DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Graphische Darstellungen im Mathematikunterricht – Eine fachdidaktische Analyse ihrer Bedeutungen und ein zugehöriger Schulbuchvergleich

verfasst von / submitted by

Christine Fliedl

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 423
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtstudium UF Mathematik UF Chemie
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger

Danksagung

Ich möchte mich in erster Linie bei meinem Diplomarbeitsbetreuer Professor Humenberger bedanken, der sich immer für mich Zeit genommen hat und mir bei allen Fragen und Problemen weitergeholfen hat. Weiters möchte ich ihm für seine immer schnellen Antworten und das schnelle Korrigieren danken.

Ein besonderer Dank gilt auch meinem Vater, für das ausdauernde und gewissenhafte Korrekturlesen meiner Arbeit.

Außerdem möchte ich mich bei meiner ganzen Familie und meinen Freunden bedanken, dass sie mich immer unterstützt haben und immer für mich da sind.

Zum Schluss möchte ich meinen Studienkolleginnen und Studienkollegen meinen Dank aussprechen, da sie aus meiner Studienzeit eine wundervolle Zeit gemacht haben.

Inhaltsverzeichnis

ABSTRACT

Der erste Teil dieser Diplomarbeit beschäftigt sich mit graphischen Darstellungen im Allgemeinen. Zunächst wird auf den visuellen Sinneskanal eingegangen, der auch dem auditiven Sinneskanal gegenübergestellt wird. Weiters werden die Funktionen und Ziele graphischer Darstellungen erläutert und die Vorteile ihrer Anwendung im Mathematikunterricht herausgearbeitet.
Außerdem wird auf die Nachteile und Probleme im Umgang mit Visualisierungen eingegangen, und aufgezeigt, was bei deren Verwendung beachtet werden muss.

Im Anschluss daran werden zwei Themen genauer untersucht, in denen graphische Darstellungen eine Rolle spielen: Die „Bruchrechnung“ und die „Statistik“.

Im zweiten Teil wird ein Schulbuchvergleich zweier AHS- Schulbücher der Unterstufe durchgeführt. Bei den Büchern handelt es sich einerseits um das erst kürzlich erschienene Schulbuch „Mathematik verstehen1-3“, andererseits um das Schulbuch „100% Mathematik 1-3“, das zunächst in Deutschland herausgegeben wurde, und erst vor kurzem in Österreich neu veröffentlicht wurde.

Als Orientierung für diesen Schulbuchvergleich soll ein aus dem allgemeinen Teil resultierender Leitfaden dienen, der einige wichtige Punkte und Erkenntnisse aus diesem ersten Teil aufgreift.

Anhand des Leitfadens sollen die Kapitel „Bruchrechnung“ und „Statistik“ der beiden Schulbücher in Bezug auf graphische Darstellungen gegenübergestellt und analysiert werden. Es sollen so die Stärken und Schwächen der Bücher aufgezeigt werden. Weiters stellt sich die Frage, inwiefern die im ersten Teil herausgearbeiteten Aspekte in den einzelnen Schulbüchern umgesetzt und beachtet werden, und welche Punkte eventuell vernachlässigt werden.

ABSTRACT in Englisch

This diploma thesis discusses the meaning, characteristics and importance of graphical representations. Furthermore, it contains a comparison of two school textbooks.

The first part of the thesis deals with graphical representations in general. First, the visual and the auditory sensory channels are compared, and afterwards the characteristics, advantages and importance of graphical representations are analysed. In addition the disadvantages and problems when using these visualizations in mathematics lessons are discussed.

Afterwards the topics “Fractions” and “Statistics” are analysed. The importance of using graphical representations when teaching these topics is obvious.

In the second part of the thesis, two school textbooks, that are used in lower grades, are compared. The first book “Mathematik verstehen 1-3” was recently published, while the other book, “100% Mathematik 1-3”, was released ten years ago in Germany and republished eight years later in Austria.

Corresponding to the insights of the first part of the thesis, a guideline to help structure the comparison of the textbooks is developed.

Based on this guideline, the topics “Fractions” and “Statistics”, appearing in both books, are compared and analysed regarding graphical representations.

The aim of this thesis it to reveal the strengths and weaknesses of both books. Furthermore, it is discussed, whether the aspects mentioned in the first part and the guideline are well implemented or if some of them are neglected.

EINLEITUNG

Im Mathematikunterricht werden graphische Darstellungen in vielfältigen Formen und Zusammenhängen genutzt, um einerseits das Verständnis zu fördern, andererseits zur graphischen Problemlösung oder zur Darstellung von Sachverhalten, unter anderem in der Geometrie, Trigonometrie, Statistik, Bruchrechnung, Algebra und Analysis.

Die Bedeutung der graphischen Darstellungen im Schulunterricht ist unumstritten, doch wie die Umsetzung im Unterricht aussieht, ist eine andere Frage. Weiters werden die Nachteile und Probleme ihrer Verwendung selten beleuchtet.

Diesem Thema wollte ich mich widmen, und verschiedene Aspekte der Arbeit mit graphischen Darstellungen untersuchen.
Weiters wollte ich gerne einen Schulbuchvergleich durchführen, da ich mich immer schon gerne mit verschiedenen Schulbüchern beschäftigt habe, und es oft als spannend empfunden habe, die verschiedenen Umsetzungen einzelner Bücher zu untersuchen und zu vergleichen. Es gibt viele verschiedenen Möglichkeiten, wie einzelne Themen eingeführt, erklärt und geübt werden können, und jede davon hat ihre Vor- und Nachteile. Diese verschiedenen Möglichkeiten zu vergleichen und gegenüberzustellen kann meiner Meinung nach sehr lehrreich sein.
Schlussendlich entstand die Idee, beides zu verbinden, und den graphischen Darstellungen einen allgemeinen Teil zu widmen, und danach einen Schulbuchvergleich zu diesem Thema durchzuführen.

I. THEORETISCHER TEIL

1. ALLGEMEINER TEIL

1. 1. Einleitung und Begriffsklärung

1.1.1 Begriffsklärung „graphische Darstellung“

Zunächst ist es notwendig, den Begriff der „graphischen Darstellung“ für diese Arbeit zu definieren. Hier möchte ich mich an Kerstin Marschner-Franzke halten, die den Begriff wie folgt versteht: *„…sowohl ikonische als auch schematische Darstellungen (..), die einer anschaulichen Informationsübertragung dienen*“ [Marschner-Franzke 1991, S. 223].
Somit fallen zum Beispiel Darstellungen im Koordinatensystem (unter anderem Funktionen und Zahlenpaare) und Diagramme (die vor allem in der Statistik benötigt werden) und bildliche Modelle (wie z. B VENN-Diagramme oder der Zahlenstrahl) unter diesen Begriff.

1.1.2 Begriffsklärung Visualisierung

Beschäftigt man sich mit graphischen Darstellungen, kommt man an dem Begriff der „Visualisierung“ nicht vorbei. Wie auch immer man diesen Begriff deuten oder verstehen möchte: Graphische Darstellungen sind jedenfalls ein Teil davon.
Zunächst möchte ich mich mit dem Begriff „Visualisierung“ beschäftigen. Dieser kann auf ganz unterschiedliche Weise aufgefasst werden; Zum Beispiel könnte man alles, was visuell (also über den Gesichtssinn) aufgenommen werden kann, als „Visualisierung“ bezeichnen. Darunter würden dann aber nicht nur alle Skizzen und Darstellungen fallen, sondern auch alle Arten algebraische Zeichen, wie Texte und geschriebene Worte, aber auch Gleichungen und Formeln.
Andererseits könnte man auch nur „visuelle Veranschaulichungen“ – also alles, womit man über den visuellen Sinneskanal veranschaulichen kann – als „Visualisierung“ bezeichnen. Nach dieser Definition ist von ausschließlich „nichtsprachlichen Informationen“ die Rede.
Diese zweite Variante wird in der folgenden Arbeit beibehalten werden und der Begriff „Visualisierung“ als „*alles, was der visuellen Veranschaulichung dient*“ definiert. Hußmann formuliert das folgendermaßen:

„*Eine Visualisierung ist eine Darstellung, die es dem Subjekt ermöglicht, bestimmte Eigenschaften des dargestellten Gegenstandes zu erkennen oder mitzuteilen*"
[Hußmann 2008, S. 24, zitiert nach Laakmann S. 25]

Demnach sind Visualisierungen personengebunden. Von verschiedenen Personen kann ein und dieselbe Darstellung unterschiedlich wahrgenommen werden und in einem Fall als Visualisierung gesehen werden, im anderen Fall aber nicht.
Es können aber auch symbolische Darstellungen Visualisierungen sein „*wenn das Individuum mit den symbolischen Darstellungen genügend vertraut ist*". [Laakmann 2013, S. 25]

Allerdings ist dieser Begriff der Visualisierung nicht zu verwechseln mit dem „visuellen Sinneskanal" an sich, in dem es im Punkt 1.3 gehen wird. Der „visuelle Sinneskanal" umfasst nun tatsächlich alles, was von den Augen aufgenommen werden kann, und beinhaltet unter anderem auch alle Arten von Zeichen und auch alle Arten von geschriebenem Text und der geschriebenen Sprache.

1.2 Arten von Darstellungen

Nachdem nun der Begriff der „graphischen Darstellung" geklärt ist, stellt sich die Frage, welche Arten der Darstellung es überhaupt gibt, und was nun nach der oben genannten Definition zu den „graphischen" Darstellungen gehört.
Die graphischen Darstellungen lassen sich – angelehnt an Schnotz 1998 [Laakmann 2013, S. 18] – in ikonische, analoge und logische Darstellungen unterteilen. Des Weiteren gibt es auch symbolische Darstellungen. Diese gehören zwar nicht direkt zu den „graphischen Darstellungen", allerdings sind sie als deren Gegenstück vor allem im später behandelten Punkt „Darstellungswechsel" von Bedeutung.

1.2.1 Ikonische graphische Darstellungen

Ikonische oder auch „realistische" Darstellungen sind Visualisierungen, die „*eine eindeutige Ähnlichkeit mit dem repräsentierten Sachverhalt aufweisen*". [Schnotz 1998, zitiert nach Laakmann 2013, S. 18]. Dazu zählen zum Beispiel Fotos oder detailgetreue Zeichnungen. Ikonische Darstellungen sind anschaulich und realitätsnah, worin ihre Hauptbedeutung liegt.

Im Mathematikunterricht spielen ikonische Darstellungen keine so wesentliche Rolle wie zum Beispiel schematische Darstellungen, allerdings ist ihre Bedeutung nicht abzustreiten. Zum Beispiel in der Bruchrechnung sind sie nicht wegzudenken. Viele Veranschaulichungen, die in der Bruchrechnung verwendet werden, sind solche „realistische“ Bilder, angefangen von „Tortendiagrammen“ bis zu „Schokoladetafeln“.

1.2.2 Analoge graphische Darstellungen

Analoge Darstellungen, auch „Analogiebilder“ genannt, bestehen ebenfalls aus realistischen Elementen, jedoch ist ihre Bedeutung eine andere als bei der ikonischen Darstellung: sie stellen keinen direkten Sachverhalt dar, sondern präsentieren Sachverhalte oder Prozesse, die nicht direkt wahrgenommen werden können, durch vergleichende, also „analogiehafte“ Darstellungen. So wird die Bedeutung vom Betrachter durch einen Analogieschluss von bekannten Informationen auf nicht darstellbare oder auch schwierige Inhalte konstruiert.[1] [vgl. Laakmann 2013, S.18]

Abbildung 1

Ein gutes Beispiel dafür ist die allbekannte Darstellung für eine gute Idee: die Glühbirne (Abbildung 1).
Sie steht dafür, dass jemandem „ein Licht aufgeht“ und jeder weiß durch diesen Analogieschluss, was gemeint ist. Allerdings hat die Glühbirne in Wirklichkeit keine Ähnlichkeit mit einer „Idee“ an sich.

1.2.3 Schematische graphische Darstellungen

Schematische Darstellungen veranschaulichen abstrakte Zusammenhänge. Sie reduzieren Informationen auf ihre wesentlichen Elemente und Beziehungen. Sie sind somit ein Mittelding zwischen symbolischen und ikonischen Darstellungen. [vgl. Laakmann 2013, S.20/21]
Da sämtliche Diagramme und Funktionen, unter Umständen sogar Tabellen, unter diesen Begriff der „schematischen Darstellungen“ fallen, sind diese im Mathematikunterricht von großer Bedeutung.

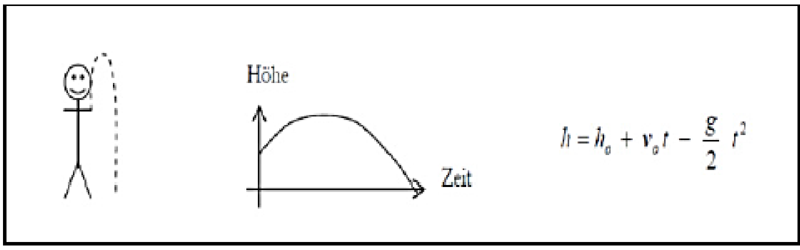
1.2.4 Symbolische Darstellungen

Zu symbolischen Darstellungen gehören unter anderem die geschriebene Sprache (Worte) und Formeln. Hier kann man die Bedeutung eines Wortes oder einer Formel nicht durch

1 http://www.familiethon.de/christina/projekt/medien/medien_06.htm

direkte Ähnlichkeiten (Analogiebilder) erfassen. Das Wort „Baum“ zum Beispiel hat nicht die geringste Ähnlichkeit mit einem Baum; die Bedeutung ergibt sich erst aus der Vereinbarung, dass das Wort „Baum“ tatsächlich für einen Baum steht. Ähnlich ist das mit Formeln. [vgl. Böckmann, 1982, S. 25]

1.2.5 Ein Beispiel



Zeit	Höhe
0	2,5
1	4
2	4,5
3	4
4	2,5
5	0

Abbildung 2: Verschiedene (graphische) Darstellungen[2]

Die linke Darstellung in Abbildung 2 ist eine ikonische Darstellung, die 2te eine schematische. Die dritte Darstellung von links ist eine symbolische. Die letzte könnte man auch als schematische Darstellung bezeichnen. [vgl. Laakmann 2013, S. 19]

1.2.6 Schematische Darstellungen im Mathematikunterricht

Für den Mathematikunterricht in der Schule sind vor allem schematische Darstellungen (Diagramme, Funktionen, usw.) und symbolische Darstellungen (Formeln) von Bedeutung. Diagramme und Funktionen richtig lesen und deuten zu können ist allerdings eine Fähigkeit, die Schülerinnen und Schüler erst erlernen müssen. Diese Darstellungen haben, wie bereits erwähnt, keine Ähnlichkeit zum Sachverhalt an sich (wie ikonische Darstellungen) und sind den Schülerinnen und Schülern zunächst noch komplett fremd. Das Wissen, wie man aus Diagrammen und Funktionen Informationen entnehmen kann, oder diese selbst erstellt, muss nach und nach langsam aufgebaut werden, bis es für die Schülerinnen und Schüler irgendwann zur Selbstverständlichkeit wird. Das ist eine der Aufgaben des Mathematikunterrichts.

Es gibt einige Untersuchungen (z.B. Bieda und Nathan 2009), aus denen hervorgeht, dass Lernende immer wieder große Schwierigkeiten haben, schematische Darstellungen richtig zu lesen und das Dargestellte zu verstehen. [vgl. Laakmann 2013, S. 21]

[2] Laakmann 2013, S. 19

Laakmann erläutert die Probleme, die Schülerinnen und Schüler oftmals mit schematischen Darstellungen haben, anhand eines Beispiels aus der Lernstandserhebung Klasse 9 in NRW.

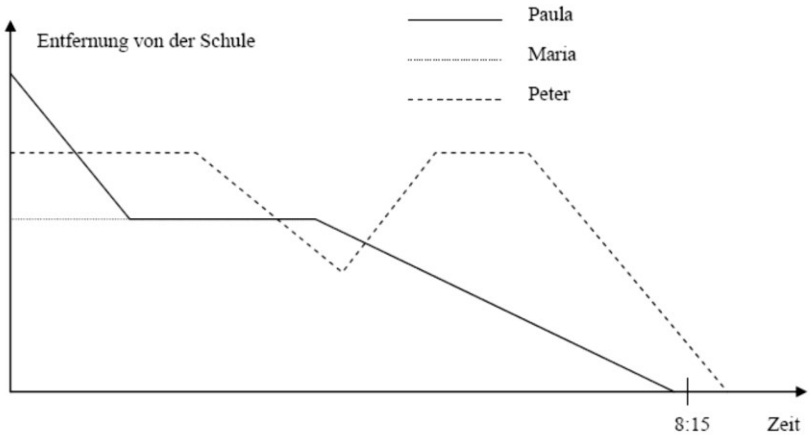


Abbildung 3[3]

Das obige Weg-Zeit-Diagramm gibt die Entfernung zur Schule in Abhängigkeit von der Uhrzeit für Peter, Paul und Maria wieder.

Eine solche Art der Darstellung ist mit dem Wissen aus unseren alltäglichen Erfahrungen nicht auf Anhieb leicht zu verstehen. Die Schülerinnen und Schüler könnten intuitiv annehmen, dass Peter, Paul und Maria auf ihrem Weg einen Berg hinunter (bzw. und hinauf) müssen – sie könnten davon ausgehen, dass die graphische Darstellung den tatsächlichen Schulweg darstellt. Aus der Grafik könnten die Schülerinnen und Schüler auch intuitiv schließen, dass die drei sich in ihren Schnittpunkten begegnen müssen.

Allerdings beschreibt das Diagramm keinen real existierenden Weg, sondern es stellt eine Beziehung zwischen der Entfernung zur Schule und der Zeit her. Peter, Paul und Maria müssen dabei nicht auf derselben Straße zur Schule gehen und sich auch überhaupt nicht begegnen. In dieser Darstellung wird nicht die reale Welt gezeigt, sondern auf einen Teilaspekt fokussiert – in diesem Fall die Entfernung zur Schule. [vgl. Laakmann 2013, S. 21]

Dass Schülerinnen und Schüler damit Schwierigkeiten haben, ist einleuchtend. Umso wichtiger ist es laut Laakmann, dass „*Lernumgebungen den Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten bieten müssen zu lernen, wie logische Bilder zu lesen sind.*“ [Laakmann 2013, S.23]

[3] Laakmann 2013, S. 21

Wie das erreicht werden kann, wird im später folgenden Punkt „Ziele“ erklärt werden (1.5.3 Hauptziele in der Arbeit mit graphischen Darstellungen in der Schule – Ziele nach Laakmann).

Malle (1983) wiederum stellt bei seiner Arbeit mit 10-14-jährigen Schülerinnen und Schülern fest, dass diese offensichtlich Schwierigkeiten haben, Situationen schematisch zu visualisieren. Vielen Schülerinnen und Schülern gelinge es nicht ohne Hilfe, abstrakte Begriffe wie „Fahrten“ oder „Tage“ durch Kreise oder Striche schematisch darzustellen und sich auf die wesentlichen Aspekte zu konzentrieren.
Beispielsweise bekamen seine Schülerinnen und Schüler die folgende Aufgabe:
„*In einem Stall sind Hühner und Hasen. Insgesamt sind es 13 Tiere, die zusammen 36 Beine haben. Wie viele Hühner und Hasen sind es?*“ [Malle 1983, S. 89]
Bei der Beantwortung der Frage fiel auf, dass die Kinder oft unwichtige und ablenkende Details wie Schnäbel oder Ohren besonders hervorhoben. [vgl. Malle 1983, S. 90]

1.3 Grundlagen der Lernbiologie

1.3.1 Vergleich auditiver – visueller Sinneskanal

Der Mensch nimmt bekanntlich alles, was wahrnehmbar ist, über seine Sinne auf. Da für den Unterricht offensichtlich praktisch ausschließlich der auditive und der visuelle Sinneskanal von Bedeutung sind, werden meist genau diese beiden miteinander verglichen.
Böckmann (1982) setzt sich mit dem Thema der Bedeutung der Visualisierung im Unterricht auseinander und geht auf den Unterschied zwischen visuellem und auditivem Sinneskanal ein.

Zunächst werden einige Eigenschaften des akustischen Sinneskanals behandelt. Für den Schulunterricht relevant sind hierbei die Flüchtigkeit von auditiven Signalen sowie deren Linearität. [vgl. Böckmann, 1982, S. 15/16]

Zur Flüchtigkeit von auditiven Signalen:
Nachdem ein Wort gesagt wurde, ist es weg. Man kann es nicht zurückholen – und wenn man gerade nicht aufgepasst hat, hat man Pech gehabt. Die meisten Lehrer kennen dieses Phänomen und wirken dem entgegen, indem wichtige Dinge öfter wiederholt und oft auch an die Tafel geschrieben werden. Mit visuellen Signalen verhält sich das nämlich im

Normalfall anders: Das Tafelbild steht solange da, bis es weggelöscht wird. Auch Bilder oder Folien verschwinden im Normalfall nicht sofort wieder, sondern geben dem Betrachter etwas länger die Möglichkeit sich mit ihnen zu beschäftigen. Natürlich gibt es auch flüchtige visuelle Signale wie zum Beispiel beim Fernsehen, doch im Allgemeinen sind visuelle Signale – im Gegensatz zu auditiven – von ihrer Natur her nicht flüchtig.
Der Vorteil für den Unterricht liegt auf der Hand: Hat ein Schüler/eine Schülerin kurz nicht aufgepasst, sind die visuellen Signale immer noch da. Die auditiven Signale allerdings sind „verloren" und der Schüler/die Schülerin muss hoffen, dass sie wiederholt werden damit er/sie nichts Wichtiges verpasst hat.
Beim Lesen eines Textes zum Beispiel kann man sein eigenes Tempo wählen und Stellen wiederholen oder überspringen, was bei einem Vortrag natürlich alles nicht geht; hier muss man sich genau dem vorgegebenen Tempo anpassen. [vgl. Böckmann 1982, S. 17/18]

Zur Linearität von auditiven Signalen:
Auditive Signale sind linear. Im Normalfall reden nicht mehrere Menschen gleichzeitig, und man bekommt eine Information nach der anderen, in genau der Reihenfolge, in der es gesagt wurde. Anders verhält sich dies bei visuellen Signalen wie zum Beispiel einem Bild. Betrachtet man ein Bild, können einem viele verschiedene Dinge in beliebiger Reihenfolge auffallen. Jeder sieht die einzelnen Komponenten des Bildes in unterschiedlicher Reihenfolge. Die Informationen können „komplex" aufgenommen werden. Wenn man einen Text liest, kann man zumindest Stellen wiederholen oder überspringen und die festgelegte Reihenfolge durchbrechen. [vgl. Böckmann 1982, S. 18/19]

Diese beiden Faktoren (Linearität und Flüchtigkeit) führen dazu, dass visuelle Darstellungen für den Lernenden zu einer größeren Unabhängigkeit und einer erhöhten Autonomie führen. Der Lernende kann selbst entscheiden, wann er was lernt. [vgl. Böckmann 1982, S. 18/19]

Es gibt viele verschiedene Theorien und Studien, welcher Kanal nun in welchen Bereichen „besser" ist als der andere.
Böckmann (1982) kommt nach einer Studie von A. Fenk zu folgendem Schluss:
Betrachtet man die „Behaltenswirksamkeit", so liegt der Vorteil des Visuellen vor allem im längerfristigen Behalten. Inhalte werden im Vergleich zu einer akustischen Aufnahme des Lerninhaltes dauerhafter und längerfristig gespeichert. Allerdings scheint die akustische Vermittlung für ein kurzfristiges Behalten von Lerninhalten vorteilhafter zu sein; Schülerinnen und Schüler merken sich tendenziell akustisch aufgenommene Lerninhalte

kurzfristig besser, allerding langfristig schlechter als visuell aufgenommene Lerninhalte. [vgl. Böckmann 1982, S. 15/16]

Andere Studien kommen allerdings zu abweichenden Ergebnissen. So kommt Kritzenberger (2005) zwar nach einer Studie von Paechter ebenfalls zu dem Schluss, dass auditive Signale für das kurzfristige Behalten vorteilhafter sind, allerdings tendiert sie eher zu der Annahme, dass dasselbe auch für das längerfristige Behalten gilt. Allerdings räumt Kritzenberger ein, dass die Studien im Bereich des längerfristigen Behaltens nur mit einfachen Inhalten durchgeführt wurden, also keine allgemein gültige Aussage gemacht werden kann. [vgl. Kritzenberger 2005, S. 66-70]

Sattelberger und Hanisch erläutern anhand neuropsychologischer Grundlagen die Bedeutung von Visualisierungen bzw. des visuellen Sinneskanals.
Ungefähr 2,5 Millionen Nervenfasern kommen vom Körper ins Gehirn. Etwa 2 Millionen davon fallen auf die beiden Sehnerven, was bedeutet, dass der Mensch sehr gut fürs Sehen ausgerüstet ist. Der Mensch ist ein visuelles Wesen.
Für den Schulunterricht bedeutet das, dass wenn immer es möglich ist, visualisiert werden sollte, und Lerninhalte visuell dargestellt werden sollten. [vgl. Hanisch und Sattlberger 2008[4], S. 1-3]
Auch wenn die Ergebnisse der Studien in manchen Bereichen nicht immer übereinstimmen, und kleine Unterschiede vorhanden sind; in einem Punkt sind sich alle Autoren einig:
Weder akustische noch visuelle Information allein ist ausreichend. Am besten funktioniert das lange und kurzfristige Behalten bei Kombination der beiden Kanäle. Es ist also vorteilhaft, wenn möglich, beide Sinneskanäle gleichzeitig anzusprechen (vorausgesetzt wird hierbei natürlich, dass die Informationen, die über die beiden Sinneskanäle übertragen werden sollen, deckungsgleich sind)

1.3.2 Langzeitgedächtnis

Hanisch und Sattlberger (2008) gehen in einem Vortrag über neuropsychologische Grundlagen der Mathematikdidaktik unter anderem auch auf das Langzeitgedächtnis ein.

[4] http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2008%20Band%2041/VortragHanischSattlberger.pdf, (06.06.2016)

Will man sich etwas langfristig merken, muss es im Langzeitgedächtnis gespeichert werden. Beim Kurzzeitgedächtnis werden Inhalte lediglich in Form der Aktivierung von Neuronen gespeichert. Im Gegensatz dazu werden Inhalte des Langzeitgedächtnisses als Verbindungen zwischen Neuronen gespeichert – also als Hirnstruktur. Diese Strukturen können immer wieder verändert werden, worauf sich „*eine fast unbegrenzte Speicherdauer*“ und eine „*fast unbegrenzte Kapazität*“ begründet.

Viele Inhalte kommen erst durch Übung und ständiges Wiederholen ins Langzeitgedächtnis. Daher ist laut Hanisch und Sattlberger „*Üben ein unverzichtbarer Teil eines guten Mathematikunterrichts*“ [vgl. Hanisch und Sattlberger 2008, S. 3]

1.3.3 Bedeutung der Farben / Farbwahrnehmung

Farben sind nicht objektiv und eindeutig. Unter anderem hängt die Farbempfindung von der Umgebung und dem Kontext ab; ein kleines rotes Objekt zum Beispiel wirkt auf schwarzem Hintergrund intensiver als ein größeres Objekt gleicher Farbe. (siehe Abbildung 4)

Das Ganze funktioniert aber auch anders herum: Farbige Flächen werden in einer anderen Größe wahrgenommen, als sie eigentlich besitzen – vergleicht man zum Beispiel ein weißes und ein schwarzes Rechteck gleicher Größe, so wirkt das weiße Rechteck oft größer. [vgl. Schuhmann 2000]

[Schumann 2000, S. 86]

Abbildung 4

Außerdem werden unterschiedliche Farben verschieden „gut“ wahrgenommen; so werden zum Beispiel gelb und weiß sehr schnell und gut wahrgenommen, blau und grün jedoch eher schlecht und langsamer. Schumann gibt eine Liste an, welche die Farben nach ihrer Wahrnehmbarkeit reiht:

Gelb > Weiß > Rot > Grün > Blau

Gelb wird also laut dieser Liste am besten wahrgenommen, blau am schlechtesten.

„*Daraus folgt für die Visualisierung, dass wichtige Merkmale, die möglichst schnell identifiziert werden sollen, bevorzugt in den hellen Farben Gelb und Weiß visualisiert werden sollten, während Grün und Blau bevorzugt zur Darstellung von Randinformationen genutzt werden können.*“ [Schumann 2000, S. 88]

Allerdings muss beachtet werden, dass nicht von allen Menschen Farben gleich empfunden werden; angefangen von der relativ „häufigen“ „Rot-Grün-Blindheit“ bis über die seltenere „vollständige“ Farbenblindheit. Schumann erläutert auch viele weitere Formen der Farbsinnstörung, auf die ich hier nicht näher eingehen möchte. [vgl. Schuhmann 2000, S. 97/98]

1.4 Funktionen/Aufgabenbereiche graphischer Darstellungen im Mathematikunterricht

Lorenz (1992) beschäftigt sich mit „Anschauungsbildern“ und unter anderem mit der Frage, wozu diese überhaupt nötig sind. Er kommt zu dem Schluss, dass Bilder bei bestimmten Problemstellungen hilfreicher sind als rein verbale Formulierungen.
Ein Beispiel wäre, wenn man das Aussehen einer Person vermitteln möchte. Natürlich lässt sich eine bestimmte Person verbal beschreiben und viele Details und Auffälligkeiten lassen sich in Worte fassen. Doch ein Bild dieser Person ist viel aussagekräftiger und eindeutiger. [vgl. Lorenz 1992, S. 54/55]

In einem etwas mathematischeren Kontext betrachtet haben graphische Darstellungen nach Wille (1982) vor allem folgende Ziele: Veranschaulichen, Entdecken und graphisches Arbeiten. Auf diese Ziele werde ich im Folgenden näher eingehen.
Des Weiteren kommen nach Strunz (1968) die Funktion „Darstellungen zum Ordnen von Begriffen“ und nach Malle (1983) die unterstützende Wirkung bei der „Begriffsbildung“ hinzu. Diese Punkte werde ich anschließend ebenfalls genauer beleuchten.

1.4.1 Veranschaulichen

Beim Veranschaulichen sollen bekannte mathematische Sachverhalte besser vermittelt werden.

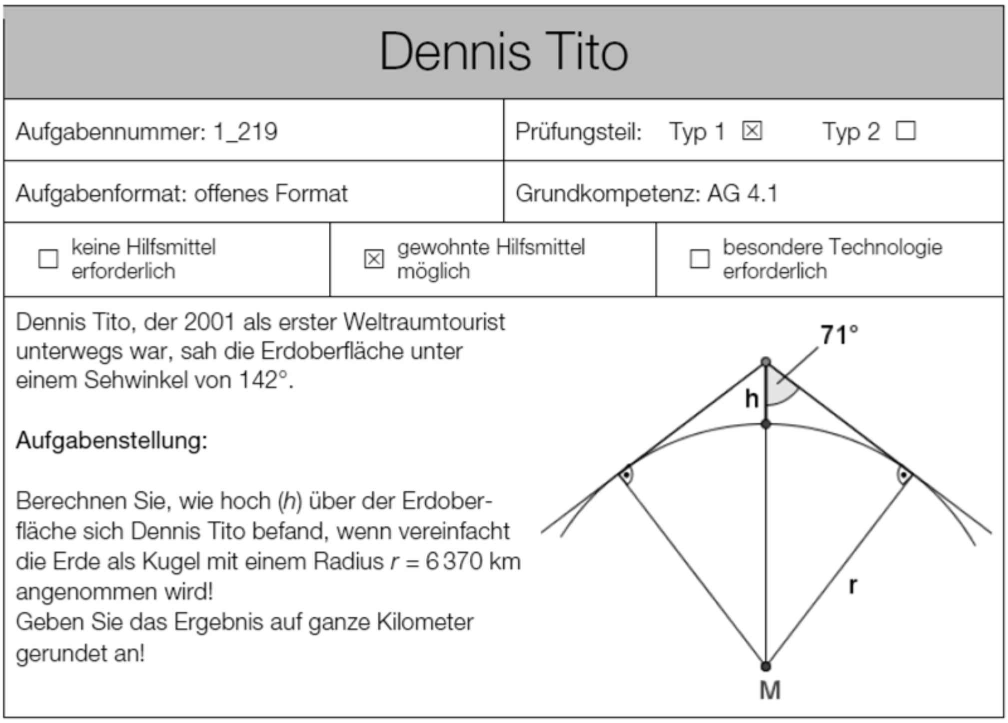
Die graphische Darstellung dient als Hilfe, um den rechnerischen Lösungsweg zu finden. Der Sachverhalt wird besser vorstellbar.

Nach Wille geht es darum „*...viel Phantasie aufzuwenden, um gute anschauliche Darstellungen gegebener mathematischer Inhalte zu finden*." [Wille 1982, S. 41]

Zum einen geht es darum, bereits existierende gute Darstellungen zu finden, zu verbessern und zu variieren, zum anderen geht es darum, gute neue Darstellungen zu finden, die anders sind als die Üblichen [vgl. Wille 1982, S. 42]

Ein typisches Beispiel, bei dem Veranschaulichungen hilfreich sein können, ist die Trigonometrie.

Die folgende Aufgabe stammt aus dem Aufgabenpool (Oberstufe) der BIFIE-Homepage:



Dennis Tito

Aufgabennummer: 1_219	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1	
☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Dennis Tito, der 2001 als erster Weltraumtourist unterwegs war, sah die Erdoberfläche unter einem Sehwinkel von 142°.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie, wie hoch (h) über der Erdoberfläche sich Dennis Tito befand, wenn vereinfacht die Erde als Kugel mit einem Radius r = 6 370 km angenommen wird!
Geben Sie das Ergebnis auf ganze Kilometer gerundet an!

Abbildung 5 [5]

Die Darstellung veranschaulicht den gegebenen Sachverhalt und lässt einen möglichen Lösungsweg erkennen. Die Darstellung hilft, das rechtwinkelige Dreieck zu finden, in welchem man mit Hilfe des Sinus die Höhe berechnen kann.

[5] BIFIE Aufgabenpool: Trigonometrie: https://aufgabenpool.bifie.at/srp_ahs/index.php, (01.06.2016)

Ohne graphische Veranschaulichung wäre diese Aufgabe für die meisten Schülerinnen und Schüler sehr viel schwieriger lösbar.

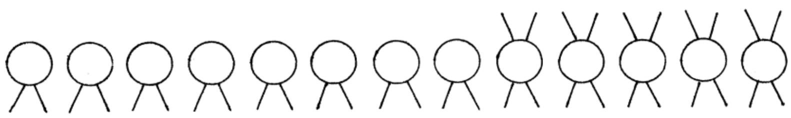
1.4.2 Graphisches Arbeiten/Problemlösen

Beim graphischen Arbeiten geht es darum, numerische, analytische, oder sonstige Probleme zu lösen. Es handelt sich also um das „Problemlösen“ unter Verwendung graphischer Hilfsmittel.
Die Probleme können alles Mögliche umfassen; angefangen von „einfachen“ Textaufgaben bis hin zu komplizierteren oder offenen Aufgaben wie zum Beispiel Fermi-Aufgaben.

Das Lösen von Textaufgaben spielt im Mathematikunterricht eine nicht unbedeutende Rolle, und Schülerinnen und Schüler müssen ein Konzept entwickeln, wie solche Aufgaben gelöst werden können. Sehr hilfreich können hier wie bereits erwähnt graphische Darstellungen sein.
Dabei kann schon der Prozess des Erstellens der Darstellung die Lösung des Problems beinhalten.
Ein Beispiel dafür wäre Malles Beispiel mit Hühnern und Hasen, das ich bereits erwähnt habe:

„*In einem Stall sind Hühner und Hasen. Insgesamt sind es 13 Tiere, die zusammen 36 Beine haben. Wie viele Hühner und wie viele Hasen sind es?*“ [Malle 1984, S. 75]

Eine visuelle Lösung könnte etwa so aussehen:



[Malle 1984, S. 75]

Hat man es geschafft diese Skizze zu erstellen ist auch die Lösung klar; 8 Hühner und 5 Hasen müssen nur noch abgezählt werden.

1.4.3 Entdecken

Beim Entdecken geht es um das Finden neuer Ideen. Hierzu gehören zum Beispiel Beweise, insbesondere wenn diese selbst gefunden werden sollen. Hierbei können Bilder nützlich sein, und in manchen Fällen können die Beweise oder Ideen sogar auf Bilder zurückgehen; betrachtet man zum Beispiel das Riemann‘sche Flächenintegral, wäre die Überlegung der

Annäherung durch Ober- und Untersummen kaum ohne graphische Veranschaulichungen vorstellbar. [vgl. Wille 1982, S. 49]

1.4.4 Darstellungen zum Ordnen von Begriffen

Eine weitere Aufgabe von graphischen Darstellungen kann das Ordnen von Begriffen sein. In der Mathematik kommen zum Beispiel Venn- und Euler-Diagramme zum Einsatz. Des Weiteren können auch Begriffspyramiden der Ordnung dienen.

Nachfolgende Abbildung nach Strunz (1968) soll ein Beispiel für eine solche Begriffspyramide geben:

Dreieck

Spitzwinkelig rechtwinkelig stumpfwinkelig

… (gleichseitig, nur 2 Seiten sind gleich lang, ungleichseitig …) [Strunz 1968, S. 169]

Die Dreiecke werden in diesem Fall in Klassen unterteilt („spitzwinkelig“, „rechtwinkelig“ und „stumpfwinkelig“). Wichtig hierbei ist, dass es sich um Klassen handelt, deren Durchschnitt leer ist. Die Unterteilung erfolgt also in Teilmengen, die keine gemeinsamen Elemente enthalten.
In der nächsten „Ebene“ der Pyramide könnte eine Unterteilung in weitere Klassen erfolgen, beispielsweise in „gleichseitig“, „Nur 2 Seiten sind gleich lang“ und „ungleichseitig“. Auch hier sind die Durchschnitte der Klassen leer, und sie beinhalten keine gemeinsamen Elemente.

