MASTERARBEIT

Titel der Masterarbeit

"Quaternion-Algebren und quadratische Formen der Dimension 6"

verfasst von

Klaus Frank, BSc

angestrebter akademischer Grad

Master of Science (MSc)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 066821
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Masterstudium Mathematik
Betreut von:	Univ.-Prof. Dr. Joachim Schwermer

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Sei K ein Körper der Charakteristik ungleich 2, dann gilt das bekannte Resultat: Eine Quaternion-Algebra $Q(a, b|K)$ über K ist genau dann eine Divisionsalgebra über K, falls die quadratische Form $< a, b, -1 >$ anisotrop ist (Satz 0.4). Das Ziel dieser Arbeit ist es, diese Aussage auf das Tensorprodukt zweier Quaternion-Algebren zu verallgemeinern, nämlich das Kriterium zu beweisen, dass das Tensorprodukt zweier Quaternion-Algebren $Q(a_1, a_2|K) \otimes_K Q(b_1, b_2|K)$ genau dann eine Divisionsalgebra über K ist, falls die quadratische Form $< a_1, a_2, -a_1a_2, -b_1, -b_2, b_1b_2 >$ anisotrop ist. Ursprünglich formulierte A. A. Albert dieses Kriterium 1931 ([1], Theorem 3), ohne jedoch die heutige Terminologie zu verwenden. Außerdem verwendete er zum Beweis weder die Theorie von Clifford-Algebren noch von Involutionen auf K-Algebren, welcher der Zugang dieses Textes sein wird.
Weitere Ziele sind, die dazu notwendigen Begriffe einzuführen und schließlich die dazu benötigten Theoreme exakt zu beweisen. Solide Kenntnisse in Algebra und linearer Algebra im Sinne einer Grundvorlesung werden vorausgesetzt.
Im folgenden Text sei K immer ein Körper der Charakteristik ungleich 2.
Quaternion-Algebren haben eine Anwendung in der Zahlentheorie, wie z.B. dass eine Zahl $a \in K$ genau dann die Summe zweier (nicht notwendigerweise von 0 verschiedener) Quadrate ist, wenn $Q(-1, a|K)$ isomorph zu $M_2(K)$ ist [7]; sowie in der Theorie quadratischer Formen. Weiters besagt ein berühmtes Theorem von Merkurjev, dass die 2-Torsions-Untergruppe in der Brauergruppe von K von den Äquivalenzklassen der Quaternion-Algebren erzeugt wird [7]. Da die Gruppenstruktur der Brauer-Gruppe durch das Tensorprodukt von K-Algebren induziert wird, lohnt es sich daher das Tensorprodukt von Quaternion-Algebren genauer zu studieren.

Das erste Kapitel gibt eine Einführung in die Theorie von Involutionen auf K-Algebren, auch Anti-K-Algebren-Homomorphismen genannt. Involutionen sind K-Vektorraum-Automorphismen auf K-Algebren, die wie K-Algebren-Homomorphismen mit der Multiplikation verträglich sind, wobei sich hingegen die Reihenfolge der Faktoren umdreht. Diese werden wir im späteren Verlauf benutzen, um den zur weiteren Behandlung unseres Themas geeigneten K-Untervektorraum des Tensorprodukts zweier Quaternion-Algebren zu konstruieren. Dabei werden die grundlegenden Eigenschaften von Involutionen dargelegt mit besonderen Augenmerk auf die Anwendung bei Quaternion-Algebren.

Das zweite Kapitel behandelt den K-Vektorraum $Alt_4(K)$ der schiefsymmetrischen 4×4-Matrizen mit Einträgen in K, zusammen mit einer darauf definierten quadratischen Form, der sogenannten Pfaffschen quadratischen Form. Zuerst wird diese quadratische Form hergeleitet, dann gewisse Eigenschaften dieser dargelegt und schließlich wird noch der zuvor definierte quadratische Raum charakterisiert. Dabei benutzt man die Tatsache, was auch bewiesen wird, dass die Determinante einer schiefsymmetrischen Matrix stets das Quadrat eines Polynoms in den Einträgen der Matrix ist.

Im dritten Kapitel wird zuerst eine Involution ρ auf dem Raum der 4×4-schiefsymmetrischen Matrizen mit Einträgen in K definiert, die im weiteren Verlauf der Arbeit eine sehr wichtige Rolle spielen wird. Es wird gezeigt, dass diese Involution bis auf Multiplikation mit einem Skalar der einzige K-lineare Isomorphismus ψ auf dem Raum der 4×4-schiefsymmetrischen Matrizen ist mit der Eigenschaft: $\psi(x) \cdot x \in K \cdot Id_4$, für alle $x \in Alt_4(K)$.
Es wird dann zur orthogonalen Involution $\sigma_u(x) = uxu^{-1}$, mit $u \in Gl_4(K)$, $u = u^t$, ein neuer K-Untervektorraum von $M_4(K)$ konstruiert, nämlich $Alt_4(K)^{\sigma_u}$. Darauf wird ein Kriterium bewiesen, das einem genau sagen kann, wann eine Matrix in diesem Raum enthalten ist. Zusätzlich wird uns dieses Kriterium auch die Relation zwischen den beiden Räumen $Alt_4(K)$ und $Alt_4(K)^{\sigma_u}$ aufzeigen. Auf dem Raum $Alt_4(K)^{\sigma_u}$ wird die Abbildung ρ_u definiert, die in enger Beziehung zur vorher erwähnten Involution ρ steht. Diese Abbildung ρ_u hat wie die Abbildung ρ die Eigenschaften, dass sie bis auf Multiplikation mit einem Skalar der einzige K-lineare Isomorphismus ψ auf dem Raum $Alt_4(k)^{\sigma_u}$ ist mit der Eigenschaft: $\psi(x) \cdot x \in K \cdot Id_4$, für alle $x \in Alt_4(K)^{\sigma_u}$.

Im vierten Kapitel geht es darum, einen speziellen K-Unterraum $Alt_K(A \otimes_K B)$ von $A \otimes_K B$ zu konstruieren und dann anschließend auf diesem Raum die quadratische Form $pf_{A \otimes_K B}$ zu definieren. Dies ergibt dann zusammen den quadratischen Raum der Albert-Form. Dazu definiert man sich zuerst eine orthogonale Involution auf $A \otimes_K B$ und führt dann dieselbe Konstruktion durch wie jene des Raumes $Alt_4(K)^{\sigma_u}$. Darauf zeigt man, dass dies wieder ein 6-dimensionaler K-Vektorraum ist. Auf diesem Raum $Alt_K(A \otimes_K B)$ definiert man dann eine K-lineare Abbildung $\pi_{A\otimes_K B}$, die dann dazu benutzt wird, die zuvor genannte quadratische Form $pf_{A\otimes_K B}$ auf $Alt_K(A \otimes_K B)$ zu definieren.

Im fünften Kapitel führt man den Begriff der Ähnlichkeit quadratischer Räume ein und stellt dann einen Zusammenhang zwischen Ähnlichkeit und Clifford-Algebren her, indem man zeigt, dass zwei quadratische Räume genau dann ähnlich sind, wenn deren gerade Clifford-Algebren als K-Algebren isomorph sind. In diesem Kapitel wird das Haupttheorem meiner Arbeit bewiesen, das man dann dazu benützt, das am Anfang erwähnte Kriterium zu beweisen. Dieses Theorem besagt, dass die Tensorprodukte von zwei Quaternion-Algebren $A \otimes_K B$ und $C \otimes_K D$ genau dann als K-Algebren isomorph sind, wenn die dazu entsprechenden Albert-Formen ähnlich sind. Um dies zu beweisen wird unter anderem gezeigt, dass die Clifford-Algebra zur Albert-Form isomorph zu der K-Algebra der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $A \otimes_K B$ ist. Dazu definiert man sich eine bestimmte Abbildung von $Alt_K(A \otimes_K B)$ nach $M_2(A \otimes_K B)$, nutzt dann die universelle Eigenschaft der Clifford-Algebra und rechnet dann die Bijektivität nach.

Das sechste Kapitel behandelt das eigentliche Thema der Arbeit, dort wird nämlich ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angegeben, wann das Tensorprodukt zweier Quaternion-Algebren $A \otimes_K B$ eine Divisionsalgebra über K ist. Und zwar genau dann, wenn die dazugehörige Albert-Form anisotrop ist. Bewiesen wird dabei hingegen die äquivalente Formulierung, dass das Tensorprodukt zwei Quaternion-Algebren genau dann keine Divisionsalgebra über K ist, wenn die Albert-Form isotrop ist. Dabei wird benutzt, dass die Albert-Form von $A \otimes_K B$ genau dann isotrop ist, wenn sie ähnlich zur Albert-Form von $C \otimes_K M_2(K)$ ist, für irgendeine Quaternion-Algebra C über K.

Ich möchte mich schließlich noch ganz herzlich bei meinem Betreuer Professor Joachim Schwermer für die Auswahl des Themas und die gute Betreuung bedanken. Außerdem bedanke ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden, die mich im Studium unterstützt haben.

0. Grundlegende Theorie

Dieses Kapitel listet jene Definitionen und jene Resultate der Theorie der Quaternion-Algebren und der Clifford-Algebren über K auf, die in dieser Arbeit benötigt werden, ohne sie jedoch zu beweisen.

0.1. Quaternion-Algebren über K

Dieser Abschnitt gibt einen kurzen Einblick in die Theorie von Quaternion-Algebren über K. Für genauere Informationen siehe [3], Kapitel IX §1.

Definition 0.1 *Seien $a, b \in K^*$. Eine* ***Quaternion-Algebra*** *über K ist eine 4-dimensionale K-Algebra $Q(a, b|K)$ mit Basis $\{1, i, j, k\}$, sodass die Algebrastruktur durch folgende Festlegung auf der Basis und K-linearer Fortsetzung gegeben ist:*

- $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, *für alle* $x \in \{1, i, j, k\}$
- $i \cdot j = -j \cdot i = k$
- $i^2 = a \cdot 1$
- $j^2 = b \cdot 1$

Man kann $Q(a, b|K)$ auch für $a = 0$ oder $b = 0$ definieren, jedoch werden in diesem Text diese Fälle nicht behandelt. Dass $Q(a, b|K)$ tatsächlich zu einer K-Algebra mit obiger Festlegung wird und zur Existenz, Konstruktion und Eindeutigkeit von $Q(a, b|K)$ siehe [3], S. 319-321.
Der folgende Satz gibt eine grundlegende Eigenschaft von Quaternion-Algebren an, nämlich:

Satz 0.2 *Die K-Algebra $Q(a, b|K)$ ist einfach und zentral.*

Beweis Siehe [3], Satz 1.3.

Damit kann man auf $Q(a, b|K)$ die Theorie einfacher zentraler K-Algebren anwenden. Es gilt unter anderem der Satz von Wedderburn, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Divisionsalgebra D über K gibt, sodass $Q(a, b|K) \cong M_n(D)$

als K-Algebra gilt. Das erstaunliche ist aber, dass bis auf die Divionsalgebra D nur zwei Fälle auftreten, nämlich:

> **Satz 0.3** *Die K-Algebra $Q(a, b|K)$ ist entweder eine Divisionsalgebra über K oder als Algebra isomorph zu $M_2(K)$.*

Beweis Siehe [3], Satz 1.4.

Die Frage ist nun, wann tritt der eine Fall ein und wann der andere. Die Antwort darauf gibt der folgende Satz:

> **Satz 0.4** *Die Quaternion-Algebra $Q(a, b|K)$ ist genau dann eine Divisionsalgebra, wenn die quadratische Form $< a, b, -1 >$ anisotrop ist, d.h. die Gleichung $aY_1^2 + bY_2^2 - Y_3^2 = 0$ besitzt in K^3 nur die 0 als Lösung.*

Beweis Siehe [3], Satz 1.9.

0.2. Clifford-Algebren

In diesem Abschnitt werden jene Resultate über Clifford-Algebren angegeben, die in dieser Arbeit verwendet werden. Wer sich genauer darüber informieren möchte, siehe z.B. [3] Kapitel XI §5 und §6, das als Quelle verwendet wurde.

Definition 0.5 *Sei (V, q) ein quadratischer Raum über K. Eine* ***Clifford-Algebra*** *zu (V, q) ist eine K-Algebra C zusammen mit einer K-linearen Abbildung $\iota : V \to C$, mit $\iota(v)^2 = q(v)1_C$, für alle $v \in V$, sodass folgende universelle Eigenschaft gilt: Zu jeder K-lineare Abbildung $\alpha : V \to S$ in eine K-Algebra S mit $\alpha(v)^2 = q(v)1_S$, für alle $v \in V$, gibt es genau einen K-Algebren-Homomorphismus $\bar{\alpha} : C \to S$, mit $\bar{\alpha} \circ \iota = \alpha$.*

Zu einem gegebenen quadratischen Raum (V, q) ist die Clifford-Algebra bis auf Isomorphie eindeutig ([3], Lemma 5.2).

Kommen wir nun zur Existenz einer Clifford-Algebra zu einem gegeben quadratischen Raum. Die Konstruktion wird nur in den Grundzügen durchgeführt, für die Details siehe man [3], S. 425-426.
Sei (V, q) ein quadratischer Raum. Setze $T^0V := K$, $T^1V := V$ und $T^{n+1}V := V \otimes_K T^nV$ als K-Vektorraum. Schließlich setzte man $TV := \bigoplus_{n \geq 0} T^nV$. Auf diesem Raum kann man eine K-Algebren-Struktur definieren und wir nennen dann die K-Algebra TV die **Tensoralgebra** von V.

> **Satz 0.6** *Sei (V, q) ein quadratischer Raum und sei $J(q)$ das zweiseitige Ideal in TV, das von allen Elementen $v - q(v)1$, $v \in V$, erzeugt wird. Dann ist $C(V, q) := TV/J(q)$ eine Clifford-Algebra zu (V, q).*

Beweis Siehe [3], Satz 5.5.

Der nächste Satz gibt Antwort auf die Frage, welche K-Dimension die Clifford-Algebra zu einem gegeben quadratischen Raum (V, q) hat und er gibt sogar eine explizite Basis an.

> **Satz 0.7** *Sei (V, q) ein quadratischer Raum und $C(V, q)$ die dazugehörige Clifford-Algebra, dann gilt:*
>
> *(i)* $\dim_K(C(V, q)) = 2^{\dim_K V}$
>
> *(ii) Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine K-Basis von V, dann bilden alle Elemente der Form $\iota(e_{i_1}) \cdots \iota(e_{i_m})$, $m \geq 0$ und $1 \leq i_1 < \dots, < i_m \leq n$ eine K-Basis von $C(V, q)$.*

Beweis Siehe [3], Satz 6.3.

