausdruck $\int_0^5 F(x)dx$ wird die physikalische Arbeit berechnet, die verrichtet wird, wenn die Feder aus der Ruhelage um 5 cm gedehnt wird. Mit dieser Antwort hätten Sie ein Grundkompetenzbeispiel richtig gelöst. Viele weitere Beispiele mit Erklärungen werden im jeweiligen Kompendium erörtert, zuvor sehen wir uns allerdings an, was LehrerInnen zum Kontextkatalog sagen.

2. Eine empirische Erhebung

2.1. Die Ausgangssituation

Im Rahmen der Diplomarbeit wurden acht LehrerInnen aus mehreren Gymnasien zum Kontextkatalog der Zentralmatura in Mathematik interviewt. Ich wollte wissen, wie MathematiklehrerInnen mit dieser neuen Schwerpunktsetzung (physikalische und finanzmathematische Anwendungen) umgehen, um für meine Vorschläge für ein solches Kompendium eine empirische Unterlage zu haben.

Jedem der Interviewten wurden neun Fragen gestellt, die wie folgt lauteten:

1. Ist Ihnen der Begriff "Kontextkatalog" im Rahmen der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung bekannt?
2. Welche Absicht, glauben Sie, verfolgt das Bifie mit dem Kontextkatalog?
3. Ist Ihrer Meinung nach der Kontextkatalog im Sinn einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung gerechtfertigt oder nicht?
4. Bereiten Ihnen die Begriffe aus der Fachwelt der Physik und der Finanzmathematik Schwierigkeiten?
5. Fühlen Sie sich bei Physikbeispielen (finanzmathematische Beispielen) sicher, eher unsicher, überfordert?
6. Welche Informationsquellen nützen Sie um physikalische (finanzmathematische) Beispiele zu lösen?
7. In welchem Ausmaß kooperieren Sie mit KollegInnen in Hinblick auf den Kontextkatalog?
8. Welche Unterstützung würden Sie brauchen, um physikalische bzw. finanzmathematische Beispielen besser verstehen zu können?
9. Finden Sie es eine gute Idee, den Kontextkatalog der neuen Reifeprüfung in Mathematik wie geplant auf andere Fächer auszudehnen?

2.2. Auswertung

Sechs Interviews wurden aufgenommen, bei zwei weiteren Interviews wurde schriftlich in Stichworten mitgeschrieben. Die Interviews wurden transkribiert, im Anhang sind die vollständigen Interviews aufgelistet.

Die Antworten zu jeder Frage wurden anschließend in Kategorien eingeteilt. Als Beispiel sehen wir uns Frage zwei an: „Welche Absicht, glauben Sie, verfolgt das Bifie mit dem Kontextkatalog?" Mit Hilfe der Antworten der LehrerInnen habe ich diese Frage in drei Kategorien eingeteilt: Ein Ziel ist die Vereinheitlichung der mathematischen Sprache, eine weiteres Ziel die Vereinfachung der Vorbereitung für SchülerInnen und LehrerInnen. Zuletzt wird auch noch eine mögliche Vernetzung mit anderen Fächern genannt. Die drei Kategorien zu dieser Frage sind also Vereinheitlichung, Vernetzung und Vorbereitung. Eine Übersicht der weiteren Kategorien, auf die folgende Thesen aufbauen, findet man in der Interviewmatrix (siehe Anhang).

2.3. Thesen

Mit Lehrer sind Lehrerinnen und Lehrer gemeint, sinngemäß gilt das auch für andere vorkommende männliche Formen.

These 1: Der Kontextkatalog ist den LehrerInnen bekannt

Die Lehrerinnen und Lehrer wissen, dass Begriffe aus der Welt der Physik und der Finanzmathematik gefordert sind. Sie wissen auch, dass diese Begriffe aus dem Kontextkatalog bei der Reifeprüfung in Mathematik nicht mehr extra erklärt werden müssen. „ [...], d. h. ich weiß, dass es eine Liste von außermathematischen Themen oder Begriffen oder Formeln geben soll, die als bekannt bei der Reifeprüfung vorausgesetzt werden." (Interview 5, Zeile 4).

These 2: Der Kontextkatalog soll Begriffe vereinheitlichen und die Vorbereitung erleichtern

Als erste Absicht wird eine Vereinheitlichung für SchülerInnen und LehrerInnen genannt. „Dass es einen Kontext von Formeln gibt, der überall gleich ist, gleich geschrieben wird, gleich angegeben wird. Es gibt in vielen Lehrbüchern Formeln, die auf den ersten Blick ganz anders ausschauen und in Wirklichkeit dasselbe sind.” (Interview 5, Zeile 16).

Eine Absicht könnte auch eine Hilfestellung für die Unterrichtsvorbereitung sein. „Vorbereitung der Lehrer und Vereinheitlichung sind die zwei Schlagworte.” (Interview 3, Zeile 20). „Es sind Richtlinien und Erleichterungen für Lehrer zur Erstellung von Fragen.” (Interview 1, Zeile 10).

Weiters wird auch die Vernetzung mit anderen Fächern bei den Interviews angesprochen. „Und sie wollen wahrscheinlich auch, dass man eher fächerübergreifend unterrichtet.” (Interview 6, Zeile 14). Diese Aussage wird allerdings nicht von allen geteilt, wie wir im nächsten Punkt sehen werden.

These 3: Die Hauptaufgabe des Kontextkatalogs ist die Unterstützung der Vorbereitung auf die neue Reifeprüfung in Mathematik

Ob der Kontextkatalog ein fächerübergreifendes Allgemeinwissen fördert, darüber waren die Meinungen geteilt. Einige sehen den Kontextkatalog als Unterstützung für eine gezielte Maturavorbereitung, jedoch nicht als einen Beitrag zur Allgemeinbildung. „Ich denke der Kontextkatalog ist einfach wichtig, damit man sich besser auf die Prüfung vorbereiten kann.” (Interview 4, Zeile 21). Ein Lehrer meinte: „Im Sinne einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung meine ich nein, im Sinne der neuen standardisierten Reifeprüfung meine ich sehr wohl. Zu einer Allgemeinbildung würde es meiner Meinung nach auch gehören, Formeln oder Begriffe einfach so herausfinden zu können, auch wenn sie was anderes heißen.” (Interview 5, Zeile 30).

Anderen Lehrerinnen und Lehrern geht der Kontextkatalog inhaltlich zu weit. Finanzmathematik wird mit der HAK und Physik mit der HTL assoziiert. „Ich würde sagen, er ist zu umfangreich geworden. Er beinhaltet mittlerweile meiner Meinung nach Bereiche der HTL und der HAK. [...] Das geht eigentlich weit über das hinaus, was wir bisher in einer AHS gemacht haben, das sind eigentlich Zusatzqualifikationen, die verlangt werden.” (Interview 2, Zeile 26). Eine Einschränkung des Kontextkatalogs könnte sich auch ein anderer Teilnehmer vorstellen: „Zehnerpotenzen finde ich sehr ok. Mit den physikalischen Einheiten bin ich nicht ganz einverstanden.” (Interview 3, Zeile 29).

Andere finden es spannend bzw. es wird die Kompetenzorientierung hervorgehoben: „Ich glaub es ist einfach das Wesen der neuen Reifeprüfung, dass sie kompetenzorientiert ist, und die Kompetenzen sind eigentlich fächerunabhängig, denke ich." (Interview 1, Zeile 20).

These 4: Physikalische Beispiele können große Unsicherheit hervorrufen

Es fällt auf, dass sich die meisten TeilnehmerInnen auf der einen Seite zutrauen, Physikbeispiele zu lösen, auf der anderen Seite kann trotzdem eine große Unsicherheit bezüglich physikalischer Beispiele vorherrschen: „Ja, ich kann sie lösen, meistens auch ohne Nachschlagen, aber so topfirn, dass ich jetzt sage ´kann ich auf Anhieb´, muss ich sagen, gelingt mir nicht immer, aber Überforderung dezidiert nicht." (Interview 3, Zeile 54).

Physik kann durchaus ambivalente Gefühle hervorrufen. Ein Lehrer meinte auf die Frage, ob Beispiele aus der Physik Schwierigkeiten bereiten, „Nein, sie bereiten mir keine Schwierigkeiten!" (Interview 5, Zeile 75). Die Sicherheit ist trotzdem nicht vorhanden: „Ja, eher unsicher!" (Interview 5, Zeile 80).

Das Physik manchmal Unsicherheit hervorruft und manchmal nicht, hängt sicher auch mit dem jeweiligen Begriffen zusammen, dies meinte u.a. Lehrer 7. Lassen wir dazu noch einmal Teilnehmer 3 zu Wort kommen: „Ja, nachdem ich physikalisch nicht sehr versiert bin, gibt es schon gewisse Begriffe, welche ich nachlesen müsste. Es geht eher um die Stromgeschichten. Die Grundbegriffe Kraft, Energie, sind schon bekannt." (Interview 3, Zeile 42).

Um mehr über die einzelnen Begriffe herauszufinden, wurde jedem Teilnehmer und jeder Teilnehmerin nach dem Interview ein Fragebogen vorgelegt. Mit Hilfe einer vierstufigen Skala, konnte der Teilnehmer seine Kenntnisse benoten. Die Möglichkeiten waren: sehr bekannt (kann gut damit arbeiten), bekannt (kann damit arbeiten), wenig bekannt (kann nur schwer damit arbeiten) und nicht bekannt (kann gar nicht damit arbeiten). Für die folgende Tabelle wurden die PhysiklehrerInnen nicht berücksichtigt:

	sehr bekannt	bekannt	wenig bekannt	nicht bekannt
Arbeit		3	3	
Dichte	6			
Drehmoment		3	3	
Druck	2	4		
elektrische Stromstärke	2	1	3	
elektrischer Widerstand	2		4	
Energie	1	4	1	
Frequenz	4	1	1	
gleichförmige geradlinige Bewegung	5	1		
gleichmäßig beschleunigte Bewegung	4		2	
kinetische Energie	1	2	3	
Kraft	4	2		
Leistung	1	5		
potentielle Energie		2	2	2
Temperatur	6			
Wärmemenge	1	2	1	2

Sieht man sich die geradlinigen Bewegungen an, so fällt auf, dass die beschleunigten Bewegungen für manche ein Problem sind. Ein weiterer Begriff der Bewegung, welcher vom Bifie bisher nicht verwendet wurde, das Drehmoment, dürfte noch größere Schwierigkeiten bereiten.

Eine Grundvoraussetzung der Physik, die Energie und deren verwandte Begriffe, Arbeit, potentielle und kinetische Energie, sowie Wärmemenge rufen ebenfalls sehr große Verunsicherung hervor. Auch die Begriffe der Elektrizität werden öfters mit wenig bekannt verbunden.

Mit üblicheren Begriffen aus dem Alltag, wie Dichte, Druck, Frequenz, Kraft und Temperatur kann anscheinend besser gearbeitet werden.

Insgesamt fällt also auf, dass eine große Unsicherheit bezüglich gewisser physikalischer Themen herrscht. Es kann die Vermutung aufgestellt werden, dass dies nicht unbedingt vom Schwierigkeitsgrad der einzelnen Beispiele abhängt.

These 5: Finanzmathematik verunsichert weniger als Physik

Aufgaben aus Finanzmathematik sind i. A. beliebter als die Physikaufgaben. „Dass manches interessante Neuheit ist, das mag schon sein. Es ist ja nicht verboten, dass man dazulernt." (Interview 4, Zeile 45). Jedoch gibt es Befürchtungen, zu wenig Zeit für diesen neuen Schwerpunkt zu haben: „Es ist schon schön, es fehlen einfach die Stunden, um eben über diese Grundkompetenzaufgaben hinaus zu gehen." (Interview 2, Zeile 60).

Natürlich gibt es auch hier Ausnahmen, ein Lehrer sagte sehr deutlich „Finanzmathematik mag ich grundsätzlich nicht" (Interview 1, Zeile 32). Er stellte aber auch klar, dass das Problem nicht an der Schwierigkeitsstufe liegt: „Wenn ich mich damit beschäftigen muss, ist es nicht wirklich ein Problem." (Interview 1, Zeile 60).

Um wieder mehr über die einzelnen Begriffe zu erfahren, sehen wir uns an, was die jeweiligen InterviewpartnerInnen bei den finanzmathematischen Begriffen angekreuzt haben:

	sehr bekannt	bekannt	wenig bekannt	nicht bekannt
Anfangskapital	8			
Breakeven-Point	4		1	3
Endkapital	8			
Erlösfunktion	3	4	1	
Ertragsfunktion	3	3	2	
Gewinnfunktion	6	1	1	
Grenzerlös		4	3	1
Grenzgewinn		4	3	1
Grenzkosten		4	3	1
Kostenfunktion	8			
Nachfragefunktion	4	1	3	

Begriffe, die bereits in der fünften Klasse unterrichtet werden, wie Anfangskapital, Endkapital, Gewinnfunktion und Kostenfunktion, bereiten keine Probleme. Die Erlösfunktion bzw. die Ertragsfunktion scheinen nicht ganz klar zu sein. Weniger üblich bei Beispielen ist auch die Nachfragefunktion, worunter die Bekanntheit des Begriffs leidet.

Dass bestimmte Fachbegriffe auch abschreckend wirken können, sieht man am Begriff Break-Even-Point. Es ist anzunehmen, dass der Begriff Gewinnschwelle besser bekannt ist und rechnerisch kein Problem darstellt.

Wenig anfangen können manche Teilnehmer mit den wirtschaftlichen Anwendungen der Differentialrechnung: Grenzerlös, Grenzgewinn und Grenzkosten scheinen weitestgehend unbekannt zu sein.

Insgesamt fällt auf, dass ähnlich wie bei physikalischen Themen einige Begriffe mit wenig oder nicht bekannt vermehrt angekreuzt werden. Trotzdem ist bei weitem nicht die gleiche Unsicherheit wie bei manchen Physikbegriffen erkennbar.

These 6: Die wichtigsten Informationsquellen sind die Schulbücher und das Internet

Als erste Informationsquelle dienen die Schulbücher oder die Kollegen. „Normale Schulbücher und Kollegen, die wichtigste Quelle von allen." (Interview 2, Zeile 73). Anders formuliert: „Also bei finanzmathematischen Beispielen gehe ich über das, was im Lehrbuch steht, nicht hinaus. Bei den physikalischen Beispielen frage ich meine Kollegen."

Für manche sind die Schulbücher aber nicht ausreichend. Auf die Frage ob, die Schulbücher ausreichend sind kam die Antwort: „Man könnte auf alle Fälle viel mehr machen in Mathematik, viel mehr!" (Interview 1, Zeile 89).

Nicht unüblich sind Anschaffungen aus der eigenen Tasche. „Das muss man sich als Lehrer jetzt alles selber zulegen" (Interview 1, Zeile 129).

Dabei verwenden manche Kollegen auch Bücher aus anderen Schulformen bzw. von anderen Verlagen: „Ich habe mir einmal eine ganze Serie HAK-Lehrbücher gekauft, eigentlich aus einem ganz anderem Grund, für Spezialgebiete bei der Matura, und die benutze ich jetzt dafür." (Interview 2, Zeile 69).

Eine wichtige Quelle ist natürlich auch das Internet: „Sehr viel wird im Internet nachgeschlagen oder in Schulbüchern der gleichen Schulstufe von anderen Verlagen." (Interview 3, Zeile 62). Ein anderer Kollege spricht so über die Vorzüge des Internets „Das hat durchaus sehr brauchbare Erklärungen, stelle ich fest." Kurz und prägnant: „Wenn, dann das Internet!" (Interview 6, Zeile 56).

Als Weiterbildungsmöglichkeit werden Seminare genannt, auch wenn sie nicht bei allen auf Gegenliebe stoßen. „Dort hat man immer ein oder zwei exemplarische Beispiele über zwei drei Jahre vorgesetzt bekommen, es ist nie ein neues Beispiel dazugekommen. Das war einfach ziemlich frustrierend, während sich in anderen Bereichen, ich hab vorher von der Physik erzählt, viel getan hat." (Interview 1, Zeile 96). Ein Lehrer geht sogar so weit, sich privat fortzubilden, da ihm die Seminare oft zu allgemein und zu wenig menschlich sind. (Interview 7, Zeile 70).

Natürlich ist auch die Bifie-Homepage neben anderen Quellen eine sehr wichtige Quelle: „Eventuell Beispielsammlungen, parallel zur Bifie Homepage, falls es so etwas gibt, oder Bücher meiner Tochter, die Wirtschaft studiert hat." (Interview 4, Zeile 52).

These 7: Je näher die Matura ist, desto mehr wird kooperiert

LehrerInnen, die von der neuen Matura betroffen sind, kooperieren untereinander. „Ich frage sie, oder ich halte Rücksprache und es hat schon interessante Aspekte gegeben." (Interview 5, Zeile 105).

Leider ist die Organisation von Treffen mehrere Lehrer nicht immer einfach. „Sonst ist es immer schwierig, der eine hat Unterricht, der andere hat keinen Unterricht, [...] Das ist aber einfach dringend, im nächsten Jahr sollte alles stehen." (Interview 1, Zeile 157).

Gesammelt werden die Information auf moodle. „Wir machen es auf der moodle Plattform,..." (Interview 1, Zeile 173).

LehrerInnen, die erst in den nächsten Jahren betroffen sind, kooperieren verständlicherweise noch nicht so stark. „Das ist zu weit weg, momentan, und ich glaube, das wird im Laufe der Zeit intensiver werden. (Interview 2, Zeile 90). „Noch gar nicht, aber ich denke schon, dass wir Beispiele austauschen würden." (Interview 4, Zeile 64).

These 8: Die meisten LehrerInnen sind für eine Ausdehnung des Kontextkatalogs

Die meisten LehrerInnen heißen eine Erweiterung des Kontextkatalogs gut. „Ich glaube, wenn ich mir den so durchlese, er ist nicht umfangreich genug. Ich bin immer erstaunt darüber, wie wenig darinnen steht." (Interview 2, Zeile 148).

Gefordert wird, dass dies nicht zu schnell passiert: „Soll ein Langziel sein, und nicht von heute auf morgen durchgesetzt werden." (Interview 7, Zeile 79).

Ein Lehrer sieht sogar eine Notwendigkeit darin, den Kontextkatalog auszudehnen. „Einerseits halte ich es sicher für sinnvoll, wenn man möglichst das Spektrum, das im Fächerkanon abgebildet ist, in Mathematik als Kontextkatalog definiert. Und auf der anderen Seite wird es auch eine gewisse Notwendigkeit geben, da mit der Zeit sonst die Beispiele ausgehen werden." (Interview 4, Zeile 108).

Betont wird auch die Fairness gegenüber den SchülerInnen: „Ja, weil ich es nicht fair den Schülern gegenüber finde, wenn die Lehrer nicht wissen, was gefragt wird, wenn es schon standardisiert sein soll" (Interview 5, Zeile 231). Als Beispiel wird die Form der Alterspyramide genannt: „Wenn ich es jetzt bei den standardisierten Reifeprüfungen so quer sehe, dann laufe ich schon wieder unrund [...] das sind so Kleinigkeiten" (Interview 5, Zeile 246). „Ist sicher zielführend, eben um einfach zu wissen, was erwartet wird, um da eine Verbindlichkeit zu schaffen, was die Schüler wirklich können." (Interview 3, Zeile 160). „Und gerade für unsere Schüler ist es wichtig: Müssen sie alle Begriffe kennen, können sie sich darauf verlassen, dass nur ein Begriff verwendet wird [...] Ich hätt schon gerne gewusst, auf was ich mich einstellen muss, das verlange ich von einem Kontextkatalog." (Interview 2, Zeile 164).

Bedenken gibt es, dass es die SchülerInnen nicht gewohnt sind, längerfristiges Wissen aufzubauen (Interview 8, Zeile 76).

These 9: Lehrer wollen Fortbildungen

Die LehrerInnen wollen neben schriftlichen Unterlagen Seminare als Unterstützung. „Ich meine, das schnellste ist immer, wenn ein gutes Seminar ist, wobei natürlich jetzt eine schriftliche Arbeit oder Buch als Unterlage schon interessant wäre." (Interview 1, Zeile 221).

Gut wären Seminare auf menschlichem und entgegenkommendem Niveau (Interview 7, Zeile 70). „Aber bei den finanzmathematischen Aufgaben, da würde ich z. B. irgendeine Lehrerfortbildung besuchen." (Interview 5, Zeile 142). „Fortbildungsseminare, also wenn es da ein entsprechendes Angebot gibt, das wäre absolut super. Es haben zwar einige der Kollegen bei uns die Kombination Physik und Mathematik, aber die Hälfte eben nicht, die haben sicher Interesse für physikalische Dinge." (Interview 1, Zeile 190).

These 10: Lehrer wollen für den Unterricht verwertbare Unterlagen

„Es gibt Lehrbücher und es gibt Lernbücher, und ich hätte gern eine Kombination aus beiden." (Interview 5, Zeile 217)

Voraussetzung sollte also sein, dass das Kompendium für Lehrer und Schüler verwendet werden kann. „Schulbuchmäßig, weil ich will es ja den Schülern weitergeben!" (Interview 6, Zeile 127). „Nicht, dass ich nicht das Material, das ich zur Unterstützung habe, noch überarbeiten muss, was ja sehr häufig passiert." (Interview 2, Zeile 125).

Wichtig sind ein klarer Faden und ein guter Aufbau. (Interview 8, Zeile 62). „Ja es ist so, dass in Mathematikbüchern die Beispiele immer nur eingestreut sind und dass es vielleicht nicht so einen verbindlich aufbauenden Leitfaden gibt." (Interview 3, Zeile 120).

Bei der Menge an Theorie gibt es unterschiedliche Auffassungen: „Ich hab lieber Basisinformationen, die vielleicht auch über Dinge hinausgehen, die man auch wirklich anwenden und brauchen kann, und dann schon auch adäquat aufbereitete Beispiele, vom Umfang aber auch von der Kompetenzstruktur, wie man es dann verwenden könnte [...] Die Basisinformation wäre grundsätzlich einfach wichtig, weil man nicht bei jedem Thema die Voraussetzung hat, gleich kompetent oder gleich eingearbeitet zu sein." (Interview 1, Zeile 255).

Andere meinen, die Kapitel sollten nicht zu lange sein: „Eine Einführung in das Kapitel, eine Teilung, Unterteilung in handliche Kapitel" (Interview 5, Zeile 168). „[...] und wenn ich eigentlich nicht Physik studiert habe, bringt es nichts, wenn ich irgendwas total Kompliziertes habe." (Interview 6, Zeile 132). „Ich muss es auch an die Schüler weitergeben, also wenn ich es auf einem hochuniversitären Niveau erklärt bekomme, muss ich es ja selber runter formulieren" (Interview 2, Zeile 108).

Die folgenden Kompendien sollten zum Selbststudium geeignet sein „Nein, so wirklich ab urbe condita, so wirklich von Beginn an angefangen, so dass ich mir das mehr oder weniger aneignen kann, was ich noch nicht weiß." (Interview 5, Zeile 201).

Gefordert wird Schulbuchniveau kombiniert mit fachlichem Verstehen (Interview 8, Zeile 54).

Die LehrerInnen wollen durchgerechnete Beispiele mit Lösungsweg bzw. Musterbeispiele „Wenn es ein neuer Bereich ist, ist auf jeden Fall ein durchgerechnetes Beispiel notwendig, sonst müsste man es zuerst von wo anders her mühsamer sammeln." (Interview 4, Zeile 84).

Dass ein Kompendium für Physik umfangreicher ist als für Finanzmathematik vermutet ein Lehrer: „[...] aber irgendeinen Zusatzband wie z. B. dieses Maturatraining Mathematik oder so ein schmales Hefterl Finanzmathematik, das wäre vielleicht nett [...] Ich glaube nicht, dass alles was ich aus der Physik nicht weiß, auf 15 Seiten Platz haben wird." (Interview 5, Zeile 149).

2.4. Umsetzung in der Praxis

Aus dieser Fülle an Ideen aus der Praxis wurden für das Kompendium die folgenden Punkte berücksichtigt:

- Lehr- und Lernbuch für Lehrer und Schüler auf Schulbuchniveau (8. Klasse)
- Motivierende Theorie und notwendiges Hintergrundwissen
- Einbettung der Bifie-Musterbeispiele in einer logischen Reihenfolge
- Musterbeispiele mit durchgerechneter Schritt für Schritt Lösung

3. Kompendium: Physik

3.1. Größenverhältnisse und Einheiten

3.1.1. Das Internationale Einheitensystem

Es gibt in der Physik ein international anerkanntes Einheitensystem, das SI-System (frz. Système international d´unités). Jede Einheit kann aus den sieben Basiseinheiten zusammengesetzt werden, die wie folgt lauten:

Basisgröße und Formelbuchstabe	**Basiseinheit**
Länge l	Meter (m)
Zeit t	Sekunde (s)
Masse m	Kilogramm (kg)
Stoffmenge n	Mol (mol)
Temperatur T	Kelvin (K)
Stromstärke I	Ampere (A)
Lichtstärke I_v	Candela (Cd)

Für die neue Reifeprüfung in Mathematik sind neben der Länge in Metern (m), der Zeit in Sekunden (s) und der Masse in Kilogramm (kg) folgende Basiseinheiten und zusammengesetzte Einheiten wichtig.

Größe	Einheit	Symbol	Beziehung
Temperatur	Grad Celsius bzw. Kelvin	°C, K	$\Delta t = \Delta T$
Frequenz	Hertz	Hz	$1\ Hz = 1\ s^{-1}$
Energie, Arbeit, Wärmemenge	Joule	J	$1\ J = 1\ kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}$
Kraft	Newton	N	$1\ N = 1\ kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}$
Drehmoment	Newtonmeter	N·m	$1\ N{\cdot}m = 1\ kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}$
elektrischer Widerstand	Ohm	Ω	$1\ \Omega = 1\ V{\cdot}A^{-1} =$ $1\ kg{\cdot}m^2{\cdot}A^{-2}{\cdot}s^{-3}$
Druck	Pascal	Pa	$1\ Pa = 1\ N{\cdot}m^{-2} =$ $1\ kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-2}$
elektrische Stromstärke	Ampere	A	$1\ A = 1\ C{\cdot}s^{-1}$
elektrische Spannung	Volt	V	$1\ V = 1\ J{\cdot}C^{-1} =$ $1\ kg{\cdot}m^2{\cdot}A^{-1}{\cdot}s^{-3}$
Leistung	Watt	W	$1\ W = 1\ J{\cdot}s^{-1} =$ $1\ kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}$

Abbildung 1: physikalische Einheiten

Wie wichtig einheitliche Messsysteme sind, sieht man an folgendem Beispiel vom Mars Climate Orbiter:

> „Der Orbiter sollte in etwa 140 km Höhe in einer Umlaufbahn um den Mars einschwenken. Durch eine Schlamperei wurden aber Meter und Fuß (das ist etwa 0,3 m) vertauscht. Die Sonde flog viel zu nah an den Mars heran und verglühte in der Atmosphäre, und mit ihr über 100 Millionen Euro!" (Apolin, 2007, S. 10)

Bei Berechnungen mit besonders großen oder besonders kleinen Zahlen haben sich Zehnerpotenzen sehr gut bewährt. In der Mitte der Tabelle gibt es in beiden Richtungen Zehnersprünge, danach für größere und kleinere Einheiten 10^3-Sprünge.

Vorsilbe	Bedeutung	Abkürzung	
Tera	Billion	T	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
Giga	Milliarde	G	$10^{9} = 1\,000\,000\,000$
Mega	Million	M	$10^{6} = 1\,000\,000$
Kilo	Tausend	k	$10^{3} = 1\,000$
Hekto	Hundert	h	$10^{2} = 100$
Deka	Zehn	da	$10^{1} = 10$
Dezi	Zehntel	d	$10^{-1} = 0{,}1$
Zenti	Hundertstel	c	$10^{-2} = 0{,}01$
Milli	Tausendstel	m	$10^{-3} = 0{,}001$
Mikro	Millionstel	µ	$10^{-6} = 0{,}000\,001$
Nano	Milliardstel	n	$10^{-9} = 0{,}000\,000\,001$
Pico	Billionstel	p	$10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$

Abbildung 2: Größen und Vorsilben

Beispiel (BMBF, SA 5-1, S. 5)

3) Blaues Licht besitzt eine Wellenlänge (=Abstand zweier „Hochpunkte" der Schwingung) von ca. 500 Nanometer.
Wie viele „Hochpunkte" treten auf, wenn blaues Licht eine Entfernung von 1 km zurücklegt?
Gib das Ergebnis in Worten und in Gleitkommadarstellung an! / 2 P

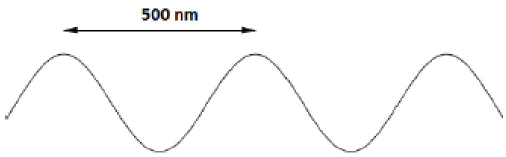


Abbildung 3: Beispiel, Wellenlänge des Lichts

Lösung:

1 Nanometer = 10^{-9} m → $500 \cdot 10^{-9} = 5 \cdot 10^{2} \cdot 10^{-9} = 5 \cdot 10^{-7}$ m

1 km = 10^{3} m = $10 \cdot 10^{2}$ m

Wir dividieren die Gesamtlänge durch den Abstand zweier „Hochpunkte":

$\frac{10 \cdot 10^{2}}{5 \cdot 10^{-7}} = 2 \cdot 10^{9}$ Hochpunkte

Wenn blaues Licht eine Entfernung von 1 km zurücklegt, treten zwei Milliarden Hochpunkte auf!

3.2. Energie und Arbeit

3.2.1. Energieerhaltung

„Man kann nicht zweimal in den gleichen Fluss steigen” (Heraklit, griechischer Philosoph)

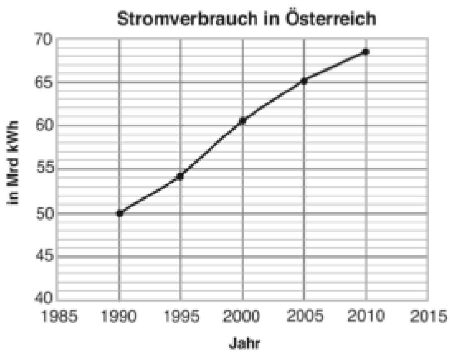
Dinge und Abläufe in der Welt ändern sich ständig. Es zeigt sich überraschenderweise, dass es für Änderungen einen konstanten Faktor gibt, nämlich die Energie, bzw. die Energieerhaltung. Eine Form der Energie kann in eine andere Form umgewandelt werden, dann wieder in eine andere Form und so weiter! Oft ist auch eine Umwandlung zurück in die Ursprungsform möglich, solche Umwandlungen nennt man „reversibel”. Geht dies nicht, so nennt man einen Vorgang „irreversibel”.

Bei allen diesen Prozessen wird weder Energie erzeugt noch vernichtet, sondern nur umgewandelt. Die neue Form kann mehr oder weniger nützlich sein. Eine für uns sehr wichtige Energieart ist die elektrische Energie. Viele Gegenstände des Alltags, wie z. B. Computer oder Waschmaschinen, werden mit Hilfe des Stroms betrieben.

Beispiel (BMBF, SA 6-2, S. 3)

In nebenstehender Abbildung wird der Stromverbrauch in Österreich im Zeitraum von 1990 bis 2010 dargestellt.

i) Berechne den prozentuellen Anstieg des Stromverbrauchs in Österreich von 2000 bis 2010.



ii) Begründe, warum die Abbildung einen falschen Eindruck bezüglich der Entwicklung des Stromverbrauchs in Österreich erwecken kann und wie dies vermieden werden könnte.

Abbildung 4: Beispiel, Stromverbrauch

Lösung:

i)

Hinweis: Wattstunde (Wh) ist zwar keine SI-Einheit, jedoch eine sehr gebräuchliche Maßeinheit der Arbeit bzw. Energie. Eine Kilowattstunde (kWh) ist das Tausend fache einer Wattstunde.

$E(2000) = 60{,}5\ \text{Mrd. kWh};\ E(2010) = 68{,}5\ \text{Mrd. kWh}$

$$p = \frac{(68{,}5 - 60{,}5)}{60{,}5} \cdot 100 \approx 13{,}2\ \%$$

Der prozentuelle Anstieg des Stromverbrauchs im gegebenen Zeitraum beträgt 13,2 %.

ii)

Die Skala der y-Achse geht von 40 bis 70 Mrd. kWh. Würde die Skala der y-Achse bei 0 Mrd. kWh beginnen, wäre die Kurve wesentlich flacher.

Zur Verwendung von elektrischer Energie benötigt man zunächst eine Spannungsquelle. Man nehme eine Zitrone, zwei Elektroden und ein paar Kabel, fertig ist eine einfache Batterie. Schließen wir ein Lämpchen an, so fließt durch die Kabel elektrischer Strom. Bei diesem Prozess wird chemische Energie in elektrische Energie umgewandelt.

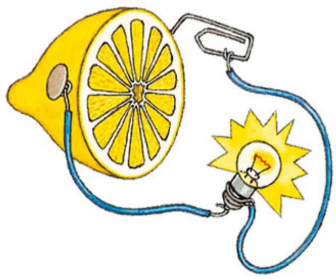


Abbildung 5: Spannungsquelle

Der Großteil unserer elektrischen Energie wird in Kraftwerken umgewandelt. In Österreich sehr verbreitet sind Flusskraftwerke, die wie folgt funktionieren: Eine Turbine, die einen Generator antreibt, wird mit Hilfe des Wassers in Drehung versetzt. Der Generator wandelt dabei die Bewegungsenergie des Wassers in elektrische Energie um.

Auch der menschliche Körper braucht Energie. Wenn ich Hunger habe, kann ich aufstehen und eine Portion Müsli zubereiten. Dabei wird die im Körper gespeicherte Energie in Bewegungsenergie umgewandelt. Beim anschließenden Essen wird die chemische Energie der Nahrung in Adenosintriphosphat (ATP) umgewandelt. Die gespeicherte Energie des ATP kann von den Zellen für unterschiedliche Vorgänge zur Verfügung gestellt werden. Mit dieser Energie kann ich wieder ein neues Müsli zubereiten und so weiter.

Energie wird in der Einheit Joule (J) gemessen.

3.2.2. Arbeit

Energie kann auf mechanischem Weg übertragen werden, dazu braucht es Kräfte. In der klassischen Physik versteht man unter Kraft eine Einwirkung, die eine Bewegungsänderung oder eine Verformung eines Körpers verursacht. Physikalisch wird Arbeit nur verrichtet, wenn eine Kraft längs eines Weges wirkt. Falls die angreifende Kraft konstant ist, wird Arbeit W als Skalarprodukt von Kraft $\vec{F}$ mal Weg $\vec{s}$ definiert.

Formel : $\boldsymbol{W} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{s}}$ oder $\boldsymbol{W} = |\vec{\boldsymbol{F}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{s}}| \cdot \mathbf{cos}\sphericalangle(\vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{s}})$

(W ... Arbeit; F ... Kraft; s ... Weg)

Die Bedeutung dieser Formel sehen wir an folgenden Beispiel: Jemand zieht einen Schlitten mit der konstanten Kraft $\vec{F}$ entlang eines waagrechten Weges. Dabei beträgt der Winkel zwischen Waagrechte und Schnur etwa 23°.

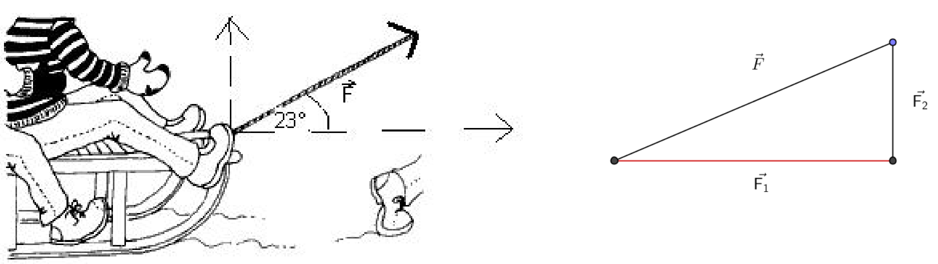


Abbildung 6: Kräftezerlegung

Diese Kraft lässt sich vektoriell in einen waagrechten Anteil $\overrightarrow{F_1}$ und einen senkrechten Teil $\overrightarrow{F_2}$ aufspalten. $\overrightarrow{F_1}$ ist die Kraft in Wegrichtung, sie ist für das Vorankommen des Schlittens verantwortlich. Es gilt: $\overrightarrow{F_1} = \vec{F} \cdot \cos 23°$. Je kleiner der Winkel, desto besser ist die Kraftübertragung. Wollen wir nun die Arbeit berechnen, so folgt: $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos 23°$. Es ist also nicht notwendig als Zwischenschritt $\overrightarrow{F_1}$ zu berechnen.

Denken wir uns nun einen Hundeschlitten, der so konzipiert ist, dass die Schnüre waagrecht gespannt sind. In diesem Fall würde der Kraftvektor genau in Wegrichtung zeigen, $\vec{F}$ und $\vec{s}$ wären parallel. Es gilt: $\cos 0° = 1$. Zudem können wir das Koordinatensystem so legen, dass die y- und z-Komponenten jeweils Null sind. Die Definition der Arbeit vereinfacht sich zu:

Formel: $\boldsymbol{W = F \cdot s}$
(W ... Arbeit; F ... Kraft; s ... Weg)

In diesem Fall lässt sich die physikalische Arbeit als Flächeninhalt eines Rechtecks darstellen.

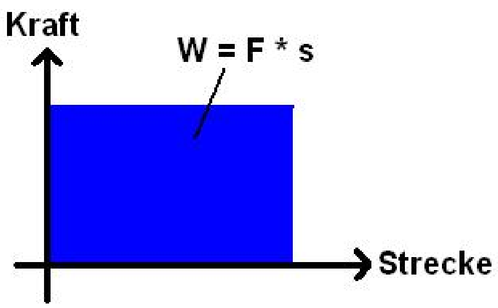


Abbildung 7: Arbeit als Rechtecksfläche

Im einfachsten Fall ist Arbeit das Produkt aus Kraft und Weg. Eine Kraft wird in der Physik in Newton (N) gemessen, ein Weg in Meter (m).

Die Einheit der Arbeit ist das Newtonmeter (Nm) = Joule (J).

Ändert sich die Kraft während des Weges, oder ist der Weg nicht gerade, so kann die Arbeit näherungsweise wie folgt berechnet werden. Wir unterteilen den Gesamtweg s in mehrere kleine Wegstücke Δs. Auf diesen kleinen Wegstücken wird die Kraft F näherungsweise als konstant angenommen. Die gesamte verrichtete Arbeit entlang des Weges ergibt sich durch Summation der Einzelarbeiten.

Formel: $\boldsymbol{W \approx \sum_i F_i \cdot \Delta s}$

(W ... Arbeit; F_i ... Kraft auf dem i-ten Wegstück; s ... Weg)

Wir verfeinern diese Unterteilung. Im Grenzfall konvergiert die Länge eines Wegstücks gegen Null, die Anzahl der Wegstücke geht gegen unendlich. Die Summe geht in ein Integral über, wir erhalten die exakte Definition der Arbeit:

Formel: $\boldsymbol{W = \int F(s) \cdot ds}$

(W ... Arbeit; F ... Kraft entlang des Weges s; s ... Weg)

Wieder kann die Arbeit einfach als Fläche dargestellt werden.

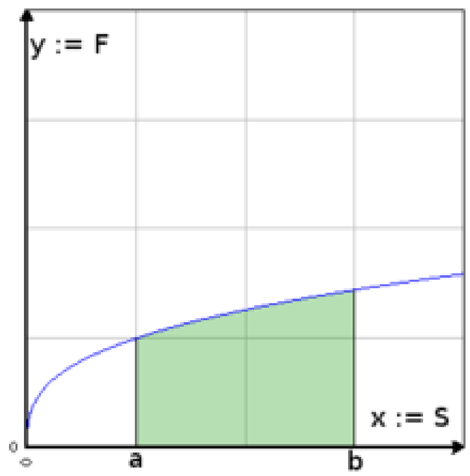


Abbildung 8: Arbeit als Fläche unter der Kurve

3.2.3. Wärme

Alle Dinge bestehen aus kleinsten Teilchen, den Atomen. Die Atome sind ständig in Bewegung, wir sprechen von der inneren Energie eines Körpers. Ein Maß für sie ist die Temperatur. Diese innere Energie kann von einem Körper zu einem anderen (teilweise) übertragen werden. Wärme gibt an, wie viel innere Energie von einem Körper auf einen anderen übertragen wird. Ist also Arbeit die Energie, die auf mechanischem Weg übertragen wird, so ist Wärme die Energie die aufgrund eines Temperaturunterschieds übertragen wird.

Wärme wird ebenfalls in der Einheit Joule (J) gemessen.