Eine andere Möglichkeit der Einteilung ist die Unterteilung eines allgemeinen Begriffs in immer spezifischer werdende Begriffe.

Ein Beispiel hierfür wäre die Unterteilung des allgemeinen Begriffs „Dreieck“ in den spezifischeren Begriff „gleichschenkeliges Dreieck“ und den noch spezifischeren Begriff „gleichseitiges Dreieck“.

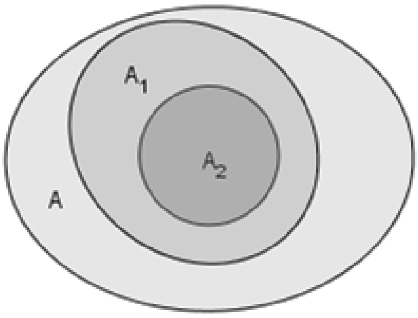


Abbildung 6

Das könnte man beispielsweise in einem Diagramm darstellen. (siehe Abbildung 6)

A steht in diesem Diagramm für die Menge aller Dreiecke, A_1 für die Menge aller gleichschenkeligen Dreiecke und A_2 für die Menge aller gleichseitigen Dreiecke.

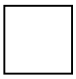
Hierbei ist A_2 eine echte Teilmenge von A_1, und A_1 eine echte Teilmenge von A. Alle Elemente des spezifischeren Begriffs sind also im allgemeineren Begriff enthalten.
Es erfolgt im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel keine Aufteilung in Klassen mit leerem Durchschnitt, sondern eine Unterteilung in immer spezifischer werdende Begriffe, die jeweils komplett im allgemeineren Begriff enthalten sind.

Diese beiden Möglichkeiten sollten unterschieden und nicht vermischt oder verwechselt werden.

1.4.5 Begriffsbildung

Empirischer Begriff:
Ein Kind erwirbt einen Begriff anhand von Gegenständen. Den Begriff eines "Kreises" oder eines "Quadrates" zum Beispiel erlernt das Kind anhand von Figuren oder Bildern – dieser ist für das Kind auf sein Aussehen beschränkt.
Wenn das Verständnis aber „nur“ empirisch ist, können daraus Fehler resultieren.
[vgl. Dörfler 1984, S. 56]

Ein Beispiel für einen solchen Fehler wäre: "Ein Quadrat ist kein Rechteck“. Die Bilder eines Quadrates und eines "klassischen" Rechtecks, so wie sie jedem Kind bekannt sind, sind nicht ident.

Rechteck:  Quadrat: 

Folgert man rein nach dem Aussehen, könnte man tatsächlich zu dem Schluss kommen, dass ein Quadrat kein Rechteck ist, da sich die beiden ja offensichtlich in ihrer Optik unterscheiden.
Aus eben diesem Grund ist dieser empirische Begriff für den Mathematikunterricht nicht ausreichend. Es genügt nicht, zu wissen, wie ein Rechteck oder ein Quadrat normalerweise aussieht; es ist erforderlich, eine gewisse Kenntnis über die "Beziehungen" zu entwickeln, die diese Objekte ausmachen.

Relationaler Begriff:
Zunächst möchte ich erklären, was ich unter "Beziehungen" in diesem Zusammenhang verstehe:
Jedes Objekt in der Mathematik ist aus bestimmten Beziehungen aufgebaut. Der Kreis zum Beispiel zeichnet sich durch die Beziehung "Alle Punkte haben den gleichen Abstand zum Mittelpunkt" aus.
In einem Quadrat könnte man die Beziehungen zwischen den Seiten betrachten, die alle gleich lang sein müssen, normal aufeinander stehen, und jeweils paarweise parallel zueinander sein müssen. Außerdem gibt es Beziehungen zwischen den Diagonalen, bezüglich der Symmetrie und viele weitere.
Je mehr Beziehungen man kennt, desto besser hat man das Objekt "Quadrat" verstanden.
Es ist ein Ziel des Mathematikunterrichtes, die empirischen Begriffe, die die Schülerinnen und Schüler bereits entwickelt haben oder noch entwickeln, in relationale Begriffe überzuführen.

Zum Erlangen eines empirischen Begriffs sind Visualisierungen natürlich meist notwendig und unerlässlich.
Aber auch bei der Überführung des empirischen in den relationalen Begriff können Visualisierungen nützlich sein, da sie die Möglichkeit bieten, mit ihrer Hilfe Beziehungen aufzudecken. [vgl. Malle 1984 S. 86]

1.5 Ziele graphischer Darstellungen

„*In einem Augenblick der Wahrnehmung erfasst das Ohr einen Ton, das Auge aber die Beziehung zwischen drei Gesamtheiten von Elementen. Kein anderes Wahrnehmungssystem besitzt diese Eigenschaft, und die Logik scheint auf die drei Dimensionen der visuellen Wahrnehmung begründet zu sein.*
Das schwierige Problem, eine Gesamtheit von Beziehungen mit Hilfe der Linearität der Zeit zu transkribieren, müssen die auditiven Sprachsysteme lösen.
Das Problem der graphischen Darstellung ist es, eine Gesamtheit von Beziehungen mit Hilfe der spontan wahrnehmbaren Eigenschaft des graphischen Bildes zu transkribieren.“ [Bertin (1982), S. 179]

Weiters erklärt Bertin, dass beim Sehen ein Sachverhalt bereits mit einem Blick erfasst wird und damit durch graphische Darstellungen Zeit gespart werden kann. Daher findet er, dass eine Grafik, die erst „gelesen“ werden muss, keine Lösung ist, und der Leser dann meist lieber zum Text greift. [vgl. Bertin 1982, S. 179]
Es muss natürlich hinzugefügt werden, dass es Bertin um die Verwendung graphischer Darstellungen in Texten geht, nicht im Schulunterricht.
Im Mathematikunterricht ist die Situation natürlich eine andere. Den Schülerinnen und Schülern soll ja beigebracht werden, bestimmte Grafiken zu lesen und zu interpretieren. In diesem Fall sind also „komplexere“ Grafiken, deren Inhalt man sich erst erarbeiten muss, von großer Bedeutung, da ebendies gelernt werden soll.

1.5.1 Ziele in der Schule: Lehrplan

Im österreichischen Lehrplan finden sich einige Punkte, die im Umgang mit graphischen Darstellungen gelernt werden sollen. Insbesondere ist der Aspekt „*Darstellen und Interpretieren*“ von Bedeutung, zu dem folgende Punkte zählen:

„ - *verbales, formales oder graphisches Darstellen von Sachverhalten;*
- *geometrisch-zeichnerisches Darstellen von Objekten;*
- *Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen;*
- *Erstellen und Interpretieren von mathematischen Modellen außermathematischer Sachverhalte.“* [Lehrplan Mathematik, S.1]

1.5.2 Grundlegende Tätigkeiten beim Arbeiten mit graphischen Veranschaulichungen nach Marschner-Franzke

Marschner-Franzke fasst 4 Grundtätigkeiten in der Arbeit mit graphischen Darstellungen zusammen, die sie zugleich als „*Teilziele bei der Befähigung der Schüler zur Arbeit mit graphischen Veranschaulichungen*" ansieht. [Marschner-Franzke 1991, S. 116]

Erfassen

Eine Grafik zu erfassen beinhaltet, sie zu verstehen, das Wesentliche zu erkennen und sie interpretieren zu können.

Dazu könnte zum Beispiel gehören, einer Darstellung Angaben entnehmen zu können, eine Veranschaulichung ergänzen zu können oder auch selbst eine eigene Angabe zu einer Darstellung zu formulieren. [vgl. Marschner-Franzke 1991, S. 226/227]

Des Weiteren sollten Schülerinnen und Schüler auch begründen können, WARUM eine Darstellung einen bestimmten Sachverhalt beschreibt.

Wiederaufgreifen bekannter Veranschaulichungen

Hier geht es darum, sich an bekannte Darstellungen zu erinnern und diese in einem geeigneten Kontext einbeziehen zu können.

Ein Beispiel, wo das Wiederaufgreifen einer bekannten Veranschaulichung Sinn hat, ist das Folgende:

5.33 Berechne den Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den folgenden Bestimmungsstücken! [6]

a) $a = 118$, $b = 72$, $\alpha = 26{,}5°$ c) $a = 81$, $b = 46$, $\alpha = 127{,}9°$

b) $a = 57$, $b = 68$, $\beta = 118{,}6°$ d) $a = 6$, $b = 5$, $\beta = 58{,}6°$

Variieren

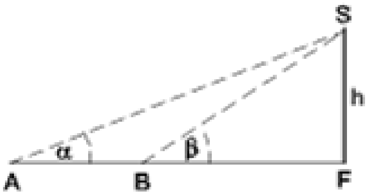
Zum Variieren gehört es, die graphische Darstellung aufzugreifen und diese dann auf ähnliche Sachverhalte zu übertragen und zu modifizieren. [vgl. Marschner-Franzke 1991, S. 226]

Als Beispiel kann die Trigonometrie herangezogen werden:

[6] Mathematik verstehen 5, S.88

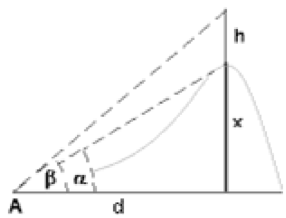
Beispiel 1)

„Ein alter Turm steht in einer Ebene. Um seine Höhe zu bestimmen, steckt man in der Ebene eine horizontale Standlinie AB ab, so dass A, B und der Fußpunkt des Turms in einer Linie liegen. Von A aus misst man zur Turmspitze den Höhenwinkel α von B aus den Höhenwinkel β. Wie hoch ist der Turm, und wie weit ist sein Fußpunkt von B entfernt? AB = 100m, α=15,8°, β=38,1°“ [7]



Beispiel 2)

„Auf einem Berggipfel steht ein h Meter hoher Sendemast. Von einem Ort A im Tal sieht man den Fußpunkt des Mastes unter dem Höhenwinkel α, die Spitze unter dem Höhenwinkel β. Wie hoch ist der Berg? Berechne auch die horizontale Distanz d zwischen A und dem Berggipfel. h=75m, α=17,7°, β=24,3°“ [8]



Ist das erste Beispiel und seine Veranschaulichung bekannt, kann das Übertragen der bekannten Darstellung auf das zweite Beispiel als „Variieren“ aufgefasst werden.

Die Darstellung muss wieder aufgegriffen und abgeändert werden.

Finden von Veranschaulichungen

Eine passende graphische Darstellung muss zur Gänze selbst gefunden werden, wobei das Wesentliche beachtet werden sollte. Es soll der Nutzen der Darstellung erkannt werden. [vgl. Marschner-Franzke 1991, S. 226]

Marschner-Franzke führte 1990 eine Studie durch, die den Stand des Könnens der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf Erfassen, Wiederaufgreifen, Variieren und Finden von graphischen Darstellungen erfassen sollte. Dazu wurde in zwei Leipziger Schulen eine Standermittlung in siebenten und neunten Schulstufen durchgeführt.

Zu jedem der genannten Punkte wurden Aufgaben gestellt. Um einen Überblick über die gestellten Fragen zu geben, wird hier zu jedem Punkt eine der Aufgaben herausgegriffen:

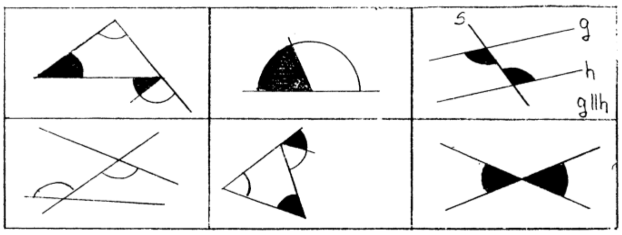
[7] http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/verm.htm, (06.06.2016)

[8] http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/verm.htm, (06.06.2016)

1. Erfassen:

„1.2. (Kl. 6) Wähle für jede der Aussagen ein geeignetes Bild aus, das den Sachverhalt veranschaulicht!

a) Sind zwei Winkel Nebenwinkel, so ist deren Summe 180°.
b) Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich groß.
c) Sind zwei Winkel Seitenwinkel, so sind sie kongruent.
d) *Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist so groß wie die beiden nichtanliegenden Innenwinkel zusammen.*" [Marschner-Franzke 1991, S. 237]



[9]

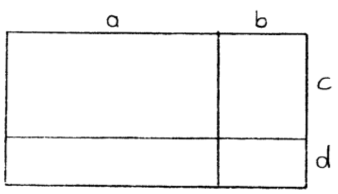
„2. Wiedergeben

(Kl. 7) Veranschauliche jede der Aussagen oder Begriffe durch ein Bild!
Kontrolliere anschließend, ob Dein Bild übersichtlich ist, weder zuviel noch zuwenig Angaben enthält und von jedermann verstanden wird!

a) Jeder Peripheriewinkel über einem Bogen ist halb so groß wie der Zentriwinkel über diesem Bogen
b) Satz des Thales
c) Prisma
d) 50 % von einem Ganzen

3. Variieren

(Kl. 8) $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ *läßt sich durch Aufteilung einer Rechteckfläche zeichnerisch veranschaulichen.*



[10]

[9] Marschner-Franzke 1991, S. 237

[10] Marschner-Franzke 1991, S. 238

Versuche mit einer Skizze $(a+b)^2$ *zu veranschaulichen! Vervollständige danach die Gleichung* $(a+b)^2 =$ *.....!*“ [Marschner-Franzke 1991, S. 238]

„*Selbstständiges Finden:*
(Kl. 7) Die folgende Aufgabe wurde in einer Klassenarbeit gestellt:
Wieviele Punkte haben zwei Kreise k_1 und k_2 gemeinsam, wenn folgendes gilt? (Maßangaben in mm)

Entfernung der Mittelpunkte	17	9	10	11	0	13
Radius von k	8	11	15	10	9	6
Radius von k	5	2	3	2	1	7

(Lb. Kl.7, S.136, Nr.3) [11]

Stell Dir vor, Du würdest beauftragt, mit einem Mitschüler, der längere Zeit gefehlt hat, diese Aufgabe noch einmal gemeinsam zu lösen. Dabei versuchst Du, möglichst anschaulich vorzugehen.
Mit Hilfe welcher Skizze würdest Du das tun?“ [Marschner-Franzke 1991, S. 239]

Marschner-Franzkes Auswertung ergab, dass beim Erfassen wesentliche Informationen übersehen wurden, und dass mangelnde Fachkenntnisse auftraten.
Auch beim Wiederaufgreifen schien es den Schülerinnen und Schülern schwer zu fallen, sich auf die wesentlichen Informationen zu konzentrieren (vgl. Malle – Hasen/Hühner!) und diese zu übertragen.
Beim Variieren wurden zwar die Vorgaben erfasst, jedoch scheiterte meist die Übertragung. Weiters stellte sie fest, dass beim Finden die Schülerinnen und Schüler es vorzogen, sich den Sachverhalt vorzustellen, anstatt ihn mit Skizzen zu veranschaulichen.

„*Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß ein offensichtliches Defizit besteht, die Vorteile graphischen Arbeitens als vollwertige Methode für sich zu erkennen und auszunutzen*“ [Marschner-Franzke 1991, S. 240]

Auch Laakmann bemerkt diese Vorliebe für die algebraische Darstellung der meisten Schülerinnen und Schüler. Er erwähnt einige Studien, die dieses Resultat belegen; Dreyfus

[11] Marschner-Franzke 1991, S. 239

und Eisenberg 1991, Dick 1988, Vinner 1989 aber auch aktuellere Studien an nordrheinwestfälischen Gymnasien. [vgl. Laakmann 2013, S. 26]

Allgemeine Prinzipien – Umsetzung der Ziele

Daraus resultierend schlägt Marschner-Franzke (1991) einige Möglichkeiten vor, wie die Schülerinnen und Schüler an das Arbeiten mit graphischen Darstellungen herangeführt werden könnten. Einige ihrer „Allgemeinen Prinzipien", die nicht von der Art der graphischen Veranschaulichung abhängen, sollen hier herausgegriffen werden:

Als erstes geht Marschner Franzke auf die „*Vorbildwirkung des Lehrers*" ein, der graphische Veranschaulichungen gezielt und bewusst verwendet. Das soll dazu dienen, den Schülerinnen und Schülern die Bedeutung und Zweckmäßigkeit graphischer Veranschaulichungen klar zu machen, sowohl beim Erlangen von Erkenntnissen als auch für die Kommunikation. Weiters soll das ausreichende Üben des Interpretierens graphischer Veranschaulichungen gewährleistet werden.

Weiters schlägt sie das „*Einbeziehen der in (Lehr-)Büchern angebotenen graphischen Veranschaulichungen*" vor. [Marschner-Franzke 1991, S. 241] Das dadurch angestrebte Ziel ist wiederum die Möglichkeit, das Interpretieren graphischer Veranschaulichungen zu üben. Mit dem Ziel, den Schülerinnen und Schülern den Nutzen graphischer Veranschaulichungen näher zu bringen und ihnen die „*Einsicht in die „Legitimität" der Arbeit mit graph. V.*" [Marschner-Franzke 1991, S. 241] bewusst zu machen, formuliert sie die folgenden beiden Prinzipien:

„*Einbeziehen „veranschaulichungsträchtiger" Aufgaben – Anregen oder Auffordern zum graphischen Veranschaulichen: Gegenüberstellen von Lösungen mit und ohne Hilfe graphischer Veranschaulichungen*" und „*Anregen der Schüler zum graphischen Veranschaulichen*". [Marschner-Franzke 1991, S. 241]

Zuletzt ist es von Vorteil, verschiedene Arten graphischer Veranschaulichungen zu verwenden, damit die Schülerinnen und Schüler nicht die Möglichkeit haben, die Bilder auswendig zu lernen. [vgl. Marschner-Franzke 1991, S. 242]

1.5.3 Hauptziele in der Arbeit mit graphischen Darstellungen in der Schule - Ziele nach Laakmann

Laakmann (2013) formuliert, wie der Umgang mit graphischen Darstellungen operationalisiert werden kann. Ihm zufolge kann dies geschehen durch:

„ - *Entnehmen von Informationen aus Darstellungen*
- *Eigenständiges Anfertigen von Graphen, Tabellen und anderen schematischen Darstellungen, um Informationen verfügbar zu machen*
- *Darstellungswechsel, als regelgeleitetes Operieren mit Darstellungen,*
- *Beurteilungen der Darstellung vor dem Hintergrund der Aufgabenstellung.“*

[Laakmann 2013, S.24]

Natürlich kommt es hierbei zu einigen Überschneidungen mit Marschner-Franzkes „Grundlegenden Tätigkeiten beim Arbeiten mit graphischen Veranschaulichungen“ im vorhergehenden Punkt. Ich werde darum nicht noch einmal auf jeden Punkt eingehen, sondern nur „neue“ bzw. „andere“ Aspekte herausgreifen, die bei Marschner-Franzke noch nicht genauer thematisiert wurden.

Da „Entnehmen von Informationen“ bereits im vorhergehenden Punkt im Zusammenhang mit Marschner-Franzkes „Erfassen“ von Darstellungen behandelt wurde und den „Darstellungswechseln“ später ein eigener Punkt (1.7) gewidmet wird, werde ich auf die beiden Punkte an dieser Stelle nicht näher eingehen.

Eigenständiges Anfertigen von Graphen, Tabellen und anderen schematischen Darstellungen, um Informationen verfügbar zu machen

Auch dieser Punkt wurde in Ansätzen schon im Zuge von Marschner-Franzkes „Wiederaufgreifen, Variieren und Finden“ von Veranschaulichungen besprochen. Allerdings mit dem Unterschied, dass es bei Laakmann nicht rein um „Veranschaulichungen“ in Marschner- Franzkes Sinn geht, sondern es hier auch darum geht „Informationen verfügbar zu machen“.

Das kann zum Beispiel bedeuten, statistische Daten anschaulich in graphischen Darstellungen aufzubereiten, um die Informationen schneller erfassen zu können. Näheres dazu wird im späteren Punkt „Statistik“ behandelt.

Beurteilungen der Darstellung vor dem Hintergrund der Aufgabenstellung
Die Bedeutung von Darstellungswechseln und verschiedenen Darstellungsformen wird im nächsten Punkt behandelt werden.
Allerdings gehört es auch dazu, über die Güte einer Darstellungsart in einem bestimmten Kontext zu reflektieren, und einschätzen zu können, in welchem Zusammenhang welche Darstellungsform geeignet ist und welche nicht.
Des Weiteren sollten die Schülerinnen und Schüler erkennen, ob die Darstellung selbst in einem bestimmten Zusammenhang geeignet ist, und nicht zum Beispiel zu falschen Schlüssen verleitet (siehe 1.7 „schlechte Visualisierungen" oder 3.5 „Lügen mit Statistik")

Daraus abgeleitet müssen Lernumgebungen Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit bieten zu lernen,

„ - *aus Darstellungen, Informationen zu entnehmen,*
- *in unterschiedlichen Darstellungen, Informationen zur Verfügung zu stellen,*
- *Informationen in anderen Darstellungen wiederzugeben*
- *die Güte einer Darstellungsart angemessen zu beurteilen.*" [Laakmann 2013, S. 24]

1.5.4 Allgemeine Lehr- und Lern-Ziele

Einige der Ziele dieser Arbeit mit graphischen Darstellungen formuliert Wille (1982);
Ihm zufolge gibt es folgende Lehr- und Lernziele:

„ - *besseres Verstehen und Behalten, sowie Anreiz zur Ideenbildung und Kreativität,*
- *ökonomisches Lehren („ein Bild sagt mehr als tausend Worte"),*
- *Befriedigung beim Herstellen von Anschauungsmaterial [..], einschließlich der Einübung in Gruppenarbeit,*
- *Verbesserung der räumlichen Vorstellung und der Zeichenfähigkeit,*
- *Freude am künstlerischen Gestalten.*" [Wille 1982, S. 55]

1.6 Darstellungswechsel

Beschäftigt man sich mit „Darstellungswechseln" im Mathematikunterricht, stößt man auf die vielfältigsten Möglichkeiten; einerseits kann der Darstellungswechsel zwischen verschiedenen Repräsentationsebenen durchgeführt werden; Duval spricht hier von „Conversion". [vgl. Duval 2006, S. 111]

Andererseits kann der Darstellungswechsel auch innerhalb derselben Ebene bzw. Darstellungsart erfolgen; Duval nennt das „Treatments“. [vgl. Duval 2006, S. 111]
Auch hier sollen wieder nur Wechsel behandelt werden, die etwas mit graphischen Darstellungen zu tun haben; also einerseits der Wechsel zwischen verschiedenen graphischen Darstellungen (wie zum Beispiel zwischen logischen und ikonischen Bildern) und dem Wechsel zwischen graphischen Darstellungen und anderen Repräsentationsarten, wie Symbolen (Formeln) und Sprache (verbale Formulierung).

Die Abbildung zeigt verschiedene Darstellungsarten einer quadratischen Funktion:

x	f(x)
-2	0
-1	-3
0	-4
1	3
2	0

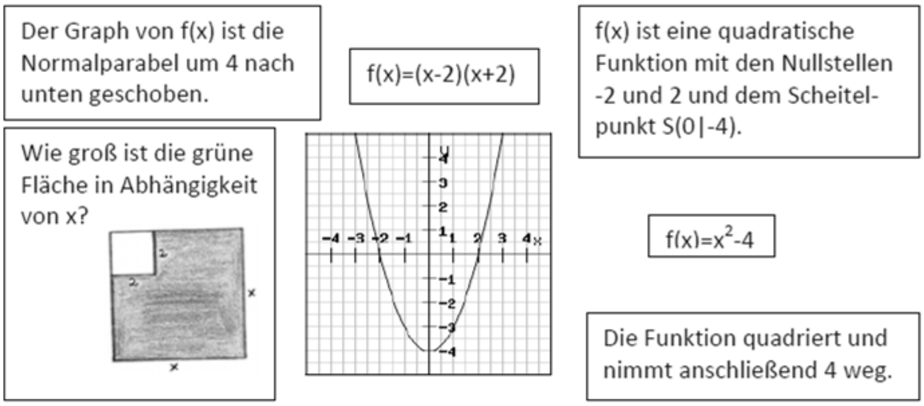


Abbildung 1: Repräsentationen einer quadratischen Funktion

[Dreher 2013, S. 216]

Treatments: Wie bereits erwähnt, beschreiben diese einen Wechsel innerhalb einer Repräsentationsebene.
Betrachtet man also einen Wechsel innerhalb der Ebene der graphischen Darstellungen, so wäre ein Beispiel hierfür die Übertragung eines Funktionsgraphen in ein anderes Koordinatensystem (beispielsweise durch Umskalierung).
Duval gibt noch weitere Beispiele an:

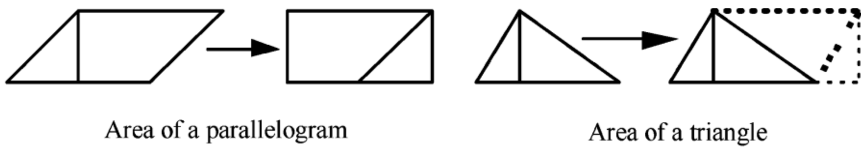


Abbildung 7 Visual transformations of shapes. [Duval 2006, S. 112]

Duval zeigt auf, dass bei diesen Darstellungswechseln kaum mathematisches Wissen erforderlich ist; sie werden verwendet, um eine intuitive Begründung und eine

Veranschaulichung zu geben, „*But, in most cases it does not work because the visual processes of gestalt recognition do not run in the same way as required and expected from a mathematical point of view* " [Duval, 2006, S. 112]

Duval schreibt darum auch den „Conversions" größere Komplexität und auch größere Bedeutung zu.

Conversions: Diese beschreiben einen Wechsel zwischen 2 Ebenen. Typische Beispiele sind die Umwandlung einer Funktionsgleichung in den zugehörigen Funktionsgraphen oder das Darstellen eines Bruches als „Pizzastück".

Duval beschreibt sie folgendermaßen:

„*Conversion is a representation transformation which is more complex than treatment because any change of register first requires recognition of the same represented object between two representations whose contents have very often nothing in common*."
[Duval 2006, S. 112]

Conversions erfordern also meist einiges an mathematischem Grundwissen. So müssen Grundlagen zur Darstellung in beiden Repräsentationsebenen vorhanden sein, und außerdem müssen entscheidende Eigenschaften der Darstellungen der Repräsentationsebenen ineinander übergeführt werden können.

Kuntze erläutert, dass die Verwendung von Darstellungswechseln, insbesondere solcher „Conversions", sehr hilfreich sein kann – so kann ein geometrisches Problem algebraisch gelöst werden und umgekehrt. [vgl. Kuntze 2013, S. 20]

Duval beschreibt das so:

„*Mathematical activity needs to have different semiotic representation systems that can be freely used according to the task to be carried out, or according to the question that is asked.*" [Duval 2006, S. 108]

Auch für Experten ist es ein wesentlicher Punkt „*für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen [zu] entwickeln, aus[zu]wählen und [zu] nutzen*" [KMK, 2004b, S. 7f nach Kuntze 2013, S. 20]

Des Weiteren können sich unterschiedliche Darstellungen unterschiedlich auf den Lernerfolg einzelner Schülerinnen und Schüler auswirken. Vielfältige Darstellungen haben also den Vorteil, dass mit ihnen unterschiedliche Schülerinnen und Schüler erreicht werden können. [vgl. Pühringer 2012, S.80]

Kuntze kommt daraufhin zu folgendem Schluss:

„*Vielfältige Darstellungen nutzen zu können ist ein Bestandteil mathematischer Kompetenz und ein Zeichen für ein flexibel einsetzbares Begriffswissen. Um solches Begriffswissen zu fördern, sollen daher vielfältige Darstellungen genutzt werden.*" [Kuntze 2013 S. 28]

Mit den Problemen und Schwierigkeiten von Darstellungswechseln beschäftigt sich Dreher (2013).
Sie stellt fest, dass genau dieses erforderliche Wissen und zu schließenden Verknüpfungen den Lernenden oft Schwierigkeiten bereiten.
Zu viele oder undurchsichtige Darstellungswechsel können die Schülerinnen und Schüler aufgrund ihrer Komplexität verwirren.
Allerdings zeigt Dreher auch auf, dass das Vermeiden von Darstellungswechseln dazu führen kann „*dass ein mathematisches Objekt mit einer seiner Repräsentationen [...] identifiziert wird.*" [Dreher 2013, S. 217]

Im Endeffekt kommt Dreher (2013) zu dem Schluss, dass Darstellungswechsel für Lernende zwar schwierig sind, sie im Unterricht aber dennoch nicht gemieden werden sollten. Man muss sie explizit behandeln und bewusst trainieren. [vgl. Dreher 2013, S. 223]

1.7 Probleme beim Veranschaulichen/Visualisieren

Bis jetzt wurden vorwiegend die positiven Eigenschaften von Visualisierungen beleuchtet. Allerdings ist der Einsatz von Visualisierungen nicht in allen Situationen immer förderlich, denn er kann auch negative Effekte haben.

1.7.1 Gefahren der Visualisierung nach Hanisch

Hanisch (1985) setzt sich mit den Gefahren der Visualisierung auseinander. Er sieht folgende Problematiken, die bei der Arbeit mit Visualisierungen auftreten können:

1) Visualisierungen sind im Allgemeinen schlecht für die Darstellung eines Beweises: Hanisch gibt hier mehrere Beispiele an, in denen ein Beweis mithilfe von Visualisierungen zu falschen Schlüssen führen kann. Ich möchte hier einen dieser Beweise herausgreifen:

In Abbildung 8[12] ist ein Quadrat mit Seitenlänge 8 cm abgebildet. Dieses Quadrat besitzt also einen Flächeninhalt von 64 cm^2.

Das Quadrat wird nun längs der gezeichneten Linien durchgeschnitten und neu angeordnet (Rechteck links vom Quadrat). Es sieht nun so aus, als füllten die Stücke das Rechteck genau aus. Nun ist aber der Flächeninhalt dieses Rechtecks offenbar 5*13, also 65 cm^2. Somit ist also 64 = 65.

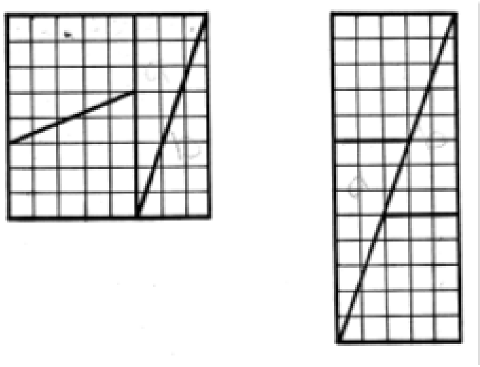


Abbildung 8

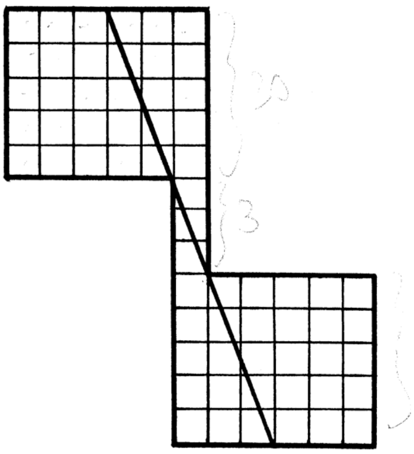


Abbildung 9

Die Teile lassen sich auch anders anordnen (siehe Abbildung 9[13]) und man „sieht“, dass 64 auch gleich 63 sein kann. Somit ist „bewiesen“, dass 63=64=65 ist. Da das natürlich Unfug ist, zeigt Hanisch hier, dass ein Beweis durch Visualisierungen unter Umständen gar nicht stichhaltig ist.

Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass die Visualisierung allein manchmal nicht ausreicht, um einen Beweis ausreichend zu begründen. Es kann nämlich offensichtlich passieren, dass man falsche Schlüsse zieht. [vgl. Hanisch 1985, S. 101/102]

Auch Profke (1994) geht auf dieses Problem ein, und stellt fest, dass es von Bedeutung ist, ob die Schülerin/der Schüler die Stichhaltigkeit einer anschaulichen Überlegung selbst beurteilen kann. „*Gelingt dies nur dem Lehrer, erscheint das Auswählen von Veranschaulichungen willkürlich und behindert das Lehrziel, Schüler zur Selbstständigkeit zu erziehen*“ [Profke 1994, S. 25]

Da die Stichhaltigkeit eines Beweises für Schülerinnen und Schüler oft schwer einzusehen ist, ist beim Beweisen mit Visualisierungen in jedem Fall Vorsicht geboten.

---

12 Hanisch 1985, S. 101

13 Hanisch 1985, S. 102

Dennoch macht es meiner Meinung nach in manchen Fällen dann doch Sinn, graphische Beweise zu nutzen, zum Beispiel bei graphischen Beweisen des Satzes von Pythagoras. Allerdings ist hier im Unterricht zu betonen, warum dieser Beweis wirklich stichhaltig und der Satz „ausreichend“ bewiesen ist.

2) Visualisierungen können den Blickwinkel einschränken

Hanisch (1985) fasst Visualisierungen als „Modelle“ auf. Sie sind einprägsam und leicht zu erfassen, doch vereinfachen sie auch. Diese Modelle weisen keinen so hohen Komplexitätsgrad auf wie das, wofür sie stehen: die „mathematische Wirklichkeit“.
Dadurch können zwei Arten von Fehlern entstehen:

- Das Modell verleitet zu falschen Annahmen
- Das Modell verwehrt den Blick auf Erweiterungen. [vgl. Hansch 1985, S. 104]

Das Modell verleitet zu falschen Annahmen:

Dass Visualisierungen zu falschen Annahmen verleiten können, habe ich im Punkt zuvor („Visualisierungen sind im Allgemeinen schlecht für die Darstellung eines Beweises“) bereits gezeigt.

Das Modell verwehrt den Blick auf Erweiterungen:

Damit hängt auch der folgende Punkt zusammen, nämlich, dass nicht Visualisierbares leicht vernachlässigt wird; zum Beispiel ist der Differenzenquotient mehr als nur die Steigung einer Sekante; Geschwindigkeiten und Beschleunigungen lassen sich aber schlecht visualisieren.

Hanisch bringt hier auch ein Beispiel: Es wurden Personen befragt, deren Reifeprüfung schon länger zurückliegt, was sie mit dem Begriff „Differentialquotient“ in Verbindung bringen. Meist lautete die Antwort, wenn sie auf den Inhalt bezogen war: „Die Tangentensteigung!“. [vgl. Hanisch 1985, S. 104]

Ein weiteres Beispiel dafür, wie Visualisierungen (bzw. Ausschnitte davon) zu falschen Annahmen führen und den Blickwinkel einschränken können, bringt Nitsch:

„Bei der graphischen Interpretation von Funktionen hatten Schülerinnen und Schüler häufig Schwierigkeiten, den Graphen als einen Ausschnitt der Funktion zu sehen. Stattdessen waren sie der Überzeugung, die Funktion sei auf den gegebenen, sichtbaren

Ausschnitt beschränkt. Beispielsweise folgerten sie aus der Tatsache, dass der y Achsenabschnitt nicht sichtbar ist, dass dieser nicht existiert.
Ein weiteres Beispiel hierfür ist die Zuweisung eines asymptotischen Verhaltens, da der aktuelle Ausschnitt dies nahelegt, ohne dass eine Asymptote tatsächlich vorhanden wäre. Des Weiteren versuchten die Schülerinnen und Schüler, genaue Werte anhand des Graphen nach Augenmaß abzulesen.“ [Nitsch 2015, S. 126]

3) Nicht visualisierbares wird oft vernachlässigt
Mathematik beschränkt sich nicht nur auf das, was visualisierbar ist. [vgl. Hanisch 1985, S. 105]

Hanisch geht hier auf Kurvendiskussionen, Integral und Differenzen- und Differentialquotienten ein.
Differenzen- und Differentialquotient habe ich im vorigen Punkt bereits erwähnt.
Was die Integralrechnung betrifft, zitiert Hanisch hier Fischer, der im Zuge einer Fortbildungsveranstaltung Mathematiklehrer fragte, was ein Integral sei. Fast alle Antworten betrafen den Flächeninhalt unter einer Kurve, also ein Anwendungsgebiet der Integralrechnung.
Wie bereits erwähnt schneidet Hanisch auch das Thema „Kurvendiskussion“ an:

„*Sie sehen, Visualisierung schränkt den Blickwinkel ein, sie ist <u>eine</u> Sichtweise der Dinge, die anderen abstrakten aber dürfen nicht zu kurz kommen. Gerade im Schulunterricht geschieht das aber häufig. Es wird dort besonderer Wert auf Dinge gelegt, die visualisierbar sind, wie etwa auf die Kurvendiskussionen. Gewöhnliche Kurvendiskussionen, umgekehrte Kurvendiskussionen und bei der Integralrechnung noch einmal.*“ [Hanisch 1985, S. 104/105]

Allerdings muss auch erwähnt werden, dass er seine Arbeit ja bereits 1985 geschrieben hat, und obwohl sehr viel noch aktuell ist, hat sich natürlich doch auch einiges geändert. So hat zum Beispiel die von ihm erwähnte Kurvendiskussion allein aufgrund der Zentralmatura nicht mehr die Bedeutung, die sie damals hatte. Auch haben meiner Ansicht nach Aufgaben, die mit Geschwindigkeit und Beschleunigung zu tun haben, im Allgemeinen durchaus an Bedeutung gewonnen, spielen sie doch jetzt eine nicht unwesentliche Rolle bei den „BIFIE-Aufgaben“, und „müssen“ daher zwangsweise im Unterricht behandelt werden.

Was allerdings die Integralrechnung betrifft, ist die Tendenz, ein Integral mit der „Fläche unter der Kurve“ gleichzusetzen, wohl immer noch vorhanden.

4) Schlechte Visualisierungen sind auf jeden Fall zu vermeiden

„*Nicht alles in der Mathematik ist visualisierbar*“ [Hanisch 1985, S. 107]

Schlechte Visualisierungen können kontraproduktiv sein, wenn sie zum Beispiel falsche Vereinfachungen vortäuschen.