Definition 0.8 *Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und S eine R-Algebra. Eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-**Graduierung** auf S ist eine Zerlegung $S = S_0 \oplus S_1$ als direkte Summe von R-Untermoduln, sodass $1 \in S_0$, $S_i \cdot S_j \subseteq S_1$, für $i, j \in \{0, 1\}$, $i \neq j$ und $S_i \cdot S_i \in S_0$, für $i = 0, 1$ gilt.*

Auf der Clifford-Algebra $C(V, q) = TV/J(q)$ kann man eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung definieren, und zwar wie folgt: Man beginne mit $TV_0 = \bigoplus_{r \geq 0} TV^{2r}$ und

$TV_1 = \bigoplus_{r\geq 0} TV^{2r+1}$, darauf setze man $J(q)_i := TV_i \cap J(q)$, $i = 0, 1$. Schließlich setze man $C_i(V,q) := TV_i/J(q)_i$, $i = 0, 1$. Dies definiert tatsächlich eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung. (Vgl. [3], S. 429-430). Wir nennen $C_0(V,q)$ den **geraden Anteil** von $C(V,q)$ und $C_1(V,q)$ den **ungeraden Anteil**. Der gerade Anteil $C_0(V,q)$ ist eine K-Unteralgebra der Clifford-Algebra $C(V,q)$. Außerdem gilt $\dim_K(C_0(V,q)) = \dim_K(C_1(V,q)) = 2^{\dim_K(V)-1}$.
Der folgende Satz gibt Auskunft über das Zentrum von $C(V,q)$:

Satz 0.9 *Sei (V,q) ein regulärer quadratischer Raum über K:*

(i) Ist $\dim_K(V)$ gerade, dann ist $C(V,q)$ eine einfache zentrale K-Algebra.

(ii) Ist $\dim_K(V) = 2n+1$ ungerade, dann hat das Zentrum von $C(V,q)$ die Dimension 2. Es ist entweder isomorph zu $K \times K$ oder ein Erweiterungskörper K' von K vom Grad 2 über K. Im ersten Fall ist $C(V,q)$ ein direktes Produkt zweier einfacher,zentraler K-Algebren der Dimension 2^{2n} über K und im zweiten Fall ist $C(V,q)$ eine einfache zentrale K'-Algebra.

Beweis Siehe [3], Satz 6.4.

1. Involutionen auf K-Algebren

Dieses Kapitel folgt im Großen und Ganzen dem Buch Algebra von Jantzen und Schwermer [3].

Definition 1.1 *Sei K ein Körper, R eine K-Algebra. Eine Abbildung $\sigma : R \to R$ heißt* ***Involution****, wenn gilt:*

(i) σ *ist ein Automorphismus von R als K-Vektorraum*

(ii) $\sigma^2 = Id_R$

(iii) $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$, *für alle $x, y \in R$.*

Ein Paar (R, σ) aus einer K-Algebra R und einer Involution heißt ***K-Algebra mit Involution****. Seien (R, σ) und (R', σ') zwei K-Algebren mit Involution, dann heißt ein K-Algebren-Isomorphismus $\varphi : R \to R'$ ein* ***Isomorphismus mit Involution****, falls $\varphi(\sigma(x)) = \sigma'(\varphi(x))$, für alle $x \in R$.*

Satz 1.2 *Sei (R, σ) eine K-Algebra mit Involution. Es gilt:*

(i) $\sigma(1_R) = 1_R$ *und* $\sigma(u^{-1}) = \sigma(u)^{-1}$, *für jede Einheit $u \in R^*$*

(ii) Ist (S, τ) eine weitere K-Algebra mit Involution, dann ist $(R \otimes_K S, \sigma \otimes \tau)$ auch eine K-Algebra mit Involution. Insbesondere ist für eine Körpererweiterung $L|K$ auch $(R \otimes_K L, \sigma \otimes Id_L)$ eine L-Algebra mit Involution.

(iii) Ist $\psi : R \to R'$ ein Isomorphismus von K-Algebren, dann ist durch $\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}$ eine Involution auf R' definiert.

Beweis (i) Es gilt $\sigma(1_R) = \sigma(1_R 1_R) = \sigma(1_R)\sigma(1_R) = \sigma(1_R)^2$. Es gilt sogar $\sigma(1_R) = \sigma(1_R)^n$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da $\sigma(1_R) \neq 0$ gilt, folgt $\sigma(1_R) = 1_R$. Wegen $1_R = \sigma(1_R) = \sigma(u \cdot u^{-1}) = \sigma(u^{-1})\sigma(u)$, folgt $\sigma(u^{-1}) = \sigma(u)^{-1}$.

(ii) $\sigma \otimes \tau$ ist nach Definition des Tensorprodukts ein K-linearer Automorphismus. Sei $x \in R \otimes_K S$, dann lässt sich x schreiben als $x = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i$, mit $u_i \in R$, $v_i \in S$. Es gilt $(\sigma \otimes \tau)(x) = \sum_{i=1}^{r} \sigma(u_i) \otimes \tau(v_i)$. Daher folgt $(\sigma \otimes \tau)^2(x) = \sum_{i=1}^{r} \sigma^2(u_i) \otimes \tau^2(v_i) = x$. Also gilt $(\sigma \otimes \tau)^2 =$

$Id_{R\otimes_K S}$. Sei $y = \sum_{j=1}^{s} w_j \otimes z_j$, mit $w_j \in R$, $z_j \in S$, dann ist $x \cdot y = \sum_{i,j} u_i w_j \otimes v_i z_j$ und somit $(\sigma \otimes \tau)(xy) = \sum_{i,j} \sigma(u_i w_j) \otimes \tau(v_i z_j) = \sum_{j=1}^{s} \sigma(w_j) \otimes \tau(z_j) \cdot \sum_{i=1}^{r} \sigma(u_i) \otimes \tau(v_i) = (\sigma \otimes \tau)(y) \cdot (\sigma \otimes \tau)(x)$.

(iii) $\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}$ ist K-linear und bijektiv. Weiters gilt $(\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1})^2 = \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} = \psi \circ \sigma^2 \circ \psi^{-1} = id_{R'}$. Und schließlich gilt $(\psi\circ\sigma\circ\psi^{-1})(xy) = \psi(\sigma(\psi^{-1}(x)\psi^{-1}(y))) = \psi(\sigma(\psi^{-1}(y))\cdot\sigma(\psi^{-1}(x))) = \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}(y) \cdot \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}(x)$. □

Satz 1.3 *Sei S eine einfache zentrale, endlich dimensionale K-Algebra und σ eine Involution auf S.*

(a) Ist $u \in S^*$ eine Einheit mit $\sigma(u) = \pm u$, so definiert $\tau : x \mapsto u\sigma(x)u^{-1}$ wieder eine Involution auf S.

(b) Ist σ' eine weitere Involution auf S, so existiert ein eindeutig bis auf Multiplikation mit einem Element aus K^* bestimmtes $u \in S^*$, sodass $\sigma' = Int(u) \circ \sigma$ mit $\sigma(u) = \pm u$.

Beweis

(a) Da σ als Involution sowie Links- und Rechtsmultiplikation mit u K-lineare Abbildungen sind, ist τ auch K-linear. Seien $x, y \in S$, dann gilt $\tau(xy) = u\sigma(xy)u^{-1} = u\sigma(y)\sigma(x)u^{-1} = u\sigma(y)u^{-1}u\sigma(x)u^{-1} = \tau(y)\tau(x)$. Und $\tau^2(x) = \tau(u\sigma(x)u^{-1}) = u\sigma(u\sigma(x)u^{-1}) = u\sigma(u^{-1})x\sigma(u)u^{-1} = \epsilon x\epsilon = x$, mit $\epsilon \in \{\pm 1\}$.

(b) $\sigma' \circ \sigma$ ist eine bijektive K-lineare Abbildung auf S. Es gilt $(\sigma' \circ \sigma)(xy) = \sigma'(\sigma(y) \cdot \sigma(x)) = (\sigma' \circ \sigma)(x) \cdot (\sigma' \circ \sigma)(y)$.
Also ist $\sigma' \circ \sigma$ ein Automorphismus von S als K-Algebra. Somit existiert nach Skolem-Noether eine Einheit $u \in S^*$ mit $\sigma'(\sigma(x)) = uxu^{-1}$, für alle $x \in S$. Daher gilt $\sigma'(y) = u\sigma(y)u^{-1}$ für jedes $y \in S$.
Angenommen es gibt ein weiteres $v \in S^*$ mit $\sigma'(x) = v\sigma(x)v^{-1}$. Dann gilt $u\sigma(x)u^{-1} = v\sigma(x)v^{-1} \Leftrightarrow u^{-1}v\sigma(x) = \sigma(x)u^{-1}v$, für alle $x \in S$.
Dadurch folgt $u^{-1}v \in Z(S) = K$. Damit gibt es $a \in K^*$, sodass $v = au$.
Für jedes $z \in S$ gilt $z = \sigma'^2(z) = u\sigma(u\sigma(z)u^{-1})u^{-1} = u\sigma(u^{-1})z\sigma(u)u^{-1}$.
Also folgt $u\sigma(u)^{-1} \in Z(S)$. Daher gibt es $b \in K^*$ mit $\sigma(u) = bu$. Analog gibt es ein $c \in K^*$, sodass $\sigma(v) = cv$.Andererseits gilt $u = \sigma^2(u) = \sigma(bu) = b^2u \Rightarrow b^2 = 1$. Also $b \in \{\pm 1\}$. Dies gilt dann analog auch für c. Insgesamt

erhält man $bu = \sigma(u) = \sigma(av) = acv$, also gilt $ac = b$. Da $b, c \in \{1, -1\}$ gilt, folgt $a \in \{1, -1\}$. $\square$

Definition 1.4 *Sei $R = M_n(K)$, $u \in R^*$, mit $u^t = \pm u$ und setze $\sigma_u := x \mapsto ux^tu^{-1}$. Dann heißt σ_u* ***orthogonal****, falls $u = u^t$. Und es heißt* ***symplektisch****, falls $u = -u^t$.*

Lemma 1.5 *Seien $u, v \in GL_n(K)$, mit $u^t = \pm u$ und $v^t = \pm v$. Sei $\varphi : (M_n(K), \sigma_u) \to (M_n(K), \sigma_v)$ ein Isomorphismus von K-Algebren mit Involution, so ist σ_u genau dann orthogonal (symplektisch), wenn σ_v orthogonal (symplektisch) ist.*

Beweis Da φ ein Isomorphismus von K-Algebren ist, gibt es nach Skolem-Noether ein $z \in GL_n(K)$, mit $\varphi(x) = zxz^{-1}$, für alle $x \in M_n(K)$. Da φ sogar ein Isomorphismus von K-Algebren mit Involution ist, gilt $\varphi(\sigma_u(x)) = \sigma_v(\varphi(x))$, für alle $x \in M_n(K)$. Das heißt aber: $zux^tu^{-1}z^{-1} = v(zxz^{-1})^tv^{-1} = v(z^{-1})^tx^tz^tv^{-1}$. Daraus folgt aber, $(zu)x^t(zu)^{-1} = (v(z^{-1})^t)x^t(v(z^{-1})^t)^{-1} \Rightarrow (v(z^{-1})^t)^{-1}(zu) \in Z(M_n(K)) = K$. Also gibt es ein $a \in K^*$ mit $zu = av(z^{-1})^t \Rightarrow zuz^t = av$ und $zu^tz^t = av^t$, mit $u^t = \epsilon u$, $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Man erhält also insgesamt $av^t = \epsilon zuz^t = \epsilon av$. Daraus folgt $v^t = \epsilon v$.

Sei R eine beliebige einfache zentrale, endlich dimensionale K-Algebra, σ eine Involution auf R und L ein Zerfällungskörper von R mit Zerfällungsisomorphismus $\gamma : R \otimes_K L \tilde{\to} M_nL$. Dann ist nach Satz 1.2 $\sigma_L := \sigma \otimes_K Id_L$ eine Involution auf $R \otimes_K L$. Wegen Satz 1.2 ist dann $\sigma' := \gamma \circ \sigma_L \circ \gamma^{-1}$ eine Involution auf der L-Algebra $M_n(L)$. Dann gibt es nach Satz 1.3 ein eindeutig bis auf Multiplikation mit einem Element aus K^* bestimmtes $u \in S^*$, sodass $\sigma' = Int(u) \circ \sigma_{Id}$, mit $u^t = \sigma_{Id}(u) = \pm u$. Das heißt für $x \in M_n(L)$ gilt $\sigma'(x) = ux^tu^{-1} = \sigma_u$. Und daher ist die Involution σ' entweder orthogonal oder symplektisch.

Lemma 1.6 *Sei R eine endlich-dimensionale, einfache zentrale K-Algebra, sei L ein Zerfällungskörper von R mit Isomorphismus $\gamma : R \otimes_K L \tilde{\to} M_n(L)$. Sei L' ein weiterer Zerfällungskörper von R mit Isomorphismus $\gamma' : R \otimes_K L' \tilde{\to} M_n(L')$, sodass es einen K-Homomorphismus*

$\alpha : L \to L'$ gibt. Dann ist $\gamma' \circ \sigma_{L'} \circ \gamma'^{-1}$ genau dann orthogonal (symplektisch), wenn $\gamma \circ \sigma_L \circ \gamma^{-1}$ orthogonal (symplektisch) ist.

Beweis Da α ein K-Homomorphismus ist, ist α insbesondere injektiv und induziert daher einen injektiven K-Algebren-Homomorphismus
$\alpha^* : M_n(L) \to M_n(L')$. Sei nun $\psi_1 : (R \otimes_K L) \otimes_L L' \to R \otimes_K L'$ die Abbildung $(x \otimes a) \otimes b \mapsto x \otimes \alpha(a)b$. Da $\alpha : L \to L'$ injektiv ist, ist $(R \otimes_K L) \otimes_L L'$ wohldefiniert und eine L'-Algebra. Sowohl $(R \otimes_K L) \otimes_L L'$ als auch $R \otimes_K L'$ sind einfache zentrale L'-Algebren. Da $b \in L'$ also dem Zentrum von $R \otimes_K L'$ liegt und α ein injektiver K-Homomorphismus ist, folgt, dass ψ_1 ein injektiver L'-Algebren-Homomorphismus ist. Außerdem haben beide L'-Algebren dieselbe L'-Dimension, woraus die Bijektivität von ψ_1 folgt. Analog definiert $\psi_2 : M_n(L) \otimes_L L' \to M_n(L')$, $y \otimes b \mapsto b\alpha^*(y)$ einen L'-Algebren-Isomorphismus. Man erhält folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (R \otimes_K L) \otimes_L L' & \xrightarrow{\psi_1} & R \otimes_K L' \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_L \otimes Id_{L'}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{L'}} \\ (R \otimes_K L) \otimes_L L' & \xrightarrow{\psi_1} & R \otimes_K L' \end{array} \tag{1}$$

D.h.es gilt zu zeigen: $\sigma_{L'} \circ \psi_1 = \psi_1 \circ (\sigma_L \otimes Id_{L'}) : (R \otimes_K L) \otimes_L L' \to R \otimes_K L'$.
Sei $(x \otimes a) \otimes b \in (R \otimes_K L) \otimes_L L'$, dann gilt $\sigma_{L'} \circ \psi_1((x \otimes a) \otimes b) = \sigma_{L'}(x \otimes \alpha(a) \cdot b) = \sigma(x) \otimes \alpha(a) \cdot b$.
Andererseits gilt: $\psi_1 \circ (\sigma_L \otimes Id_{L'})((x \otimes a) \otimes b) = \psi_1((\sigma(x) \otimes a) \otimes b) = \sigma(x) \otimes \alpha(a) \cdot b$.
Analog erhält man für ψ_2 folgendes kommutatives Diagramm::

$$\begin{array}{ccc} M_n(L) \otimes_L L' & \xrightarrow{\psi_2} & M_n(L') \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_u \otimes Id_{L'}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{\alpha*(u)}} \\ M_n(L) \otimes_L L' & \xrightarrow{\psi_2} & M_n(L') \end{array} \tag{2}$$

wobei $u \in Gl_n(L)$ mit $\gamma \circ \sigma_L \circ \gamma^{-1} = \sigma_u$.