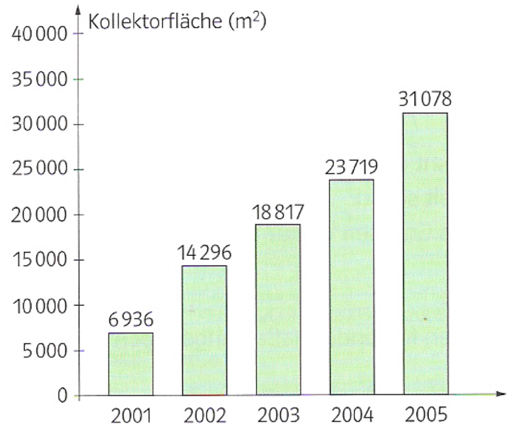
3.2.4. Energiequellen

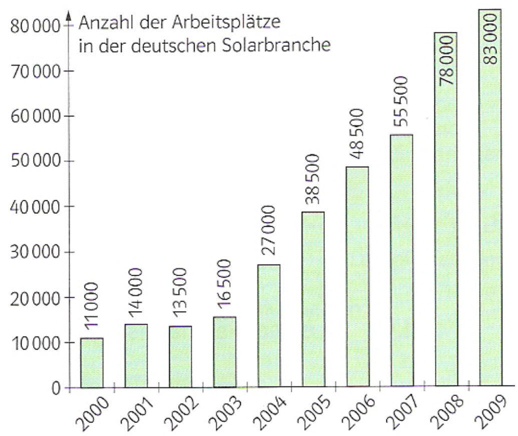
Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden, sie bleibt erhalten. Obwohl sie in verschiedene Formen umgewandelt werden kann, gibt es für die praktische Nutzung eine Einschränkung. Bei allen physikalischen Prozessen wird immer ein Teil der Energie in Wärme umgewandelt. Wärme kann aber nicht von selbst von einem Körper niedriger Temperatur auf einen Körper höherer Temperatur übergehen, dies geht nur mit zusätzlicher Energie. Am Ende einer Energieumwandlung steht also die Wärme, es folgt: „Wärme ist der Energiefriedhof, weil dann die größte Unordnung vorliegt" (Apolin, 2007, S. 94). Anders gesagt, Wärme ist die Energieform, die wir am öftesten durch Umwandlung bekommen und am wenigsten nutzen können.

Trotz Energieumwandlung sind folglich Energiehaushalt, Energiegewinnung und Energiequellen wichtige Themen unserer Zeit. Der Großteil der Energie wird einerseits noch immer aus nicht erneuerbaren Energiequellen gewonnen. Die Vorräte an etwa Kohle oder Erdöl werden aber in naher Zukunft zu Ende gehen. Andererseits kann die benötigte Energiemenge noch nicht mit Hilfe von erneuerbaren Energiequellen, wie Windkraft oder Solarenergie, abgedeckt werden.

Beispiel (Malle, 2012, S. 206)

11.51 Die Nutzung der Sonnenenergie ist zukunftsorientiert. Die linke Abbildung zeigt die Entwicklung des gesamten Flächeninhalts der Sonnenkollektoren in Barcelona (einer stark auf Sonnenenergie setzenden Stadt) während der Jahre 2001 bis 2005. Die rechte Abbildung zeigt die Entwicklung der Arbeitsplätze in der Solarbranche in Deutschland.





Aufgabenstellung:

FA 2.4 FA 2.5 **a)** Begründen Sie, dass in der linken Abbildung eine annähernd lineare Entwicklung vorliegt und stellen Sie ein Modell für dieses Wachstum (unter Benutzung der Daten aus 2001 und 2005) auf! In welchen Jahren lag der Gesamtflächeninhalt etwas über dem Modellwert, in welchen etwas darunter? Wie groß war der mittlere jährliche Zuwachs nach diesem Modell?

FA 5.6 Refl. **b)** Die rechte Abbildung erweckt den Eindruck einer exponentiellen Entwicklung. Aber stimmt das? Experten schätzen, dass erstmals im Jahr 2020 mehr als 150 000 Beschäftigte in der deutschen Solarbranche tätig sein werden. Zeigen Sie, dass dies die Annahme einer exponentiellen Entwicklung widerlegt! (Gehen Sie von den Daten aus den Jahren 2000 und 2009 aus!)

Abbildung 9: Beispiel, Sonnenenergie

Lösung:

a)

Der Zuwachs ist einigermaßen konstant!

$k \approx \frac{31078-6936}{4} = 6035{,}5 \text{ m}^2 \rightarrow y = 6035{,}5 \cdot t + 6936$; ($t$ in Jahren nach 2005)

Der mittlere jährliche Zuwachs nach diesem Modell beträgt 6035,5 m^2.

2001 – 2002: k = 14296 – 6936 = 7360 m^2 → darüber

2002 – 2003: k = 18817 – 14296 = 4521 m^2 → darunter

2003 – 2004: k = 23719– 18817 = 4902 m^2 → darunter

2004 – 2005: k = 31078 – 23719 = 7359 m^2 → darüber

b)

A...Anzahl der Arbeitsplätze; A_0 = 11000; n ... Jahre nach 2000

$$A_n = A_0 \cdot a^n$$

$$83000 = 11000 \cdot a^9 \to a = \sqrt[9]{\frac{83000}{11000}} \approx 1{,}25176 \to A_n \approx 11000 \cdot 1{,}25176^n$$

Für das Jahr 2020 mit n = 20 folgt:

$A_{20} = 11000 \cdot 1{,}25176^{20} \approx 981000$ Beschäftigte

Dies ist ein großer Unterschied zu den von Experten angenommenen 150000 Beschäftigten.

Einige Leute glauben, dass die Lösung des Energieproblems Atomkraftwerke sind. Dabei wird durch Spaltung von Urankernen Energie in Form von Wasserdampf frei. Dieser Wasserdampf treibt dann im herkömmlichen Sinn eine Turbine mit einem Generator an. Der Bau eines solchen Kraftwerks ist teuer, der Betrieb eher günstig, die Endlagerung des radioaktiven Materials ist jedoch nicht geklärt. Unfälle in Tschernobyl und Fukushima führten zu großen menschlichen Katastrophen.

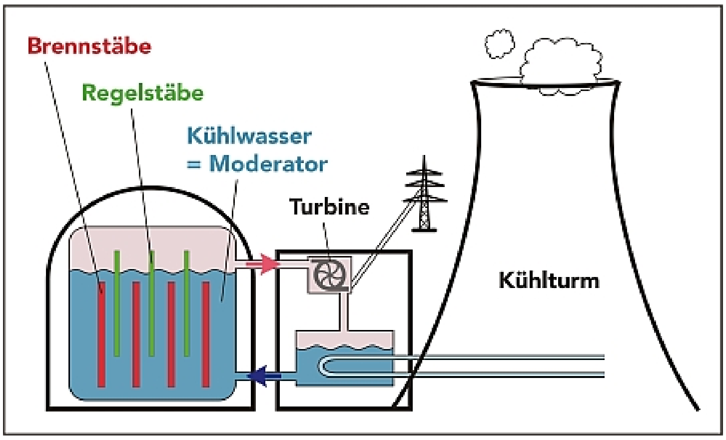


Abbildung 10: Prinzip eines Atomkraftwerks

3.2.5. Potentielle und kinetische Energie

Bekanntlich fallen alle Dinge nach unten und nicht nach oben. Die Ursache des freien Falls ist die Erdanziehungskraft, welche ein Spezialfall des von Isaac Newton entdeckten

Gravitationsgesetzes ist. Ein Sprung vom 10-Meter Turm verschafft mir eine höhere Eintauchgeschwindigkeit als ein Sprung vom 1-Meter Brett. Warum ist das so?

Klettere ich auf einen 10-Meter Turm, so muss ich Arbeit gegen die Erdanziehungskraft verrichten. Die Stärke der Erdanziehungskraft ist von der eigenen Masse m und der Fallbeschleunigung g abhängig. Für die Fallbeschleunigung kann in mitteleuropäischer Erdnähe der Wert 9,81 m/s^2 angenommen werden. Dieser Wert kann jedoch ortsbezogen etwas schwanken, oft wird daher näherungsweise g mit $10m/s^2$ angenommen.

Ersetzen wir nun in der Formel $W = F \cdot s$ die Kraft F durch $m \cdot g$ und den Weg s durch die Höhe h, so erhalten wir die Formel für die Hubarbeit:

Formel: $\boldsymbol{W = mgh}$

(W ... Arbeit; m ... Masse; g ... Erdbeschleunigung; h ... Höhe)

Diese Arbeit ist nun, d. h. nach dem Aufstieg, in Form von Energie, der potentiellen Energie (Lageenergie), im Körper gespeichert.

Formel: $\boldsymbol{E_{pot} = mgh}$

(E_{pot} ... potentielle Energie; m ... Masse; g ... Erdbeschleunigung; h ... Höhe)

Vergleicht man die Formeln für die Hubarbeit und die Formel für die potentielle Energie, so sieht man die enge Verwandtschaft der beiden Begriffe.

> *„Die Begriffe Arbeit und Energie sind nicht voneinander zu trennen! Wenn man an einem Gegenstand Arbeit verrichtet, dann kann man dessen Energie erhöhen. [...] Man kann also auch sagen: Energie ist gespeicherte Arbeitsfähigkeit und Arbeit ist Energieübertragung"* (Apolin, 2007, S. 84)

Aus der Formel $E_{pot} = mgh$ ist ersichtlich, dass die potentielle Energie abhängig von der Höhe h über dem Boden ist. Je höher der Turm ist, desto höher ist die gespeicherte potentielle Energie. Beim Sprung nimmt die Höhe ab, die Geschwindigkeit nimmt zu. Potentielle Energie wird gegen Bewegungsenergie, die auch kinetische Energie genannt wird, eingetauscht.

Formel: $\boldsymbol{E_{Kin}} = \frac{\boldsymbol{m \cdot v^2}}{\boldsymbol{2}}$

(E_{kin} ... kinetische Energie; m ... Masse; v ... Geschwindigkeit)

Dabei ist v die Geschwindigkeit des fallenden Körpers in einer gewissen Höhe. Vernachlässigt man den Luftwiderstand, so nimmt die Geschwindigkeit während des Sprunges linear zu. Nach einer Sekunde beträgt sie 10 m/s, nach zwei Sekunden 20 m/s, nach drei Sekunden 30 m/s usw. In gleichen Zeiten werden immer weitere Wegstrecken zurückgelegt. Die Höhe nimmt immer schneller ab, d. h. die Verringerung der potentiellen Energie nimmt immer mehr zu.

Beispiel (Malle, 2011, S. 34)

2.77 Bewegt sich ein Körper der Masse m mit der Geschwindigkeit v, so beträgt seine kinetische Energie $E(v) = \frac{mv^2}{2}$. Die Größe $p(v) = m \cdot v$ bezeichnet man als Impuls bei der Geschwindigkeit v.

1) Zeige: Der Impuls ist die Änderungsrate der kinetischen Energie bezüglich der Geschwindigkeit.

2) Stelle eine Formel für den Impuls eines frei fallenden Körpers auf ($v = g \cdot t$)!
Zeige: Die Änderungsrate des Impulses bezüglich der Zeit ist das Gewicht G des Körpers.

Abbildung 11: Beispiel, kinetische Energie

Lösung:

1)

$E(v) = \frac{mv^2}{2} \rightarrow E'(v) = \frac{2mv}{2} = m \cdot v$

2)

$p = m \cdot v = m \cdot g \cdot t$

Das Gewicht G ist wie folgt definiert: $G = m \cdot g$!

$p'(t) = mg$

Beispiel (Malle, 2011, S. 33)

2.74 Wenn ein Auto gegen eine Mauer fährt, hängt die Wucht des Aufpralls von der kinetischen Energie des Autos ab. Beschleunigt das Auto gleichmäßig, so wächst seine kinetische Energie mit dem Quadrat der Zeit. Für die kinetische Energie eines Autos zum Zeitpunkt t gelte:
$E(t) = 5000 \cdot t^2$ (t in Sekunden, E(t) in Joule).

1) Berechne die Zunahme der kinetischen Energie in den Zeitintervallen [0; 5] und [5; 10]! In welchen dieser beiden Zeitintervalle ist die Zunahme größer?
2) Berechne die mittlere Zunahme der kinetischen Energie in den unter 1) angegebenen Zeitintervallen! In welchem der beiden Zeitintervalle nimmt die Energie im Mittel stärker zu?
3) Gib eine Formel für die Zunahmegeschwindigkeit E'(t) der kinetischen Energie zum Zeitpunkt t an! Zu welchem Zeitpunkt $t \in [0; 10]$ nimmt E(t) am schnellsten zu?
4) Wie groß ist die Zunahmegeschwindigkeit der kinetischen Energie zu Beginn, nach 5 s bzw. nach 10 s?

Abbildung 12: Beispiel, kinetische Energie 2

Lösung:

1)

$E(0) = 5000 \cdot 0^2 = 0$ J; $E(5) = 5000 \cdot 5^2 = 125000$ J;

$E(10) = 5000 \cdot 10^2 = 500000$ J

$E(5) - E(0) = 125000\,J; E(10) - E(5) = 375000\,J$

Im Intervall [0;5] beträgt die Zunahme der kinetischen Energie 125000 J, im Intervall [5,10] 375000 J. Die Zunahme im zweiten (späteren) Intervall ist also größer, da die kinetische Energie mit dem Quadrat der Zeit wächst.

2)

Wir dividieren die Zunahmen der kinetischen Energien aus Punkt 1 jeweils durch die Intervallbreite 5.

Intervall [0;5] : $\frac{125000}{5} = 25000J$;

Intervall [5;10]: $\frac{375000}{5} = 75000J$

Im Intervall [5;10] nimmt die kinetische Energie im Mittel stärker zu.

3)

$E(t) = 5000t^2 \rightarrow E'(t) = 10000t$

Bei t =10 s nimmt E(t) am stärksten zu.

4)

$E'(0) = 0\ \frac{\mathrm{J}}{s};\ E\,'(5) = 50000\frac{\mathrm{J}}{s};\ E'(10) = 100000\ \frac{\mathrm{J}}{s}$

Die Zunahmegeschwindigkeiten betragen 0, 50000 und 100000 J/s.

3.2.6. Federenergie

Elastische Körper können nach ihrer Verformung wieder ihre ursprüngliche Gestalt einnehmen. Die Verformung einer elastischen Feder ist proportional zur einwirkenden Belastung. Solange die Feder nicht überdehnt wird, gilt für die benötigte Kraft *F*:

Formel: $\boldsymbol{F = k \cdot \Delta x}$ oder $\boldsymbol{F = k \cdot s}$

(*F* ... Federkraft; *k* ... Federkonstante; s, Δx ... Längenänderung)

Dabei ist *k* eine vom Material abhängige Konstante, die Federkonstante. „Sie gibt an, wie viel Kraft man bräuchte, um die Feder um 1 m zu dehnen" (Apolin, 2007, S. 81)

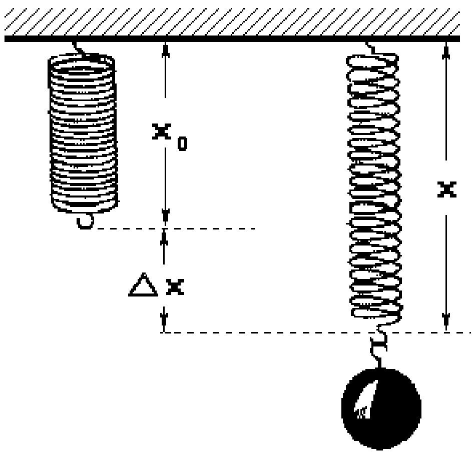


Abbildung 13: Dehnung einer Feder

Während der Dehnung der Feder wird kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt. Die dazu benötigte Dehnarbeit *W* ist nun als potentielle Energie in der Feder gespeichert und wird folgendermaßen berechnet:

Formel: $\boldsymbol{W = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} k \cdot s \cdot ds}$

(*W*... Dehnarbeit; *F* ... Kraft; *k* ... Federkonstante; *s* ... Längenänderung)

Durch Loslassen wird aufgrund der Elastizität potentielle Energie wieder in kinetische Energie umgewandelt.

Beispiel (Götz, 2013, S. 109)

Eine Schraubenfeder *(k* = 150 Nm^{-1}) ist gegenüber dem unbelasteten Zustand um 15 cm gedehnt. Welche Arbeit (in Joule) ist nötig um die Feder weitere 20 cm zu dehnen?

Lösung:

Hinweis: Es ist wichtig, die Längen in Meter anzugeben!

$$W = \int_{s_1}^{s_2} k \cdot s \cdot ds = \frac{k \cdot {s_2}^2}{2} - \frac{k \cdot {s_1}^2}{2} = \frac{k}{2} \cdot ({s_2}^2 - {s_1}^2) = \frac{150}{2} \cdot (0{,}35^2 - 0{,}15^2) = 7{,}5\ \mathrm{J}$$

Für die Dehnung der Feder um weitere 20 cm ist eine Arbeit von 7,5 J notwendig.

3.2.7. Leistung

Für die physikalische Arbeit spielt Zeit keine Rolle. Wenn ein guter Kletterer für das Besteigen einer kurzen Wand zehn Sekunden braucht und ein Anfänger 50 Sekunden, so verrichten beide die gleiche Arbeit, solange sie den gleichen Weg benutzen. Trotzdem ist klar, dass der Profi der bessere Kletterer ist. Diese zeitliche Komponente wird in der Physik mit dem Begriff der Leistung beschrieben.

Formel: $P = \frac{W}{t}$

(P ... Leistung; W... Arbeit; t ... Zeit)

Arbeit wird in Joule und Zeit in Sekunden angegeben, somit folgt:

Die Einheit der Leistung ist Joule / Sekunde (J / s) = Watt (W)

Die Leistung kann bei der Beschleunigungsarbeit, der Hebearbeit oder auch bei der elektrischen Arbeit bestimmt werden. Sehen wir uns ein paar Beispiele an.

Beispiele (Apolin, 2007, Seite 90)

Dauerleistung eines Menschen: 100 – 500 W

100m Sprint von Maurice Green: ca. 1600 W

Backrohr: 3000 W

Donaukraftwerk: $2 \cdot 10^8$ W = 200 MW

Sonne: 10^{26} W

Beispiel (Götz, 2013, S. 268)

1151 ▸▸ Die Figur zeigt die Sonneneinstrahlung.

a Berechne (ungefähr) die Leistung der Sonne im *sichtbaren* Spektrum in W/m², indem du die Fläche durch ein Rechteck approximierst! Orientiere dich dazu an den Beschriftungen! Warum?

b Linearisiere die x-Achse und bestimme an genügend vielen Stützstellen die zugehörigen Funktionswerte! Überprüfe nun durch numerische Integration 1 den in a berechneten Wert, 2 (ungefähr) die Gesamtleistung L_{40} der Sonne in W/m²!

c Die Leistung der Sonne ist davon abhängig, mit welchem Winkel die Strahlen auf dem Test-Quadratmeter auftreffen. Wie groß ist die Leistung (in Prozent der Leistung L_{40} bei 40°), wenn der Winkel statt 40° 1 90°, 2 30°, 3 10° beträgt?

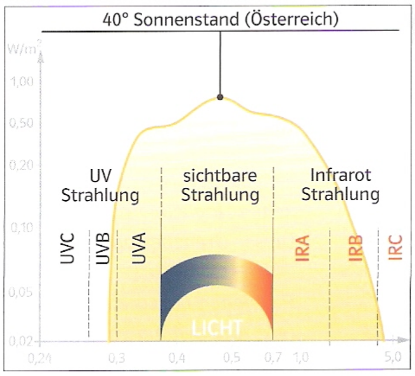


Abbildung 14: Beispiel, Sonneneinstrahlung

Lösung:

a)

Es ist zu beachten, dass die Skalierung nicht linear ist.

Die Werte auf der x-Achse lassen sich genau ablesen: $x_1 = 0{,}7$; $x_2 = 0{,}37$

Als approximierte Rechteckshöhe, wähle ich 0,6 W/m².

$L_{sichtbar} = 0{,}6 \cdot (0{,}7 - 0{,}37) \approx 0{,}2 \text{ W/m}^2$

Die Leistung der Sonne im sichtbaren Bereich beträgt 0,2 W/m².

b)

Wertetabelle:

µm	0,3	0,4	0,5	0,7	1	5
W/m^2	0,15	0,5	0,75	0,6	0,5	0

Die Gesamtfläche wird durch den Flächeninhalt mehrerer Trapeze approximiert.

b1)

$$L_{sichtbar} = \frac{0,5 + 0,75}{2} \cdot 0,1 + \frac{0,75 + 0,6}{2} \cdot 0,2 \approx 0,2\ \mathrm{W/m^2}$$

b2)

$$L_{40} = \frac{0,15 + 0,5}{2} \cdot 0,1 + \frac{0,5 + 0,75}{2} \cdot 0,1 + \frac{0,75 + 0,6}{2} \cdot 0,2 + \frac{0,6 + 0,5}{2} \cdot 0,3 + \frac{0,5 + 0}{2} \cdot 4$$

$$\approx \quad 1,4\ \mathrm{W/m^2}$$

Man darf sich durch die Skalierung der x-Achse nicht täuschen lassen: Der Anteil der Strahlungsleistung im sichtbaren Bereich beträgt nur ca. $\frac{1}{7}$ der gesamten Strahlungsleistung. Der Hauptanteil ist Infrarotstrahlung, also Wärmestrahlung.

c)

L_{40} ... Leistung bei 40°

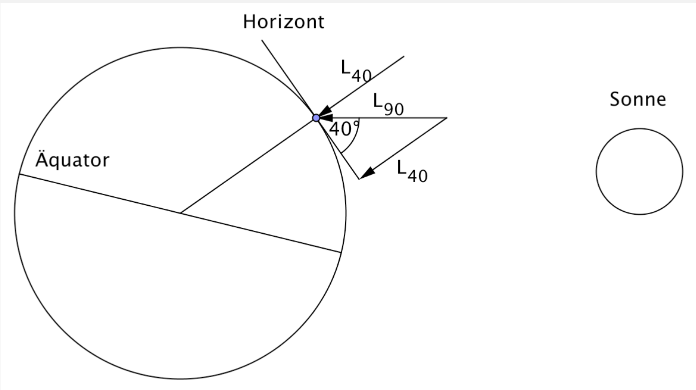


Abbildung 15: Sonneneinstrahlung

c1)

$$L_{40} = L_{90} \cdot \sin 40° \rightarrow\ L_{90} = \frac{L_{40}}{0,6428} = 156\ \%\ \text{von}\ L_{40}$$

c2)

$$L_{30} = L_{90} \cdot \sin 30° = 78\ \%\ \text{von}\ L_{40}$$

c3)

$$L_{10} = L_{90} \cdot \sin 10° = 27\ \%\ \text{von}\ L_{40}$$

3.2.8. Zusammenfassung: Arbeit und Energie

Arbeit: $W = \int F(s) \cdot ds$

Arbeit bei konstantem Weg und konstanter Kraft: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Arbeit entlang eines Weges: $W = F \cdot s$

Einheit der Arbeit und der Energie: Joule (J)

Beispiel (BMBF, SA 8-1; S. 4)

Um eine Stahlfeder aus der Ruhelage $x_0 = 0$ um x cm zu dehnen, ist die Kraft $F(x)$ erforderlich.

Geben Sie an, was in diesem Kontext mit dem Ausdruck $\int_0^8 F(x)dx$ berechnet wird!

Abbildung 16: Beispiel, Federdehnung

Lösung: Das Integral ist die Dehnarbeit die notwendig ist, um die Feder 8cm aus der Ruhelage zu dehnen. Die dazu benötigte Arbeit ist anschließend in der Feder gespeichert.

Leistung: $P = \frac{W}{t}$

potentielle Energie: $E_{pot} = mgh$

kinetische Energie: $E_{Kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$

Beispiel (BMBF, SA 5-2, S. 2)

Die Formel für die kinetische Energie E lautet: $E = \frac{mv^2}{2}$ / 2 P

Gib an, wie sich E ändert, wenn die Masse m und die Geschwindigkeit v folgendermaßen verändert werden!

i) Halbe Masse und doppelte Geschwindigkeit:

ii) Vierfache Masse und halbe Geschwindigkeit:

Abbildung 17: Beispiel, kinetische Energie

Lösung:

i)

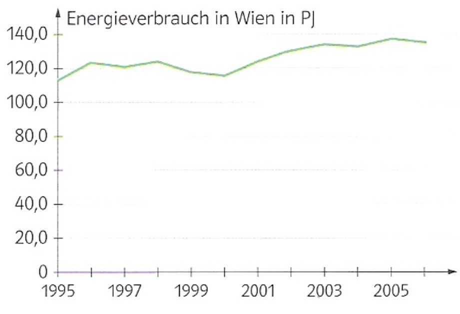
E wird verdoppelt

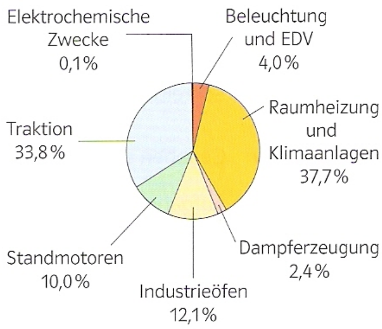
ii)

E bleibt gleich

Beispiel (Malle, 2012, S. 204)

11.46 Die linke Grafik gibt den Energieverbrauch in Wien in den Jahren 1995 bis 2006 an, die rechte Grafik, wie sich der Energiemix in Wien im Jahr 2006 zusammensetzte.





Quelle: Statistik Austria

Aufgabenstellung:

FA 2.5 Refl. **a)** Begründen Sie, dass eine annähernd lineare Zunahme vorliegt! Stellen Sie ein lineares Modell für den Energieverbrauch auf (ausgehend von 1995: ca. 113 PJ und 2006: ca. 136 PJ)! Wie groß ist nach diesem Modell der im Jahr 2020 zu erwartende Energiebedarf? Bewerten Sie die Sicherheit dieser Prognose! (1 PJ = 1 Petajoule = 10^{15} Joule)

AG 1.1 FA 1.4 **b)** Wie groß war die absolute, wie groß die mittlere Zunahme des Energieverbrauchs von 1995 bis 2006? Auf das Wievielfache erhöhte sich der Energieverbrauch in diesem Zeitraum? Wie viele Petajoule entfielen 2006 auf die in der rechten Grafik angegebenen Bereiche?

Abbildung 18: Beispiel, Energieverbrauch

Lösung:

a)

Eine Gerade durch Anfangs- und Endpunkt approximiert die Funktion:

$E(t) = \frac{23}{11} \cdot t + 113;\ t \in [0,11] \qquad E(25) \approx 165{,}3\ PJ$

Der wirkliche Energieverbrauch in ferner Zukunft kann noch nicht abgeschätzt werden, da viele unsichere Faktoren in die Berechnung einfließen.

b)

absolute Zunahme: 23 PJ; mittlere Zunahme: 2,09 PJ;

Erhöhung um das 1,2-fache;

Beleuchtung: 5,44 PJ; Raumheizung und Klimaanlagen: 51,272 PJ

Dampferzeugung: 3,264 PJ; Industrieöfen: 16,456 PJ,

Standmotoren: 13,6 PJ, Traktion: 45, 968 PJ, Elektrochemie: 0,136 PJ

3.3. Bewegungen

Wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, kann Energie Bewegung hervorrufen. „Zur Beschreibung von Bewegung braucht man die Größen Weg, Zeit, Geschwindigkeit und die Beschleunigung” (Herber, 2007, S. 70). Nicht alle Bewegungen sind jedoch beschleunigte Bewegungen wie der freie Fall. Sehen wir uns verschiedene Fälle an.

3.3.1. Geradlinig gleichförmige Bewegung

Die einfachste Bewegung ist die geradlinig gleichförmige Bewegung. Gleichförmig bedeutet, dass die Geschwindigkeit gleich bleibt, was meistens eine Idealisierung ist. Beispiele dafür sind eine gleichmäßige Autobahnfahrt oder einzelne Abschnitte eines Langstreckenflugs.

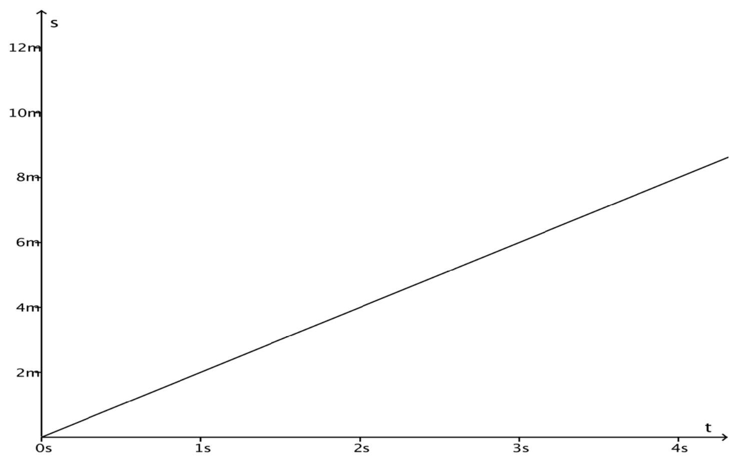


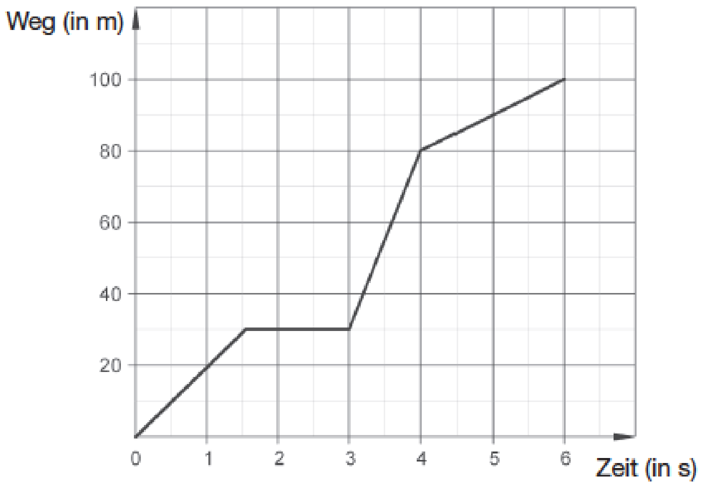
Abbildung 19: Weg-Zeit-Diagramm

Als Visualisierung verschiedener Bewegungsvorgänge dienen Weg-Zeit-Diagramme. Üblicherweise wird auf der x-Achse die Zeit t und auf der y-Achse der Weg s aufgetragen. Für eine gleichförmige Bewegung gilt, dass in gleichen Zeitabschnitten, gleiche Wegabschnitte zurückgelegt werden. Das Weg-Zeit-Diagramm einer geradlinig gleichförmigen Bewegung ist somit eine Gerade.

Beispiel (Bifie, PK 2013, A1, S. 5)

Zeit-Weg-Diagramm, Geschwindigkeiten

Das folgende Zeit-Weg-Diagramm stellt eine Bewegung dar. Der Weg wird in Metern (m), die Zeit in Sekunden (s) gemessen. Zur Beschreibung dieser Bewegung sind zudem verschiedene Geschwindigkeiten (v_x) gegeben.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie jeweils jedem Zeitintervall jene Geschwindigkeit zu, die der Bewegung in diesem Intervall entspricht!

Geschwindigkeit	
$v_A = 0$ m/s	A
$v_B = 5$ m/s	B
$v_C = 10$ m/s	C
$v_D = 20$ m/s	D
$v_E = 25$ m/s	E
$v_F = 50$ m/s	F

	Zeitintervall
	[0; 1,5]
	[1,5; 3]
	[3; 4]
	[4; 6]

Abbildung 20: Beispiel, Weg-Zeit-Diagramm

Die richtige Lösung ist *DAFC*!

Sehr oft sieht man die folgende Definition, welche aber nur bei konstanter Geschwindigkeit gilt. Dies gilt deshalb, weil bei konstanter Geschwindigkeit in gleichen Zeitabschnitten immer gleiche Wegabschnitte zurückgelegt werden.

Formel: $v = \frac{s}{t}$

(v ... Geschwindigkeit; s ... Weg; t ... Zeit)

Formen wir diese Formel um, so erhalten wir den Weg: $\boldsymbol{s = v \cdot t}$. Haben wir bereits davor einen Weg s_0 zurückgelegt, so müssen wir dies berücksichtigen:

Formel: $s = v \cdot t + s_0$

(v ...Geschwindigkeit; s ... Weg; t ... Zeit)

Aus der einfachen Form der Gleichung $v = \frac{s}{t}$ kann man sehr gut auf die Einheiten der Geschwindigkeit schließen. Da ein Weg in Meter oder Kilometer, die Zeit in Sekunden oder Stunden gemessen wird, folgt:

Die üblichen Einheiten der Geschwindigkeit sind: km/h (Kilometer pro Stunde) und m/s (Meter pro Sekunde).

Ein Meter pro Sekunde entspricht 3,6 Kilometer pro Stunde.

3.3.2. Die Durchschnittsgeschwindigkeit und das Problem der Momentangeschwindigkeit

Nur bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant. Bei anderen Bewegungsformen müssen wir zwischen Durchschnitts-geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit unterscheiden.

Allgemein ist Durchschnittsgeschwindigkeit (mittlere Geschwindigkeit) ein Maß für die Ortsänderung Δs eines Objekts in einem gewissen Zeitintervall Δt.

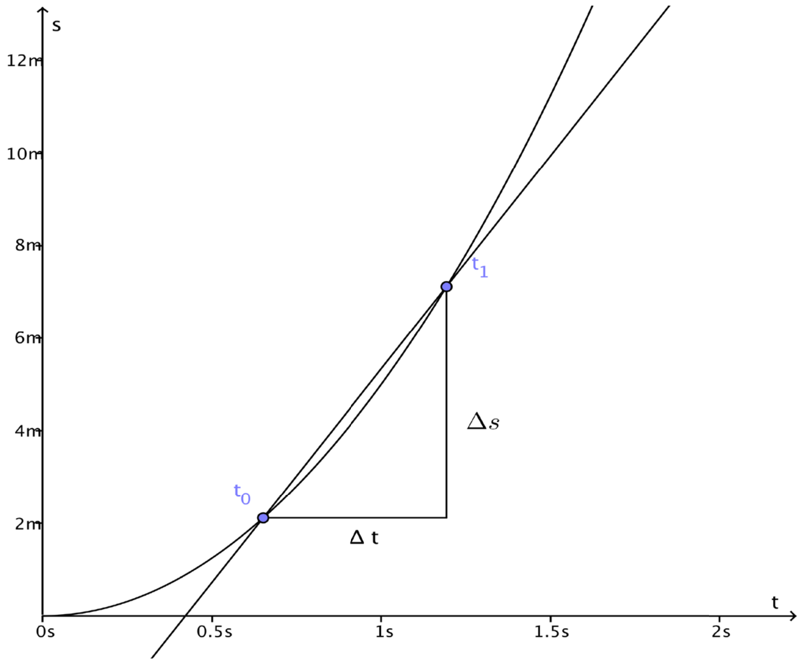


Abbildung 21: Durchschnittsgeschwindigkeit als Differenzenquotient

Höhere mittlere Geschwindigkeit bedeutet, den gleichen Weg in kürzerer Zeit oder in der gleichen Zeit einen größeren Weg zurückzulegen. Die Geschwindigkeit ist also direkt proportional zum zurückgelegten Weg und indirekt proportional zur benötigten Zeit. Als Maß für die mittlere Geschwindigkeit wird folgender Quotient definiert:

Formel: $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t})-\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}}$

(v ... Geschwindigkeit; *s* ... Weg; *t* ... Zeit)

Ein im Alltag vertrauter Begriff ist die „Momentangeschwindigkeit". Das bekannteste Messgerät dafür ist der Tachometer.

Abbildung 22: Tachometer

„Die Momentangeschwindigkeit ergibt sich als Grenzwert einer Folge von Durchschnittsgeschwindigkeiten über immer kleinere Zeitintervalle (siehe Abb. 23). Sie ist der Differentialquotient der Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$: $v = \frac{ds}{dt}$" (Brand, 2013, S. 44)

Formel: $\boldsymbol{v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)}$

(v ... Geschwindigkeit; s ... Weg; t ... Zeit)

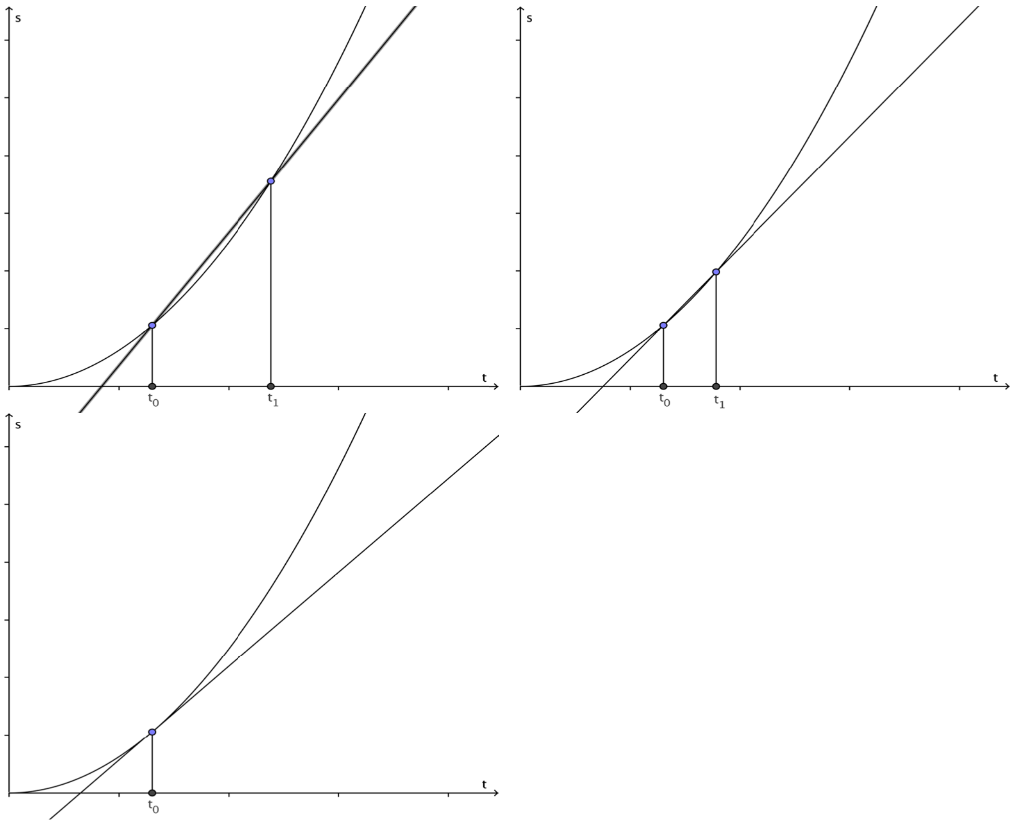


Abbildung 23: Die Momentangeschwindigkeit als Grenzwert

Umgekehrt kann der zurückgelegte Weg als Flächeninhalt unter einer Geschwindigkeitsfunktion v interpretiert werden.

Formel: $\boldsymbol{s = \int v \cdot dt}$

(v ... Geschwindigkeit; s ... Weg; t ... Zeit)

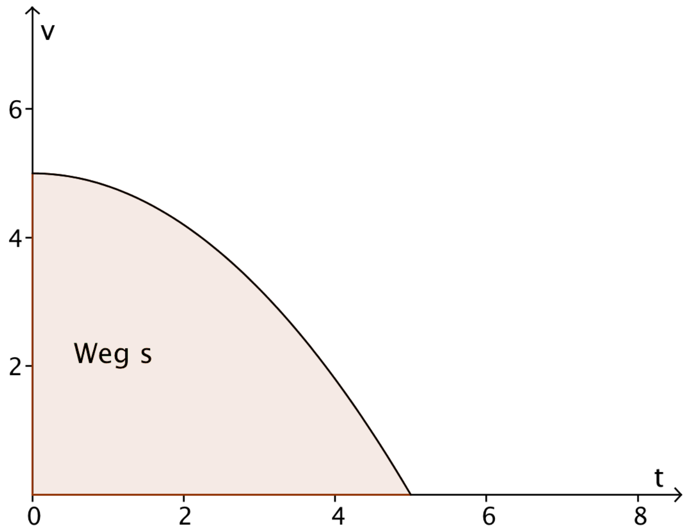
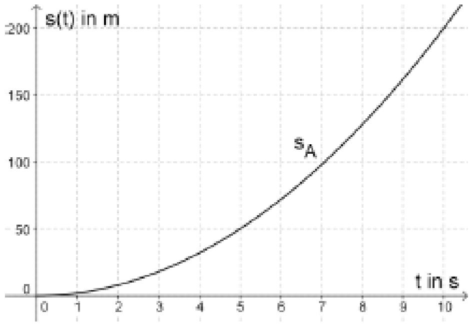
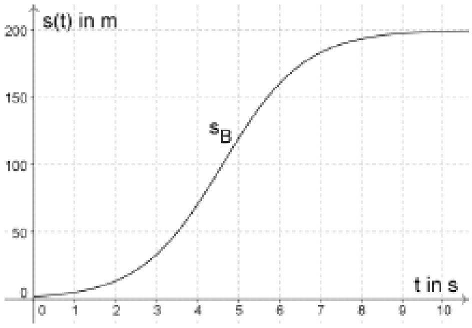


Abbildung 24: Weg als Flächeninhalt

Beispiel (BMBF, SA 7-1, Seite 8)

Die Abbildungen zeigen die *t*-*s*-Diagramme von Bewegungsvorgängen der Fahrzeuge A und B.





a) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs A während der ersten 5 Fahrsekunden! (1 P)

Beschreiben Sie, wie man anhand des linken Diagramms näherungsweise die Momentangeschwindigkeit von Fahrzeug A nach 5 Fahrsekunden bestimmen kann! (1 P)

b) Angenommen, s_A kann durch eine quadratische Funktion modelliert werden. Begründen Sie, wie der Graph von s_A'' in diesem Fall verläuft, und interpretieren Sie diesen Verlauf im Hinblick auf den Bewegungsvorgang! (2 P)

c) Wann hat Fahrzeug B seine Höchstgeschwindigkeit erreicht? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 P)

Geben Sie an, mit welcher konstanten Geschwindigkeit Fahrzeug B fahren hätte müssen, damit es im Zeitintervall [0; 10] denselben Weg wie im Diagramm dargestellt zurückgelegt hätte! Ergänzen Sie den entsprechenden Graphen dieser Zeit-Weg-Funktion im Diagramm! (1 P)

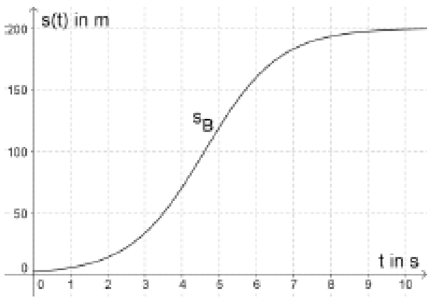


Abbildung 25: Beispiel, t-s-Diagramm

Lösung:

a)

$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Diagramm → $\Delta s = 50\ m \rightarrow \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathbf{50}}{\mathbf{5}} =$ 10 m/s

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt während der ersten 5 Sekunden 10 m/s.