Als Beispiel betrachte man folgende Aufgabe:
Gegeben ist ein „Allgemeines Viereck“ mit gegebenen Bestimmungsstücken a, b, c, α, β,….
Gesucht sind fehlende Seiten und Winkel. Bei ungeübten Schülerinnen und Schülern kommt es oft vor, dass sie mit einem „Viereck“ automatisch ein Rechteck assoziieren und als Visualisierung eine Skizze von einem Rechteck zeichnen. Eine solche Skizze ist dann zwar nicht wirklich „falsch“ (ein Rechteck ist ja bekanntlich auch ein Viereck), allerdings ist es eine schlechte Visualisierung, da sie die falsche Vereinfachung vortäuscht, das allgemeine Viereck wäre ein Rechteck. Das kann zu falschen Annahmen und Verwirrungen führen.

Auch in der Statistik spielen solche „schlechten Visualisierungen“ eine Rolle. In der Statistik gibt es Graphiken, die ebenfalls zu falschen Annahmen führen können, da sich zum Beispiel durch abgeschnittene Säulen oder unterschiedliche Skalierung der Achsen die Darstellung „verfälschen“. Näheres dazu wird im „Statistik-Teil“ behandelt (siehe 3.5 „Lügen mit Statistik“)

Weitere Probleme der Visualisierung:
Hanisch fasst weitere Probleme, auf die ich nicht näher eingehen werde, folgendermaßen zusammen:

„*5) Beim Visualisieren um jeden Preis muss die Visualisierung als zusätzliches Wissen gelernt werden*
6) Bei aller Visualisierung darf das enaktive Element (Mathematik als Tun) nicht vergessen werden“ [Hanisch 1985, S. 107]

1.7.2 Schwierigkeiten beim Arbeiten mit Visualisierungen – worauf muss geachtet werden?

Profke (1994) diskutiert die Schwierigkeiten beim Veranschaulichen.

Hier sollte angemerkt werden, dass er sich eigentlich mit Veranschaulichungen im Allgemeinen beschäftigt, also unter „Veranschaulichung“ nicht nur visuelle Hilfsmittel versteht, sondern auch verbale, wie zum Beispiel „Veranschaulichungen durch Alltagsbeispiele“. Trotzdem lassen sich seine Schlussfolgerungen auch leicht auf rein visuelle Veranschaulichungen, also „Visualisierungen“ in dem von mir definierten Sinn anwenden.

Womit kann man veranschaulichen?

Profke zeigt auf, dass Veranschaulichungen ihren Zweck nicht erfüllen, wenn der entsprechende Bildbereich noch fremd ist. [vgl. Profke 1994, S. 21]

Auch Laakmann stellt diese Problematik beim Arbeiten mit Visualisierungen fest:
„*Die Lernenden müssen zunächst über Kompetenzen verfügen, entsprechende Darstellungen zu bilden oder zu interpretieren, ehe diese Darstellungen für sie zu Visualisierungen werden können*“ [Laakmann 2013, S. 27]

Dörfler nennt die „*schnell wachsende Komplexität von Diagrammen, sowohl hinsichtlich Mustererkennung wie auch Merkfähigkeit*“, und dass „*komplexe Diagramme Verzweiflung erzeugen können...*“ [Dörfler 2006, S. 217, zitiert nach Laakmann 2013 S. 27]

Visualisierungen sollten also einerseits die Schülerinnen und Schüler in ihrer Komplexität nicht überfordern, andererseits kein Vorwissen der Schülerinnen und Schüler erfordern, das diese möglicherweise noch gar nicht besitzen.

Gelingt das Übertragen?

„*Der Mathematikunterricht ist nicht schon dann anschaulich, wenn in ihm viele Illustrationen vorkommen. Vielmehr muss der Schüler an Illustrationen über das bloße Wahrnehmen hinaus zum (denkenden) Anschauen gelangen*“ [Kautschitsch 1985, zitiert nach Profke 1994, S. 23].

Die Veranschaulichungen, die vorkommen, müssen also von den Schülerinnen und Schülern wirklich verstanden werden und sollen auch zum Nachdenken und Nachvollziehen anregen.

Funktioniert eine Veranschaulichung? – Schülerwahrnehmung von Visualisierungen

„*Eine Veranschaulichung erläutert sich nicht von selbst, sie ist vielmehr Lehr- und Lernstoff wie der zu veranschaulichende Sachverhalt*“ [Profke 1994, S. 27].

Die Lehrperson stellt die Veranschaulichung zur Verfügung, im Normalfall, um etwas Bestimmtes zu vermitteln. Doch was davon beim Schüler/der Schülerin ankommt, hängt von deren Erfahrungen ab und kann unterschiedlich sein. So wird also einiges „richtig“ ankommen, einiges aber möglicherweise auch „falsch“.

Auch Jahnke stellt fest, dass „*das, was aus Visualisierungen wird und wie sie wirken, davon abhängt, welche Bedeutung ihnen der Anwender zuschreibt und wie er mit ihnen umgeht. Visualisierungen sagen nicht aus sich heraus, was sie bedeuten und wie man produktiv mit ihnen umgehen kann*“ [Jahnke 1989, zitiert nach Lorenz 1992, S.7]

Wagemann kommt zu folgendem Schluss:
„*Anschauung kann nicht durch den Lehrer „gemacht“ werden, sie muss sich ereignen. Der Lehrer kann nur veranschaulichen, d.h. ein unterrichtliches Arrangement treffen, das geeignet ist, den Prozess der Anschauung anzuregen. Ob sich dann Anschauung bei den Schülern ereignet, ist eine zweite Frage*“ [Wagemann, zitiert nach Profke 1994, S. 27]

Gründe, dass Schülerinnen und Schüler mit den Veranschaulichungen nicht das Gewünschte anfangen können:

Lorenz (1992) beschäftigt sich mit der Frage, was es für Ursachen haben kann, dass die Schülerinnen und Schüler manchmal in Veranschaulichungen nicht den gesamten oder gewünschten mathematischen Zusammenhang erkennen können.

Schülerspezifische Ursachen:
Die Schülerin/der Schüler erfüllt die kognitiven Voraussetzungen (noch) nicht, die notwendig sind, um die Veranschaulichung in passende „*interne Repräsentationen*“ umzusetzen. [vgl. Lorenz 1992, S. 2]

Materialspezifische Ursachen:
„*Adäquate interne Repräsentationen*“ werden durch bestimmte Eigenschaften des Materials (der Veranschaulichung) verhindert, auch wenn die Schülerin/der Schüler über die erforderlichen kognitiven Voraussetzungen verfügt. [vgl. Lorenz 1992, S. 2]

Konstellationsspezifische Ursachen:
Bestimmte Eigenschaften der Veranschaulichung führen in Kombination mit bestimmten kognitiven Defiziten der Schülerin /des Schülers dazu, dass „*gerade diese Schülerin/dieser Schüler von diesem Material zu dieser Zeit nicht profitieren kann*“ [Lorenz 1992, S. 2]

All diesen Ursachen gilt es entgegen zu wirken. Einige Möglichkeiten dafür wurden bereits genannt, beispielsweise können Darstellungswechsel hilfreich sein.

1.8 Resümee zum allgemeinen Teil und Leitfaden für den Schulbuchvergleich

Im nachfolgenden Schulbuchvergleich sollen (abgeleitet von meinen vorhergehenden Überlegungen in Teil 1) die Kapitel „Bruchrechnung“ und „Statistik“ aus den Schulbüchern in Hinblick auf die folgenden Aspekte und Fragen verglichen werden.

Dabei wird nicht jeder angeführte Aspekt in beiden Themenbereichen analysiert werden, da einige der im Folgenden angeführten Fragen nur für die Statistik oder die Bruchrechnung Relevanz haben.

Dennoch soll dieses Resümee ein Leitfaden sein, nach dem die Schulbücher systematisch verglichen und gegenübergestellt werden.

Aufbau der Schulbücher

- Ist das Schulbuch übersichtlich gestaltet? (Gliederung, Aufbau, …)

Inhaltsverzeichnis

- Wie sind die einzelnen Kapitel eingeteilt?
- Sind die Inhalte an den Lehrplan angepasst?

Wie geht das Schulbuch selbst mit Bildern und Darstellungen um?

- Welche Arten von Darstellungen kommen vor? Welche Darstellungen überwiegen? (Ikonische, analoge oder schematische Darstellungen)
- Wie viele Bilder/Darstellungen kommen durchschnittlich pro Seite vor?
- Welche Funktion haben die Darstellungen und Bilder? (Veranschaulichung, Information, Dekoration, Motivation, Organisation oder Interpretation)
  => Welche Funktion überwiegt?
  => Kommen Darstellungen zur Veranschaulichung in den Aufgaben vor? [14]

[14] https://www2.hu-berlin.de/wsu/ebeneI/superworte/medien/kriterien.pdf (16.06.2016)

Erfassen (siehe 1.5.2)

Nach Marschner-Franzke umfasst das Erfassen einer Darstellung, ihr Angaben entnehmen zu können, eine Veranschaulichung ergänzen zu können oder auch selbst eine eigene Angabe zu einer Darstellung zu formulieren.

- Bietet das Schulbuch die Möglichkeit, all diese Punkte zu lernen und ausreichend zu üben?

Marschner-Franzke schlägt wie bereits erwähnt das „Einbeziehen der in (Lehr-) Büchern angebotenen graphischen Veranschaulichungen" vor, zum Zweck des „Indirekten Aufzeigens der Möglichkeiten graphischer Veranschaulichungen: Üben des Interpretierens graphischer Veranschaulichungen". [Marschner-Franzke 1991, S. 241]

Auch Laakmann betont die Wichtigkeit, SchülerInnen selbst aus Darstellungen Informationen entnehmen und interpretieren zu lassen.

- Sind ausreichend graphische Veranschaulichungen vorhanden?
- Bieten sie die Möglichkeit, interpretiert zu werden?

Wiederaufgreifen, Variieren, Finden von Veranschaulichungen:

Gut wären auch Aufgaben, in denen die Schülerinnen und Schüler selbst graphische Darstellungen und Veranschaulichungen erstellen müssen, um ihren Nutzen zu erkennen.

Marschner-Franzke betont die Wichtigkeit des „*Anregens der Schüler zum graphischen Veranschaulichen*" zum „*Vermitteln der Einsicht der „Legitimität" der Arbeit mit graph. V.*". [Marschner-Franzke 1991, S. 241]

Wiederaufgreifen bekannter Veranschaulichungen (siehe 1.5.2)

- Kommen Aufgaben vor, in denen Veranschaulichungen wiederaufgegriffen werden müssen, können oder sollen? In welcher Form? Wird die Veranschaulichung explizit verlangt?

Variieren (siehe 1.5.2)

- Kommen Aufgaben vor, in denen Veranschaulichungen variiert werden müssen, können oder sollen? In welcher Form? Wird die Veranschaulichung explizit verlangt?

Finden von Veranschaulichungen (siehe 1.5.2)

- Kommen Aufgaben vor, in denen Veranschaulichungen selbst gefunden werden müssen, können oder sollen? In welcher Form? Wird die Veranschaulichung explizit verlangt?

Marschner-Franzke und Laakmann stellen fest, dass Schülerinnen und Schüler dem „Selbst-Veranschaulichen“ ausweichen. Darum soll es eine direkte Aufforderung dazu geben, da Schülerinnen und Schüler oft unsicher sind, auf welche Weise sie veranschaulichen sollen, und alles umgehen, was sie nicht können.

- Beinhaltet das Schulbuch explizite Aufforderungen zum Veranschaulichen?

Des Weiteren erwähnt sie, dass ein „Gegenüberstellen von Lösungen mit und ohne Hilfe graphischer Veranschaulichungen“ hilfreich sein kann.

- Wird das im Schulbuch umgesetzt?

Darstellungen erstellen, um Informationen verfügbar zu machen (siehe 1.5.3)
Laakmann kommt in Bezug auf graphische Darstellungen zu dem Schluss, dass Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit bekommen müssen, eigenständig Graphen und Tabellen erstellen zu lernen, um Informationen verfügbar zu machen [Laakmann S. 23]

- Bietet das Schulbuch die Möglichkeit, das Erstellen von Darstellungen ausreichend zu lernen und zu üben?

Darstellungen selbst beurteilen lassen (siehe 1.5.3)
Laakmann weist darauf hin, dass Lernumgebungen den Schülerinnen und Schülern auch die Gelegenheit geben müssen, zu lernen, die Güte einer Darstellungsart zu beurteilen.
[vgl. Laakmann, S.24]

- Kommen Aufgabenstellungen vor, in denen die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden müssen, welche Darstellungsart am geeignetsten ist? Wird in der Aufgabe eine Erklärung verlangt?

Darstellungswechsel (siehe 1.6)

Sowohl Marschner-Franzke (1991) als auch Laakmann (2013) weisen auf die Bedeutung von Darstellungswechsel und „Nutzung verschiedener Darstellungsarten“ hin.

Auch Kuntze (2013) betont, dass vielfältige Darstellungen genutzt werden sollen, um Begriffswissen zu fördern.

- Kommen verschiedene Darstellungen vor? Werden vielfältige bzw. verschiedene Darstellungen genutzt?
- Werden bei der Einführung eines Themas vielfältige Darstellungen und Darstellungswechsel erklärt?

Dreher (2013) kommt zu dem Schluss, dass Darstellungswechsel explizit behandelt und trainiert und auf keinen Fall im Unterricht gemieden werden sollen.

- Bietet das Schulbuch die Möglichkeit, Darstellungswechsel bewusst zu „trainieren“?
- Gibt es Aufgaben, in denen verschiedene Darstellungen (Darstellungswechsel) explizit verlangt werden?

Weiters werden einige Aspekte, wie etwa die Punkte „Lehrplan“ und „Langzeitgedächtnis“ (1.3.2), nicht in einem eigenen Kapitel abgehandelt, fließen jedoch in viele andere Punkte mit ein.

2. BRUCHRECHNUNG

2.1 Lehrplan

Das Thema Bruchrechnung wird laut österreichischem Lehrplan in der ersten, zweiten und dritten Klasse AHS behandelt.

Anschließend sind einige Punkte des Lehrplans herausgegriffen, die für die Bruchrechnung von Bedeutung sind:

1. Klasse:

„*1.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen:*

- *Vorstellungen mit positiven rationalen Zahlen verbinden*
- *Mit der Darstellung in Dezimal- und Bruchschreibweise vertraut sein*
- *Einfache Ungleichungen zum Einschränken benutzen*
- *Mit den positiven rationalen Zahlen Rechnungen mit leicht abschätzbaren Ergebnissen durchführen und zur Lösung von Problemen in Sachsituationen vielfältig anwenden können*
- *Rechnen mit Brüchen, nur in einfachen Fällen, die anschaulich deutbar sind*
- *Grundlegende Sicherheit im Kopfrechnen gewinnen*“ [Lehrplan, S. 4/5]

2. Klasse:

„*2.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen*

- *Festigen und Vertiefen der Fähigkeiten beim Arbeiten mit positiven Zahlen, um vielfältige und komplexere Probleme in Sachsituationen bearbeiten zu können*
- *Rechnen mit Brüchen (mit kleineren Zählern und Nennern), damit die Rechenregeln im Hinblick auf die Algebra sicher beherrscht werden*
- *Diese Rechenregeln für das Bruchrechnen begründen können*
- *Bruchdarstellung in Dezimaldarstellung überführen und umgekehrt*
- *Wichtige Teilbarkeitsregeln kennen und anwenden können*“ [Lehrplan, S. 5/6]

3. Klasse:

„*3.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen*

- *Rationale Zahlen in verschiedenen Formen deuten können*
- *Als Zustände gegenüber einem Nullpunkt*

- *Als Punkte auf einer Zahlengeraden*
- *Erkennen und Beschreiben von Kleiner-Größer-Beziehungen*
- *Rationale Zahlen für Darstellungen in Koordinatensystemen verwenden können*
- *die Regeln für das Rechnen mit rationalen Zahlen wissen und bei Rechenbeispielen (mit einfachen Zahlen) mit Sicherheit anwenden können*“ [Lehrplan Mathematik S. 6/7]

2.2 Die anschauliche Vorstellung

Padberg erläutert in seinem Buch „Didaktik der Bruchrechnung“ viele Aspekte der Bruchrechnung. Unter anderem erwähnt er auch eine Untersuchung von Malle/Huber, in der etwa 200 Schülerinnen und Schülern aus österreichischen Gymnasien ein Jahr nach der Behandlung der Bruchrechnung folgende Aufgabe gestellt wird:

„*Stelle* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ *auf verschiedene Arten anschaulich dar*.“ [Padberg 2009, S. 86]

Nur etwas mehr als die Hälfte konnten die Aufgabe richtig oder teilweise richtig lösen. Manche Schüler tun sich auch schon mit der Darstellung der Brüche als Rechteck oder mithilfe eines Kreises schwer. Viele haben Probleme bei der Darstellung am Zahlenstrahl. Die folgende Abbildung verdeutlicht einige Probleme der Schülerinnen und Schüler:

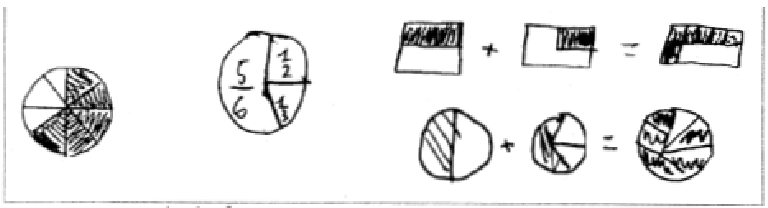


Abb. 1: So wurde $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ durch Kreise bzw. Rechtecke dargestellt

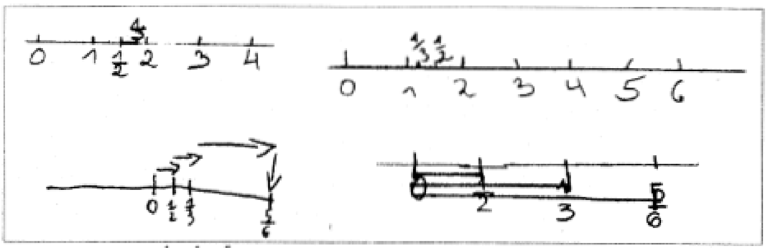


Abb. 2: So wurde $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ auf dem Zahlenstrahl dargestellt

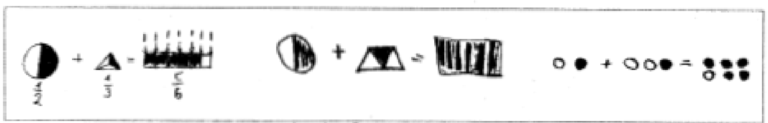


Abb. 3: Manche Lernende stellen $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ mit unterschiedlichen Ganzen dar

[Padberg 2009, S. 86]

Ein anderes Projekt, um den Wissenstand der Schülerinnen und Schüler zu erfassen, wurde im PALMA-Projekt umgesetzt. Am Ende des 6. Schuljahres wurde die Aufgabe „$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$“ sowohl als Rechenaufgabe als auch als ikonische Veranschaulichung („*Färbe zuerst ¼ des Kreises und dann noch* $\frac{1}{6}$ *des Kreises. Welchen Bruchteil des Kreises hast du insgesamt gefärbt?*“ [Padberg 2009, S. 87]. Grundlage war ein Kreis mit 12 Sektoren) an 1010 Schülerinnen und Schüler gestellt. Die Aufgabe in geometrischer Einkleidung („G“) wurde nur etwa halb so oft richtig gelöst wie die reine Rechenaufgabe (Kalkülaufgabe „K“). Zum Beispiel waren das bei den Realschülern 31% bei G, bei K allerdings 66 %. [vgl. Padberg 2009, S. 87]

Ergebnis der Kreuztabelle:

„*G richtig und K richtig: 25%*
G richtig und K falsch: 5%
K richtig und G falsch: 33%
K falsch und G falsch: 36%“ [Padberg 2009, S. 87]

Wartha zieht den Schluss: „*Wer anschauliche Grundvorstellungen besitzt, beherrscht i.A. auch den Kalkül*“ [Wartha 2007, zitiert nach Padberg 2009, S. 87]

Außerdem lässt sich vermuten, dass Schülerinnen und Schüler, die die Rechenaufgabe nach dem Schema lösen können, an der geometrischen Aufgabe jedoch scheitern, das Prinzip wohl in den meisten Fällen nicht verstanden haben. Das Addieren von Brüchen bedeutet für diese Schülerinnen und Schüler vermutlich eher das rein technische Anwenden bestimmter Rechenregeln, die sie nicht verstanden haben. [vgl. Padberg 2009, S. 87]

Wartha zieht nach weiterer Analyse und Vergleichen am Ende der 6. und 7. Schulstufe sein Resümee:

„*Diese Aufgabenanalyse illustriert das allgemein nachgewiesene Phänomen, dass Kompetenzzuwächse in erster Linie auf Verbesserung der rechnerischen Fähigkeiten und nicht auf den Aufbau von Grundvorstellungen und einem damit einhergehenden tieferen inhaltlichen Verständnis zurückzuführen sind*“ [Padberg 2009, S. 87]

Auch hier lässt sich die in Punkt 1.5.2 bereits von Marschner-Franzke und Laakmann erwähnte Vorliebe vieler Schülerinnen und Schüler für die algebraische Darstellung beobachten, da hier meist nach einem Schema vorgegangen werden kann.

2.3 Vorbeugung von Problemen bei der Addition von Brüchen

Padberg erläutert einige Punkte, deren Berücksichtigung hilfreich sein kann, den oben genannten Schwierigkeiten vorzubeugen.
Ich möchte hier wieder nur genauer auf jene Punkte eingehen, bei denen die ikonische Darstellung eine Rolle spielen. Einige andere Punkte werde ich nur der Vollständigkeit halber erwähnen.

1) Bevor die Additionsregel gelernt wird, müssen zuerst anschauliche Grundvorstellungen zur Addition gebildet werden. Diese sollten zum Lösen einfacher Aufgaben genutzt werden können, einerseits zu Beginn, andererseits aber auch NACHDEM die Additionsregel erlernt wurde. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht immer nur auf die Regeln zurückgreifen, denen sie dann stärker vertrauen als anschaulichen Ergebnissen.

2) „Leichte“ Aufgaben sollten, wenn möglich, anschaulich gelöst werden, und nicht rein kalkülmäßig und formal. So soll vermieden werden, dass die Schülerinnen und Schüler immer nach starren Rechenregeln vorgehen und sie werden so zu mehr Flexibilität erzogen.

3) Außerdem können *kognitive Konflikte* hergestellt werden, indem einfache Aufgaben auf verschiedene Weisen gelöst werden (z.B. rechnerisch und durch Zeichnen - Darstellungswechsel). Bei unterschiedlichen Ergebnissen derselben Aufgabe kann wie gesagt ein Konflikt ausgelöst werden, der aber nicht in jedem Fall immer unmittelbar zum Erfolg führen muss.
   Padberg bringt hier ein Beispiel aus einem Interview, in dem der Schüler der Meinung ist, Brüche werden addiert, indem man die Zahler addiert und die Nenner ebenfalls addiert (wie es beim Multiplizieren der Fall ist). Durch ein anschauliches Beispiel des Interviewers (was bekommst du, wenn du $^3/_8$ und $^2/_8$ einer Pizza addierst) kommt der kognitive Konflikt zustande, da der Schüler hier auf das

Ergebnis $^5/_8$ kommt, und nicht $^5/_{16}$. Das Resümee des Schülers ist jedoch, dass also das Ergebnis $^5/_8$ nicht stimmen kann, und es doch $^5/_{16}$ sein muss. Er vertraut also seinen (fehlerhaften) Rechenregeln mehr als der anschaulichen Überlegung. Auch bei weiteren Schülerinnen und Schülern wurde Ähnliches beobachtet. Es braucht einiges an Zeit, um die Schülerinnen und Schüler von solchen Fehlkonzepten loszulösen.

Trotzdem können kognitive Konflikte sehr hilfreich sein, und in vielen Fällen auch direkt zu einem besseren Verständnis führen. [vgl. Padberg 2009, S. 87-89]

Weitere Punkte, die nicht unmittelbar mit Visualisierung zu tun haben:

- Abschätzen (Schüler vorher schätzen lassen)
- Anfangs quasikardinale Schreibweise verwenden (2 Sechstel + 3 Sechstel)
- Gezieltes Vergleichen von Addition und Multiplikation

[vgl. Padberg 2009, S. 88/89]

2.4 Resümee und Leitfaden für den Schulbuchvergleich zum Thema Bruchrechnung

Vorbeugung von Problemen (Padberg)

Padbergs „Vorbeugung von Problemen bei der Addition von Brüchen" lässt sich problemlos verallgemeinern und auf die gesamte Bruchrechnung beziehen.

1) Bevor eine Regel (Addieren, Multiplizieren, Erweitern, …) gelernt wird, sollten zuerst anschauliche Grundvorstellungen gebildet werden. Wie bei der Addition sollten einfache Aufgaben einerseits zu Beginn, andererseits auch nachdem die Regel gelernt wurde, anschaulich gelöst werden.

- ➢ Wird dieser Punkt bei der Einführung bestimmter Rechenregeln beachtet? Wie wird er umgesetzt?
- ➢ Inwiefern und in welcher Form bieten die dazugehörigen Aufgaben und Beispiele die Möglichkeit der Umsetzung dieses Punktes im Unterricht?

2) Außerdem können *kognitive Konflikte* hergestellt werden, indem einfache Aufgaben sowohl rechnerisch als auch durch Zeichnen gelöst werden.

- Wie und in welcher Form kommen Aufgaben vor, in denen kognitive Konflikte ausgelöst werden könnten?

3. STATISTIK

3.1 Lehrplan

Die für graphische Darstellungen relevanten Punkte des Lehrplans im Bereich Statistik sind folgende:

1. Klasse:

„*1.4 Arbeiten mit Modellen, Statistik:*

- *Tabellen und graphische Darstellungen zum Erfassen von Datenmengen verwenden können*“ [Lehrplan Mathematik S.5-8]

2. Klasse:

„*2.4 Arbeiten mit Modellen, Statistik:*

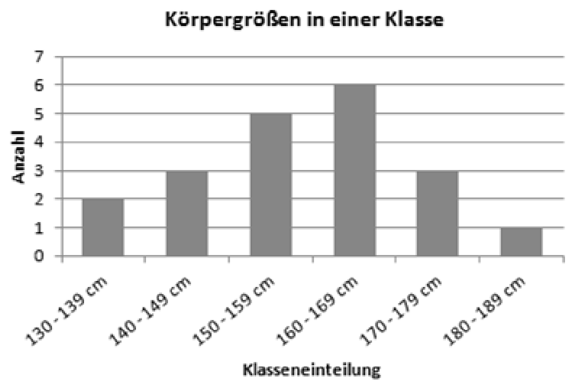
- *Relative Häufigkeiten ermitteln können*
- *Entsprechende graphische Darstellungen lesen, anfertigen und kritisch betrachten können*
- *Manipulationsmöglichkeiten erkennen*“ [Lehrplan Mathematik S.5-8]

3. Klasse:

„*3.4 Arbeiten mit Modellen, Statistik:*

- *Untersuchen und Darstellen von Datenmengen*“ [Lehrplan Mathematik S.5-8]

3.2 Arten von Darstellungen

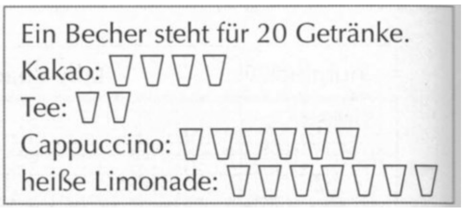
Darstellungsart	**Beispiel in Form einer graphischen Darstellung**
Säulendiagramm	 [15]

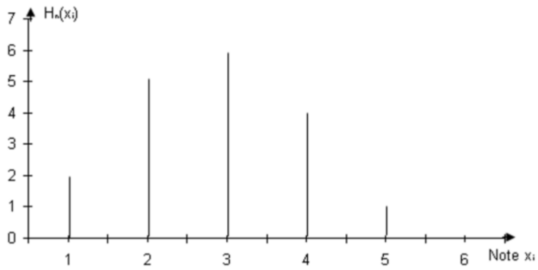
[15] http://www.mathe-online.at/lernpfade/Lernpfad796/?kapitel=3&navig=l

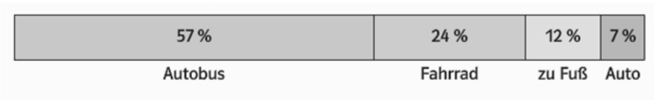
<table>
<tr><td>Tabelle</td><td>

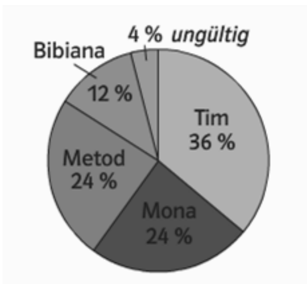
Augenfarbe	blau	braun	grau	grün
Häufigkeit	7	12	3	4

[16]</td></tr>
<tr><td>Balkendiagramm</td><td>

[17]</td></tr>
<tr><td>Piktogramm</td><td>

[18]</td></tr>
<tr><td>Strecken-/bzw.
Stabdiagramm</td><td>Schularbeitsnoten eines Schülers im Fach Mathematik:


[19]</td></tr>
<tr><td>Prozentstreifen</td><td>

[20]</td></tr>
<tr><td>Kreisdiagramm</td><td>

[21]</td></tr>
</table>

[16] Mathematik verstehen 1, S. 263
[17] http://www.mathe-online.at/lernpfade/Lernpfad796/?kapitel=3&navig=l
[18] Mach mit Mathematik 1, S. 254
[19] Kütting 1999, S. 19
[20] Mathematik verstehen 2, S. 265
[21] Mathematik verstehen 2 S. 267

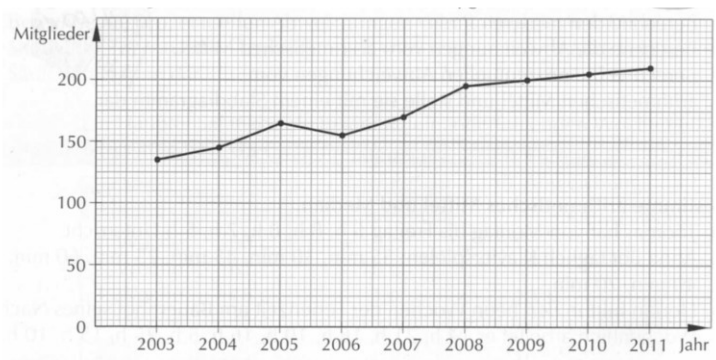
<table>
<tr><td>Polygonbild</td><td>Sportverein [22]

</td></tr>
<tr><td>Stängel-Blatt-Diagramme</td><td><table><tr><th>Zehnerziffer</th><th>Einerziffern</th></tr><tr><td>0</td><td>9</td></tr><tr><td>1</td><td>1, 6, 7</td></tr><tr><td>2</td><td>3, 3, 5, 8</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td></tr></table>[23] Quiz:
Erreichte Punkte:
34, 28, 23, 11, 25, 16, 4
9, 23, 17</td></tr>
<tr><td>Vierfeldertafeln</td><td>[24]<table><tr><th></th><th>3.A</th><th>3.B</th><th>Summe</th></tr><tr><td>Mathematikunterricht gut</td><td>11</td><td>13</td><td>24</td></tr><tr><td>Mathematikunterricht weniger gut</td><td>9</td><td>12</td><td>21</td></tr><tr><td>Summe</td><td>20</td><td>25</td><td>45</td></tr></table></td></tr>
</table>

Tabelle 1

3.3 Funktionen graphischer Darstellungen

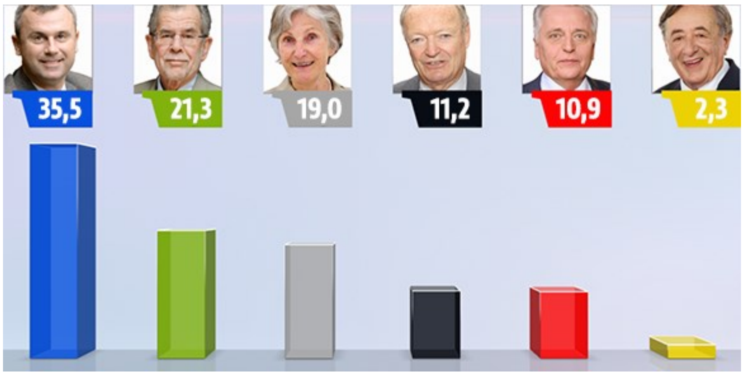
In der Statistik haben graphische Darstellungen nach Eichler und Vogel drei grundlegende Funktionen: Die Kommunikation, die Argumentation und die Reduktion. [vgl. Eichler und Vogel 2013, S. 39]

[22] Mach mit Mathematik 2, S. 212
[23] Mathematik verstehen 3, S. 266
[24] Mathematik verstehen 3, S.267

3.3.1 Kommunikation

Die Darstellung kann die Rohdaten visualisieren, wodurch deren Eigenschaften leichter kommuniziert werden.

Die folgende Grafik zeigt zum Beispiel eine Hochrechnung der Bundespräsidentenwahl 2016. Es wird der Inhalt direkt „kommuniziert“ und man kann die wichtigsten Informationen auf einen Blick erkennen.

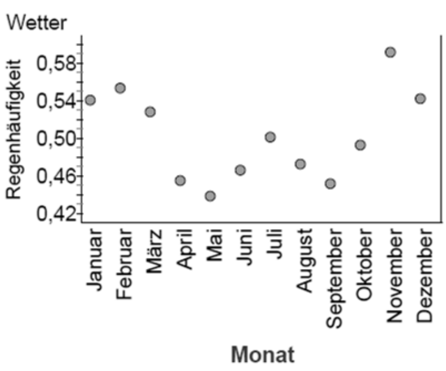


[25]

3.3.2 Argumentation

Mithilfe graphischer Darstellungen kann der eigene Analyseprozess unterstützt werden. Oft ist es schwierig, aus den Rohdaten alle enthaltenen Informationen zu erkennen. Eine geeignete Visualisierung der Daten kann hilfreich sein, bestimmte Zusammenhänge zu erkennen, und einen weiteren Untersuchungsansatz zu ergeben, der zu weiterführenden Überlegungen führen kann.

Eichler und Vogel führen in diesem Zusammenhang ein Beispiel über die Regenwahrscheinlichkeit an.



[Eichler und Vogel 2013, S. 26]

[25] http://oe1.orf.at/programm/435094 (09.06.2016)

In der Grafik lässt sich erkennen, dass die Regenwahrscheinlichkeit im Frühling am geringsten ist.
Eichler und Vogel (2015) weisen darauf hin, dass dieser Sachverhalt, den sie als überraschend ansehen, dazu führen kann, die Wetterdaten tiefergehend zu untersuchen und weitere Fragen dazu zu stellen, wie zum Beispiel, ob das wohl auch für die Regenmenge gilt.
So können durch graphische Darstellungen also neue Aspekte angeregt, und der Analyse eine neue Richtung gegeben werden. Diese Erweiterung von Fragestellungen und Diskussion neuer Ansätze bezeichnen Eichler und Vogel als „Argumentieren“. [Eichler und Vogel 2015, S. 39]

3.3.3 Reduktion

Bei der graphischen Darstellung von Daten muss in den allermeisten Fällen ein Informationsverlust in Kauf genommen werden. Einerseits ist das natürlich erwünscht, um den Sachverhalt schneller zu erfassen, andererseits hat das aber auch Nachteile.
Eine Darstellung zeigt eben nicht mehr die reinen Daten, sondern eine komprimierte Form, eine „willkürliche Abbildung“.
Betrachtet man als Beispiel einen Boxplot, wird der Informationsverlust offensichtlich: Man kann zwar die Quartile sowie Maximum und Minimum ablesen, jedoch gibt es keine Auskunft über die Werte dazwischen, und diese Information gehen bei der Darstellung als Boxplot „verloren“. Man muss sich also immer überlegen, was man mit einer graphischen Darstellung visualisieren möchte, und worauf der Fokus der Vermittlung liegt.

3.4 „Gute“ graphische Darstellungen in der Statistik

Eichler und Vogel gehen darauf ein, was „gute Darstellungen“ in der Statistik überhaupt bedeuten.
Sie kommen zu dem Schluss, dass es schwierig ist, allgemeine Aussagen über die Güte einer Darstellung zu treffen:

„Sie [die Güte] ist situativ abhängig von der den Daten zugrundeliegenden Problemstellung, von dem Vorwissen und der Grafikkompetenz des Datenanalysten und von dem Zweck, anlässlich dessen die Grafik angefertigt wurde. Insofern lässt sich jede Grafik als Modell

begreifen, das nicht in den Kategorien „falsch“ und „richtig“ zu beurteilen ist, sondern im Grad seiner Nützlichkeit.“ [Eichler und Vogel, 2013, S. 32]

Betrachtet man zum Beispiel die Verteilung von Schularbeitsnoten in einer Klasse, gibt es Darstellungen, die nützlicher und aussagekräftiger sind als andere.
Ein Stab- oder Balkendiagramm wird im Normalfall die Daten ziemlich aussagekräftig wiedergeben, jedoch wird die Darstellung in einem Boxplot einen größeren Datenverlust zur Folge haben.

Des Weiteren können bei einer graphischen Darstellung viele Parameter verändert werden, wie zum Beispiel die Skalierung der Achsen, der Achsenausschnitt oder die Größe, sodass die Darstellung auf ganz unterschiedliche Weise zur Geltung kommt und ganz unterschiedliche Interpretationen zulässt. Unter Umständen kann die Darstellung die Daten auch auf eine „verfälschte“ Art und Weise wiedergeben, die zu falschen Schlüssen verleiten können. Bei solchen Darstellungen könnte man von „manipulierten“ Darstellungen sprechen.