Es gilt zu zeigen: $\psi_2 \circ (\sigma_u \otimes Id_{L'}) = \sigma_{\alpha^*(u)} \circ \psi_2 : M_n(L) \otimes_L L' \to M_n(L')$.
Sei $y \otimes b \in M_n(L) \otimes L'$, dann gilt $\sigma_{\alpha^*(u)} \circ \psi_2(y \otimes b) = \sigma_{\alpha^*(u)}(b\alpha^*(y)) = \alpha^*(u) \cdot (b\alpha^*(y))^t \cdot (\alpha^*(u))^{-1} = b\alpha^*(u) \cdot (\alpha^*(y))^t \cdot (\alpha^*(u))^{-1} = b\alpha^*(u)(\alpha^*(y^t))(\alpha^*(u))^{-1}$, da α^* auf jedem Eintrag von y die Abbildung α anwendet und daher offensichtlich mit dem Transponieren kommutiert. Da α^* ein L-Algebren-Homomorphismus ist, folgt $b\alpha^*(u) \cdot \alpha^*(y^t) \cdot (\alpha^*(u))^{-1} = b\alpha^*(uy^tu^{-1}) =$

$Id_{L'}(b) \cdot \alpha^*(\sigma_u(y)) = \psi_2(\sigma_u \otimes Id_{L'}(y \otimes b))$.
Definiere nun folgende Abbildung $\tilde{\gamma} : R \otimes_K L' \to M_n(L')$,
$\tilde{\gamma} := \psi_2 \circ (\gamma \otimes Id_{L'}) \circ \psi_1^{-1}$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ als Komposition von L'-Algebren-Isomorphismen ein L'-Algebren-Isomorphismus.

Weiters gilt $\tilde{\gamma} \circ \sigma_{L'} \circ \tilde{\gamma}^{-1} = \psi_2 \circ (\gamma \otimes Id_{L'}) \circ \overbrace{\psi_1^{-1} \circ \sigma_{L'} \circ \psi_1}^{=\sigma_L \otimes Id_{L'},\text{ wegen (1)}} \circ (\gamma^{-1} \otimes Id_{L'}) \circ \psi_2^{-1} = \psi_2 \circ (\gamma \otimes Id_{L'}) \circ (\sigma_L \otimes Id_{L'}) \circ (\gamma^{-1} \otimes Id_{L'}) \circ \psi_2^{-1} = \psi_2 \circ ((\gamma \circ \sigma_L \circ \gamma^{-1}) \otimes Id_{L'}) \circ \psi_2 = \psi_2 \circ (\sigma_u \otimes Id_{L'}) \circ \psi_2^{-1} \overbrace{=}^{\text{wegen (2)}} \sigma_{\alpha^*(u)}$. Schließlich gilt, dass $\alpha^*(u)$ genau dann (anti-)symmetrisch ist, wenn u dies ist.
Nun müssen wir nur noch zeigen, dass $\tilde{\gamma} \circ \sigma_{L'} \circ \tilde{\gamma}^{-1}$ und $\gamma' \circ \sigma_{L'} \circ \gamma'^{-1}$ den selben Typ haben. Setze dazu $\varphi := \gamma' \circ \tilde{\gamma}^{-1}$. Dann ist φ ein L'-Algebren-Automorphismus auf $M_n(L')$. Sei $z \in M_n(L')$, dann erhält man:
$\varphi((\tilde{\gamma} \circ \sigma_{L'} \circ \tilde{\gamma}^{-1})(z)) = (\gamma' \circ \tilde{\gamma}^{-1} \circ \tilde{\gamma} \circ \sigma_{L'} \circ \tilde{\gamma}^{-1})(z) = (\gamma' \circ \sigma_{L'} \circ \gamma'^{-1} \circ \gamma' \circ \tilde{\gamma}^{-1})(z) = (\gamma' \circ \sigma_{L'} \circ \gamma'^{-1})(\varphi(z))$.
Also ist $\varphi : (M_n(L'), \tilde{\gamma} \circ \sigma_{L'} \circ \tilde{\gamma}^{-1}) \to (M_n(L'), \gamma' \circ \sigma_{L'} \circ \gamma'^{-1})$ ein Isomorphismus von L'-Algebren mit Involution. Daher haben $\tilde{\gamma} \circ \sigma_{L'} \circ \tilde{\gamma}^{-1}$ und $\gamma' \circ \sigma_{L'} \circ \gamma'^{-1}$ denselben Typ nach Lemma 1.5.

Satz 1.7 *Sei $Q = Q(a, b|K)$, $a, b \in K^*$ eine beliebige Quaternion-Algebra mit Basis $1, i, j, k$. Dann ist $\tau : Q \to Q$, definiert durch $\tau(x) := \bar{x} = x_0 1 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$, für alle $x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in Q$, eine symplektische Involution auf Q.*

Beweis τ ist offensichtlich ein K-linearer Isomorphismus mit $\tau \circ \tau = Id_Q$.
Sei $y = y_0 1 + y_1 i + y_2 j + y_3 k$, dann ist
$\tau(xy) = \tau((x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(y_0 1 + y_1 i + y_2 j + y_3 k)) =$
$\tau((x_0 y_0 + x_1 y_1 a + x_2 y_2 b - x_3 y_3 ab)1 + (x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_3 b + x_3 y_2 b)i +$
$(x_0 y_2 + x_2 y_0 + x_1 y_3 a - x_3 y_1 a)j + (x_0 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_0)k) =$
$(x_0 y_0 + x_1 y_1 a + x_2 y_2 b - x_3 y_3 ab)1 + (-x_0 y_1 - x_1 y_0 + x_2 y_3 b - x_3 y_2 b)i +$
$(-x_0 y_2 - x_2 y_0 - x_1 y_3 a + x_3 y_1 a)j + (-x_0 y_3 - x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_3 y_0)k$. Andererseits
$\tau(y)\tau(x) = (y_0 1 - y_1 i - y_2 j - y_3 k)(x_0 1 - x_1 i - x_2 j - x_3 k) =$
$(x_0 y_0 + x_1 y_1 a + x_2 y_2 b - x_3 y_3 ab)1 + (-x_0 y_1 - x_1 y_0 + x_2 y_3 b - x_3 y_2 b)i +$
$(-x_0 y_2 - x_2 y_0 - x_1 y_3 a + x_3 y_1 a)j + (-x_0 y_3 - x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_3 y_0)k = \tau(xy)$.
Somit ist τ eine Involution. Aus der Definition von τ folgt sofort
$x + \tau(x) = 2x_0 1 \in K \cdot 1$ und $x\tau(x) = x_0^2 + ax_1^2 + bx_2^2 + abx_3^2 \in K \cdot 1$.
Beh.: τ ist die einzige Involution auf Q mit $x\tau(x) \in K \cdot 1$ und $x + \tau(x) \in K \cdot 1$,

für alle $x \in Q$.
Sei τ' eine weitere Involution auf Q mit diesen Eigenschaften. Es gilt $\tau'(1) = 1$ nach Satz 1.2 und $i + \tau'(i) \in K \cdot 1$ nach Voraussetzung. Also gibt es ein $z \in K$, sodass $\tau'(i) = -i+z$. Es gilt $i\tau'(i) \in K \cdot 1$, d.h. $i(-i+z) = zi-a1 \in K \cdot 1$, d.h $z = 0$, also gilt $\tau'(i) = -i$. Analog gilt $\tau'(j) = -j$ und $\tau(k) = -k$.
Da τ' als Involution ein K-linearer Isomorphismus ist und auf der Basis mit τ übereinstimmt, folgt $\tau = \tau'$.
Nach Satz 0.3 gibt es nun folgende zwei Fälle:
<u>1. Fall:</u>$\gamma : Q \tilde{\rightarrow} M_2(K)$, also Q zerfällt über K. Dann ist $\sigma := \gamma \circ \tau \circ \gamma^{-1}$ die einzige Involution auf $M_2(K)$ mit $\sigma(x) + x \in K \cdot Id$ und $x \cdot \sigma(x) \in K \cdot Id$.
Setze $u := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, dann ist σ_u symplektisch.
<u>Beh.:</u> $\sigma = \sigma_u$.
Sei $V = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\sigma_u(V) = uV^tu^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$V + \sigma_u(V) = \begin{pmatrix} x+w & o \\ 0 & x+w \end{pmatrix} \in K \cdot Id \text{ und}$$

$$V\sigma_u(V) = \begin{pmatrix} xw-yz & 0 \\ 0 & xw-yz \end{pmatrix} \in K \cdot Id.$$

Daraus folgt $\sigma = \sigma_u$ und somit ist σ und damit auch τ symplektisch.
<u>2. Fall:</u> Sei L' ein Zerfällungskörper von Q, d.h. $Q \otimes_K L' \cong M_2(L')$. Dann ist wegen Lemma 1.6 und nach dem 1. Fall $\tau_{L'} := \tau \otimes Id'_L$ symplektisch und daher ist τ symplektisch. □

Satz 1.8 *Seien $(A_1, \sigma_1), \ldots, (A_n, \sigma_n)$ einfache zentrale, endlich dimensionale K-Algebren mit Involution. Dann ist $\sigma := \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n$ genau dann eine symplektische Involution auf $A_1 \otimes_K \cdots \otimes_K A_n$, wenn die Anzahl der symplektischen Involutionen σ_i ungerade ist.*

Beweis Siehe: [5], *Proposition* 2.23

2.Pfaffsche quadratische Form

In diesem Kapitel geht es darum, eine spezielle quadratische Form, nämlich die Pfaffsche quadratische Form, auf dem K-Vektorraum der 4×4 schiefsymmetrischen Matrizen zu definieren und den dadurch erhaltenen quadratischen Raum zu charakterisieren.
Sei $Alt_m(K)$ der K-Vektorraum aller $m \times m$-schiefsymmetrischen Matrizen über K, d.h.: $Alt_m(K) = \{\alpha \in M_m(K) | \ \alpha = -\alpha^t\}$.
Jede schiefsymmetrische Matrix α hat daher die Form:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1m} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2m} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1,m} \\ -\alpha_{1m} & -\alpha_{2m} & \cdots & -\alpha_{m-1,m} & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist die K-Dimension von $Alt_m(K)$ gleich $1 + 2 + \ldots + m - 1 = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$.

Sei nun $\alpha \in Alt_m(K)$, dann gilt für die Determinante:
$\det(\alpha) = \det(\alpha^t) = \det(-\alpha) = (-1)^m \det(\alpha)$.
Daher ist für ungerades m die $\det(\alpha) = 0$, also ist α singulär, und für gerades m und reguläres α gilt:

Lemma 2.1 *Sei $m = 2n$ gerade, $A \in Alt_m(K)$ invertierbar und sei s_n die $m \times m$ schiefsymmetrische Matrix mit n Blöcken der Form $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ auf der Hauptdiagonale. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $C \in Gl_m(K)$, sodass $A = C s_n C^t$.*

Beweis (ausgearbeitet nach einer Vorlage von [4], S. 28, Lemma 2)

Wir beweisen dies mittels Induktion nach n.
Sei $n = 1$, dann hat A die Form:
$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, mit $a \neq 0$. Indem man $C := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ setzt, erhält man

$$Cs_nC^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung sei bereits für $k < n$ bewiesen.
Setze $V := K^{2n}$ und definiere $b : V \times V \to K$ als die folgende Bilinearform $b(x,y) := x^tAy$. Dann erhält man $b(y,x) = y^tAx = -y^tA^tx$, da A schiefsymmtrisch ist. Weiters ist $-y^tA^tx = (-x^tAy)^t = (-b(x,y))^t = -b(x,y)$, da $b(x,y) \in K$. Also ist b eine schiefsymmetrische Bilinearform.
Aufgrund der Regularität der Matrix A ist b eine reguläre Bilinearform. Damit gibt es Vektoren $x_1, x_2 \in V \setminus \{0\}$, sodass die Bilinearform nicht verschwindet, also $b(x_1, x_2) \neq 0$. Weiters können wir o.B.d.A. annehmen, dass $b(x_1, x_2) = 1$ gilt.
Die beiden Vektoren x_1 und x_2 sind linear unabhängig: denn, angenommen sie sind linear abhängig, dann gibt es ein Skalar $\lambda \in K$, sodass $x_2 = \lambda x_1$. Aber dann gilt $b(x_1, x_2) = b(x_1, \lambda x_1) = \lambda b(x_1, x_1) = 0$ und das ist ein Widerspruch.
Setzte nun $V_1 := Kx_1 \oplus Kx_2$ und $V_2 := V_1^{\perp} = \{z \in V : b(x_i, z) = 0, i = 1, 2\}$, dann gilt $V = V_1 \oplus V_2$, da b regulär ist. Sei $\{x_3, \ldots, x_{2n}\}$ eine K-Basis von V_2 und $D := (d_{ij})$ bezeichne die Basiswechselmatrix bezüglich der Standardbasis, d.h.
$x_j = \sum_{i=1}^{2n} d_{ij} e_{ij}$ und sei $B := (b(x_i, x_j))$ die Gram-Matrix bezüglich b.
Dann gilt $B = D^tAD$ und

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\ldots0 \\ -1 & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & 0 & A' \end{pmatrix},$$

wobei A' eine $2(n-1) \times 2(n-1)$- schiefsymmetrische Matrix ist.
Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine invertierbare Matrix
$C' \in Gl_{2(n-1)}(K)$, sodass $A' = C's_{n-1}(C')^t$. Setzt man

$$C'' := \begin{pmatrix} Id_2 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

dann folgt $B = C''s_nC''^t$ und daher $A = D^{-t}BD^{-1} = D^{-t}C''s_nC''^tD^{-1}$. Setzen wir schließlich $C := D^{-t}C''$, dann folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2.2 *Sei* $\alpha = (a_{ij}) \in Alt_m(K)$. *Dann gibt es ein Polynom* f *in den Variablen* a_{ij} *mit Koeffizienten in* K, *sodass* $(f(a_{ij}))^2 = \det(\alpha)$.

Beweis Ist m ungerade, dann hat, wie vorher gezeigt, jede schiefsymmetrische Matrix die Determinante gleich 0,was per Definition ein Polynom in den Einträgen von A ist. Ist m gerade und A ist singulär, so gilt dies wie zuvor. Ist m gerade und A ist regulär, dann gibt es nach Lemma 2.1 eine invertierbare Matrix C, sodass A geschrieben werden kann als $A = Cs_nC^T$. Da die Determinante von s_n gleich 1 ist, erhält man $\det(A) = \det(C)^2$. Die Determinante von C ist ein Polynom in den Einträgen und daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.3 Man kann mittels der Leibniz-Regel für die Determinante und kombinatorischen Überlegungen zeigen, dass, falls $m = 2n$ gerade ist, die Determinante einer $m \times m$-schiefsymmetrischen Matrix A die Form hat:
$\det(A) = \Big(\sum_{\sigma \in B_n} \pm \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(2i-1)\sigma(2i)} \Big)^2$,
wobei $B_n := \{\sigma \in S_n \mid \sigma$ hat die Form $\sigma = (i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_n, j_n)$ mit $i_k < j_k, 1 \leq k \leq n$ und $i_l < i_{l+1}, j_l < j_{l+1}, 1 \leq l \leq n\}$. (vgl. [2])
Das Polynom f ist bis auf $\{1, -1\}$ eindeutig bestimmt. Normalisiert man dieses Polynom, dann erhält man Eindeutigkeit. In dieser Masterarbeit wird dies nur für den Fall $m = 4$ durchgeführt, aber man kann dies ähnlich auch im allgemeinen Fall machen.