Die Momentangeschwindigkeit entspricht der Steigung der Tangente im Punkt P (5 | 50).

b)

Die zweite Ableitung einer quadratischen Funktion ist eine konstante Funktion. Die Beschleunigung ist konstant.

c)

Höchstgeschwindigkeit: $v(t)$ = $s'(t)$ = max → $s''(t)$=0 → Im Wendepunkt ist die Geschwindigkeit maximal!

Wir zeichnen eine lineare Funktion durch die Punkte A (0|0) und

B (10|200) → $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200}{10} = 20$ m/s

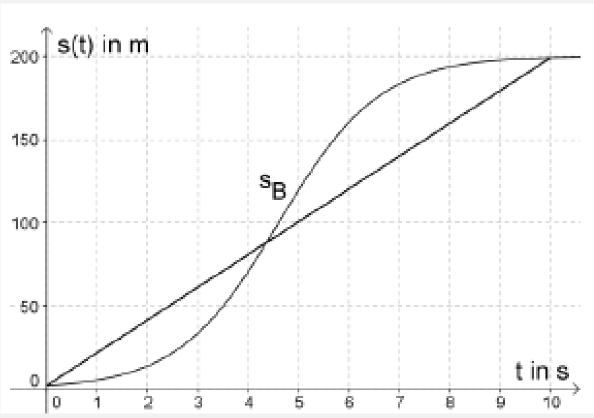


Abbildung 26: t-s-Diagramm 2

Geschwindigkeit ist oft aber nicht nur durch ihren Betrag, sondern auch durch ihre Richtung gegeben. Für solche Fälle müssen wir den Weg und die Geschwindigkeit als Vektor auffassen:

Formel: $\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\vec{s}(\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t})-\vec{s}(\boldsymbol{t})}{\Delta\boldsymbol{t}}$

(v ... Geschwindigkeit; s ... Weg; t ... Zeit)

3.3.3. Beschleunigung

Eine gleichmäßige Änderung der Geschwindigkeit führt zu einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Die Beschleunigung ist konstant, darf aber nicht null sein.

Formel: $a = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{t}}$

(a... Beschleunigung; v ...Geschwindigkeit; t ... Zeit)

Die mittlere Beschleunigung wird analog zur mittleren Geschwindigkeit mit Hilfe des Differenzenquotienten definiert:

Formel: $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta\boldsymbol{t}}$

(a... Beschleunigung; v ... Geschwindigkeit; t ... Zeit)

Die momentane Beschleunigung ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit.

Formel: $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}$

(a ... Beschleunigung; v ... Geschwindigkeit; t ... Zeit)

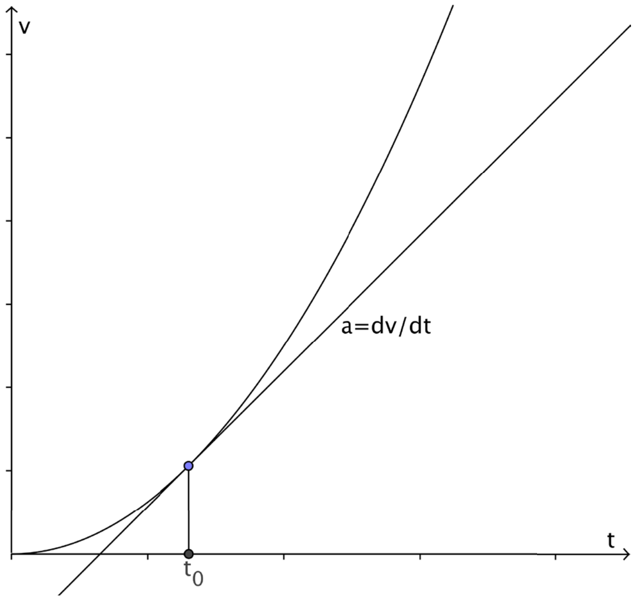


Abbildung 27: Die Beschleunigung als Differentialquotient

Die Einheit der Beschleunigung ist m/s^2.

Man kann die Beschleunigung mit Geschwindigkeit–Weg–Diagrammen visualisieren. Auf der x-Achse wird wieder die Zeit aufgetragen, auf der y-Achse wird die Geschwindigkeit notiert. Die Tangentensteigung ist ein Maß für die Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t_0.

Umgekehrt gilt:

Formel: : $\boldsymbol{v = \int a \cdot dt}$

(a ... Beschleunigung; v ... Geschwindigkeit; t ... Zeit)

Als Vereinfachung wird der vektorielle Charakter der Beschleunigung $\vec{a}$ bei den meisten Mathematikbeispielen vernachlässigt.

Beträgt die Geschwindigkeit vor dem Beschleunigungsvorgang v_0, so gilt:

Formel: $\boldsymbol{v(t) = a \cdot t + v_0}$

(a ... Beschleunigung; v ... Geschwindigkeit; t ... Zeit

Durch Integrieren von $v(t)$ nach t erhalten wir den zurückgelegten Weg. Als Integrationskonstante wählen wir s_0.

Formel: $\boldsymbol{s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0}$

(a...Beschleunigung; v ...Geschwindigkeit; t ... Zeit)

Beispiel (Bifie, PK 2014, A2, S. 2)

Radfahrerin

Eine Funktion v beschreibt die Geschwindigkeit einer Radfahrerin während eines Zeitintervalls von 9 Sekunden.

Es gilt: $v(t) = -\frac{1}{9}t^2 + \frac{4}{3}t + 4,\ t \in [0; 9]$.

Die Geschwindigkeit ist in m/s angegeben, die Angabe von t erfolgt in Sekunden, gemessen ab dem Beginn des Zeitintervalls.

Die Funktion s beschreibt den von der Radfahrerin innerhalb der ersten t Sekunden zurückgelegten Weg, $s(t)$ wird dabei in Metern angegeben.

Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie $v'(2)$!
Interpretieren Sie das Vorzeichen des Ergebnisses im gegebenen Kontext!

b) Kreuzen Sie diejenigen beiden Ansätze an, die den von der Radfahrerin im Zeitintervall [6; 9] zurückgelegten Weg wiedergeben!

Berechnen Sie dann diesen Weg mithilfe eines der beiden richtigen Ansätze!

$s(6) + s'(6)$	☐
$s(9) - s(6)$	☐
$\int_6^9 s(t)\,dt$	☐
$\int_6^9 v(t)\,dt$	☐
$s(6) + v(6)$	☐

c) Angenommen, die zum Zeitpunkt $t = 0$ aus $v(t)$ gegebene Beschleunigung bleibt unverändert. Stellen Sie unter dieser Voraussetzung die neue Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v_1(t)$ der Radfahrerin im Zeitintervall [0; 3] auf! Erklären Sie, warum dieses Modell im Intervall [0; 15] nicht realistisch ist!

Abbildung 28: Beispiel, Radfahrerin

Lösung:

a)

$v'(t) = -\frac{2}{9}t + \frac{4}{3}$; $v'(2) = \frac{8}{9} > 0 \rightarrow v$ erhöht sich, sie beschleunigt!

b)

richtige Lösungen: 2 und 4; $s(9) - s(6) = 63 - 40 = 23$ m

c)

$a(0) = v'(0) = \frac{4}{3}$; Anfangsgeschwindigkeit: $v_0 = 4$ m/s;

$v(t) = a \cdot t + v_0 \rightarrow v(t) = \frac{4}{3} \cdot t + 4 \rightarrow v(15) = \frac{4}{3} \cdot 15 + 4 = 24\, m/s = 86{,}4\, km/h$

Eine Geschwindigkeit von 86,4 *km/h* ist für ein Fahrrad nicht realistisch!

Beispiel (Götz, 2013, S. 259)

Die BMW R 1200 GS beschleunigt in 3,4 s von 0 auf 100 km/h. Welche (konstante) Beschleunigung a wirkt? Welchen Weg s hat das Motorad [sic!] in dieser Zeit zurückgelegt?

Lösung:

Hinweis: 100 $km/h = 27{,}78\, m/s$

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{27{,}78}{3{,}4} \approx 8{,}17\, m/s^2$

$v_0 = 0;\ s_0 = 0 \rightarrow s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{8{,}17}{2} \cdot 3{,}4^2 \approx 47{,}2\, m$

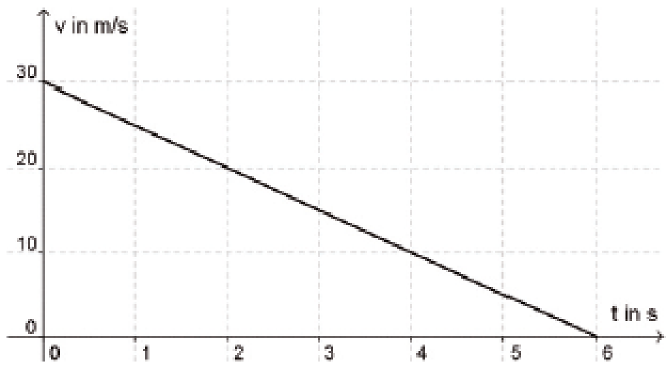
Das Motorrad legt in dieser Zeit einen Weg von 47,2 m zurück.

Bremsbewegungen, z. B. beim Abbremsen eines Autos, werden in der Physik unter dem Blickwinkel einer negativen Beschleunigung betrachtet. Wesentlich für das Bremsvermögen eines Autos sind die Haftreibung zwischen Reifen und Boden, sowie natürlich die Bauweise der Bremsen. Die Änderung der Geschwindigkeit bei Bremsvorgängen ist i. A. nicht konstant.

Beispiel (Bifie, EA, S.7)

Bremsvorgang (Teil-2-Aufgabe)

Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von $v = 30\ m/s$ und bremst wegen eines auf der Fahrbahn liegenden Hindernisses ab. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Bremsvorgang. Die Abbildung zeigt modellhaft das *t-v*-Diagramm für einen Bremsvorgang.



Aufgabenstellungen:

a) Bestimmen Sie $v'(t)$ und deuten Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit dem Bremsvorgang.

b) Ermitteln Sie die absolute und die relative Abnahme der Geschwindigkeit des PKW während der ersten beiden Sekunden des Bremsvorgangs.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ für den Zeitraum des Bremsvorgangs. Begründen Sie, wie sich eine Änderung der Anfangsgeschwindigkeit auf den Verlauf des Graphen von $v(t)$ auswirkt, und interpretieren Sie deren Bedeutung für den Bremsvorgang.

d) Interpretieren Sie $\int_0^4 v(t)dt$. Stellen Sie das Ergebnis dieses Ausdrucks in der folgenden Abbildung dar.

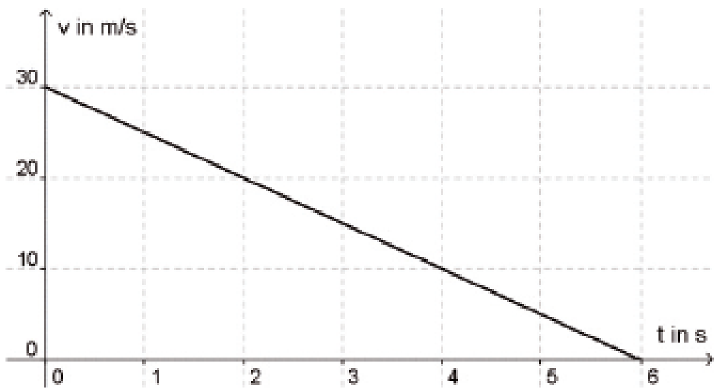


Abbildung 29: Beispiel, PKW

Lösung:

Bemerkung: Anders als in der Physik üblich hat sich das Bifie entschlossen, statt der Bezeichnung v-t-Diagramm die Bezeichnung t-v-Diagramm zu verwenden, also die unabhängige Variable zuerst zu nennen. Dies hat jedoch keine Auswirkungen für die Rechnungen.

a)

$a = v'(t) \rightarrow k = a = v'(t) = -5 \text{ m/s}^2$

Eine negative Beschleunigung $v'(t)$ wird als Bremsvorgang bezeichnet.

b)

absolute Abnahme = 10 m/s; relative Abnahme = $\frac{10}{30} \approx 33\%$

c)

$v(t) = 30 - 5t \rightarrow v(t) = -5t + 30$

Höhere Anfangsgeschwindigkeit: Bremszeit und Bremsweg nehmen zu

Niedere Anfangsgeschwindigkeit: Bremszeit und Bremsweg nehmen ab

Es ist anzunehmen, dass die Beschleunigung gleich bleibt. Der Graph würde im ersten Fall nach oben, im zweiten Fall nach unten verschoben werden.

d)

$\int_0^4 v(t) \cdot dt = -\frac{5t^2}{2} + 30t \,\Big|_0^4 = 120 - 40 = 80 \text{ m}$

Der zurückgelegte Weg in den ersten vier Sekunden des Bremsvorgangs beträgt 80 m.

3.3.4. Der freie Fall

Wie wir im Kapitel „Energie und Arbeit" schon gesehen haben, ist der idealisierte freie Fall eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Idealisiert meint hier die Vernachlässigung des Luftwiderstands. Sehr ausführlich mit dem freien Fall beschäftigt sich erstmals Galileo Galilei, seine Frage war:

> *„Wie ändert sich die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers (wenn vom Luftwiderstand abgesehen wird)? Vermutungen auf der Suche nach einem einfachen Naturgesetz: ‚Nach gleich langen Zeitabschnitten ... Nach gleich langen durchfallenen*

Strecken ... ... hat die Geschwindigkeit um denselben Wert zugenommen. Noch bevor Galilei seine berühmten Fall-Experimente am Schiefen Turm von Pisa durchführte, wusste er: Es kommt nur die erste Möglichkeit in Frage." (Embacher, 2002, Geschwindigkeit).

Die Gesetze für idealisierte Fallbewegungen auf der Erde sind für alle Körper gleich. Diese Bewegungen sind unabhängig von der Masse des fallenden Körpers. Aufgrund der gleichmäßigen Beschleunigung wächst die Geschwindigkeit linear mit der Zeit. Der Weg nimmt mit dem Quadrat der Zeit zu.

Formel: $\boldsymbol{v(t) = g \cdot t + v_0}$

(v ... Geschwindigkeit; g ... Erdbeschleunigung; t ... *Zeit;* $\boldsymbol{v_0}$ ... Anfangsgeschwindigkeit)

Durch Integrieren nach t erhalten wir: $\int v(t) = s(t)$

Formel: $\boldsymbol{s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0}$

(v ... Geschwindigkeit; g ... Erdbeschleunigung; t... *Zeit;* $\boldsymbol{v_0}$ ... Anfangsgeschwindigkeit; s_0 ... Anfangsweg)

Ist sowohl die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ als auch der Anfangsweg $s_0 = 0$ so vereinfachen sich die Momentangeschwindigkeit und der zurückgelegte Weg bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung zu:

Formel: : $\boldsymbol{v = g \cdot t}$

Formel: $\boldsymbol{s = \frac{g}{2} \cdot t^2}$

(v ... Geschwindigkeit; g ... Erdbeschleunigung; t ... *Zeit;* s ... Weg)

Beispiel: (Götz, 2013, S. 275)

Für einen frei (d.h. ohne Luftwiderstand) fallenden Körper ist die Zeit-Weg-Funktion $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$. Dabei ist g die Fallbeschleunigung, die mit zunehmender Höhe abnimmt (siehe Grafik).

FELIX BAUMGARTNER sprang aus 39045 m Höhe aus einem Ballon ab.

a Welchen Weg legte er in den ersten drei Sekunden zurück?

b In welcher Zeit legte er die ersten 1000 m zurück?

c Wann erreicht er die Schallgeschwindigkeit (ca. 1200 km/h) und in welcher Höhe?

d Berechne die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [1; 10] Sekunden.

e Berechne die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 10 Sekunden.

f Angenommen er wäre aus 1000 km Höhe abgesprungen, wie groß wäre seine Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 10 Sekunden?

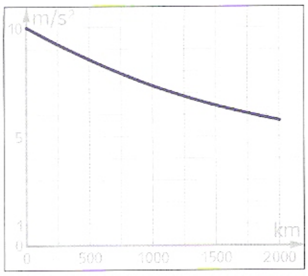


Abbildung 30: Beispiel, Felix Baumgartner

Lösung:

a)

39045 m entsprechen etwa 40 km. Die Erdbeschleunigung g in 40 km Höhe ist etwas weniger als auf der Erdoberfläche. Aus der Grafik lesen wir einen ca. Wert von $g \approx 9{,}7\, m/s^2$ ab. Die Verwendung von $g = 9{,}81\, m/s^2$ führt zu sehr ähnlichen Ergebnissen.

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{9{,}7}{2} \cdot 3^2 \approx 44 \text{ m}$$

In den ersten drei Sekunden legt er einen Weg von ca. 44 m zurück.

b)

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{9{,}7}} \approx 14 \text{ s}$$

Die ersten 1000 m legt er in ca. 14 Sekunden zurück.

c)

Hinweis: 1200 $km/h : 3{,}6 \approx 333\ m\ /\ s$

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow\ \Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{333}{9{,}7} \approx 34\text{ s}$

Hinweis: Wir subtrahieren den zurückgelegten Weg von der Starthöhe:

$h = 39045 - \frac{g}{2} \cdot t^2 = 39045 - \frac{9{,}7}{2} \cdot 34^2 \approx 33438\text{ m}$

d)

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{9{,}7}{2} \cdot 10^2 = 485\text{ m}$$

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{485}{9} \approx 54\text{ m/s}$

Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [1; 10] beträgt 54 m / s.

e)

$v = g \cdot t\ =\ 9{,}7 \cdot 10 = 97\ m\ /\ s\ \approx\ 350\text{ km/h}$

Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 10 s beträgt 350 km / h.

f)

Hinweis: Aus dem Diagramm entnehmen wir, dass g in dieser Höhe ca. 7,3 m/ s^2 beträgt.

$v = g \cdot t\ =\ 7{,}3 \cdot 10 = 73\text{ m / s}\ \approx 263\text{ km/h}$

Seine Momentangeschwindigkeit wäre aufgrund der schwächeren Erdanziehungskraft geringer.

3.3.5. Zusammenfassung: Bewegung

Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[t, t + \Delta t]$: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t: $v(t) = s'(t)$

Durchschnittsbeschleunigung: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$

Momentanbeschleunigung: $a = v'(t) = s''(t)$

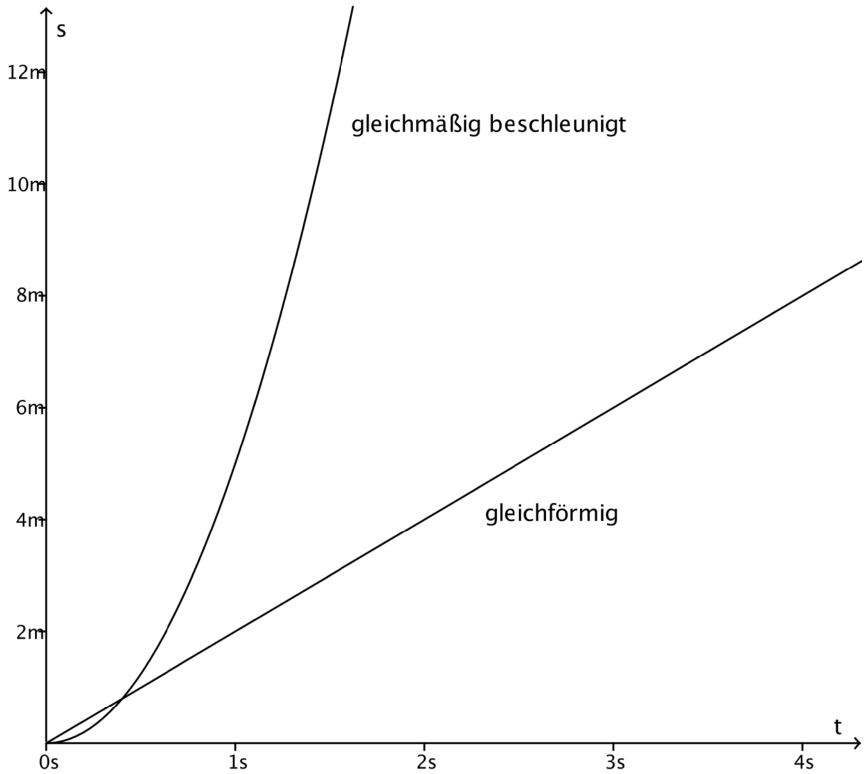


Abbildung 31: Bewegungen

Umkehrung: $v = \int a \cdot dt$

Umkehrung : $s = \int v \cdot dt$

Weg bei konstanter Geschwindigkeit: $s = v \cdot t + s_0$

Freier Fall: $v = g \cdot t + v_0$

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Beispiel (BMBF, SA 8-2, S. 2]

Die Beschleunigung a eines bewegten Objektes in Abhängigkeit der Zeit t kann durch die Funktionsgleichung $a(t) = 3 \cdot t$ beschrieben werden. Das Objekt hatte zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit v_0.

Geben Sie die Gleichung einer Funktion v an, welche die Geschwindigkeit des Objektes in Abhängigkeit der Zeit beschreibt!

$v(t) =$ ______________________________

Abbildung 32: Beispiel, Beschleunigung

Lösung:

Hilfestellung: Hier gilt die Formel $v(t) = \int a \cdot dt$. Als Integrationskonstante wird v_0 verwendet.

$$\int 3t \cdot dt = \frac{3t^2}{2} + c = \frac{3t^2}{2} + v_0$$

Beispiel (Bifie, MS 2014, A1, Seite 9)

Bewegung eines Körpers

Gegeben ist eine Funktion s mit der Gleichung $s(t) = \frac{t^3}{6} + 5 \cdot t^2 + 5 \cdot t$. Die Funktion s beschreibt den von einem Körper zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit t. Die Funktionswerte der Funktion v geben die Geschwindigkeiten des Körpers zu den jeweiligen Zeitpunkten an.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Gleichung der Funktion v in Abhängigkeit von der Zeit t an!

$v(t) =$ ______________________________

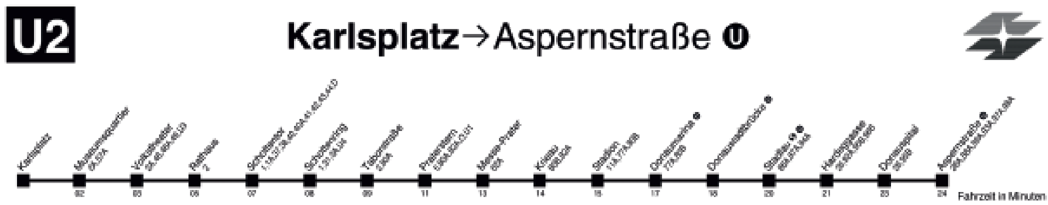
Abbildung 33: Beispiel, Bewegung eines Körpers

Lösung: $v(t) = \frac{t^2}{2} + 10t + 5$

Beispiel: (Bifie, PK 2013, A2, S. 2)

Wiener U-Bahn

Die Wiener U-Bahn-Linie U2 verkehrt zwischen den Stationen *Karlsplatz* und *Aspernstraße*. Die Gesamtstrecke der U2 beträgt 12,531 km (Stand 2012).



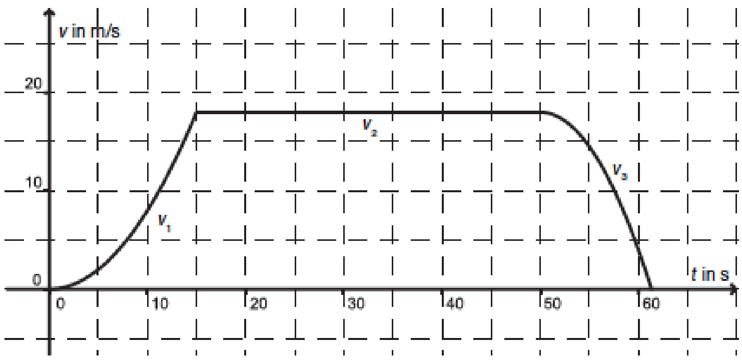
Quelle: http://www.wienerlinien.at/media/download/2012/Linie_U2_68801.pdf

Zwischen den beiden Stationen *Donaumarina* und *Donaustadtbrücke* fährt die U-Bahn nahezu geradlinig und benötigt für diese 855 m lange Strecke ca. eine Minute.
Betrachtet man die Geschwindigkeit eines Zuges zwischen diesen beiden Stationen, so lässt sie sich näherungsweise durch drei Funktionen beschreiben. Diese Funktionen sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm dargestellt. Die Zeit t ist in Sekunden, die Geschwindigkeit v in m/s angegeben.

$v_1(t) = 0{,}08t^2$ $\quad$ $[0; 15)$

$v_2(t) = 18$ $\quad$ $[15; 50)$

$v_3(t) = -0{,}14(t-50)^2 + 18$ $\quad$ $[50; 61{,}34]$



Aufgabenstellung:

a) $\boxed{A}$ Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den die U-Bahn im Zeitintervall [15; 50] zurücklegt!

Um den Bremsvorgang zu modellieren, wurde die Funktion $v_3(t) = -0{,}14(t - 50)^2 + 18$ verwendet.
Erläutern Sie, in welcher Weise eine Veränderung des Parameters von –0,14 auf –0,2 den Bremsvorgang beeinflusst!

b) Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung des Zuges vom Anfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit!

Erklären Sie, wieso der Verlauf des Graphen des v-t-Diagramms im Intervall [14; 16] nicht exakt der Realität entsprechen kann!

Abbildung 34: Beispiel, U-Bahn

Lösung:

a)

Hinweise: Die Geschwindigkeit ist konstant, es gilt $s = v \cdot t$.

$s = v \cdot t = 18 \cdot 35 = 630\ \text{m}$

Der Weg ist 630 m lang.

Eine höhere negative Beschleunigung bedeutet eine höhere Bremskraft, der Bremsweg würde sich verkürzen.

b)

$$\bar{a} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{18 - 0}{15 - 0} = 1{,}2\ \text{m/s}^2$$

Die Beschleunigung würde sich abrupt ändern. Die würde zu einem starken Ruck führen.

Beispiel: (Bifie, AP, 1_094)

Für einen frei fallenden Körper ist eine Zeit-Weg-Funktion $s(t)$ durch $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ gegeben. Dabei ist $g \approx 10$ m/s² die Fallbeschleunigung.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt $t = 2$ Sekunden!

Abbildung 35: Beispiel, freier Fall

Lösung:

$v(2) = 20\ \mathrm{m/s}$

3.4. Kraft und Masse

3.4.1. Kräfte

Wiederholung: Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des Weges nach der Zeit, die Beschleunigung ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Verbindet man beide Aussagen, so folgt, die Beschleunigung ist auch die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit:

Formel: $\boldsymbol{a(t) = v'(t) = s''(t)}$

(t ... Zeit; s ... Weg; v ... Geschwindigkeit; a ... Beschleunigung)

Ein Körper beschleunigt allerdings nicht von alleine. Jede Bewegungsänderung wird durch eine oder mehrere Kräfte verursacht. Mehrere an einem Punkt angreifende Kräfte können durch eine einzige ersetzt werden, die Wirkung bleibt die gleiche. Mathematisch entspricht dies einer Vektoraddition.

Beispiel (Bifie, AP, 1_056)

Zwei an einem Punkt P eines Körpers angreifende Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ lassen sich durch eine einzige am selben Punkt angreifende resultierende Kraft $\vec{F}$ ersetzen, die allein dieselbe Wirkung ausübt wie $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ zusammen.

Aufgabenstellung:

Gegeben sind zwei an einem Punkt P angreifende Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$.

Ermitteln Sie grafisch die resultierende Kraft $\vec{F}$ als Summe der Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$!

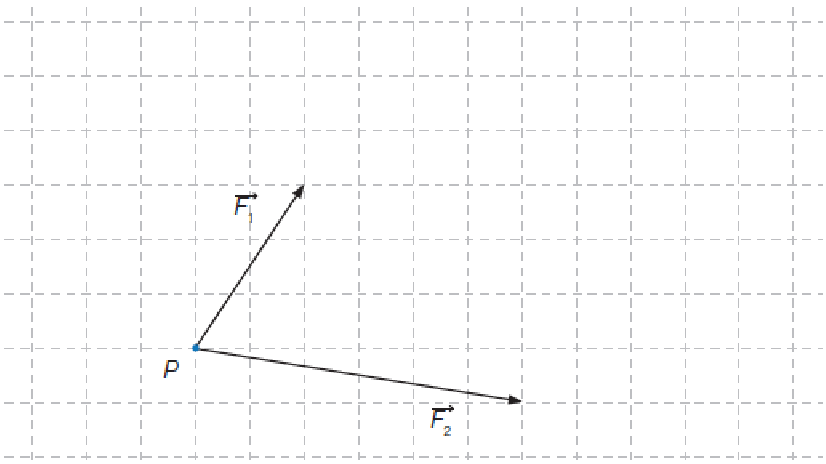


Abbildung 36: Beispiel, Kräftezerlegung

Lösung:

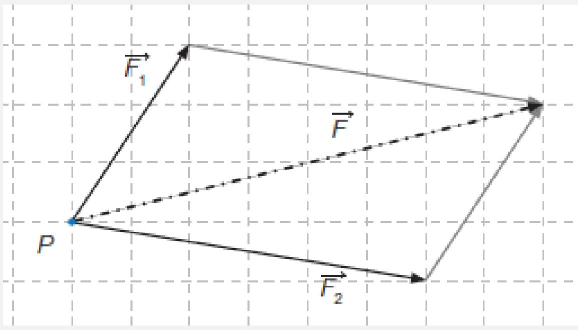


Abbildung 37: Lösung, Kräftezerlegung

Diese Kräfte können in ihren Erscheinungen sehr vielfältig sein. Ein Düsenflugzeug wird mit Hilfe von Schubkräften beschleunigt, Reibungskräfte der Luft (Luftwiderstand) bremsen das Flugzeug. Bei einem Absturz beschleunigt die Gewichtskraft das Flugzeug in Richtung Erdoberfläche usw.

Kräfte werden in der Einheit Newton (N) gemessen.

3.4.2. Masse und Gewicht

Die für eine Bewegungsänderung notwendige Kraft ist abhängig von der Masse. Die Masse ist eine Eigenschaft eines Körpers und wird in Kilogramm (kg) gemessen.

Masse und Gewicht werden im Alltag oft verwechselt. Diese Verwirrung entsteht dadurch, dass wir Massen von Gegenständen mit Hilfe der Gewichtskraft bestimmen. Das Gewicht ist die Anziehungskraft der Erde, die sie auf Gegenstände ausübt. Isaac Newton stellt fest, dass alle Körper einander anziehen. Erkennbar ist das aber nur, wenn mindestens ein Körper besonders „schwer" ist. Da die Erde „schwer" genug ist, fallen Gegenstände auf die Erde. Zwei Bleistifte, die „leicht" sind, ziehen einander nur unkenntlich schwach an.

Eine Waage zeigt eigentlich die Gewichtskraft an, sie zeigt an, wie stark wir von ihr angezogen werden. Da der Mond um einiges leichter als die Erde ist, gibt es auf seiner Oberfläche auch weniger Anziehungskraft. Würden wir die gleiche Waage auf dem Mond verwenden, so würde sie nur etwa nur $\frac{1}{6}$ des Erdwertes anzeigen, da die Anziehung bzw.

die Gewichtskraft viel schwächer ist. Am Jupiter würde unser Gewicht auf das Vielfache steigen. Unsere Masse jedoch, wäre auf allen Himmelskörpern gleich, auch wenn die Waage etwas anderes anzeigt.

Die Ursache der gegenseitigen Anziehung ist also die Masse. PhysikerInnen sprechen hier genauer von der „schweren Masse". Würden wir also von einem Sprungturm am Mond springen, so wäre die Beschleunigung um einiges geringer als bei einem Sprung auf der Erde. Auf dem Mond ist die Gewichtskraft eben schwächer.

Spielen wir nun eine Partie Billard, so benötigen wir für „gleiche" Stöße auf der Erde und auf dem Mond eine gleich große Kraft, wenn die Massen der Kugeln gleich groß sind. Der Widerstand gegen die Bewegungsänderung wird als träge Masse oder Trägheit bezeichnet (siehe 3.4.3).

3.4.3. Träge und schwere Masse

Trägheit bemerken wir z. B. beim Starten des Flugzeugs, wenn wir in den Urlaub fliegen. Das Flugzeug beschleunigt, wir werden in den Sessel gedrückt, weil wir uns der Beschleunigung widersetzen. Beim Landen ist es genau umgekehrt, wir werden nach vorne gedrückt, weil wir uns dem Bremsen widersetzen. Die Ursache der Trägheit ist wieder die Masse, PhysikerInnen sprechen von „träger Masse".

In Experimenten wurde nachgewiesen, dass träge und schwere Masse identisch sind. Jeder „schwere" Gegenstand ist somit auch träge und umgekehrt. „Damit können wir die Gewichtskraft als die Kraft ansehen, die die schwere/träge Masse zur Erde hin zieht. Durch die ständige Krafteinwirkung wird die schwere/träge Masse immer schneller. Man sagt, sie beschleunigt." (Herber, 2007, S. 59). Kraft hängt also von der Masse und der Beschleunigung ab.

Formel: $\boldsymbol{F = m \cdot a}$

(F ... Kraft; m ... Masse; a ... Beschleunigung)

Die Einheit der Kraft ist wie schon gesagt Newton (N). Ein Newton ist die Kraft die 1 kg um 1 m/s beschleunigt.

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ein Beispiel: Nehmen wir an, Sie hätten eine Masse von 70 kg. Ihre Gewichtskraft wäre dann mit $F = 70\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 = 686{,}7\,\mathrm{N}$, also etwa 700 N in Erdnähe. Auf dem Mond wo die Anziehung der Erde schon sehr gering ist, wären sie hauptsächlich der Anziehung des Mondes ausgesetzt. Ihr Gewicht würde am Mond $\frac{1}{6} \cdot 686{,}7\mathrm{N} \approx 114\,\mathrm{N}$ betragen.

Beispiel (BMBF, SA-8.1, S. 7)

Aufgabe 1:

Der Airbus A380 ist ein vierstrahliges Großraumflugzeug des europäischen Flugzeugherstellers Airbus S. A. S.
Es ist das größte zivile Verkehrsflugzeug, das bisher in Serienfertigung produziert wurde.
Beim Abheben muss das Flugzeug die Gewichtskraft überwinden. Daher muss die Auftriebskraft stärker als die Gewichtskraft sein. Das Flugzeug wird durch die Triebwerke beschleunigt, Luft- und Rollwiderstand wirken dabei bremsend. Die Antriebskraft durch die Turbinen wird durch die Formel $F_A = m \cdot a$ und der Luftwiderstand eines A 380 wird während des Startvorgangs näherungsweise durch die Formel $F_W = 46v^2$ beschrieben, wobei m die Masse (in kg), a die Beschleunigung (in m/s²) und v die Geschwindigkeit (in m/s) des Flugzeugs sind.
Die meisten Flugzeuge beschleunigen in der Horizontalen, bis sie ihre Abhebegeschwindigkeit erreicht haben.
Beim A380 beträgt die Abhebegeschwindigkeit 270 km/h.
Die Geschwindigkeit v des A380 beim Startvorgang kann näherungsweise durch die Funktion $v(t) = 2{,}2t - 0{,}01t^2$ beschrieben werden, wobei t in Sekunden und v in m/s angegeben wird.

A a) Berechnen Sie die Beschleunigung des A380 am Beginn des Startvorgangs ($t = 0$)!
Begründen Sie, warum im verwendeten Modell die mittlere Beschleunigung während des Startvorgangs gleich groß ist wie die Momentanbeschleunigung zur Hälfte des Startvorgangs! 2 P

b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den der A380 beim Startvorgang bis zum Abheben zurücklegt! 2 P

A c) Beschreiben Sie den Luftwiderstand während des Startvorgangs durch eine Funktion F_W in Abhängigkeit von der Zeit t und berechnen Sie die mittlere Änderung des Luftwiderstands während der ersten 40 s des Startvorgangs! 2 P

Abbildung 38: Beispiel, Airbus

Lösung:

a)

Für die Beschleunigung gilt: $a(t) = v'(t)$

$v(t) = 2{,}2t - 0{,}01t^2 \rightarrow v'(t) = a(t) = 2{,}2 - 0{,}02t \rightarrow a(0) = 2{,}2\ \mathrm{m/s^2}$

Die Beschleunigung am Beginn des Startvorgangs beträgt 2,2 $\mathrm{m/s^2}$.

Die Beschleunigungsfunktion $a(t) = 2{,}2 - 0{,}02t$ ist eine lineare Funktion. Die mittlere Beschleunigung und Momentanbeschleunigung zur Hälfte des Startvorgangs stimmen also überein.

b)

Mit Hilfe der Abhebegeschwindigkeit von 270 km/h können wir die Zeitdauer auf der Rollbahn berechnen:

270 km/h: 3,6 = 75 m/s

$v(t) = 2{,}2t - 0{,}01t^2 \rightarrow 75 = 2{,}2t - 0{,}01t$

Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung lautet: $L = \{42{,}18; 177{,}82\}$.

Das Flugzeug hebt also nach ca. 42 Sekunden vom Boden ab.

Der zurückgelegt Weg kann als Flächeninhalt unter dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion v berechnet werden.

$$s = \int_0^{42} (2{,}2t - 0{,}01t^2) \cdot dt = 1{,}1t^2 - \frac{0{,}01 \cdot t^3}{3} \Big|_0^{42} = 1693{,}44 \approx 1700\ \mathrm{m}$$

Die Länge des Weges beim Startvorgang beträgt 1700 m.

c)

Wir setzen die Geschwindigkeitsfunktion in die Luftwiderstandsfunktion ein: $v(t) = 2{,}2t - 0{,}01t^2 \rightarrow\ F_W = 46v^2$ und erhalten.

$F_{\mathrm{W}}(t) = 46 \cdot (2{,}2t - 0{,}01t^2)^2$

$F_{\mathrm{W}}(0) = 0\ \mathrm{N}$

$F_{\mathrm{W}}(40) = 46 \cdot (2{,}2 \cdot 40 - 0{,}01 \cdot 40^2)^2 = 238464\ \mathrm{N}$

mittlere Änderung: $\frac{238464-0}{40} = 5961{,}6\ \mathrm{N/s}$

Die mittlere Änderung des Luftwiderstands beträgt während der ersten 40 Sekunden 5961,6 N/s.

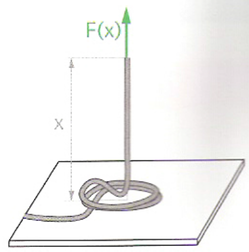
Beispiele mit mehreren Kräften in verschiedenen Richtungen erfordern eine vektorielle Betrachtung. Die Beschleunigung ist ein Vektor, die Kraft dementsprechend auch. Die Masse selbst ist richtungslos und dementsprechend ein Skalar.

Formel: $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$

(F ... Kraft; m ... Masse; a ... Beschleunigung)

Beispiel (Malle, 2012, S. 261)

Ein a Meter langes Seil liege aufgerollt auf dem Boden. Seine Masse pro Längeneinheit sei λ (kg/m). Ein Seilstück der Länge x wird angehoben.
(Hinweis: Gewicht = Masse mal Erdbeschleunigung = m · g, wobei $g \approx 9{,}81\,m/s^2$ ist.)
Kreuze die richtigen Aussagen an!



A) ☐ Um das Seil wie in der Abbildung zu halten, ist die Kraft $F(x) = \lambda \cdot g \cdot x$ nötig.

B) ☐ Das Gewicht des gesamten Seils beträgt $\lambda \cdot a$.

C) ☐ Um das Seil am einen Ende so hoch zu heben, dass das andere Ende gerade den Boden berührt, muss die Arbeit $W = \frac{\lambda \cdot g \cdot a^2}{2}$ verrichtet werden.

D) ☐ Die Masse des gesamten Seils beträgt $\lambda \cdot a$.

Abbildung 39: Beispiel Seil

Lösung:

a)

Die Gesamtmasse des angehobenen Seils beträgt $m = \lambda \cdot x$. Die benötigte Kraft ist das Produkt aus Masse und Erdbeschleunigung: $F = m \cdot g$. Durch Einsetzen folgt:

$F = m \cdot g \rightarrow F(x) = \lambda \cdot x \cdot g$. Aussage A) ist richtig.

b)

Das Gewicht ist eine Kraft, es gilt somit für das ganze Seil der Länge a: $F = \lambda \cdot a \cdot g$. Aussage B) ist falsch.

c)

Wir wiederholen die Definition der Arbeit $W = \int F(s) \cdot ds$ und ersetzen den Weg s, durch den Weg x: $W = \int F(x) \cdot dx$.

Das Seil wird vom Boden bis zur Höhe a angehoben, wir kennen somit die Grenzen des Integrals.