Benesch (2006) stellt fest:

„*Bei graphischen Darstellungen soll nichts von der essentiellen Aussage ablenken, daher sind optische Spielereien zu vermeiden. Der größte Teil des Schaubildes soll ausschließlich für die Präsentation der Daten verwendet werden. Die graphischen Elemente (Linien, Flächen) sollten zur Darstellung, und nicht zur Ablenkung von Daten eingesetzt werden!“*
[Benesch 2006, S. 49]

Eine „gute“ graphische Darstellung muss also unabhängig von Kontext und Problemstellung frei von Manipulationen sein.
Auf die verschiedenen Möglichkeiten von optischen Veränderungen und Manipulationen von graphischen Darstellungen möchte ich im nachfolgenden Punkt eingehen.

3.5 Lügen mit Statistik

„*Statistik ist die Kunst, mit richtigen Zahlen etwas Falsches zu beweisen*“. [Kütting 1999, S.13]

Diesen Ruf hat die Statistik aufgrund der zahlreichen Möglichkeiten, Daten in die eine oder andere Richtung zu manipulieren und den einen oder anderen Aspekt nach Belieben herauszugreifen und zu verzerren.
Beim Behandeln des Themas „Statistik“ sollte auch auf die Problematik der Manipulation von Daten eingegangen werden.
Im Lehrplan steht dieser Punkt in der 2. Klasse und wird als „Manipulationsmöglichkeiten erkennen“ formuliert.

Dieses Thema halte ich für sehr wichtig, da wir Manipulationen von graphischen Darstellungen erschreckend häufig ausgesetzt werden. Ob es um Werbungen geht, die daran interessiert sind ihr Produkt zu verkaufen, Zeitungen, Fernsehen oder sonstige Medien. Auch in unserem Alltag kommen manipulierte Darstellungen vor, und es ist ein Teil der schulischen Bildung den Schülerinnen und Schülern beizubringen, wie man Manipulationen erkennt und mit ihnen umgehen kann.
Als Beispiel für eine manipulierte Darstellung in einer Zeitung soll der folgende Ausschnitt aus der Kronenzeitung vom 05.08.2016 dienen:

„Wien: Schon 9815 Türken erhalten Mindestsicherung (05.08.2016)

Bereits 42,87 Prozent aller Bezieher einer Mindestsicherung sind in Wien keine Österreicher - diese 76.839 Ausländer erhalten aus dem Stadtbudget bis zu 837,76 Euro monatlich.“ [http://www.krone.at/oesterreich/wien-schon-9815-tuerken-erhalten-mindestsicherung-enorme-kosten-story-523262, 16.08.2016]

Betrachtet man die Zahl der Österreicher, die eine Mindestsicherung beziehen, fällt auf, dass diese Säule abgeschnitten wurde und deutlich kürzer ist, als sie eigentlich sein sollte. Tatsächlich müsste die Säule etwa sechsmal so hoch sein wie die nächst größere Säule mit den Beziehern einer Mindestsicherung aus unbekannten Ländern. (101872 ist etwa sechsmal so groß wie 16712) Tatsächlich sieht es allerding so aus, als wäre die Zahl der österreichischen Mindestsicherungsbezieher nur minimal größer als die der Mindestsicherungsbezieher mit ungeklärter Herkunft.

3.5.1 Anteil versus Anzahl

Benesch (2006) zeigt die Probleme auf, die ein Verwechseln von Anteil und Anzahl mit sich bringen kann.
Dieses Phänomen kann ausgenutzt werden, um Daten verfälscht darzustellen. Benesch bringt dazu einige Beispiele. Ich möchte hier eines herausgreifen, das zeigt, wie man einen Sachverhalt im eigenen Interesse „manipuliert“ darstellen kann:
Es soll gezeigt werden, dass die Nutzfische nicht so bedroht sind wie allgemein behauptet.
„Der Anteil der Nutzfische am Gesamtfang nach Inbetriebnahme einer Kläranlage ist laut einer Anzeige in 8 Jahren von 10 auf 90 Prozent angestiegen.“ [Benesch 2006, S. 12] In folgender Grafik (Abbildung 9) ist dieser Sachverhalt dargestellt, und man sieht, dass der Anteil der Nutzfische in den 8 Jahren auf das 9-fache gestiegen ist, also „kein Grund zur Sorge besteht“.

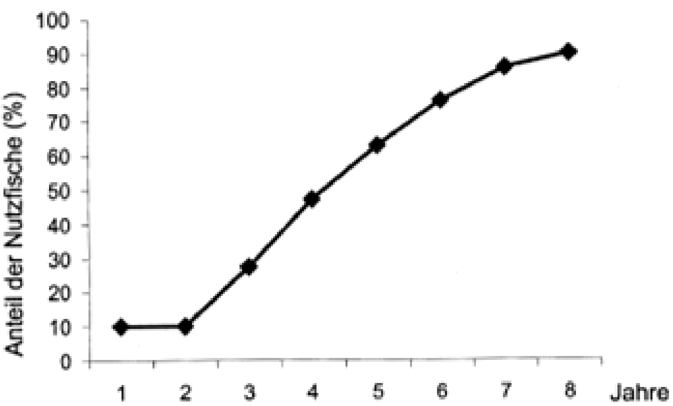


Abbildung 10

Darstellung des vermeintlichen Fischbestandes [26]

[26] Benesch 2006, S. 13

Tatsächlich sank die Anzahl der Nutzfische innerhalt der 8 Jahre jedoch von 250 auf 90. Da die Anzahl der anderen Fische allerdings noch mehr abnahm, nämlich von 2250 auf 10, stieg der Anteil an Nutzfischen trotzdem, was in der folgenden (nicht verfälschten) Grafik (Abbildung 10) erkennbar ist:

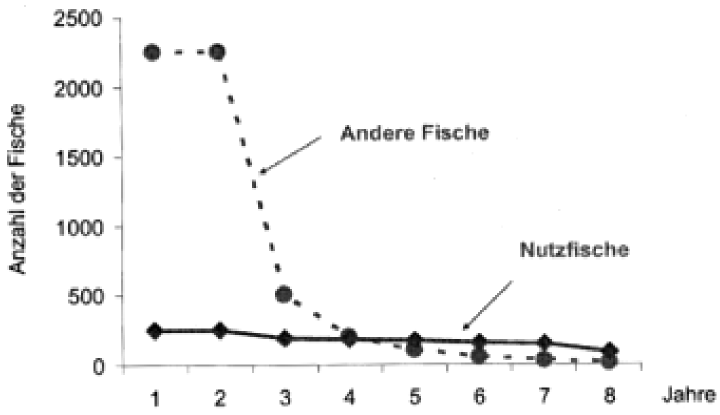


Abbildung 11
Darstellung des tatsächlichen Fischbestandes [Benesch 2006, S. 13]

Im Lehrplan findet dieser Aspekt unter den Punkten

- Relative Häufigkeiten ermitteln können
- Entsprechende graphische Darstellungen lesen, anfertigen und kritisch betrachten können

in der zweiten Klasse Beachtung.

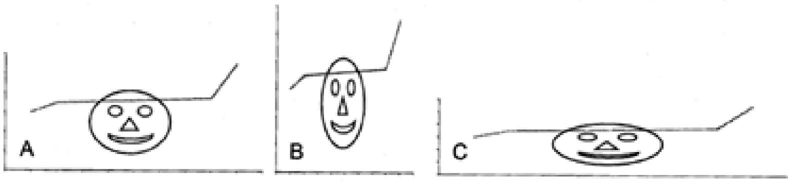
3.5.2 Verfälschte graphische Veranschaulichungen

Es gibt sehr viele Möglichkeiten, wie man eine graphische Darstellung verfälscht darstellen kann. Ich möchte hier ein paar Ursachen herausgreifen, aus denen ungünstige und irreführende Darstellungen häufig resultieren:

- Die Achsen sind ungleichmäßig eingeteilt
- Die Achsen beginnen nicht bei Null [Scherrmann 2013, S. 163]
- Abgeschnittene/Unterbrochene Säulen
- Verbale Verfälschung
- Nicht alle Daten verwendet

Die Achsen sind ungleichmäßig eingeteilt:

Für x-und y-Achsen wurde in solchen Fällen nicht dieselbe Skalierung gewählt, wodurch ein verzerrtes Bild entstehen kann:



[27]

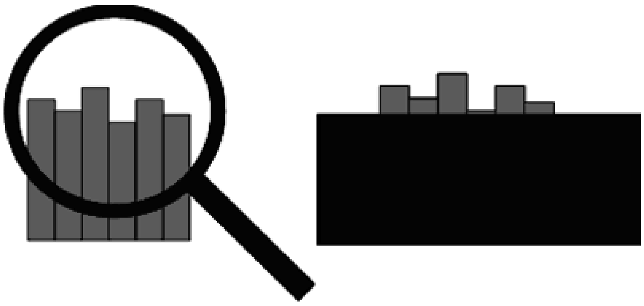
Abbildung 14: Veränderung der Verhältnisse von x- und y-Achse

Diese 3 Abbildungen zeigen deutlich, wie eine solche „Manipulation des Maßstabs“ das Bild verändern kann; während das Smiley in Abbildung A einen runden Eindruck hinterlässt, wirkt es in Abbildung B deutlich schmäler und langgezogen, in Abbildung C hingegen plattgedrückt.

Die Achsen beginnen nicht bei Null:

Das Grundprinzip basiert auf einem „Abschneiden der Säulen“ (oder Balken), sodass nur die auftretende Veränderung dargestellt wird. Allerdings erscheinen auftretende Anstiege oder Verluste wesentlich stärker als es eigentlich der Fall ist.

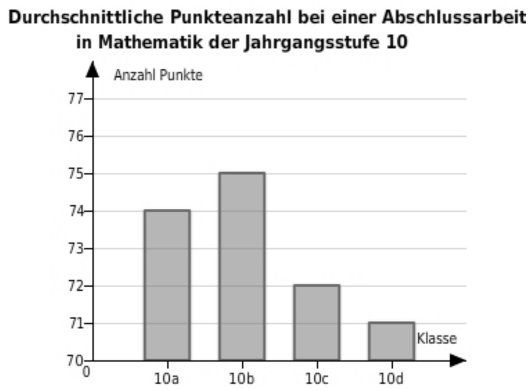
[28]



An folgendem Beispiel soll das veranschaulicht werden:

[27] Benesch 2006, S. 50

[28] http://sciencev1.orf.at/news/150078.html (12.06.2016)

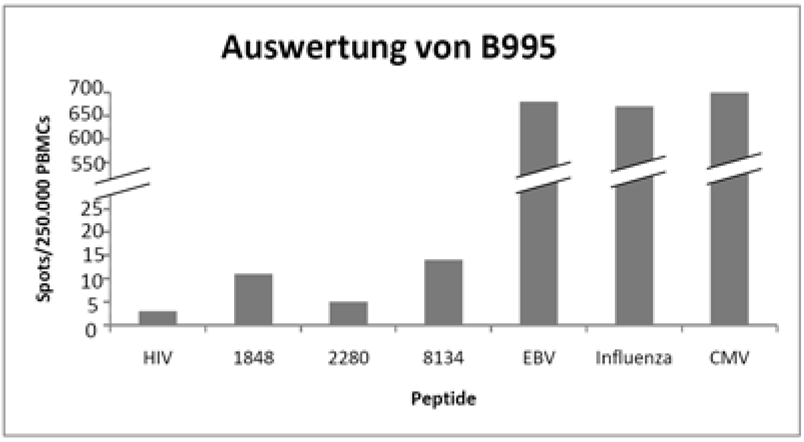


29

In dieser Grafik tritt genau dieser Fall auf, dass die y-Achse nicht bei Null beginnt. So entsteht der Eindruck, dass die Schülerinnen und Schüler der Klasse 10a im Schnitt doppelt so viele Punkte auf die Arbeit erzielt haben wie die Klasse 10c, wobei in Wirklichkeit nur ein Unterschied von 2,7 % vorliegt.

Abgeschnittene/Unterbrochene Säulen

Bei unterbrochenen Säulen sind manche Säulen in der Mitte abgeschnitten und verkürzt dargestellt, wodurch ein verfälschtes Bild entsteht. Es wird der Eindruck vermittelt, diese abgeschnittenen Säulen wären kürzer als sie sind. Die Unterbrechung kann durch zwei parallele Linien (wie in folgender Abbildung), aber auch mittels Zickzacklinien oder Wellenlinien gekennzeichnet sein.



30

Verbale Verfälschung

Bei einer verbalen Verfälschung wird durch die Wahl der Formulierung des Sachverhaltes ein falscher Eindruck vermittelt.

[29] http://de.bettermarks.com/mathe-portal/mathebuch/manipulationen.html (12.06.2016)
[30] http://www.ipb.uni-tuebingen.de/kurs/comp/1_excel2007/kurs01_04.html (1.11.2016)

Ein Beispiel dafür wäre ein Wettrennen mit nur zwei Teilnehmern. Teilnehmer A gewinnt gegen Teilnehmer B. Man könnte das nun verbal umformulieren und erklären, dass Teilnehmer B bei diesem Wettrennen den „guten zweiten Platz“ belegt hat, während Teilnehmer A „lediglich vorletzter“ geworden ist.

Nicht alle Daten verwendet

Bei dieser Manipulationsmöglichkeit werden nicht alle zur Verfügung stehenden Daten verwendet und selektiv einige Daten weggelassen. So könnten beispielsweise nur die geraden oder ungeraden Jahre betrachtet werden oder auch nur die Daten jedes dritten oder fünften Jahres Verwendung finden.

Da graphische Darstellungen statistischer Daten in Zeitungen und Werbungen immer wieder vorkommen und manchmal auch irreführende Darstellungen verwendet werden, halte ich es für wichtig, den Schülerinnen und Schülern das Erkennen solcher „Manipulationen“ beizubringen und dieses Thema explizit im Schulunterricht zu behandeln.

3.6 Ziele im Statistik-Unterricht

Schermann (2013) formuliert drei (Bildungs-)Ziele für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1. Sie betont, dass für alle drei dieser Ziele die bereits erwähnten drei Funktionen graphischer Darstellungen in der Statistik (Kommunikation, Argumentation und Reduktion) die Grundlage bilden und darum mit den Schülerinnen und Schülern reflektiert werden müssen.

3.6.1 Graphische Darstellungen selbst erstellen können

Wie bereits im allgemeinen Teil erwähnt, formuliert Laakmann (2013) einige Ziele für den Unterricht. Eines davon ist: „Eigenständiges Anfertigen von Graphen, Tabellen und anderen schematischen und symbolischen Darstellungen, um Informationen verfügbar zu machen“ [siehe Allgemeiner Teil – Ziele]. Des Weiteren enthält der österreichische Lehrplan den Punkt „Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen“.

Scherrmann sieht das auf die Statistik bezogen ganz ähnlich: Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, selbst statistische Daten zu veranschaulichen. Dazu müssen sie sich zuerst bewusst werden, was sie mit der Grafik eigentlich aussagen wollen:

„Was möchte ich mit der grafischen Darstellung aussagen? Welche Argumentationen möchte ich vorbringen? Inwiefern stellt diese graphische Darstellung eine Reduktion dar?“ [Scherrmann 2013, S. 165]

3.6.2 Graphische Darstellungen interpretieren können

Auch das Interpretieren graphischer Darstellungen hat bei den im allgemeinen Teil vorkommenden Zielen im Unterricht bereits Erwähnung gefunden. Einerseits ist es als Punkt im eben erwähnten Lehrplan von Bedeutung („Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen“), anderseits betonen sowohl Laakmann als auch Marschner-Franke dessen Wichtigkeit.
In der Statistik sollten auch beim Interpretieren graphischer Darstellungen nach Scherrmann die Fragen nach Kommunikation, Argumentation und Reduktion die Grundlage bilden.

„Was möchte mir die grafische Darstellung sagen? Welche Argumentation legt sie nahe? Inwiefern stellt diese graphische Darstellung eine Reduktion dar – was wird ausgeblendet?“ [Scherrmann 2013 S. 163]

Eichler und Vogel (2013) gehen auf einen weiteren Aspekt der Interpretation der Datenanalyse ein, nämlich auf die Belegbarkeit der Daten. Es ist darauf zu achten, dass die Interpretation keine Aussagen enthält, die mit den Daten nicht eindeutig zu belegen sind. Das folgende Beispiel soll diesen Aspekt verdeutlichen:

Abbildung 1.1: Grafik aus *FOCUS* (Nachbildung)

Aufgabe 1: In der oben abgebildeten Grafik wird eine Statistik zu einem Thema dargestellt, wie es in ähnlicher Form tagtäglich in den Medien geschieht. Beurteilt diese Statistik!

[Eichler und Vogel 2013, S. 1]

In dem Satz „*Umfragen ergaben, den Deutschen schmeckt es zu Hause immer noch am besten*“ ist bereits eine Interpretation enthalten. Diese lässt sich allerdings anhand des erhobenen Merkmals gar nicht belegen – den Deutschen schmeckt es ja vielleicht zu Hause gar nicht besser, sondern es hat möglicherweise finanzielle Gründe, wenn sie sich ihr Essen selbst zubereiten, und es „schmeckt“ ihnen in Wirklichkeit weit weniger.
Die Interpretation sollte also keine Aussagen beinhalten, die aus den Daten nicht direkt ablesbar sind.

3.6.3 Interpretationshürden erkennen und die Güte einer graphischen Darstellung beurteilen können

Ein wichtiges Unterrichtsziel im Umgang mit graphischen Darstellungen ist laut Laakmann (2013) die Bewertung der „Güte“ einer graphischen Darstellung; also die Grafik vor dem Hintergrund der Aufgabenstellung zu beurteilen (siehe Punkt 1.5.3). [Laakmann 2013, S. 24]

Auch in der Statistik ist dieser Punkt von Bedeutung. (siehe Punkt 3.5)
Als wesentliche Ziele des Statistikunterrichts sollen Schülerinnen und Schüler lernen:

- …zu beurteilen, welche Darstellungen in welchen Zusammenhängen nützlicher sind als andere
- Interpretationshürden zu erkennen: erkennen, ob eine graphische Darstellung „manipuliert“ wurde bzw. missverständliche oder ungünstige Darstellungen gewählt wurden (zum Beispiel schlechte Achsenskalierung/Verzerrung, Startwert nicht bei Null, … siehe Punkt 3.5 „Lügen mit Statistik“)

3.7 Konsequenzen für den Unterricht

Scherrmann (2013) beschäftigt sich mit den Konsequenzen für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1. Sie betont, dass der Unterricht ausreichend Gelegenheit bieten muss, graphische Darstellungen einerseits als Interpretationshilfen, andererseits aber auch als Interpretationshürden kennen zu lernen.
Weiters unterstreicht sie, dass dafür die Schülerinnen und Schüler die Vielfalt an graphischen Darstellungen kennen lernen sollten und außerdem im Unterricht nicht nur das Anfertigen von graphischen Veranschaulichungen statistischer Daten geübt und gelernt werden darf. Es muss auch die Bedeutung und die Interpretation dieser Darstellung thematisiert werden. [vgl. Schermann 2013, S. 172]
Um das zu erreichen, müssen nach Scherrmann die drei Funktionen graphischer Darstellungen (Kommunikation, Argumentation, Reduktion) herausgearbeitet werden:

„*Es muss das Kommunizieren über und mit grafischen Darstellungen gelernt und geübt werden. Grafische Veranschaulichungen statistischer Daten müssen für die Entwicklung von Argumentationen genutzt werden. Nicht zuletzt müssen die Schülerinnen und Schüler erfahren und erkennen können, dass grafische Veranschaulichungen immer auch eine Vereinfachung, eine Reduktion des ursprünglichen Datensatzes darstellen.*“ [Scherrmann 2013, S 172]

Des Weiteren sieht Scherrmann Vorteile im Anknüpfen an das thematische Vorwissen. Das kann erreicht werden, indem die statistische Auswertung nicht losgelöst von vorausgehenden Fragestellungen erfolgt.

„*Die Verstehensprozesse können unterstützt werden, wenn Schülerinnen und Schüler zu den Fragestellungen nicht ausschließlich „fertige“ oder gar „für die Rechnung gut geeignete“*

Datensätze vorgelegt bekommen, sondern selbst die Hypothesengenerierung und Datenerhebung vollziehen können.“ [Scherrmann 2013, S. 173/174]

Zunächst sollten Datenerhebungen (inklusive Auswertung und Conclusio) möglichst oft gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern durchgeführt werden, bevor Datensätze „aus zweiter Hand“ in den Unterricht einbezogen werden.

„*Schlussfolgerungen am Ende gelingen nur dann sinnvoll, wenn wiederum Bezug auf den Kontext genommen wird. Das kontextuelle Vorwissen wird genutzt und gleichzeitig kann dieses – durch die Ergebnisse der Datenanalyse – erweitert werden*.“ [Scherrmann 2013, S. 174]

Wie bereits im allgemeinen Teil erläutert, geht Laakmann darauf ein, dass die Schülerinnen und Schüler lernen sollen, die Güte einer Darstellungsart in einem bestimmten Kontext einzuschätzen (siehe 1.5.3).
Auch Scherrmann bemerkt, dass es vorteilhaft ist, wenn der Diagrammtyp nicht immer vorgegeben ist, und die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden müssen, welchen Diagrammtyp sie wählen wollen und ihre Auswahl begründen müssen. Je nachdem worauf der Fokus gelegt wird, kann die Entscheidung unterschiedlich ausfallen.

3.8 Resümee und Leitfaden für den Schulbuchvergleich zum Thema Statistik

<u>Verfälschte Darstellungen „Manipulation von Daten“</u> (siehe 3.5 „Lügen mit Statistik“)

1) Die Achsen sind ungleichmäßig eingeteilt
2) Die Achsen beginnen nicht bei Null
3) Unterbrochene Säulen
4) Verbale Verfälschung
5) Nicht alle Daten verwendet

- Welche der genannten Manipulationen werden im Schulbuch thematisiert? Wie werden die einzelnen Punkte eingeführt? Werden sie veranschaulicht? Gibt es genügend Aufgaben dazu?
- Wie werden die im Lehrplan erwähnten Punkte abgedeckt? Gibt es ausreichend Aufgaben?

- Interpretationshürden erkennen und die Güte einer graphischen Darstellung beurteilen können (3.6.3)

Im Resümee des allgemeinen Teils wurde der Punkt „Darstellungen selbst beurteilen lassen" bereits besprochen.

In Punkt 3.6.3 wurden die wesentliche Ziele in Bezug auf die Statistik angeführt:

- …beurteilen zu können, welche Darstellungen in welchen Zusammenhängen und unter welchem Aspekt nützlicher sind als andere
- Interpretationshürden erkennen können

  - ➢ Gibt das Schulbuch die Möglichkeit, die Nützlichkeit einer graphischen Darstellung in einem bestimmten Zusammenhang zu diskutieren? Wird das Thema behandelt oder gibt es irgendwelche Aufgaben dazu?

<u>Graphische Darstellungen selbst erstellen können (3.6.1) und graphische Darstellungen interpretieren können (3.6.2)</u>

Diese Punkte werden im Rahmen der Kapitel 6.4 „Darstellungen erstellen, um Informationen verfügbar zu machen" und 6.3 „Erfassen" behandelt.

<u>Konsequenzen für den Unterricht (3.7)</u>

Des Weiteren sollten Datenerhebungen von Anfang an möglichst oft gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern durchgeführt werden, bevor Datensätze „aus zweiter Hand" in den Unterricht einbezogen werden.

- ➢ Bietet das Schulbuch Aufgabenstellungen und Anregungen dafür? Wird erklärt, wie eine Datenerhebung durchgeführt werden könnte?

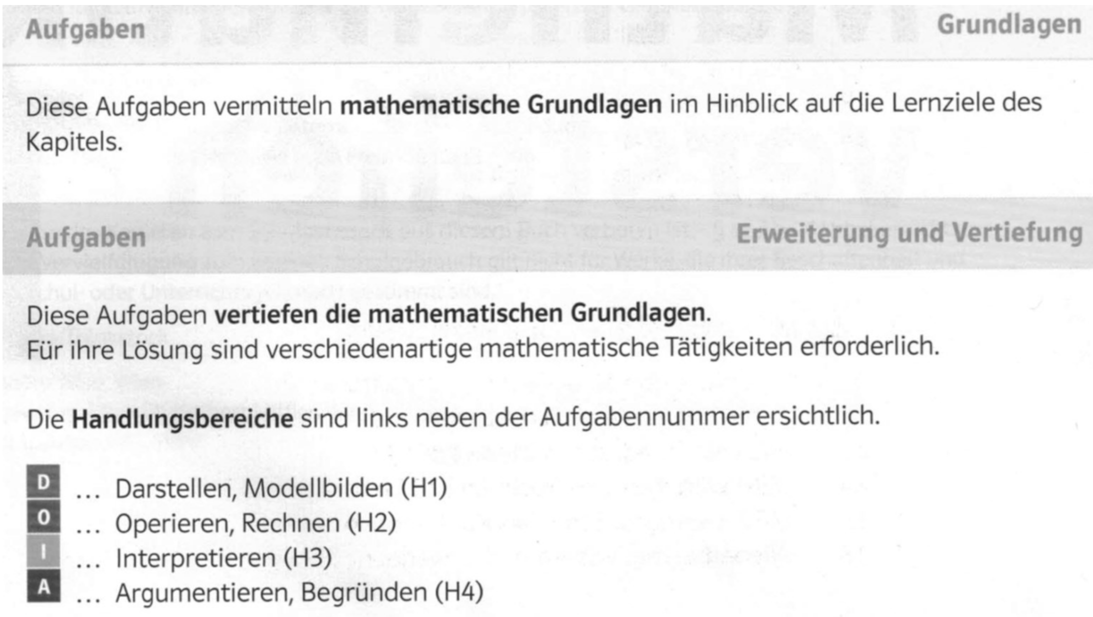
Außerdem ist es nach Scherrmann vorteilhaft, die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden zu lassen, welchen Diagrammtyp sie wählen wollen und ihre Auswahl begründen zu lassen.
Dieser Aspekt wird im Punkt 6.5 „Darstellungen selbst beurteilen lassen" behandelt.

II. SCHULBUCHVERGLEICH

4. AUFBAU DER SCHULBÜCHER

4.1 Mathematik verstehen

Das AutorInnenteam des Schulbuches „Mathematik verstehen“ setzt sich zusammen aus: Prof. Mag. Dr. Bernhard Salzger, Prof. Mag. Judith Bachmann, Prof. Mag. Andrea Germ, Barbara Riedler, Prof. Mag. Klaudia Singer, MMag. Dr. Andreas Ulovec.
Das Buch ist erst kürzlich erschienen: der erste Band wurde 2014 veröffentlicht, der zweite 2015, der dritte im heurigen Jahr 2016, und der vierte Band ist bis jetzt noch nicht veröffentlicht.
Als Einstieg finden sich auf der ersten Seite dieses Schulbuches einige Erklärungen zum Buch. Beispielsweise werden wichtige Informationen durch einen blauen Hintergrund gekennzeichnet und wichtige Begriffe fett gedruckt. Des Weiteren sind die Aufgaben in „Grundlagen“ und „Erweiterung und Vertiefung“ unterteilt und die Handlungsbereiche der jeweiligen Aufgabe daneben angegeben.


Aufgaben **Grundlagen**

Diese Aufgaben vermitteln **mathematische Grundlagen** im Hinblick auf die Lernziele des Kapitels.

Aufgaben **Erweiterung und Vertiefung**

Diese Aufgaben **vertiefen die mathematischen Grundlagen.**
Für ihre Lösung sind verschiedenartige mathematische Tätigkeiten erforderlich.

Die **Handlungsbereiche** sind links neben der Aufgabennummer ersichtlich.

D … Darstellen, Modellbilden (H1)
O … Operieren, Rechnen (H2)
I … Interpretieren (H3)
A … Argumentieren, Begründen (H4)

[31]

Weitere Symbole, die zur Einstufung der den Aufgaben dienen, werden ebenfalls erklärt. Die wichtigsten Symbole sind hierbei jene für Gruppenarbeit, Partnerarbeit, Online-

[31] Mathematik verstehen 1, S. 2

Ergänzungen, Taschenrechnereinsatz oder Symbole, die die Komplexität der Aufgabe anzeigen.

Diese Aufgaben können in **Gruppenarbeit** gelöst werden.

Diese Aufgaben können in **Partnerarbeit** gelöst werden.

Für diese Aufgaben gibt es eine **Online-Ergänzung**. Ein Code am Ende der Seite führt direkt zum entsprechenden Inhalt.

Die Abkürzung *Info* führt zu weiteren Hintergrundinformationen.
Jene mit *Demo* bietet interaktive Applets zum besseren Theorieverständnis.
Unter *Übung* gibt es weitere Übungsaufgaben, die direkt am Computer zu lösen sind.
Die Abkürzung *Werkzeug* kennzeichnet Aufgaben, die mittels Technologie (GeoGebra, Tabellenkalkulation, …) gelöst werden können.

Für diese Aufgaben ist der Einsatz des **Taschenrechners** sinnvoll.

Diese Symbole kennzeichnen die **Komplexität** der Aufgaben entsprechend den Bildungsstandards (K1, K2, K3), je nachdem, wie viele Kästchen gefärbt sind. [32]

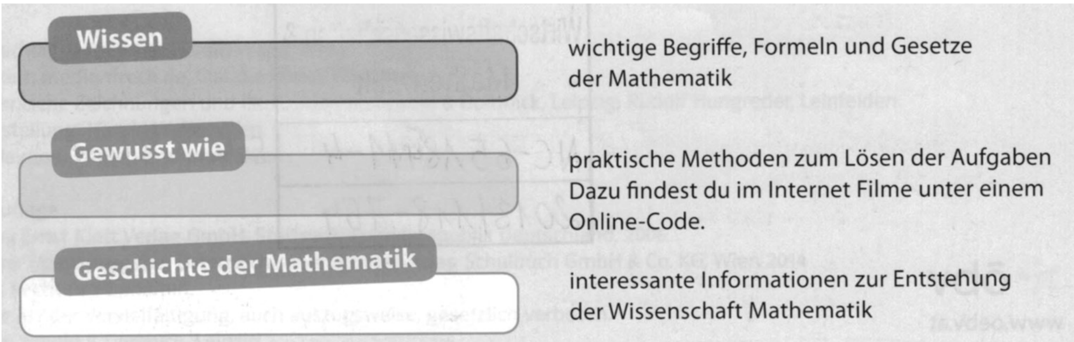
Das Schulbuch ist übersichtlich gestaltet und in vier „große“ Überkapitel (Zahlen und Maße, Variablen, funktionale Abhängigkeiten, geometrische Figuren und Körper sowie statistische Darstellungen und Kenngrößen) und 12 Unterkapitel unterteilt. Auf jeder Seite befindet sich links oben eine Anmerkung, in welchem der 4 Überkapitel man sich befindet. Des Weiteren verwendet das Schulbuch Farben zur Strukturierung: Der Teil „DENKwürdiges“ ist immer orange, der Teil „MERKwürdiges“ grün, die Zusammenfassung (Wiederholung: Wissen und Anwenden) und der Beginn eines neuen Kapitels blau.
Am Ende jedes Kapitels folgt zunächst eine Seite, die den Titel „DENKwürdiges“ trägt, auf der den Schülerinnen und Schülern Denkaufgaben gestellt werden.
Danach ist der Teil „MERKwürdiges“ zu finden, in dem Hintergrundinformationen (beispielsweise Historisches) zum jeweiligen Kapitel gegeben werden.
Als Letztes folgt der Teil „Wiederholung: Wissen und anwenden“, in dem das ganze Kapitel anhand von zusätzlichen Beispielen wiederholt wird. Dieser Teil umfasst meist eine Doppelseite.
Im Anhang des Buches werden zunächst die Lösungen des Teils „Wiederholung: Wissen und anwenden“ angegeben (weitere Lösungen sind in einem Lösungsbuch separat

[32] Mathematik verstehen 1, S. 2

erhältlich), im Anschluss daran kann man ein Glossar, eine Seite mit Erklärungen von „mathematischen Zeichen“ und am Ende noch ein Register finden.

4.2 100% Mathematik

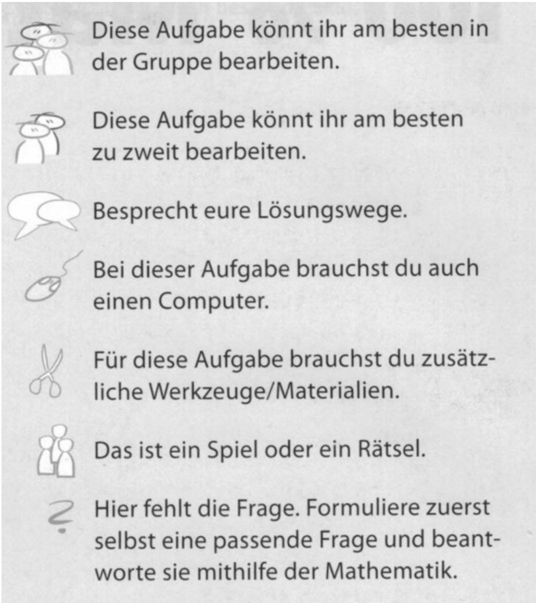
Das AutorInnenteam dieses Schulbuches setzt sich zusammen aus: Beate Eßletzbichler, Christine Höller, Peter Lechner, Julia Luksch, Franz Niedertscheider und Sandra Mayerhofer. Ursprünglich ist der erste Teil dieses Schulbuches 2006 in Deutschland erschienen. Die österreichische Version wurde 2014 veröffentlicht.
Ähnlich wie zuvor beginnt auch dieses Schulbuch auf der ersten Seite mit einigen Erklärungen zum Buch.
Das Buch ist übersichtlich aufgebaut, es ist in acht Kapitel gegliedert. Auf jeder Seite befindet sich oben der Hinweis, in welchem der acht Kapitel man sich gerade befindet. Jedes Kapitel beginnt zunächst mit zwei „Einstiegsseiten“, die durch Impulse den Einstieg in das neue Thema erleichtern sollen. Danach folgen die „Themenseiten“, auf denen sich Aufgaben und Informationen finden lassen. Diese Seiten sind mit verschiedenen Kästen und Symbolen versehen. Es gibt Kästen mit Tipps („Tipp“), Zusatzinformationen („Übrigens“), Erklärungen zu neuen Begriffen („Lexikon“), wichtigen Informationen („Wissen“), praktische Methoden zum Lösen mancher Aufgaben („Gewusst wie“) und geschichtliche Hintergrundinformationen („Geschichte der Mathematik“).



[33]

Die Aufgaben sind mit Symbolen markiert, die angeben, wie die Aufgabe gelöst werden sollte:

[33] 100% Mathematik 1, S. 2


Diese Aufgabe könnt ihr am besten in der Gruppe bearbeiten.

Diese Aufgabe könnt ihr am besten zu zweit bearbeiten.

Besprecht eure Lösungswege.

Bei dieser Aufgabe brauchst du auch einen Computer.

Für diese Aufgabe brauchst du zusätzliche Werkzeuge/Materialien.

Das ist ein Spiel oder ein Rätsel.

Hier fehlt die Frage. Formuliere zuerst selbst eine passende Frage und beantworte sie mithilfe der Mathematik.

[34]

Am Ende jedes Kapitels gibt es eine Wiederholung, in der die Schülerinnen und Schüler zuerst selbst abschätzen sollen, was sie können und was nicht, und danach ihre Einschätzung anhand der nachfolgenden Aufgaben überprüfen können. Dieser Bereich heißt „Basis und Plus – das kann ich“ und umfasst bei den meisten Kapiteln eine Doppelseite.

Auch das Buch „100% Mathematik“ verwendet Farben für die Strukturierung: Der Hintergrund der Zusammenfassung ist immer blau, Beispielnummern grün, wichtige Vermerke mit „Wissen“ orange und Tipps und Impulse grün.

Am Ende des Buches befindet sich ein Stichwortverzeichnis, eine Zusammenfassung zu „Formeln, Gesetze und mathematische Zeichen“ sowie ein Hinweis zu den Bildungsstandards im Bereich Mathematik und Lösungen zu den Aufgaben des Bereichs „Basis und Plus – Das kann ich!“

[34] 100% Mathematik 1, S. 2

5. BRUCHRECHNUNG

Im AHS-Lehrplan lässt sich das Thema „rationale Zahlen“ in der ersten bis dritten Klasse finden.

Das Kapitel „Bruchrechnung“ wird vorwiegend in der ersten und zweiten Klasse AHS behandelt. In der dritten Klasse ist bereits ausschließlich von „rationalen Zahlen“ die Rede, und der Fokus liegt nicht mehr auf Brüchen an sich, sondern auf Dezimalzahlen und der Menge der rationalen Zahlen. Da diese nun nur entfernt zum Thema „Bruchrechnung“ gehören, und auch graphische Darstellungen dazu in der dritten Klasse kaum eine Rolle spielen, werde ich mich im Folgenden auf die erste und zweite Klasse AHS beschränken.

5.1 Inhaltsverzeichnis des Kapitels „Bruchrechnung“ in den Büchern

5.1.1 Erste Klasse

Mathematik verstehen 1

[35]

[35] Mathematik verstehen 1, S. 4

100% Mathematik 1:

6 Brüche und Dezimalzahlen

[36]

Im Schulbuch „Mathematik verstehen 1“ umfasst das Kapitel „Bruchrechnung“ 20 der insgesamt 288 Seiten, was etwa 7% entspricht. Im Schulbuch 100% Mathematik 1 ist dieser Anteil deutlich größer, nämlich 30 von 256 Seiten, also etwa 12 %.

Auch wenn sich die beiden Inhaltsverzeichnisse auf den ersten Blick unterscheiden, sind die Kapitel in den beiden Schulbüchern im Großen und Ganzen inhaltlich doch sehr ähnlich. Die Benennung weist leichte Unterschiede auf, und die Verteilung der Inhalte weicht voneinander ab; die grundsätzlichen Themen sind jedoch dieselben, und auch ihre Gewichtung ist vergleichbar.

Die AutorInnen-Teams beider Schulbücher haben sich bei der Zusammenstellung der Inhalte offensichtlich am Lehrplan orientiert und die dort vermerkten Punkte ausreichend behandelt.