Definition 2.4 *Sei* $m = 4$. *Normalisiert man das Polynom* f *so, dass*

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1,$$

dann heißt f *mit dieser Normalisierung* ***Pfaffsche quadratische Form****, die mit* pf *bezeichnet wird.*

Wir werden in Lemma 2.6 zeigen, dass pf tatsächlich eine quadratische Form und dass es daher richtig ist, von der Pfaffschen quadratischen Form zu sprechen.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass für die Pfaffsche quadratische Form $pf(\alpha)$ einer beliebigen schiefsymmetrischen Matrix $\alpha \in Alt_4(K)$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} \\ -\alpha_{14} & -\alpha_{24} & -\alpha_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

gilt: $pf(\alpha) = \alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{14}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{24}$.
Die Pfaffsche quadratische Form hat unter anderem folgende Eigenschaften:

Satz 2.5 *Sei $\alpha \in Alt_m(K)$ und $x \in M_m(K)$, dann gilt:*
(i) $x\alpha x^t \in Alt_m(K)$
(ii) $pf(x\alpha x^t) = \det(x) \cdot pf(\alpha)$.

Beweis (i) $(x\alpha x^t)^t = (x^t)^t\alpha^t x^t = x(-\alpha)x^t = -x\alpha x^t$.
(ii) $\left(pf(x\alpha x^t)\right)^2 = \det(x\alpha x^t) = \det(x)^2 \cdot \det(\alpha) = \det(x)^2 \cdot \left(pf(\alpha)\right)^2$. Somit $pf(x\alpha x^t) = \pm\det(x)pf(\alpha)$. Das Vorzeichen der Pfaffschen quadratischen Form ist unabhängig von x und α. Daher, indem man $x = Id_m$ und $\alpha = \alpha$ setzt, erhält man die Behauptung. □

Lemma 2.6 *Die Pfaffsche quadratische Form pf ist eine quadratische Form auf $Alt_4(K)$ und es gilt $(Alt_4(K), pf) \cong H(K) \perp H(K) \perp H(K)$ als quadratischer Raum, wobei $H(K)$ die hyperbolische Ebene über K bezeichnet.*

Beweis Als erstes zeigen wir, dass die Pfaffsche quadratische Form $pf(\alpha)$ eine quadratische Form auf $Alt_4(K)$ ist:
Sei $\lambda \in K$, dann folgt direkt aus der Formel der Pfaffschen quadratischen Form, dass $pf(\lambda\alpha) = \lambda^2 pf(\alpha)$, für alle $\alpha \in Alt_4(K)$ gilt. Seien nun $\alpha, \beta \in Alt_4(K)$, dann rechnet man leicht nach, dass $pf(\alpha+\beta) = pf(\alpha) + pf(\beta) + b_{pf}(\alpha,\beta)$, mit $b_{pf}(\alpha,\beta) = \alpha_{12}\beta_{34} + \alpha_{34}\beta_{12} + \alpha_{14}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{14} - \alpha_{13}\beta_{24} - \alpha_{24}\beta_{13}$.
Für jedes $\alpha = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le 4} \in Alt_4(K), \beta = (\beta_{ij})_{1\le i,j\le 4} \in Alt_4(K)$ und für jedes Paar (i, j) und jedes Paar (k, l) ist die Abbildung
$\mu_{(i,j)\times(k,l)} : Alt_4(K) \times Alt_4(K) \to K, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha_{ij} \cdot \beta_{kl}$ bilinear.

Da $b_{pf} = \mu_{(1,2)\times(3,4)} + \mu_{(3,4)\times(1,2)} + \mu_{(1,4)\times(2,3)} + \mu_{(2,3)\times(1,4)} - \mu_{(1,3)\times(2,4)} - \mu_{(2,3)\times(1,4)}$, also die Summe bilinearer Abbildungen ist, ist es selbst bilinear. Offensichtlich ist b_{pf} eine symmetrische Bilinearform. Somit ist $pf(\alpha)$ eine quadratische Form auf $Alt_4(K)$.

Die hyperbolische Ebene $H(K)$ über K ist der quadratische Raum $H(K) = (K^2, q)$, wobei q gegeben ist durch: $q\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) = xy$.

Und $H(K) \perp H(K) \perp H(K)$ ist der quadratische Raum $(K^2 + K^2 + K^2, q')$, mit $q'\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}\Big) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Die K-Dimension von $Alt_4(K)$ ist nach vorheriger Feststellung gleich $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$, daher gleich der K-Dimension von $K^2 + K^2 + K^2$.

Sei nun $\varphi : Alt_4(K) \to (K^2 + K^2 + K^2)$ die Abbildung definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} \\ -\alpha_{14} & -\alpha_{24} & -\alpha_{34} & 0 \end{pmatrix} \mapsto \Big(\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{14} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_{13} \\ \alpha_{24} \end{pmatrix}\Big).$$

Diese Abbildung ist K-linear und injektiv, und auf Grund derselben Dimension der beiden Vektorräume auch surjektiv, also ein linearer Isomorphismus.

Wir müssen nur noch zeigen, dass $pf(\alpha) = q'(\varphi(\alpha))$, für jedes $\alpha \in Alt_4(K)$.

Es gilt nun:

$q'(\varphi(\alpha)) = q'\Big(\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{14} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_{13} \\ \alpha_{24} \end{pmatrix}\Big) = \alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{14}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{24} = pf(\alpha).\square$

3.Eine wichtige Involution auf $Alt_4(K)$

In diesem Kapitel definieren wir eine wichtige Involution ρ auf $Alt_4(K)$, die die nützliche Eigenschaft $\rho(x)x = pf(x)Id_4$, für alle $x \in Alt_4(K)$, besitzt. Außerdem werden wir zeigen, dass jeder K-lineare Automorphismus ϕ auf $Alt_4(K)$ mit der Eigenschaft $\phi(x)x \in K \cdot Id_4$, für alle $x \in Alt_4(K)$, ein skalares Vielfaches von ρ ist.
Wir definieren die Abbildung $\rho : Alt_4(K) \to Alt_4(K)$ durch die Zuordnung:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} \\ -\alpha_{14} & -\alpha_{24} & -\alpha_{34} & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{34} & \alpha_{24} & -\alpha_{23} \\ \alpha_{34} & 0 & -\alpha_{14} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{14} & 0 & -\alpha_{12} \\ \alpha_{23} & -\alpha_{13} & \alpha_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen. Daher beginnen wir damit, einige wichtige Eigenschaften der Abbildung ρ darzulegen:

Lemma 3.1 *Die zuvor definierte Abbildung ρ ist ein K-linearer Automorphismus auf $Alt_4(K)$, mit $\rho^2 := \rho \circ \rho = Id$ und*
$\alpha \cdot \rho(\alpha) = \rho(\alpha) \cdot \alpha = pf(\alpha)$, für alle $\alpha \in Alt_4(K)$.

Beweis Die Abbildung ρ ist offensichtlich K-linear.

Sei $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} \\ -\alpha_{14} & -\alpha_{24} & -\alpha_{34} & 0 \end{pmatrix} \in Alt_4(K)$ beliebig.

Zuerst berechnen wir $\rho(\rho(\alpha))$:

$$\rho(\rho(\alpha)) = \rho \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{34} & \alpha_{24} & -\alpha_{23} \\ \alpha_{34} & 0 & -\alpha_{14} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{14} & 0 & -\alpha_{12} \\ \alpha_{23} & -\alpha_{13} & \alpha_{12} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(-\alpha_{12}) & \alpha_{13} & -(-\alpha_{14}) \\ -\alpha_{12} & 0 & -(-\alpha_{23}) & \alpha_{24} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 & -(-\alpha_{34}) \\ -\alpha_{14} & -\alpha_{24} & -\alpha_{34} & 0 \end{pmatrix} = \alpha.$$

Daraus folgt $\rho^2 = Id$. Somit ist ρ ein K-linearer Automorphismus.
Nun berechnen wir schließlich $\alpha\rho(\alpha)$, für beliebige $\alpha \in Alt_4(K)$.

$$\alpha\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} \\ -\alpha_{14} & -\alpha_{24} & -\alpha_{34} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{34} & \alpha_{24} & -\alpha_{23} \\ \alpha_{34} & 0 & -\alpha_{14} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{14} & 0 & -\alpha_{12} \\ \alpha_{23} & -\alpha_{13} & \alpha_{12} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{12}\alpha_{34} - \alpha_{13}\alpha_{24} + \alpha_{14}\alpha_{23} & \alpha_{13}\alpha_{14} - \alpha_{14}\alpha_{13} & -\alpha_{12}\alpha_{14} + \alpha_{14}\alpha_{12} & \alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{13}\alpha_{12} \\ -\alpha_{23}\alpha_{24} + \alpha_{24}\alpha_{23} & \alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{23}\alpha_{14} - \alpha_{24}\alpha_{13} & -\alpha_{12}\alpha_{24} + \alpha_{24}\alpha_{12} & \alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{13}\alpha_{12} \\ -\alpha_{23}\alpha_{34} + \alpha_{34}\alpha_{23} & \alpha_{13}\alpha_{34} - \alpha_{34}\alpha_{13} & -\alpha_{13}\alpha_{24} + \alpha_{23}\alpha_{14} + \alpha_{34}\alpha_{12} & \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{23}\alpha_{13} \\ -\alpha_{24}\alpha_{34} + \alpha_{34}\alpha_{24} & \alpha_{14}\alpha_{34} - \alpha_{34}\alpha_{14} & -\alpha_{14}\alpha_{24} + \alpha_{24}\alpha_{14} & \alpha_{14}\alpha_{23} - \alpha_{24}\alpha_{13} + \alpha_{34}\alpha_{12} \end{pmatrix}.$$

Da die Einträge dieser Matrix Elemente in K sind, kommutieren diese miteinander und man erhält:

$$\alpha\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} pf(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pf(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pf(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pf(\alpha) \end{pmatrix} = pf(\alpha) \cdot Id_4.$$

Und nun rechnen wir analog $\rho(\alpha)\alpha$ aus:

$$\rho(\alpha)\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{34} & \alpha_{24} & -\alpha_{23} \\ \alpha_{34} & 0 & -\alpha_{14} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{14} & 0 & -\alpha_{12} \\ \alpha_{23} & -\alpha_{13} & \alpha_{12} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} \\ -\alpha_{14} & -\alpha_{24} & -\alpha_{34} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{34}\alpha_{12} - \alpha_{24}\alpha_{13} + \alpha_{23}\alpha_{14} & -\alpha_{24}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{24} & -\alpha_{34}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{34} & -\alpha_{34}\alpha_{24} + \alpha_{24}\alpha_{34} \\ \alpha_{14}\alpha_{13} - \alpha_{13}\alpha_{14} & \alpha_{34}\alpha_{12} + \alpha_{14}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{24} & \alpha_{34}\alpha_{13} - \alpha_{13}\alpha_{34} & \alpha_{34}\alpha_{14} - \alpha_{14}\alpha_{34} \\ -\alpha_{14}\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{14} & -\alpha_{24}\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{24} & -\alpha_{24}\alpha_{13} + \alpha_{14}\alpha_{23} + \alpha_{12}\alpha_{34} & -\alpha_{24}\alpha_{14} + \alpha_{14}\alpha_{24} \\ \alpha_{13}\alpha_{12} - \alpha_{12}\alpha_{13} & \alpha_{23}\alpha_{12} - \alpha_{12}\alpha_{23} & \alpha_{23}\alpha_{13} - \alpha_{13}\alpha_{23} & \alpha_{23}\alpha_{14} - \alpha_{13}\alpha_{24} + \alpha_{12}\alpha_{34} \end{pmatrix}$$

Dies ergibt analog wie zuvor die Behauptung. □

Sei $u \in GL_4(K)$, mit $u = u^t$. Dann definieren wir eine Involution $\sigma_u : M_4(K) \to M_4(K)$ von orthogonalem Typ auf $M_4(K)$ durch: $\sigma_u(x) := ux^tu^{-1}$. Weiters setzen wir $Alt_4(K)^{\sigma_u} := \{x - \sigma_u(x) | x \in M_4(K)\}$. Dann gilt:

Lemma 3.2 *Sei $x \in M_4(K), u \in GL_4(K), u = u^t$, dann sind äquivalent:*

(i) $xu \in Alt_4(K)$

(ii) $u^{-1}x \in Alt_4(K)$

(iii) $x \in Alt_4(K)^{\sigma_u}$

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $xu \in Alt_4(K)$, also $xu = -ux^t$. Dann gilt $(u^{-1}x)^t = x^t u^{-1} = -u^{-1}(-ux^t)u^{-1} = -u^{-1}(xu)u^{-1} = -u^{-1}x$. Also gilt $(u^{-1}x)^t = -u^{-1}x$ und daher folgt $u^{-1}x \in Alt_4(K)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $u^{-1}x \in Alt_4(K)$, d.h. $u^{-1}x = -x^t u^{-1}$. Dann folgt $x = -ux^t u^{-1}$. Somit ist $2x = x - ux^t u^{-1}$. Da die Charakteristik von K ungleich 2 ist, folgt $x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}ux^t u^{-1}$. Setze $z := \frac{1}{2}x \in M_4(K)$, dann gilt $x = z - uz^t u^{-1} = z - \sigma_u(z) \in Alt_4(K)^{\sigma_u}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $x \in Alt_4(K)^{\sigma_u}$, dann gibt es ein $z \in M_4(K)$, sodass $x = z - \sigma_u(z) = z - uz^t u^{-1}$. Dann folgt $xu = zu - uz^t = -(xu)^t$. □

Korollar 3.3 *Sei $u \in GL_4(K), u = u^t$, dann ist $Alt_4(K)^{\sigma_u}$ ein 6-dimensionaler K-Untervektorraum von $M_4(K)$.*

Beweis Es reicht zu zeigen, dass $Alt_4(K)^{\sigma_u}$ ein K-Vektorraum ist. Denn, ist $Alt_4(K)^{\sigma_u}$ ein K-Vektorraum, dann ist $\delta : Alt_4(K) \to Alt_4(K)^{\sigma_u}$, $\delta(x) = xu$ eine K-lineare Abbildung. Wegen Lemma 3.2 ist δ bijektiv, also ist δ sogar ein K-linearer Isomorphismus. Sei $\psi : M_4(K) \to M_4(K)$ die Abbildung $x \mapsto x - \sigma_u(x)$. Als eine Involution auf $M_4(K)$ ist σ_u insbesondere K-linear. Daher ist auch ψ eine K-lineare Abbildung. Als Bild von ψ ist daher $Alt_4(K)^{\sigma_u}$ ein K-Untervektorraum von $M_4(K)$. □

Definition 3.4 *Sei $u \in GL_4(K)$ mit $u = u^t$, dann definiere auf dem K-Vektorraum $Alt_4(K)^{\sigma_u}$ die Abbildung $\rho_u : Alt_4(K)^{\sigma_u} \to Alt_4(K)^{\sigma_u}$ durch die Zuordnung $\rho_u(y) := \rho(u^{-1}y)u^{-1}$.*

Bemerkung 3.5 Die Abbildung ρ_u ist wegen Lemma 3.2 wohldefiniert, denn: Ist $y \in Alt_4(K)^{\sigma_u}$, dann ist $u^{-1}y \in Alt_4(K)$ und $\rho(u^{-1}y) \in Alt_4(K)$

ebenfalls. Dann gibt es ein $z \in Alt_4(K)^{\sigma_u}$, sodass $\rho(u^{-1}y) = zu$ gilt. Und somit gilt $\rho_u(y) = zuu^{-1} = z \in Alt_4(K)^{\sigma_u}$.

