DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Wie man den Sieger eines Tennisspiels berechnet -

Stochastische Überlegungen zu Tennis und im Schulunterricht

verfasst von / submitted by

Lisa Brunner

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 456
Studienrichtung lt. Studienblatt: degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramt UF Mathematik und UF Geographie & Wirtschaftskunde
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benützung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.
Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.
Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Wien, Mai 2017

(Unterschrift)

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird in dieser Diplomarbeit nur die männliche Form verwendet. Es wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die ausschließliche Verwendung der männlichen Form geschlechtsunabhängig verstanden werden soll.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung **6**

2.1 Grundlegende Begriffserklärungen . . . 6

2.2 Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit . . . 6

2.3 Laplace'sche Wahrscheinlichkeit . . . 7

2.4 Ziehen geordneter Stichproben . . . 9

2.4.1 Ziehen geordneter Stichproben mit Zurücklegen . . . 9

2.4.2 Ziehen geordneter Stichproben ohne Zurücklegen . . . 10

2.5 Ziehen ungeordneter Stichproben . . . 12

2.5.1 Ziehen ungeordneter Stichproben ohne Zurücklegen . . . 12

2.5.2 Ziehen ungeordneter Stichproben mit Zurücklegen . . . 13

2.6 Kombinatorik . . . 13

2.6.1 Anordnungsmöglichkeiten von n Elementen . . . 14

2.6.2 Auswahlmöglichkeiten aus n Elementen . . . 15

2.6.3 Laplace'sche Wahrscheinlichkeit mittels Binomialkoeffizient . . . 16

2.7 Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . 17

2.8 Diskrete Zufallsvariable . . . 18

2.8.1 Definition einer Zufallsvariable . . . 18

2.8.2 Definition einer diskreten Zufallsvariable . . . 19

2.8.3 Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable . . . 20

2.8.4 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable . . . 22

2.8.5 Varianz und Streuung einer diskreten Zufallsvariable . . . 22

2.8.6 Erwartungswert und Varianz bei Summen und Produkten diskreter Zufallsvariablen . . . 24

2.9 Spezielle diskrete Verteilungen . . . 25

2.9.1 Die geometrische Verteilung . . . 25

2.9.2 Die Binomialverteilung . . . 26

2.9.3 Die Poisson-Verteilung 28
2.10 Stetige Zufallsvariable 29
2.10.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable 29
2.10.2 Erwartungswert und Varianz einer stetigen Zufallsvariable 31
2.11 Die Normalverteilung 31
2.11.1 Normalverteilung und Standardnormalverteilung 32
2.11.2 Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten einer N(0,1)-verteilten Zufallsvariable mittels der Φ-Tabelle 33
2.11.3 Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable mittels der Φ-Tabelle 35
2.11.4 Lösen von Umkehraufgaben mittels der Φ-Tabelle 37
2.11.5 Anwendungsaufgaben zur Normalverteilung 38
2.12 Die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung 42
2.12.1 γ-Streubereiche für die absolute und relative Häufigkeit einer binomialverteilten Zufallsvariable 43
2.12.2 Systematisches Lösen von Anwendungsaufgaben zur Binomialverteilung mittels der Normalverteilung 44
2.13 Testen von Hypothesen 46
2.13.1 Testen von Hypothesen bei gegebenem Ablehnungsbereich 46
2.13.2 Testen von Hypothesen bei gegebener Irrtumswahrscheinlichkeit 48
2.13.3 Alternativhypothesen 49

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung im Tennis **51**
3.1 Spielregeln 51
3.2 Gewinnwahrscheinlichkeit im Tennis 52
3.3 Matchgewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Satzgewinnwahrscheinlichkeit 56
3.4 Gewinnwahrscheinlichkeit bei Aufschlag 59
3.5 Durchschnittlich gespielte Punkte pro Game 65
3.6 Besonderheiten im Doppel 66
3.6.1 Gewinnwahrscheinlichkeit im Doppel 66
3.6.2 Zu erwartende Dauer eines Doppels 69
3.7 Problem der abgebrochenen Partien 70
3.8 Auswertung aller bisherigen Wimbledon Tennisfinale 75