[36] 100% Mathematik 1, S. 6

5.1.2 Zweite Klasse

Mathematik verstehen 2

[37]

100% Mathematik 2:

[38]

[37] Mathematik verstehen 2, S. 3
[38] 100% Mathematik 2, S. 4/5

Anders als beim Schulbuch der ersten Klasse umfasst beim Schulbuch der zweiten Klassen „Mathematik verstehen 2“ deutlich mehr Seiten als „100% Mathematik 2“, nämlich 46 der 288 Seiten (16%) im Vergleich zu 28 der 248 Seiten (11%).
Inhaltlich sind bei den beiden Schulbüchern, im Gegensatz zu den Schulbüchern der ersten Klasse, deutliche Unterschiede feststellbar.
Während sich das Schulbuch „Mathematik verstehen“ neben den Inhalten des Lehrplans für die zweite Klasse auch umfassend mit Wiederholung der ersten Klasse beschäftigt, fokussiert das Schulbuch „100% Mathematik“ beinahe ausschließlich auf den „aktuellen“ Stoff, also den Inhalt der zweiten Klasse und widmet der Wiederholung nur wenige Aufgaben und Seiten.
Der Lehrplan wird auch in dieser Schulstufe von den AutorInnen-Teams beider Schulbücher beachtet und ausreichend abgedeckt.

5.2 Wie geht das Schulbuch mit Bildern und Darstellungen um?

5.2.1 Vorkommende Darstellungsarten

Es kommen in beiden Schulbüchern ausschließlich ikonische Darstellungen vor. Diese sind einerseits in Form von Fotos, andererseits in Form von Zeichnungen, die die Brüche darstellen und veranschaulichen, von Bedeutung.

5.2.2 Anzahl der Darstellungen pro Seite

Mathematik verstehen		100% Mathematik 1	
Mathematik verstehen 1:		**100% Mathematik 1:**	
Seitenzahl[39]:	20 Seiten	Seitenzahl:	30 Seiten
Fotos:	11[40] Fotos	Fotos:	25 Fotos
	≙ 0,55 Fotos / Seite		≙ 0,8 Fotos / Seite
Zeichnungen:	79 Zeichnungen	Zeichnungen:	145 Zeichnungen

[39] Seitenzahl des Kapitels Bruchrechnung in diesem Buch
[40] Die Werte sind als ungefähre Richtwerte zu sehen, da es Ermessenssache ist, wie die Darstellungen gezählt werden (z.B. welche Darstellungen als eine Darstellung zusammengefasst gezählt werden und welche einzeln).

≙ 3,9 Zeichnungen/Seite	≙ 4,8 Zeichnungen / Seite
90 ikonische Darstellungen ≙ 4,45 ikonische Darstellungen / Seite	170 ikonische Darstellungen ≙ 5,7 ikonische Darstellungen / Seite
Mathematik verstehen 2:	**100% Mathematik 2:**
Seitenzahl: 46 Seiten	Seitenzahl: 28 Seiten
Fotos: 26 Fotos ≙ 0,6 Fotos / Seite	Fotos: 39 Fotos ≙ 1,4 Fotos / Seite
Zeichnungen: 160 Zeichnungen ≙ 3,5 Zeichnungen / Seite	Zeichnungen: 53 Zeichnungen ≙ 1,9 Zeichnungen / Seite
186 ikonische Darstellungen ≙ 4,0 Darstellungen / Seite	92 ikonische Darstellungen ≙ 3,3 Darstellungen / Seite
Insgesamt:	**Insgesamt:**
Seitenzahl: 66 Seiten	Seitenzahl: 58 Seiten
Fotos: 37 Fotos ≙ 0,6 Fotos / Seite	Fotos: 64 Fotos ≙ 1,1 Fotos / Seite
Zeichnungen: 239 Zeichnungen ≙ 3,6 Zeichnungen / Seite	Zeichnungen: 198 Zeichnungen ≙ 3,4 Zeichnungen / Seite
276 ikonische Darstellungen ≙ 4,1 Darstellungen / Seite	262 ikonische Darstellungen ≙ 4,5 ikonische Darstellungen / Seite

Beide Schulbücher verwenden eine beträchtliche Anzahl an Darstellungen. Insgesamt kommen im Schulbuch „100% Mathematik“ im Schnitt etwas mehr Darstellungen pro

Seite vor (4,5 / Seite[41]) als im Schulbuch „Mathematik verstehen“ (4,2 / Seite). Der Unterschied ist aber sehr gering.

Es ist jedenfalls klar erkennbar, dass in beiden Büchern deutlich mehr ikonische Zeichnungen als Fotos vorkommen, wobei im Schulbuch „100% Mathematik“ mehr Fotos verwendet werden als im Schulbuch „Mathematik verstehen“.

5.2.3 Funktion der Darstellungen

Zunächst möchte ich die vorkommenden Darstellungen mit zugeordneten Funktionen erläutern, um klarzustellen, was mit den einzelnen Punkten gemeint ist, und welche Aspekte jeweils wo zugeordnet werden.

Funktion der Darstellung als Illustration (Dekoration):
Die Darstellung dient lediglich der Illustration und Dekoration. Sie soll das Buch optisch aufbereiten und „hübsch aussehen“. Unter Umständen kann sie die Motivation steigern und helfen, einen Bezug zum dargestellten Sachverhalt herzustellen, hat jedoch ansonsten keinen weiteren didaktischen Nutzen.

Funktion der Darstellung als Veranschaulichung:
Die Darstellung dient der Veranschaulichung. Sie soll entweder helfen, eine Aufgabenstellung verständlich machen, oder einen mathematischen Sachverhalt besser zu vermitteln (siehe allgemeiner Teil, 1.4.1 Veranschaulichen). In jedem Fall soll die Veranschaulichung das Verständnis der Schülerinnen und Schüler begünstigen.

Funktion der Darstellung als Aufgabenstellung:
In diesem Fall ist die Darstellung Teil der Angabe einer Aufgabenstellung. Sie dient entweder dazu, interpretiert zu werden, oder dazu, ergänzt zu werden.

Für beide Schulbücher gilt:

In beiden Schulbüchern ist die Funktion der Fotos meist Dekoration und Illustration, in seltenen Fällen auch Veranschaulichung.

Die anderen ikonischen Darstellungen (Zeichnungen) dienen einerseits der Veranschaulichung und tragen zum Verständnis der Schülerinnen und Schüler wesentlich

[41] Die Zahl gibt den Durchschnitt der Schulbücher der ersten und zweiten Klasse, bezieht sich aber nur auf das Kapitel „Bruchrechnung“ der beiden Bücher.

bei. Andererseits sind sie selbst Angaben in Aufgabenstellungen und dienen dazu, ergänzt oder interpretiert zu werden, was für das Erlernen der grundlegenden Kompetenzen ebenfalls wichtig ist.

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Mathematik verstehen 1:		**100% Mathematik 1**	
10 zur Illustration	(≙0,5 / Seite)	22 zur Illustration	(≙ 0,7 / Seite)
23 zur Veranschaulichung	(≙ 1,2 / Seite)	33 zur Veranschaulichung	(≙ 1,1 / Seite)
51 als Aufgabenstellung	(≙ 2,6 / Seite)	115 als Aufgabenstellung	(≙ 3,8 / Seite)
Mathematik verstehen 2:		**100% Mathematik 2:**	
24 zur Illustration	(≙ 0,5 / Seite)	39 zur Illustration	(≙ 1,4 / Seite)
23 zur Veranschaulichung	(≙ 0,5 / Seite)	8 zur Veranschaulichung	(≙ 0,3 / Seite)
139 als Aufgabenstellung	(≙ 3,0 / Seite)	45 als Aufgabenstellung	(≙ 1,6 / Seite)
Insgesamt:		**Insgesamt:**	
34 zur Illustration	(≙ 0,5 / Seite)	61 zur Illustration	(≙ 1,1 / Seite)
46 zur Veranschaulichung	(≙ 0,7 / Seite)	41 zur Veranschaulichung	(≙ 0,7 / Seite)
190 als Aufgabenstellung	(≙ 2,9 / Seite)	160 als Aufgabenstellung	(≙ 2,8 / Seite)

Alles in allem lässt sich feststellen, dass die beiden Schulbücher betreffend der Anzahl ihrer graphischen Darstellungen keine ins Gewicht fallenden Unterschiede aufweisen; sie sind betreffend der Veranschaulichungen und Darstellungen als Aufgabenstellung annähernd vergleichbar, einzig bei den Darstellungen zur Illustration (Dekoration) weist das Schulbuch „100% Mathematik" eine deutlich größere Anzahl auf.

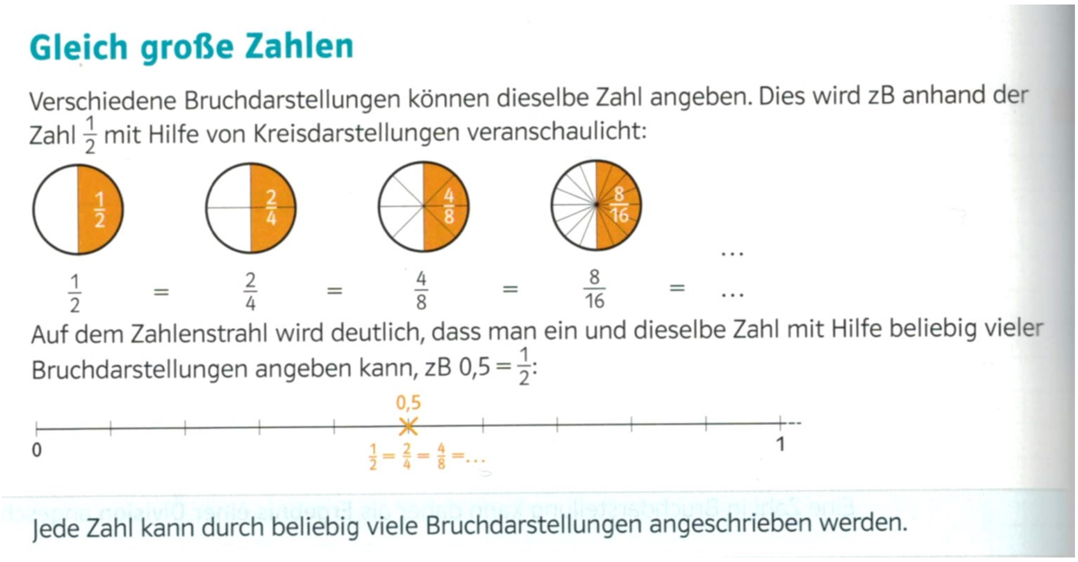
5.2.4 Darstellungen zur Veranschaulichung

Sowohl im Schulbuch „Mathematik verstehen 1", als auch im Schulbuch „100% Mathematik" werden Darstellungen zur Veranschaulichung verwendet.

Meines Erachtens stellt es einen Unterschied dar, ob die Darstellungen im Zuge eines erklärenden Beispiels als Veranschaulichung dienen oder die Angabe eines Beispiels veranschaulichen sollen, weswegen die beiden Fälle im Folgenden unterschieden werden sollen.

Um den Unterschied zu demonstrieren, möchte ich folgendes Beispiel bringen:

Darstellung im Zuge eines erklärenden Beispiels


Gleich große Zahlen

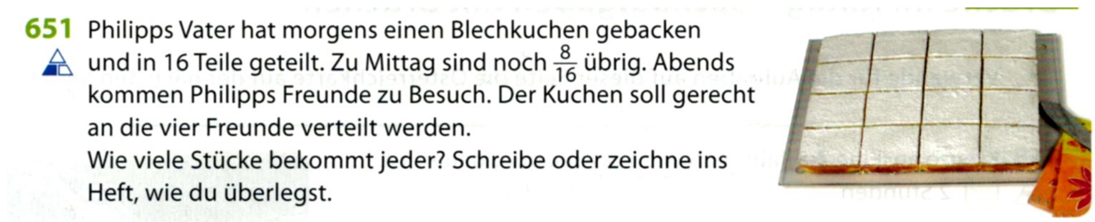
Verschiedene Bruchdarstellungen können dieselbe Zahl angeben. Dies wird zB anhand der Zahl $\frac{1}{2}$ mit Hilfe von Kreisdarstellungen veranschaulicht:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \ldots$

Auf dem Zahlenstrahl wird deutlich, dass man ein und dieselbe Zahl mit Hilfe beliebig vieler Bruchdarstellungen angeben kann, zB $0{,}5 = \frac{1}{2}$:

Jede Zahl kann durch beliebig viele Bruchdarstellungen angeschrieben werden. [42]

Veranschaulichung der Angabe eines Beispiels


651 Philipps Vater hat morgens einen Blechkuchen gebacken und in 16 Teile geteilt. Zu Mittag sind noch $\frac{8}{16}$ übrig. Abends kommen Philipps Freunde zu Besuch. Der Kuchen soll gerecht an die vier Freunde verteilt werden.
Wie viele Stücke bekommt jeder? Schreibe oder zeichne ins Heft, wie du überlegst. [43]

Meines Erachtens ist die erste Art der Veranschaulichung, also die „Darstellung im Zuge eines erklärenden Beispiels“, von größerer Bedeutung, da der Fokus dabei wirklich am Vermitteln und Fördern des Verständnisses liegt.

Die zweite Art ist zwar in manchen Fällen ebenfalls für das Verständnis förderlich, doch vor allem im Bereich der Bruchrechnung oft nicht von Nöten, bzw. kann bei Bedarf von den Schülerinnen und Schülern leicht selbst erstellt werden.

Aus diesem Grund werde ich mich im Folgenden auf die erste Art beschränken.

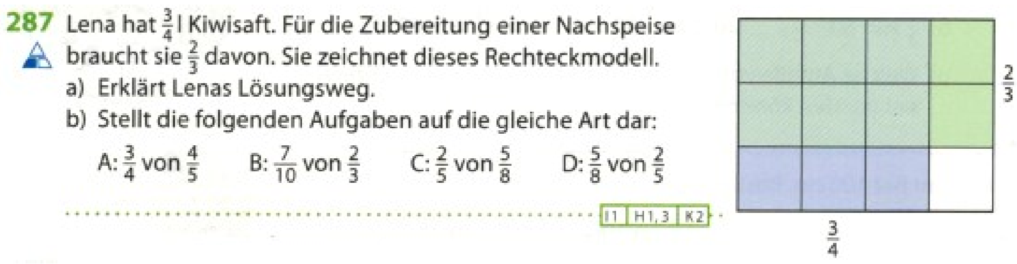
[42] Mathematik verstehen 1, S. 138
[43] 100% Mathematik 1 S. 165

Darstellung im Zuge eines erklärenden Beispiels:

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Mathematik verstehen 1:	19 Beispiele	100% Mathematik 1:	8 Beispiele
Mathematik verstehen 2:	16 Beispiele	100% Mathematik 2:	3 Beispiele
Insgesamt:	35 Beispiele	Insgesamt:	11 Beispiele

In beiden Schulbüchern werden die Inhalte anhand von Beispielen erklärt, die gut veranschaulicht sind. Es fällt auf, dass im Schulbuch „Mathematik verstehen“ öfter Beispiele mit Hilfe graphischer Veranschaulichungen erklärt werden und dieses Schulbuch generell mehr Beispiele und einführende Erklärungen beinhaltet als das Schulbuch „100 % Mathematik“, was ich als einen Vorteil des Buches „Mathematik verstehen“ sehe.

Im Schulbuch „100% Mathematik“ sind die Veranschaulichungen und Erklärungen oft in den Aufgaben verpackt, wie zum Beispiel in folgender Aufgabe:


287 Lena hat $\frac{3}{4}$ l Kiwisaft. Für die Zubereitung einer Nachspeise braucht sie $\frac{2}{3}$ davon. Sie zeichnet dieses Rechteckmodell.
a) Erklärt Lenas Lösungsweg.
b) Stellt die folgenden Aufgaben auf die gleiche Art dar:
A: $\frac{3}{4}$ von $\frac{4}{5}$ B: $\frac{7}{10}$ von $\frac{2}{3}$ C: $\frac{2}{5}$ von $\frac{5}{8}$ D: $\frac{5}{8}$ von $\frac{2}{5}$

I1 H1, 3 K2

$\frac{2}{3}$

$\frac{3}{4}$ [44]

Diese Aufgaben sind dann oftmals ein Ersatz für eine explizite Erklärung, und die Schülerinnen und Schüler müssen die Begründung ausschließlich selbst finden.

Ich persönlich finde solche Aufgaben zwar prinzipiell sehr gut, allerdings sind sie kein Ersatz dafür, gewisse Inhalte explizit zu erklären! Das Schulbuch eignet sich so nicht besonders gut zum Nachschlagen von Sachverhalten, was ein Schulbuch meiner Meinung nach aber unbedingt erfüllen muss. Den Schülerinnen und Schülern sollte die Möglichkeit geboten werden, direkt Informationen aus ihrem Schulbuch zu bekommen.

[44] 100% Mathematik 2, S. 70

5.3 Erfassen

Bietet das Schulbuch die Möglichkeit, die folgenden Punkte zu lernen und ausreichend zu üben?

- Einer Darstellung Informationen entnehmen können / sie interpretieren
- selbst eine eigene Angabe und Aufgaben zu einer Darstellung formulieren

5.3.1 Einer Darstellung Informationen entnehmen /sie interpretieren

Im kommenden Abschnitt und in der Tabelle wird von „Erklärungen“ und „Aufgaben“ gesprochen.

Erklärungen: Unter „Erklärungen“ verstehe ich vorgerechnete Aufgaben oder andere Erläuterungen, in denen vermittelt werden soll, wie eine Aufgabe gelöst werden kann bzw. in diesem Fall wie man einer Darstellung Informationen entnehmen und sie interpretieren kann.

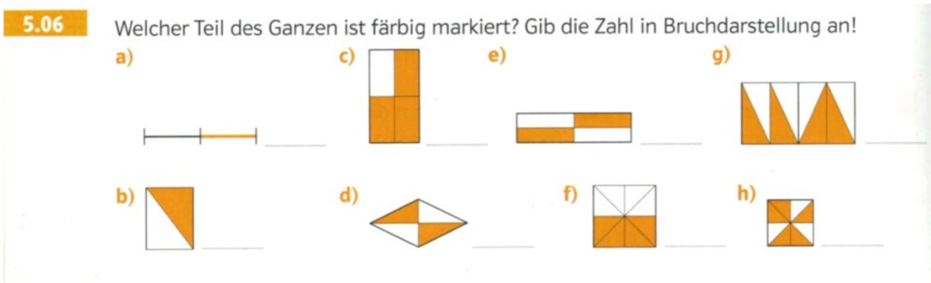
Aufgaben: Unter „Aufgaben“ verstehe ich in den Aufgabenstellungen vorkommende Darstellungen, die von den Schülerinnen und Schülern selbst interpretiert werden sollen und denen Informationen entnommen werden können. Sie ermöglichen das Üben des Interpretierens.

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Mathematik verstehen 1:		**100% Mathematik 1:**	
Erklärungen:	4 Darstellungen	Erklärungen:	3 Darstellungen
Aufgaben:	38 Aufgaben	Aufgaben:	47 Aufgaben
Mathematik verstehen 2:		**100% Mathematik 2:**	
Erklärungen:	8 Darstellungen	Erklärungen:	1 Darstellung
Aufgaben:	75 Aufgaben	Aufgaben:	12 Aufgaben
1. und 2. Klasse zusammen:		**1. und 2. Klasse zusammen:**	
Erklärende Darstellungen:	12	Erklärende Darstellungen:	4
Aufgaben:	113	Aufgaben:	59

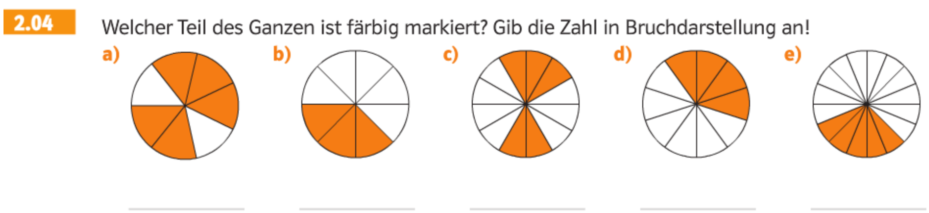
Es lässt sich klar feststellen, dass im Schulbuch „Mathematik verstehen“ (vor allem „Mathematik verstehen 2“) deutlich mehr Darstellungen zum Interpretieren vorkommen als im Schulbuch „100% Mathematik“. Es finden sich sowohl mehr Erklärungen als auch mehr Aufgaben.

Insbesondere fällt auf, dass im Schulbuch „Mathematik verstehen 2“ mehr wiederholt wird, und sich einige Aufgaben kaum von den Aufgaben aus dem Schulbuch „Mathematik verstehen 1“ unterscheiden.

Beispielsweise ist die folgende Aufgabe aus dem Schulbuch „Mathematik verstehen 1“ sehr ähnlich wie die darauffolgende Aufgabe aus dem Schulbuch „Mathematik verstehen 2“



45



46

Solche Wiederholungen kommen im Schulbuch „100% Mathematik“ viel seltener vor, was einer der Gründe für die geringere Zahl an Aufgaben zum Erfassen graphischer Darstellungen ist.

Das häufige Wiederholen im Schulbuch „Mathematik verstehen“ sehe ich als Vorteil dieses Buches, da Wiederholen und „ausreichendes Üben“ ein wichtiger Faktor im Mathematikunterricht ist (siehe 1.3.2 Langzeitgedächtnis).

[45] Mathematik verstehen 1, S. 134

[46] Mathematik verstehen 2, S. 42

Der Punkt des Lehrplans „Festigen (und Vertiefen) der Fähigkeiten beim Arbeiten mit positiven Zahlen“ wird somit besser abgedeckt als im Schulbuch „100% Mathematik“.

Auch die generell größere Zahl an Aufgaben und erklärenden Darstellungen sind meiner Meinung nach ebenfalls als Vorteil zu sehen.

Allerdings gibt es natürlich auch Bereiche des Lehrplans, die vom Schulbuch „100% Mathematik“ besser abgedeckt werden, wie etwa der Punkt „Diese Rechenregeln für das Bruchrechnen begründen können“, worauf ich im späteren Punkt „Vorbeugung von Problemen bei der Bruchrechnung nach Padberg“ (5.7.2 „Einfache Beispiele zwischendurch“) genauer eingehen werde.

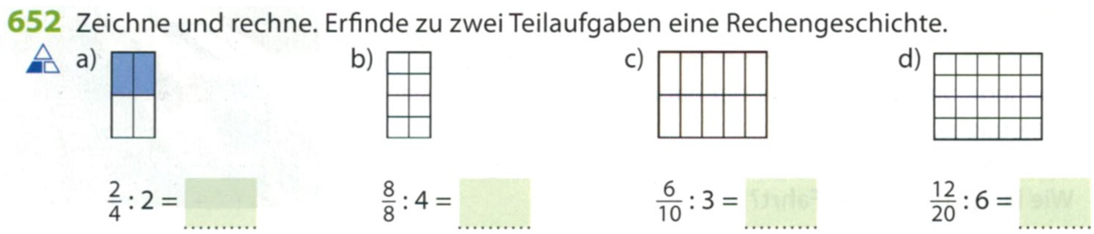
5.3.2 Selbst eine eigene Angabe und Aufgaben zu einer Darstellung formulieren

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
1. Klasse:	Keine Aufgaben	1. Klasse:	1 Aufgabe
2. Klasse:	Keine Aufgaben	2. Klasse:	1 Aufgabe
Insgesamt:	Keine Aufgaben	Insgesamt:	2 Aufgaben

Während es im Schulbuch „Mathematik verstehen“ praktisch gar keine Aufgaben[47] gibt, in denen eine Angabe selbst formuliert werden muss, kommen im Schulbuch „100% Mathematik“ solche Aufgaben immerhin vereinzelt vor.

100% Mathematik:

1. Klasse:

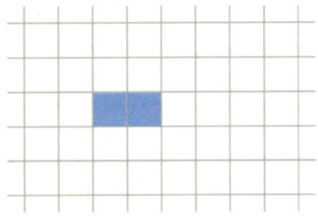


[48]

[47] Keine Aufgaben, in denen graphische Darstellungen eine Rolle spielen
[48] 100% Mathematik, S. 165

2. Klasse: 203 c)

203 a) Hier ist ein Drittel dargestellt. Wie könnte das Ganze aussehen? Zeichnet ins Heft.
b) Wie könnte das Ganze aussehen, wenn die Figur ein Sechstel des Ganzen wäre?
c) Überlegt euch ähnliche Aufgaben und stellt sie euch gegenseitig.



[49]

Auch wenn nicht direkt eine Angabe zu einer Darstellung gefunden werden muss, müssen bei diesen Aufgaben zumindest Angaben und Rechengeschichten selbst gefunden werden.

Auch bei Aufgaben, die nicht mit graphischen Darstellungen zu tun haben, müssen immer wieder Aufgaben selbst gestellt und Angaben formuliert werden, was im Schulbuch „Mathematik verstehen“ deutlich seltener der Fall ist.

Aufgaben zu einer Darstellung zum Thema Bruchrechnung selbst zu formulieren scheint in beiden Schulbüchern keine besonders große Rolle zu spielen. Während allerdings im Schulbuch „100% Mathematik“ immerhin zwei Aufgaben vorkommen, die das annähernd verlangen, gibt es im Schulbuch „Mathematik verstehen“ gar keine Aufgabe, in der eine Angabe zu einer Darstellung zur Bruchrechnung selbst formuliert werden muss, was meiner Meinung nach in diesem Schulbuch eine Lücke darstellt.

5.4 Wiederaufgreifen, Variieren und Finden von Veranschaulichungen

5.4.1 Aufforderung zum Veranschaulichen

Beinhaltet das Schulbuch explizite Aufforderungen zu veranschaulichen?

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Mathematik verstehen 1:	11 Aufgaben[50]	100% Mathematik 1:	5 Aufgaben
Mathematik verstehen 2:	4 Aufgaben	100% Mathematik 2:	8 Aufgaben
Insgesamt:	15 Aufgaben	Insgesamt:	13 Aufgaben

[49] 100% Mathematik 2, S. 54
[50] Hier wurden der Anschaulichkeit halber nur „ganze“ Aufgaben gezählt, und die Unterpunkte der Aufgaben (a, b, c, …) nicht als einzelne Aufgaben gezählt, was in den anderen Punkten schon der Fall ist.

Alles in allem beinhaltet das Schulbuch „Mathematik verstehen“ etwas mehr Aufgaben, in denen das Veranschaulichen explizit verlangt ist.

Allerdings könnten beide Schulbücher mehr Aufforderungen zum Veranschaulichen einbauen; auch im Schulbuch „Mathematik verstehen“ – das immerhin noch mehr Aufgaben zu diesem Thema enthält als das Schulbuch 100% Mathematik – wären mehr Aufgabenstellungen in diese Richtung von Vorteil. Vor allem im Buch der zweiten Klasse fällt auf, dass nur vier Aufgaben gestellt werden, in denen eine Veranschaulichung verlangt ist. Allerdings enthalten im Gegensatz zum Schulbuch „100% Mathematik“ manche Aufgaben viele Unterpunkte, wodurch zumindest das ausreichende Üben in Bezug auf diesen einen Punkt gewährleistet ist.

5.08 Veranschauliche durch eine **1)** Strecken-, **2)** Kreis-, **3)** Rechtecksdarstellung!

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{5}{6}$ **f)** $\frac{3}{8}$ [51]

Bei vielen Beispielen wäre es sehr einfach, einen Unterpunkt hinzuzufügen, der das Veranschaulichen des Rechenvorgangs verlangt. Ich greife hier zwei dieser Beispiele heraus:

2.50 **1)** Erweitere auf den angegebenen Nenner!
2) Gib an, mit welcher Zahl erweitert wurde!

a) $\frac{3}{5} = \frac{\quad}{15}$ ____ **b)** $\frac{4}{9} = \frac{\quad}{18}$ ____ [52]

Möglicher Zusatz: Veranschauliche mit Hilfe einer Kreisdarstellung oder Rechtecksdarstellung!

Oder auch: Veranschauliche durch eine geeignete graphische Darstellung!

2.187 Max möchte $\frac{2}{3}$ von einer $\frac{4}{5}$ m langen Holzleiste absägen. Wie lang ist das Holzstück? [53]

[51] Mathematik verstehen 1, S. 134
[52] Mathematik verstehen 2, S. 49
[53] Mathematik verstehen 2, S. 72

Möglicher Zusatz: Veranschauliche mit Hilfe der Balkendarstellung[54]!

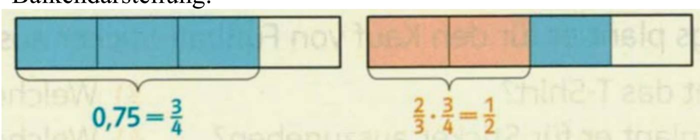
Oder auch: Veranschauliche durch eine geeignete graphische Darstellung!

Das Veranschaulichen dieser Beispiele wäre sinnvoll, um das Verständnis der Schülerinnen und Schüler zu fördern (siehe 1.5.2 Grundlegende Tätigkeiten beim Arbeiten mit graphischen Veranschaulichungen nach Marschner-Franzke; siehe auch im späteren Punkt 5.7 Vorbeugung von Problemen bei der Bruchrechnung nach Padberg)

5.4.2 Wiederaufgreifen, Variieren und Finden

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Mathematik verstehen 1:		**100% Mathematik 1:**	
Wiederaufgreifen:	2 Aufgaben[55]	Wiederaufgreifen:	2 Aufgaben
Variieren:	9 Aufgaben	Variieren:	3 Aufgaben
Finden:	Keine Aufgaben	Finden:	Keine Aufgaben
Mathematik verstehen 2:		**100% Mathematik 2:**	
Wiederaufgreifen:	1 Aufgaben	Wiederaufgreifen:	keine Aufgaben
Variieren:	3 Aufgaben	Variieren:	3 Aufgaben
Finden:	keine Aufgaben	Finden:	2 Aufgaben
Insgesamt:		**Insgesamt:**	
Wiederaufgreifen:	3 Aufgaben	Wiederaufgreifen:	2 Aufgaben
Variieren:	12 Aufgaben	Variieren:	6 Aufgaben
Finden:	keine Aufgaben	Finden:	2 Aufgaben

[54] Balkendarstellung:



Mathematik verstehen 2, S. 72

[55] Der Übergang zwischen „Wiederaufgreifen“ „Variieren“ und „Finden“ einer Darstellung ist fließend, ich habe der Übersicht halber auch jene Aufgaben, die möglicherweise zwischen 2 dieser Formen liegen, einem Thema zugeordnet.

In beiden Schulbüchern ist erkennbar, dass Veranschaulichungen wiederaufgegriffen oder variiert, kaum allerdings selbst gefunden werden müssen.

Dem könnte leicht entgegengewirkt werden, indem zu manchen Aufgaben eine Aufforderung zum Finden einer Veranschaulichung gegeben wird, wie vielleicht bei der nachfolgenden Aufgabe:

5.75 Rebecca kauft sich ein Fahrrad um 450 €. Ein Jahr später ist es nur noch $\frac{5}{6}$ des ursprünglichen Kaufpreises wert. Wie viel Euro sind das? [56]

Möglicher Zusatz: Veranschauliche die Rechnung mit Hilfe einer graphischen Darstellung!

5.5 Darstellungen selbst beurteilen lassen

Kommen Aufgabenstellungen vor, in denen die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden müssen, welche Darstellung/welche Darstellungsart am geeignetsten ist? Wird in der Aufgabe eine Erklärung/Begründung verlangt?

Im nächsten Absatz und der Tabelle sind die Aufgaben in die folgenden Punkte unterteilt:

Aufgabenstellung: Aufgaben, in denen die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden müssen, welche Darstellung/welche Darstellungsart am geeignetsten ist.

Aufgabe mit Begründung: Aufgaben, in denen die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden müssen, welche Darstellung/welche Darstellungsart am geeignetsten ist und diese Entscheidung auch begründen und erklären müssen.

Nur Begründung: Aufgaben, in denen die Schülerinnen und Schüler erklären und begründen müssen, warum in welchem Zusammenhang welche Darstellung/welche Darstellungsart sinnvoller ist als andere, und warum sie diese wählen würden.

[56] Mathematik verstehen 1, S. 144

Mathematik verstehen	100% Mathematik
Mathematik verstehen 1:	**100% Mathematik 1:**
Aufgabenstellung: 2 Aufgaben	Aufgabenstellung: 2 Aufgaben
Aufgabe m. Begründung: Keine Aufgaben	Aufgabe m. Begründung: Keine Aufgaben
Nur Begründung: Keine Aufgaben	Nur Begründung: 2 Aufgaben
Mathematik verstehen 2:	**100% Mathematik 2:**
Aufgabenstellung: 2 Aufgaben	Aufgabenstellung: 2 Aufgaben
Aufgabe m. Begründung: Keine Aufgaben	Aufgabe m. Begründung: Keine Aufgaben
Nur Begründung: Keine Aufgaben	Nur Begründung: Keine Aufgaben
Insgesamt:	**Insgesamt:**
Aufgabenstellung: 4 Aufgaben	Aufgabenstellung: 4 Aufgaben
Aufgabe m. Begründung: Keine Aufgaben	Aufgabe m. Begründung: Keine Aufgaben
Nur Begründung: Keine Aufgaben	Nur Begründung: 2 Aufgaben

In beiden Schulbüchern ist in diesem Bereich ein Defizit erkennbar.

Meist wird die Art der Darstellung vorgegeben (im Schulbuch „Mathematik verstehen“ noch öfter als im Schulbuch „100% Mathematik“). Ein Beispiel hierfür ist die nachfolgende Aufgabe: 5.63

5.64 In einer Badewanne befinden sich bereits 80 Liter Wasser. Nun werden noch $35\frac{1}{2}$ l heißes und $24\frac{1}{4}$ l kaltes Wasser dazugegeben.
1) Wie viel Liter Wasser sind danach in der Badewanne?
2) Veranschauliche die Rechnung durch eine Punkt-Pfeil-Darstellung!

5.63 Ayla kippt aus verschiedenen Gefäßen Bonbons in ein großes Glas. Aus dem ersten Gefäß schüttet sie $\frac{1}{2}$ kg, aus dem zweiten $\frac{3}{8}$ kg und aus dem dritten $1\frac{1}{4}$ kg Bonbons in das Glas.
1) Wie viel Kilogramm Bonbons befinden sich nun in dem großen Glas?
2) Veranschauliche die Rechnung durch eine Kreisdarstellung und eine Streckendarstellung! [57]

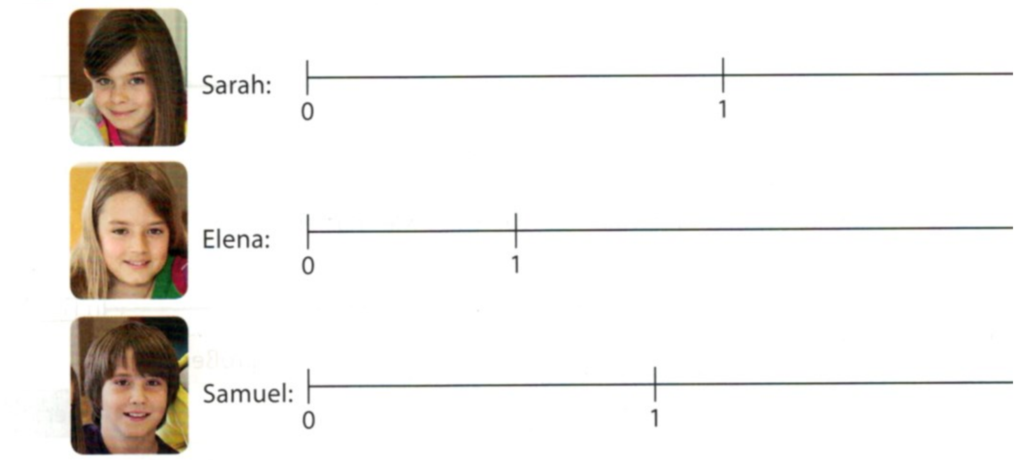
Auch wenn ich es für sinnvoll erachte, bei einigen Aufgaben immer wieder anzugeben, welche Veranschaulichung gewählt werden soll, und die Tatsache, dass überhaupt zum

[57] Mathematik verstehen 1, S. 142

Veranschaulichen angeregt wird, positiv zu vermerken ist, finde ich, dass das selbstständige Auswählen von Veranschaulichungen trotzdem nicht fehlen darf.

Das könnte umgangen werden, indem die Art der Veranschaulichung nicht immer angegeben wird, sondern die Angabe stattdessen allgemein formuliert wird, wie „Finde eine passende Veranschaulichung!“ oder „Veranschauliche die Rechnung mit einer geeigneten Darstellung“.

Erklärungen, wieso ein Schüler/eine Schülerin sich für eine bestimmte graphische Darstellung entscheidet, werden in beiden Büchern fast nie verlangt. Lediglich im Schulbuch 100% Mathematik kommen 2 Aufgaben vor, die in Ansätzen Erklärungen verlangen, wie die folgende Aufgabe:


624 Sarah, Elena und Samuel wollen den Bruch $\frac{5}{6}$ auf einem Zahlenstrahl eintragen. Sie beginnen mit diesen Zeichnungen:

Wessen Zahlenstrahl ist am besten geeignet? Probiert. Begründet eure Antwort. [58]

In den wenigen Fällen, in denen selbst eine Darstellungsart ausgewählt werden kann, wird einerseits keine Begründung oder Erklärung gefordert und wird andererseits meist gar nicht explizit nach einer graphischen Methode gefragt, wie in folgendem Beispiel:

5.50 Begründe auf drei verschiedene Arten, warum $\frac{1}{3}$ größer als $\frac{3}{10}$ ist! [59]

[58] 100% Mathematik 1, S. 160
[59] Mathematik verstehen 1, S. 140

Es wäre für beide Schulbücher gewinnbringend, wenn es auch Aufgaben gäbe, in denen Erklärungen sich unter anderem auch auf eigens ausgewählte Darstellungen beziehen, was in beiden Schulbüchern meiner Meinung nach fehlt.

5.6 Darstellungswechsel

5.6.1 Einführung und Erklärung von Darstellungswechseln

Werden bei der Einführung eines Themas vielfältige Darstellungen und Darstellungswechsel erklärt?