Satz 3.6 *Sei $\phi : Alt_4(K) \to Alt_4(K)$ ein K-linearer Isomorphismus, sodass $\phi(x)x \in K \cdot Id_4$, für alle $x \in Alt_4(K)$ [oder $x\phi(x) \in K \cdot Id_4$, für alle $x \in Alt_4(K)$], dann gibt es ein Skalar $\mu \in K^*$, sodass $\phi = \mu\rho$.*

Beweis Man wähle folgende Basis $\mathfrak{F} := \{f_1, \dots, f_6\}$ für $Alt_4(K)$:
Sei $\{e_{ij}, 1 \leq i, j \leq 4\}$ die Standardbasis von $M_4(K)$, dann setze
$f_1 := e_{12} - e_{21}, f_2 := e_{13} - e_{31}, f_3 := e_{14} - e_{41}, f_4 := e_{23} - e_{32}, f_5 := e_{24} - e_{42}$, $f_6 := e_{34} - e_{43}$. Diese haben folgende Form:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $0 = \sum_{i=1}^{6} \delta_i f_i = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ -\delta_1 & 0 & \delta_4 & \delta_5 \\ -\delta_2 & -\delta_4 & 0 & \delta_6 \\ -\delta_3 & -\delta_5 & -\delta_6 & 0 \end{pmatrix}$.

Dann folgt sofort, dass $\delta_1 = \cdots \delta_6 = 0$ gilt, also sind $f_1, \dots, f_6$ linear unabhängig. Da die K-Dimension von $Alt_4(K)$ genau 6 ist, folgt insbesondere, dass $\mathfrak{F}$ eine Basis für $Alt_4(K)$ bildet. Außerdem gilt $\rho(f_1) = -f_6, \rho(f_2) = f_5$, $\rho(f_3) = -f_4, \rho(f_4) = -f_3, \rho(f_5) = f_2, \rho(f_6) = -f_1$.
Sei nun $\varphi : Alt_4(K) \to Alt_4(K)$ ein Isomorphismus mit $\varphi(x)x \in K$, für alle $x \in Alt_4(K)$. Als Isomorphismus gilt für φ und f_i somit
$\varphi(f_i) = \sum_{j=1}^{6} \lambda_{ij} f_j, 1 \leq i \leq 6$.
Als nächstes berechnen wir alle Produkte der Form $f_j f_i, 1 \leq i, j \leq 6$.
Da jedoch $(f_i f_j)^t = f_j^t f_i^t = (-f_j)(-f_i) = f_j f_i$ gilt, muss man nur die Produkte $f_j f_i, 1 \leq j \leq 6, j \leq i \leq 6$ berechnen.

$$f_1f_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_1f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_1f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_1f_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_1f_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2f_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2f_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2f_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_2f_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_3f_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f_3f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_3f_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_3f_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_4f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_4f_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_4f_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_5f_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, f_5f_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, f_6f_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da $\varphi(f_i)f_i = \operatorname{diag}(c_i, c_i, c_i, c_i)$ gilt, für ein $c_i \in K$, $1 \leq i \leq 6$, folgt
$\varphi(f_1) = \lambda_{16}f_6$, $\varphi(f_2) = \lambda_{25}f_5$, $\varphi(f_3) = \lambda_{34}f_4$, $\varphi(f_5) = \lambda_{52}f_2$, $\varphi(f_6) = \lambda_{61}f_1$.
Betrachte nun $\varphi(f_1 + f_6)(f_1 + f_6)$:
Einerseits gilt nach Voraussetzung $\varphi(f_1 + f_6)(f_1 + f_6) = \operatorname{diag}(c, c, c, c)$, für ein $c \in K$, andererseits gilt wegen der Linearität von φ und des Distributivgesetzes

$\varphi(f_1+f_6)(f_1+f_6) = \underbrace{\varphi(f_1)f_1}_{=0} + \varphi(f_1)f_6 + \varphi(f_6)f_1 + \underbrace{\varphi(f_6)f_6}_{=0} = \varphi(f_1)f_6 + \varphi(f_6)f_1 =$
$\lambda_{16}f_6f_6 + \lambda_{61}f_1f_1 = \mathrm{diag}(-\lambda_{16}, -\lambda_{16}, -\lambda_{61}, -\lambda_{61})$.
Daraus folgt $\lambda_{16} = \lambda_{61}$. Analog folgt $\lambda_{25} = \lambda_{52}$ und $\lambda_{34} = \lambda_{43}$.
Betrachte nun $\varphi(f_1 + f_2)(f_1 + f_2)$:
Einerseits gilt nach Voraussetzung $\varphi(f_1 + f_2)(f_1 + f_2) = \mathrm{diag}(d, d, d, d)$, für ein $d \in K$, andererseits gilt wegen des Distributivgesetzes und der Linearität von φ
$\varphi(f_1+f_2)(f_1+f_2) = \underbrace{\varphi(f_1)f_1}_{=0} + \varphi(f_1)f_2 + \varphi(f_2)f_1 + \underbrace{\varphi(f_2)f_2}_{=0} = \varphi(f_1)f_2 + \varphi(f_2)f_1 =$

$$\lambda_{16}f_6f_2 + \lambda_{25}f_5f_1 = (\lambda_{16}f_2f_6 + \lambda_{25}f_1f_5)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} + \lambda_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t .$$

Also gilt $\lambda_{25} = -\lambda_{16}$. Auf gleiche Weise zeigt man $\lambda_{16} = \lambda_{34}$. Setze nun $\mu := -\lambda_{16}$, dann folgt daraus die Behauptung. □

Satz 3.7 *Sei $u \in GL_4(K)$ mit $u = u^t$ und $\phi_u : Alt_4(K)^{\sigma_u} \to Alt_4(K)^{\sigma_u}$ ein K-linearer Isomorphismus, sodass $\phi_u(x)x \in K \cdot Id_4$, für alle $x \in Alt_4(K)^{\sigma_u}$ [oder $x\phi(x) \in K \cdot Id_4$, für alle $x \in Alt_4(K)^{\sigma_u}$], dann gibt es ein Skalar $\mu \in K^*$, sodass $\phi_u = \mu\rho_u$.*

Beweis Nach Lemma 3.2 können wir folgende K-lineare Isomorphismen definieren: $\gamma_u : Alt_4(K)^{\sigma_u} \to Alt_4(K)$, $x \mapsto xu$ und $\tau_u : Alt_4(K) \to Alt_4(K)^{\sigma_u}$, $y \mapsto yu$. Es gilt dann: $\rho_u = \gamma_u^{-1} \circ \rho \circ \tau_u^{-1}$. Setze nun $\psi_u := \gamma_u \circ \phi_u \circ \tau_u : Alt_4(K) \to Alt_4(K)$. Da γ_u und τ_u K-lineare Isomorphismen sind, ist auch ψ_u ein K-linearer Isomorphismus. Sei nun $x \in Alt_4(K)$, dann gilt:
$\psi_u(x) \cdot x = \gamma_u(\phi_u(\tau_u)) \cdot x = \gamma_u(\phi_u(ux)) \cdot x = \phi_u(ux) \cdot u \cdot x = \phi_u(ux) \cdot (ux)$.
Da $x \in Alt_4(K)$ gilt, folgt $ux = \tau_u(x) \in Alt_4(K)^{\sigma_u}$. Nach Voraussetzung gilt $\phi_u(ux)\cdot(ux) \in K\cdot Id_4$ und somit gilt auch $\psi_u(x)\cdot x \in K\cdot Id_4$. Nach Satz 3.6 gibt es ein $\mu \in K^*$, sodass $\psi_u = \mu\cdot\rho$. Zusammen erhält man $\mu\rho = \psi_u = \gamma_u\circ\phi_u\circ\tau_u$. Woraus insgesamt folgt:
$\phi_u = \gamma_u^{-1} \circ (\mu\rho) \circ \tau_u^{-1} = \mu(\gamma_u \circ \rho \circ \tau_u^{-1}) = \mu\rho_u$. □

4. Albert Form

In diesem Kapitel wollen wir, falls A, B Quaternionalgebren über K sind, auf einem Untervektorraum von $A \otimes_K B$ eine spezielle quadratische Form definieren, mit deren Hilfe man ein Kriterium formulieren kann, wann dieses Tensorprodukt eine Divisionsalgebra ist.
Sei $A := Q(a_1, a_2|K)$ Quaternion-Algebra über K mit Basis $1, i, j, k$ und sei $B := Q(b_1, b_2|K)$ Quaternion-Algebra über K mit Basis $1, u, v, w$. Beide seien ausgestattet mit den Standardinvolutionen σ_A bzw. σ_B, d.h. für $x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ ist definiert als $\sigma_A(x) = x_0 1 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$ und für $y = y_0 1 + y_1 u + y_2 v + y_3 w$ sei $\sigma_B(y) = y_0 1 - y_1 u - y_2 v - y_3 w$. Diese sind nach Satz 1.7 Involution symplektischen Typs auf A bzw. B. Setze $\sigma := \sigma_A \otimes \sigma_B$, dann definiert σ nach Satz 1.2. eine Involution auf $A \otimes_K B$, die nach Satz 1.8 orthogonalen Types ist. Wir definieren nun $Alt_K(A \otimes_K B) := \{x - \sigma(x) | x \in A \otimes_K B\}$.

Lemma 4.1 *Seien A, B Quaternionalgebren über K. Dann ist $Alt_K(A \otimes_K B)$ ein 6-dimensionaler K-Vektorraum.*

Beweis Sei $\psi : A \otimes_K B \to A \otimes_K B$ die Abbildung $x \mapsto \psi(x) := x - \sigma(x)$. Dann ist ψ eine K-lineare Abbildung und daher ist $Alt_K(A \otimes_K B)$ als Bild von ψ ein K-Untervektorraum von $A \otimes_K B$. Zur Bestimmung der Dimension von $Alt_K(A \otimes_K B)$ reicht es, zu betrachten, was mit der Basis von $A \otimes_K B$ unter ψ passiert. Es gilt $\sigma(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1$, da σ eine Involution ist, und somit $\psi(1 \otimes 1) = 0$. Da $\sigma_A(1) = 1$ und $\sigma_B(c_2) = -c_2$, für $c_2 \in \{u, v, w\}$, gilt, wird jedes Basiselement c von der Form $c = 1 \otimes c_2$, $c_2 \in \{u, v, w\}$ unter σ auf $-c$ abgebildet und man erhält dadurch $\psi(1 \otimes c_2) = 2(1 \otimes c_2) \neq 0$, für $c_2 \in \{u, v, w\}$, da die Charakteristik von K ungleich 2 ist. Analog gilt dies für c von der Form $c = c_1 \otimes 1$, mit $c_1 \in \{i, j, k\}$. Daher ist die Dimension von $Alt_K(A \otimes_K B)$ zumindest 6, da diese als Basiselemente von $A \otimes_K B$ insbesondere K-linear unabhängig sind. Andererseits, ist c von der Form $c = c_1 \otimes c_2$, mit $c_1 \in \{i, j, k\}$ und $c_2 \in \{u, v, w\}$, dann gilt $\sigma(c) = c$, da in diesem Fall $\sigma_A(c_1) = -c_1$ und $\sigma_B(c_2) = -c_2$ gilt. Also gilt $\psi(c) = 0$. D.h. aber, der Kern von ψ ist ein zumindest 10-dimensionaler K-Unterraum von $A \otimes_K B$. Da $Alt_K(A \otimes_K B)$ das Bild von $A \otimes_K B$ unter ψ ist, ist die Dimension von $Alt_K(A \otimes_K B)$ kleiner gleich 6. Also erhält man insgesamt $6 \leq \dim(Alt_K(A \otimes_K B)) \leq 6$, woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 4.2 (i) Aus dem Beweis sieht man, dass $\{i \otimes 1, j \otimes 1, k \otimes 1, 1 \otimes u, 1 \otimes v, 1 \otimes w\}$ eine Basis für $Alt_K(A \otimes_K B)$ bildet.

(ii) Seien A, B Quaternionalgebren über K, dann gibt es endliche Körpererweiterungen $L_A|K$ und $L_B|K$, sodass L_A ein Zerfällungskörper von A und L_B einer von B ist. Setze nun $K' := \bigcap_{\substack{L \supseteq K \text{ Körper} \\ L_A \subseteq L \text{ endlich} \\ L_B \subseteq L \text{ endlich}}} L \subseteq L_A(L_B)$. Dann ist K' eine endliche Körpererweiterung von Kund K' ist ein Zerfällungskörper von A und B, denn: Die Brauer-Gruppen-Abbildung $r_{K'|K} : Br(K) \to Br(K')$ hat die Eigenschaft $r_{K'|K} = r_{K'|L_A} \circ r_{L_A|K}$ beziehungsweise $r_{K'|K} = r_{K'|L_B} \circ r_{L_B|K}$. Es bezeichne $[A]$ die Äquivalenzklasse von A in der Brauer-Gruppe $Br(K)$ von K, dann erhält man dadurch $r_{K'|K}([A]) = r_{K'|L_A}(r_{L_A|K}([A])) = r_{K'|L_A}(1_{Br(L_A)}) = 1_{Br(K')}$, da L_A ein Zerfällungskörper von A ist, und analog gilt dies für B.
Somit ergibt sich: $(A \otimes_K B) \otimes_K K' \cong A \otimes_K (B \otimes_K K') \cong A \otimes_K M_2(K') \cong A \otimes_K K' \otimes_K M_2(K) \cong M_2(K') \otimes_K M_2(K') \cong M_4(K')$.
Außerdem kann man $Alt_K(A \otimes_K B \otimes_K K')$ eindeutig definieren als $Alt_K(A \otimes_K B \otimes_K K') := \{x' - \sigma'(x') | x' \in (A \otimes_K B \otimes_K K')\}$, wobei $\sigma' := \sigma_A \otimes \sigma_B \otimes id_{K'}$ ist. Sei $x' \in A \otimes_K B \otimes_K K'$, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $x \in A \otimes_K B$ und genau ein $k' \in K'$, sodass $x' = x \otimes k'$. Daher gilt $x' - \sigma'(x') = x \otimes k' - \sigma(x) \otimes k' = (x - \sigma(x)) \otimes k'$. Daraus folgt, dass $Alt_K(A \otimes_K B \otimes_K K') \cong Alt_K(A \otimes_K B) \otimes_K K'$ als K-Vektorraum. Dies gilt für jeden gemeinsamen Zerfällungskörper K' von A und B.

(iii) Es gibt also lineare Isomorphismen $\phi : Alt_K(A \otimes_K B) \to Alt_4(K)$ und $\psi_u : Alt_K(A \otimes_K B) \to Alt_4(K)^{\sigma_u}$.