$W = \int_0^a F(x) \cdot dx$

Aus Punkt *a)* wissen wir, dass die benötigte Kraft zum Anheben des Seils um die Länge x $F(x) = \lambda \cdot x \cdot g$ beträgt. Dies setzen wir in das Integral ein.

$W = \int_0^a \lambda \cdot x \cdot g \cdot \mathrm{dx} = \lambda \cdot g \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{\lambda \cdot g \cdot a^2}{2} \rightarrow$ Aussage C) ist richtig.

d)

Aussage D) ist richtig.

Die richtigen Lösungen lauten: ACD.

3.4.4. Trägheitssatz

Eine Eigenschaft der trägen Masse ist: „Ein von äußeren Einflüssen freier Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig, d. h. er behält seine Geschwindigkeit (in Betrag und Richtung) bei. Er ist in dieser Hinsicht ‚träge´, versucht, auf seiner Geschwindigkeit zu ‚beharren´, weshalb diese Aussage Trägheitssatz oder Beharrungsgesetz heißt." (Embacher, 2002, Trägheit, Masse, Kraft).

Erstes Beispiel: Eine Rakete im Weltraum, weit entfernt von Gestirnen und Planeten, ist praktisch keinen Kräften ausgesetzt. Sie bewegt sich geradlinig mit gleicher Geschwindigkeit weiter, dazu braucht sie keinen weiteren Treibstoff.

Zweites Beispiel: Ein Auto auf der Autobahn fährt geradlinig mit einer Geschwindigkeit von 130 km/h. Plötzlich ist das Benzin aus, es bleibt stehen. Im Gegensatz zur Rakete ist das Auto physikalischen Kräften, dem Luftwiderstand (Reibungskräften) ausgesetzt, es behält seine Geschwindigkeit nicht bei, und wird langsamer.

Beispiel (Bifie, KC 2013, S. 20)

Luftwiderstand

Der Luftwiderstand F_L eines bestimmten PKWs in Abhängigkeit von der Fahrtgeschwindigkeit v lässt sich durch folgende Funktionsgleichung beschreiben: $F_L(v) = 0{,}4 \cdot v^2$. Der Luftwiderstand ist dabei in Newton (N) und die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) angegeben.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die mittlere Zunahme des Luftwiderstandes in $\frac{\text{N}}{\text{m/s}}$ bei einer Erhöhung der Fahrtgeschwindigkeit von 20 m/s auf 30 m/s!

Abbildung 40: Beispiel, Luftwiderstand

Lösung:

$F_l(20) = 0{,}4 \cdot 20^2 = 160\ N$

$F_l(30) = 0{,}4 \cdot 30^2 = 360\ N$

$$\frac{360 - 160}{10} = 20\ \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$$

Die mittlere Zunahme beträgt 20 $\frac{\text{N}}{\text{m/s}}$.

3.4.5. Zentripetalkraft

Autos können natürlich auch in Kurven fahren. Dazu muss sich das Auto auf einer Kreisbahn bewegen. Hier ändert sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors, das Auto wird beschleunigt. Die dazu notwendige Kraft zeigt zum Mittelpunkt der Kreisbahn. Diese Kraft heißt Zentripetalkraft, sie ist von der Masse m, dem Radius r der Kreisbahn und von der Bahngeschwindigkeit v abhängig. Die Bahngeschwindigkeit v gibt die Bogenlänge an, die in einer Sekunde durchlaufen wird.

Formel: $F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$

(F_Z ... Zentripetalkraft; m ... Masse; v ... Bahngeschwindigkeit; r ... Radius)

Wichtig ist auch der Begriff der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Winkelgeschwindigkeit gibt die durchlaufene Bogenlänge pro Zeit an. Folglich hängen die Winkelgeschwindigkeit ω und die Bahngeschwindigkeit v zusammen.

Formel: $v = \omega \cdot r$
(v ... Bahngeschwindigkeit; ω ... Winkelgeschwindigkeit; r ... Radius)

Dies setzen wir in die Formel für F_Z ein:

$$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{m \cdot (w \cdot r)^2}{r} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Formel: $F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$
(F_Z ... Zentripetalkraft; m ... Masse; ω ... Bahngeschwindigkeit; r ... Radius)

Zentripetalkraft ist dabei ein Überbegriff für verschiedene Kräfte, die Objekte auf eine Kreisbahn zwingen. Beim Auto ist es die Reibungskraft, bei einem kreisenden Satelliten ist es die Gravitationskraft.

Betrachten wir als weiteres Beispiel eine Person, die einen Ball am Ende einer Schnur um ihren Kopf auf einer Kreisbahn schwingt. Lässt sie die Schnur los, fliegt der Ball gerade nach außen weiter. Zuvor muss also eine Kraft nach innen, in Richtung Kreismittelpunkt gewirkt haben. Trotzdem spürte diese Person eine Kraft nach außen, die sogenannte Fliehkraft.

Diesen Widerspruch erklärt man sich mit einer weiteren Entdeckung von Isaac Newton. Er erklärte, dass es zu jeder Kraft eine gleiche große entgegengesetzte Kraft wirkt, die Gegenkraft. „Um den Ball weiter auf der Kreisbahn in Bewegung zu halten, ziehen Sie an der Schnur nach innen. Die Schnur wiederum übt die Kraft auf den Ball aus. Der Ball übt eine gleich große und entgegengerichtete Kraft auf Ihre Hand aus (drittes Newton´sches Axiom) und dies ist die Kraft, die Ihre Hand fühlt." (Giancoli, 2010, S. 153). Aus diesem Grund wird die Fliehkraft als eine Scheinkraft bezeichnet.

Beispiel: (BMBF, SA 5-1, S. 4)

Die Formel für die Fliehkraft F lautet: $F = \frac{mv^2}{r}$ (Masse m, Geschwindigkeit v, Radius r)

i) Drücke r durch die Variablen F, m und v aus!

Abbildung 41: Beispiel, Fliehkraft

Erwartete Lösung:

$r = \frac{mv^2}{F}$

Kritik: Wie wir zuvor gesehen haben hängt die Bahngeschwindigkeit v selbst wieder vom Radius r ab: $= v(r) = \omega \cdot r$.

Es macht somit wenig Sinn die Variable r durch die Geschwindigkeit v auszudrücken.

besser: $F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r \;\rightarrow\; r = \frac{F}{m\omega^2}$.

3.4.6. Drehmoment

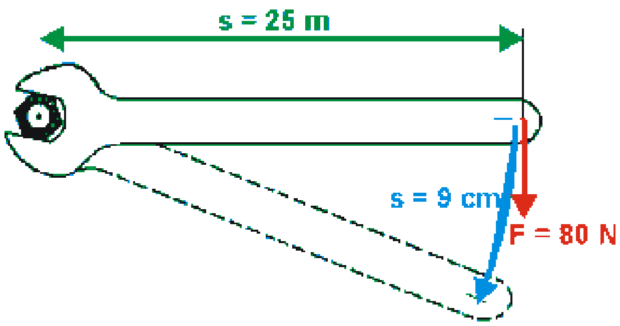


Abbildung 42: Drehmoment

Um die Schraube in der obenstehenden Abbildung in Drehung zu versetzen, braucht es eine Kraft. Zur Übertragung der Kraft sind Schraubendreher gut, längere Schraubendreher sind besser, weil neben der Größe der Kraft auch der Abstand zur Drehachse entscheidend ist.

Zur Beschreibung dieser Erkenntnis wird der Begriff Drehmoment M verwendet.

Formel: $M = F \cdot r$

(M ... Drehmoment; F ... angreifende Kraft; r ... Abstand zur Drehachse)

Eine Kraft wird in Newton und ein Abstand in Meter gemessen. Somit folgt:

Die Einheit des Drehmoments ist das Newtonmeter (Nm).

3.4.7. Zusammenfassung: Kraft und Masse

Masse: Eigenschaft von Körpern

Einheit der Masse: Kilogramm (kg)

Kraft: $F = m \cdot a$ (Kraft = Masse · Beschleunigung)

Einheit der Kraft: Newton $(\mathrm{N}) = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$

3.5. Frequenz und harmonische Schwingung

Ein Federpendel führt periodische Schwingungen aus der Ruhelage aus. Es besteht aus einer Feder und einem Massestück. Die jeweilige Lage des Massestücks kann mit Hilfe eines Weg-Zeit-Diagramms notiert bzw. abgelesen werden. Vernachlässigen wir die Reibung, so lässt sich die Projektion des Federpendels als Sinusschwingung darstellen und wird als harmonische Schwingung bezeichnet.

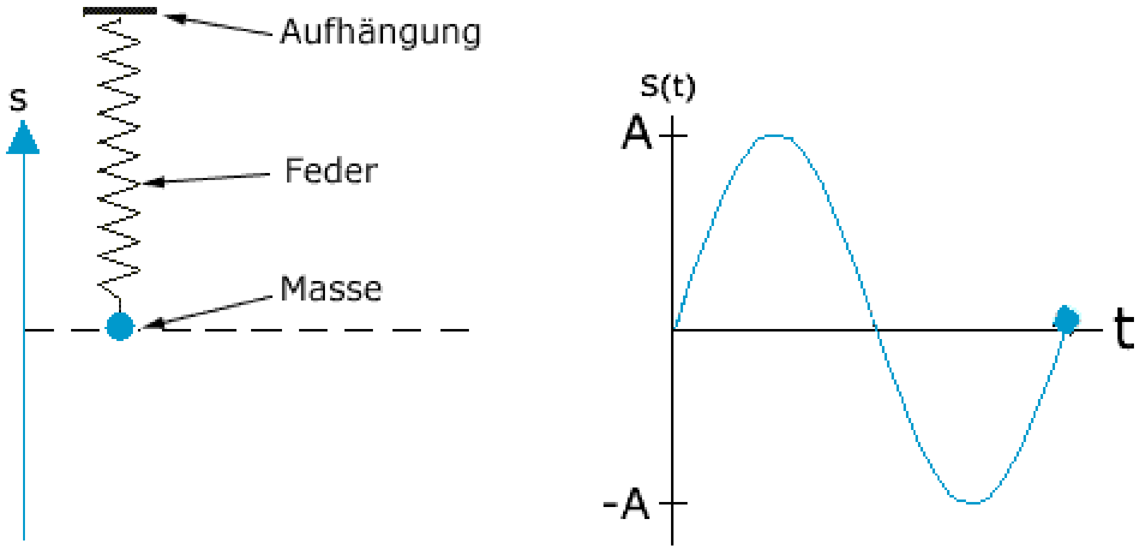


Abbildung 43: Weg-Zeit-Diagramm des Federpendels

Folgende Begriffe dienen zur Beschreibung von Schwingungen:

Begriff	**Erklärung**	**Einheit**
Amplitude	maximale Auslenkung aus der Ruhelage	1 m
Schwingungsdauer	Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden gleich gerichteten Durch-gängen	1 s
Frequenz	Anzahl der Schwingungen pro Sekunde	1 s^{-1} = 1 Hz (Hertz)
Elongation	momentane Auslenkung	1 m

Die Frequenz ist demnach der Kehrwert der Schwingungsdauer:

Formel: $f = \frac{1}{T}$

(f ... Frequenz; T ... Schwingungsdauer)

Im einfachsten Fall kann die Schwingung durch eine Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ beschrieben werden.

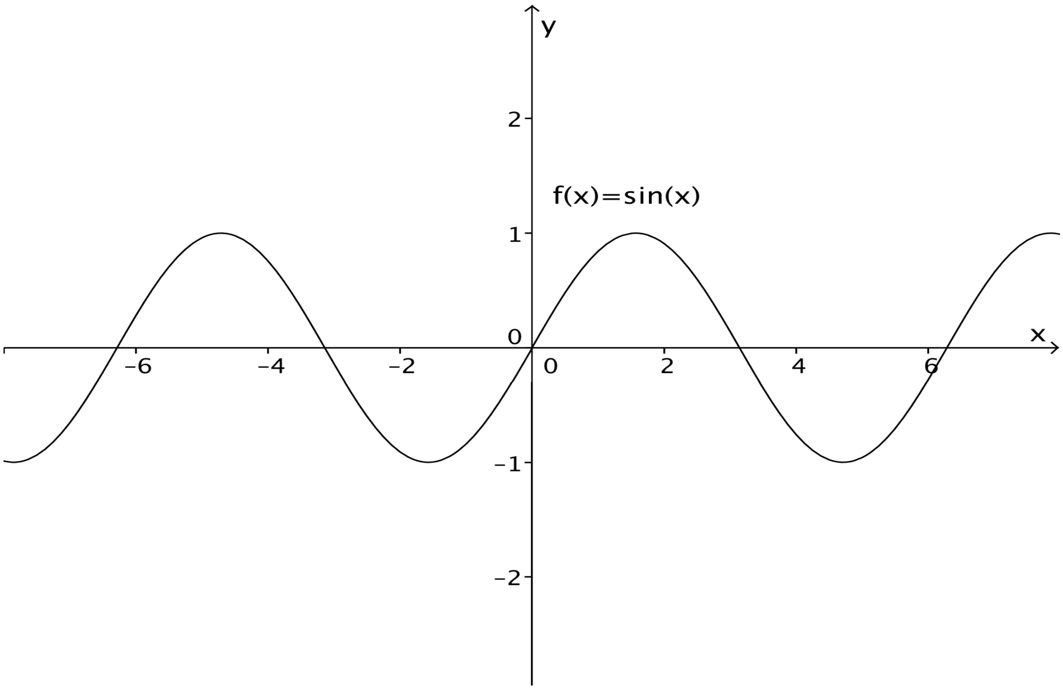


Abbildung 44: Die Sinusfunktion

Wir verändern die Funktion f: $f(x) = \sin(x) \rightarrow g$: $g(x) = a \cdot \sin(x)$. Der Parameter a wird als Amplitude bezeichnet: Wie wirkt sich a auf die ursprüngliche Funktion aus?

$a > 1$: Streckung entlang der y-Achse

$0 < a < 1$: Stauchung entlang der y-Achse

$a < 0$: Spiegelung an der x-Achse

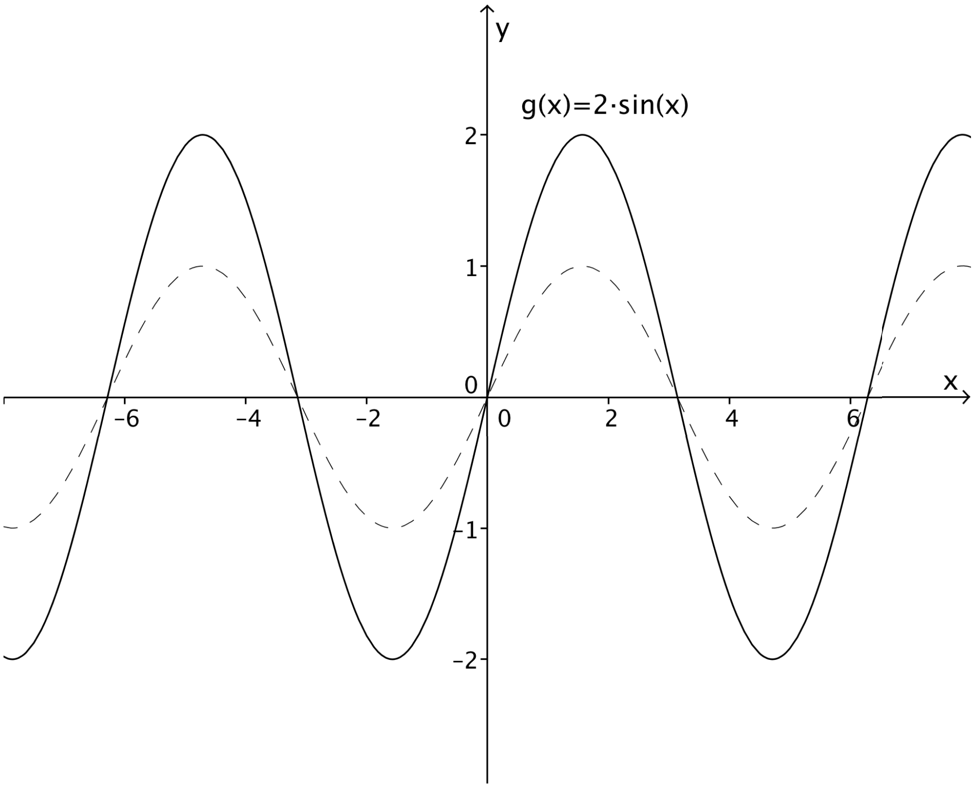


Abbildung 45: Änderung der Amplitude

Wir verändern die Funktion f nochmals: $f(x) = \sin(x) \rightarrow$ g: $g(x) = \sin(b \cdot x)$. Wie wirkt sich b auf die ursprüngliche Funktion aus?

$b > 1$: Stauchung entlang der x-Achse

$0 < b < 1$: Streckung entlang der x-Achse

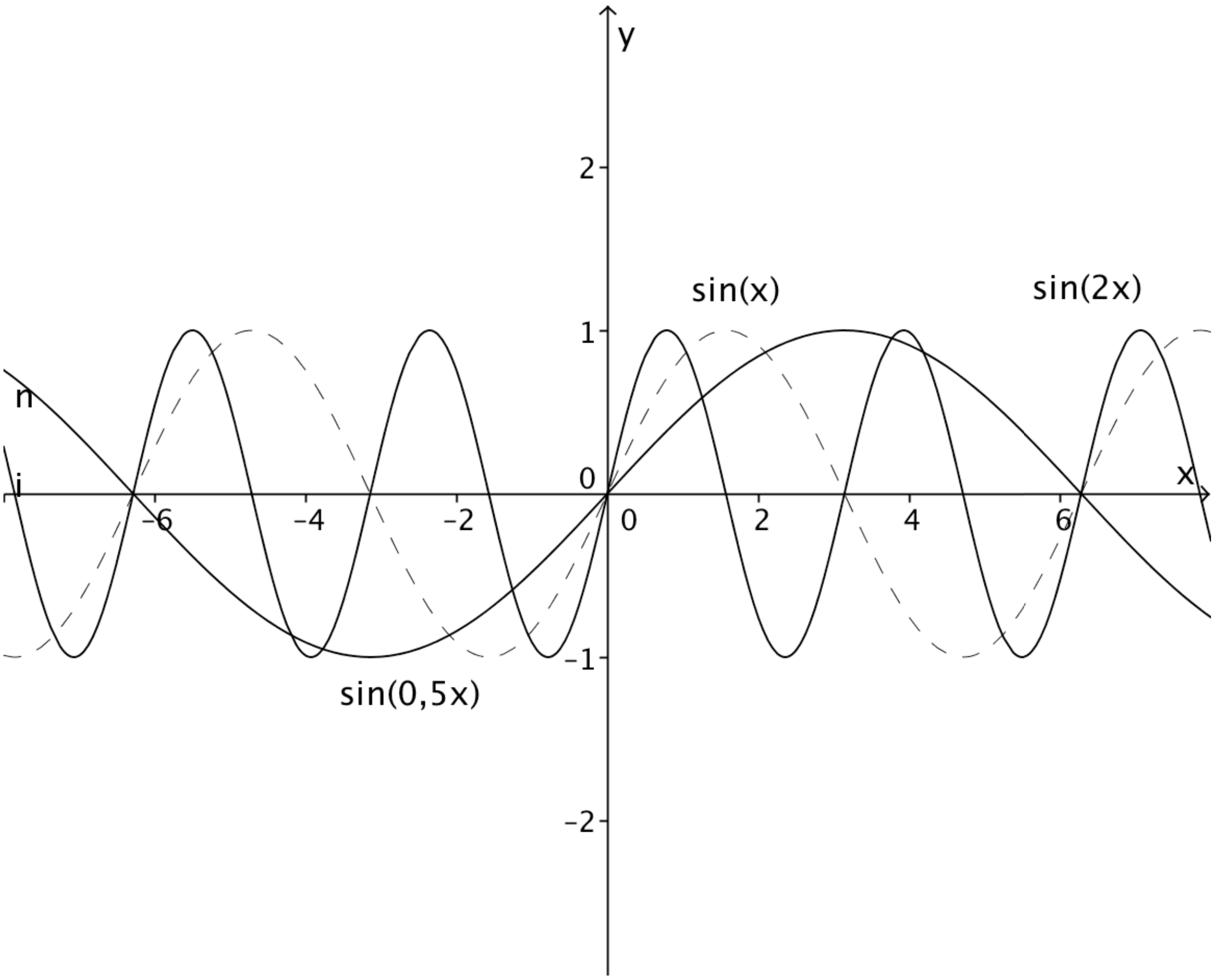


Abbildung 46: Stauchung und Streckung entlang der x-Achse

Wir verändern die Funktion f ein drittes Mal: $f(x) = \sin(x) \rightarrow g \colon g(x) = \sin(x + c)$. Der Parameter c wird auch als Phasenverschiebung bezeichnet. Wie wirkt sich c auf die ursprüngliche Funktion aus?

$c > 0$: Verschiebung entlang der x-Achse nach links

$c < 0$: Verschiebung entlang der x-Achse nach rechts

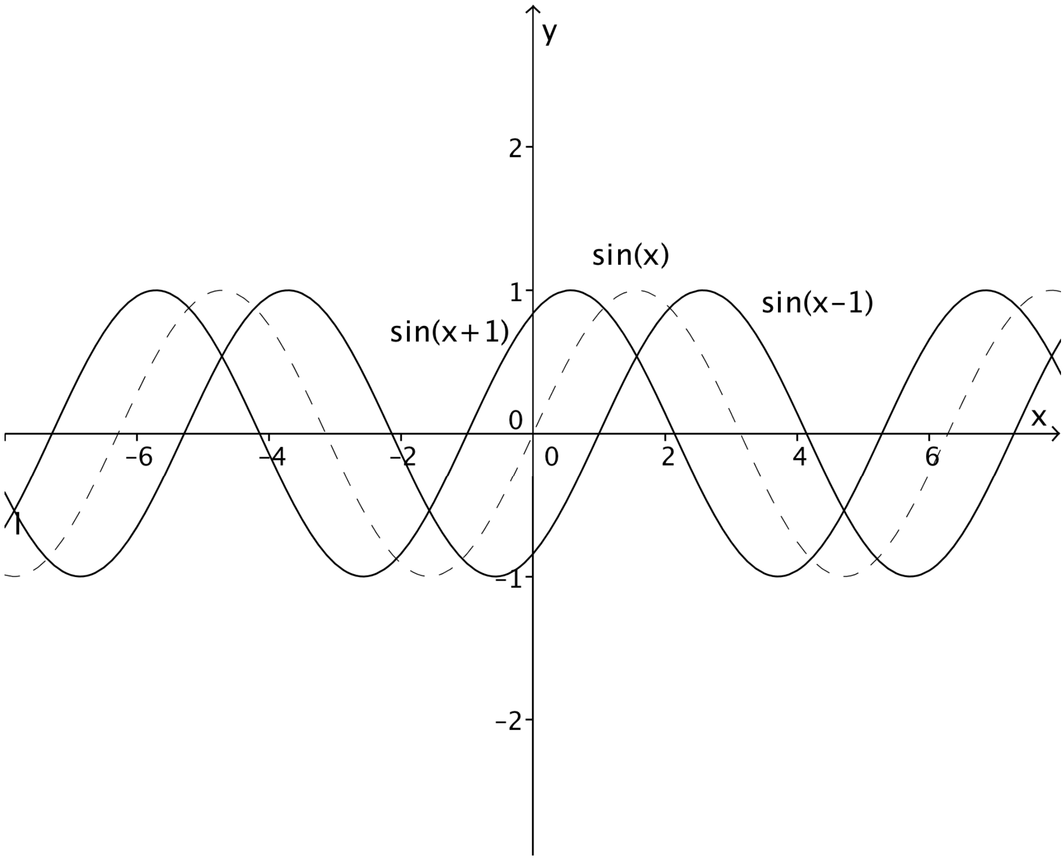


Abbildung 47: Verschiebung entlang der *x*-Achse

Wir verändern die Funktion f ein letztes Mal: $f(x) = \sin(x) \rightarrow g: g(x) = \sin(x) + d$. Wie wirkt sich d auf die ursprüngliche Funktion aus?

$d > 0$: Verschiebung entlang der y-Achse nach oben

$d < 0$: Verschiebung entlang der y-Achse nach unten

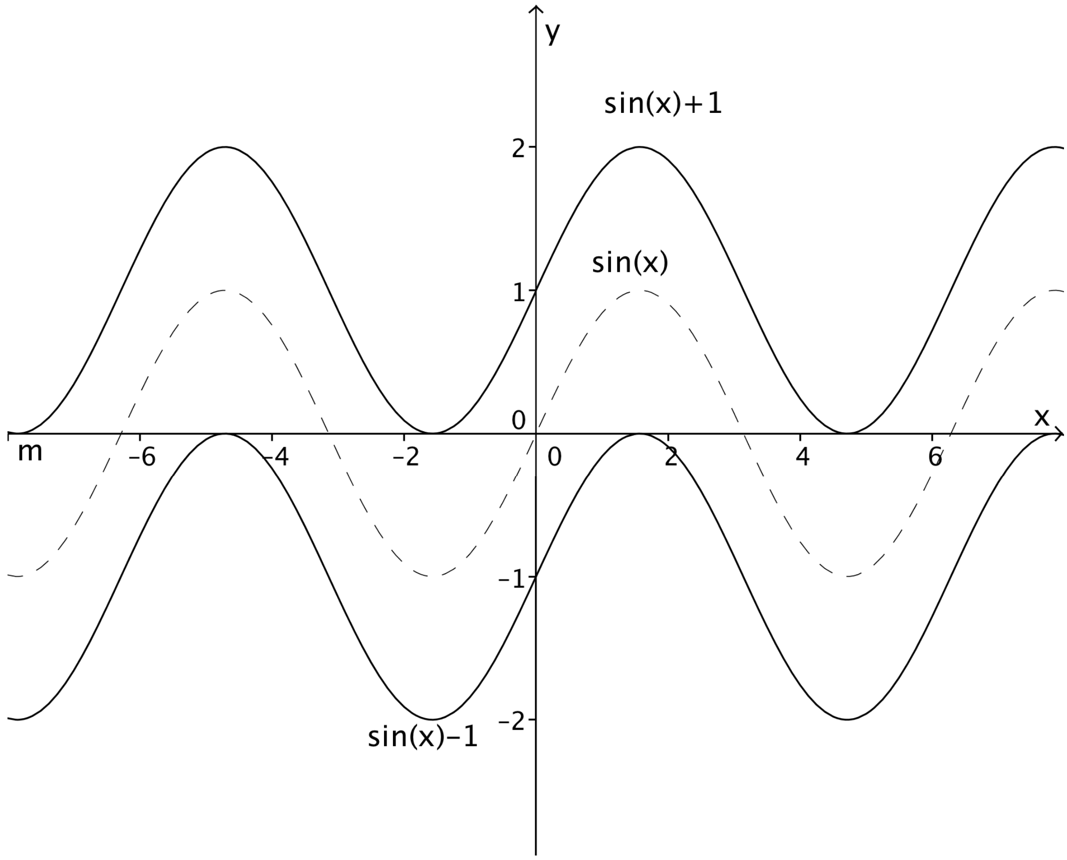


Abbildung 48: Verschiebung entlang der y-Achse

Kombiniert man alle Parametervariationen so folgt für die harmonische Schwingung:

Formel: $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$

Beispiel (BMBF, SA 6-3, S. 3)

Gib die Funktionsgleichungen der Funktionen f und g an!

$f(x) =$ ____________________

$g(x) =$ ____________________

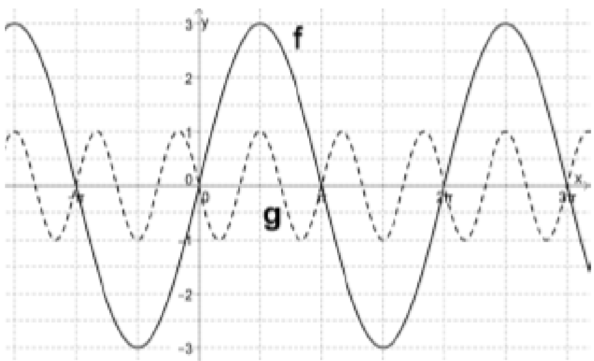


Abbildung 49: Beispiel harmonische Schwingung

Lösung:

f ist eine um den Faktor 3 entlang der y-Achse gestreckte Sinusfunktion:

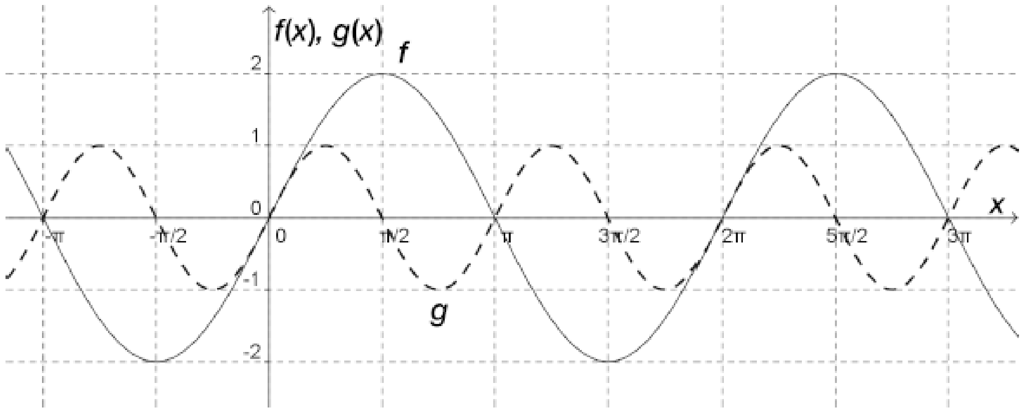
$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$

Für g gilt: gespiegelt an der x-Achse → somit negatives a; Stauchung entlang der x-Achse um den Faktor 3: $g(x) = -\sin(3x)$

Beispiel (Bifie, HT 2013/14, A1, S. 16)

Sinusfunktion

Im untenstehenden Diagramm sind die Graphen zweier Funktionen f und g dargestellt.



Die Funktion f hat die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit den reellen Parametern a und b. Wenn diese Parameter in entsprechender Weise verändert werden, erhält man die Funktion g.

Aufgabenstellung:

Wie müssen die Parameter a und b verändert werden, um aus f die Funktion g zu erhalten?

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Um den Graphen von g zu erhalten, muss a ____①____ und b ____②____ .

①	
verdoppelt werden	☐
halbiert werden	☐
gleich bleiben	☐

②	
verdoppelt werden	☐
halbiert werden	☐
gleich bleiben	☐

Abbildung 50: Beispiel, Sinusfunktion

Lösung:

Um den Graphen von *g* zu erhalten, muss *a* ___①___ und *b* ___②___ .

①	
halbiert werden	☒

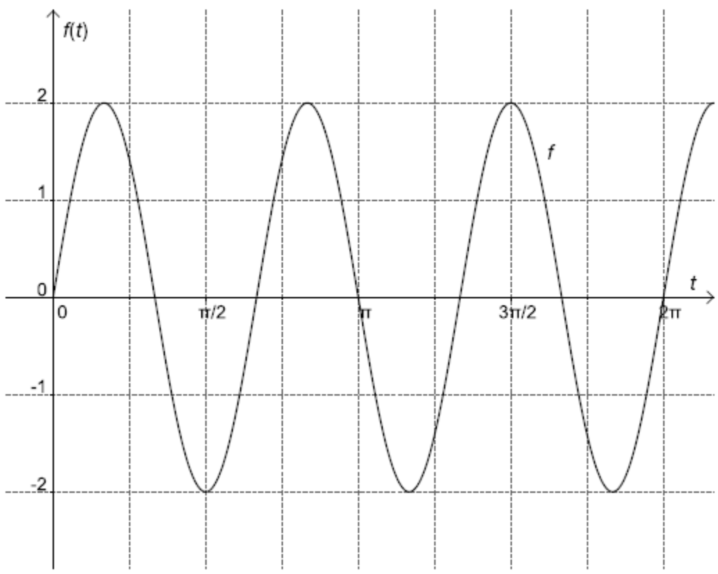
②	
verdoppelt werden	☒

Abbildung 51: Lösung, Sinusfunktion

Beispiel (Bifie, PK 2014, A1, S. 20)

Schwingung

Eine Schwingung werde durch eine Funktion *f* mit der Funktionsgleichung $f(t) = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschrieben. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion *f*.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte von *f* an!

r = ______________

ω = ______________

Abbildung 52: Beispiel, Schwingungen

Lösung:

$r = 2; \omega = 3$

Beispiel (Bifie, AP, 1_066)

Gegeben ist eine Sinusfunktion der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$.

Dabei beeinflussen die Parameter a und b das Aussehen des Graphen von f im Vergleich zum Graphen von $g(x) = \sin(x)$.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Parameterwerten die entsprechenden Auswirkungen auf das Aussehen von f im Vergleich zu g zu!

$a = 2$	
$a = \frac{1}{2}$	
$b = 2$	
$b = \frac{1}{2}$	

A	Dehnung des Graphen der Funktion entlang der x-Achse auf das Doppelte
B	Phasenverschiebung um 2
C	doppelte Frequenz
D	Streckung entlang der y-Achse auf das Doppelte
E	halbe Amplitude
F	Verschiebung entlang der y-Achse um –2

Abbildung 53: Beispiel, Parameter einer Sinusfunktion

Lösung: DECA

3.6. Temperatur, Druck und Volumen

Der Luftdruck entsteht durch die Gewichtskraft der Luftsäule. Auf Meereshöhe ist der Luftdruck größer als auf dem Gipfel des Mount Everest. Ähnlich ist es im Wasser, der Wasserdruck entsteht durch die Gewichtskraft des Wassers. Ein Taucher wird in tieferen Gewässern mehr Wasserdruck spüren als in der Nähe der Oberfläche.

Allgemein wird in der Physik der Druck p als Kraft F pro Fläche A definiert. Die Einheit ist das Pascal (Pa): $1\ \mathrm{PA} = 1\ \mathrm{N}/m^2$

Formel: $p = \frac{F}{A}$

(p ... Druck, F ... Kraft, A ... Fläche)

Eine alte aber noch immer übliche Einheit des Drucks ist das bar, welches ungefähr dem Luftdruck auf Meereshöhe entspricht. Es gilt: $1\ \mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{Pa}$

Zur Beschreibung der Natur werden oft vereinfachte Modelle verwendet. Ein solches ist das Modell des idealen Gases. Ein Gas besteht aus einer großen Anzahl an Atomen bzw. Molekülen, die sich mit einer großen Geschwindigkeit in ihrem zugewiesen Behälter bewegen. Als Behälter könnte eine Spritze oder ein Reifen dienen. Die Kräfte zwischen den Molekülen werden vernachlässigt, die Kräfte zwischen Moleküle und Behälter nicht. „Der Druck des Gases kommt nun durch die Stöße der Moleküle an die Begrenzungen, in diesem Fall die Reifen, zu Stande.” (Apolin, 2008, S. 98).

Beispiel (Bifie, MS 2014, A2, S. 2]

Druckmessung in einem Behälter

Der Druck in einem Behälter ändert sich während eines 15 Minuten dauernden Experiments. Die Funktion p mit der Gleichung $p(t) = \frac{1}{64} \cdot t^3 - \frac{3}{16} \cdot t^2 + 6$ beschreibt die Höhe des Drucks in Abhängigkeit von der Zeit t. Das Experiment beginnt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, der Druck wird in Bar, die Zeit in Minuten angegeben.

Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Drucks zum Zeitpunkt $t = 12$! Geben Sie das Ergebnis auf zwei Dezimalen genau an!

   Berechnen Sie den Druck p^* am Ende des Experiments unter der Annahme, dass die momentane Änderungsrate des Drucks ab dem Zeitpunkt $t = 12$ bis zum Ende des Experiments unverändert bleibt! Geben Sie das Ergebnis auf zwei Dezimalen genau an!

b) Lösen Sie die Gleichung $p(t) = 6$!

   Zeichnen Sie die Lösungen der Gleichung $p(t) = 6$ im nachstehenden Koordinatensystem ein und interpretieren Sie die Aussage der Gleichung im Sachzusammenhang mit der gegebenen Aufgabenstellung!

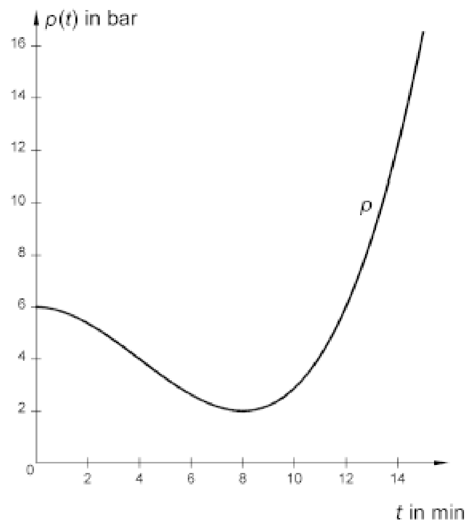


Abbildung 54: Beispiel, Druckmessung

Lösung:

a)

Wir berechnen die erste Ableitung der Funktion *p*.

$p'(t) = \frac{3}{64} \cdot t^2 - \frac{3}{8} \cdot t \rightarrow p'(12) = \frac{3}{64} \cdot 12^2 - \frac{3}{8} \cdot 12 = 2{,}25 \text{ bar/min}$

Die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 12$ beträgt 2,25 bar/min.

$p(12) = \frac{1}{64} \cdot 12^3 - \frac{3}{16} \cdot 12^2 + 6 = 6 \text{ bar}$

$p^* = 6 + 3 \cdot 2{,}25 = 12{,}75 \text{ bar}$

Der Druck nach 15 Minuten würde 12,75 bar betragen.

b)

$6 = \frac{1}{64} \cdot t^3 - \frac{3}{16} \cdot t^2 + 6 \rightarrow 0 = \frac{1}{64} \cdot t^3 - \frac{3}{16} \cdot t^2$

Herausheben: $\frac{1}{16} t^2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot t - 3\right) = 0$

$\rightarrow\ t_1 = 0\,;\ t_2 = 12$

Am Beginn des Experiments und nach 12 Minuten wird jeweils ein Druck von 6 bar gemessen.

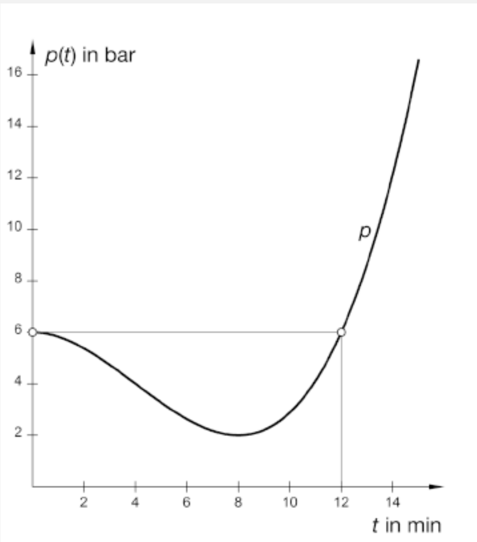


Abbildung 55: Lösung, Druckmessung

Eine weitere wichtige Kenngröße für die Eigenschaften von Gasen ist die Temperatur. Die Temperatur gibt die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen an. Während die Temperatur nach oben nahezu unbegrenzt ist, gibt es eine untere Grenze. Diese untere Grenze heißt absoluter Nullpunkt, die Teilchen bewegen sich nicht mehr. Dies geschieht bei einer Temperatur von ungefähr $-273°$ C. Für Physiker ist dies der Beginn einer neuen Temperaturskala, nämlich 0 Kelvin (K). Einem Unterschied von einem Grad Celsius entspricht der Unterschied von einem Kelvin. Wasser das bei 0° C gefriert, gefriert für die Physik bei 273 K.

Die dritte wichtige Größe um Gase zu beschreiben, ist das Volumen. Die allgemeine Gasgleichung beschreibt nun den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen Druck p, Volumen V und der Temperatur T eines idealen Gases. Sind zwei der drei Werte gegeben, so lässt sich der dritte Wert einfach errechnen.

Formel: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

(p ... Druck; V ... Volumen; n ... Stoffmenge; R ... allgemeine Gaskonstante; T ... absolute Temperatur in Kelvin)

Die Stoffmenge n ist eine Grundgröße des internationalen Einheitensystems und wird in Mol gemessen. Eine Stoffmenge von 1 Mol enthält in etwa $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Atome.

Beispiel (Bifie, HT 2013/14, A2, S. 8)

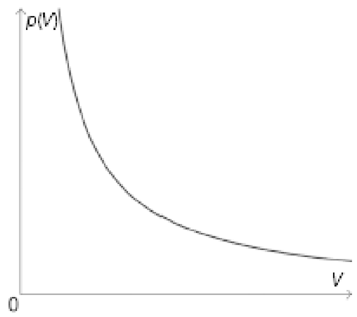
Zustandsgleichung idealer Gase

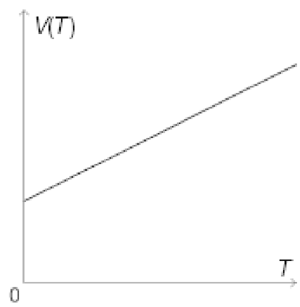
Die Formel $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen dem Druck p, dem Volumen V, der Stoffmenge n und der absoluten Temperatur T eines idealen Gases und wird *thermische Zustandsgleichung idealer Gase* genannt. R ist eine Konstante.
Das Gas befindet sich in einem geschlossenen Gefäß, in dem die Zustandsgrößen p, V und T verändert werden können. Die Stoffmenge n bleibt konstant.