Bruchzahlen:

Im Schulbuch „Mathematik verstehen“ werden gleich mehrere graphische Darstellungen eines Bruches nebeneinander eingeführt, wie beispielsweise auf Seite 133:

[60]

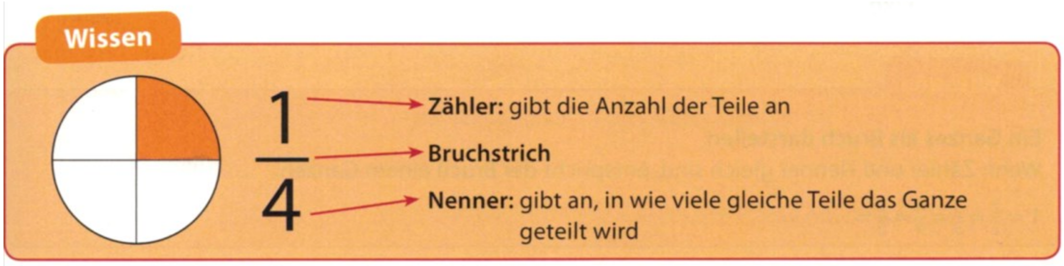
Der Bruch ¼ wird einerseits in der Symbolschreibweise (¼ und 0,25), andererseits anhand von drei verschiedenen graphischen Darstellungen (Kreis, Strecke, Rechteck) dargestellt.

Auch auf S. 135 werden Bruchzahlen auf zwei verschiedene Arten graphisch dargestellt (Pizza und Biergläser).

Somit werden sowohl Darstellungswechsel innerhalb der Ebene der graphischen Darstellungen (Treatments) als auch Darstellungswechsel zwischen den Ebenen (Conversions) behandelt, veranschaulicht und ausreichend erklärt.

[60] Mathematik verstehen 1, S.133

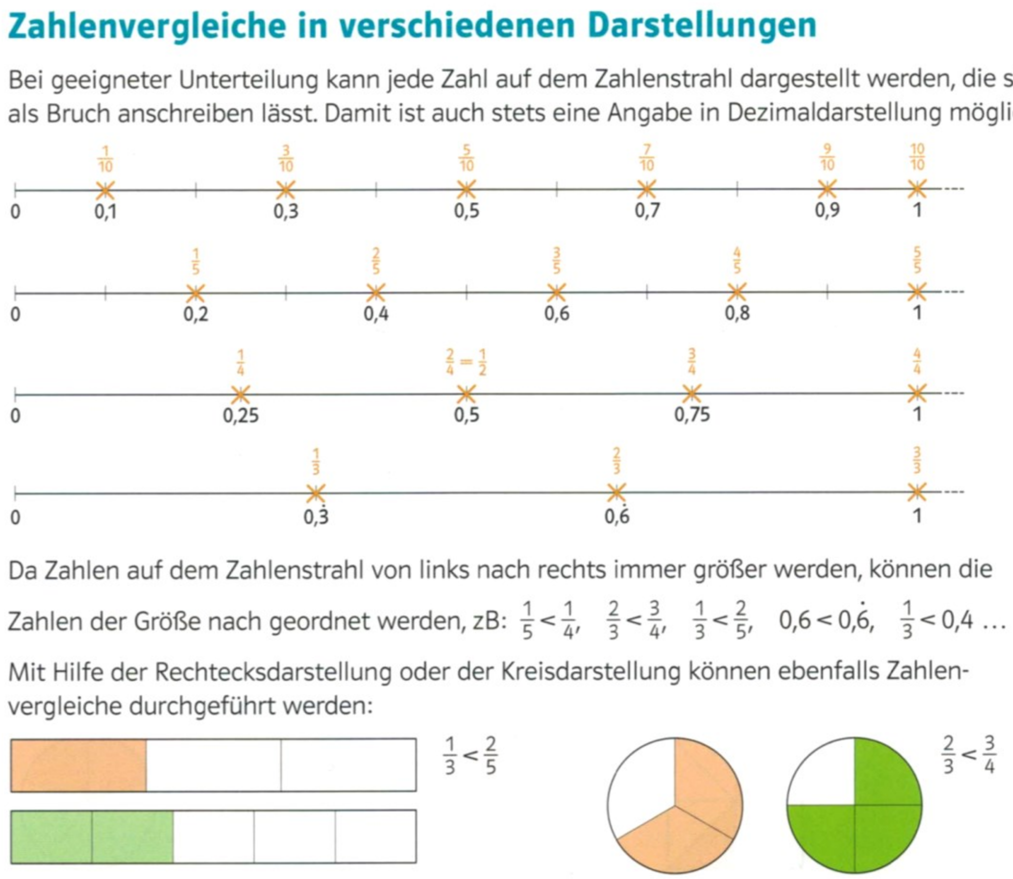
Im Schulbuch „100% Mathematik“ wird der Bruch zwar auch in Symbolschreibweise und anhand einer graphischen Darstellung beschrieben (Conversions), allerdings kommen hier keine Treatments vor:



[61]

Zahlenvergleiche:

Auch die Zahlenvergleiche werden im Schulbuch „Mathematik verstehen“ anhand verschiedener Darstellungen eingeführt (Bruchzahl, Kreis, Rechtecksdarstellung und Zahlenstrahl)



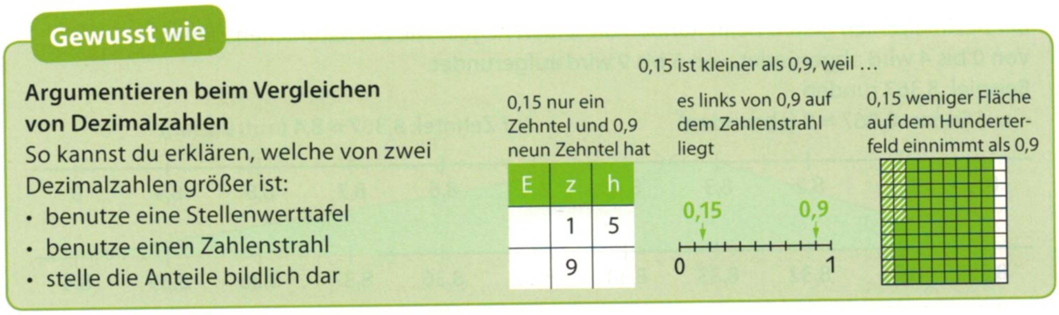
[62]

---

[61] 100% Mathematik 1, S. 151

[62] Mathematik verstehen 2, S. 59

Im Schulbuch 100% Mathematik kommen dieselben Darstellungen vor, allerdings werden die Darstellungen vom Autorenteam rund um Beate Eßletzbichler nicht direkt gegenübergestellt, sondern nacheinander behandelt, was das Verständnis des Zusammenhanges der Darstellungen in Bezug auf Treatments erschwert. Am Ende des Kapitels gibt es allerdings auch eine Zusammenfassung, in der zumindest drei der Darstellungsarten gegenübergestellt werden:



[63]

Insgesamt empfinde ich allerdings die Gegenüberstellung im Schulbuch „Mathematik verstehen“ als übersichtlicher, und meines Erachtens kommen auch die verschiedenen Darstellungen und vor allem die Treatments besser zur Geltung.

Addition und Multiplikation:

Bei Addition und Multiplikation kommen in beiden Schulbüchern Rechnungen in Symbolschreibweise und Darstellungen in Form von Kreisen vor. Conversions werden also hier behandelt, Treatments allerdings weniger.

Insgesamt:

In Bezug auf Conversions haben die Autorinnen und Autoren beider Schulbücher es geschafft, einen guten Überblick zu verschaffen und die möglichen Darstellungen gut einzuführen. Im Bereich der „Zahlenvergleiche“ und „Zahlen als Bruchzahlen“ finde ich, dass das Schulbuch „Mathematik verstehen“ einen besseren Überblick über die möglichen Treatments gibt, ansonsten vermitteln beide Schulbücher die nötigen Inhalte gut und geben alle nötigen Erklärungen, um das Verstehen der verschiedenen Darstellungen und Darstellungswechsel zu ermöglichen.

[63] Mathematik verstehen 1, S. 171

5.6.2 Darstellungswechsel trainieren

Gibt es Aufgaben, in denen verschiedene Darstellungen (Darstellungswechsel) explizit verlangt werden?

Die Aufgabenstellungen sind in die folgenden Punkte unterteilt:

Conversions: Aufgabenstellungen, in denen es erforderlich ist, Conversions selbst durchzuführen

Conversions und Treatments („Beides“): Aufgabenstellungen, in denen es erforderlich ist, sowohl Conversions als auch Treatments selbst durchzuführen.

Nur Treatments: Aufgabenstellungen, in denen es erforderlich ist, Treatments durchzuführen, allerdings keine Conversions verlangt werden.

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Mathematik verstehen 1:		**100% Mathematik 1:**	
Conversions:	22 Aufgaben[64]	Conversions:	27 Aufgaben
Conversions und Treatments:	4 Aufg.	Conversions und Treatments:	Keine Aufg.
Nur Treatments[65]:	Keine Aufgaben	Nur Treatments:	Keine Aufgaben
Mathematik verstehen 2:		**100% Mathematik 2:**	
Conversions:	36 Aufgaben	Conversions:	18 Aufgaben
Beides:	1 Aufgabe	Beides:	1 Aufgabe
Nur Treatments:	1 Aufgabe	Nur Treatments:	Keine Aufgaben
Insgesamt:		**Insgesamt:**	
Conversions:	58 Aufgaben	Conversions:	45 Aufgaben
Beides:	5 Aufgaben	Beides:	1 Aufgabe
Nur Treatments:	1 Aufgabe	Nur Treatments:	Keine Aufgaben

[64] Ganze Aufgaben, keine Unterpunkte!!

[65] Da ich mich mit graphischen Darstellungen beschäftige, interessieren mich, wie bereits erwähnt, nur jene Treatments, in denen innerhalb der Ebene der graphischen Darstellungen gewechselt wird. Wechsel innerhalb der Symbolebene (wie das Umwandeln eines Bruches in eine Dezimalzahl) zählen also nicht zu den von mir untersuchten Treatments und werden darum auch in diesem Zusammenhang nicht behandelt und aufgelistet.

Generell ist der Wechsel innerhalb der Ebene der graphischen Darstellungen (Treatments) in beiden Schulbüchern nicht von großer Bedeutung. Im Schulbuch „Mathematik verstehen“ kommen noch eher Aufgaben vor, in denen Treatments geübt werden können. Allerdings sind auch in diesen Aufgaben die Gegenüberstellungen eher zufällig, wie im folgenden Beispiel:

5.08 Veranschauliche durch eine **1)** Strecken-, **2)** Kreis-, **3)** Rechtecksdarstellung!

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{5}{6}$ **f)** $\frac{3}{8}$ [66]

Es kommen kaum Aufgaben vor, in denen selbst so ein Wechsel durchgeführt werden soll, jedoch kommen im Zuge der Conversions viele verschiedene Arten von Darstellungen vor (Kreise, Rechtecke, Dreiecke, Biergläser, Saftkrüge und viele weitere)

Wichtiger als die Treatments sind den Schulbuchautorinnen und -autoren die auch von Duval als bedeutender erachteten Conversions, die in beiden Schulbüchern umfangreich geübt werden und mit vielfältigen Darstellungen in vielen verschiedenen Zusammenhängen behandelt werden.
Ein Grund für die deutlich größere Anzahl an Aufgaben im Schulbuch „Mathematik verstehen 2“ im Vergleich zum Schulbuch „100% Mathematik 2“ liegt an den bereits erwähnten vorkommenden Wiederholungen im Schulbuch „Mathematik verstehen 2“. Generell finde ich, dass die Autoren und Autorinnen beider Schulbücher ausreichend und vielfältige Aufgaben zu Darstellungswechseln (insbesondere den Conversions) bieten, und dass die Möglichkeit zum ausreichenden Trainieren auf jeden Fall geboten wird.

5.7 Vorbeugung von Problemen bei der Bruchrechnung nach Padberg

5.7.1 Einführung anhand anschaulicher Grundvorstellungen

Um die Einführungen der verschiedenen Unterkapitel zu analysieren, muss zunächst die Einteilung der zu vergleichenden Unterpunkte erfolgen. Es werden die folgenden Unterteilungen vorgenommen:

[66] Mathematik verstehen 1, S. 134

- Teile des Ganzen: In diesem Kapitel soll der Bruch als „Teil eines Ganzen“, wie etwa „¾ einer Pizza“, eingeführt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, was ein Bruch eigentlich ist, und wie er dargestellt werden kann.
- Brüche vergleichen: In dieses Kapitel fallen die „Größer-Kleiner-Beziehungen“ von Brüchen, sowie gleich große Brüche.
- Addition und Subtraktion von Brüchen
- Kürzen/Erweitern von Brüchen
- Multiplikation von Brüchen
- Division von Brüchen

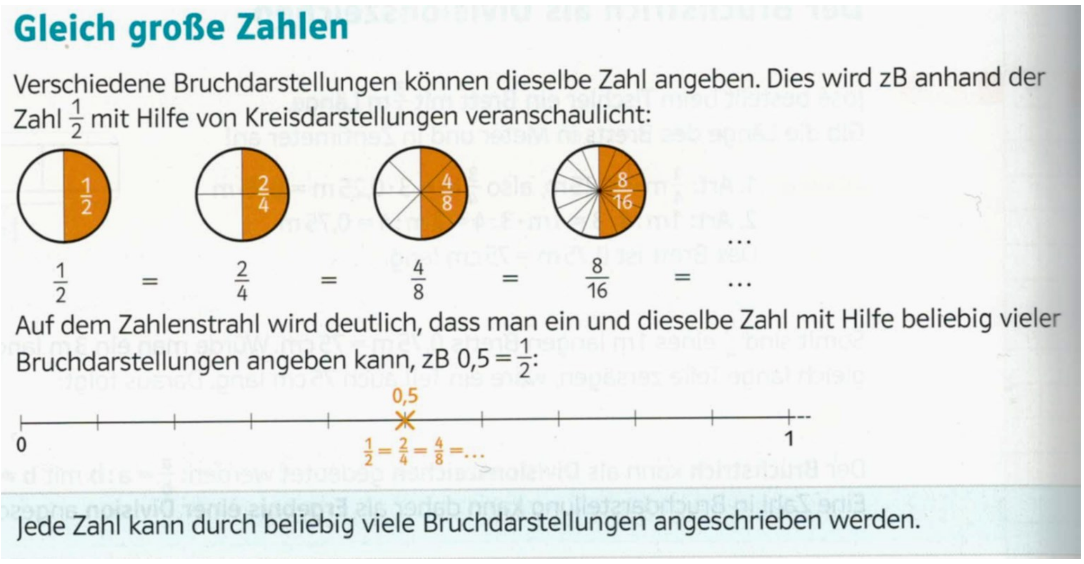
Werden bei der Einführung zuerst anschauliche Grundvorstellungen vermittelt?

Mathematik verstehen		**100% Mathematik**	
Mathematik verstehen 1:		**100% Mathematik 1:**	
Teile des Ganzen:	JA[67]	Teile des Ganzen:	NEIN
Brüche vergleichen:	JA	Brüche vergleichen:	ZUM TEIL
Addition:	JA	Addition:	JA
Mathematik verstehen 2:		**100% Mathematik 2:**	
Kürzen/Erweitern:	JA	Erweitern/Kürzen:	NEIN
Multiplikation:	ZUM TEIL	Multiplikation:	NEIN
Division:	ZUM TEIL	Division:	NEIN

Wie schon in einigen vorhergehenden Abschnitten fällt auf, dass die Einführung im Schulbuch „100% Mathematik“ sehr kurz gehalten ist, und die Inhalte eher anhand der Beispiele selbst erarbeitet werden sollen, weswegen bei der Einführung der Themen Defizite erkennbar sind und anschauliche Darstellungen fehlen. Im Gegensatz dazu sind die Einführungen im Schulbuch „Mathematik verstehen“ meist sehr anschaulich.

[67] Unter „Anschauliche Einführung“ verstehe ich die Einführung anhand von logisch aufgebauten graphischen Darstellungen. Beispielsweise wird der Punkt „Der Bruch als Teile eines Ganzen“ im Schulbuch „Mathematik verstehen“ anhand von anschaulichen Zeichnungen erklärt, im Schulbuch „100% Mathematik“ muss die Zeichnung gleich selbst ausgefüllt werden, weswegen sich einem die Veranschaulichung nicht auf den ersten Blick erschließt.

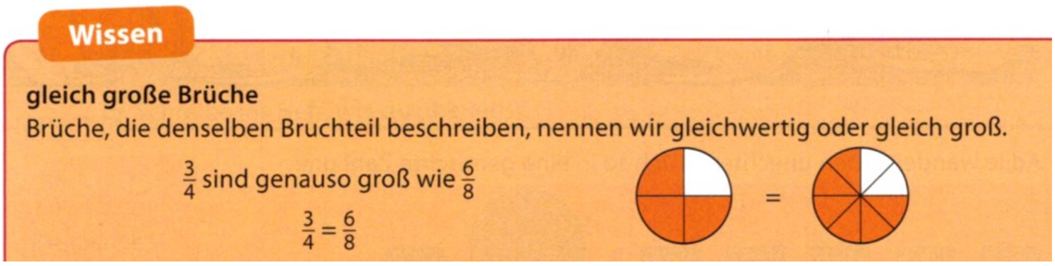
Als Beispiel möchte ich das Unterkapitel „Brüche vergleichen“ herausgreifen. Im Schulbuch „Mathematik verstehen“ ist zunächst der Vergleich von gleich großen Brüchen veranschaulicht:



[68]

Die Brüche werden nicht nur anhand einer Kreisdarstellung veranschaulicht, sondern auch am Zahlenstrahl dargestellt.

Im Schulbuch „100% Mathematik“ ist dieser Vergleich ebenfalls veranschaulicht, allerdings werden hier einerseits nur zwei statt vier Kreisdarstellungen gegenübergestellt, andererseits wird auf eine veranschaulichende Darstellung am Zahlenstrahl verzichtet:



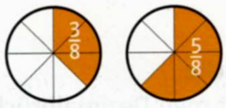
[69]

Weiters lassen sich im Schulbuch „Mathematik verstehen“ weitere veranschaulichende Darstellungen zu Zahlenvergleichen in Bezug auf „Größer-Kleiner-Beziehungen“ finden. Es kommen einerseits Kreisdarstellungen, andererseits auch Darstellungen am Zahlenstrahl und Streckendarstellungen vor:

[68] Mathematik verstehen 1, S. 138
[69] 100% Mathematik 1, S. 156

Zahlenvergleiche

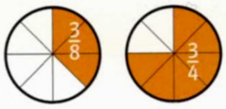
Haben zwei Zahlen in der Bruchdarstellung den **gleichen Nenner**, lässt sich leicht feststellen, welche die kleinere und welche die größere Zahl ist:



An der Kreisdarstellung kann man erkennen: $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$

Bei **gleichem Nenner** ist jene Zahl **größer**, die den **größeren Zähler** hat.

Haben zwei Zahlen in der Bruchdarstellung den **gleichen Zähler**, lässt sich ebenfalls leicht feststellen, welche die kleinere und welche die größere Zahl ist:



An der Kreisdarstellung kann man erkennen: $\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$

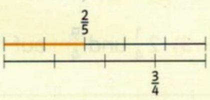
Bei **gleichem Zähler** ist jene Zahl **größer**, die den **kleineren Nenner** hat.

Auch der Zahlenstrahl erlaubt es, Zahlen in Bruchdarstellung zu vergleichen, da die Zahlen nach rechts hin größer werden: zB $\frac{2}{5} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{3}{2}$

Sind Zähler und Nenner verschieden, gibt es mehrere Möglichkeiten des Zahlenvergleichs. In der Aufgabe 5.34 werden drei Arten des Zahlenvergleichs vorgestellt. [70]

A 5.34 Zeige auf drei verschiedene Arten, dass gilt: $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$!

Lösung: 1. Art: Streckendarstellung:

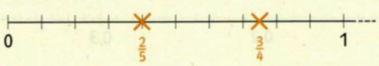


Dies zeigt, dass $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$.

2. Art: Dezimaldarstellung:

$2:5 = 0{,}4$ und $3:4 = 0{,}75$; Da $0{,}4 < 0{,}75$, ist $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$.

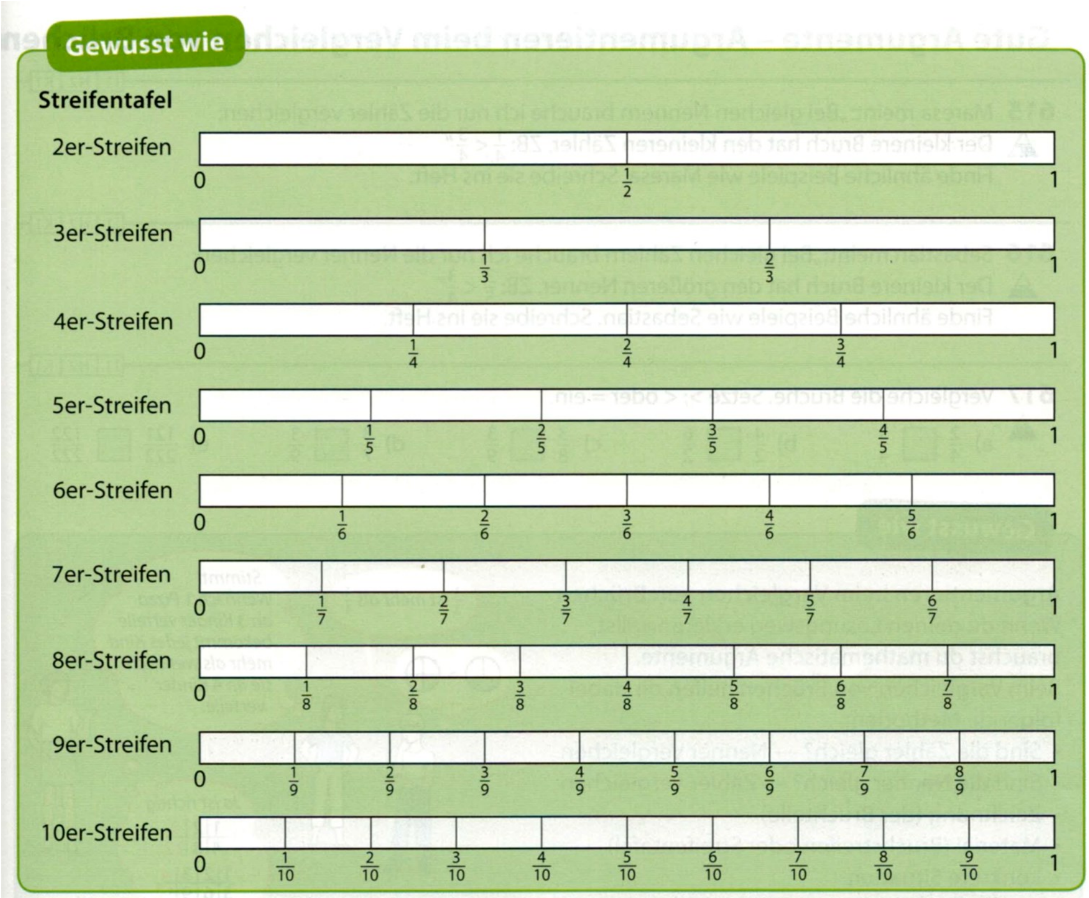
3. Art: Darstellung auf dem Zahlenstrahl:



Jene Zahl, die auf dem Zahlenstrahl weiter rechts liegt, ist größer: $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$. [71]

[70] Mathematik verstehen 1, S. 138
[71] Mathematik verstehen 1, S. 139

Im Schulbuch „100% Mathematik“ hingegen werden keine direkten Veranschaulichungen für die Größenvergleiche der Zahlen gegeben. Das einzige veranschaulichende Hilfsmittel ist die Streifentafel, die zwar meiner Meinung sehr anschaulich und hilfreich ist, jedoch wären noch Beispiele für die Anwendung dieser Streifentafel und Gegenüberstellungen mit weiteren Veranschaulichungsmöglichkeiten (wie der Kreisdarstellung) gewinnbringend.



[72]

Aus diesem Grund habe ich die Einführung in Bezug auf anschauliche Grundvorstellungen im Schulbuch „100% Mathematik“ als nur „zum Teil“ erfüllt gesehen, während im Schulbuch „Mathematik verstehen“ diese anschaulichen Grundvorstellungen ausreichend und besser vermittelt sind.

Insgesamt empfinde ich diesen Punkt im Schulbuch „Mathematik verstehen“ als besser umgesetzt, da auch in einigen anderen Kapiteln die Einführung übersichtlicher gestaltet ist,

[72] 100% Mathematik 1, S. 157

und mehr Veranschaulichungen enthalten sind, die anschauliche Grundvorstellungen vermitteln.

5.7.2 Einfache Beispiele zwischendurch

Gibt es genug Aufgaben, um die Möglichkeit zu bieten, einfache Beispiele einerseits zu Beginn, andererseits auch nachdem die Regel gelernt wurde, anschaulich zu lösen?

Mathematik verstehen	100% Mathematik
Mathematik verstehen 1:	**100% Mathematik 1:**
Teile des Ganzen: JA	Teile des Ganzen: JA
Durchgehend anschaulich	Durchgehend anschaulich
Brüche vergleichen: JA	Brüche vergleichen: JA
Anfang anschaulich und zwischendurch Beispiele, die unter anderem mit anschaulichen Mitteln gelöst werden müssen (5.44, 5.50)	Anfangs und zwischendurch gibt es mehrere Beispiele, die anschaulich gelöst werden sollen.
Addition: NEIN	Addition: JA
Die ersten Beispiele sind nicht wirklich anschaulich, zwischendurch werden zwar zusätzlich zum Rechnen auch Veranschaulichungen verlangt, unter wirklich „anschaulichem Lösen“ von Aufgaben verstehe ich allerdings etwas Anderes.	Es gibt viele anschauliche Aufgaben, sowohl anfangs als auch zwischendurch.
Mathematik verstehen 2:	**100% Mathematik 2:**
Kürzen/Erweitern: ZUM TEIL	Kürzen/Erweitern: ZUM TEIL
Die Anfangsbeispiele sind zwar anschaulich lösbar, doch kommen in späteren Beispielen fast nur noch Beispiele	Die Anfangsbeispiele sind zwar anschaulich lösbar, doch kommen in späteren Beispielen fast nur noch Beispiele

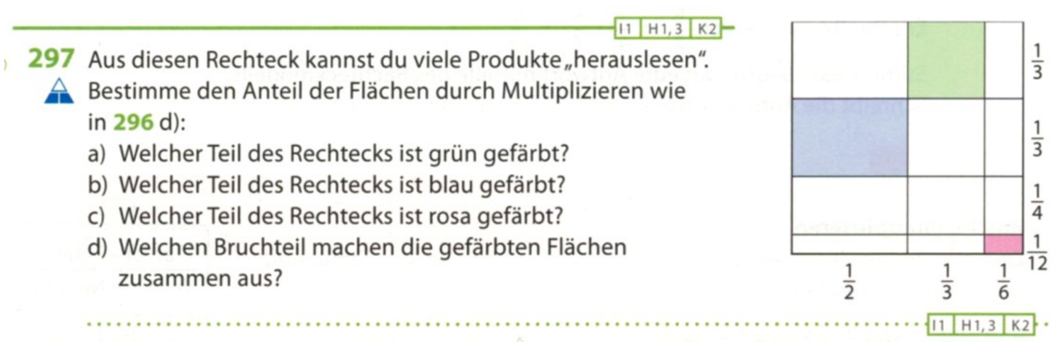
vor, die vorwiegend mit Hilfe von Rechenregeln gelöst werden sollen.	vor, die vorwiegend mit Hilfe von Rechenregeln gelöst werden sollen.
<u>Multiplikation:</u> NEIN Es kommen fast keine Aufgaben vor, die anschaulich gelöst werden sollen	<u>Multiplikation:</u> JA Es kommen sowohl zu Beginn als auch in der Mitte und am Ende des Kapitels viele Aufgaben vor, die anschaulich gelöst werden sollen.
<u>Division:</u> NEIN Es kommen fast keine Aufgaben vor, die anschaulich gelöst werden sollen	<u>Division:</u> ZUM TEIL Es ist am Anfang eine Aufgabe anschaulich zu lösen, ansonsten werden eher die Rechenregeln geübt.

Ähnlich wie bereits in vorhergehenden Punkten fällt auf, dass im Schulbuch „100% Mathematik“ mehr Aufgaben gestellt werden, die anschauliches Lösen verlangen oder fördern, was einen Vorteil dieses Schulbuches darstellt.

Vor allem im Bereich der Multiplikation und Division von Brüchen kann hier ein Defizit der Aufgaben im Schulbuch „Mathematik verstehen“ festgestellt werden.

Das Schulbuch „100% Mathematik“ deckt somit meiner Meinung nach den bereits erwähnten Punkt des Lehrplans „Diese Rechenregeln für das Bruchrechnen begründen können“ - zumindest hinsichtlich dieses Aspektes - besser ab.

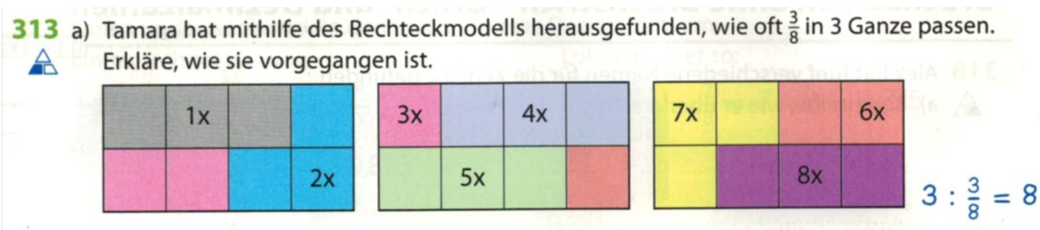
Beide Schulbücher veranschaulichen die Multiplikation nämlich zwar anhand von Rechtecken und erklären diese auch mehr oder weniger, allerdings kommen im Schulbuch „Mathematik verstehen 2“ eigentlich keine Aufgaben dazu vor. Im Schulbuch „100% Mathematik 2“ gibt es im Gegensatz dazu einige Aufgaben, wie etwa die Folgende:


297 Aus diesen Rechteck kannst du viele Produkte „herauslesen“. Bestimme den Anteil der Flächen durch Multiplizieren wie in 296 d):

a) Welcher Teil des Rechtecks ist grün gefärbt?
b) Welcher Teil des Rechtecks ist blau gefärbt?
c) Welcher Teil des Rechtecks ist rosa gefärbt?
d) Welchen Bruchteil machen die gefärbten Flächen zusammen aus?

[73]

Die Multiplikation wird also vom AutorInnenteam rund um Beate Eßletzbichler besser veranschaulicht. Auch bei der Division gibt es (wenn auch nur vereinzelt) anschauliche Angaben (wie die Folgende), die im Schulbuch „Mathematik verstehen“ gar nicht existieren.


313 a) Tamara hat mithilfe des Rechteckmodells herausgefunden, wie oft $\frac{3}{8}$ in 3 Ganze passen. Erkläre, wie sie vorgegangen ist.

[74]

5.7.2 Kognitive Konflikte

Wie und in welcher Form kommen Aufgaben vor, in denen kognitive Konflikte ausgelöst werden könnten? (Gibt es Aufgaben, die sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch gelöst werden müssen?)

Mathematik verstehen		**100% Mathematik**	
Mathematik verstehen 1:	8 Aufgaben	100% Mathematik 1:	2 Aufgaben
Mathematik verstehen 2:	3 Aufgaben	100% Mathematik 2:	4 Aufgaben
Insgesamt:	11 Aufgaben	Insgesamt:	6 Aufgaben

Dieser Punkt wird in beiden Schulbüchern nicht übermäßig beachtet. Es kommen zwar vereinzelt Aufgaben vor, aber auch diese Aufgaben entsprechen oft nur in Ansätzen den Kriterien, wie beispielsweise diese Aufgabe:

[73] 100% Mathematik 2, S. 72
[74] 100% Mathematik 2, S. 75

245 **Schätzt zuerst, ob die Summe kleiner als $\frac{1}{2}$, gleich groß wie $\frac{1}{2}$ oder größer als $\frac{1}{2}$ ist. Bestimmt sie dann genau. Ihr könnt das Rechteckmodell zu Hilfe nehmen.**

a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{6}+\frac{2}{4}$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$ f) $\frac{2}{5}+\frac{1}{6}$ [75]

Bei dieser Aufgabe (245), sowie in zwei weiteren Aufgaben im Schulbuch „100% Mathematik 2“ (246 und 286) wird lediglich der Hinweis gegeben, dass anhand des Rechteckmodells veranschaulicht werden kann. Um diesem Punkt besser gerecht zu werden und wirklich kognitive Konflikte auslösen zu können, wäre es vorteilhafter, wenn es eine tatsächliche Aufforderung zum Rechnen UND Veranschaulichen gäbe, und nicht nur einen Hinweis, dass die Schülerinnen und Schüler auch anhand des Rechteckmodells veranschaulichen können, wenn sie wollen. Solche Hinweise werden nämlich oft ignoriert. (Siehe 1.5.2 „Grundlegende Tätigkeiten beim Arbeiten mit graphischen Veranschaulichungen nach Marschner-Franzke“)

Kleine Zusätze zu manchen Aufgaben könnten schon dazu führen, dass diesem Punkt ausreichend Beachtung geschenkt wird, wie im nachfolgenden Beispiel:

2.146 Berechne und kürze das Ergebnis, wenn möglich!

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{12}+\frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ d) $\frac{8}{10}-\frac{3}{4}$ e) $\frac{9}{10}-\frac{1}{6}$ f) $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}$

2.147 Berechne und kürze das Ergebnis, wenn möglich!

a) $1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$ b) $2\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$ c) $4\frac{3}{10}-\frac{2}{5}$ d) $2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}$ e) $2\frac{1}{2}+\frac{7}{10}$ f) $\frac{1}{5}+2\frac{1}{3}$ [76]

In diesen beiden Aufgaben könnte man leicht beide Lösungswege (also graphisch und rechnerisch) verlangen und die Angaben auf „Löse sowohl rechnerisch als auch mit Hilfe einer geeigneten graphischen Darstellung und kürze das Ergebnis, wenn möglich!“ umformulieren. Dazu muss natürlich aber davor auch besprochen werden, wie das gemacht werden kann – also welche Darstellungen in welchem Zusammenhang sinnvoll verwendet werden können, und wie welche Rechnung graphisch veranschaulicht werden kann.

[75] 100% Mathematik 2, S. 62
[76] Mathematik verstehen 2, S. 66

2.148 Berechne mit Hilfe der Darstellung der Zahlen auf dem Zahlenstrahl!

a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ [77]

In Aufgabe 2.148 könnte als Zusatz auch nach einer rechnerischen Lösung verlangt werden.

Alles in allem würde ich sagen, dass dieser Punkt in beiden Schulbüchern nicht übermäßig beachtet, aber immerhin auch nicht ignoriert wird. Er wäre allerdings ausbaufähig, vor allem im Schulbuch „100% Mathematik“, aber auch im Schulbuch „Mathematik verstehen“.

5.8 Resümee aus dem Kapitel „Bruchrechnung“

Beide Schulbücher haben Vor- und Nachteile und schneiden in verschiedenen Bereichen besser oder schlechter ab.

In beiden Schulbüchern könnte das Veranschaulichen mehr gefördert werden und in den Aufgaben öfter gezielt nach Veranschaulichungen gefragt werden. Auch das Lösen auf verschiedene Arten (graphische und nicht graphische) und Gegenüberstellen dieser Möglichkeiten wird nicht oft verlangt, wäre aber in beiden Schulbüchern gewinnbringend.

Weiters kommen in beiden Schulbüchern wenige Aufgaben vor, in denen die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden müssen, welche Veranschaulichung sie verwenden wollen und auch begründen müssen, warum sie diese Veranschaulichung für sinnvoll erachten.

Abgesehen davon sind die wesentlichen Punkte in beiden Schulbüchern enthalten. Es kommen viele Darstellungen und Veranschaulichungen vor und einige Punkte wie zum Beispiel Darstellungswechsel sind gut umgesetzt. Weiters wird dem Lehrplan ausreichend Beachtung geschenkt und beide Schulbücher ermöglichen in vielen Bereichen das ausreichende Üben.

[77] Mathematik verstehen 2, S. 66

Vorteile des Schulbuches „Mathematik verstehen“:
Auffällig ist, dass im Schulbuch „Mathematik verstehen“ deutlich mehr Erklärungen vorkommen. Einerseits gibt es durchgerechnete und erklärende Beispiele, die im Schulbuch „100% Mathematik“ nicht vorkommen, andererseits gibt es auch innerhalb der Kapitel mehr Erklärungen.
Diesen Vorteil empfinde ich als sehr bedeutend, da das Schulbuch „Mathematik verstehen“ sich somit deutlich besser zum „Nachschlagen“ und „Nachlesen“ eignet, wenn man etwas verpasst, nicht verstanden oder vergessen hat. Meines Erachtens nach sollte ein Schulbuch diese Aufgabe erfüllen, weswegen ich in diesem Punkt einen entscheidenden Vorteil des Schulbuches „Mathematik verstehen“ sehe.

Des Weiteren widmet sich das Schulbuch der zweiten Klasse auch der Wiederholung der ersten Klasse, was ich persönlich als gewinnbringend sehe.

Außerdem empfinde ich den Punkt „Darstellungswechsel“ in diesem Schulbuch als etwas übersichtlicher, da einerseits mehr verschiedene graphische Darstellungen nebeneinander vorkommen, und diese andererseits übersichtlicher gegenübergestellt werden und vor allem die Treatments besser zu Geltung kommen.

Vorteile des Schulbuches „100% Mathematik“:
Der Punkt „Selbst eine Angabe formulieren“ ist in diesem Buch deutlich besser umgesetzt als im Schulbuch „Mathematik verstehen“. Es werden generell immer wieder Aufgaben gestellt, in denen eine Angabe selbst formuliert werden muss, was vorteilhaft ist, da das eine weitere Perspektive des Themas beleuchtet, und eine neue Kompetenz in diesem Bereich erlangt werden muss, was das Verständnis fördert.