Auf $Alt_K(A \otimes_K B)$ definieren wir nun die Abbildung $\pi_{A \otimes_K B} : Alt_K(A \otimes_K B) \to Alt_K(A \otimes_K B)$ durch K-lineare Fortsetzung folgender Zuordnung auf den Basiselementen: $i \otimes 1 \mapsto i \otimes 1, j \otimes 1 \mapsto j \otimes 1, k \otimes 1 \mapsto k \otimes 1$ bzw. $1 \otimes u \mapsto -1 \otimes u, 1 \otimes v \mapsto -1 \otimes v, 1 \otimes w \mapsto -1 \otimes w$.
$\pi_{A \otimes_K B}$ ist offensichtlich ein K-linearer Automorphismus auf $Alt_K(A \otimes_K B)$.

Lemma 4.3 *Sei $A = Q(a, b|K)$, mit $a, b \in K^*$ eine Quaternion-Algebra. Dann definiert, für $x \in A$, die Abbildung $n_A(x) := x\sigma_A(x)$ eine quadratische Form auf A. Sie heißt die* ***reduzierte Norm****.*

Beweis Zeige zuerst, dass, für jedes $x \in A$, $n_A(x) \in K \cdot 1$ liegt.
Sei $x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in A$, dann gilt $n_A(x) = x\sigma_A(x) =$
$(x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) \cdot \sigma_A(x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) =$
$(x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)(x_0 1 - x_1 i - x_2 j - x_3 k) =$
$(x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2)1 \in K \cdot 1$.
Sei $\lambda \in K, x \in A$. Dann gilt $n_A(\lambda x) = (\lambda x)\sigma_A(\lambda x)$. Da σ_A eine Involution, also insbesondere K-linear ist und der Körper K das Zentrum von A ist, gilt $(\lambda x)\sigma_A(\lambda x) = \lambda^2 x\sigma_A(x) = \lambda^2 n_A(x)$. Seien nun $x, y \in A$, dann gilt $n_A(x+y) = (x+y)\sigma_A(x+y) = (x+y)(\sigma_A(x)+\sigma_A(y)) = x\sigma_A(x) + x\sigma_A(y) + y\sigma_A(x) + y\sigma_A(y) = n_A(x) + n_A(y) + b_{n_A}(x, y)$, mit $b_{n_A}(x, y) = x\sigma_A(y) + y\sigma_A(x)$.
Es ist $b_{n_A}(x, y)$ offensichtlich symmetrisch in x und y und da σ_A eine K-lineare Abbildung ist, ist b_{n_A} eine Bilinearform und somit eine symmetrische Bilinearform. Also ist n_A eine quadratische Form auf A mit dazugehöriger Bilinearform $b_{n_A}(x, y) = x\sigma_A(y) + y\sigma_A(x)$. □

Sei $A' :=< 1 >^\perp$ bezüglich n_A in A, dann ist $A' =< 1 >^\perp =$
$\{x \in A | b_{n_A}(1, x) = 0\} = \{x \in A | x = -\sigma_A(x)\}$.
Die Bilinearform $b_{n_{A(A)}} : A \to A^*$ ist nicht ausgeartet: Denn sei
$y = y_0 1 + y_1 i + y_2 j + y_3 k \in A, y \neq 0$ beliebig, dann gilt für jedes
$x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in A$ nämlich
$b_{n_{A(A)}}(y)(x) = 2(x_0 y_0 - ax_1 y_1 - bx_2 y_2 + abx_3 y_3) \cdot 1$. Daher ist $A^\perp = \{0\}$.
Weil A ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum ist, hat A' die K-Dimension gleich 3. Weiters gilt $i, j, k \in A'$ und da diese linear unabhängig über K sind, bilden diese eine Basis für A'. Also gilt $A' = Ki \oplus Kj \oplus Kk$. Analog sei
$B' :=< 1 >^\perp$ bezüglich n_B in B definiert. Dann gilt wie zuvor
$B' = Ku \oplus Kv \oplus Kw$. Definiere $A'' = A' \otimes 1 \subseteq A \otimes B$ und $B'' = 1 \otimes B \subseteq A \otimes B$.
Man erhält dann wegen Bemerkung 4.2 die Zerlegung: $Alt_K(A \otimes_K B) = A'' \oplus B'' \cong A' \oplus B'$.

Lemma 4.4 *Sei $z \in Alt_K(A \otimes_K B)$, dann gilt $\pi_{A \otimes_K B}(z) \cdot z =$
$z \cdot \pi_{A \otimes_K B}(z) \in K$ und es definiert eine quadratische Form auf
$Alt_K(A \otimes_K B)$. Diese bezeichnen wir mit $pf_{A \otimes B}$.*

Beweis Sei $z \in Alt_K(A \otimes_K B)$, dann gibt es wegen zuvoriger Zerlegung $z_1 \in A''$ und $z_2 \in B''$, sodass $z = z_1 + z_2$. Damit ist $\pi_{A\otimes_K B}(z) \cdot z = \pi_{A\otimes_K B}(z_1 + z_2) \cdot (z_1 + z_2) = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = z_1^2 + z_1 z_2 - z_2 z_1 - z_2^2$. Da offensichtlich jedes Element aus A'' mit jedem Element aus B'' kommutiert, gilt $\pi_{A\otimes_K B}(z) \cdot z = z_1^2 - z_2^2$. Umgekehrt ist $z \cdot \pi_{A\otimes_K B}(z) = (z_1 + z_2) \cdot (z_1 - z_2) = z_1^2 - z_1 z_2 + z_2 z_1 + z_2^2 = z_1^2 - z_2^2$, wie zuvor. Also folgt die erste Behauptung. Nun gilt für jedes Element $x \in A''$ und $y \in B''$ aber $\sigma_A(x) = -x$ und $\sigma_B(y) = -y$. Also ist $z_1^2 = -z_1(-z_1) = -z_1 \sigma_A(z_1) = n_A(z_1)$, analog gilt $z_2^2 = -n_B(z_2)$. Daher ist $\pi_{A\otimes_K B}(z) \cdot z = n_B(z_2) - n_A(z_1) \in K$. Somit ist $\pi_{A\otimes_K B}(z) \cdot z$ als Subtraktion zweier quadratischer Formen eine quadratische Form auf $Alt_K(A \otimes_K B)$. □

Definition 4.5 *Seien A, B Quaternionalgebren über K. Dann bezeichnen wir mit $q(A, B) := (Alt_K(A \otimes_K B), pf_{A\otimes B})$ die* ***Albert Form*** *von $A \otimes_K B$.*

Die Albert-Form ist benannt nach A.A. Albert, der, wie im Vorwort bereits erwähnt, als Erster 1931 das Isomorphie-Kriterium für das Tensorprodukt zweier Quaternion-Algebren bewies. (Vgl. [1])
Aus dem Beweis von Lemma 4.4 folgt, dass $q(A, B) \cong (A', -n_A) \perp (B', n_B) \cong < a_1, a_2, -a_1 a_2 > \perp < -b_1, -b_2, +b_1 b_2 >$ gilt. Insbesondere ist $q(A, B)$ ein regulärer quadratischer Raum.

5. Ähnlichkeit quadratischer Räume

Definition 5.1 *Zwei quadratische Räume* (V, q) *und* (V', q') *heißen* ***ähnlich****, falls es ein Skalar* $\lambda \in K^*$ *und einen* K*-linearen Isomorphismus* $\phi : V \to V'$ *gibt, sodass* $\lambda \cdot q'(\phi(x)) = q(x)$*, für alle* $x \in V$*, gilt. Schreibe dafür* $(V, q) \sim (V', q')$*. Äquivalent:* $\frac{1}{\lambda} q(\phi^{-1}(y)) = q'(y)$ *für alle* $y \in V'$*.*

Offensichtlich definiert Ähnlichkeit von quadratischen Räumen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der quadratischen Räume über K.

Lemma 5.2 *Seien* (V, q) *und* (V', q') *zwei endlich-dimensionale, ähnliche und reguläre quadratische Räume, dann sind* $C_0(V, q)$ *und* $C_0(V', q')$ *als* K*-Algebren isomorph.*

Beweis Setze $C := C(V, q)$ die Clifford-Algebra des quadratischen Raumes (V, q) und $C' := C(V', q')$ die Clifford-Algbra von (V', q'). Weiters setze $C_0 := C_0(V, q)$ und $C'_0 := C_0(V', q')$. Da (V, q) und (V', q') ähnliche quadratische Räume sind,gibt es also einen K-linearen Isomorphismus $\phi : V \to V'$ und ein $\lambda \in K^*$, sodass $\lambda q'(\phi(x)) = q(x)$ für alle $x \in V$ gilt. Wir unterscheiden nun die zwei Fälle, ob λ ein Quadrat oder kein Quadrat in K ist.

1. Fall $\lambda \in K^*$ ist ein Quadrat:

Sei $\iota : V \to C$ die Strukturabbildung bezüglich $C(V, q)$ und $\iota' : V' \to C'$ jene bezüglich $C(V', q')$. Sei $\alpha : V \to C'$ die Abbildung $v \mapsto \alpha(v) := \sqrt{\lambda}\iota'(\phi(v))$. Dann ist α als Zusammensetzung der K-linearen Abbildungen ι' und ϕ eine K-lineare Abbildung. Weiters gilt

$(\alpha(v))^2 = (\sqrt{\lambda}\iota'(\phi(v)))^2 = \lambda(\iota'(\phi(v)))^2 = \lambda q'(\phi(v))1_{C'}$

auf Grund der Definition von ι'. Aber $\lambda q'(\phi(v)) = q(v)$ wegen der Ähnlichkeit der beiden quadratischen Räume. Insgesamt ergibt sich also,dass α eine K-lineare Abbildung von V in die K-Algebra C' ist, mit $(\alpha(v))^2 = q(v)1_{C'}$, für jedes $v \in V$. Also gibt es nach der universellen Eigenschaft von C einen K-Algebren-Homomorphismus $\overline{\alpha} : C \to C'$, sodass $\overline{\alpha} \circ \iota = \alpha = \sqrt{\lambda}\iota' \circ \phi$ gilt.

Sei $\alpha' : V' \to C$ die Abbildung $v' \mapsto \alpha'(v') := \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\iota(\phi^{-1}(v'))$. Dann ist α' als Zusammensetzung der K-linearen Abbildungen $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\iota$ und ϕ^{-1} ebenfalls K-linear. Außerdem gilt
$(\alpha'(v'))^2 = (\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\iota(\phi^{-1}(v')))^2 = \frac{1}{\lambda}(\iota(\phi^{-1}(v')))^2 = \frac{1}{\lambda}q(\phi^{-1}(v'))1_C$
nach Definition von ι. Aus der Ähnlichkeit der beiden quadratischen Räume folgt $\frac{1}{\lambda}q(\phi^{-1}(v'))1_C = q'(v')1_C$. Somit existiert nach der universellen Eigenschaft von C' ein K-Algebren-Homomorphismus
$\overline{\alpha'} : C' \to C$, mit $\overline{\alpha'} \circ \iota' = \alpha' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\iota \circ \phi^{-1}$. Es folgt

$$\overline{\alpha'} \circ \iota' \circ \phi = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\iota \Leftrightarrow \overline{\alpha'} \circ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda}\iota' \circ \phi = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\iota \overbrace{\Leftrightarrow}^{K\subseteq Z(C'),K\subseteq Z(C)} \overline{\alpha'} \circ \underbrace{\sqrt{\lambda}\iota' \circ \phi}_{=\overline{\alpha}\circ\iota} = \iota \Leftrightarrow$$

$\overline{\alpha'} \circ \overline{\alpha} \circ \iota = \iota \Leftrightarrow \overline{\alpha'} \circ \overline{\alpha} = id_C$. Analog folgt $\overline{\alpha} \circ \overline{\alpha'} = id_{C'}$. Daher sind $\overline{\alpha}$ und $\overline{\alpha'}$ zueinander inverse K-Algebren-Isomorphismen. Das heißt: $C \cong C'$ als K-Algebren via $\overline{\alpha}$. Insbesondere ist $\alpha|_{C_0} : C_0 \to C'$ injektiv.
Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine K-Basis von V. Dann bilden alle Elemente der Form $\iota(e_{i_1})\iota(e_{i_2})\cdots\iota(e_{i_m})$ mit $0 \leq m \leq n$, m gerade und $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$ eine K-Basis für C_0. Da ϕ ein K-linearer Isomorphismus ist, kann man o.B.d.A. $\{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$ als K-Basis für V' nehmen. Setze $e_i' := \phi(e_i)$, dann bilden analog alle Elemente der Form $\iota'(e_{i_1}')\iota'(e_{i_2}')\cdots\iota'(e_{i_m}')$ mit
$0 \leq m \leq n$, m gerade und $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$ eine K-Basis für C_0'.
Sei nun $\iota(e_{i_1})\iota(e_{i_2})\cdots\iota(e_{i_m})$ ein Basiselement von C_0. Da $\overline{\alpha}$ ein K-Algebren-Homomorphismus ist, folgt $\overline{\alpha}(\iota(e_{i_1})\iota(e_{i_2})\cdots\iota(e_{i_m})) = \overline{\alpha}(\iota(e_{i_1}))\cdots\overline{\alpha}(\iota(e_{i_m})) = (\sqrt{\lambda})^m \cdot \iota'(\phi(e_{i_1}))\cdots\iota'(\phi(e_{i_m}))$. Aufgrund $\overline{\alpha}(x)\overline{\alpha}(y) + \overline{\alpha}(y)\overline{\alpha}(x) = b_q(x,y)1_{C'}$, für alle $x, y \in C$, ist $\overline{\alpha}(\iota(e_{i_1})\iota(e_{i_2})\cdots\iota(e_{i_m})) = \overline{\alpha}(\iota(e_{i_1}))\cdots\overline{\alpha}(\iota(e_{i_m}))$ eine Linearkombination von Basiselementen von C_0'. Somit gilt $\overline{\alpha}(C_0) \subseteq C_0'$. Da $\overline{\alpha}$ injektiv ist und $\dim(C_0) = 2^{\dim(V)-1} = 2^{\dim(V')-1} = \dim(C_0')$ gilt, ist $\overline{\alpha}|_{C_0} : C_0 \to C_0'$ surjektiv und daher ein K-Algebren-Isomorphismus.
<u>2. Fall: λ ist kein Quadrat in K^*:</u>
Zeige folgende <u>Behauptung</u>: Seien $v_1, \ldots, v_{2n} \in V$, dann definiert

$$\phi' : C_0 \to C_0',\ \phi'\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i\iota(v_1)\cdots\iota(v_{2i})\Big) := \sum_{i=1}^{n}(\lambda^{-i}a_i\iota'(\phi(v_1))\cdots\iota'(\phi(v_{2i}))),$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in K$, einen K-Algebren-Isomorphismus. Insbesondere gilt dann $\phi'\Big(\iota(v_1)\cdots\iota(v_{2n})\Big) := \lambda^{-n}\iota'(\phi(v_1))\cdots\iota'(\phi(v_{2n}))$
Das so definierte ϕ' ist nach Definition K-linear und multiplikativ. Weiters ist ϕ' injektiv, da jedes Basiselement von C_0 auf ein Basiselement von C_0' abgebildet wird. Es reicht nur noch zu zeigen, dass $\phi'(1_C) = 1_{C'}$ gilt.
Da (V, q) ein regulärer quadratischer Raum ist, gibt es ein $v \in V$, sodass

$q(v) \neq 0$. Dann gilt $\phi'(1_C) = \phi'(q(v)^{-n}\iota(v)^{2n}) = q(v)^{-n}\phi'(\iota(v)^{2n}) = q(v)^{-n}\lambda^{-n}\iota'(\phi(v))^{2n} = q(v)\lambda^{-n}q'(\phi(v))^n \cdot 1_{C'} \overbrace{=}^{\text{Ähnlichkeit}} q(v)^{-n}\lambda^{-n}\lambda^n q(v)^n \cdot 1_{C'} = 1_{C'}$. □

Lemma 5.3 *Seien $A = Q(a_1, a_2|K), B = Q(b_1, b_2|K)$ Quaternion-Algebren über K und $q(A, B)$ die entsprechende Albert-Form, dann gibt es einen K-Algebren-Isomorphismus*
$\overline{\kappa} : C(q(A, B)) \to M_2(A \otimes_K B)$.