4 Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht **78**
4.1 Wahrscheinlichkeitsrechnung im Lehrplan 78

4.2 Analyse von Schulbuchaufgaben . . . 81
4.3 Schülerschwierigkeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . 85
4.4 Mittels Stochastik das kritische Denken der Schüler fördern . . . 86
4.5 Beispielaufgaben für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung . . . 87
4.5.1 Beschreibende Statistik . . . 88
4.5.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . 93
4.5.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . 95
4.5.4 Schließende Statistik . . . 98
4.5.5 Typ-2-Aufgaben . . . 99

5 Fazit **103**

6 Literaturverzeichnis **105**

7 Abbildungsverzeichnis **108**

8 Tabellenverzeichnis **110**

9 Abstract **111**

10 English Abstract **112**

Kapitel 1

Einleitung

Die Mathematik und der Sport sind eng miteinander verknüpft. Das eine würde es ohne das andere nicht geben und umgekehrt. In der Schule hat man als Lehrkraft oft das Problem, dass die Schüler wenig Interesse an den komplexen Kontexten der Textaufgaben haben. Aus diesem Grund sollte man die Schüler darauf aufmerksam machen, dass in ihrer unmittelbaren Umgebung alles von der Mathematik beeinflusst wird. Dies kann man ihnen am einfachsten verdeutlichen, wenn man in der Schule Textaufgaben im Zusammenhang mit Sportarten rechnet, die die Schüler selbst betreiben.

Tennis ist im Fernsehen ein – im Vergleich zu vielen anderen Sportarten – recht präsenter Sport. Aus diesem Grund handelt die vorliegende Diplomarbeit von der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Gewinnwahrscheinlichkeiten im Tennissport sowie der Anwendbarkeit von Tennisaufgaben in der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule.

Zu Beginn der Arbeit werden die grundlegenden Begriffe und Definitionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (von der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit bis zum Testen von Hypothesen) wiederholt. Im Anschluss gibt es eine Erklärung der Regeln und der Zählweise im Tennis. Daran schließt eine Analyse der Gewinnwahrscheinlichkeiten, der durchschnittlich gespielten Punkte pro Spiel und der Besonderheiten eines Doppels (Spiel mit vier Spielern) an. Abschließend wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule betrachtet: Vom Lehrplan über die Schwierigkeiten von Schülern mit dieser Materie bis zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung. Im Rahmen der Beschäftigung mit der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung wurden Aufgaben erstellt, welche mit Schülern in der Sekundarstufe II gerechnet werden können und den Anforderungen der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung entsprechen.

Kapitel 2

Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Grundlegende Begriffserklärungen[1]

Bei einem **Zufallsexperiment** hängt das Ergebnis vom Zufall ab, das bedeutet, wir wissen vor der Durchführung des Experiments nicht, welches Ergebnis eintreten wird. Beispiele für Zufallsexperimente sind das Werfen einer Münze oder eines Würfels.

Unter einem **Ereignis** verstehen wir jene möglichen Versuchsausgänge, die eintreten können, aber nicht müssen. Diese Ereignisse bezeichnen wir mittels Großbuchstaben. Jenes Ereignis, welches bei jeder Durchführung des Zufallsexperimentes eintritt, nennen wir das **sichere Ereignis** und wir schreiben dafür Ω.