Weiters werden die Aufgaben in einigen Bereichen öfter anschaulich gelöst (siehe 5.7). Beispielsweise gibt es zur anschaulichen Multiplikation zweier Brüche im Schulbuch „100% Mathematik“ einige Aufgaben, die im Schulbuch „Mathematik verstehen“ fehlen.

6. STATISTIK

6.0 Nicht behandelte Themen:

Anzahl der Darstellungen pro Seite:

Da diese sich ähnlich verhält wie im vorhergehenden Kapitel, werde ich darauf an dieser Stelle nicht noch einmal eingehen.

Darstellungswechsel:

Da vor allem Darstellungswechsel wie „Tabellen/Daten in Säulen- oder Balkendiagramme“ oder umgekehrt, oder auch „Tabellen/Daten in Piktogramme oder Kreisdiagramme“ vorkommen, die eigentlich in anderen Punkten schon behandelt werden, werde ich auf diesen Punkt nicht noch einmal näher eingehen, da ansonsten sehr viele Wiederholungen auftreten würden.

Ziele im Statistik-Unterricht

Da in den Schulbüchern nicht nach diesem Prinzip vorgegangen wird, kommen Kommunikation, Argumentation und Reduktion nicht in den Schulbüchern vor, weswegen sie für den Schulbuchvergleich nicht berücksichtigt werden. Dass diese Punkte in den Schulbüchern nicht verlangt werden, heißt aber nicht, dass man sie im Unterricht nicht umsetzen kann, wenn man das möchte.

6.1 Inhaltsverzeichnis des Kapitels „Statistik“ in den Büchern

6.1.1 Erste Klasse

Mathematik verstehen 1:

I 4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen

[78]

[78] Mathematik verstehen 1, S. 5

100% Mathematik 1:

[79]

6.1.2 Zweite Klasse

Mathematik verstehen 2:

[80]

100% Mathematik 2:

[81]

[79] 100% Mathematik 1, S. 4
[80] Mathematik verstehen 2, S. 5
[81] 100% Mathematik 2, S. 7

6.1.3 Dritte Klasse

Mathematik verstehen 3:

[82]

100% Mathematik 3:

[83]

Seitenanzahl der ersten 3 Klassen zusammen:

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Gesamtzahl der Seiten:	864 S.	Gesamtzahl der Seiten:	770 S.
Seitenzahl im Kapitel „Statistik"[84]:	46 S.	Seitenzahl im Kapitel „Statistik":	54 S.
Anteil des Kapitels „Statistik"[85]:	5%	Anteil des Kapitels „Statistik":	7%

[82] Mathematik verstehen 3, S. 5
[83] 100% Mathematik 3, S. 4
[84] Hier wird die Seitenzahl der Kapitel „Statistik" aus den drei Schulbüchern der ersten 3 Klassen zusammengezählt
[85] Anteil des Kapitels „Statistik" im Vergleich zur gesamten Seitenanzahl in Prozent.

Generell fällt auf, dass das Schulbuch „100% Mathematik“ dem Thema „Statistik“ insgesamt etwas mehr Platz widmet, sowohl in Bezug auf die Anzahl der Seiten, als auch anteilsmäßig.

Inhaltlich sind nur kleine Unterschiede festzustellen. Der Lehrplan wird auch in diesem Kapitel in beiden Schulbüchern vollständig abgedeckt.

<u>1. Klasse:</u>
Im Schulbuch „100% Mathematik“ kommen Rangliste, Spannweite und Zentralwert vor („Daten brauchen Ordnung“), während im Schulbuch „Mathematik verstehen“ diese Begriffe nicht erwähnt werden. Da diese im Lehrplan allerdings erst in der vierten Klasse Erwähnung finden und im Lehrplan der ersten Klassen noch nicht explizit aufscheinen, scheint mir dieser Unterschied nicht bedeutend, da diese Begriffe im Schulbuch „Mathematik verstehen“ vermutlich in der vierten Klasse behandelt werden[86].

<u>2. Klasse:</u>
Auch im Schulbuch „100% Mathematik 2“ werden Zentralwert (Median) und Spannweite erwähnt (wiederholt) und weiters werden das arithmetische Mittel sowie Maximum und Minimum eingeführt. („Alles durchschnittlich – arithmetisches Mittel“ und „Wichtige Werte – Statistische Kennwerte verwenden“)
Im Schulbuch „Mathematik verstehen 2“ werden diese Punkte nicht behandelt. Ähnlich wie zuvor finde ich diesen Unterschied nicht entscheidend, da auch im Lehrplan der zweiten Klasse keine dieser statistischen Kennwerte explizit erwähnt werden.

<u>3. Klasse:</u>
Auch in den Schulbüchern der dritten Klassen gibt es einige kleine Unterschiede, die aus dem Lehrplan allerdings nicht genau hervorgehen, weswegen in keinem der beiden Schulbücher etwas fehlt, sondern lediglich unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt wurden.
Im Schulbuch „100% Mathematik 3“ kommen wie in den Büchern der ersten und zweiten Klassen statistische Kennwerte vor, die im Schulbuch „Mathematik verstehen“ nicht behandelt werden.

[86] Zum momentanen Zeitpunkt lässt sich hier nur eine Vermutung anstellen, da das Buch „Mathematik verstehen 4“ noch nicht erschienen ist.

Das Schulbuch „Mathematik verstehen“ beschäftigt sich dagegen mit den Merkmalsausprägungen und behandelt „nominale“, „ordinale“ und „metrische“ Merkmale, sowie Vierfeldertafeln, die im Schulbuch „100% Mathematik 3“ nicht erwähnt werden.

6.2 Wie geht das Schulbuch mit Bildern und Darstellungen um?

6.2.1 Vorkommende Darstellungsarten

Im Gegensatz zum Kapitel „Bruchrechnung“, das fast ausschließlich aus ikonischen Darstellungen besteht, kommen im Kapitel „Statistik“ die schematischen Darstellungen am häufigsten vor. Ikonische Darstellungen werden nur in Form von Fotos und Piktogrammen verwendet, die insgesamt nur etwa 34% im Schulbuch „Mathematik verstehen“ und 39% im Schulbuch „100% Mathematik“ ausmachen. Den Rest bilden die schematischen Darstellungen.

6.2.2 Funktion der Darstellungen

In diesem Kapitel werden die „erklärenden Veranschaulichungen“ und die „sonstigen Veranschaulichungen“ (wie etwa die „Veranschaulichung der Angabe eines Beispiels“) von Anfang an getrennt aufgeschrieben. Der Unterschied wurde bereits im vorhergehenden Kapitel erläutert (siehe 5.2.4 „Darstellungen zur Veranschaulichung“)

Veranschaulichung:
Damit sind nun die „sonstigen Veranschaulichungen“ gemeint, die beispielsweise die Angabe von Beispielen veranschaulichen.

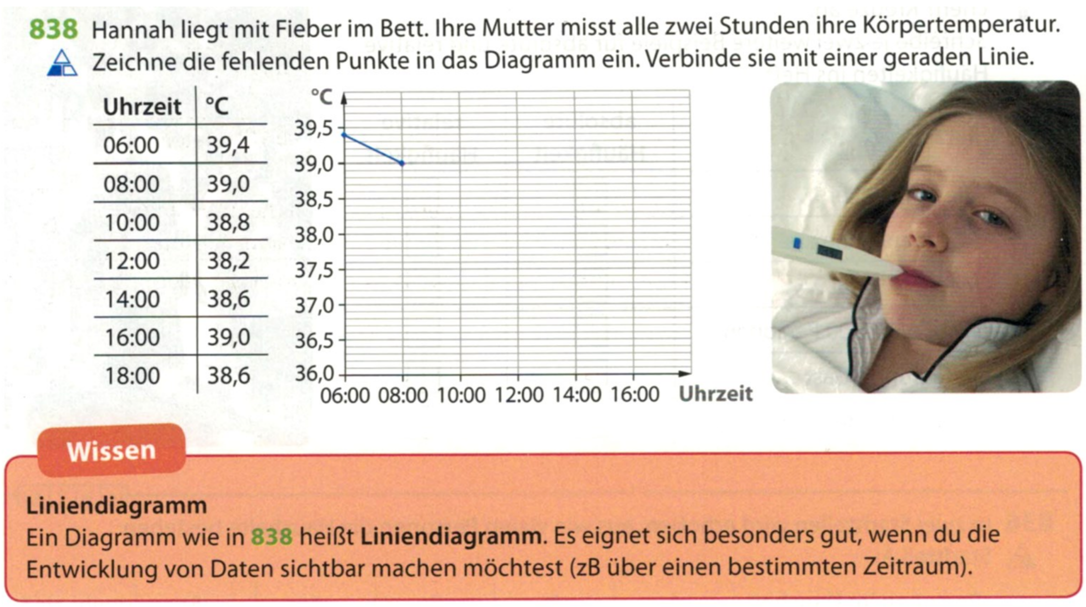
Erklärend:
Damit sind die „erklärenden Veranschaulichungen“ gemeint, die in der Einführung oder bei erklärenden Beispielen dazu dienen, einen Sachverhalt zu erklären.

Mathematik verstehen 1-3		100% Mathematik 1-3	
Anzahl der Darstellungen:	155	Anzahl der Darstellungen:	170
Funktion der Darstellungen:		**Funktion der Darstellungen:**	
Illustration:	47 Darstellungen ≙ 30%	Illustration:	62 Darstellungen ≙ 36%

Veranschaulichung:	0 Darstellungen ≙ 0%	Veranschaulichung:	1 Darstellung ≙ 1%
Erklärend:	25 Darstellungen ≙ 16%	Erklärend:	4 Darstellungen ≙ 2%
Aufgabenstellung:	83 Darst. ≙ 54%	Aufgabenstellung:	103 Darst. ≙ 61%

Ähnlich wie im Kapitel „Bruchrechnung“ fällt auf, dass im Schulbuch „100% Mathematik“ mehr Illustrationen vorkommen als im Schulbuch „Mathematik verstehen“. Weiters kommen auch mehr Darstellungen innerhalb der Aufgabenstellungen vor, was den Schülerinnen und Schülern mehr Möglichkeiten zum Üben des Interpretierens gibt. In welcher Weise genau Darstellungen in den Aufgabenstellungen Verwendung finden und was genau geübt werden soll, wird in den späteren Punkten behandelt.

Allerdings kommen - was ebenfalls bereits im vorhergehenden Kapitel feststellbar war - auch hier im Schulbuch „100% Mathematik“ sehr wenige erklärende Beispiele vor. Viele Sachverhalte und Darstellungen werden gar nicht explizit erklärt, sondern anhand eines selbst zu lösenden Beispiels eingeführt, was das Nachschlagen erschwert, wie beispielsweise in folgender Aufgabe:


838 Hannah liegt mit Fieber im Bett. Ihre Mutter misst alle zwei Stunden ihre Körpertemperatur.
Zeichne die fehlenden Punkte in das Diagramm ein. Verbinde sie mit einer geraden Linie.

Uhrzeit	°C
06:00	39,4
08:00	39,0
10:00	38,8
12:00	38,2
14:00	38,6
16:00	39,0
18:00	38,6

Wissen

Liniendiagramm
Ein Diagramm wie in 838 heißt **Liniendiagramm**. Es eignet sich besonders gut, wenn du die Entwicklung von Daten sichtbar machen möchtest (zB über einen bestimmten Zeitraum). [87]

Das Liniendiagramm wird hier nicht mit einer Darstellung visualisiert, sondern wird anhand einer selbst durchzuführenden Aufgabe eingeführt.

[87] 100% Mathematik 2, S. 212

Positiv sind dafür die vielen Darstellungen im Zuge von Aufgabenstellungen, die das ausreichende Üben des Umgangs mit Darstellungen sicherstellen. Im Schulbuch „100% Mathematik“ ist die Anzahl solcher Darstellungen etwas höher, allerdings ist meines Erachtens die Anzahl an Aufgaben auch im Schulbuch „Mathematik verstehen“ ausreichend.

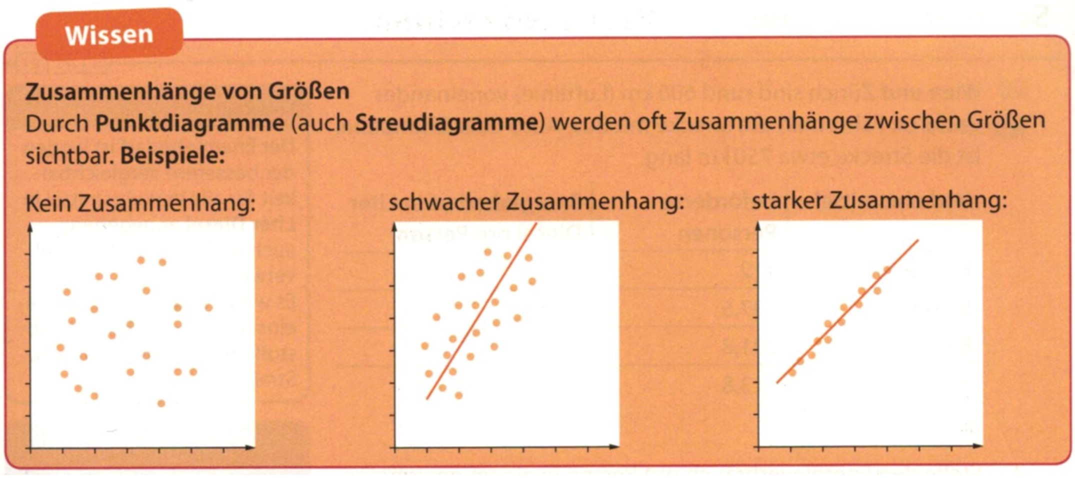
6.3 Erfassen

6.3.1 Einer Darstellung Informationen entnehmen / sie interpretieren

Bietet das Schulbuch die Möglichkeit zu lernen, wie man einer Darstellung Informationen entnehmen kann bzw. wie man sie interpretiert?

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Einführung:	13 Darstellungen	Einführung:	3 Darstellungen
Aufgaben:	32 Aufgaben	Aufgaben:	36 Aufgaben

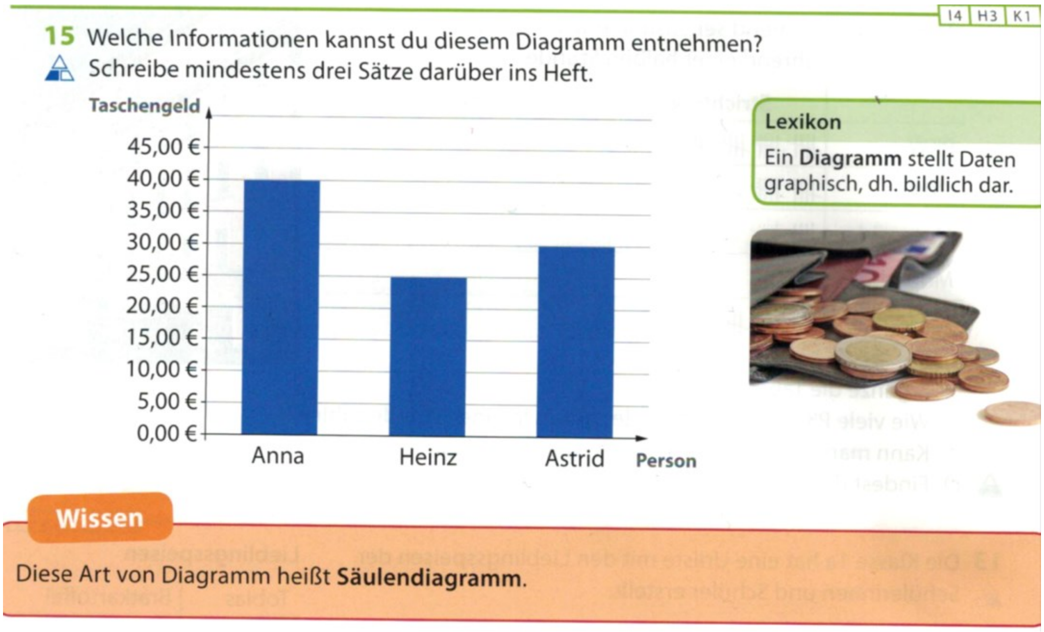
Auch hier fallen die fehlenden Darstellungen bei den Einführungen im Schulbuch „100% Mathematik“ auf. Die einzigen einführenden Darstellungen sind die folgenden:



[88]

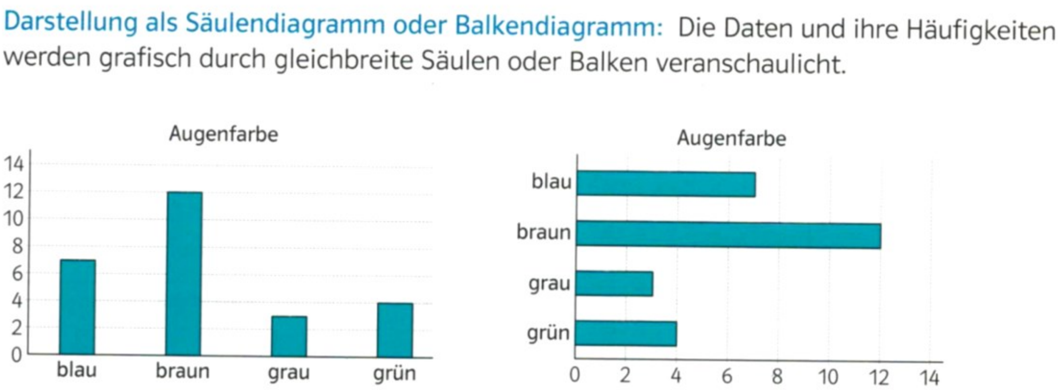
Ansonsten werden die Sachverhalte anhand von Aufgaben eingeführt und Zusatzinformationen dazu gegeben, wie beispielsweise hier:

[88] 100% Mathematik 3, S. 23



[89]

Im Gegensatz dazu werden diese Diagramme im Schulbuch „Mathematik verstehen" extra eingeführt und gegenübergestellt, was ich persönlich übersichtlicher finde:



[90]

Beide AutorInnenteams stellen einige Aufgaben zur Verfügung, in denen das Interpretieren und Ablesen von verschiedenen Darstellungen geübt werden kann.

Gut gefällt mir beispielsweise diese Aufgabe aus dem Schulbuch „100% Mathematik", da sie einen Bezug zu den Alltagserfahrungen der Schülerinnen und Schüler herstellt:

[89] 100% Mathematik 1, S. 14
[90] Mathematik verstehen 1, S. 263

[91]

Solche Aufgaben kommen im Schulbuch „Mathematik verstehen“ so gut wie gar nicht vor.

6.3.2 Darstellungen ergänzen

Bietet das Schulbuch die Möglichkeit zu lernen, wie man Darstellungen ergänzen kann?

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Mathematik verstehen 1-3:	7 Aufgaben	100% Mathematik 1-3:	10 Aufgaben

Insgesamt finde ich, dass beide Autorenteams diesen Punkt umgesetzt haben.

In beiden Schulbüchern sind einige Aufgaben vorhanden, in denen Darstellungen ergänzt werden müssen. Zwar sind es nicht unbedingt viele Aufgaben, allerdings ist meiner Meinung nach auch nicht mehr nötig.

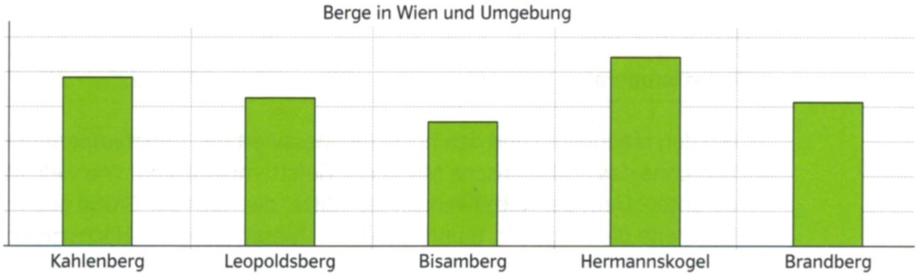
Im Schulbuch „Mathematik verstehen“ gefällt mir beispielsweise die folgende Aufgabe, da die senkrechte Achse und das arithmetische Mittel selbst ergänzt werden müssen:

[91] 100% Mathematik 2, S. 217

12.26 In folgender Tabelle sind die Höhenmeter von Bergen in der Umgebung von Wien angegeben:

Kahlenberg	Leopoldsberg	Bisamberg	Hermannskogel	Brandberg
484 m	425 m	358 m	542 m	413 m

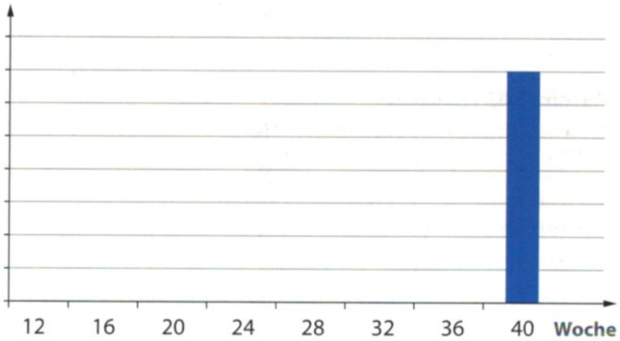
Die Höhen der fünf Berge sind in folgendem Säulendiagramm dargestellt:

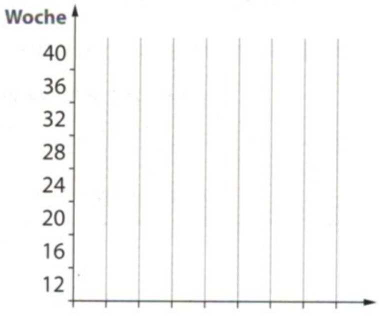


1) Wie viele Millimeter lang ist die Strecke, die im Diagramm 100 Höhenmeter darstellt? Beschrifte die senkrechte Achse im Diagramm, indem du bei jeder waagrechten Linie die entsprechenden Maße der Höhenmeter einfügst!
2) Berechne das arithmetische Mittel der Höhen der fünf Berge und zeichne es als färbige Linie in das Diagramm ein!
3) Wie hoch wäre im Diagramm die Säule für den Schneeberg, der 2 076 m hoch ist? [92]

Auch im Schulbuch „100% Mathematik" gibt es einige Aufgaben, in der die zweite Achse ergänzt werden muss (einmal die erste und einmal die zweite Achse):

28 Ergänze die Diagramme zu den Daten von **27**.
Wähle eine geeignete Einteilung der zweiten Achse.



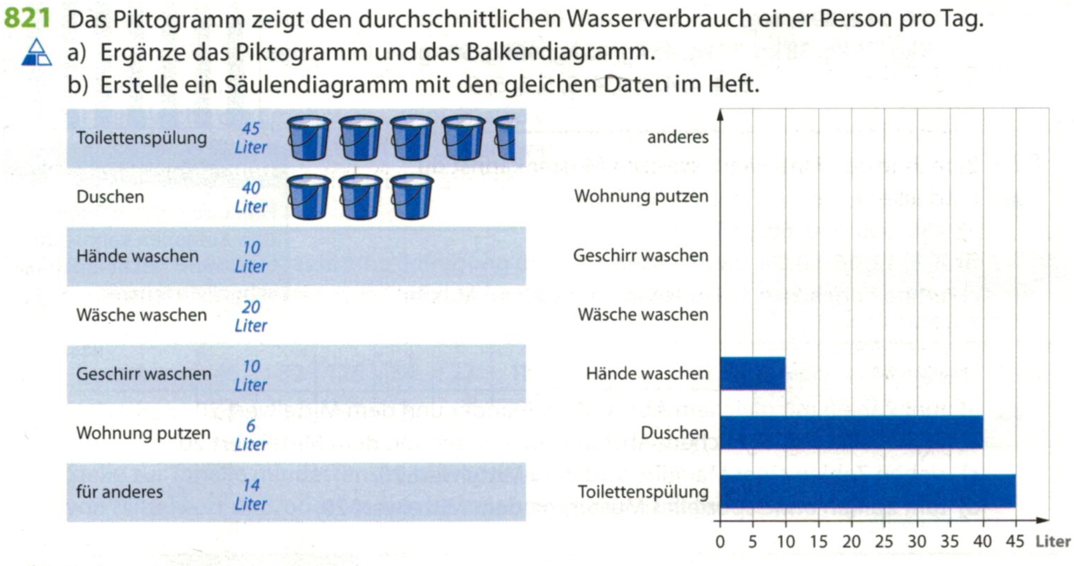


[93]

Ich finde diese Aufgaben, in denen eine Achse ergänzt werden muss, gewinnbringend, da es ein anderer Zugang ist als üblich. Weiters ist eine etwas andere Art des Denkens erforderlich, als wenn Diagramme immer nur komplett selbst gezeichnet oder interpretiert werden müssen. Um Diagramme vollständig zu verstehen, ist es auch notwendig, verschiede

[92] Mathematik verstehen 1, S. 272
[93] 100% Mathematik 1, S. 17

Kompetenzen im Umgang mit ihnen zu gewinnen, darum sind unterschiedliche Aufgabenstellungen vorteilhaft.
Eine weitere Aufgabe, die das AutorInnenteam rund um Beate Eßletzbichler meiner Meinung nach gut gewählt hat, ist die Folgende:



[94]

Einerseits finde ich es schön, dass einmal ein Piktogramm ergänzt werden muss, was nicht so häufig vorkommt. Andererseits gefällt mir, dass zwei (bzw. in b dann drei) verschiedene Diagrammtypen einander gegenüberstehen.

Alles in allem empfinde ich diesen Punkt im Schulbuch „100% Mathematik" als etwas besser umgesetzt, da einerseits etwas mehr Aufgaben vorhanden sind, und andererseits diese mir auch insgesamt besser gefallen.

6.4 Darstellungen erstellen, um Informationen verfügbar zu machen

Bietet das Schulbuch die Möglichkeit, das Erstellen von Darstellungen ausreichend zu lernen und zu üben?

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Tabelle:	7 Aufgaben	Tabelle:	3 Aufgaben
Balkendiagramme:	2 Aufgaben	Balkendiagramme:	6 Aufgaben

[94] 100% Mathematik 2, S. 207

Säulendiagramme:	14 Aufgaben	Säulendiagramme:	9 Aufgaben
Piktogramme:	Keine Aufgaben	Piktogramme:	1 Aufgabe
Prozentsteifen:	2 Aufgaben	Prozentstreifen:	1 Aufgabe[95]
Kreisdiagramme:	6 Aufgaben	Kreisdiagramme:	1 Aufgabe
Punktdiagramme:	Keine Aufgaben	Punktdiagramme:	3 Aufgaben
Stängel-Blatt-Diagramme:	2 Aufgaben	Stängel-Blatt-Diagramme:	Keine Aufg.[96]
Vierfeldertafeln:	3 Aufgaben	Vierfeldertafeln:	Keine Aufgaben
Beliebige:	7 Aufgaben	Beliebige:	15 Aufgaben
Insgesamt:	42 Aufgaben	Insgesamt	37 Aufgaben

Auffällig ist, dass im Schulbuch „Mathematik verstehen" fast keine Balkendiagramme erstellt werden müssen, dafür aber eine sehr große Zahl an Säulendiagrammen. Im Schulbuch „100% Mathematik" müssen zwar auch viele Säulendiagramme erstellt werden, allerdings auch einige Balkendiagramme.

Interessant ist, dass im Schulbuch „100% Mathematik 1-4" keine Vierfeldertafeln vorkommen. Da sie im Lehrplan nicht explizit erwähnt werden und auch in manchen anderen Schulbüchern der Unterstufe nicht vorkommen, scheinen diese auch nicht unbedingt nötig zu sein.

Weiters fällt auf, dass im Schulbuch „Mathematik verstehen" keine Aufgaben zu Streudiagrammen vorkommen. Diese werden nur auf der letzten Seite „erwähnt" und theoretisch eingeführt, allerdings beinhaltet das Schulbuch „Mathematik verstehen 3" keine Übungen und Aufgaben dazu. Da diese jedoch erst im Lehrplan der vierten Klasse explizite Erwähnung im Lehrplan finden, ist zu vermuten, dass Beispiele dazu im Schulbuch der vierten Klasse behandelt werden.[97]

[95] Prozentsteifen und Kreisdiagramme sind zwar im Schulbuch „100 % Mathematik" auch vorhanden, allerdings nur im Kapitel „Prozentrechnung", mit dem ich mich nicht beschäftige, und nicht im Kapitel „Statistik"

[96] Das Stängel-Blatt-Diagramm wird im Schulbuch „100% Mathematik" erst im vierten Band behandelt, in dem sich dann ebenfalls (wie im Schulbuch „Mathematik verstehen") 2 Aufgaben dazu befinden.

[97] Da das Schulbuch „Mathematik verstehen" zum momentanen Zeitpunkt noch nicht erschienen ist, lässt sich auch noch nicht sagen, ob und in welcher Form sich dieses Schulbuch mit Streu- und Punktdiagrammen beschäftigt, weswegen ich diesen kleinen Unterpunkt in meinem Vergleich nicht berücksichtigen kann.

Beim Schulbuch „Mathematik verstehen“ gefällt mir, dass mehr Aufgaben zu Prozentstreifen und Kreisdiagrammen vorkommen, die aus dem vorhergehenden Kapitel „Prozentrechnung“ wieder aufgegriffen werden. Diese Verbindung zur Statistik herzustellen finde ich vorteilhaft.

Beim Schulbuch „100 % Mathematik“ gefällt mir, dass auch eine Aufgabe zu Piktogrammen (Bilddiagrammen) vorkommt, in der ein solches selbst erstellt werden muss:

Aufgabe 21: „*Findet die Einwohnerzahl eures Heimatortes und eines Nachbarortes heraus (z.B. im Internet). Stellt die beiden Zahlen in einem Bilddiagramm dar*.“ [100% Mathematik 1, S. 15]

Ein weiterer Vorteil dieses Schulbuches ist die große Zahl an Aufgaben, in denen die Darstellungsart selbst gewählt werden muss, worauf ich im späteren Punkt „6.5 Darstellungen selbst beurteilen lassen“ noch genauer eingehen werde.

6.5 Darstellungen selbst beurteilen lassen

<u>Einführung:</u> Wird bei der Einführung erklärt, wann und in welchem Zusammenhang sich welche Diagrammarten besser eignen als andere?

<u>Aufgaben:</u> Kommen Aufgabenstellungen vor, in denen die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden müssen, welche Darstellungsart in welchem Zusammenhang am geeignetsten ist?

<u>Aufgaben mit Erklärung:</u> Wird in der Aufgabe eine Erklärung verlangt, warum welche Darstellungsart gewählt wird?

<u>Nur Erklärung:</u> Wird eine Begründung verlangt, warum in welchem Zusammenhang welche Darstellung besser oder schlechter ist?

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Einführung:	1 Erklärung	Einführung:	Keine Erklärungen
Aufgaben:	14 Aufgaben	Aufgaben:	15 Aufgaben
Aufgaben mit Erklärung:	7 Aufgaben	Aufgaben mit Erklärung:	2 Aufgaben
Nur Erklärung:	6 Aufgaben	Nur Erklärung:	4 Aufgaben

In diesem Unterpunkt schneidet das Schulbuch „Mathematik verstehen" meiner Meinung nach insgesamt etwas besser ab als das Schulbuch „100% Mathematik".

Schön finde ich einerseits die kurze Erklärung, bei welchen Häufigkeiten welche Diagrammtypen sinnvoller sind, die im Schulbuch „100% Mathematik" fehlt:

In der Praxis ist es oft sinnvoll, **absolute Häufigkeiten** in **Säulen-** oder **Balkendiagrammen** darzustellen.
Kreisdiagramme eignen sich vor allem für die Darstellung von **relativen Häufigkeiten**, da der ganze Kreis als 100 % gesehen werden kann, bei dem die einzelnen Anteile durch Sektoren hervorgehoben sind.
Bei einem **Prozentstreifen** stellt der gesamte Inhalt des rechteckigen Streifens 100 % dar, die Flächeninhalte der Teilrechtecke zeigen die einzelnen Anteile an. [98]

Weiters sind mehr Erklärungen zu den Aufgabenstellungen, aber auch ohne Aufgabestellungen gefragt. Beispielsweise finde ich die folgende „Aufgabe mit Erklärung" (11.08) und die Aufgabe zur „reinen Erklärung" (11.07) sehr schön:

11.08 Welche Diagrammart eignet sich am besten für die Darstellung
a) der täglichen Höchsttemperatur in einem Monat?
b) der Einwohnerzahl der Bundesländer Österreichs?
c) der Notenstatistik einer Schularbeit?
d) der monatlichen Niederschlagsmenge an einem bestimmten Ort?
e) der Verteilung der erdweiten Erdölreserven auf die betreffenden Staaten?
f) der Ergebnisse einer Landtagswahl?
g) der Anteile der jeweiligen Kontinente an der gesamten Landmasse der Erde?
Begründe die Antwort!

11.07 Jede Diagrammart bietet verschiedene Vor- und Nachteile. Vergleiche dahingehend die genannten Diagrammarten!
a) Säulendiagramme und Balkendiagramme
b) Balkendiagramme und Prozentstreifen
c) Kreisdiagramme und Säulendiagramme [99]

Natürlich gibt es auch Aufgaben im Schulbuch 100% Mathematik, wie zum Beispiel die folgende Aufgabe mit Begründung:

[98] Mathematik verstehen 2, S.168
[99] Mathematik verstehen 2, S. 266

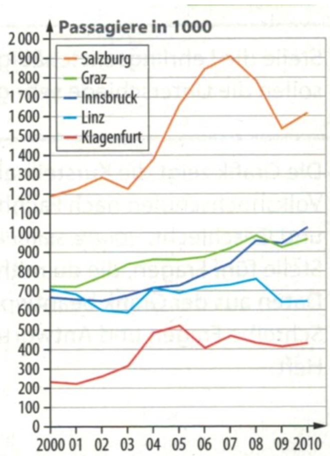
843 Diese zehn Städte gelten als die größten der Welt. In Klammern sind die ungefähren Einwohnerzahlen in Millionen angegeben: Tokio (35), Seoul (25), Mexico Stadt (24), New York (22), Mumbai (20), Sao Paolo (19), Manila (18), Jakarta (18), Delhi (18), Kairo (17)
Erstelle zu den Daten ein geeignetes Diagramm und begründe, warum du die jeweilige Diagrammart ausgewählt hast.

[100]

Auch die folgende Aufgabe, in der „nur“ begründet werden muss, passt zu diesem Thema:

59 Die Grafik zeigt die Passagierzahlen auf den wichtigsten Flughäfen Österreichs (außer Wien Schwechat).

a) Ungefähr wie viele Passagiere verzeichneten die Flughäfen zusammen im Jahr 2007 und im Jahr 2009?
b) Um wie viel Prozent hat sich die Passagierzahl von 2007 auf 2009 geändert?
c) Chiara meint: „Eigentlich ist es nicht ganz richtig, hier ein Liniendiagramm zu verwenden.“ Erika erwidert: „Schon, aber das Liniendiagramm hat hier gegenüber einem Säulendiagramm einen großen Vorteil.“
Was meinst du? Schreibe deine Überlegungen ins Heft.
d) Vergleiche die Zahlen mit den Zahlen des Flughafens Wien Schwechat. Suche dazu im Internet.



[101]

Dennoch ist die Dichte an für dieses Thema gut passenden Aufgaben im Schulbuch „Mathematik verstehen“ insgesamt höher und zumindest eine einführende Erklärung vorhanden.

6.6 Verfälschte Darstellungen „Manipulation von Daten“

6.6.1 Welche Manipulationsmöglichkeiten werden erwähnt?

Verwendete Begriffe:

Beispiele: Durchgerechnete Beispiele, die im Schulbuch „Mathematik verstehen“ immer wieder vorkommen.

[100] 100% Mathematik 2 S. 213

[101] 100% Mathematik 3, S. 25

Aufgaben: „Normale“ Aufgabenstellungen, die nicht durchgerechnet sind.

Werden die folgenden Manipulationsmöglichkeiten erwähnt?

	Mathematik verstehen	100% Mathematik
Achsen beginnen nicht bei Null:	JA	JA
Aufgaben:	2 Aufgaben	6 Aufgaben
Beispiele:	1 Beispiel	
Unterbrochene Säulen:	JA	NEIN
Aufgaben:	Keine Aufgaben	Keine Aufgaben
Beispiele:	1 Beispiel	
Verzerrung der Achsen:	NEIN	JA
Aufgaben:	keine Aufgaben oder Beispiele	3 Aufgaben
Verbale Verfälschung:	JA	JA
Aufgaben:	1 Aufgabe	1 Aufgabe
Nicht alle Daten verwendet:	NEIN	JA
Aufgaben:	Keine Aufgaben oder Beispiele	2 Aufgaben
Dreidimensionale Ansicht:	JA	NEIN
Aufgaben:	Keine Aufgaben	Keine Aufgaben
Beispiel:	1 Beispiel	
Verfälschen vs. Fälschen:	JA	NEIN
Aufgabe(n):	1 Aufgabe	Keine Aufgaben
Insgesamt:	7 Aufgaben und Beispiele	12 Aufgaben

Beide Schulbücher setzen sich mit diesem Thema zwar auseinander, doch könnten beide einigen Punkten noch mehr Beachtung schenken.

Der von Eichler und Vogel betonte Aspekt: „Es ist darauf zu achten, dass die Interpretation keine Aussagen enthält, die mit den Daten nicht eindeutig zu belegen sind.“, wird beispielsweise in beiden Schulbüchern in keiner Wiese erwähnt oder behandelt.

Im Schulbuch „Mathematik verstehen“ fehlt mir ein Überblick, welche Manipulationsmöglichkeiten es überhaupt gibt. Es kommt lediglich eine kurze Auflistung an prinzipiellen Möglichkeiten vor, die im Schulbuch nicht behandelt wurden.