Beweis Sei $\kappa : Alt_K(A \otimes_K B) \to M_2(A \otimes_K B)$ die Abbildung $y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \pi_{A\otimes_K B}(y) \\ y & 0 \end{pmatrix}$.
κ ist eine K-lineare Abbildung und es gilt

$$(\kappa(y))^2 = \begin{pmatrix} 0 & \pi_{A\otimes_K B}(y) \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \pi_{A\otimes_K B}(y) \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{A\otimes_K B}(y)y & 0 \\ 0 & y\pi_{A\otimes_K B}(y) \end{pmatrix} = pf_{A\otimes_K B}(y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also gibt es wegen der universellen Eigenschaft der Clifford-Algebra einen K-Algebren-Homomorphismus $\overline{\kappa} : C := C(q(A, B)) \to M_2(A \otimes_K B)$, mit $\overline{\kappa} \circ \iota = \kappa$. Da κ injektiv ist, ist auch ι injektiv, also kann man $Alt_K(A \otimes_K B)$ mit $\iota(Alt_K(A \otimes_K B))$ identifizieren. Da $\dim(Alt_K(A \otimes_K B)) = 6$, also gerade ist, ist daher $C(q(A, B))$ nach Satz 0.9 eine einfache zentrale K-Algebra. Offensichtlich ist $\overline{\kappa}$ nicht die Null-Abbildung und daher ist wegen der Einfachheit der Clifford-Algebra die Abbildung $\overline{\kappa}$ ein injektiver K-Algebren-Homomorphismus. Weiters gilt $\dim(C(q(A, B))) = 2^{\dim(Alt_K(A\otimes_K B))} = 2^6 = 64 = 4 \cdot 16 = \dim(M_2(A \otimes_K B))$. Also muss $\overline{\kappa}$ auch surjektiv sein. Und daher ist $\overline{\kappa}$ bijektiv. Somit ist $\overline{\kappa}$ ein K-Algebren-Isomorphismus. □

Bemerkung 5.4 Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und S eine R-Algebra. Setze $D_2(S) := \{\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} : s_1, s_2 \in S\}$ und $N_2(S) := \{\begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ t_2 & 0 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in S\}$, dann erhält man für $M_2(S)$ die Zerlegung $M_2(S) = D_2(S) \oplus N_2(S)$ als direkte Summe von R-Untermoduln. Es gilt $1 \in D_2(S)$,
$D_2(S) \cdot D_2(S) = \{\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & s_4 \end{pmatrix} : s_1, s_2, s_3, s_4 \in S\} =$
$\{\begin{pmatrix} s_1 s_3 & 0 \\ 0 & s_2 s_4 \end{pmatrix} : s_1, s_2, s_3, s_4 \in S\} \subseteq D_2(S)$,
$D_2(S) \cdot N_2(S) = \{\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ t_2 & 0 \end{pmatrix} : s_1, s_2, t_1, t_2 \in S\} =$

$\{\begin{pmatrix} 0 & s_1t_1 \\ s_2t_2 & 0 \end{pmatrix} : s_1, s_2, t_1, t_2 \in S\} \subseteq N_2(S)$,

$N_2(S) \cdot D_2(S) = \{ \begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ t_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} : s_1, s_2, t_1, t_2 \in S\} =$

$\{\begin{pmatrix} 0 & t_1s_2 \\ t_2s_1 & 0 \end{pmatrix} : s_1, s_2, t_1, t_2 \in S\} \subseteq N_2(S)$ und

$N_2(S) \cdot N_2(S) = \{\begin{pmatrix} 0 & t_1 \\ t_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & t_3 \\ t_4 & 0 \end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3, t_4 \in S\} =$

$\{\begin{pmatrix} t_1t_3 & 0 \\ 0 & t_2t_4 \end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3, t_4 \in S\} \subseteq D_2(S)$.

Wählt man $S_0 = D_2(S)$ und $S_1 = N_2(S)$, so erhält man auf $M_2(S)$ eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung.

Lemma 5.5 *Sei $\varphi : Alt_K(A \otimes_K B) \to Alt_K(A \otimes_K B)$ ein K-linearer Isomorphismus mit $\varphi(x)x \in K$, oder $x\varphi(x) \in K$, für alle $x \in Alt_K(A \otimes_K B)$. Dann gibt es ein $\lambda \in K^*$, sodass $\varphi = \lambda\pi_{A\otimes_K B}$.*

Beweis Nach Bemerkung 4.2(ii) gibt es einen gemeinsamen Zerfällungskörper L von A und B und es gilt $A \otimes_K B \otimes_K L \cong M_4(L)$. Sei ψ dieser Isomorphismus. Setzte $\sigma_L := \sigma \otimes Id_L$ und $\gamma := \psi \circ \sigma_L \circ \psi^{-1}$, dann ist γ nach Satz 1.2 eine orthogonale Involution auf $M_4(L)$. Also gibt es ein $u \in GL_4(L)$, $u = u^t$, sodass $\gamma = \sigma_u$. Dadurch ergibt sich :
$\psi(Alt_K(A \otimes_K B \otimes_K L)) = \{\psi(x) - \psi(\sigma_L(x))|x \in A \otimes_K B \otimes_K L\} =$
$\{\psi(x) - \gamma(\psi(x))|x \in A \otimes_K B \otimes_K L\} = \{y - \gamma(y)|y \in M_4(L)\} = Alt_4(L)^{\sigma_u}$, da ψ bijektiv ist.
Die Abbildung $\psi \circ (\pi_{A\otimes_K B} \otimes Id_L) \circ \psi^{-1} : Alt_4(L)^{\sigma_u} \to Alt_4(L)^{\sigma_u}$ ist ein K-Vektorraum-Isomorphismus und es folgt für $z \in Alt_4(L)^{\sigma_u}$:
$\psi((\pi_{A\otimes_K B} \otimes Id_L)(\psi^{-1}(z))) \cdot z = \psi((\pi_{A\otimes_K B} \otimes Id_L)(\psi^{-1}(z))) \cdot \psi(\psi^{-1}(z)) =$
$\psi((\pi_{A\otimes_K B} \otimes Id_L)(\psi^{-1}(z)) \cdot \psi^{-1}(z))$, da ψ ein K-Algebren-Isomorphismus ist.
Nach Lemma 4.4 gilt $(\pi_{A\otimes_K B} \otimes Id_L)(\psi^{-1}(z)) \cdot \psi^{-1}(z) \in K \otimes_K L = L$. Also folgt insgesamt $\psi((\pi_{A\otimes_K B} \otimes Id_L)(\psi^{-1}(z))) \cdot z \in L$.
Somit gibt es nach Satz 2.6 ein Skalar $\mu \in L^*$, sodass
$\psi \circ (\pi_{A\otimes_K B} \otimes Id_L) \circ \psi^{-1} = \mu\rho_u$.
Eine analoge Rechnung zeigt, dass
$\psi \circ (\varphi \otimes Id_L) \circ \psi^{-1} = \delta\rho_u$,
für ein $\delta \in L^*$, gilt. Es ergibt sich daher:

$\psi \circ (\varphi \otimes Id_L) \circ \psi^{-1} = \delta\rho_u = \frac{\delta}{\mu} \cdot \mu\rho_u = \frac{\delta}{\mu} \cdot \psi \circ (\pi_{A\otimes_K B} \otimes Id_L) \circ \psi^{-1}$.
Da ψ und ψ^{-1} Isomorphisen sind, folgt
$\varphi \otimes Id_L = \frac{\delta}{\mu} \cdot (\pi_{A\otimes_K B} \otimes Id_L)$. Somit ergibt sich insgesamt $\varphi = \frac{\delta}{\mu} \cdot \pi_{A\otimes_K B}$. Sei nun $z \in Alt_4(K)$, sodass $\varphi(z)z \neq 0$ ist, dann gilt $K^* \ni \varphi(z)z = \frac{\delta}{\mu} \underbrace{\pi_{A\otimes_K B}(z)z}_{\in K^*}$. Somit muss auch $\frac{\delta}{\mu} \in K^*$ gelten. Setzt man nun $\lambda = \frac{\delta}{\mu}$, so folgt die Behauptung.

Theorem 5.6 *Seien A, B, C, D Quaternion-Algebren über K. Dann sind $A \otimes_K B$ und $C \otimes_K D$ genau dann als K-Algebren isomorph, wenn die entsprechenden Albert-Formen $q(A, B)$ und $q(C, D)$ ähnlich sind.*

Beweis (Bewiesen nach einer Vorlage von [4])
Seien die beiden Albert-Formen ähnlich. Dann sind nach Lemma 5.2 die beiden K-Algebren $C_0(q(A, B))$ und $C_0(q(C, D))$ isomorph.
Aus der Definition der Isomorphismen $\overline{\kappa_1} : C(q(A, B)) \to M_2(A \otimes_K B)$ und $\overline{\kappa_2} : C(q(C, D)) \to M_2(C \otimes_K D)$ in Lemma 5.3, sowie der Bemerkung 5.4 folgt, dass $C_0(q(A, B))$ als Algebra isomorph zu $Diag_2(A \otimes_K B)$, den 2×2-Diagonalmatrizen über $A \otimes_K B$, und $C_0(q(C, D))$ isomorph zu $Diag_2(C \otimes_K D)$ ist. Sei R eine K-Algebra, dann definiert die Abbildung
$\chi : R^n \to Diag_n(R), \chi(x_1, \ldots, x_n) := diag(x_1, \ldots, x_n)$
einen K-Algebren-Isomorphismus. Insgesamt erhält man also folgende Ketten on K-Algebren-Isomorphien:
$(A\otimes_K B)^2 \cong Diag_2(A\otimes_K B) \cong C_0(q(A, B)) \cong C_0(q(C, D)) \cong Diag_2(C\otimes_K D) \cong (C \otimes_K D)^2$.
Bezeichne den K-Algebren-Isomorphismus $(A \otimes_K B)^2 \tilde{\to} (C \otimes_K D)^2$ mit ϕ.
Weiters bezeichne mit θ die Abbildung
$\theta : A \otimes_K B \to (A \otimes_K B)^2, x \otimes y \mapsto (x \otimes y, 0)$
und mit ζ_1, ζ_2 die Projektionen
$\zeta_1 : (C \otimes_K D)^2 \to C \otimes_K D, (c_1 \otimes d_1, c_2 \otimes d_2) \mapsto c_1 \otimes d_1$, beziehungsweise
$\zeta_2 : (C \otimes_K D)^2 \to C \otimes_K D, (c_1 \otimes d_1, c_2 \otimes d_2) \mapsto c_2 \otimes d_2$.
Diese drei Abbildungen sind jeweils K-Algebren-Homomorphismen.
Setze nun $\psi := \zeta_1 \circ \phi \circ \theta$. Dann ist $\psi : A \otimes_K B \to C \otimes_K D$ als Komposition von K-Algebren-Homomorphismen wieder ein K-Algebren-Homomorphismus. Da $A \otimes_K B$ eine einfache K-Algebra ist, gilt $\psi \equiv 0$ oder ψ ist injektiv. Als Komposition von injektiven Abbildungen ist $\phi \circ \theta$ injektiv, daher gilt im Fall $\psi \equiv 0$, dass $\phi \circ \theta(x \otimes y) \in \{0\} \times B$, für alle $x \otimes y \in A \otimes_K B$. In diesem Fall

ist dann die Abbildung $\tilde{\psi} := \zeta_2 \circ \phi \circ \theta$ injektiv. Jedenfalls erhält man daher insgesamt eine injektive Abbildung $A \otimes_K B \to C \otimes_K D$. Da jedoch $A \otimes_K B$ und $C \otimes_K D$ dieselbe K-Dimension besitzen, folgt die Isomorphie.
Sei umgekehrt $\beta : A \otimes_K B \to C \otimes_K D$ der gegebene Isomorphismus von K-Algebren. Setze $\sigma' := \beta \circ \sigma_{A\otimes_K B} \circ \beta^{-1} : C \otimes_K D \to C \otimes_K D$. Dann ist σ' eine Involution auf $C \otimes_K D$ nach Satz 1.2. Sei nun $z \in A \otimes_K B$, dann gilt $\sigma'(\beta(z)) = \beta(\sigma_{A\otimes_K B}(\beta^{-1}(\beta(z)))) = \beta(\sigma_{A\otimes_K B}(z))$. Damit ist $\beta : A \otimes_K B \to C \otimes_K D$ ein Isomorphismus von K-Algebren mit Involution. Insbesondere gilt $\beta(Alt_K(A \otimes_K B)) = Alt_K^{\sigma'}(C \otimes_K D)$. Dadurch definiert $\beta : (Alt_K(A \otimes_K B), pf_{A\otimes_K}) \to (Alt_K^{\sigma'}(C \otimes_K D), pf'_{C\otimes_K D})$ eine Isometrie. Da $\sigma_{C\otimes_K D}$ und σ' orthogonale Involutionen auf $C \otimes_K D$ sind, gibt es eine Einheit $u \in (C \otimes_K D)^*$, mit $\sigma_{C\otimes_K D}(u) = u$, sodass $\sigma' = u\sigma_{C\otimes_K D}u^{-1}$ gilt. Es folgt dann:
$Alt_K^{\sigma'}(C \otimes_K D) = \{x - \sigma'(x) | x \in C \otimes_K D\} =$
$\{x - u\sigma(x)u^{-1} | x \in C \otimes_K D\} = \{(xu - u\sigma(x))u^{-1} | x \in C \otimes_K D\}$.
Setze nun $x' := xu$, dann erhält man
$Alt_K^{\sigma'}(C \otimes_K D) = \{x' - u\sigma(x'u^{-1}) | x' \in C \otimes_K D\}u^{-1} =$
$\{x' - u\sigma(u^{-1})\sigma(x') | x' \in C \otimes_K D\}u^{-1} = \{x' - \sigma(x') | x' \in C \otimes_K D\}u^{-1} = Alt_K(C \otimes_K D)u^{-1}$. Analog zeigt man $Alt_K^{\sigma'}(C \otimes_K D) = uAlt_K(C \otimes_K D)$.
Sei nun $\gamma : Alt_K(C \otimes_K D) \to Alt_K(C \otimes_K D)$ die Abbildung
$y \mapsto \gamma(y) := \beta(\pi_{A\otimes_K B}(\beta^{-1}(uy)))u$. Diese Abbildung γ ist wohldefiniert, denn: Ist $y \in Alt_K(C \otimes_K D)$, so ist $uy \in Alt_K^{\sigma'}(C \otimes_K D)$ und dadurch und da $\beta : Alt_K(A \otimes_K B) \to Alt_K^{\sigma'}(C \otimes_K D)$, ergibt sich $\beta^{-1}(uy) \in Alt_K(A \otimes_K B)$ und somit $\beta(\pi_{A\otimes_K B}(\beta^{-1}(uy))) \in Alt_K^{\sigma'}(C \otimes_K D)$. Insgesamt gilt daher
$\gamma(y) \in Alt_K(C \otimes_K D)$. Weiters gilt
$\gamma(y)y = \beta(\pi_{A\otimes_K B}(\beta^{-1}(uy)))uy = \beta(\pi_{A\otimes_K B}(\beta^{-1}(uy))) \cdot \beta(\beta^{-1}(uy))$.
Da β ein K-Algebren-Homomorphismus ist, erhält man
$\gamma(y)y = \beta(\pi_{A\otimes_K B}(\beta^{-1}(uy)) \cdot \beta^{-1}(uy)) = \beta(pf_{A\otimes_K B}(\beta^{-1}(uy)) \cdot 1) =$
$pf_{A\otimes_K B}(\beta^{-1}(uy)) \cdot 1 \in K \cdot 1$.
Da γ ein K-linearer Isomorphismus ist, existiert nach Lemma 5.5 ein Skalar $\mu \in K^*$, sodass $\gamma = \mu\pi_{C\otimes_K D}$. Sei nun $\tilde{x} \in Alt_K(A \otimes_K B)$ und setze $\tilde{y} := u^{-1}\beta(\tilde{x})$. Dann gilt $\tilde{y} \in u^{-1}Alt_K^{\sigma'}(C \otimes_K D) = u^{-1}uAlt_K(C \otimes_K D) = Alt_K(C \otimes_K D)$. Setzt man $\tilde{y}$ in γ ein und multipliziert mit $\tilde{y}$, so ergibt sich:
$\gamma(\tilde{y})\tilde{y} = \gamma(u^{-1}\beta(\tilde{x}))(u^{-1}\beta(\tilde{x})) = \beta(\pi_{A\otimes_K B}(\beta^{-1}(u(u^{-1}\beta(\tilde{x})))))u(u^{-1}\beta(\tilde{x})) =$
$\beta(\pi_{A\otimes_K B}(\tilde{x}))\beta(\tilde{x}) = \beta(\pi_{A\otimes_K B}(\tilde{x})\tilde{x}) = pf_{A\otimes_K B}(\tilde{x})$. Andererseits gilt
$\gamma(\tilde{y})\tilde{y} = \mu\pi_{C\otimes_K D}(\tilde{y})\tilde{y}$. Dies impliziert, dass $pf_{A\otimes_K B}(\tilde{x}) = \mu pf_{C\otimes_K D}(u^{-1}\beta(\tilde{x}))$.