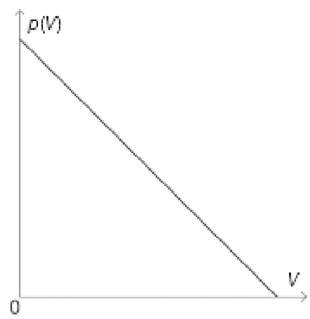
Aufgabenstellung:

a) Führen Sie alle Möglichkeiten an, die zu einer Verdopplung des Drucks führen, wenn jeweils eine der Zustandsgrößen verändert wird und die anderen Größen konstant bleiben!

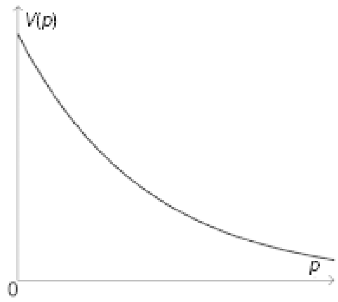
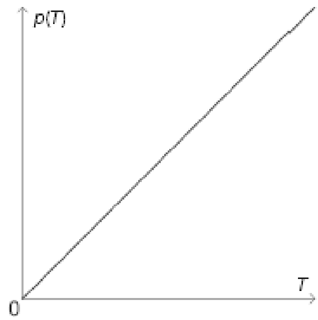
Genau zwei der folgenden Graphen stellen die Abhängigkeit zweier Zustandsgrößen gemäß dem oben genannten Zusammenhang richtig dar. Kreuzen Sie diese beiden Graphen an!
Beachten Sie: Die im Diagramm nicht angeführten Größen sind jeweils konstant.

<table>
<tr><td>


</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>


</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>


</td><td>☐</td></tr>
</table>

	☐
	☐

b) Bei gleichbleibender Stoffmenge und gleichbleibender Temperatur kann das Volumen des Gases durch Änderung des Drucks variiert werden.

Begründen Sie, warum die *mittlere* Änderung des Drucks in Abhängigkeit vom Volumen

$$\frac{p(V_2) - p(V_1)}{V_2 - V_1}$$

für jedes Intervall $[V_1; V_2]$ mit $V_1 \neq V_2$ ein negatives Ergebnis liefert!

Ermitteln Sie jene Funktionsgleichung, die die *momentane* Änderung des Druckes in Abhängigkeit vom Volumen des Gases beschreibt!

Abbildung 56: Beispiel, Ideales Gas

Lösung:

a)

Das Volumen halbieren oder die Temperatur verdoppeln!

Der Druck und das Volumen sind indirekt proportional. Somit stimmt Antwortmöglichkeit 1. Ebenfalls richtig ist Antwortmöglichkeit 5, da der Druck und die Temperatur direkt proportional sind.

b)

Der Nenner ist positiv und der Zähler negativ, daher ist der Quotient negativ. Der Druck nimmt also mit steigendem Volumen ab.

Umformen nach p liefert: $p(V) = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$.

Die momentane Änderungsrate ist die erste Ableitung der Funktion p:

$$p'(V) = -\frac{n \cdot R \cdot T}{V^2}$$

Sehen wir uns noch einen Spezialfall an. Das Gesetz von Boyle-Mariotte besagt, dass der Druck idealer Gase bei gleichbleibender Temperatur umgekehrt proportional zum Volumen ist.

Formel: $p \sim \frac{1}{V}\,(T = const) \rightarrow p = \frac{c}{V}\,(T = const)$

(p ... Druck; V ... Volumen; T ... absolute Temperatur; c ... Konstante)

Dies ist unmittelbar einsichtig. Ein größeres Volumen bedeutet eine größere Begrenzungsfläche. Die Stöße der Moleküle werden auf mehr Fläche aufgeteilt, somit wirkt auf die gleiche Fläche weniger Kraft, somit sinkt der Druck.

Beispiel (Bifie, KC 2012, S. 7)

Ideales Gas

Die Abhängigkeit des Volumens V vom Druck p kann durch eine Funktion beschrieben werden. Bei gleichbleibender Temperatur ist das Volumen V eines idealen Gases zum Druck p indirekt proportional.

200 cm³ eines idealen Gases stehen bei konstanter Temperatur unter einem Druck von 1 bar.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Term der Funktionsgleichung an und zeichnen Sie deren Graphen!

$V(p)$ = ___________________________

Abbildung 57: Beispiel, Gas

Lösung:

Hinweis: Man beachte, dass der Druck in bar und das Volumen in cm^3 angegeben wird!

$V(p) = \frac{c}{p} \rightarrow 200 = \frac{c}{1} \rightarrow c = 200$

$$V(p) = \frac{200}{p}$$

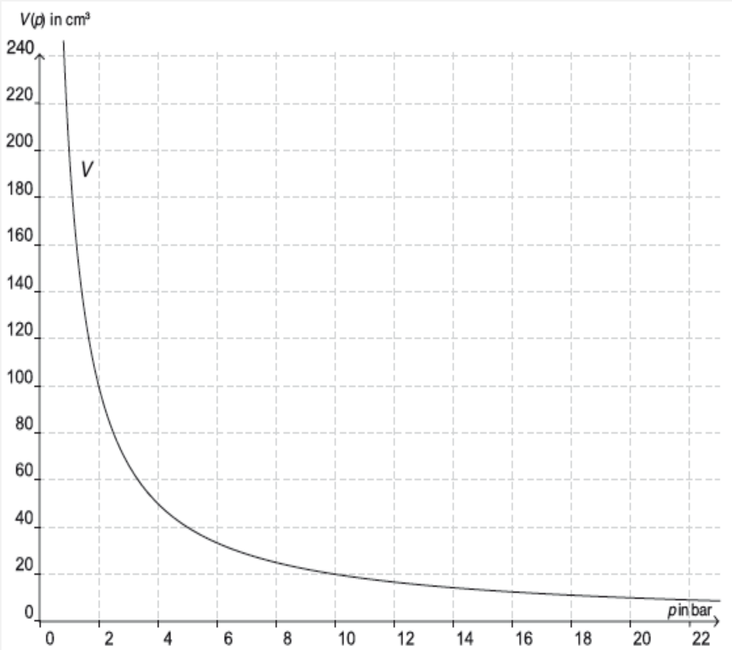


Abbildung 58: Lösung, Gas

3.7. Elektrizität

3.7.1. Atome

Eine wichtige Erkenntnis der Physik besagt, dass alle Dinge aus kleinen Teilchen, den Atomen, aufgebaut sind. „Atomos" ist ein griechisches Wort und bedeutet das Unteilbare. Heute weiß man, dass der Begriff etwas unglücklich gewählt wurde, da das Atom selbst aus Elektronen, Neutronen und Protonen besteht. Neutronen und Protonen selbst setzen sich wieder aus sogenannten Quarks zusammen.

Im Laufe der Zeit haben sich die Vorstellungen über den Aufbau eines Atoms drastisch verändert. Ein immer noch sehr gängiges aber veraltetes Bild vom Aufbau der Atome ist das Bohr´sche Atommodell. Dabei gibt es einen positiv geladenen Kern, und eine negative Hülle, der Aufbau ist so ähnlich wie ein kleines Planetensystem. Überholt wurde dieses Modell von neueren quantenmechanischen Beschreibungen, die viel mit Wahrscheinlichkeit, aber wenig mit Vorstellung zu tun haben.

3.7.2. Ladung

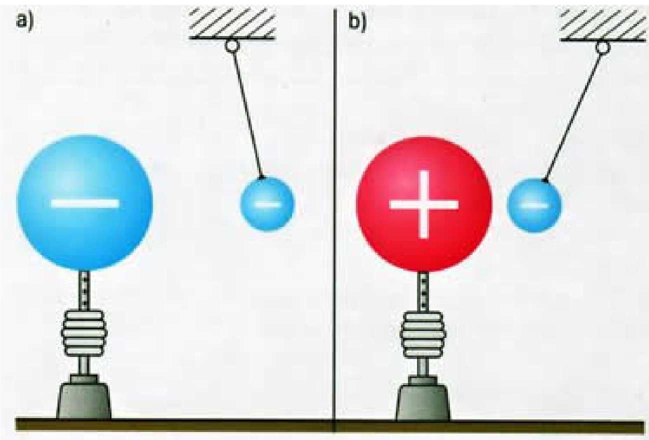


Abbildung 59: Die elektrische Ladung

Geblieben vom Bohr´schen Atommodell ist, dass die negativen Ladungsträger Elektronen heißen und die positiven Ladungsträger Protonen genannt werden. Negativ und positiv stehen dabei im gewissen Sinn für gegensätzliche Eigenschaften. Gleichnamige Teilchen stoßen einander ab, gegennamige Ladungen ziehen einander an!

Ladungen werden in der Einheit Coulomb (C) gemessen.

Beim Trennen von negativen und positiven Ladungen muss man entlang einer Wegstrecke Kraft aufwenden. Dabei wird z. B. mechanische Energie in elektrische Energie umgewandelt. Die dazu notwendige Kraft nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab. In der Praxis bedeutet dies, dass man eine größere Menge an Ladungen nach ihrem Vorzeichen trennen und auch gleichnamige Ladungen speichern kann. Eine solche Anordnung nennt man einen Kondensator.

Beispiel (Bifie; HT 2013/14, A1, S. 6)

Punktladungen

Der Betrag F der Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 im Abstand r wird beschrieben durch die Gleichung $F = C \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$ (C ... physikalische Konstante).

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, um welchen Faktor sich der Betrag F der Kraft ändert, wenn der Betrag der Punktladungen q_1 und q_2 jeweils verdoppelt und der Abstand r zwischen diesen beiden Punktladungen halbiert wird!

Abbildung 60: Beispiel, Punktladungen

Lösung:

$$F = C \cdot \frac{2 \cdot q_1 \cdot 2 \cdot q_2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = C \cdot \frac{4 \cdot q_1 \cdot q_2}{\frac{r^2}{4}} = C \cdot \frac{16 \cdot q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Der Betrag der Kraft wird 16-mal so groß.

3.7.3. Elektrische Felder

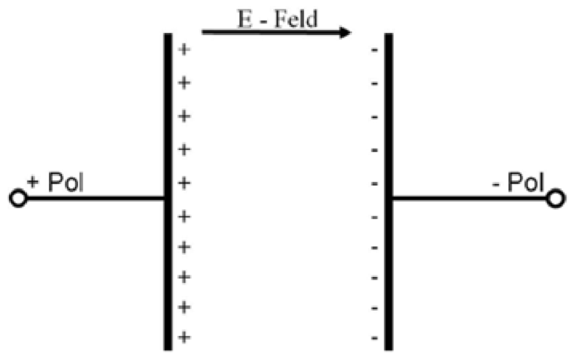


Abbildung 61: Das E-Feld eines Kondensators

Die Ladungen erfüllen nun den Raum mit einer Eigenschaft, die die PhysikerInnen als elektrisches Feld bezeichnen. Ein Feld wirkt anziehend oder abstoßend auf andere Ladungen. Bemerkenswert ist, dass dies ohne direkten Kontakt geschieht. In jedem Punkt des Raumes kann nun die Feldstärke E gemessen werden.

Eine in der Praxis sehr nützliche Eigenschaft solcher Felder ist, dass sie sich nach der Entstehung in alle Richtungen des Raumes mit Lichtgeschwindigkeit wellenförmig ausbreiten können. Für schwache Felder spielt diese Fortpflanzung der Wellen keine Rolle, da ihre Feldstärke quadratisch mit der Entfernung abnimmt.

Für technische Anwendungen spielen diese sogenannten Hertz´schen Wellen jedoch eine große Rolle. Benannt nach Heinrich Hertz, der 1886 die Voraussagen von James Clerk Maxwell bezüglich elektromagnetischer Wellen erstmals experimentell nachweisen konnte, traten diese elektromagnetischen Wellen zur Informationsübermittlung im 20. Jahrhundert ihren Siegeszug an.

Funk, Radio, Radar, Handy und Internet beruhen alle auf der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen mit Lichtgeschwindigkeit. Dabei werden die elektromagnetischen Wellen nach ihrer Wellenlänge bzw. ihrer Frequenz eingeteilt (siehe Abb. 62). Je größer die Frequenz, desto größer ist die Energie der Welle.

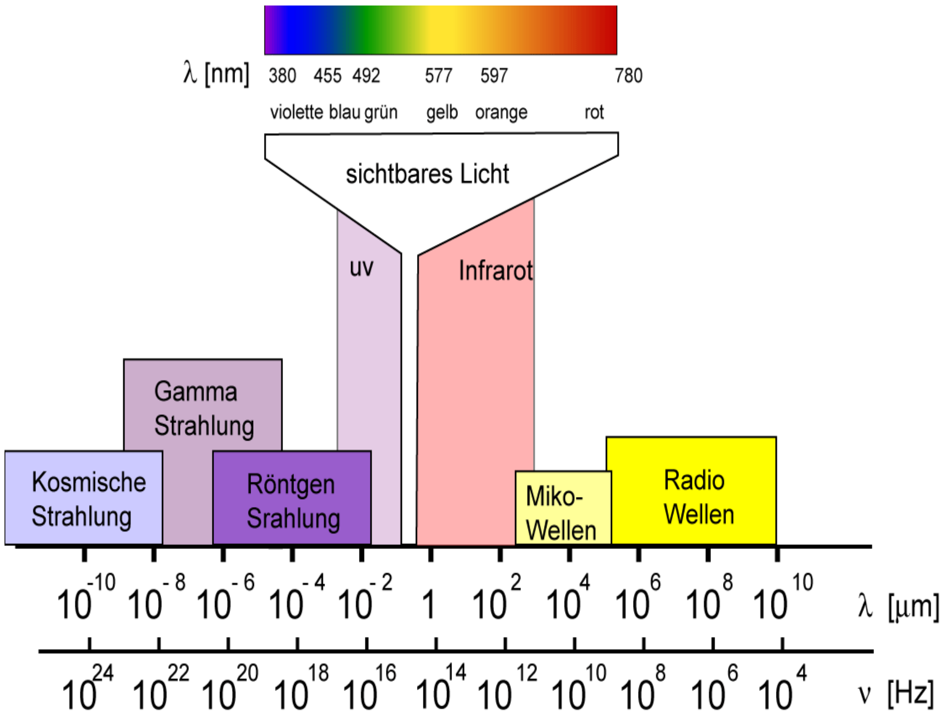


Abbildung 62: verschiedene elektromagnetische Wellen (elektromagnetisches Spektrum)

3.7.4. Spannung

Zu Beginn haben wir eine einzelne elektrische Ladung q in einem elektrischen Feld. Zum Verschieben dieser Ladung gegen das Feld, muss Arbeit W aufgewendet werden $(\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg})$. Diese Arbeit ist nun als potentielle elektrische Energie gespeichert, sie kann später wieder freigesetzt werden. Der Energiezuwachs der Ladung heißt Potentialdifferenz oder Spannung U.

Formel: $U = \frac{W}{q}$

(U ... Spannung, W ... Arbeit, q... Ladung)

Gemessen wird die Spannung in der Einheit Volt (V). Die Spannung zwischen zwei Polen der Steckdose beträgt 230 V, die Spannung zwischen zwei Polen einer Batterie kann z. B. 1,5 V betragen.

Beispiel: (BMBF, SA 7-1, S.6)

Die Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf (t in s) der Spannung U (in V) während eines physikalischen Experiments.
Ermitteln Sie die absolute und die relative Änderung der Spannung während der ersten 10 Sekunden des Experiments!

(1 P)

Absolute Änderung: __________ V

Relative Änderung: ___________ %

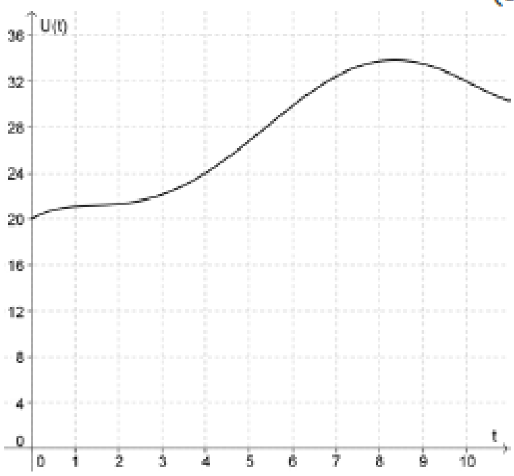


Abbildung 63: Beispiel, Spannung

Lösung:

absolute Änderung: 32 – 20 = 12 V

relative Änderung: $\frac{12}{20} = 0{,}6 \rightarrow 60\%$

3.7.5. Stromstärke

Alessandro Volta gelang im Jahr 1799 erstmals eine Ladungstrennung auf chemischem Weg. Daraus entwickelten sich im Laufe der Jahre die uns heute bekannten Batterien oder Akkus. Diese getrennten und gespeicherten Ladungen können durch einen Stromkreis fließen, nämlich vom Minuspol zum Pluspol. Die Anzahl der fließenden Elektronen pro Sekunden wird als Stromstärke bezeichnet, die Einheit ist das Ampere (A).

Formel: $I = \frac{Q}{t}$

(I ... Stromstärke, Q ... Ladungen, t ... Zeit)

3.7.6. Elektrischer Widerstand

Beim Anlegen einer Spannung an einem Stromkreis bewegen sich die Elektronen in Richtung Pluspol. Auf ihren Weg dort hin werden sie von schwingenden Atomen aufgrund der Temperatur des Drahtes gebremst. Vereinfacht gesagt entsteht dadurch der elektrische Widerstand. Die Einheit des elektrischen Widerstands ist das Ohm (Ω).

In einem geschlossenen Stromkreis gibt es einen Zusammenhang zwischen Spannung, Stromstärke und Widerstand, das Ohm´sche Gesetz:

Formel: $U = R \cdot I$

(U ... Spannung, R ... Widerstand, I ... Stromstärke)

Das Ohm´sche Gesetz gilt für die meistens Stromkreise in einem gewissen Temperaturbereich. Es ist jedoch kein universelles Naturgesetz, z. B. gilt es für Halbleiter nicht. Halbleiter sind Stoffe die den elektrischen Strom in Abhängigkeit von der Temperatur leiten oder nicht leiten.

Der Widerstand eines leitenden Materials ist von der Querschnittsfläche, der Länge und vom Material des Leiters abhängig. Dabei ist der spezifische Widerstand ρ eine Materialkonstante, es gilt:

Formel: $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$

(R ... Widerstand, ρ ... spezifische Widerstand, l ... Länge, A ... Fläche)

Beispiel (Bifie, PH 1, S. 104]

Der elektrische Widerstand R eines elektrischen Leiters der Länge l mit kreisförmiger Querschnittsfläche (Radius r) kann mithilfe der Formel $R = \rho \frac{l}{r^2\pi}$ berechnet werden. ρ ist dabei der spezifische Widerstand des Materials.

a) Wie ändert sich der elektrische Widerstand, wenn man die Länge des Leiters verdoppelt und die Querschnittsfläche gleich lässt?

b) Wie ändert sich der elektrische Widerstand, wenn man den Radius der Querschnittsfläche verdreifacht und die Länge gleich lässt?

c) Der Radius der Querschnittsfläche wird um 20 % vergrößert. Um wie viel Prozent ändert sich der Widerstand des Leiters?

Abbildung 64: Beispiel, spezifischer Widerstand

Lösung:

a)

verdoppelt

b)

neunmal so klein

c)

-30,56%

3.7.7. Zusammenfassung: Elektrizität

Einheit der Ladung: Coulomb (C)

Spannung — Energie pro Ladung: $U = \frac{W}{q}$

Einheit der Spannung: Volt (V)

Stromstärke — Ladungen pro Zeiteinheit: $I = \frac{Q}{t}$

Einheit der Stromstärke: Ampere (A)

Widerstand: spezielle Materialgröße

Einheit des Widerstands: Ohm (Ω)

Ohm´sches Gesetz: $U = R \cdot I$

4. Kompendium: Finanzmathematik

4.1. Teile eines Ganzen

In alltäglichen Situationen, z. B. beim Einkauf, werden wir sehr oft mit dem Begriff Prozent (%) konfrontiert. Das Ganze wird dabei mit 100 % = 1 bezeichnet. 1 % ist dann $\frac{1}{100}$ des Ganzen.

Genauso können wir das Ganze in 1000 oder auch in 1 Million Teile zerlegen. 1 Promille (1 ‰) ist $\frac{1}{1000}$ des Ganzen, 1 ppm (parts per million) ist $\frac{1}{1000000}$ des Ganzen.

Beispiel (BMBF, SA-5.1, Seite 3, Beispiel 6)

Der Kurs K einer Aktie ist im vorigen Monat um 15 % gestiegen und in diesem Monat um 20 % gefallen.
Beschreibe den aktuellen Kurs mit einem Term und berechne die Kursänderung! / 2 P

Abbildung 65: Beispiel, Aktienkurs

Lösung:

$K \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}8 = K \cdot 0{,}92$

Der Kurs der Aktie ist um 8 % gefallen.

Beispiel (Bifie, HT 2013/14, A1, Seite 17)

Prozente

Zahlenangaben in Prozent (%) machen Anteile unterschiedlicher Größen vergleichbar.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Peters monatliches Taschengeld wurde von € 80 auf € 100 erhöht. Somit bekommt er jetzt um 20 % mehr als vorher.	☐
Ein Preis ist im Laufe der letzten fünf Jahre um 10 % gestiegen. Das bedeutet in jedem Jahr eine Steigerung von 2 % gegenüber dem Vorjahr.	☐
Wenn die Inflationsrate in den letzten Monaten von 2 % auf 1,5 % gesunken ist, bedeutet das eine relative Abnahme der Inflationsrate um 25 %.	☐
Wenn ein Preis zunächst um 20 % gesenkt und kurze Zeit darauf wieder um 5 % erhöht wurde, dann ist er jetzt um 15 % niedriger als ursprünglich.	☐
Eine Zunahme um 200 % bedeutet eine Steigerung auf das Dreifache.	☐

Abbildung 66: Beispiel Prozente

Lösung:

1)

$$p = \frac{100}{80} = 1{,}25$$

Er bekommt um 25 % mehr als vorher.

2)

$1{,}02^5 \approx 1{,}104$

Eine jährliche Steigerung von 2 % würde eine gesamte Steigerung von etwa 10,4 % in den letzten fünf Jahren bedeuten.

3)

$$2 - 1{,}5 = 0{,}5 \rightarrow p = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$$

Die relative Abnahme der Inflationsrate beträgt tatsächlich 25 %.

4)

$$0{,}8 \cdot 1{,}05 = 0{,}84 \rightarrow 1 - 0{,}84 = 0{,}16$$

Der Preis ist jetzt um 16 % niedriger als ursprünglich.

5)

$$100\ \% + 200\ \% = 300\ \%$$

Die richtigen Lösungen lauten 3 und 5!

4.2. Zinseszinsrechnung

Am Beginn der Finanzmathematik steht die Zinsrechnung. Zinsen sind Leihgebühren für eine Kapitalüberlassung. Überlässt jemand einer Bank Geld, bekommt er dafür im einfachsten Fall einmal jährlich Zinsen. Dieser Zuwachs an Geld vermehrt nun das vorhandene Kapital. Im nächsten Jahr bekommt er für die Zinsen des ersten Jahres wieder Zinsen, die Zinseszinsen und so weiter.

Ausgangspunkt ist das Anfangskapital K_0, welches verzinst wird. Oft will man das Kapital nach n Jahren, das Endkapital K_n, berechnen.

Formel: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

(K_n ... Endkapital; K_0 ... Anfangskapital; i ... Zuwachs; $1+i$ ... Wachstumsfaktor; n ... Anzahl der Jahre)

Im Österreich müssen derzeit 25 % der Zinsen als Kapitalertragssteuer (KESt) an das Finanzamt abgeliefert werden. Es bleiben dementsprechend 75 % der Zinsen beim Sparer.

Formel: $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot 0{,}75)^n$

(K_n ... Endkapital; K_0 ... Anfangskapital; i ... Zuwachs; $1+i$ ... Wachstumsfaktor; n ... Anzahl der Jahre)

Beispiel

Ein Geldbetrag von 20000 € wird für zehn volle Kalenderjahre zu 2,4 % p.a. angelegt. Berechne das Guthaben K_{10} a) ohne KESt b) mit KESt.

Lösung:

a)

$K_{10} = 20000 \cdot (1 + 0{,}024)^{10} \approx 25353{,}01$ €

Das Guthaben beträgt nach zehn Jahren rund 25353 €.

b)

$K_{10} = 20000 \cdot (1 + 0{,}024 \cdot 0{,}75)^{10} \approx 23906{,}05$ €

Das Guthaben beträgt nach zehn Jahren rund 23906 €.

4.3. Kosten- und Preistheorie: Einleitung

Öfter als mit Zinsen ist jeder mit Kosten und Preisen konfrontiert, sei es beim Einkaufen oder beim Bezahlen einer Rechnung. Während der Konsument niedrige Preise anstrebt, strebt der Verkäufer hohe Preise an.

Die genaue Planbarkeit von Kosten und Preisen ist der Traum jeder Unternehmerin oder jedes Unternehmers. Dazu haben WirtschaftswissenschaftlerInnen mathematische Modelle entwickelt, mit deren Hilfe sich Kosten berechnen lassen.

Jedes Modell hat seine Stärken und Schwächen, idealisierte Annahmen müssen in der Praxis nicht immer zutreffen, zudem handeln Menschen sehr selten rational. Trotzdem bietet die Kosten- und Preistheorie für die Berechnung der Einnahmen und Ausgaben, mit gewissen Grenzen, ein sehr brauchbares Instrumentarium. Wirtschaftliche Begriffe müssen dazu zuerst in die Sprache der Mathematik übersetzt werden.

4.4. Kosten, Gewinn und Erlös

Schließt man heute einen Handyvertrag ab, so ist es üblich, dass eine gewisse Anzahl an Gesprächsminuten pro Monat inkludiert ist. Dieses Kontingent kann man ausnützen oder auch nicht, man zahlt immer die gleiche Grundgebühr, die sogenannten Fixkosten k_f.

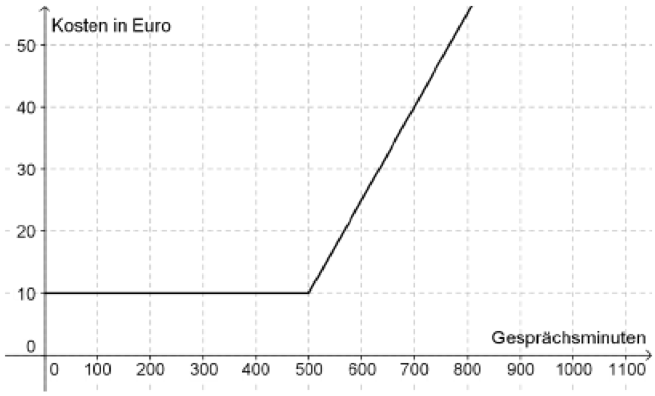
Zusätzliche Gesprächsminuten müssen extra bezahlt werden, wir sprechen von variablen Kosten k_v. Die variablen Kosten hängen von der Anzahl x der zusätzlichen Gesprächsminuten ab, wobei jede zusätzliche Minute k € kostet. Fixkosten und variable Kosten ergeben zusammen die Gesamtkosten K. Wir erhalten die lineare Kostenfunktion.

Formel: $K(x) = k \cdot x + k_f$ $(k > 0, k_f \geq 0)$

(K ... Gesamtkosten; k ... Kosten pro (zusätzlicher) Einheit; k_f ... Fixkosten)

Beispiel: (BMBF, SA 5-2, Seite 5)

3) Die Abbildung zeigt den Graphen eines Handytarifes A.



i) Bestimme die Anzahl der Gesprächsminuten, die in der Grundgebühr inkludiert sind! / 1 P

ii) Bestimme die Gesprächskosten pro Minute, wenn die Anzahl der „Freiminuten" überschritten wird! / 1 P

iii) Beim Tarif B eines anderen Anbieters sind für jede Gesprächsminute 4 Cent zu bezahlen. Zeichne den Graphen des Tarifes B in obiger Abbildung ein und gib in Intervallschreibweise an, wann Tarif A günstiger ist als Tarif B! / 2 P

Abbildung 67: Beispiel, Handytarif

Lösung:

i)

500 min (siehe Grafik)

Es sind 500 min inkludiert.

ii)

Die Gesprächskosten pro Minute entsprechen der Steigung k:

$$k = \frac{30}{200} = 0{,}15 \text{ €}$$

Die Gesprächskosten betragen 0,15 € pro Minute, nachdem die „Freiminuten" ausgeschöpft sind.

iii) $K(x) = k \cdot x + k_f$

$K(x) = 0{,}15 \cdot x + k_f$ (für $x > 500$)

Einsetzen des Punktes $P(700|40)$:

$40 = 0{,}15 \cdot 700 + d \rightarrow d = -65$

Tarif A: $y = 0{,}15 \cdot x - 65$ (für $x > 500$)

Tarif B: $K(x) = 0{,}04 \cdot x$

$10 = 0{,}04 \cdot x \rightarrow x_1 = 250$:

Der Graph von B geht durch den Punkt (250|10). Diesen Punkt enthält auch der Graph von A.

$0{,}04 \cdot x = 0{,}15 \cdot x - 65$

$65 = 0{,}11 \cdot x \rightarrow x_2 = 590,\overline{90}$

$K(x) = 0{,}04 \cdot 590,\overline{90} = 23,\overline{63}$

Schnittpunkte der beiden Funktionen $\rightarrow S_1(250|10);\ S_2(591|24)$

Im Intervall [250;~590] ist der Tarif A günstiger, sonst Tarif B.

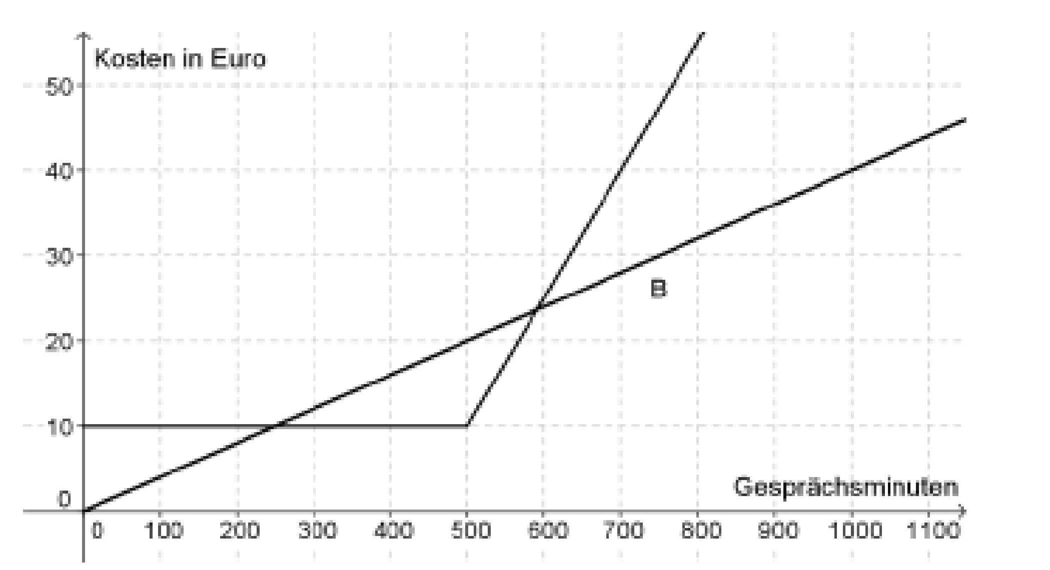


Abbildung 68: Tarifvergleich

Ein Betrieb stellt eine gewisse Menge x eines Produkts her. Bei vielen Praxisbeispielen ist die Funktion der entstehenden Kosten linear.

Formel: $K(x) = k \cdot x + k_f$ $(k > 0, k_f \geq 0)$

(K ... Gesamtkosten; k ... Kosten pro (zusätzlicher) Einheit; k_f ... Fixkosten)

Die Zahl k kann dabei als Änderungsrate interpretiert werden. Wird ein Stück mehr produziert, so steigen die Kosten um k Geldeinheiten. Die Fixkosten k_f geben die Kosten an, die bei der theoretischen Produktion von null Mengeneinheiten entstehen.

Als Erlös E bezeichnet man den Gegenwert der Produkte, also jene Geldmenge die man für den Verkauf dieser bekommt.

Formel: $E(x) = p \cdot x$

(E ... Erlös; p ... Stückpreis)

Zieht man vom Erlös die Kosten ab, so erhält man den Gewinn G.

Formel: $G = E - K$

(G ... Gewinn; E ... Erlös; K ... Kosten)

Aufgrund von Fixkosten wird sich erst ab einer gewissen Anzahl an verkauften Gütern (Stückzahl x) ein Geschäft lohnen. Der Übergang vom Verlust zum Gewinn wird Gewinnschwelle oder Break-Even-Point genannt. Der Gewinn beträgt dort null Geldeinheiten, Erlös und Kosten halten sich die Waage.

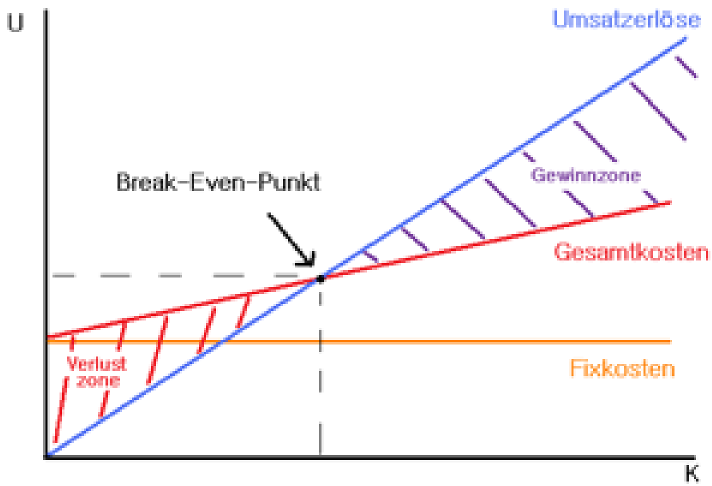


Abbildung 69: Break-Even-Point

Break-Even-Point: $G(x) = 0$

Beispiel: (BMBF, SA 5-2; S. 5)

2) Ein Betrieb produziert Leuchtstoffröhren. Dabei betragen die Fixkosten € 4 000 pro Monat und die variablen Kosten € 3 pro Röhre. Der Verkaufspreis einer Leuchtstoffröhre beträgt € 7,50.
   i) Formuliere die Gleichung der Funktion G des monatlichen Gewinns in Abhängigkeit von der Stückzahl x. / 2 P

   ii) Berechne, wie viele Leuchtstoffröhren der Betrieb pro Monat mindestens produzieren und verkaufen muss, damit er einen Gewinn erzielt! / 1 P

   iii) Führe eine konkrete Änderung an, die dazu führt, dass die Gewinnschwelle bei 800 Leuchtstoffröhren liegt! / 1 P

Abbildung 70: Beispiel, Leuchtstoffröhren

Lösung:

i)

$K(x) = k \cdot x + k_f \rightarrow K(x) = 3 \cdot x + 4000$

$K(x) = 3 \cdot x + 4000$

$E(x) = p \cdot x \rightarrow E(x) = 7{,}50 \cdot x$

$G = E - K = 7{,}50 \cdot x - (3 \cdot x + 4000)$

$G = 4{,}5 \cdot x - 4000$

ii)

$0 = 4{,}5 \cdot x - 4000 \rightarrow x \approx 888{,}9$

Der Betrieb muss mindestens 889 Stück produzieren und verkaufen, damit er einen Gewinn erzielt.

iii)

Zwei Möglichkeiten: Verkaufspreis auf 8 € erhöhen oder Fixkosten auf 3600 € senken.

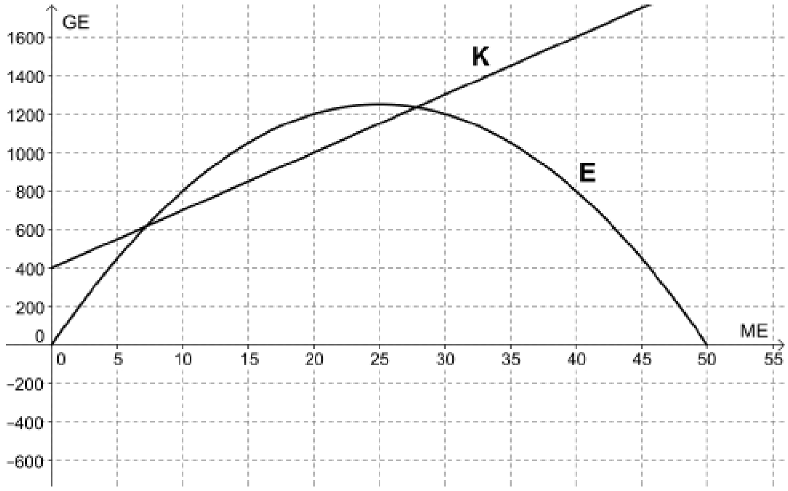
Für Kostenfunktionen sind auch quadratische und kubische Funktionen möglich.

> *„Die rechten Teile nach oben geöffneter Parabeln sind grundsätzlich auch als Kostenfunktion denkbar. Die variablen Stückkosten sind dann offenbar nicht mehr konstant, und das Bild der Parabeln legt schon nahe, dass solche Kostenfunktionen nicht ´gut´ für den Produzenten zu sein scheinen." (Röpcke, 2012, S. 31)*

Im folgenden Beispiel wird aufgrund einer betrieblichen Umstellung die lineare Kostenfunktion durch eine quadratische Kostenfunktion ersetzt.

Beispiel: (BMBF, SA-5.3, S. 5)

3) Die Abbildung zeigt die Graphen einer linearen Kostenfunktion K und einer quadratischen Erlösfunktion E für die Herstellung und den Verkauf eines Produktes P.



i) Ermittle anhand der Abbildung die variablen Kosten pro ME! / 2 P

ii) Skizziere in der Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion G und gib den Gewinnbereich an! / 2 P

iii) Gib an, wie hoch der Gewinn bzw. Verlust ist, wenn 20 ME produziert und verkauft werden! / 2 P

Gib an, wie hoch der Verkaufspreis pro ME bei 20 ME ist!

iv) Die Fixkosten steigen. Beschreibe, wie sich diese Änderung auf die Graphen von K und G auswirkt! / 2 P

v) Nach Umstellungen bei der Produktion können die Produktionskosten für x ME durch die Funktion K mit $K(x) = 2x^2 + 10x + 300$ beschrieben werden. Das Produkt wird nun zu einem Preis von 70 GE/ME verkauft. Der Betrieb strebt einen Gewinn von mindestens 200 GE an.
Ist das Ziel erreichbar?
Begründe deine Antwort mithilfe von Berechnungen! / 2 P

Abbildung 71: Beispiel, Kostenfunktion

Lösung:

i)

Die variablen Kosten entsprechen der Steigung k der Funktion K:

$$k = \frac{1000-400}{20} = 30 \text{ GE/ME}$$

Die variablen Kosten pro ME betragen 30 GE.

ii)

Ein Gewinn existiert dort, wo der Erlös größer als die Kosten ist.

Gewinnbereich: $[7; 28]$

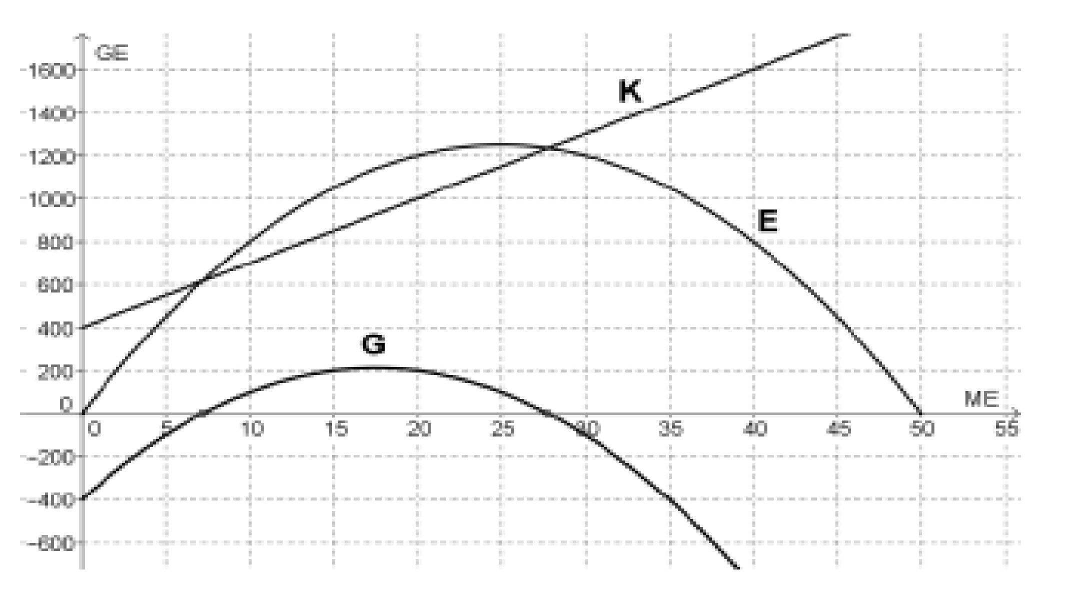


Abbildung 72: Lösung, Kostenfunktion

Zum Skizzieren der Gewinnfunktion wird an mehreren Stellen die Differenz zwischen Erlös und Kosten ermittelt und anschließend das Ergebnis im Graphen eingetragen.

iii)

Aus dem Graphen lesen wir folgende Werte ab:

$E(20) = 1200$; $K(20) = 1000$.

Der Erlös beträgt bei 20 Stück 1200 GE. Um den Preis pro Mengeneinheit zu bestimmen, dividieren wir 1200 GE durch 20 Stück: $1200 : 20 = 60$.