> Durch Verzerrungen, den gezielten Einsatz von Farben, Fettdruck, aufwändigen Hintergrundbildern oder ausgeklügelten Achsenskalierungen lassen sich grafische Darstellungen statistischer Auswertungen recht leicht verfälschen, manchmal unabsichtlich, manchmal auch absichtlich. Es ist daher notwendig, sich die Daten genau anzusehen, damit man sich nicht von optischen Tricks täuschen lässt. [102]

Die betrachteten Möglichkeiten werden nur anhand von Beispielen oder Aufgaben abgehandelt.

Im Schulbuch „100% Mathematik“ kommt eine zusammenfassende Auflistung der wichtigsten Möglichkeiten vor, allerdings fehlen bei dieser Auflistung einige Aspekte. „Unterbrochene Säulen“ beispielsweise werden im ganzen Kapitel gar nicht erwähnt und fehlen daher auch bei der Auflistung, was schade ist.

> **Gewusst wie**
>
> **Manipulationen mit grafischen Darstellungen**
> Mit grafischen Darstellungen (zB Diagrammen) kann man Menschen besonders leicht täuschen. Betrachte graphische Darstellungen kritisch. Beliebte Methoden der Manipulation:
> - Die senkrechte Achse beginnt nicht beim Nullpunkt.
> - Die Skala auf der senkrechten Achse ist besonders stark gestreckt oder gestaucht.
> - Es wird nur der Teil der Daten verwendet, der für die eigenen Argumente passend ist.
>
> [103]

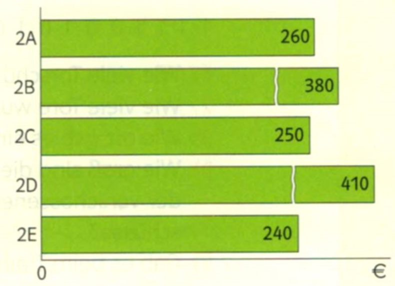
Des Weiteren wären graphische Veranschaulichungen der einzelnen Möglichkeiten gewinnbringend gewesen.
Trotzdem ist es vorteilhaft, dass diese Zusammenfassung überhaupt gemacht wurde.

Ein Vorteil des Schulbuches „Mathematik verstehen“ liegt darin, dass der eben erwähnte Aspekt der „Unterbrochenen Säulen oder Balken“ immerhin anhand eines Beispiels erwähnt wird, das hier im Folgenden abgebildet ist:

[102] Mathematik verstehen 2, S. 273
[103] 100% Mathematik 2, S. 219

11.22 Die fünf zweiten Klassen einer Schule sammeln für einen wohltätigen Zweck. Die Einnahmen werden in einem Balkendiagramm dargestellt. Auf den ersten Blick könnte man meinen, alle Klassen hätten annähernd gleich viel gesammelt. Stimmt das?

Lösung: Das stimmt nicht, da die Grafik keinen richtigen Eindruck erzeugt. Für die 2B und 2D wurde der zugehörige Balken durch Unterbrechungen optisch verkürzt.

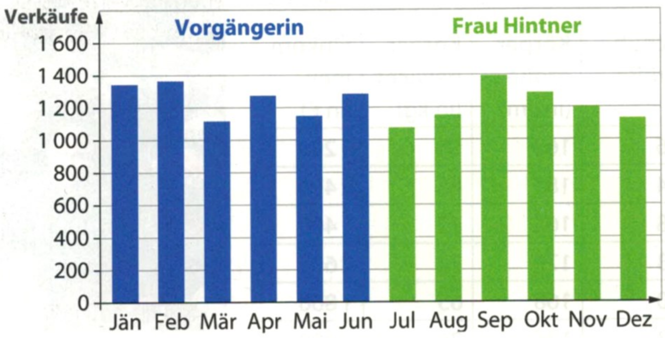


[104]

Weiters finde ich es gut, dass der Unterschied zwischen „Verfälschen“ und „Fälschen“ behandelt wird, was im Schulbuch „100% Mathematik“ nicht der Fall der ist.

Allerdings werden im Schulbuch „Mathematik verstehen“ die Punkte „Fehlende Daten“ und „Verzerrung der Achsen“ de facto nicht behandelt, was im Schulbuch „100% Mathematik“ schon der Fall ist. Die AutorInnen rund um Beate Eßletzbichler haben sich zu diesen Themen einige Aufgaben überlegt, wie beispielsweise die folgenden:

40 Frau Hintner hat am 1. Juli den Verkauf von Versicherungsverträgen von ihrer Vorgängerin übernommen. In einer Präsentation soll sie ihre Arbeit gut darstellen. Sie erstellt für das abgelaufene Jahr ein Säulendiagramm mit den Verkaufszahlen:



Für die Präsentation überlegt sie sich:
„Ich stelle einfach nur jeden zweiten Monat dar. Außerdem beginne ich erst bei März. Es sieht auch viel besser aus, wenn ich die Grafik bei 1 000 Verträgen beginnen lasse und die Skalierung verlängere.“
Erstellt das Diagramm, das Frau Hintner für ihre Präsentation verwendet. Zeichnet ins Heft oder arbeite mit einem Programm für Tabellenkalkulation. Das sind die genauen Daten:

Jän	Feb	März	April	Mai	Jun	Jul	Aug	Sept	Okt	Nov	Dez
1 342	1 364	1 115	1 273	1 146	1 282	1 072	1 151	1 392	1 287	1 201	1 128

I4 H4 K3

41 Beschreibt, wie sich der Eindruck vom ursprünglichen zum „manipulierten“ Diagramm ändert. [105]

[104] Mathematik verstehen 2, S. 272
[105] 100% Mathematik 3, S. 21

In dieser Aufgabe müssen sowohl Daten weggelassen, als auch die Skalierung verlängert werden, und die Schülerinnen und Schüler können erkennen, wie sich der Eindruck durch diese Manipulation ändert.

Alles in allem finde ich diesen (für mich wichtigen) Punkt im Schulbuch „100% Mathematik“ etwas besser umgesetzt, da es insgesamt mehr Aufgaben gibt und diesem Thema mehr Platz gewidmet wird.

6.6.2 Umgang mit manipulierten Darstellungen

Müssen die Schülerinnen und Schüler die Güte einer graphischen Darstellung selbst beurteilen und entscheiden, welche Grafik in welchem Zusammenhang vorteilhaft ist?

Zuordnen: Die Schülerinnen und Schüler müssen erkennen und zuordnen, in welchem Zusammenhang welche Manipulationen von Darstellungen gewählt werden und in welchem Zusammenhang diese Manipulationen für wen vorteilhaft sind.

Erstellen: Die Schülerinnen und Schüler müssen selbst manipulierte Darstellungen erstellen.

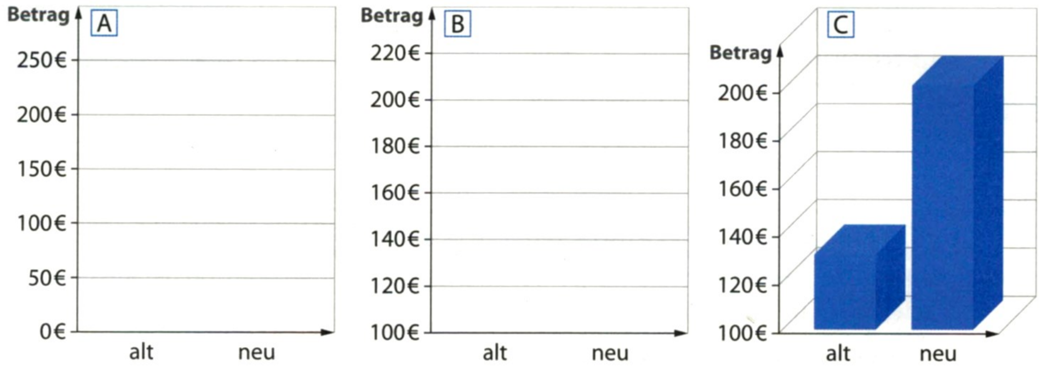
Erkennen: Die Schülerinnen und Schüler müssen Manipulationen erkennen.

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Zuordnen:	Keine Aufgaben	Zuordnen:	3 Aufgaben
Erstellen:	1 Aufgabe	Erstellen:	9 Aufgaben
Erkennen:	4 Aufgaben	Erkennen:	5 Aufgaben

Auch in diesem Punkt ist die größere Zahl an abwechslungsreicheren Aufgaben im Schulbuch „100% Mathematik“ erkennbar.

Es kommen einige Aufgaben zu allen drei Bereichen vor, und es werden viele Aspekte beachtet. Beispielsweise kommen auch Aufgaben zum „Zuordnen“ vor, wie die folgende, die im Schulbuch „Mathematik verstehen“ leider fehlen:

37 Die monatliche Familienbeihilfe für 10 bis 18-Jährige soll von 130 € auf 200 € erhöht werden. Das Ministerium möchte die Erhöhung als möglichst groß darstellen. Ergänze die Diagramme A und B mit Säulen. Welche Darstellung würdest du als Ministerin bzw. Minister verwenden? Begründe deine Entscheidung.



[106]

Die Schülerinnen und Schüler müssen in dieser Aufgabe entscheiden und begründen, warum sie für welchen Zusammenhang welche Darstellung wählen würden, was eine wichtige Kompetenz zum Thema Statistik ist.

Auch das „Erstellen" kann im Schulbuch „Mathematik verstehen" weniger gut geübt werden, da lediglich eine Aufgabe dazu gestellt wird, während das Schulbuch „100% Mathematik" neun Aufgaben beinhaltet. Die Aufgaben des Schulbuchs „100% Mathematik" sind natürlich viel abwechslungsreicher, da vielfältige Aufgaben bei einer einzigen Angabe kaum möglich sind. Dennoch finde ich diese Aufgabe gut gewählt:

11.26 Über die Zahl der Arbeitslosen in einer bestimmten Region liegt eine Tabelle vor:

Jahr	2012	2013	2014
Zahl der Arbeitslosen	9791	9883	10107

1) Zeichne eine Grafik, die einen kaum merkbaren Anstieg der Arbeitslosenzahl aufweist! Achte auf eine geeignete Skalierung der 2. Achse!
2) Zeichne eine Grafik, die einen deutlichen Anstieg der Arbeitslosenzahl aufweist! Achte auf eine geeignete Skalierung der 2. Achse!

[107]

Das Schulbuch „100% Mathematik" enthält allerdings ebenfalls gut gewählte Aufgaben, wie die folgende:

[106] 100% Mathematik 3, S. 20
[107] Mathematik verstehen 2, S. 273

61 Stelle die Lehrlingsentschädigungen von mindestens fünf Jugendlichen aus **60** zweimal dar. Einmal sollen die Unterschiede sehr groß, einmal recht klein erscheinen.

[108]

Die Schülerinnen und Schüler müssen bei den Aufgaben beider AutorInnenteams selbst überlegen, wie sie die Manipulation einsetzen, um den besten Effekt zu erzielen und das gewünschte Ergebnis bekommen. In der zweiten Aufgabe aus dem Schulbuch „100% Mathematik“ muss sogar die Art der Manipulation selbst gewählt werden, was noch eine Steigerung bezüglich selbstständigem Entscheiden darstellt.

Dem „Erkennen“ von Manipulationen widmen beide AutorInnenteams einige Beispiele. In beiden Schulbüchern fehlt mir die eine oder andere Manipulationsmöglichkeit, was ich im vorhergehenden Punkt näher erläutert habe. Die behandelten Aspekte zum Thema „Erkennen von Manipulationen“ finde ich jedoch in beiden Schulbüchern gut umgesetzt.

Wie im Punkt zuvor (6.6.2 „Welche Manipulationsmöglichkeiten werden erwähnt“), finde ich auch beim Umgang mit manipulierten Darstellungen insgesamt die Umsetzung im Schulbuch „100% Mathematik“ besser gelungen und damit alles in allem den Punkt 6.6 „Manipulationen von Daten“ im Schulbuch „100% Mathematik“ besser umgesetzt, da er umfangreicher behandelt wird, mehr Aufgaben beinhaltet, und es auch Zusammenfassungen gibt.

6.7 Datenerhebungen (Konsequenzen für den Unterricht)

Bietet das Schulbuch Aufgabenstellungen für eigene Datenerhebungen und Anregungen dafür? Wird erklärt, wie eine Datenerhebung durchgeführt werden könnte?

Mathematik verstehen		100% Mathematik	
Erklärung:	1 Erklärung (1. Klasse)	Erklärung:	1 Erklärung[109] (2. Klasse)
Aufgaben:	4 Aufgaben (3. Klasse)	Aufgaben:	4 Aufgaben (1.-3. Klasse)
Anregungen:	5 Anregungen (1. Klasse)	Anregungen:	6 Anregungen (2.-3. Klasse)

[108] 100% Mathematik 3, S. 26
[109] Es gibt eine Erklärung, die Teil eines Beispiels ist, und nicht als eigener Punkt beschrieben.

Beide AutorInnenteams haben sich bemüht, die Schülerinnen und Schüler zu eigenen Umfragen anzuregen, und eine Erklärung, Aufgaben und Anregungen in die Bücher einfließen lassen. In beiden Schulbüchern wurde dieser Punkt gut umgesetzt und es werden ausreichend Anregungen gegeben und Aufgaben gestellt.

Ein Vorteil des Schulbuches „Mathematik verstehen“ liegt auch in diesem Punkt wieder bei der „Erklärung“. Das AutorInnenteam stellt hier im Buch der 1. Klasse eine allgemeine „Checkliste für eine Umfrage“ zur Verfügung, in der alle wichtigen Punkte erwähnt werden, und die beim Durchführen jeder weiteren Umfrage zur Rate gezogen werden kann, und an der sich die Schülerinnen und Schüler orientieren können.

Checkliste für eine Umfrage:

1) Thema und Ziele formulieren
Zu welchem Thema wird die Befragung durchgeführt? Was wollen wir herausfinden? Worüber wollen wir Antworten finden? Wer führt die Umfrage durch? Wer wird bzw. wie viele Personen werden befragt?

2) Umfrage vorbereiten
Welche Fragen werden gestellt? Welche Antworten sind möglich (ja/nein; multiple choice, …)? Welche Personengruppe soll befragt werden, dh. welche Altersgruppe, in welchem Wohnort oder öffentlichen Platz usw. wird befragt? Wie werden die Personen für die Befragung ausgewählt? Wer ist bei der Durchführung der Umfrage wofür zuständig? Wer muss über die Befragung informiert werden?

3) Umfrage durchführen und auswerten
Wie werden die erhobenen Daten aufbewahrt? Wie werden die Daten ausgewertet? Welche Schlüsse können aus den Ergebnissen gezogen werden?

4) Ergebnisse präsentieren
- Thema, Ziele und Vorgangsweise der Umfrage erläutern
- Zahlen, Tabellen, Diagramme vorstellen
- Ergebnisse darstellen, auswerten und Folgerungen ziehen

[110]

In diesem Leitfaden für eine Umfrage werden sehr viele Aspekte beachtet. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich genau überlegen, was sie wollen - beispielsweise was sie überhaupt herausfinden wollen, welche Personen/Altersgruppe befragt werden soll, und welche Schlüsse aus den Ergebnissen gezogen werden können.

Im Schulbuch „100% Mathematik“ hingegen wird die Erklärung, worauf bei einer Umfrage geachtet werden soll, innerhalb eines Beispiels gegeben, weswegen sie auch deutlich kürzer

[110] Mathematik verstehen 1, S. 274

ausfällt als im Schulbuch „Mathematik verstehen“. Diesen Leitfaden für die Vorgehensweise für weitere Umfragen zu verwenden ist wohl nicht geplant und dafür eignet er sich auch weniger gut, allein schon, weil er innerhalb des Beispiels schlecht zu finden ist und keine extra Kennzeichnung besitzt.

844 Führt selbst eine statistische Erhebung in eurer Klasse durch. Entscheidet euch zunächst für ein Thema. Beispiele: Lieblingssportarten, Handyanbieter, Körpergröße, … Der Ablauf dieser Erhebung soll etwa so aussehen:
- Datenerhebung (Fragebogen, Zählung, Messung)
- Strichliste
- Tabelle mit absoluter und relativer Häufigkeit
- Bestimmung von Kennwerten (Minimum, Maximum, Spannweite, Median, Mittelwert)
- Darstellung in Diagrammen

[111]

Die Aufgaben an sich finde ich gut. Die Schülerinnen und Schüler müssen selbst entscheiden, welche Themen sie untersuchen wollen, allerdings werden ein paar Anregungen für mögliche Merkmale gegeben.

Auch im Schulbuch „Mathematik verstehen“ werden Anregungen gegeben, welche Themen von den Schülerinnen und Schülern untersucht werden könnten.

Vorschläge für Themen einer Umfrage:
- Wie gestaltet sich der tägliche Schulweg eines Schülers/einer Schülerin?
- Welche sportlichen Aktivitäten werden von Schülerinnen und Schülern ausgeübt?
- Wie viel Zeit wird täglich für Hausübungen und Wiederholungen aufgewendet?
- Welche Ess- und Trinkgewohnheiten haben Schülerinnen und Schüler?
- Wie viel Zeit sind Schülerinnen und Schüler täglich online?

[112]

Interessant ist, dass im Schulbuch „100% Mathematik“ in der ersten Klasse kaum Umfragen vorkommen. Es kommt lediglich eine Aufgabe vor, in der ein Fragebogen erstellt werden muss und dann gesammelte Daten in einer Urliste angegeben werden sollen [vgl. 100% Mathematik 1, S. 10]. Allerdings kommt keine „vollständige“ Umfrage, in der die Daten dann auch in einem Diagramm dargestellt und ausgewertet werden sollen, vor. Im Gegensatz dazu befindet sich der Leitfaden für die Umfrage und die Anregungen für mögliche Themen im Schulbuch „Mathematik verstehen“ im Buch der 1. Klasse.

[111] 100% Mathematik 2, S. 213
[112] Mathematik verstehen 1, S. 274

Nach Punkt 3.7 - „Konsequenzen für den Unterricht“ wäre es gut, wenn erste Erhebungen am Anfang bei der Einführung des Themas durchgeführt werden, weswegen ich hier einen Vorteil des Schulbuches „Mathematik verstehen“ sehe.

6.8 Resümee des Schulbuchvergleichs zum Thema „Statistik“

Beide Schulbücher haben dieses Kapitel im Großen und Ganzen sehr gut umgesetzt, und beide haben ihre Stärken und Schwächen. Beide AutorInnenteams haben sich zu den meisten Themen sehr viele und verschiedene Aufgaben überlegt, die somit ausreichend vorhanden sind.

Vorteile des Schulbuches „Mathematik verstehen“:
Wie im vorhergehenden Kapitel, der „Bruchrechnung“, fällt auch hier wieder auf, dass im Schulbuch „100% Mathematik“ im Gegensatz zum Schulbuch „Mathematik verstehen“ nicht sehr viele Erklärungen vorkommen, und viele einfache Dinge eher anhand von Aufgabenstellungen selbst gelernt und erarbeitet werden sollen.
Ich persönlich erachte Erklärungen als etwas Wichtiges, und empfinde diesen Vorteil darum als bedeutend.

Im Punkt „Darstellungen selbst beurteilen lassen“ hat das Schulbuch ebenfalls seine Vorteile, da es einerseits auch Erklärungen enthält, andererseits mehr vielfältige Aufgaben enthält.

Weiters fällt im Kapitel „Datenerhebungen“ der Vorteil der eigenen Checkliste auf, die im Schulbuch „100% Mathematik“ fehlt. Ein weiterer Vorteil dieses Kapitels ist, dass im Schulbuch „Mathematik verstehen“ viele Erhebungen wirklich schon in der ersten Klasse vorkommen, sodass sie dem im Punkt 3.7 geäußerten Wunsch, den Beginn mit eigenen Datenerhebungen einzuleiten, gerecht werden.

Vorteile des Schulbuches „100% Mathematik“:
Im manchen Bereichen empfinde ich die Aufgaben des Schulbuchs „100% Mathematik“ als „kreativer“ und außergewöhnlicher. Beispielsweise die in Kapitel 6.3.1 erwähnte Aufgabe 856, in der es um die durchschnittliche Bewertung einer Handy-App geht, ist wirklich aus dem Alltag der Schülerinnen und Schüler gegriffen und etwas Neues.

Im Bereich „Darstellungen ergänzen“ kommen mehr Aufgaben vor, die selbst ergänzt werden müssen als im Schulbuch „Mathematik verstehen“ und Piktogramme und Streudiagramme müssen auch selbst erstellt werden, was im Schulbuch „Mathematik verstehen“ nicht der Fall ist.

Im Kapitel „Verfälschte Darstellungen“ schneidet das Schulbuch ebenfalls besser ab, da es mehr Aufgaben beinhaltet, die auch insgesamt vielfältiger gestaltet sind. Weiters wird dem Kapitel auch generell mehr Platz gewidmet und mehr Bedeutung beigemessen.
Da ich, wie bereits im „allgemeinen Teil“ erwähnt, dieses Thema für sehr wichtig halte, weil es ein immer wieder in Medien und Werbungen auftretendes Phänomen ist, empfinde ich diesen Vorteil als bedeutend.

SCHLUSSWORT

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass graphische Darstellungen im Mathematikunterricht wirklich eine bedeutende Rolle spielen sollten und auch tatsächlich spielen.

Für das Aufnehmen und längerfristige Behalten der Lerninhalte ist vor allem die Kombination aus graphischen Darstellungen und akustischen Erklärungen vorteilhaft, weswegen visuelle und akustische Informationen im Unterricht so oft wie möglich kombiniert werden sollten. Hierbei ist der gesamte visuelle Sinneskanal gemeint, also einerseits visuelle Darstellungen und Zeichnungen, andererseits aber auch geschriebene Worte (beispielsweise an der Tafel).

Der Umgang mit graphischen Darstellungen, wie das Erfassen, Wiederaufgreifen Variieren, Finden und Beurteilen graphischer Darstellungen, was das Interpretieren und Erstellen beinhaltet, sollte im Unterricht bewusst eingeführt und ausreichend geübt werden. Vor allem schematische Darstellungen zu lesen muss erst gelernt werden, da diese nicht an die Alltagserfahrungen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen.
Weiters ist es in der Statistik notwendig zu lernen, wie man Diagramme lesen und interpretieren kann. Außerdem ist es wichtig, Manipulationen erkennen zu können, da diese im Alltag von großer Bedeutung sind und manipulierte Diagramme und Darstellungen in den Medien (wie Zeitungen, Werbungen oder Fernsehen) immer wieder vorkommen.

Außerdem sollten den Schülerinnen und Schülern die Vorteile graphischer Darstellungen bewusstgemacht werden:
Einerseits können sie das Verständnis fördern und als „Veranschaulichungsmittel“ dienen, die einen Sachverhalt klarer darstellen und die Vorstellung erleichtern.
Andererseits können sie als „Hilfe zum Lösen von Aufgaben“, beispielsweise bei Problemlöseprozessen, eine wichtige Rolle spielen.
Die Schülerinnen und Schüler sollen dadurch selbst zum graphischen Veranschaulichen angeregt werden, da viele Schülerinnen und Schüler das graphische Veranschaulichen meiden, und das algebraische Rechnen bevorzugen, da dieses einfacher nach „Schema“ durchgeführt werden kann.

Am Beispiel der Bruchrechnung wurden einige Möglichkeiten vorgestellt, wie graphische Darstellungen als Veranschaulichungsmittel positiven Einfluss auf das Verständnis haben können – beispielsweise durch Auslösen kognitiver Konflikte.
Das anschauliche Anwenden von Darstellungen sollte einerseits zu Beginn des Erlernens einer Regel, andererseits aber auch „zwischendurch“, wenn die Regel bereits geübt wurde, eingebaut werden. Das soll helfen, die Regel zu verinnerlichen. Außerdem soll dadurch verhindert werden, dass die Schülerinnen und Schüler die Formeln nur „auswendig lernen“ und Regeln befolgen, deren Sinn sie längst wieder vergessen haben, und die sie gar nicht verstehen.

Auch die Bedeutung von Darstellungswechseln ist natürlich nicht zu vernachlässigen. Duval spricht von „Conversions“ und „Treatments“. Vor allem den „Conversions“, die einen Wechsel zwischen zwei Ebenen beschreiben, schreibt er große Bedeutung zu, da sie einiges an mathematischem Grundwissen erfordern. Aber auch Treatments innerhalb der Ebene der graphischen Darstellungen spielen eine nicht unbedeutende Rolle, wenn es beispielsweise um Begründungen für Flächeninhaltsformeln oder um das Variieren von Funktionsgraphen geht.
Da solche Darstellungswechsel – vor allem die Conversions – den Schülerinnen und Schülern in der Regel eher schwerfallen, sollten diese im Unterricht explizit behandelt und ausreichend trainiert und geübt werden.

Natürlich dürfen auch die Schwierigkeiten bei der Arbeit mit graphischen Darstellungen nicht unter den Teppich gekehrt werden:

Einerseits können schlechte oder unvorteilhafte Visualisierungen zu falschen Annahmen führen, oder den Blick einschränken. Andererseits ist das Beweisen mit Visualisierungen schwierig. Es muss darauf geachtet werden, womit überhaupt veranschaulicht werden kann, und dass das Übertragen gelingt. Schlechte Visualisierungen sind auf jeden Fall zu vermeiden.

Die Ziele der Arbeit mit graphischen Darstellungen und einige weitere Aspekte des ersten Teils wurden in einem Leitfaden für den Schulbuchvergleich zusammengefasst, und bilden das Grundgerüst für den im zweiten Teil durchgeführten Schulbuchvergleich:

Die beiden im zweiten Teil behandelten Schulbücher der AHS-Unterstufe bieten insgesamt reichlich Möglichkeiten für die Umsetzung der Ziele. Die wesentlichen Punkte (wie etwa der Lehrplan) sind in beiden Büchern ausreichend beachtet. Beide Schulbücher verwenden eine große Zahl an Bildern und graphischen Darstellungen. Die Möglichkeit, das Interpretieren und Erfassen zu lernen, ist in beiden Schulbüchern ausreichend gegeben.

Das Auffordern zum Veranschaulichen im Kapitel „Bruchrechnung“ könnte in beiden Schulbüchern mehr forciert werden. Auch der Punkt „Darstellungen selbst beurteilen lassen“ in diesem Kapitel wird eher vernachlässigt. Was in beiden Schulbüchern gut umgesetzt ist, ist der Punkt „Darstellungswechsel“, wobei vor allem die Möglichkeit zum Üben von „Conversions“ in beiden Schulbüchern ausreichend geboten wird.

Im Kapitel „Statistik“ fällt in beiden Schulbüchern die große Anzahl an Aufgaben auf, die das ausreichende Üben ermöglichen. Beide Schulbücher könnten meiner Meinung nach den Punkt „Manipulationsmöglichkeiten in der Statistik“ mehr ausbauen und ihm mehr Beachtung schenken, da dieser Punkt – wie bereits öfter erwähnt – meiner Meinung nach auch für den Alltag der Schülerinnen und Schüler von großer Bedeutung ist bzw. sein kann.

Beide Schulbücher haben ihre Stärken und Schwächen:
Das Schulbuch „Mathematik verstehen“ zeichnet sich vor allem durch die ausführlich und übersichtlich gestalteten Einführungen und durchgerechneten Beispiele aus, die auch viele graphische Darstellungen erklären, und den Umgang mit ihnen veranschaulichen.

Im Schulbuch „100% Mathematik“ fehlen diese Einführungen und durchgerechneten Beispiele zwar, jedoch liegt in diesem Schulbuch der Fokus eher auf dem selbstständigen Erarbeiten von Sachverhalten, und damit auch auf dem Umgang mit graphischen Darstellungen in verschiedenen Formen. Der Vorteil dieses Schulbuches liegt meines Erachtens in den vielfältigen und kreativen Aufgaben zu verschiedensten Aspekten der graphischen Darstellungen.

Welches Schulbuch „besser“ oder „schlechter“ ist, ist natürlich Geschmackssache und lässt sich nicht allgemein sagen. Fakt ist, dass beide Schulbücher den graphischen Darstellungen offensichtlich einiges an Bedeutung zuschreiben, und den Schülerinnen und Schülern das

Interpretieren, selbst Darstellen und teilweise auch das Beurteilen im Großen und Ganzen ausreichend ermöglichen.

LITERATURVERZEICHNIS:

BENESCH, Thomas. (2006). Statistik zum Anfassen. *Edition nove in der novum Verlag GmbH, Wien-München*

BERTIN, Jacques. (1982). Graphische Darstellungen und die graphische Weiterverarbeitung von Information. *Walter de Gruyter & Co., Berlin*

BIEHLER, Rolf. (1985). Die Renaissance graphischer Methoden in der angewandten Statistik. *In: H. Kautschitsch & W. Metzler(Hrsg.). Anschauung und mathematische Modelle. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 9-58*

BOECKMANN, Klaus. (1982). Warum soll man im Unterricht visualisieren? Theoretische Grundlagen der didaktischen Visualisierung. *In: H. Kautschitsch & W. Metzler(Hrsg.). Visualisierung in der Mathematik. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 11-34*

BÜCHTER, Andreas; HENN, Hans-Wolfgang. (2010). Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. *Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg*

DREHER, Anika. (2013). In: Jasmin Sprenger, Anke Wagner und Marc Zimmermann (Hrsg.). Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule. *Springer Fachmedien, Wiesbaden, S. 215-224*

DUVAL, Raymond. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *In: Educational Studies in Mathematics. Springer Verlag, Boulogne-sur-Mer, S. 103-131.*

EICHLER, Andreas; VOGEL, Markus. (2013). Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. *Springer Fachmedien, Wiesbaden. 2. Auflage*

HANISCH, Günther. (1984). Visuelle Vorstellungen. *In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.). Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 122-132*

HANISCH, Günther. (1985). Gefahren der Visualisierung. In: H. Kautschitsch & W. Metzler(Hrsg.). Anschauung und mathematische Modelle. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 99-110

KAUTSCHITSCH, Hermann. (1991). Anschauliches Rechnen. In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.). Anschauliche und Experimentelle Mathematik 1. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 97-108

KAUTSCHITSCH, Hermann. (1994). Friedrich Wille und die Klagenfurter Sommerworkshops zur Visualisierung in der Mathematik. *In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.). Anschauliche und experimentelle Mathematik 2. Verlag Hölder- Pichler-Tempsky, Wien*, *S. 7-12*

KNOCHE, Norbert; WIPPERMANN, Heinrich. (1986). Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis. *Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Zürich*

KREMPEL, Lothar. (2005). Visualisierung komplexer Strukturen. *Campus Verlag GmbH, Frankfurt/Main*

KRITZENBERGER, H., & Roth, M. (2005). Multimediale und interaktive Lernräume. *De Gruyter Oldenbourg, München*

KUNTZE, Sebastian. (2013). Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht. *In: Jasmin Sprenger, Anke Wagner und Marc Zimmermann (Hrsg.). Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule. Springer Fachmedien, Wiesbaden, S. 17-31*

KÜTTING, Herbert; SAUER, Martin. (1999; 2011). Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 3. Auflage 2011

LAAKMANN, Heinz. (2013). Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung. Eine Untersuchung in rechenunterstützten Lernumgebungen. *Springer Spektrum, Wiesbaden*

LORENZ, Jens Holger. (1992). Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht – Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Verlag für Psychologie, Göttingen

MALLE, Günther. (1983). Problemlösen und Visualisieren in der Mathematik. *In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.). Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 65-121*

MALLE, Günther. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. *Friedr. Vieweg&Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden*

MARSCHNER-FRANZKE, Kerstin. (1991) Gedanken zum experimentellen graphischen Arbeiten im Mathematikunterricht. *In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.). Anschauliche und Experimentelle Mathematik 1. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 223-246*

NITSCH, Renate. (2015). Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. *Springer, Wiesbaden*

PADBERG, Friedhelm. (2009). Didaktik der Bruchrechnung. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 4 Auflage

PETERS, Wilhelm. (1991). Geometrie als Propädeutik der formalen Systeme. In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.). Anschauliche und Experimentelle Mathematik 1. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 27-50

PROFKE, Lothar. (1994). VERANSCHAULICHEN. nicht nur Visualisieren. *In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.). Anschauliche und experimentelle Mathematik 2. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien*, *S.13-30*

PÜHRINGER, Gabriel. (2012). „M&M – Muster und Mathematik" Möglichkeiten für den Unterricht in der Sekundarstufe 1 und 2. *Diplomarbeit an der Universität Wien*

REISS, Kristina; HAMMER, Christoph. (2013). Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe. Springer, Basel

SACHSE, Pierre; FURTNER, Marco. (2010). Visuelle Wahrnehmung – Grundlagen, Phänomene, Erklärungen. In: Theo Hug, Andreas Kriwak (Hrsg.). Visuelle Kompetenz – Beiträge des interfakultären Forums Innsbruck Media Studies. Innsbruck university press, Universität Innsbruck. 1. Auflage

SCHERRMANN, Alexandra. (2013). Veranschaulichungen statistischer Daten verstehen. Eine Herausforderung für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1. *In: Jasmin Sprenger, Anke Wagner und Marc Zimmermann (Hrsg.). Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule. Springer Fachmedien, Wiesbaden, S. 161-175*

SCHUMANN, Heidrun; MÜLLER, Wolfgang. (2000). Visualisierung. *Springer-Verlag. Berlin Heidelberg*

STRUNZ Kurt. (1968). Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht. *Quelle&Meyer, Heidelberg*

THIESEMANN, Friedel. (1991). Zur Entwicklung ausgewählter Komponenten der Raumanschauungsfähigkeit in später Kindheit und Adoleszenz. In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.). Anschauliche und Experimentelle Mathematik 1. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 87-96

TILL, Christoph; SPROESSER, Ute. (2013). Eine Grafik sagt mehr als 1000 Worte?! Über den Einsatz von Repräsentationen in der Stochastik. *In: Jasmin Sprenger, Anke Wagner und Marc Zimmermann (Hrsg.). Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen.*

Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule. Springer Fachmedien, Wiesbaden, S. 205-212.

VINCENZ, Sabrina. (2012). WIE VIEL PROZENT SIND DAS? - Grundvorstellungen zu Prozent- und Bruchrechnung. *Diplomarbeit an der Universität Wien*

WEIGAND, Hans-Georg et al. (2009, 2014). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe 1. *Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2. Auflage*

WILLE, Friedrich. (1982). Die mathematische Anschauung: Ihre Ziele, Möglichkeiten und Techniken. *In: H. Kautschitsch & W. Metzler(Hrsg.). Visualisierung in der Mathematik. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 35-78*

WILLE, Friedrich. (1985). Räumliches mathematisches Zeichnen in Unterricht und Vorlesung. *In: H. Kautschitsch & W. Metzler(Hrsg.). Anschauung und mathematische Modelle. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S. 145-162*

WOLLRING, Bernd. (1994). Räumliche Darstellungen bei Kindern und Heranwachsenden: Erfahrungen mit Bildern und Methoden. *In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.). Anschauliche und experimentelle Mathematik 2. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, S.67-86*

Schulbücher:

Eßletzbichler, Beate; Höller, Christine; Lechner, Peter; Luksch, Julia; Niedertscheider, Franz. (2014). 100% Mathematik 1. *Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co, Wien, 1. Auflage (Lizenzausgabe)*
Ursprünglich: 2006, Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart

Eßletzbichler, Beate; Höller, Christine; Lechner, Peter; Luksch, Julia; Mayerhofer, Sandra; Niedertscheider, Franz. (2014). 100% Mathematik 2. *Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co Wien, 1. Auflage (Lizenzausgabe)*
Ursprünglich: 2006, Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart

Eßletzbichler, Beate; Höller, Christine; Lechner, Peter; Luksch, Julia; Mayerhofer, Sandra; Niedertscheider, Franz. (2015). 100% Mathematik 3. *Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co Wien, 1. Auflage (Lizenzausgabe)*
Ursprünglich: 2007, Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart

SALZGER, Bernhard; BACHMANN, Judith; GERM, Andrea; RIEDLER, Barbara; SINGER, Klaudia; ULOVEC, Andreas. (2014). Mathematik verstehen 1. *Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage*

SALZGER, Bernhard; BACHMANN, Judith; GERM, Andrea; RIEDLER, Barbara; SINGER, Klaudia; ULOVEC, Andreas. (2015). Mathematik verstehen 2. *Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage*

SALZGER, Bernhard; BACHMANN, Judith; GERM, Andrea; RIEDLER, Barbara; SINGER, Klaudia; ULOVEC, Andreas. (2016). Mathematik verstehen 3. *Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage*

MALLE, Günther; KOTH, Maria; WOSCHITZ, Helge; MALLE, Sonja; SALZGER, Bernhard; ULOVEC, Andreas. Mathematik verstehen 5. *Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage*

FLODERER, Manfred; FISCHER Christine; MAROUNEK, Renate. (2012). Mach mit Mathematik 1. *Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage*

FLODERER, Manfred; FISCHER Christine; MAROUNEK, Renate; OBERHAUSER, Rosa. (2012). Mach mit Mathematik 2. *Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage*

Internetadressen

BIFIE-Aufgabenpool Oberstufe:
https://aufgabenpool.bifie.at/srp_ahs/index.php (01.06.2016)

http://de.bettermarks.com/mathe-portal/mathebuch/manipulationen.html (12.06.2016)

http://www.familiethon.de/christina/projekt/medien/medien_06.htm (27.06.2016)

HANISCH, Günter; SATTELBERGER, Eva. (2008). Neuropsychologische Grundlagen der Mathematikdidaktik. In: Didaktikhefte Band 41.

http://www.krone.at/oesterreich/wien-schon-9815-tuerken-erhalten-mindestsicherung-enorme-kosten-story-523262 (16.08.2016)

http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2008%20Band%2041/VortragHanischSattlberger.pdf (06.06.2016)

Lehrplan Mathematik:
https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?5h6vwg (12.07.2016)

http://www.mathe-online.at/lernpfade/Lernpfad796/?kapitel=3&navig=l (08.06.2016) http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/verm.htm (06.06.2016)

http://oe1.orf.at/programm/435094 (09.06.2016)

http://sciencev1.orf.at/news/150078.html (12.06.2016)

https://www2.hu-berlin.de/wsu/ebeneI/superworte/medien/kriterien.pdf (14.06.2016)