Da β ein K-linearer Isomorphismus und u eine Einheit ist, ist $u^{-1}\beta$ ein K-linearer Isomorphismus. Damit ist $u^{-1}\beta$ die gewünschte Abbildung und die beiden Albert-Formen $q(A,B)$ und $q(C,D)$ sind daher ähnlich. □

6. Anwendung

In diesem Kapitel behandeln wir nun die eigentliche Fragestellung der Masterarbeit. Dazu dient uns die Ähnlichkeit von quadratischen Räumen und Theorem 5.6. Wir werden ein hinreichendes und notwendiges Kriterium angeben, wann das Tensorprodukt zweier Quaternionalgebren A, B über K eine Divisionsalgebra ist.

Bemerkung 6.1 Jede Quaternion-Algebra $B = Q(1, b|K)$ über K ist als K-Algebra isomorph zu $M_2(K)$, da die Gleichung $X_1^2 + bX_2^2 - X_3^2 = 0$ über jeden Körper K immer die nicht-triviale Lösung $(1, 0, 1)$ besitzt. Aufgrund von Theorem 5.6 kann man als Norm von $M_2(K)$ immer die Norm von $Q(1, b|K)$, für ein beliebiges $b \in K^*$, verwenden. Man erhält folgende Normen: $A = Q(a, b|K)$, $n_A(x) = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2$, geschrieben als $< 1, -a - b, ab >$ und für die reine Quaternion A': $< -a - b, ab >$, sowie für $M_2(K)$, $n_{M_2(K)} =< 1, -1, -b, 1 >$ und für $M_2(K)'$: $< -1, -b, 1 >$. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b = 1$ nehmen. Man erhält dadurch für die Albert-Form:
$q(A, M_2(K)) = n_{M_2(K)} - n_A =< -1, -1, 1 >\perp< a, b, -ab >\sim$
$< -a, -b, ab >\perp< 1, 1, -1 >$ via $\lambda = -1$ und dem linearen Isomorphismus des Permutierens der Basiselemente. Schließlich gilt
$< -a, -b, ab >\perp< 1, 1, -1 >\sim< 1, -a, -b, ab >\perp< 1, -1 >\sim$
$(A, n_A) \perp H(K)$.

$\square$

> **Satz 6.2** *Seien A, B Quaternionalgebren über K. Dann ist $A \otimes_K B$ genau dann keine Divisionsalgebra, wenn die Albert-Form $q(A, B)$ isotrop ist.*

Beweis Sei die Albert-Form $q(A, B)$ isotrop. Dann es gibt einen isotropen Vektor $x \in Alt_K(A \otimes_K B)$. Daher existiert ein Vektor $y \in Alt_K(A \otimes_K B)$, $y \neq 0$, sodass x, y ein hyperbolisches Paar sind. Also folgt $Alt_K(A \otimes_K B) \cong H(K) \perp W$, für einen K-Vektorraum W als quadratische Räume. Man erhält dadurch $q(A, B) \cong< 1, -1 >\perp< \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta\gamma >\sim< \alpha^{-1}, -\alpha^{-1} >\perp$

$< \alpha\alpha^{-1}, \alpha^{-1}\beta, \alpha^{-1}\gamma, \alpha^{-1}\alpha\beta\gamma >$. Dies ist weiters ähnlich zu $< 1, \alpha^{-1}, -\alpha^{-1} > \perp < \alpha^2\alpha^{-1}\beta, \alpha^2\alpha^{-1}\gamma, \alpha^2\beta\gamma > =$
$< 1, \alpha^{-1}, -\alpha^{-1} > \perp < \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\beta\alpha\gamma >$. Setzt man $c = -\alpha\beta$ und $d = -\alpha\gamma$, dann erhält man $< 1, \alpha^{-1}, -\alpha^{-1} > \perp < \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\beta\alpha\gamma > =$
$< 1, \alpha^{-1}, -\alpha^{-1} > \perp < -c, -d, cd > = q(C, M_2(K))$.
Dann folgt wegen Theorem 5.6, dass $A \otimes_K B \cong C \otimes_K M_2(K) \cong M_2(C)$ gilt. Also ist $A \otimes_K B$ keine Divisionsalgebra.
Sei umgekehrt $A \otimes_K B$ keine Divisionsalgebra. Da A und B einfache zentrale K-Algebren sind, ist auch $A \otimes_K B$ einfache zentrale K-Algebra. Also gibt es nach dem Satz von Wedderburn eine einfache zentrale K-Divisionsalgebra D und ein $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$, sodass $A \otimes_K B \cong M_n(D)$. Da $A \otimes_K B$ keine Divisionsalgebra ist und $\dim_K(A \otimes_K B) = 16$ gilt, folgt $n = 2$ oder $n = 4$.
Gilt $n = 4$, so folgt $D = K$ und somit gilt $q(A, B) \sim q(M_2(K), M_2(K))$ wegen Theorem 5.6. Da Ähnlichkeit von quadratischen Räumen eine Äquivalenzrelation ist, zeigt die analoge Rechnung wie zuvor, dass $Alt_K(A \otimes_K B) \cong H(K) \perp W$. Da die hyperbolische Ebene $H(K)$ isotrop ist, folgt, dass auch die Albert-Form $q(A, B)$ isotrop ist. Ist $n = 2$, so folgt $\dim_K(D) = 4$. Da D eine einfache zentrale K-Algebra ist, ist D isomorph zu einer Quaternionalgebra über K (vgl. [6]) und man erhält wegen Theorem 5.6 und wie zuvor, dass die Albert-Form $q(A, B)$ isotrop ist. $\square$

Literatur

[1] A.A. Albert. *On the Wedderburn norm condition for cyclic algebras*. Bull. Amer. Math. Soc., Volume 37, p. 301-312, 1931.

[2] Tracale Austin, Hans Bantilan, Isao Jonas, and Paul Kory. *The Pfaffian Transformation*. Journal of Integer Sequences, Volume 12, Article ID 09.1.5, 20 p., 2009.

[3] Jens Carsten Jantzen and Joachim Schwermer. *Algebra, 2. Auflage*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.

[4] Max-Albert Knus. *Quadratic Forms, Clifford Algebras and Spinors*. Departamento de Matematica, Universidade Estadual de Campinas, 1988.

[5] Max-Albert Knus, Alexander Merkurjev, Markust Rost, and Jean-Pierre Tignol. *The Book of Involutions*. Colloquium Publications, Volume 44, 1998.

[6] Richard S. Pierce. *Associate Algebras*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1982.

[7] Zi Yang Sham. *Quaternion Algebras and Quadratic Forms*. University of Waterloo, 2008.

Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt das Tensorprodukt von Quaternion-Algebren $Q(a_1, a_2|K) \otimes_K Q(b_1, b_2|K)$ über einem Körper K der Charaktistik ungleich 2. Ziel dieser Arbeit ist es, zu beweisen, dass das Tensorprodukt zweier Quaternion-Algebren über K genau dann eine Divisionsalgebra ist, wenn die quadratische Form $< a_1, a_2, -a_1a_2, -b_1, -b_2, b_1b_2 >$ anisotrop ist.
Das erste Kapitel gibt eine Einführung in die Theorie von Involutionen auf K-Algebren, die eine entscheidende Rolle bei der Behandlung des Themas einnehmen.
Das zweite und dritte Kapitel behandeln $Alt_4(K)$, den Raum der
4×4 - schiefsymmetrischen Matrizen über K. Dabei wird im zweiten Kapitel eine spezielle quadratische Form, nämlich die Pfaffsche, auf diesem Raum definiert. Im dritten Kapitel wird zuerst eine gewisse Abbildung ρ auf dem Raum definiert, die eng mit der Pfaffschen quadratischen Form in Relation steht. Außerdem hat diese Abbildung die besondere Eigenschaft, dass jeder K-lineare Automorphismus ϕ, mit $\phi(x)x \in K$, für alle $x \in Alt_4(K)$, ein skalares Vielfaches von ρ ist. Weiters wird mittels der Standard-Involution auf $M_4(K)$, nämlich der Transposition, ein neuer Raum definiert, der eng verbunden ist mit $Alt_4(K)$.
Im vierten Kapitel wird für das Tensorprodukt zweier Quaternion-Algebren über K ein quadratischer Raum definiert, nämlich die Albert-Form. Dabei wird zuerst ein K-Unterraum des Tenorproduktes mit Hilfe einer speziellen orthogonalen Involution konstruiert. Die Konstruktion dieses Unterraumes läuft analog zur Konstruktion des zuvor im dritten Kapitel erwähnten, neuen Unterraums ab. Auf diesem so konstruierten Unterraum wird dann mit Hilfe einer speziellen Abbildung eine quadratische Form definiert. Der so konstruierte quadratische Raum wird Albert-Form genannt.
Das fünfte Kapitel behandelt Ähnlichkeit von quadratischen Räumen. Und zwar heißen zwei quadratische Räume (V, q) und (V', q') ähnlich, wenn es einen K-Vektorraum-Isomorphismus $\varphi : V \to V'$ und ein Skalar
$\lambda \in K^*$ gibt, sodass $q' \circ \varphi = \lambda q$ gilt. Es wird das Haupttheorem 5.6 der Arbeit gezeigt, das besagt, dass die Tensorprodukte $A \otimes_K B$ und $C \otimes_K D$ von Quaternion-Algebren A, B, C, D über K genau dann als K-Algebren isomorph sind, wenn die dazugehörigen Albert-Formen $q(a, B)$ und $q(C, D)$ ähnlich zueinander sind. Unter anderem wird dort auch gezeigt, dass die

Clifford-Algebra zur Albert-Form isomorph zu $M_2(A \otimes_K B)$ ist.
Im sechsten Kapitel wird dann mit Hilfe von Theorem 5.6 das Kriterium bewiesen, dass das Tensorprodukt $A \otimes_K B$ genau dann eine Divisionsalgebra ist, wenn die Albert-Form anisotrop ist.

Abstract

The thesis at hand deals with the tensor product of two quaternion-algebras $Q(a_1, a_2|K) \otimes_K Q(b_1, b_2|K)$ over a field of characteristic not equal to 2. The objective of this paper is to prove that the tensor product of two quaternion-algebras is a division algebra over K if and only if the quadratic form $< a_1, a_2, -a_1a_2, -b_1, -b_2, b_1b_2 >$ is anisotropic.

The first chapter is an introduction to the issues of the involutions on K-algebras, which play a key role to cover the topic.

The second and third chapter deal with $Alt_4(K)$, the space of 4×4-skewsymmetric matrices with entries in K. To begin with, a special quadratic form, namely the Pfaffian, is definied on the space $Alt_4(K)$. In the third chapter a certain map ρ is defined on this space, which bears a close relation to the Pfaffian quadratic form. Moreover, this map has the specific property that every K-linear automorphism ϕ, with $\phi(x)x \in K$, for all $x \in Alt_4(K)$, is a scalar multiple of ρ. Furtheron, a new space, which is closely connected to $Alt_4(K)$, is defined through the standard-involution on $M_4(K)$, namely the transposition.

A quadratic space, the Albert-form, is definied for the tensor product of two quaternion-algebras over K in the fourth chapter. In doing so a K-subspace of $A \otimes_K B$ is constructed through a special orthogonal involution.The construction of this new subspace leads to the contruction of a new space analogously to the procedure dealt with in the third chapter.

The fifth chapter is about the similarity of quadratic spaces. In fact two quadratic spaces (V, q) and (V', q') are similar, if there exist a K-linear isomorphism $\varphi : V \to V'$ and a scalar $\lambda \in K^*$, such that $q' \circ \varphi = \lambda q$. It is proved the main theorem 5.6 of this thesis, namely that the tensor product $A \otimes_K B$ and $C \otimes_K D$ of quaternion-algebras A, B, C, D over K are isomorphic if and only if the corresponding Albert-forms $q(A, B)$ and $q(C, D)$ are similar. Among others it is shown that the clifford-agebra of the Albert-form is isomorphic to $M_2(A \otimes_K B)$.

In the sixth chapter the criterion has been proven by means of theorem 5.6 that the tensor product $A \otimes_K B$ is a division algebra over K if and only if the Albert-form is anisotropic.

Lebenslauf

Persönliche Daten:
Name: Klaus Frank
Geburtsdatum: 28.05.1985
Geburtsort: Meran
Staatsbürgerschaft: Italien

Ausbildung:
2014-2015: Masterstudium der Mathematik an der Universität Wien
2010-2014: Bachelorstudium der Mathematik an der Universität Wien, mit Auszeichnung abgeschlossen, mit den Bachelorarbeiten: "Beweise des quadratischen und kubischen Reziprozitätsgesetzes mittels Gaußscher Summen"beim Betreuer Prof. Baxa, sowie "Witt-Ring und abelsche p-Erweiterungen"beim Betreuer Prof. Mahnkopf
2004-2012: Diplomstudium und Bachelorstudium der Ernährungswissenschaften an der Universität Wien, noch nicht abgeschlossen
1999-2004: Realgymnasium Albert Einstein Meran, Italien

Anstellungen:
2012-2015: Tutor an der Fakultät für Mathematik, Universität Wien