Beim Verkauf von 20 Stück beträgt der Verkaufspreis pro ME 60 GE.

Der Gewinn ist die Differenz der beiden Funktionswerte an der Stelle 20.

$G(20) = E(20) - K(20) = 200$

Der Gewinn bei 20 verkauften Stück beträgt 200 GE.

iv)

Der Graph von K wird parallel zur x-Achse nach oben verschoben. Die Kosten steigen und der Gewinn fällt um den gleichen Betrag. Somit wird der Graph von G parallel zur x-Achse nach unten verschoben.

v)

neue Kostenfunktion: $K(x) = 2x^2 + 10x + 300$

neue Erlösfunktion: $E(x) = 70 \cdot x$

neue Gewinnfunktion: $G = E - K \rightarrow G(x) = -2x^2 + 60x - 300$

Wie wir auch im Graphen sehen, fällt der Gewinn ab einer gewissen Produktionsmenge, und ein Gewinn von 200 GE kann nicht erreicht werden.

$-2x^2 + 60x - 300 = 200 \,|: (-2\,) \rightarrow x^2 - 30x + 250 = 0 \rightarrow$

Diskriminante $D = 225 - 250 = -25$

Die Diskriminante ist negativth, somit besitzt die Gleichung keine reelle Lösung und ein Gewinn von 200 GE kann somit nicht erreicht werden.

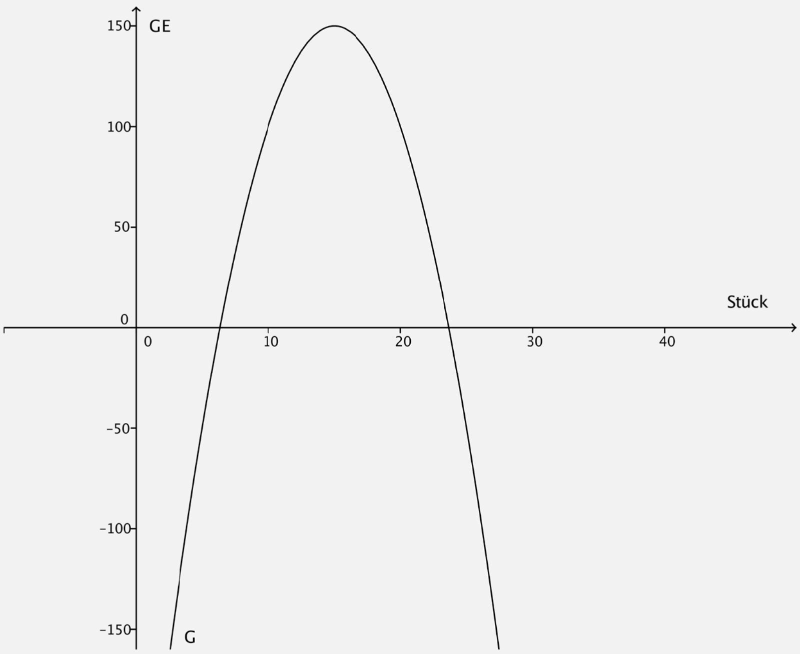


Abbildung 73: Lösung

4.5. Break-Even-Point, Gewinngrenze, Gewinnmaximum

Für eine Vertiefung der Kosten und Preistheorie werden wir die obige Gewinnfunktion $G(x) = -2x^2 + 60x - 300$ weiter untersuchen. Zuerst berechnen wir den Break-Even Point, also den kleineren Wert für den gilt:

Formel: $G(x) = 0$ und x ist minimal
(G ... Gewinnfunktion)

$-2x^2 + 60x - 300 = 0 \rightarrow x^2 - 30\text{x} + 150 = 0$

$x_{1,2} = 15 \mp \sqrt{75} \approx 15 \mp 8{,}66$

Der Wert $x_1 = 15 - 8{,}66 \approx 7$ wird auch Gewinnschwelle genannt.

Sinnvollerweise runden wir hier auf, da bei sechs Stück noch kein Gewinn vorhanden ist.

Der größere Wert $x_2 = 15 + 8{,}66 \approx 24$ wird als Gewinngrenze bezeichnet. Wieder ist sinnvoll, aufzurunden, das bei 23 Stück noch Gewinn vorhanden ist.

Formel: $G(x) = 0$ und x maximal
(G ... Gewinnfunktion)

Als Gewinnmaximum bezeichnet man die Menge, bei der der Gewinn maximal ist. Dieses Maximum berechnen wir mit Hilfe der Differentialrechnung, es gilt:

Formel: $G'(x) = 0$
(G ... Gewinnfunktion)

Für unser Beispiel gilt:
$G(x) = -2x^2 + 60x - 300 \rightarrow G'(x) = -4x + 60$
$0 = -4x + 60 \rightarrow x = 15$

Bei Produktion und Verkauf von 15 Stück wird der maximale Gewinn erzielt. Die zugehörige Menge (Gewinnmaximum) ist also einelementig

Zur Berechnung des genauen Gewinns gilt:

$G(15) = -2 \cdot 15^2 + 60 \cdot 15 - 300 = 150$ GE

Der maximale Gewinn beträgt also 150 Geldeinheiten.

Der maximale Gewinn kann auch über folgende Herleitung ermittelt werden.

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G'(x) = E'(x) - K'(x)$

Durch Nullsetzen der ersten Ableitung von G erhalten wir den maximalen Gewinn.

$G'(x) = 0 \rightarrow$ Dies ist gleichwertig mit:

$E'(x) - K'(x) = 0 \ \leftrightarrow E'(x) = K'(x)$

Formel: $G'(x) = 0 \leftrightarrow E'(x) = K'(x)$

An der Stelle x mit $E'(x) = K'(x)$ gilt, dass der Gewinn G maximal ist.

4.6. Kostenverläufe, Stückkostenfunktion

Oft will man wissen, wie viel durchschnittlich ein einzelnes Stück einer Ware in der Produktion kostet. Dazu dividiert man die gesamten Kosten durch die Anzahl der Stücke x und erhält damit die Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$.

Formel: $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$

($\overline{K}$ ... Stückkostenfunktion; K ... Kostenfunktion)

Mit steigender Stückzahl können die Stückkosten weniger oder mehr werden. Für eine (affin) lineare Kostenfunktion ist jedoch nur ein Fall möglich.

Während die lineare Kostenfunktion monoton steigend ist, ist die lineare Stückkostenfunktion monoton fallend, da sich bei steigender Stückzahl die Fixkosten auf immer mehr Stücke aufteilen. Dies ist ebenso aus der Stückkostenfunktion erkennbar: Je größer x desto kleiner ist $\overline{K}(x)$.

Aus $K(x) = k \cdot x + k_f$ folgt.

Formel: $\overline{K}(x) = k + \frac{k_f}{x}$

Diese Monotonie wollen wir grafisch an der Kostenfunktion $K(x) = 1 \cdot x + 5$ und der dazugehörigen Stückkostenfunktion $\overline{K}(x) = 1 + \frac{5}{x}$ zeigen.

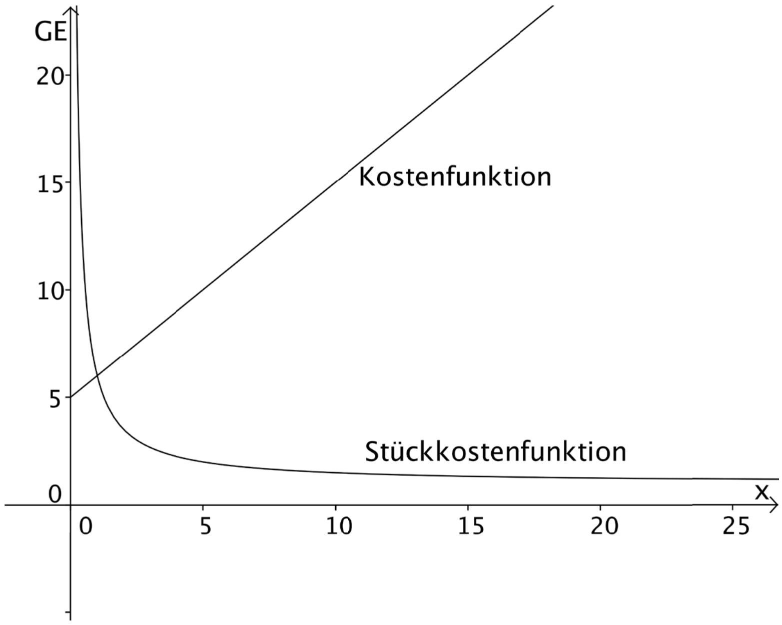


Abbildung 74: Die Stückkostenfunktion einer linearen Funktion

Für andere Kostenfunktionen reichen aber Monotonie und eine positive erste Ableitung als Information nicht aus. Oft ist auch entscheidend, wie die Kosten wachsen, wenn sie nicht linear wachsen.

Wichtig in diesem Zusammenhang ist der Begriff der Grenzkosten.

Die Grenzkosten sind die zusätzlichen Kosten die entstehen, wenn ein Stück mehr produziert wird.

Wir gehen von der Produktionsmenge x aus → $K(x)$

Steigerung der Produktionsmenge um 1 → $K(x+1)$

Kostenzuwachs: $K(x+1) - K(x)$

Formel: $GK = K(x+1) - K(x)$

(GK ... Grenzkosten, K ... Kostenfunktion)

Sehr oft sieht man folgende Definition in der Wirtschaft:
„Die erste Ableitung gibt die momentane Änderungsrate an, die Änderung der Kosten nach der Stückzahl → K´(x)" (Blanckenstein, 2012, S. 176)

Formel: $GK = K'(x)$

(GK ... Grenzkosten, K ... Kostenfunktion)

Ob diese Formel nun mit unserer Definition des Kostenzuwachs übereinstimmt, werden wir gleich überprüfen:

$$K'(x) \approx \frac{K(x+\Delta x) - K(x)}{\Delta x}$$

$\Delta x = 1 \rightarrow K'(x) \approx K(x+1) - K(x)$

Die Deutung der Grenzkosten durch $K'(x)$ stimmt zumindest näherungsweise.

Im folgenden Beispiel werden die Begriffe Stückkosten und Grenzkosten anhand einer kubischen Kostenfunktion besprochen.

Beispiel: (Bifie, HT 2013/14, A2, S. 11)

Grenzkosten

Unter den Gesamtkosten eines Betriebes versteht man alle Ausgaben (z. B. Löhne, Miete, Strom, Kosten für Rohstoffe usw.), die für die Produktion anfallen.
Mit mathematischen Mitteln können die Kostenverläufe beschrieben werden, die für Betriebe strategische Entscheidungshilfen sind.

Die Gleichung der Gesamtkostenfunktion K eines bestimmten Produkts lautet:

$K(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}09x^2 + 2{,}8x + 5$

x ... produzierte Stückanzahl

Aufgabenstellung:

a) Die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ beschreibt die Gesamtkosten pro Stück bei einer Produktionsmenge von x Stück.

$\boxed{\text{A}}$ Geben Sie eine Gleichung der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ für das oben beschriebene Produkt an! Berechnen Sie die Stückkosten bei einer Produktion von 100 Stück!

b) Der Wert der Grenzkostenfunktion K' an einer bestimmten Stelle x wird als Kostenzuwachs bei der Steigerung der Produktion um ein Stück interpretiert. Diese betriebswirtschaftliche Interpretation ist im Allgemeinen mathematisch nicht exakt.

Geben Sie das mathematisch korrekte Änderungsmaß an, das der angestrebten Interpretation entspricht!

Für welche Art von Kostenfunktionen ist die betriebswirtschaftliche Interpretation der Grenzkostenfunktion gleichzeitig auch mathematisch exakt? Geben Sie diesen Funktionstyp an!

Abbildung 75: Beispiel, Grenzkosten

Lösung:

a)

Zur Berechnung der Stückkostenfunktion wird die Kostenfunktion durch x dividiert:

$$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} \rightarrow \overline{K}(x) = \frac{0.001x^3 - 0{,}09x^2 + 2{,}8x + 5}{x}$$

$$\overline{K}(x) = 0{,}001x^2 - 0{,}09x + 2{,}8 + \frac{5}{x}$$

$$\overline{K}(100) = 3{,}85\ GE$$

Die Stückkosten bei 100 Stück betragen 3,85 GE.

b)

Korrekt wäre der Differenzenquotient $\frac{K(x+1)-K(x)}{1} = K(x+1) - K(x)$, die sogenannten Grenzkosten. Nur bei der linearen Kostenfunktion sind die Grenzkosten identisch mit den variablen Stückkosten.

Es folgen nun zwei weitere Kostenfunktionen mit unterschiedlichem Verhalten der Grenzkosten.

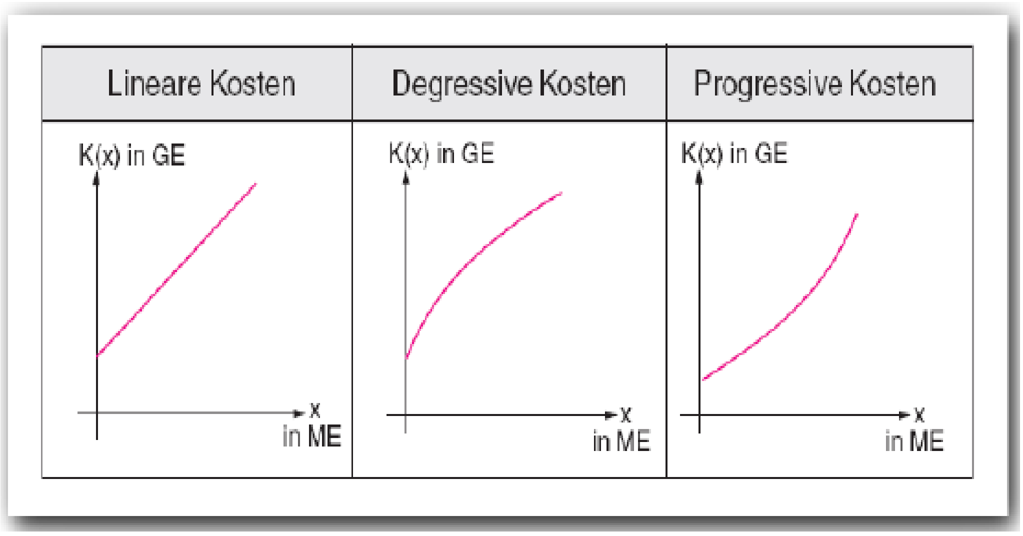


Abbildung 76: Kostenverläufe

Für den Produzenten positiv sind sogenannte degressive Kostenverläufe, da die Stückkosten dann mit steigender Stückzahl fallen. Eine degressive Kostenfunktion ist streng monoton steigend, die zweite Ableitung ist negativ. Die momentanen Änderungsraten, die Grenzkosten, werden kleiner.

Schlechter für den Produzenten sind progressive Kostenverläufe, da die dazugehörige Stückkostenfunktion monoton steigend ist. Eine progressive Kostenfunktion ist streng monoton steigend, die zweite Ableitung ist positiv. Die momentanen Änderungsraten, die Grenzkosten, werden größer.

Sehen wir uns noch einmal die kubische Kostenfunktion $K(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}09x^2 + 2{,}8x + 5$ grafisch an. Die Funktion K besitzt bei $x = 30$ einen Wendepunkt, die sogenannte Kostenkehre. Für $x < 30$ liegt degressives Wachstum vor, für $x > 30$ progressives Wachstum. In diesem Fall ist es also günstig nur bis $x = 30$ zu produzieren.

Kostenkehre: Wechsel des Kostenverlaufs von degressiv zu progressiv oder umgekehrt

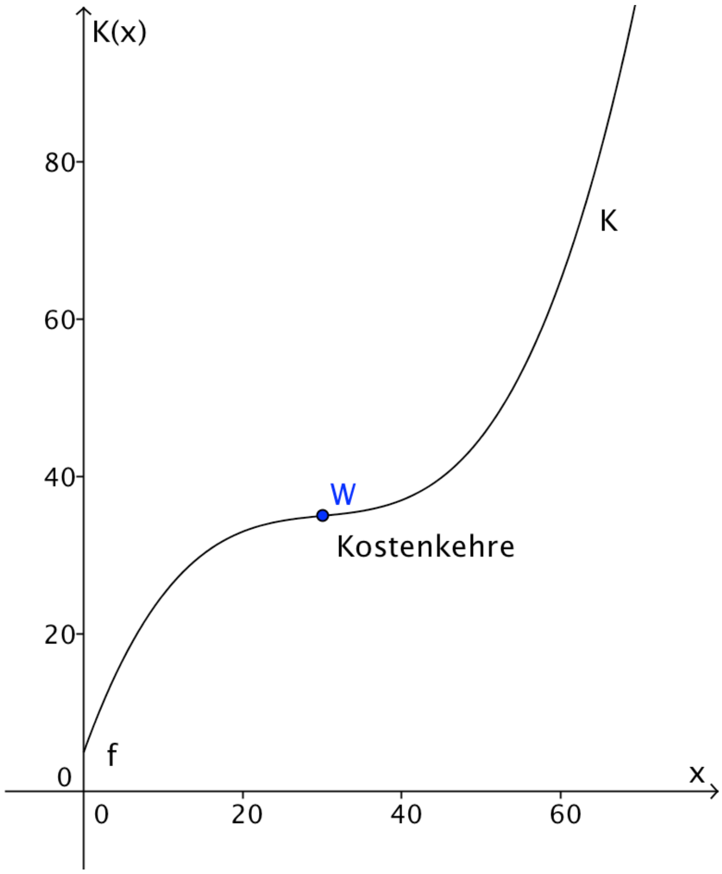


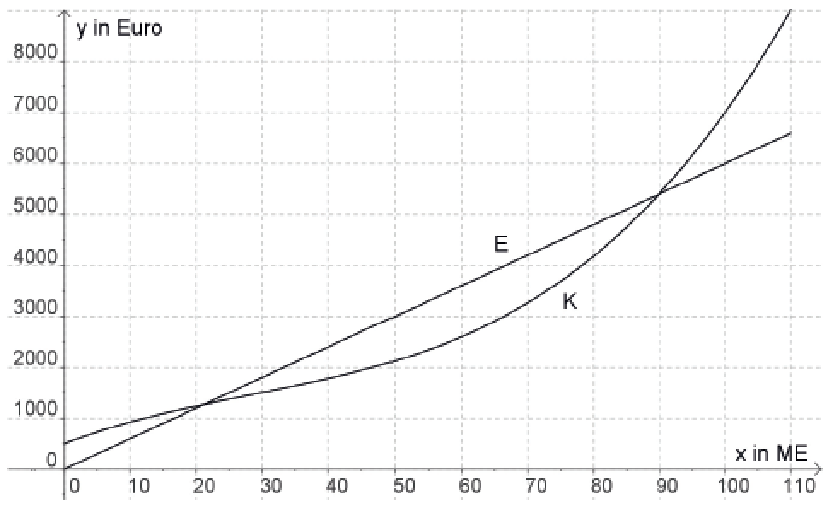
Abbildung 77: Die Kostenkehre

Beispiel (Bifie, EA, S. 3- 4)

Produktionskosten

Die Produktionskosten eines Betriebes setzen sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen und können durch eine Kostenfunktion beschrieben werden. Fixkosten fallen auf jeden Fall an und sind unabhängig von der produzierten Menge. Variable Kosten hingegen nehmen mit steigender Produktionsmenge zu.
Die Kostenkehre ist jene Produktionsmenge, ab der die variablen Kosten immer stärker steigen, in diesem Fall spricht man von einem progressiven Kostenverlauf. Vor der Kostenkehre ist der Kostenverlauf degressiv, das heißt, die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.
Der Verkaufserlös ist das Produkt aus der verkauften Stückzahl und dem Verkaufspreis pro Stück.

Die untenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E des Betriebes, wobei x die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag ist. 1 ME entspricht einer Verpackungseinheit von 100 Stück. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.
Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Produktionskosten.



Aufgabenstellung:

a)
Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich, das sind jene Stückzahlen (1 ME = 100 Stück), für die der Betrieb Gewinn erzielt!
Beschreiben Sie, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Verlauf des Graphen der Erlösfunktion E auswirkt und wie sich dadurch der Gewinnbereich verändert!

b)
Bestimmen Sie anhand der Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME möglichst genau!

c)
Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die in der Grafik abgebildeten Produktionskosten zu?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Bei degressivem Kostenverlauf gilt: $K'(x) < 0$.	☐
Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	☐
Bei der Kostenkehre gilt: $K'(x) = 0$.	☐
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	☐
Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.	☐

Erklären Sie ausführlich, was die 1. und die 2. Ableitung der Kostenfunktion an einer bestimmten Stelle über den Verlauf des Graphen von K an dieser Stelle aussagen!

d)
Deuten Sie die Beziehung $K'(x) = E'(x)$ geometrisch und ermitteln Sie anhand der nachstehenden Abbildung jene Produktionsmenge x_1, für die dies zutrifft!
Begründen Sie, warum der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am größten ist!

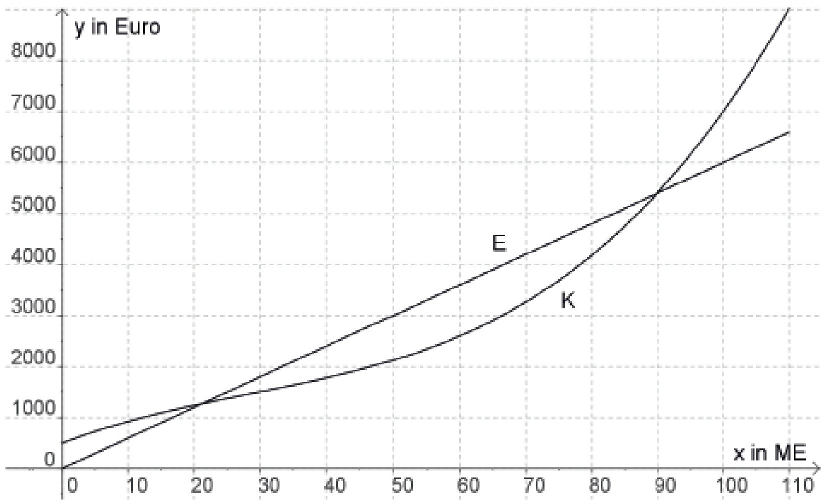


Abbildung 78: Beispiel, Produktionskosten

Lösung

a)

Der Gewinnbereich erstreckt sich von 21 ME bis 90 ME. Da eine ME gleich 100 Stück beträgt, folgt für den Gewinnbereich: [2100;9000]

„Bei einer Senkung des Verkaufspreises verläuft der Graph von E flacher, wodurch der Gewinnbereich kleiner (‚schmäler´) wird.” (Bifie, EA, S. 5)

b)

Die Fixkosten sind der Funktionswert von K an der Stelle null. Die Fixkosten betragen somit 500 €.

Der Verkaufspreis pro ME entspricht der Steigung p der Funktion E. Die Steigung wird anhand eines Steigungsdreiecks abgelesen.

$$p = \frac{3000}{50} = 60 \text{ €}$$

Der Verkaufspreis pro ME beträgt 60 €.

c)

Kommentar zu den Antwortmöglichkeiten

„Bei degressiven Kostenverlauf gilt: $K'(x) < 0$.” Sowohl degressive als auch progressive Kostenverläufe sind streng monoton steigend, somit gilt, dass die erste Ableitung positiv ist und es folgt $K'(x) > 0$. Die Antwort ist falsch.

„Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K'(x) > 0$.” Die zweite Ableitung gibt die Krümmung an. Ein progressiver Kostenverlauf ist positiv gekrümmt, somit ist die Antwort richtig.

„Bei der Kostenkehre gilt: $K'(x) = 0$. Die Antwort ist falsch, da sich in der Kostenkehre das Krümmungsverhalten ändert. Somit wäre richtig: $K''(x) = 0$.

„Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.” Die Antwort ist richtig, da die Funktion K streng monoton steigend ist.

„Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.” Die Antwort ist falsch, da die Steigung im Punkt $x = 50$ kleiner ist als im Punkt $x = 90$. Richtig wäre $K'(50) < K'(90)$.

d)

$K'(x) = E'(x)$ bedeutet, dass die beiden Graphen an dieser Stelle die gleiche Steigung besitzen. Dies ist an der Stelle $x = 63$ der Fall.

Es gilt:

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G'(x) = E'(x) - K'(x)$

Maximaler Gewinn: $G'(x) = 0 \rightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \rightarrow K'(x) = E'(x)$

Für den Produzenten bedeutet dies, dass mit $x = 63$ der maximale Gewinn erzielt wird.

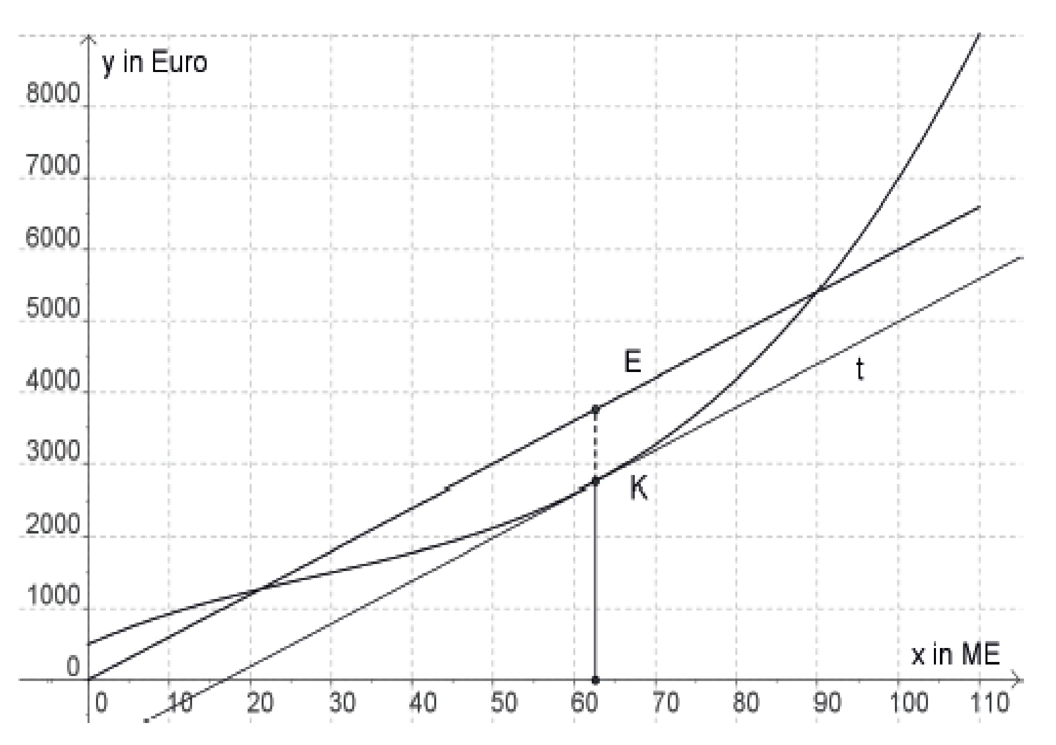


Abbildung 79: Lösung

Analog zu den Grenzkosten definiert man den Grenzerlös und den Grenzgewinn anhand der ersten Ableitung der jeweiligen Funktion. Dabei ist näherungsweise der Grenzerlös der Erlöszuwachs, und der Grenzgewinn ist der Gewinnzuwachs der sich aus dem Verkauf einer zusätzlichen Mengeneinheit ergibt.

Formel: Grenzerlös = $E'(x)$

Grenzgewinn= $G'(x)$

4.7. Zusammenfassung: Finanzmathematik

Prozentrechnung: $1\% = \frac{1}{100}$

Kapital nach n Jahren: $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$

lineare Kostenfunktion: $K(x) = k \cdot x + k_f$

Erlösfunktion: $E(x) = p \cdot x$

Gewinnfunktion: $G = E - K$

Break-Even-Point: $G = 0$; $E = K$

quadratische Gewinnfunktion: $G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Gewinnschwelle: $G(x) = 0 \rightarrow$ kleinere Lösung einer quadratischen Gewinnfunktion

Gewinngrenze: $G(x) = 0 \rightarrow$ größere Lösung einer quadratischen Gewinnfunktion

Gewinnbereich: Intervall zwischen den Nullstellen

Gewinnmaximum: $G'(x) = 0$ oder $E'(x) = K'(x)$

Stückkostenfunktion: $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$

Grenzkosten: $K(x+1) - K(x)$, näherungsweise $K'(x)$

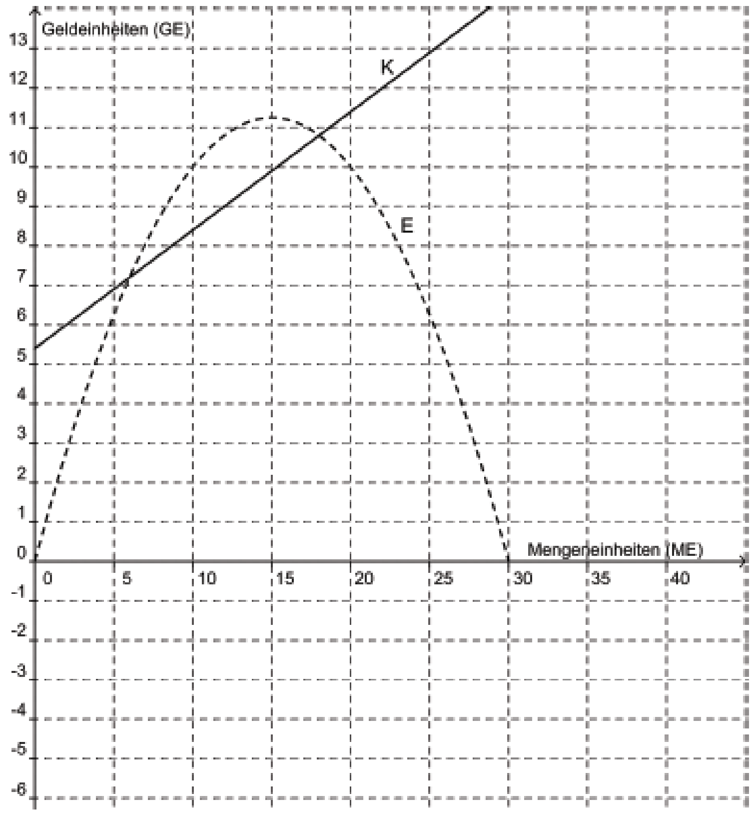
Beispiel (Bifie, AP, 2_009)

In einem Unternehmen werden die Entwicklungen der Kosten K und des Erlöses E in Geldeinheiten (GE) bei variabler Menge x in Mengeneinheiten (ME) beobachtet. Als Modellfunktionen werden die Erlösfunktion E mit $E(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x$ und eine Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$ angewendet. Alle produzierten Mengeneinheiten werden vom Unternehmen abgesetzt.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von E und K! Beschreiben Sie, welche Informationen die Koordinaten dieser Schnittpunkte für den Gewinn des Unternehmens liefern!

b) Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion G in die untenstehende Abbildung ein! Markieren Sie in der Abbildung den Gewinn im Erlösmaximum!



c) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn, wenn 13 Mengeneinheiten produziert und abgesetzt werden!

Bei der gegebenen Kostenfunktion K gibt der Wert 5,4 die Fixkosten an. Im Folgenden werden Aussagen getroffen, die ausschließlich die Änderung der Fixkosten in Betracht ziehen. Kreuzen Sie die für den gegebenen Sachverhalt zutreffende(n) Aussage(n) an!

Eine Senkung der Fixkosten bewirkt eine breitere Gewinnzone, d.h., der Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion wird größer.	☐
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf diejenige Stückzahl, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.	☐
Eine Erhöhung der Fixkosten steigert die Höhe des maximalen Gewinns.	☐
Eine Veränderung der Fixkosten hat keine Auswirkung auf die Höhe des maximalen Gewinns.	☐
Eine Senkung der Fixkosten führt zu einer Erhöhung des Gewinns.	☐

Abbildung 80: Beispiel, Unternehmen

Lösung:

a)

Durch Gleichsetzen der Funktionen erhalten wir die zwei Stückzahlen mit Gewinn Null.

$-0{,}05x^2 + 1{,}5x = 0{,}3x + 5{,}4 \rightarrow L = \{6{,}18\}$

$S_1 = (6|7{,}2);\ S_2 = (18|10{,}8)$

Im Intervall (6,18) wird Gewinn erzielt. Der Erlös ist höher als die Kosten.

b)

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}5x - (0{,}3x + 5{,}4)$

$G(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}2x - 5{,}4$

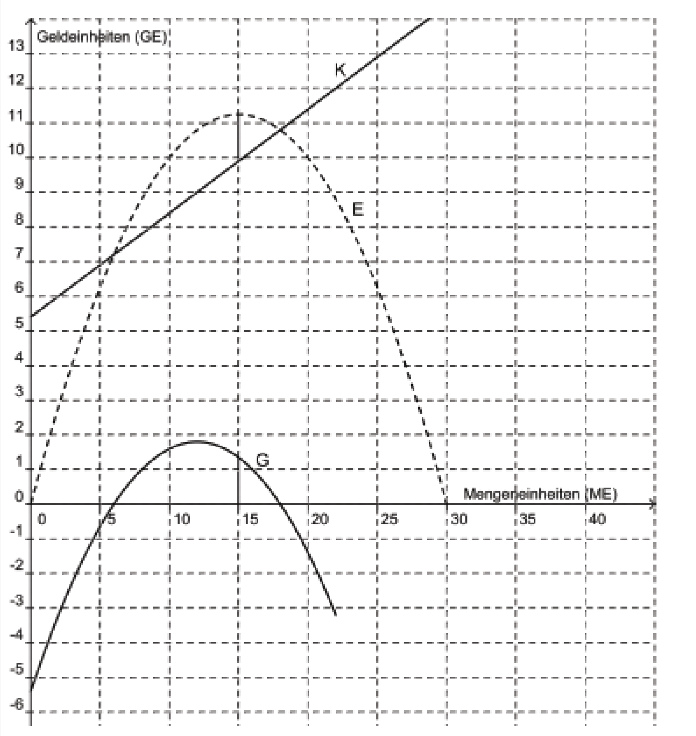


Abbildung 81: Lösung, Unternehmen

c)

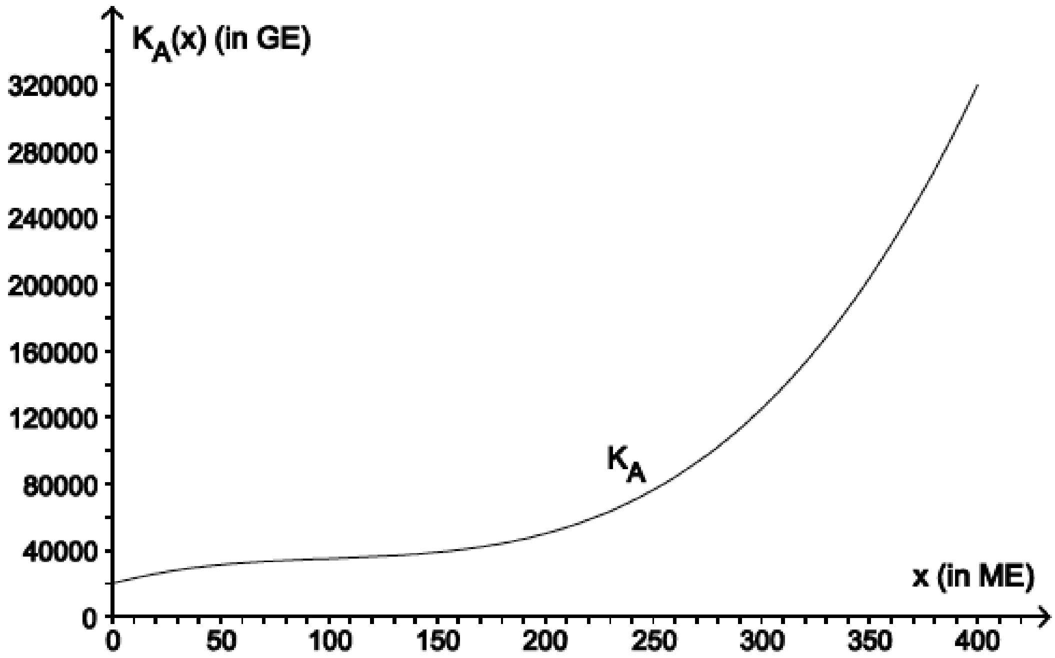
$G(13) = -0{,}05 \cdot 13^2 + 1{,}2 \cdot 13 - 5{,}4 = 1{,}75$ GE

Die richtigen Antworten sind 1, 2 und 5.

Beispiel (Bifie, AP, 2_012)

Im Zuge einer betriebswirtschaftlichen Analyse und Beratung werden bei zwei Firmen die Kostenverläufe in Abhängigkeit von der Produktionsmenge untersucht.

Bei Firma A wird der Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten [ME]) und den entstehenden Produktionskosten $K_A(x)$ (in Geldeinheiten [GE]) durch die Kostenfunktion K_A mit $K_A(x) = 0{,}01x^3 - 3x^2 + 350x + 20\,000$ beschrieben. Firma A kann monatlich maximal 400 ME produzieren. In der untenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K_A im Intervall [0; 400] dargestellt.



Bei Firma B wird der Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge x (in ME) und den entstehenden Produktionskosten $K_B(x)$ (in GE) durch die Kostenfunktion K_B mit $K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15\,000$ beschrieben. Firma B kann monatlich maximal 300 ME produzieren.

Aufgabenstellung:

a) Untersuchen Sie, ob der Kostenverlauf bei Firma B progressiv oder degressiv ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

Allgemein kann eine solche Kostenfunktion in Abhängigkeit von den produzierten Mengeneinheiten durch eine Polynomfunktion f zweiten Grades mit
$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) beschrieben werden.

Für welche Werte von a liegt im streng monoton wachsenden Bereich der Funktion ein progressiver bzw. ein degressiver Kostenverlauf vor? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Die erste Ableitung einer Kostenfunktion bezeichnet man als *Grenzkostenfunktion*. Diese beschreibt näherungsweise die Kostensteigerung, wenn der Produktionsumfang vergrößert wird. Berechnen Sie, um wie viel GE sich der Wert der Grenzkostenfunktion bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten bei Firma A unterscheidet, wenn der Produktionsumfang von 50 ME auf 51 ME erhöht wird!

Für die vorliegende Kostenfunktion gilt die Aussage: „Die Funktionswerte der Grenzkostenfunktion sind immer positiv." Interpretieren Sie diese Aussage im Hinblick auf den Verlauf!

c) Für die Festlegung des Produktionsplans ist es erforderlich, die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME in Abhängigkeit von der Produktionsmenge zu kennen. Die Stückkostenfunktion gibt den durchschnittlichen Preis pro erzeugter ME an.

Ermitteln Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}_B(x)$ bei Firma B!
Geben Sie an, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Stückkosten bei Firma B am kleinsten sind!

Abbildung 82: Beispiel, Kostenverläufe 2

Lösung:

a)

Wir bestimmen die Krümmung der Kurve. Ist die zweite Ableitung < 0 liegt degressives Wachstum vor, ist die zweite Ableitung > 0 liegt progressives Wachstum vor.

$K_B(x) = 0{,}5x^2 + 100x + 15000$

$K_B{}'(x) = x + 100$

$K_B{}''(x) = 1 > 0$

Das Wachstum ist progressiv.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

Wenn a>0 ist, ist der Graph der Kostenfunktion linksgekrümmt. Es liegt progressives Wachstum vor.

Wenn a<0 ist, ist der Graph der Kostenfunktion rechtsgekrümmt. Es liegt degressives Wachstum vor.

b)

$K_A(x) = 0{,}01x^3 - 3x^2 + 350x + 20000$

$K_A{'}(x) = 0{,}03x^2 - 6x + 350$

Der Zuwachs wird vom alten Wert x=50 ME berechnet.

$K_A{'}(50) = 0{,}03 \cdot 50^2 - 6 \cdot 50 + 350 = 125\ GE$

Der tatsächliche Zuwachs ist: $K_A(51) - K_A(50) = 123{,}51$ GE

$125 - 123{,}51 = 1{,}49$ GE

Der Unterschied beträgt 1,49 GE.