Beispiel: Wir werfen einen Würfel. Mögliche Versuchsergebnisse sind die Augenzahlen von 1 bis 6. Somit gilt: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Ist das Ereignis A “eine gerade Augenzahl wird geworfen", so tritt A genau dann ein, wenn entweder die Augenzahl 2, 4 oder 6 geworfen wird. Also gilt $\Omega = \{2, 4, 6\}$

2.2 Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit[2]

Der russische Mathematiker Kolmogoroff führte 1933 den Wahrscheinlichkeitsbegriff axiomatisch wie folgt ein:

> Eine auf einem System von Ereignissen definierte Funktion P heißt Wahrscheinlichkeit, wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:
> *Axiom 1*: Die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses A ist eine eindeutig bestimmte,

[1] vgl. Bosch (1976): 1.
[2] vgl. Bosch (1976): 8-10.

nicht negative reelle Zahl, die höchstens gleich 1 sein kann.

Axiom 2: Das sichere Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit 1.

Axiom 3: Für paarweise disjunkte Ereignisse $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (σ- Additivität).

Aus diesen Axiomen lassen sich folgende Eigenschaften ableiten:

- Für jedes Ereignis A gilt $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Das unmögliche Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit 0.
- Aus $A \subset B$ folgt $P(A) \leq P(B)$.
- Für beliebige Ereignisse A und B gilt $P(B\backslash A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$.
- Für beliebige Ereignisse A und B gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Sind die Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ paarweise unvereinbar, so gilt $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

2.3 Laplace'sche Wahrscheinlichkeit[3]

Bei der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit haben alle möglichen Ereignisse eines Zufallsexperiments dieselbe Wahrscheinlichkeit p.

Wir betrachten also allgemein ein Zufallsexperiment, bei dem Ω aus m verschiedenen Versuchsergebnissen besteht. Das sichere Ergebnis lässt sich folgendermaßen darstellen

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\} \text{ (m endlich)}$$

Da alle m Ereignisse dieselbe Wahrscheinlichkeit p besitzen, gilt

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = ... = P(\{\omega_m\}) = p$$

Aus

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$$

folgt

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + ... + P(\{\omega_m\}) = p + p + ... + p = m * p$$

[3] vgl. Bosch (1976): 12-13.

Somit ergibt sich

$$p = \frac{1}{m}$$

Allgemein: Ein Ereignis A, welches aus r verschiedenen Versuchsergebnissen besteht, mit

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_r}\}$$

hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + ... + P(\{\omega_{i_r}\}) = r * p = \frac{r}{m}$$

Für die Wahrscheinlichkeit P(A) ergibt sich somit

$$P(A) = \frac{r}{m} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der insgesamt möglichen Fälle}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Anwendbar ist die Laplace-Wahrscheinlichkeit nur, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- nur endlich viele Versuchsergebnisse sind möglich und
- alle Ereignisse besitzen dieselbe Wahrscheinlichkeit.

Beispiel: Wir haben einen Würfel und aufgrund seiner symmetrischen Eigenschaften können wir davon ausgehen, dass keine der Augenzahlen bevorzugt auftritt. Alle sechs Ereignisse besitzen somit dieselbe Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

Beispiel: Wir wollen die Wahrscheinlichkeit ermitteln, mit derer wir beim Würfeln eine ungerade Augenzahl erhalten. Es gibt drei günstige Fälle: $A = \{1, 3, 5\}$. Mögliche Fälle gibt es sechs: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Somit folgt mittels der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit, dass $P(\text{ungerade Augenzahl}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Augenzahl $\frac{1}{2}$ bzw. 50%.

Bei der Anwendung der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit ist es in manchen Fällen einfacher, anstatt der für ein Ereignis A günstigen Elementarereignisse die für A ungünstigen Elementarereignisse zu zählen. Diese bestimmen das Gegenereignis $\bar{A}$ von A. Wir nennen die Anwendung dieser Vorgehensweise folglich die **Gegenereignisregel** [4]:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Mit geometrischen Einheiten wie Länge, Flächeninhalt oder Volumen können auch Wahrscheinlich-

[4] vgl. Götz (2007a): 171.

keiten entstehen, sofern kein Bereich bevorzugt auftritt. Wir erhalten die Wahrscheinlichkeiten indem wir relative Anteile bilden und nennen dies die **Wahrscheinlichkeit aufgrund geometrischer Grundlagen** [5].