Die Kostenfunktion K_A ist im gegebenen Bereich streng monoton wachsend. Somit ist Ableitungsfunktion, die Grenzkostenfunktion im Intervall überall positiv.

c)

$\overline{K}_B(x) = \frac{K_B(x)}{x} = \frac{0{,}5x^2+100x+15000}{x}$

$\overline{K}_B(x) = 0{,}5x + 100 + \frac{15000}{x}$

$\overline{K}_B{'}(x) = 0{,}5 - \frac{15000}{x^2}$

$\overline{K}_B{''}(x) = \frac{30000}{x^3}$

Durch Nullsetzen erhalten wir das Minimum:

$0{,}5 - \frac{15000}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 30000 \rightarrow x \approx 173$

$\overline{K}_B{''}(173) = \frac{30000}{173^3} > 0 \rightarrow Minimum$

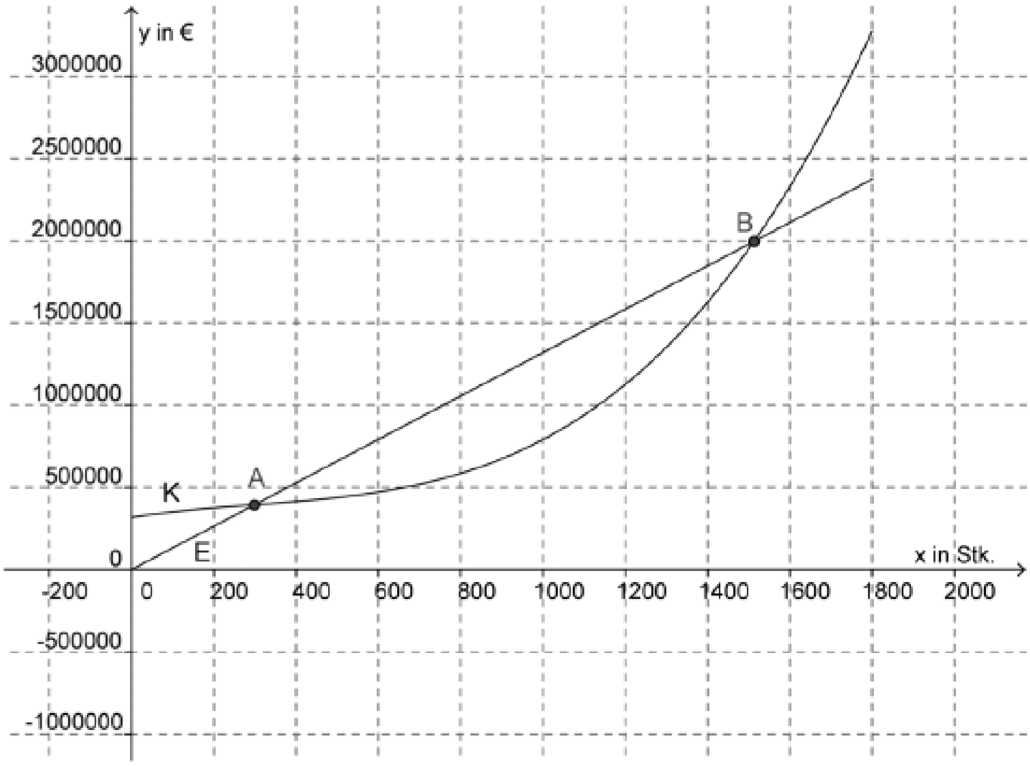
Bei ca. 173 Mengeneinheiten sind die Stückkosten am kleinsten.

Beispiel (Bifie, AP, 2_011)

Eine Digital-Spiegelreflexkamera wird zu einem Stückpreis von € 1.320 angeboten.

Ein Produktionsbetrieb kann monatlich maximal 1 800 Stück dieser Kamera produzieren. Es wird dabei angenommen, dass der Verkaufspreis unabhängig von der verkauften Stückzahl x konstant gehalten wird und alle produzierten Kameras auch verkauft werden. Die Funktion K mit $K(x) = 0{,}00077x^3 - 0{,}693x^2 + 396x + 317\,900$ beschreibt die Gesamtkosten K für die Produktion in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x.

Die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



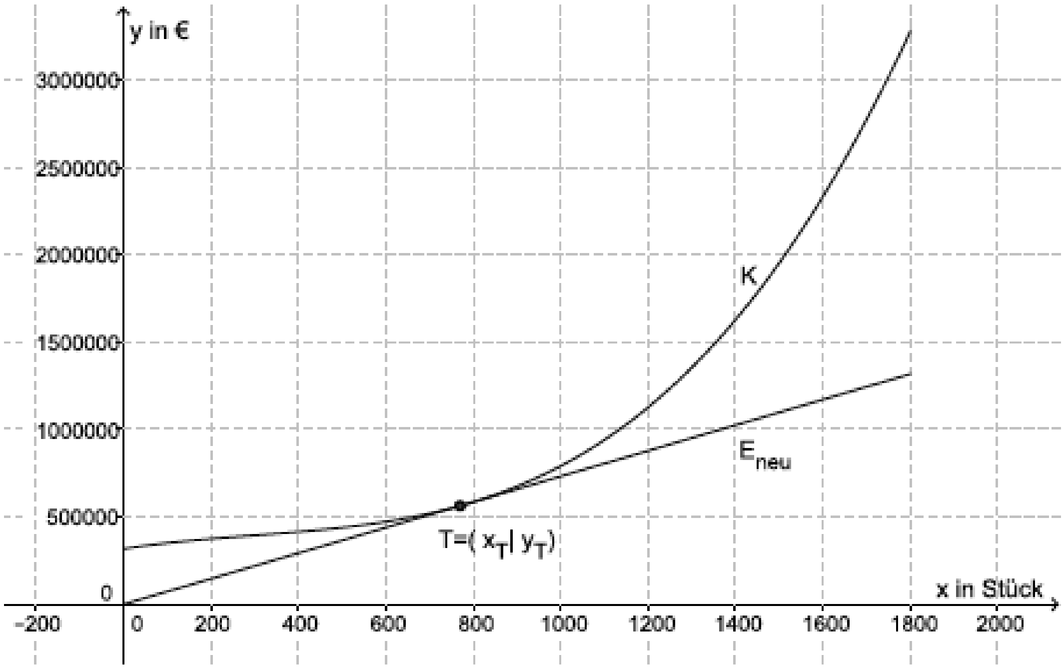
Aufgabenstellung:

a) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion *G* ein!

Eine Stückpreisänderung wurde vorgenommen und hat bewirkt, dass der Break-even-Point bei einer geringeren Stückzahl erreicht wird. Geben Sie an, wie der Stückpreis verändert wurde und welchen Einfluss diese Veränderung auf die Lage der Nullstellen der Gewinnfunktion *G* und den Gewinnbereich hat!

b) Erstellen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion *G*!
Berechnen Sie diejenige Stückzahl, bei der der Gewinn maximal wird!

c) In der nachstehenden Grafik wurde die Erlösfunktion so abgeändert, dass die Graphen der Kostenfunktion *K* und der Erlösfunktion E_{neu} einander im Punkt *T* berühren.
Bestimmen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E_{neu}!



Interpretieren Sie die Koordinaten des Punktes *T* im gegebenen Kontext und erklären Sie, welche Auswirkungen die Änderung der Erlösfunktion auf den Gewinnbereich hat!

Abbildung 83: Beispiel, Kamera

Lösung:

a)

Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Kosten.

Der Stückpreis wurde erhöht. Der Gewinnbereich wird größer.

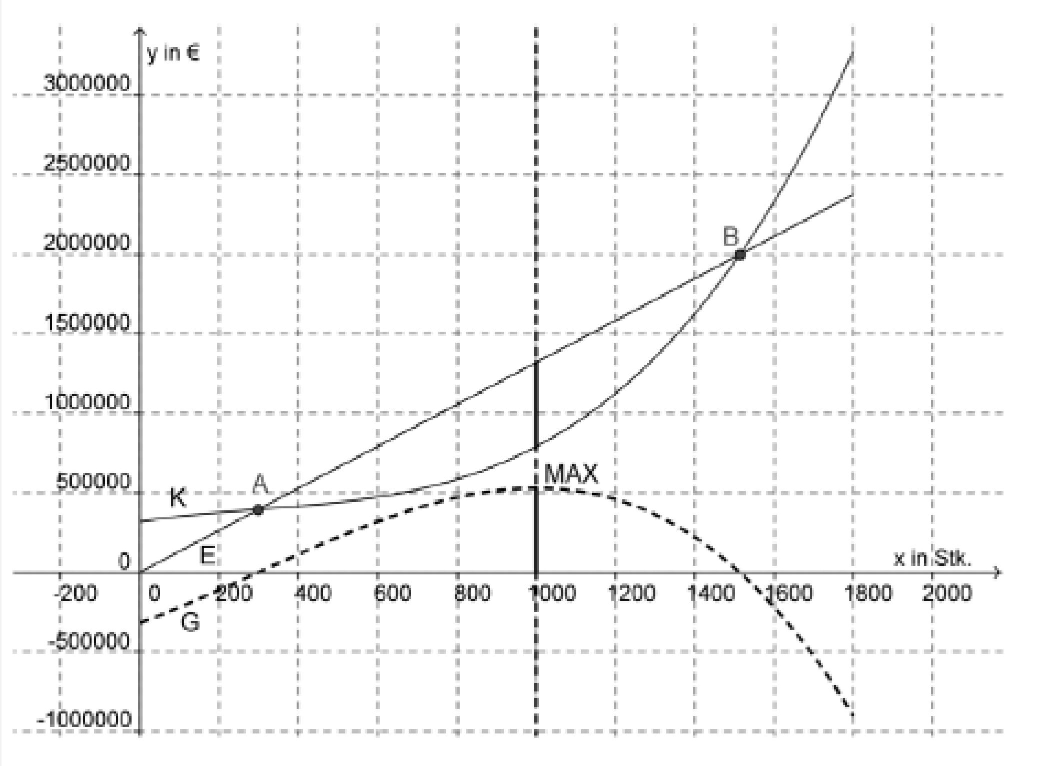


Abbildung 84: Lösung, Kamera

b)

$K(x) = 0{,}00077x^3 - 0{,}693 \cdot x^2 + 396x + 317900$

$E(x) = 1320 \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x) = 1320 \cdot x - (0{,}00077x^3 - 0{,}693 \cdot x^2 + 396x + 317900)$

$G(x) = -0{,}00077x^3 + 0{,}693 \cdot x^2 + 924x - 317900$

$G'(x) = -0{,}00231 \cdot x^2 + 1{,}386x + 924$

maximaler Gewinn: $G'(x) = 0 \rightarrow L = \{-400, 1000\}$

Der maximale Gewinn wird bei 1000 Stück erzielt.

c)

Die Erlösfunktion ist eine homogene lineare Funktion mit der Steigung $k = \frac{y_t}{x_t}$.

$E_{neu}(x) = \frac{y_t}{x_t} \cdot x$

„Nur bei der Produktionsmenge von x_T Stück wird genau kostendeckend produziert.
Kosten und Erlös betragen je € y_T.
Bei dieser Produktionsmenge ist es nicht möglich, mit Gewinn zu produzieren.” (Bifie, AP, 2_011)

Anhang A: Interviewmatrix

		Interview 1	Interview 2	Interview 3	Interview 4
Frage 1	Bekanntheit des Kontextkatlogs	x	x	x	x
Frage 2	Vereinheitlichung	x		x	x
	Vernetzung	x	x		
	Vorbereitung	x	x	x	x
Frage 3	Vorbereitung für Reifeprüfung	x			x
	Fächerübergreifendes Allgemeinwissen	x			
	zu großer Umfang		x	x	
Frage 4	Schwierigkeiten Finanzmathematik				
	Schwierigkeiten Physik			x	
	Finanzmathematik nicht mögen	x			
	vermehrter Arbeitsaufwand		x	x	
Frage 5	Unsicherheit Finanzmathematik			x	
	Unsicherheit Physik		x	x	
	fehlende Begriffe Finanzmathematik	x			x
	fehlende Begriffe Physik				
Frage 6	Informationsquelle Schulbücher	x	x	x	
	Selbstgekaufte Bücher	x	x		x
	Seminare	x			
	Bifie Homepage	x			x
	zu wenig Material	x			
	Kollegen		x		
	Internet		x	x	
	private Unterstützung				
Frage 7	gut				
	zu wenig	x			
	gar nicht		x	x	x
Frage 8	Fortbildungsseminare	x			
	Zusatzheft	x	x	x	x
	Musterbeispiele	x	x	x	x
	Basisinformationen	x	x	x	x
	vertiefende Informationen	x			
	für Schüler verwendbar		x		
	klarer Faden			x	
Frage 9	gute Idee	x	x	x	x

		Interview 5	Interview 6	Interview 7	Interview 8
Frage 1	Bekanntheit des Kontextkatlogs	x	x		x
Frage 2	Vereinheitlichung	x			
	Vernetzung		x	x	x
	Vorbereitung			x	
Frage 3	Vorbereitung für Reifeprüfung	x	x		
	Fächerübergreifendes Allgemeinwissen			x	x
	zu großer Umfang				
Frage 4	Schwierigkeiten Finanzmathematik			x	x
	Schwierigkeiten Physik			x	
	Finanzmathematik nicht mögen				
	vermehrter Arbeitsaufwand	x		x	x
Frage 5	Unsicherheit Finanzmathematik	x		x	
	Unsicherheit Physik	x		x	x
	fehlende Begriffe Finanzmathematik			x	
	fehlende Begriffe Physik			x	
Frage 6	Informationsquelle Schulbücher	x		x	x
	Selbstgekaufte Bücher				
	Seminare				
	Bifie Homepage				x
	zu wenig Material				x
	Kollegen	x	x		
	Internet	x	x		x
	private Unterstützung			x	
Frage 7	gut	x	x	x	x
	zu wenig				
	gar nicht				
Frage 8	Fortbildungsseminare	x		x	
	Zusatzheft	x	x	x	
	Musterbeispiele	x	x	x	x
	Basisinformationen	x	x	x	x
	vertiefende Informationen				
	für Schüler verwendbar	x	x		x
	klarer Faden		x		x
Frage 9	gute Idee	x	x	x	x

Anhang B: Die Interviews

Die Reihenfolge der Interviews ist nicht chronologisch. S steht für den Interviewer Stöckl.

Interview 1:

S: Ich stelle Ihnen einmal die erste Frage, sie können gerne mitlesen. Ist Ihnen der Begriff „Kontextkatalog" im Rahmen der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung bekannt?

Antwort: Ja, ist mi**r** grundsätzlich bekannt.

S: Dann kommen wir gleich zur zweiten Frage. Welche Absicht, glauben Sie, verfolgt das Bifie mit dem Kontextkatalog?

Antwort: Es sind Richtlinien und Erleichterungen für Lehrer zur Erstellung von Fragen. Man weiß dann, was aus welchen Themenbereichen vernetzt werden soll.

S: Es geht also auch um die Vereinheitlichung der Sprache, zumindest in naher Zukunft?

Antwort: Ja!

S: Ist Ihrer Meinung nach der Kontextkatalog im Sinn einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung gerechtfertigt oder nicht?

Antwort: Auf alle Fälle. Ich glaub es ist einfach das Wesen der neuen Reifeprüfung, das sie kompetenzorientiert ist, und die Kompetenzen sind eigentlich fächerunabhängig, denke ich.

S: Also es ist eindeutig gerechtfertigt?

Antwort: Ja!

S: Die vierte Frage werden wir jetzt einfach trennen. Bereiten Ihnen die Begriffe aus der Fachwelt der Physik und der Finanzmathematik Schwierigkeiten?

Antwort: Also in Physik habe ich keine Probleme. Finanzmathematik mag ich grundsätzlich nicht. Ich habe keine Schwierigkeiten, ich mag es einfach nicht.

S: Die Sprache?

Antwort: Die ganze Thematik interessiert mich nicht. Es gibt für mich wesentlich interessantere Themenbereiche. Das ist mir, sagen wir, zu weltlich.

S: Zu weltlich?

Antwort: Es ist eine etwas seltsame Formulierung aber…

S: Es ist also zu wenig philosophisch?

Antwort: Ja!

S: Als Physiklehrer haben Sie natürlich keine Problem mit Physikbegriffen!

Antwort: Nicht wirklich, nein!

S: Das verstehen sie dann natürlich. Dann werden wir eher mit den finanzmathematischen Beispielen weiter-machen. Frage fünf, fühlen Sie sich bei Physikbeispielen, bei Ihnen geht es hauptsächlich um finanzmathematische Beispiele, sicher, eher unsicher, überfordert oder ist das ganz unabhängig vom Thema?

Antwort: Physik, glaube ich, habe ich nicht wirklich Probleme, in Finanzmathematik könnte man mich sicher mit dem einen oder anderen Beispiel in gewisse Konflikte bringen. Wenn ich mich damit beschäftigen muss, ist es nicht wirklich ein Problem.

S: Ist klar! Geht es eher um die Sprache oder um Inhalte?

Antwort: Es geht um den Inhalt, für mich ist das eigentlich eine uninteressante Anwendung. Ich meine, wenn ich jetzt Folgen machen will, natürlich kann ich das bei den Verzinsungen machen. Wenn ich das dann mit Exponentialfunktionen oder einem anderen Modell mache, interessiert mich die Thematik auch nicht. Wenn ich dann im Vergleich den radioaktiven Zerfall nehme, oder irgendein geometrisches Beispiel, wo ich irgendwelche Figuren einschreibe, dann gibt das für mich eher was her, jetzt auch mathematisch.

S: Also Geschmackssache?

Antwort: Einfach Geschmacksache!

S: Genau, also lieber ein radioaktiver Zerfall, wie ein Geldzerfall! Frage 6, welche Informationsquellen nützen Sie um physikalische bzw. finanzmathematische Beispiele zu lösen?

Antwort: Wir haben natürlich die Schulbücher bzw. diverse Dinge die man sich selbst anschafft und natürlich auch Weiterbildung und Seminare.

S: Glauben Sie, dass die Schulbücher ausreichend sind für die neue Matura?

Antwort: Man könnte auf alle Fälle viel mehr machen in Mathematik, viel mehr!

S: In welche Richtung ?

Antwort: Ich habe relativ früh für die neue kompetenzorientierte Matura in Mathematik, weil ich für die Schule am Anfang dafür verantwortlich war, diese ganzen Seminare besucht. Dort hat man immer ein oder zwei exemplarische Beispiele über zwei drei Jahre vorgesetzt bekommen, es ist nie ein neues Beispiel dazugekommen. Das war einfach ziemlich frustrierend, während sich in anderen Bereichen, ich hab vorher von der Physik erzählt, viel getan hat. Ich meine, Big Bang ist sicher das Highlight, aber es gibt auch andere Verlage und Schulbuchautoren, die da aktiv sind. Oder nehmen wir die Arbeitsgemeinschaft in Physik, da ist einfach aus irgendwelchen Gründen mehr passiert.

S: Also gibt es noch zu wenige Beispiele oder sie sind zu wenig gebündelt?

Antwort: Viel zu wenig. In der Fachgruppe Mathematik in der Schule, wir sind doch einige Lehrer, haben wir es aufgeteilt, es muss jeder einmal bis Ende des jetzigen Schuljahres eine gewisse Anzahl Beispiele vorschlagen, die dann untereinander diskutiert werden. Im nächsten Jahr müssen sie da sein.

S: Auf die mündliche oder die schriftliche bezogen?

Antwort: Beides natürlich.

S: Es gibt schon ein Buch mit mündlichen Aufgaben, nur weiß ich jetzt nicht welcher Verlag das ist?

Antwort: Also beim mündlichen gibt es ein Beispiel mit Differentialgleichungen. Da war so ein Thema radioaktiver Zerfall, das war schön. Da gibt es auch ein physikalisches Beispiel, mit dem Wurf (Blättern im Buch), da ist es. Das ist ein Spezialfall aus dieser Sammlung. Das muss man sich als Lehrer jetzt alles selber zulegen. Oder das, das ist auch nach den verschiedenen neuen Standards.

S: Ja ich sehe es schon. Ich hab ja gesehen, die Bifie Homepage füllt sich auch schon so schön langsam, aber es ist so unübersichtlich. Das ist meine Meinung!

Antwort: Man schaut eh mal wieder automatisch nach, für ein Hauptfach hat sich da eigentlich wenig getan.

S: Das stimmt schon. Gehen wir zur nächsten Frage. Das ist wahrscheinlich in diesem Zusammenhang eine wichtige Frage. In welchem Ausmaß kooperieren Sie mit KollegInnen in Hinblick auf den Kontextkatalog? Sie haben schon gesagt, sie machen eine Aufteilung.

Antwort: Was leider auch zu wenig ist. Wir haben das beim Direktor immer wieder eingefordert. Wir haben ja zwei oder dreimal pädagogische Tage oder Nachmittage in der Schule, wo es um diverse aktuelle Probleme, auch Entwicklungsgeschichten geht. Im Rahmen eines pädagogischen Nachmittags wollten wir Zeit finden, dass sich jetzt die Fachgruppe zusammensetzt. Es ist immer extrem schwierig, sich mit den Kollegen einen ganzen Nachmittag zusammensetzen zu können. Sonst ist es immer schwierig, der eine hat Unterricht, der andere hat keinen Unterricht, da muss der Unterricht für den einen abgesagt werden, damit man einmal alle Leute zusammenkriegt. Das ist aber einfach dringend, im nächsten Jahr sollte alles stehen.

S: Also sie haben es dann nicht geschafft, sich ein oder zweimal zusammenzusetzen?

Antwort: Es hat dann schon wieder eine Stunde gegeben. Jetzt im zweiten Semester haben wir glaube ich drei Stunden gehabt, wo für Kollegen die Unterricht haben, die sechste Stunde abgesagt wurde, und wir uns zusammengesetzt haben und wo wir die Aufteilung der Themen gemacht und besprochen haben, wie ausgearbeitet wird. Wir machen es auf der moodle Plattform, ich weiß nicht, ob ihnen das was sagt?

S: Doch, doch!

Antwort: Wo wir als Lehrer das hineinstellen, wo wir kommunizieren können, und wo man auch die Ausarbeitung usw. dazu abgibt. Das hat es zwar gegeben, aber es ist einfach viel zu wenig. Man schiebt also das ganze ziemlich hinaus.

S: Das kenne ich. Wenn man da nicht erinnert wird, was man alles zu tun hat. Frage acht, das ist jetzt für mich eine sehr wichtige Frage. Das ist auch die Form die die Diplomarbeit oder ein Teil der Diplomarbeit haben soll. Welche Unterstützung würden Sie brauchen, um physikalische bzw. finanzmathematische Beispielen besser verstehen zu können?

Antwort: Fortbildungsseminare, also wenn es da ein entsprechendes Angebot gibt, das wäre absolut super. Es haben zwar einige der Kollegen bei uns die Kombination Physik und Mathematik, aber die Hälfte eben nicht, die haben sicher Interesse für physikalische Dinge. Selbst ich würde mir so etwas anschauen oder anhören, man kann immer dazulernen, vor allem wenn die Beispiele schon ein bisschen aufgearbeitet sind, wie man sie braucht.

S: Noch einmal anders formuliert: Sie als Physiker, finden sie das in Ordnung, wie das aufbereitet ist, die Physik in der Mathematik, oder ist es wieder doch nicht so, wie man es sich vorstellt?

Antwort: Im Großen und Ganzen ist es ok. Wir haben jetzt schon relativ viele Beispiele, so weit ich jetzt Einblick habe. Es gibt durchaus einen beachtlichen Prozentsatz, der jetzt in diesem Bereich angesiedelt ist, wo diese Verknüpfung da ist.

S: Eine Frage jetzt: Mir geht es jetzt einmal um eine schriftliche Ausarbeitung. Was könnten sie sich schriftlich vorstellen, wie sollte so ein Aufbau sein, dass sie, sagen wir, z. B. vielleicht ein bisschen mehr Freundschaft mit der Finanzmathematik schließen? Wie stellen sie sich das vor? Ein Lehrbuch, aber ich darf jetzt gar nicht zu viel sagen...

Antwort: Ja ein Lehrbuch ist sicher interessant, wenn man so was zustande bringt. Ich meine, das schnellste ist immer, wenn ein gutes Seminar ist, wobei natürlich jetzt eine schriftliche Arbeit oder Buch als Unterlage schon interessant wäre.

S: Wie sollte diese Unterlage ausschauen? Was haben sie da für Vorlieben?

Antwort: Mathematische Modelle aus den verschiedensten Bereichen: Ich würde jetzt nicht nur Physik oder Finanzmathematik nehmen, es gibt ja z. B. genügend biologische Themen.

S: Generelle Fächer würden jetzt aber meine Diplomarbeit sprengen! Und wie würden sie sich diese Aufbereitung der Gebiete vorstellen, das wäre jetzt ganz wichtig für mich. Mann kann ja ein Lehrbuch aufbauen.

Antwort: Wie ist die Frage genau jetzt gemeint?

S: Ich hab z. B. schon eine Kollegin gehabt, ich sag nur ein Beispiel, die hätte gern pro Begriff eine Seite, als Überblick ein Beispiel. Andere wollten es wieder ausführlich, andere wollten wieder selbst Beispiele zum Durchrechnen.

Antwort: Ich glaub, dass schon ein allgemeiner Teil mit einem durchgerechneten Beispiel da sein müsste. Es kann also nicht sein, dass ich nur ein kompetenzorientiertes Maturabeispiel habe und nicht mehr dazu. Man braucht also grundsätzliche Basisinformationen. Ich glaub einfach, man braucht ein bisschen mehr Information. Es gibt ja auch relativ komplexe Modelle zum Rechnen bei Verzinsung oder irgendwas.

S: Sie haben lieber mehr?

Antwort: Ich hab lieber Basisinformationen, die vielleicht auch über Dinge hinausgehen, die man auch wirklich anwenden und brauchen kann, und dann schon auch adäquat aufbereitete Beispiele, vom Umfang aber auch von der Kompetenzstruktur, wie man es dann verwenden könnte.

S: D. h. es müssten mal alle vorkommenden Begriffe erklärt werden, und dann ein bisschen drüber hinaus...

Antwort: Genau!

S: Sollte dieser Teil recht fachlich oder eher verständlich auf Schülerniveau sein?

Antwort: Ich zeig ihnen das jetzt kurz noch einmal (nimmt das Buch hervor). Mit dem kann ich was anfangen. Erstens, da habe ich natürlich genügend Informationen dazu, aber wenn es jetzt nur darum geht den Stoff an Beispielen zu bringen, ist das ausreichend. Nur wenn ich jetzt für diese Dinge nicht die Kompetenz hätte, und nur das vor mir sehen würde, und es was neues für mich wäre, dann könnte ich das zwar irgendwie verwenden, aber es wäre unbefriedigend.

S: Diese Infos wären zu wenig?

Antwort: Für dieses Beispiel ist es absolut ausreichend, da spielt aber natürlich mein ganzer Background auch mit, dass ich das ganze seit 40 Jahren mache.

S: Also es sollte durchaus alles sehr genau erklärt werden?

Antwort: Die Basisinformation wäre grundsätzlich einfach wichtig, weil man nicht bei jedem Thema die Voraussetzung hat, gleich kompetent oder gleich eingearbeitet zu sein. Aber für so ein konkretes Beispiel die Aufschlüsselung ist super. Ich weiß nicht ob das so befriedigend war als Information.

S: Ich kenn mich schon aus. Es gibt mehrere Interviews und dann ein Bild, und es ist so, dass man es jedem eh nicht recht machen kann, aber ich werde schauen möglichst viel Infos aus der Praxis herauszuziehen. Finden Sie es eine gute Idee, den Kontextkatalog der neuen Reifeprüfung in Mathematik wie geplant auf andere Fächer auszudehnen?

Antwort: Das kann ich auch noch unterstreichen, dies auch auf andere Fächer ausdehnen. Sonst wird das in ein Eck geschoben. Es sollen sich auch die anderen Fächer da wiederspiegeln, und Beispiele aus diesen Bereichen kommen.

S: Schüler sollten also durchaus ein Basiswissen aus anderen Fächern haben und dann auch umsetzen können?

Antwort: Natürlich!

S: Dann sage ich Danke fürs Interview!

Antwort: Gerne geschehen!

Interview 2:

S: Das Zweitfach ist bei dir?

Antwort: Darstellende Geometrie.

S: Erste Frage: Ist Ihnen der Begriff "Kontext-katalog" im Rahmen der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung bekannt?

Antwort: Ja

S: Ja eindeutig, zweite Frage: Welche Absicht, glauben Sie, verfolgt das Bifie mit dem Kontextkatalog?

Antwort: Der wird wahrscheinlich veröffentlicht, damit sich die Lehrer inhaltlich vorbereiten können, auf welche Art von Aufgabenstellung sie die Schüler vorbereiten müssen, nehme ich jetzt einmal an!

S: Also hauptsächlich als inhaltliche Vorbereitung...

Antwort: Ja zur inhaltlichen Vorbereitung: Was vorkommen kann an Begriffen oder in welchen Themenbereichen eben der Kontext der Angabe hineinreichen kann, so in der Art.

S: Dritte Frage: Ist Ihrer Meinung nach der Kontextkatalog im Sinn einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung gerechtfertigt oder nicht?

Antwort: Ich würde sagen, er ist zu umfangreich geworden. Er beinhaltet mittlerweile meiner Meinung nach Bereiche der HTL und der HAK. Die Physik würde ich eher der HTL zuordnen und diese wirtschaftsmathematischen Fragen der HAK. Das geht eigentlich weit über das hinaus, was wir bisher in einer AHS gemacht haben, das sind eigentlich Zusatzqualifikationen, die verlangt werden.

S: Vierte Frage ganz allgemein: Bereiten Ihnen die Begriffe aus der Fachwelt der Physik und der Finanzmathematik Schwierigkeiten?

Antwort: Schwierigkeiten ist zu viel, aber es erfordert vor allem Einarbeitungszeit, die man investieren muss. Ich glaub schon, dass ich in der Lage bin, mich in die Begriffe einzuarbeiten, aber es kostet natürlich sehr viel Zeit.

S: Ähnliche Frage, Frage 5: Fühlen Sie sich bei Physikbeispielen bzw. finanzmathematische Beispielen sicher, eher unsicher, überfordert?

Antwort: Also ich bin manchmal schon überfordert, nicht grundsätzlich, aber das passt auch zu dem, was ich oben gesagt habe. Es geht jetzt doch ein bisschen von dem Kernbereich der AHS, den wir bisher unterrichtet haben, hinaus. Was bisher eher Randthema war, rückt jetzt ein bisschen mehr ins Zentrum.

S: Zu viel?

Antwort: Es ist natürlich nicht schlecht, bei vielen Dingen findet man jetzt Anwendungsmöglichkeiten, natürlich durch Physik und Finanzmathematik, aber wann mache ich alles andere? Es ist schon schön, es fehlen einfach die Stunden, um eben über diese Grundkompetenzaufgaben hinaus zu gehen.

S: Also es ist ein Zeitproblem?

Antwort: Ja!

S: Sechstens: Welche Informationsquellen nützen Sie, um physikalische und finanzmathematische Beispiele zu lösen?

Antwort: Ich habe mir einmal eine ganze Serie HAK -Lehrbücher gekauft, eigentlich aus einem ganz anderem Grund, für Spezialgebiete bei der Matura, und die benutze ich jetzt dafür. Normale Schulbücher und Kollegen, die wichtigste Quelle von allen.

S: Also so, wie alle anderen auch?

Antwort: Ja! Internet würde ich noch manchmal sagen. Das hat durchaus sehr brauchbare Erklärungen, stelle ich fest.

S: Siebtens: In welchem Ausmaß kooperieren Sie mit KollegInnen in Hinblick auf den Kontextkatalog?

Antwort: Jetzt momentan?

S: Jetzt, oder wir können auch über die Zukunft reden.

Antwort: Null!

S: Null ist ehrlich!

Antwort: Momentan stellt sich das Problem nicht. Ich glaube je näher die Matura rückt, umso stärker stellt sich natürlich das Problem. Das ist zu weit weg, momentan, und ich glaube, das wird im Laufe der Zeit intensiver werden. Das kann ich mir schon vorstellen aber momentan...

S: Eine wichtige Frage für mich: Welche Unterstützung würden Sie brauchen, um physikalische bzw. finanzmathematische Beispiele besser verstehen zu können?

Antwort: Musterbeispiele!

S: Musterbeispiele, weil das ist das, was ich mehr oder weniger ausarbeite...

Antwort: Musterbeispiele sind ganz wichtig und einen Begriffskatalog.

S: Wie genau, recht physikalisch oder eher salopp erklärt?

Antwort: Schulbuchniveau würde ich eher sagen, eher anschaulich als fachlich. Natürlich ein bisschen auf ein Niveau gebracht, wo man einsteigen kann. Ich muss es auch an die Schüler weitergeben, also wenn ich es auf einem hochuniversitären Niveau erklärt bekomme, muss ich es ja selber runter formulieren. Das mache ich ja jetzt auch mit dem Stoff. Ich muss es ja immer vom Niveau runter formulieren, damit es dann die Schüler leicht verstehen können.

S: D. h. Das Niveau sollte so sein...

Antwort: Es muss fachlich korrekt sein, das ist schon klar, aber so, dass ich das gleich für Schüler verwenden kann. Das ist vielleicht der Punkt, der wichtig ist. Es bringt mir nichts, wenn ich das alles selber machen muss. Es sollte so sein, dass ich dann sagen kann, schauts Kinder, jetzt haben wir den und den physikalischen Begriff, so wird der erklärt. Nicht, dass ich nicht das Material, das ich zur Unterstützung habe, noch überarbeiten muss, was ja sehr häufig passiert.

S: Ja das ist für mich jetzt wichtig.

Antwort: Das erleichtert uns natürlich die Arbeit.

S: Also du willst einerseits eine möglichst leichte Begriffserklärung und dann viele Musterbeispiele.

Antwort: Was wir jetzt z. B. im Moodle-Kurs auch machen. Dass wir einfach sagen können, ok, z. B. Kraft: Dass ich einfach nachschauen kann, auch als Schüler, und ich mir das kurz einmal durchlese, und so halbwegs verstehe.

S: Verstehe!

Antwort: Das wäre wichtig.

S: Das hilft mir schon sehr, jetzt kommt dann die letzte Frage. Finden Sie es eine gute Idee, den

Kontextkatalog der neuen Reifeprüfung in Mathematik wie geplant auf andere Fächer auszudehnen? Es ist ja geplant, dies bis 2018 auch auf Geografie und und auszudehnen.

Antwort: Ja, das finde ich schon gut. Ich finde den Kontextkatalog generell sehr wichtig. Ich glaube, wenn ich mir den so durchlese, er ist nicht umfangreich genug. Ich bin immer erstaunt darüber, wie wenig darinnen steht.

S: Also im Gegenteil, man sollte noch alles viel genauer definieren?

Antwort: Hast du schon einmal geschaut, von der BHS gibt es jetzt einen Kontextkatalog, einen überarbeiteten, auf der Bifie Seite, auch einen Begriffskatalog.

S: Mit Erklärungen?

Antwort: Nein, aber wo eben steht, welche Begriffe z. B. in den Angaben zur Differentialrechnung verwendet werden. Weil es schon ein Unterschied ist, ob ich im Text x-Wert oder Argument oder sonst irgendwas verwende. Und gerade für unsere Schüler ist es wichtig: Müssen sie alle Begriffe kennen, können sie sich darauf verlassen, dass nur ein Begriff verwendet wird.

S: Auch die Unterscheidung zwischen Stelle und Punkt...

Antwort: Ja, es ist ja egal, wenn dann dort steht, alle drei Begriffe kommen vor, dann muss ich alle drei unterrichten, aber wenn z. B. dort steht, es wird nur mit x-Wert gearbeitet, und es steht nie Argument, dann brauch ich es eigentlich gar nicht unterrichten.

S: Also ein klarerer Katalog?

Antwort: Was momentan vor allem das Problem ist: Wir können uns nicht darauf verlassen, sie ändern ständig alles. D.h. irgendwann müssen sie das fixieren, denn wenn ich dann in der sechsten, siebten Klasse bin, kann ich nicht wieder sagen, hoppala, in der fünften Klasse hätten wir zu dem auch so sagen können.

S: Ja, kann man schon machen...

Antwort:Das ist dann nachträglich schwieriger. In der Phase in der ich es eintrainiere, kann ich natürlich mit den Begriffen variieren und dann festigt sich das auch.

S: Ja stimmt, verschiedene Bücher haben verschieden Zugänge.

Antwort: Ich bin ja eher ein Fan davon, dass die Begriffe variieren, dass man viele Begriffe verwendet. Wie du sagst, wenn sie verschiedene Quellen verwenden, verschiedene Bücher verwenden, steht der Begriff einmal so, und einmal so. An das müssen sie sich schon gewöhnen.

S: Das Bifie müsste einen genauen Katalog mit genauen Begriffen herausgeben?

Antwort: Und andere kommen auch nicht vor.

S: Also, dass die Fachsprache schon klar eingegrenzt ist.

Antwort: Du merkst es ja selber. Ich habe mir jetzt öfter mal Beispiele angeschaut, da kommt ein Begriff vor, den habe ich noch nie gehört. Wirtschaftsmathematik: Ich hätt schon gerne gewusst, auf was ich mich einstellen muss, das verlange ich von einem Kontextkatalog Mit dem Fachvokabular komme ich durch.

S: Danke für das Interview

Interview 3:

S: Erste Frage: Ist Ihnen der Begriff "Kontextkatalog" im Rahmen der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung bekannt?

Antwort: Ja, der ist mir bekannt.

S: Der ist bekannt, da kann ich erstens ja sagen. Zweitens: Welche Absicht, glauben Sie, verfolgt das Bifie mit dem Kontextkatalog?

Antwort: Eine Vereinheitlichung, der außermathematischen Aufgabengebiete!

S: Inwiefern Vereinheitlichung?

Antwort: Damit die Lehrer in etwa wissen, was auf sie zukommen kann, worauf sie die Schüler konkret vorbereiten sollen in Verbindung mit anderen naturwissenschaftlichen Fächern, sei es Physik oder eben wirtschaftlichen Fächern. Vereinheitlichung, dass die Lehrer einfach wissen worauf sie sich einlassen müssen, worauf sie vorbereiten sollen. Vorbereitung der Lehrer und Vereinheitlichung sind die zwei

S: Dritte Frage: Ist Ihrer Meinung nach der Kontextkatalog im Sinn einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung gerechtfertigt oder nicht?

Antwort: Wenn ich mir den Kontextkatalog so anschaue, einige Punkte sehr wohl. Zehnerpotenzen finde ich sehr ok. Mit den physikalischen Einheiten bin ich nicht ganz einverstanden. Dass man z. B. die Einheiten aus der Physik kennt ist klar. Aber die Beziehung, wie die zusammen wirken, die Formeln usw. und die Einheiten, muss ich ehrlich sagen, ist übertrieben. Das habe ich seit der Schulzeit nicht mehr so gehört, oder teilweise auch in der Schulzeit nie so serviert bekommen.

S: Vierte Frage: Bereiten Ihnen die Begriffe aus der Fachwelt der Physik und der Finanzmathematik Schwierigkeiten?

Antwort: Ja, nachdem ich physikalisch nicht sehr versiert bin, gibt es schon gewisse Begriffe, welche ich nachlesen müsste. Es geht eher um die Stromgeschichten Die Grundbegriffe Kraft, Energie, sind schon bekannt. Finanzmathematik finde ich wirklich ganz ok, welche Kontexte da verlangt werden, das finde ich auch sehr sinnvoll.

S: Fünftens: Fühlen Sie sich bei Physikbeispielen bzw. finanzmathematische Beispielen sicher, eher unsicher, überfordert? Im Großen und Ganzen jetzt einmal.

Antwort: Ja, ich kann sie lösen, meistens auch ohne Nachschlagen, aber so topfirn, dass ich jetzt sage „kann ich auf Anhieb", muss ich sagen, gelingt mir nicht immer, aber Überforderung nicht. Also das ist auch nicht immer gleich. Welche Informationsquellen nützen Sie um physikalische (finanzmathematische) Beispiele zu lösen?

Antwort: Informationsquellen: Sehr viel wird im Internet nachgeschlagen oder in Schulbüchern der gleichen Schulstufe von anderen Verlagen.

S: Auch BHS Bücher, HAK oder HTL Bücher?

Antwort: Muss ich ehrlich gestehen, das nicht.

S: Siebtens: In welchem Ausmaß kooperieren Sie mit KollegInnen in Hinblick auf den Kontextkatalog?

Antwort: In dem ich Kollegen Interviews darüber gebe.

S: Interviews, schreiben wir gleich auf. Sonst schon damit irgendwie beschäftigt?

Antwort: Nein, kommunizieren kann man schwer sagen. Wie er rausgekommen ist, haben wir schon darüber diskutiert, aber kooperieren oder irgendwelche Beispiele oder Hinweise austauschen, überhaupt nicht.

S: Das ist jetzt besonders wichtig für mich. Welche Unterstützung würden Sie brauchen, um physikalische bzw. finanzmathematische Beispielen besser verstehen zu können?

Antwort: Da meine physikalischen Fähigkeiten und mein physikalisches Wissen sehr eingeschlafen ist, und auch das Interesse dafür nie wirklich vorhanden war, müsste man eigentlich dort ansetzen, wie man mich für Physik begeistern kann, ich weiß aber nicht wie.

S: Begeisterung für Physik unter Anführungszeichen.

Antwort: Im Grunde weiß ich, wo man nachschlagen kann und ich kann mir es dann zusammen reimen. Das ist immer sehr zeitintensiv.

S: Wie könnte man es weniger zeitintensiv machen? Egal von wem, von mir, vom Bifie, von irgendjemanden?

Antwort: Hmm, es ist so, der Schrecken ist oft bei physikalischen Beispielen nicht die Rechnung dahinter, sondern die Begriffe, der Text. Man schreckt oft einfach zurück, obwohl das ganze oft auf einer ganz einfache Formel zurück zu führen ist, zum Rechnen ist es meist relativ einfach. Das ist der Text, das Verständnis für die Begriffe, das sitzt bei mir nicht unbedingt, da müsste ich sicher ansetzen. Finanzmathematik habe ich auch auf der Uni wenig bis gar nicht gemacht bzw. schulisch auch wenig. Das ist immer ein selber Aneignen, das aber mittlerweile im schulischen Bereich ziemlich gut sitzt. Da traue ich mich schon über die Beispiele drüber.

S: Gehen wir noch einmal zurück zur Physik. Wie könnte man sich das selber aneignen, was könnte helfen, Unterlagen oder was auch immer, gibt es da irgendeine Idee?

Antwort: Unterlagen? Ja es ist so, dass in Mathematikbüchern die Beispiele immer nur eingestreut sind und dass es vielleicht nicht so einen verbindlich aufbauenden Leitfaden gibt. Das war in früheren Mathematikbüchern schon drinnen, dass Physikbeispiele explizit ausgewiesen waren. Ich möchte nicht sagen, dass ich sie jetzt vermisse, aber ich finde es ganz in Ordnung, wenn die Beispiele eingebaut sind. Ich tue mich da recht schwer, dass ich da...

S: Aber einmal einen kompakten Überblick...

Antwort: Ja einfach ein kleines Beiheft über die physikalischen Grundbegriffe, das mein Wissen über die Physik wieder ein bisschen auf Touren kommt. Physik für Mathematiker wäre vielleicht auch einmal ganz nett. Obwohl ich nicht weiß, ob ich mich dann dazu melden würde.

S: D.h. ein Hefterl, ein kleines, nicht zu groß natürlich? Na gut dann habe ich noch eine Frage! Frage neun: Finden Sie es eine gute Idee, den Kontextkatalog der neuen Reifeprüfung in Mathematik wie geplant auf andere Fächer auszudehnen?

Antwort: Das ist mir jetzt neu, wie soll das ausgedehnt werden?

S: Das ist nur das, was in dem Hefterl vom Bifie steht, dass bis 2018 der Kontextkatalog auf andere Fächer wie Geografie, Chemie und so ausgedehnt wird.

Antwort: Ach so, dass man es nicht nur auf Finanzmathematik und Physik beschränkt, oder hat dann Geografie einen eigenen Kontextkatalog?

S: Dann hat die Mathematik auch geografische Begriffe, die man genauso kennen muss, ohne dass sie extra erklärt werden. Geografie war nur ein Beispiel, es geht um alle möglichen Fächer.

Antwort: Ist sicher zielführend, eben um einfach zu wissen, was erwartet wird, um da eine Verbindlichkeit zu schaffen, was die Schüler wirklich können. Es ist sicher gut, wenn das irgendwo festgeschrieben ist.

S: Diese Verbindlichkeit soll so verbindlich sein, dass dann auch nichts anderes kommt?

Antwort: Genau!

S: Es geht um die Verbindlichkeit! Danke für das Interview.

Interview 4

S: Ist Ihnen der Begriff “Kontextkatalog” im Rahmen der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung bekannt?

Antwort: Ja

S: Ein klares Ja. Welche Absicht, glauben Sie, verfolgt das Bifie mit dem Kontextkatalog?

Antwort: Na ja es geht darum, den Kontext in dem Aufgaben gestellt werden können bzw. dürfen, zu bezeichnen und einzuschränken. Damit man auch schon in der Vorbereitung entsprechend darauf eingehen kann.

S: Ist Ihrer Meinung nach der Kontextkatalog im Sinn einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung gerechtfertigt oder nicht?

Antwort: Ich halte den Kontextkatalog auf jeden Fall für gerechtfertigt. Inwieweit da ein Bezug auf eine fächerübergreifende Allgemeinbildung sein soll... Ich verstehe jetzt nicht, warum die Frage sich auf eine fächerübergreifende Allgemeinbildung bezieht? Ich denke der Kontextkatalog ist einfach wichtig, damit man sich besser auf die Prüfung vorbereiten kann.

S: Nicht im Sinne der Allgemeinbildung sondern als bessere Vorbereitung?

Antwort: Ja!

S: Damit es besser eingeschränkt ist?

Antwort: Ich empfinde es nicht als Einschränkung der Allgemeinbildung, wenn man jetzt den Kontextkatalog erstellt.

S: Bereiten Ihnen die Begriffe aus der Fachwelt der Physik und der Finanzmathematik Schwierigkeiten? Das Zweitfach ist Physik?

Antwort: Das Zweitfach ist Physik, also da auch weniger. Finanzmathematik, na ja, es kann schon vorkommen, dass es unbekannte Vokabeln gibt, aber ich denke, das lässt sich relativ rasch und problemlos aus dem Weg räumen.

S: Dann beziehe ich meine Fragen jetzt eher auf die finanzmathematischen Beispiele. Fühlen Sie sich bei finanzmathematischen Beispielen sicher, eher unsicher, überfordert?

Antwort: Grundsätzlich fühle ich mich schon als sicher. Dass manches Interessante Neuheit ist, das mag schon sein. Es ist ja nicht verboten, dass man dazulernt.

S: Aber nicht im negativen Sinn?

Antwort: Nein!

S: Welche Informationsquellen nützen Sie um finanzmathematische Beispiele zu lösen?

Antwort: Eventuell Beispielsammlungen, parallel zur Bifie Homepage, falls es so etwas gibt, oder Bücher meiner Tochter, die Wirtschaft studiert hat. Das kann ich mir auch vorstellen.

S: Aber sie haben es noch nicht verwendet oder noch nicht gebraucht?

Antwort: Na ja, bei Statistik habe ich das schon verwendet.

S: In welchem Ausmaß kooperieren Sie mit KollegInnen in Hinblick auf den Kontextkatalog?

Antwort: Noch gar nicht, aber ich denke schon, dass wir Beispiele austauschen würden.

S: Frage 8 ist für mich wichtig. Welche Unterstützung würden Sie brauchen, um finanzmathematische Beispiele besser verstehen zu können. Generell, welche Unterstützung könnten sie sich vorstellen? In diesem Fall geht es eher um eine schriftliche Form.

Antwort: Ja natürlich sind Übungsbeispiele am Besten geeignet, um Erfahrung zu sammeln, entweder aus Schulbüchern oder auch aus Bifie Beispielsammlungen. Ich denke, das wäre auf jeden Fall gut. Und dann eben auch die Zusammenarbeit mit Fachkollegen.

S: Sollen diese Beispiele durchgerechnet sein, oder nur mit Lösungen oder soll viel Theorie auch vorhanden sein?

Antwort: Es soll schon so aufbereitet sein, dass man es selber versteht und auch gut erklären kann. Wenn es ein neuer Bereich ist, ist auf jeden Fall ein durchgerechnetes Beispiel notwendig, sonst müsste man es zuerst von wo anders her mühsamer sammeln.

S: Also es soll so sein, dass es irgendwo kompakt in einem Ort gesammelt ist?

Antwort: Ja!

S: Frage 9: Finden Sie es eine gute Idee, den Kontextkatalog der neuen Reifeprüfung in Mathematik wie geplant auf andere Fächer auszudehnen? Es ist geplant, dass auch andere Kontexte definiert werden.

Antwort: Heißt das jetzt andere Kontexte für Mathematikbeispiele oder für andere Unterrichtsfächer?

S: Da geht es rein um Mathematik, also Kontexte, die die Schüler kennen. Kontexte kann es jetzt schon mehr geben, aber es geht um Kontexte, die nicht mehr extra erklärt werden bei der Matura. Wahrscheinlich werden sie dann eh erklärt werden, aber so ist zumindest die Idee dahinter, also z. B. Philosophie oder Geographie, ob es da jetzt Beispiele gibt, oder Geschichte, in diese Richtung.

Antwort: Einerseits halte ich es sicher für sinnvoll, wenn man möglichst das Spektrum, das im Fächerkanon abgebildet ist, in Mathematik als Kontextkatalog definiert. Und auf der anderen Seite wird es auch eine gewisse Notwendigkeit geben, da mit der Zeit sonst die Beispiele ausgehen werden.

S: Also eher ein Muss?

Antwort: Würde ich schon sagen. Es soll natürlich jedes Unterrichtsfach, das eine mathematische Grundlage enthält, auch im Kontextkatalog vorkommen dürfen.

S: Ich verstehe. Das Interview ist beendet, ich danke.

Interview 5

S: Ist Ihnen der Begriff "Kontextkatalog" im Rahmen der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung bekannt?

Antwort: Ja, ist mir bekannt, d. h. ich weiß, dass es eine Liste von außermathematischen Themen oder Begriffen oder Formeln geben soll, die als bekannt bei der Reifeprüfung vorausgesetzt werden. Soweit würde ich das definieren.

S: Ja genau so ist es. Also du hast es schon mal gehört, es kann ja sein, dass man es noch nie gehört hat.

Antwort: Ja

S: Welche Absicht, glauben Sie, verfolgt das Bifie mit dem Kontextkatalog?

Antwort: Dass es einen Kontext von Formeln gibt, der überall gleich ist, gleich geschrieben wird, gleich angegeben wird. Es gibt in vielen Lehrbüchern Formeln, die auf den ersten Blick ganz anders ausschauen und in Wirklichkeit dasselbe sind.

S: Ok sehr gut. Dritte Frage, oder wolltest du noch was sagen, ich will dich jetzt nicht unterbrechen.

Antwort: Nein

S: Dritte Frage Ist Ihrer Meinung nach der Kontextkatalog im Sinn einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung gerechtfertigt oder nicht?

Antwort: Im Sinne einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung meine ich nein, im Sinne der neuen standardisierten Reifeprüfung meine ich sehr wohl. Zu einer Allgemeinbildung würde es meiner Meinung nach auch gehören, Formeln oder Begriffe einfach so herausfinden zu können, auch wenn sie was anderes heißen. Verstehst du was ich meine?

S: Also auch wenn es nicht gegeben ist?

Antwort: Nicht, dass es gegeben ist, sondern das man auch bei verschiedenen Formeln - auch sagen wir Jessas Maria das kenne ich aber von irgendwo - draufkommt, aha das ist dasselbe. Das man es nicht unbedingt normiert, weil es gibt einfach Länder und Systeme in denen die Formeln auch anders ausschauen. Was weiß ich, keine Ahnung...

S: Differentialschreibweise zum Beispiel!

Antwort: Zum Beispiel, oder das Delta t, oder was auch immer dafür für andere Dinge, oder diese Leibnitz'sche Differentialschreibweise. Es gibt ja ganz viel, oder einen Vektor, Deutsch x haben wir zu meiner Zeit noch gelernt, anstelle des großen X, das wir jetzt schreiben. Wir haben das zu meiner Zeit mit Kurrent Buchstaben geschrieben, da hat das ganz anders ausgeschaut. Also es ist natürlich sinnvoll im Rahmen einer standardisierten Reifeprüfung, heißt ja standardisierte Reifeprüfung. Sonst wäre es durchaus spannend, den Leuten beizubringen, wo sie nachschauen können.

S: Du meinst es ist zu wenig, dass man ihnen nur Begriffe vorgibt.

Antwort: Ich meine für die Reifeprüfung ist es genau das Richtige. Da muss genau definiert sein, was wer meint. Ein Ziel von Allgemeinbildung wäre meiner Meinung nach auch, sie zu lehren, wo man nachschauen kann.

S: Das Ganze ist also ein bisschen zweischneidig. Viertens, bereiten Ihnen die Begriffe aus der Fachwelt der Physik und der Finanzmathematik Schwierigkeiten?

Antwort: Nein, sie bereiten mir keine Schwierigkeiten! Bei Physikbeispielen, sicher unsicher oder überfordert?

S: Genau, die fünfte Frage, es geht auch um finanzmathematische Beispiele.

Antwort: Ja, eher unsicher!

S: In Physik?

Antwort: Und auch bei Finanzmathematik!

S: Aber du kannst grundsätzlich damit rechnen!

Antwort: Ich weiß, dass ich es besser vorbereiten muss, als alles andere. Es erfordert für mich einen größeren Aufwand in der Vorbereitung.

S: Welche Informationsquellen nützen Sie um physikalische bzw. finanzmathematische Beispiele zu lösen?

Antwort: Also bei Finanzmathematischen Beispielen gehe ich über das, was im Lehrbuch steht, nicht hinaus. Bei den physikalischen Beispielen frage ich meine Kollegen.

S: Aber sonst keine extra riesigen Anschaffungen, Bücher?

Antwort: Keine Bücher, keine riesigen Anschaffungen, natürlich das Internet und die Wikipedia, wenn irgendwie eine schnelle Information gefragt ist.

S: Das führt dann zu Frage 7: In welchem Ausmaß kooperieren Sie mit Kolleginnen und Kollegen in Hinblick auf den Kontextkatalog?

Antwort: Ich frage sie, oder ich halte Rücksprache und es hat schon interessante Aspekte gegeben.

S: Zu diesen Kontexten?

Antwort: Zu verschiedenen Anwendungen von chemischen Formeln, physikalischen Formeln und mathematischen Formeln, wo oft die Kinder gesagt haben, das schaut jetzt ganz anders aus, und es hat sich herausgestellt, es ist dasselbe nur anders geschrieben.

S: Was jetzt mir wichtig ist, ist Frage 8...

Antwort: Entschuldigung, aber ich kriege den Kontextkatalog eh vorgesetzt vom Bifie! Ich kann ihn also nicht verändern, ich kann nicht sagen, mir wäre die andere Schreibweise lieber, ich muss eh das nehmen, was kommt.

S: Er ist festgelegt.

Antwort: In welchem Ausmaß kooperieren sie mit Kolleginnen und Kollegen: Das ist gut und schön, Kooperation ist gut und schön, aber schlussendlich, muss ich das nehmen was mir vorgegeben wird, aus.

S: Schon, aber mit kooperieren meine ich, auch Rücksprache halten.

Antwort: Nur wenn ich mich nicht auskenne, frage ich natürlich.

S: Genau das meine ich. Frage 8 ist wichtig: Welche Unterstützung würden Sie brauchen, um physikalische bzw. finanzmathematische Beispielen besser verstehen zu können? Das würde ich dann entwickeln. Ideen dafür sind immer gut. Könntest du etwa sagen, da habe ich etwas, und das ist super und das kann ich verwenden, oder ich würde des brauchen oder das.

Antwort: Die physikalischen Aufgaben sind einfach so breit gestreut, da kann ich jetzt schlecht sagen, was ich brauchen würde. Aber bei den finanzmathematischen Aufgaben, da würde ich z. B. irgendeine Lehrerfortbildung besuchen. Ein Skriptum würde ich benützen, aber ich arbeite mit dem Mathematik verstehen, und da steht eh einiges gut drinnen. Aus dem Lehrbuch kann ich schon selbst, aber irgendeinen Zusatzband wie z. B. dieses Maturtraining Mathematik oder so ein schmales Hefterl Finanzmathematik, das wäre vielleicht nett.

S: Für Physik glaubst du, ist es zu breit gestreut, auch als Zusatzhefterl?

Antwort: Ein Zusatzhefterl für Physik wird es nicht geben können.

S: Warum?

Antwort: Ich glaube nicht, dass alles was ich aus der Physik nicht weiß, auf 15 Seiten Platz haben wird. Also wenn jemand das schreiben würde, dann wäre ein Zusatzhefterl Physik toll. Aber kompakt, was weiß ich, auf 20 Seiten wird das nicht gehen, dazu glaube ich, ist die Physik ein zu breites Gebiet.

S: Mal schauen, was ich schaffe. Gehen wir zu den Zusatzhefterl, wie sollten die aufgebaut sein?

Antwort: Eine Einführung in das Kapitel, eine Teilung, Unterteilung in handliche Kapitel. Eine Einführung, eine durchgerechnete Aufgabe, zwei weitere Aufgaben, die einen anderen Aspekt betrachten und im Lösungsheft durchgerechnet sind, und jeweils zwei weitere Aufgaben, zu einem dieser Aspekte, die man dann wirklich ganz allein lösen soll. Und ein Lösungsheft soll es natürlich, wie man sieht, auch geben.

S: Also zuerst eine kurze Einführung?

Antwort: Kurze Einführung, durchgerechnete Aufgabe, was will ich überhaupt, wozu ist es gut, wie wende ich das an. Finanzmathematisch jetzt z. B., was ist eine Kostenfunktion, was ist eine Gewinnfunktion, was ist eine Gewinnerwartung, also eine kurze Begriffsklärung.

S: Aber wirklich nur kurz?

Antwort: Kurz, und dann wie schaut so eine Kostenfunktion aus. Ich weiß nicht ob, es jetzt um eine Kostenfunktion geht?

S: Es geht um alles, aber nehmen wir Kostenfunktion als Beispiel.

Antwort: Also, wie kann so ein Kostenfunktionsbeispiel ausschauen. Was davon sind Grundkompetenzen, was erwartet der Autor, was muss jeder Schüler wissen.

S: Also das Hefterl sollte in einem Format sein, damit man es gleich verwenden kann.

Antwort: Ja, ganz wichtig.

S: Das ist jetzt schon öfters vorgekommen! Es muss nicht zu hochtrabend sein?

Antwort: Nein, so wirklich ab urbe condita, so wirklich von Beginn an angefangen, so dass ich mir das mehr oder weniger aneignen kann, was ich noch nicht weiß.

S: Und gleichzeitig etwas, das man auch als Vorbereitung verwenden kann.

Antwort: Genau.

S: Irgendwie wollen das alle, das ist auch verständlich.

Antwort: Ja, und was ich gerne hätte, wären zwei so halbfertige Aufgaben, da hätte ich gerne die Durchrechnung erst im Lösungsheft. Das finde ich immer hilfreich.

S: Aber schon eine Durchrechnung? Dass du nicht gleich schummeln kannst.

Antwort: Also wirklich ein Lern- und Lehrbuch. Es gibt Lehrbücher und es gibt Lernbücher, und ich hätte gern eine Kombination aus beiden.

S: Das klingt aber schön, ein Lern- und Lehrbuch, gefällt mir gut. Sehr gut, das hat mir jetzt schon geholfen.

Antwort: Ja und ich finde es auch eine gute Idee, den Kontextkatalog, wie geplant, auf andere Fächer auszudehnen. Das finde ich irgendwann auch gut.

S: Irgendwann wird man auch wieder das gleiche brauchen. Wenn man z. B. keine Ahnung von Geografie hat, müssen die Begriffe erklärt werden.

Antwort: Ja, weil ich es nicht fair den Schülern gegenüber finde, wenn die Lehrer nicht wissen, was gefragt wird, wenn es schon standardisiert sein soll. Solange ich die Aufgaben gegeben habe, habe ich gewusst, was ich gemacht habe und habe die Schüler nach meinen Kontext gefragt.

S: Ja ist klar, was im Rahmen des Lehrplans ist.

Antwort: Und in meiner Sprache und den Formeln, die mir adäquat erschienen sind. Und wenn es ein Bevölkerungswachstum oder eine Bevölkerungsentwicklung oder eine Alterspyramide oder sonst irgendwas war, dann habe ich das so genannt, und habe die Alterspyramide genommen, wie ich sie kenne, nämlich senkrecht nach oben. Wenn ich es jetzt bei den standardisierten Reifeprüfungen so quer sehe, dann laufe ich schon wieder unrund. Ich denke mir auf die Idee, das einfach umzudrehen, kommen die Schüler hoffentlich in der Aufregung auch.

S: Verstehe.

Antwort: Verstehst du, das sind so Kleinigkeiten!

S: Das soll wirklich standardisiert sein.

Antwort: Ja, das der Nullpunkt wirklich beim Nullpunkt anfangt, dass jede Achse beschriftet ist, das ist ja manchmal bei diesen Dingern auch nicht so. Das ist auch bei Computerprogrammen nicht so. Schau dir an, jede Tabellenkalkulation beschriftet die Achsen ein bisschen anders.

S: Sie wollen grundsätzlich eine Vereinheitlichung, die Frage ist, ob sie es hinkriegen? Natürlich gibt es verschiedene Autorenteams und jedes hat seine eigene Sprache.

Antwort: Ich weiß und es wäre total fein, wenn das einmal eins wäre!

S: Na gut da ist mir sehr gut damit geholfen.

Interview 6

S: Erste Frage: Ist Ihnen der Begriff „Kontextkatalog" im Rahmen der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung bekannt?

Antwort: Ja!

S: Zweite Frage: Welche Absicht, glauben Sie, verfolgt das Bifie mit dem Kontextkatalog?

Antwort: Ich glaub, dass sie sich absichern wollen, wenn sie physikalische Beispiele geben, weil das für die Schüler früher nicht so üblich war, dass man das gibt.

S: Ok sonst noch irgendwas? Also hauptsächlich als Absicherung?

Antwort: Und sie wollen wahrscheinlich auch, dass man eher fächerübergreifend unterrichtet.

S: Die dritte Frage passt dazu! Ist Ihrer Meinung nach der Kontextkatalog im Sinn einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung gerechtfertigt oder nicht?

Antwort: Meinst du, dass man einen Katalog hat? Ich verstehe nicht genau, was gemeint ist?

S: Mit der Frage ist gemeint: Es gibt sehr viele physikalische und finanzmathematische Kontexte. Sehr viel ist vielleicht übertrieben, es gibt eigentlich nur die zwei Kontexte. Ist das für eine AHS gerechtfertigt oder greift das z. B. zu viel in die HAK oder HTL ein.

Antwort: Ich denke, wenn man es weiß, im Vorhinein, dann kann man auf das hinarbeiten. In diesem Sinne, ich finde es eher spannend!

S: Eher spannend. Viertens: Bereiten Ihnen die Begriffe aus der Fachwelt der Physik und der Finanzmathematik Schwierigkeiten?

Antwort: Nein, weil ich habe ein Jahr in einer HTL unterrichtet und mit meinem Bruder in der HAK für die Nachprüfungen gelernt.

S: Kein Problem also?

Antwort: Nein!

S: Fühlen Sie sich bei Physikbeispielen bzw. finanzmathematischen Beispielen, sicher, eher unsicher, überfordert oder ist das ganz unabhängig vom Thema?

Antwort: Nein, sicher, ich war auch als Schüler in einem Gymnasium mit Physikschularbeiten. Also von dem her schreckt mich das jetzt auch nicht ab, sondern das finde ich eher immer netter, als diese nackten Beispiele.

S: Also als die Standardbeispiele: Welche Informationsquellen nützen Sie um physikalische bzw. finanzmathematische Beispiele zu lösen?

Antwort: Wenn, dann das Internet!

S: Sonst keine?

Antwort: Na eigentlich mit Kollegen, z. B. bei den Zerfallsbeispielen um noch einmal den Kontext genauer zu besprechen, auch wenn man es ohne den Rechnen kann.

S: Ok, gleich zur nächsten Frage, in welchem Ausmaß kooperieren Sie mit KollegInnen in Hinblick auf den Kontextkatalog?

Antwort: Na ja, wenn Sachen eher unklar sind, dass man einmal Rücksprache hält, mit Physikkollegen. Sonst ist eher immer so, dass meine Schüler überfordert waren mit so Physikbeispielen. Einfach einmal schimpfen drüber, einfach mal reden drüber!

S: Die waren wirklich überfordert?

Antwort: Ja manche Schüler, weißt eh, wenn du ein physikalisches Beispiel löst, hören sie einfach automatisch auf, weil sie das nicht gewohnt sind. Das ist einfach etwas, woran man sie jetzt einfach gewöhnen muss, an diese Beispiele.

S: Auch der lange Texte wahrscheinlich?

Antwort: Genau!

S: Das hat mir noch niemand gesagt, dass die Schüler überfordert sind!

Antwort: Oh ja weil ich sehe, oh Gott das ist Physik, und sie hören auf zum Lesen.

S: Blockade quasi!

Antwort: Dabei sind die oft nicht schwerer zum Rechnen, als irgendein anderes Beispiel, aber sie müssen es wirklich einmal durchlesen.

S: Scheitert des eher am Textverständnis, der Schüler, oder weil sie wirklich blockieren?

Antwort: Nein, weil sie glauben, das ist Physik, das wollen sie jetzt nicht!

S: Also wirklich die Motivation!

Antwort: Manchmal kommt schon, was ich auch gehabt habe, diese Finanzsachen, wo sie dann schon einmal gesagt haben, wieso kommen da solche Beispiele, mit denen haben wir im echten Leben ja nichts zu tun.

S: Kein echtes Leben?

Antwort: Na ja, Gewinnfunktion und Kostenfunktion, das sind einfach Bereiche, wo sie damit einfach nichts großartig damit zu tun haben. Einmal habe ich ihnen auch erklären müssen, was ein Umsatz ist und diese Sachen.

S: Aber anderseits, mit einem Satz des Pythagoras haben sie auch nichts zu tun im richtigen Leben?

Antwort: Ja eh, aber das ist für sie so typisch mathematisch!

S: Ok, das sind sie schon gewohnt. Das ist jetzt für mich eine wichtige Frage, gute Ideen sind immer willkommen. Welche Unterstützung würden Sie brauchen, um physikalische bzw. finanzmathematische Beispiele besser verstehen zu können? Nehmen wir an, du hast keine Ahnung davon, wie würdest du es aufbereitet haben wollen?

Antwort: Ja vielleicht eine Zusammenfassung, so quasi wie ein Handbuch, wo einfach noch einmal kurz erklärt wird, was ist das, was ist das, was ist das und eventuell einfach ein Beispiel dazu.

S: Durchgerechnet, nicht durchgerechnet, mehrere Beispiele?

Antwort: Durchgerechnet!

S: So Schulbuchmäßig oder auf höheren Niveau?

Antwort: Schulbuchmäßig, weil ich will es ja den Schülern weitergeben!

S: Also direkt zum weitergeben, das ist wichtig?

Antwort: Höheres Niveau, das nützt mir nichts.

Man muss es einfach so erklären können, dass es die Schüler verstehen, und wenn ich eigentlich nicht Physik studiert habe, bringt es nichts, wenn ich irgendwas total Kompliziertes habe.

S: Also Unterlagen für dich und die Schüler?

Antwort: Vor allem, dass es auch für die Schüler einfach ist. Dass man es so erklärt, dass es schnell klar ist, aber nicht ins Detail geht. Es soll ja nicht in eine Physikstunde oder in eine Wirtschaftsstunde ausarten, sondern sie sollen einfach damit was anfangen können.

S: Also auch das Praktische. So letzte Frage: Finden Sie es eine gute Idee, den Kontextkatalog der neuen Reifeprüfung in Mathematik wie geplant auf andere Fächer auszudehnen? Es ist noch nicht ganz klar welche Fächer, aber es ist halt einmal geplant.

Antwort: Na ja in den Sprachen ist es glaube ich klar, die Themen die kommen. Das hat eh alles den Kontext. Sonst weiß ich nicht, wie sie meinen, dass man das ausdehnen soll?

S: Jetzt haben wir zwei Kontexte im Prinzip, das ist Physik und das zweite ist Finanzmathematik. Kontexte können schon mehr kommen, aber Kontexte die nicht mehr extra erklärt werden bei der Matura. D.h. die Begriffe müssen sie können, z. B. was eine Leistung ist, die Einheiten müssen sie wissen und die Idee dahinter ist es, dass es nicht mehr extra erklärt wird.

Antwort: Dass es nicht mehr extra erklärt wird!

S: Genau und dieser Katalog soll dann auf andere Fächer und Bereiche ausgedehnt werden. Andere Kontexte können auch kommen zur Matura, aber die kommen immer mit einer kurzen Erklärung.

Antwort: Dass jetzt andere Fächer auch einen Kontextkatalog haben, oder dass jetzt in der Mathematik noch andere Kontexte reinkommmen?

S: Dass in die Mathematik noch andere Kontexte reinkommen, die vorausgesetzt werden.

Antwort:Kommt auf die Kontexte drauf an, weil das ist jetzt schon sehr Physik-lastig.

S: Man könnte es z. B. dann auf Geografie, Philosophie, Chemie sehr gut ausdehnen. Was haben wir noch, Biologie geht sicher auch gut.

Antwort: A: Im Grunde ist es, die Schüler müssen einfach nur checken, dass das nicht schwieriger ist zum Rechnen.

S: Dass es gar nicht so auf den Text drauf ankommt!

Antwort: Weil, wie ich in der HTL war, da waren Beispiele, da war vorher ein Text, ich habe keine Ahnung, wie die Maschine funktioniert, aber du kriegst dann das Gefühl, was nimm ich her, damit ich es ausrechnen kann?

S: Ich sag jetzt ein Beispiel, in der Mathematik musst du sagen, dass du eine Geschwindigkeit hast, zuerst hast du einen Ort, und wenn du es einmal differenzierst z. B., dass das dann eine Geschwindigkeit ist. Das musst du natürlich wissen, mehr musst du eh nicht wissen. Nur wenn du das nicht weißt, weißt du auch nicht, dass du die Differentialrechnung brauchst.

Antwort: Na ja, es ist: Wir haben jetzt schon Beispiele drinnen gehabt im fünften Klasse Buch z. B. zur geografischen Breite. Aber wenn du einmal checkst was für eine Zeichnung dabei ist, egal was für ein Text das ist.

S: Genau und der Kontext wäre dann, dass du das automatisiert hast, ohne Zeichnung, dass du dann selbst die Zeichnung machst. Es ist jetzt, die Frage ist das dann sinnvoll oder nicht?

Antwort: Na ja. Ich finde es interessanter. Mir sind diese Beispiele einfach lieber, weil mir dann nicht so fad wird. Ich mag ja die Physikbeispiele, weil man einfach sieht, es kommt doch auch in anderen Bereichen vor, weil sie eh immer fragen wozu!

S: Für dich ist es zusammenfassend interessanter: Danke für das Interview.

Interview 7 (nur mit Mitschrift)

S: Ist Ihnen der Begriff “Kontextkatalog” im Rahmen der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung bekannt?

Antwort:

- Der Begriff Kontextkatalog ist kaum bekannt.

S: Welche Absicht, glauben Sie, verfolgt das Bifie mit dem Kontextkatalog?

Antwort:

- Eine breite Ebene an Grundbegriffen soll geschaffen werden
- Festlegen von Allgemeinwissen
- Eine Basis zu zum Lösen von Mathematikbeispielen

S: Ist Ihrer Meinung nach der Kontextkatalog im Sinn einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung gerechtfertigt oder nicht?

Antwort:

- Ja

S: Bereiten Ihnen die Begriffe aus der Fachwelt der Physik und der Finanzmathematik Schwierigkeiten?

Antwort:

- Schwierigkeiten mit beiden Kontexten, da das Zweitfach ein ganz anderes ist

S: Fühlen Sie sich bei Physikbeispielen (finanzmathematische Beispielen) sicher, eher unsicher, überfordert?

Antwort:

- Das hängt vom Schwierigkeitsgrad der Beispiele ab.
- Die Beschäftigung damit ist erst ab jetzt notwendig.

S: Welche Informationsquellen nützen Sie um physikalische (finanzmathematische) Beispiele zu lösen?

Antwort:

- Bücher
- Unterstützung durch einen Wirtschaftsmathematiker und durch einen Physiker als private Fortbildung! Begründung: Fortbildungen sind meist zu allgemein.

S: In welchem Ausmaß kooperieren Sie mit KollegInnen in Hinblick auf den Kontextkatalog?

Antwort:

- Mit Fachkollegen der Mathematik
- fächerübergreifend ist oft zu aufwendig und kompliziert

S: Welche Unterstützung würden Sie brauchen, um physikalische bzw. finanzmathematische Beispielen besser verstehen zu können?

Antwort:

- Für jede Schulstufe: Grundbegriffskatalog
- Anhang: Begriffe, Lexikon
- Struktur: aufbauend, dass das Grundwissen sitzt
- Fortbildungen auf menschlichem und entgegenkommenden Niveau

S: Finden Sie es eine gute Idee, den Kontextkatalog der neuen Reifeprüfung in Mathematik wie geplant auf andere Fächer auszudehnen?

Antwort:

- Sehr gute Idee
- Dies soll ein Langziel sein, und nicht von heute auf morgen durchgesetzt werden.

Interview 8 (nur mit Mitschrift)

S: Ist Ihnen der Begriff "Kontextkatalog" im Rahmen der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung bekannt?

Antwort:
- Ja

S: Welche Absicht, glauben Sie, verfolgt das Bifie mit dem Kontextkatalog?

Antwort:
- Festlegung der außermathematischen Formeln

S: Ist Ihrer Meinung nach der Kontextkatalog im Sinn einer fächerübergreifenden Allgemeinbildung gerechtfertigt oder nicht?

Antwort:
- Nicht schlecht, da die SchülerInnen ein Gefühl bekommen, wofür sie Mathematik brauchen können.

S: Bereiten Ihnen die Begriffe aus der Fachwelt der Physik und der Finanzmathematik Schwierigkeiten?

Antwort:
- Die Begriffe der Physik bereiten Probleme.
- Die Beispiele müssen genauer angeschaut werden, was insgesamt eine Herausforderung darstellt.
- Finanzmathematik bereitet keine Probleme.

S: Fühlen Sie sich bei Physikbeispielen (finanzmathematische Beispielen) sicher, eher unsicher, überfordert?

Antwort:
- Bei Physikbeispielen fühle ich mich unsicher, bei Finanzmathematik nicht.

S: Welche Informationsquellen nützen Sie um physikalische (finanzmathematische) Beispiele zu lösen?

Antwort:
- Schulbücher, Bifie, Internet.
- Es ist oft schwierig, gute Quellen für Beispiele zu finden, es gibt oft zu wenige einfache Beispiele.

S: In welchem Ausmaß kooperieren Sie mit KollegInnen in Hinblick auf den Kontextkatalog?

Antwort:
- Eine gute Kooperation ist vorhanden.

S: Welche Unterstützung würden Sie brauchen, um physikalische bzw. finanzmathematische Beispielen besser verstehen zu können

Antwort:
- Schulbuchniveau
- durchgerechnete Beispiele mit Lösungsweg
- Theorie ja, jedoch kein Uniniveau, also nicht abgehoben
- Problem, zuerst ganz durchgerechnet, dann teilweise, dann nur mehr die Lösung
- Wichtig ist ein klarer Faden und ein guter Aufbau
    - Das fachliche Verstehen ist ganz wichtig
    - Verwendung für Lehrer und für Schüler

S: Finden Sie es eine gute Idee, den Kontextkatalog der neuen Reifeprüfung in Mathematik wie geplant auf andere Fächer auszudehnen?

Antwort:
- grundsätzlich ok, könnte aber zu kompliziert für die Schüler sein, da sie nur für die Schularbeit lernen
- Sie sind es nicht gewohnt, längerfristiges Wissen aufzubauen

Literaturverzeichnis

(Apolin, 2007): Apolin, Martin: Big Bang - Physik 5 RG. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage, 2007

(Apolin, 2008): Apolin, Martin: Big Bang - Physik 6 RG. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage, 2008

(Bifie, EA): Bifie: Exemplarische Typ-2-Aufgaben SRP Mathematik, 2011 https://www.bifie.at/system/files/dl/srp_ma_exemplarische_aufgabenstellungen_2011-12-05.pdf

(Bifie, AP): Bifie: Aufgabenpool Mathematik http://aufgabenpool.bifie.at/srp_ahs/index.php?action=14&cmd=3

(Bifie, HT 2013/14, A1): Bifie: Haupttermin 2013/14 - Mathematik (AHS), Aufgabenheft Teil 1 https://www.bifie.at/system/files/dl/KL14_PT1_AHS_MAT_T1_CC_AU.pdf

(Bifie, HT 2013/14, A2): Bifie: Haupttermin 2013/14 - Mathematik (AHS), Aufgabenheft Teil 2 https://www.bifie.at/system/files/dl/KL14_PT1_AHS_MAT_T2_CC_AU.pdf

(Bifie, KC 2012): Bifie: Kompetenzcheck Mathematik (AHS), Oktober 2012 https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_kompetenzcheck_2012-10-08.pdf

(Bifie, KC 2013): Bifie: Kompetenzcheck Mathematik (AHS), Oktober 2013 https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_kompetenzcheck_2013-10-21.pdf

(Bifie, MS 2014, A1): Bifie: Modelschularbeit Mathematik (AHS), März 2014, Aufgabenpaket Teil 1
https://www.bifie.at/system/files/dl/MAT_MS_Aufgabenheft_Teil_1_2014-03-25.pdf

(Bifie, MS 2014, A2): Bifie: Modelschularbeit Mathematik (AHS), März 2014, Aufgabenpaket Teil 2
https://www.bifie.at/system/files/dl/MAT_MS_Aufgabenheft_Teil_2_2014-03-25_0.pdf

(Bifie, PH 1): Bifie: Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe - Teil 1, 2011
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_2013-11-05.pdf

(Bifie, PK 2013, A1): Bifie: Probeklausur 2013 - Mathematik (AHS), Aufgabenheft Teil 1.
https://www.bifie.at/system/files/dl/PK13Mai_MAT_T1_AU.pdf

(Bifie, PK 2013, A2): Bifie: Probeklausur 2013 - Mathematik (AHS), Aufgabenheft Teil 2.
https://www.bifie.at/system/files/dl/PK13Mai_MAT_T2_AU.pdf

(Bifie, PK 2014, A1): Bifie: Probeklausur 2014 - Mathematik (AHS), Aufgabenheft Teil 1.
https://www.bifie.at/system/files/dl/PK14Mar_MAT_T1_AU.pdf

(Bifie, PK 2014, A2): Bifie: Probeklausur 2014 - Mathematik (AHS), Aufgabenheft Teil 2.
https://www.bifie.at/system/files/dl/PK14Mar_MAT_T2_AU.pdf

(BMBF, SA 5-1): Gurtner, Gottfried: Prototypische Mathematik-Schularbeiten zur Vorbereitung auf die standardisierte Reifeprüfung, Klasse 5, Schularbeit 5-1, Bundesministerium für Bildung und Frauen. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_ptsam5_1_25397.pdf?4k21k3

(BMBF, SA 5-2): Gurtner, Gottfried: Prototypische Mathematik-Schularbeiten zur Vorbereitung auf die standardisierte Reifeprüfung, Klasse 5, Schularbeit 5-2, Bundesministerium für Bildung und Frauen. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_ptsam5_2_25399.pdf?4k21jr

(BMBF, SA 5-3): Gurtner, Gottfried: Prototypische Mathematik-Schularbeiten zur Vorbereitung auf die standardisierte Reifeprüfung, Klasse 5, Schularbeit 5-3, Bundesministerium für Bildung und Frauen. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_ptsam5_3_25401.pdf?4k21js

(BMBF, SA 6-2): Gurtner, Gottfried: Prototypische Mathematik-Schularbeiten zur Vorbereitung auf die standardisierte Reifeprüfung, Klasse 6, Schularbeit 6-2, Bundesministerium für Bildung und Frauen. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_ptsam6_2_25360.pdf?4k21jm

(BMBF, SA 6-3): Gurtner, Gottfried: Prototypische Mathematik-Schularbeiten zur Vorbereitung auf die standardisierte Reifeprüfung, Klasse 6, Schularbeit 6-3, Bundesministerium für Bildung und Frauen. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_ptsam6_3_25362.pdf?4k21jt

(BMBF, SA 7-1): Gurtner, Gottfried: Prototypische Mathematik-Schularbeiten zur Vorbereitung auf die standardisierte Reifeprüfung, Klasse 7, Schularbeit 7-1, Bundesministerium für Bildung und Frauen. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_ptsam7_1_24463.pdf?4k21jt

(BMBF, SA 8-1): Gurtner, Gottfried: Prototypische Mathematik-Schularbeiten zur Vorbereitung auf die standardisierte Reifeprüfung, Klasse 8, Schularbeit 8-1, Bundesministerium für Bildung und Frauen. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_ptsam8_1_25356.pdf?4k21jn

(BMBF, SA 8-2): Schranz Paul: Prototypische Mathematik-Schularbeiten zur Vorbereitung auf die standardisierte Reifeprüfung, Klasse 8, Schularbeit 8-2, Bundesministerium für Bildung und Frauen. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_ptsam8_2_25346.pdf?4k21jv

(Bifie, SSRM): Bifie: Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen, 2013 https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf

(Blanckenstein, 2012): Blanckenstein, Ulrike, Jutta Gut, Sabine Karajan: Maturawissen Mathematik. Manz Verlag Schulbuch GmbH, Wien, 2012

(Brand, 2013): Brand, Clemens, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer: Thema Mathematik 7, Veritas Verlag, Linz, 3. Auflage, 2013

(Embacher, 2002): Embacher Franz: Physik für Nicht-PhysikerInnen, 2002 http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/MatheDidaktik/Physik/

(Giancoli, 2010): Giancoli, Douglas: Physik Lehr- und Übungsbuch. Pearson Studium, München, 3. Auflage, 2010

(Götz, 2013): Götz, Stefan, Hans-Christian Reichel (Hrsg.), Robert Müller, Günter Hanisch: Mathematik 8. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage, 2013

(Herber, 2007): Herber, Kamilla: Physik macchiato. Pearson Studium, München, 2007

(Malle, 2011): Malle, Günther, Maria Koth, Helge Woschitz, Sonja Malle, Bernhard Salzger, Andreas Ulovec: Mathematik verstehen 7. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage, 2011

(Malle, 2012): Malle, Günther, Maria Koth, Helge Woschitz, Sonja Malle, Bernhard Salzger, Andreas Ulovec: Mathematik verstehen 8. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage, 2012

(Röpcke, 2012): Röpcke, Helge, Markus Wessler: Wirtschaftsmathematik: Methoden - Beispiele - Anwendungen. Carl Hanser Verlag, München, 2012

Abbildungsverzeichnis

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Karl Stöckl
Geburtsdaten:	08.10.1975 in Salzburg
Nationalität:	Österreich

Ausbildung

1986 bis 1995	Realgymnasium in Vöcklabruck, Oberösterreich
Seit 1996	Studium Lehramt Physik und Mathematik, Universität Wien
WS 2001/2002	Auslandsstudium Université P. & M. Curie (Paris VI)

Berufserfahrung (Auswahl)

2000 - 2001	Physikunterricht Bundesrealgymnasium Kleine Sperlgasse, 1020 Wien
2002	Physikunterricht Bundesrealgymnasium Glasergasse, 1090 Wien
2002 - 2003	BFI, Externistenvorbereitung für den Hauptschulabschluss, Wien
2004	UKI Externistenvorbereitung für den Hauptschulabschluss, Wien
2005 - 2011	Maturaschule Lernen 8, 1090 Wien
2007 - 2012	Maturaschule Dr. Rampitsch, 1070 Wien
Seit 2012	Sondervertragslehrer am GRG 10, Ettenreichgasse 41-43, 1100 Wien, in den Fächern Mathematik und Physik