2.4 Ziehen geordneter Stichproben[6]

Um die verschiedenen Möglichkeiten des Ziehens einer Stichprobe vom Umfang n aus N Elementen zu veranschaulichen, eignet sich das Urnenmodell besonders gut. Hier werden die Ziehungsverläufe in sogenannten Baumdiagrammen veranschaulicht. Jedem Ziehungsverlauf entspricht ein gewisser Ast.

2.4.1 Ziehen geordneter Stichproben mit Zurücklegen[7]

Beispiel: In einer Urne befinden sich zwei Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden. Eine Kugel ist rot, die andere gelb. Nun ziehen wir eine Kugel, notieren deren Farbe und legen sie wieder zurück in die Urne. Dieser Vorgang wird drei Mal durchgeführt. Wie groß ist die Chance, dass wir am Ende die Farbreihenfolge rot-gelb-rot auf unserem Zettel notiert haben? Im folgenden Diagramm (Abbildung 2.1) finden wir einen Überblick über die einzelnen Ziehungsverläufe:

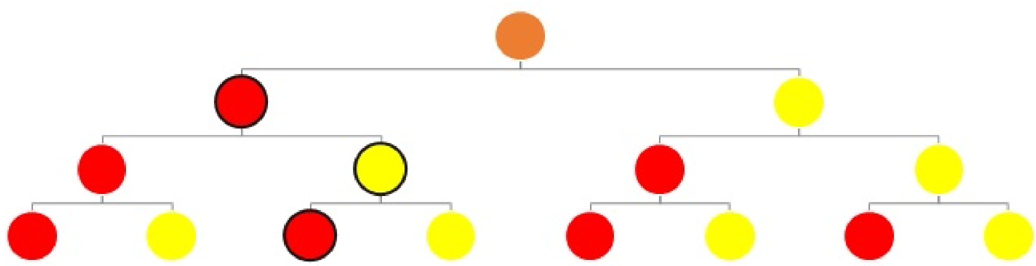

Abbildung 2.1: Baumdiagramm Ziehen mit Zurücklegen

Wie wir sehen gibt es acht mögliche Spielverläufe, wobei nur ein Spielverlauf für uns günstig ist. Da jeder Spielverlauf gleich wahrscheinlich ist, ergibt sich gemäß der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit für die Gewinnwahrscheinlichkeit $P(\text{rot-gelb-rot}) = \frac{1}{8}$.

Im Allgemeinen nennen wir das Ergebnis der obigen Ziehung als *geordnete Stichprobe von n aus N Elementen mit Zurücklegen*.

[5] vgl. Humenberger (2015a): 7.
[6] vgl. Götz (2007a): 174-177.
[7] vgl. Götz (2007a): 174.

2.4.2 Ziehen geordneter Stichproben ohne Zurücklegen[8]

Beispiel: In unsere Urne fügen wir eine dritte Kugel hinzu, um die Kugeln nach dem Ziehen nicht immer wieder zurücklegen zu müssen. Somit haben wir jetzt zwei rote und eine gelbe Kugel in der Urne. Wie hoch ist jetzt die Wahrscheinlichkeit die Kugeln in der Reihenfolge rot-gelb-rot zu ziehen? Im folgenden Diagramm (Abbildung 2.2) finden wir einen Überblick über die einzelnen Ziehungsverläufe:

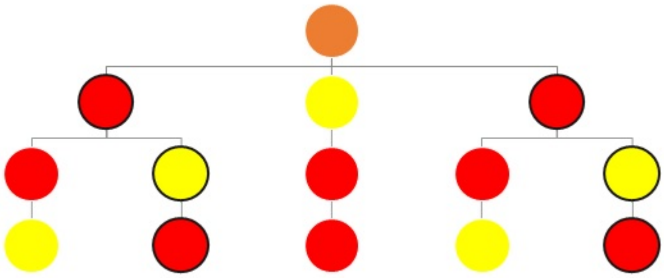

Abbildung 2.2: Baumdiagramm Ziehen ohne Zurücklegen

Wir sehen, dass es sechs mögliche Spielverläufe gibt, welche alle gleich wahrscheinlich sind. Es gibt zwei für uns günstige Spielverläufe und daher ergibt sich gemäß der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit für die Gewinnwahrscheinlichkeit $P(\text{rot-gelb-rot}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Im Allgemeinen nennen wir eine Ziehung dieser Art eine *geordnete Stichprobe von n aus N (= n) Elementen ohne Zurücklegen*.

Es gibt aber auch eine schnellere Möglichkeit die obige Aufgabe zu lösen. Dazu verwenden wir die **1. Pfadregel**: Die Wahrscheinlichkeit einer geordneten Stichprobe (Zufallsfolge) ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Astes (Pfades) im Baumdiagramm.

Wenn wir nun gleiche Pfade zusammenfassen und diese anders gewichten, ergibt sich folgendes Diagramm (Abbildung 2.3):

[8] vgl. Götz (2007a): 175-177.

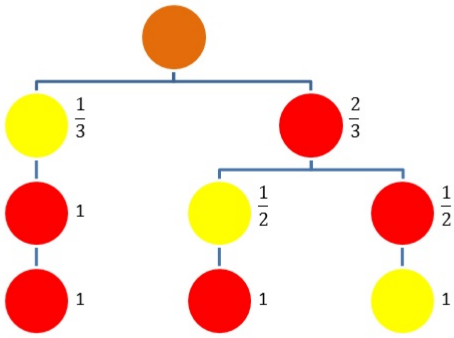

Abbildung 2.3: Baumdiagramm 1. Pfadregel ohne Zurücklegen

Die Wahrscheinlichkeit beim 1. Zug eine rote Kugel zu ziehen beträgt laut der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit beim 2. Zug eine gelbe Kugel zu ziehen ist $\frac{1}{2}$, weil sich in der Urne nur mehr eine rote sowie eine gelbe Kugel befinden.

$$P(\text{rot-gelb}) = \frac{2}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Nach dem 2. Zug befindet sich nur noch eine rote Kugel in der Urne. Somit ist die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen 1.

$$P(\text{rot-gelb-rot}) = \frac{1}{3} * 1 = \frac{1}{3}$$

Wir sehen, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(rot-gelb-rot) sich als Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang jenes Pfades ergibt, der zum Ergebnis rot-gelb-rot führt.

$$P(\text{rot-gelb}) = \frac{2}{3} * \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{3}$$

Analog können wir auch das Beispiel mit Ziehen der geordneten Stichprobe mit Zurücklegen lösen:

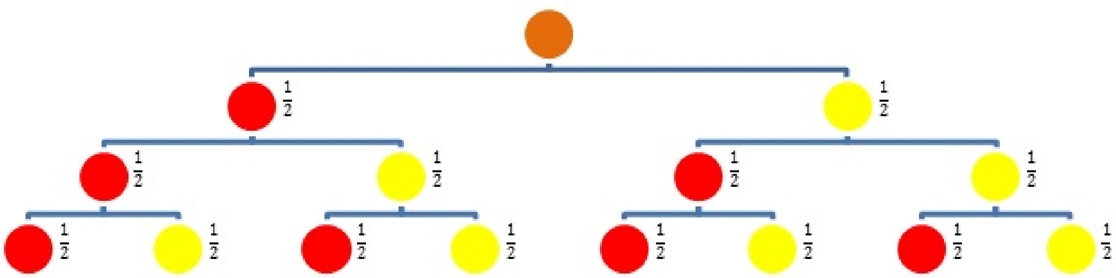

Abbildung 2.4: Baumdiagramm 1. Pfadregel mit Zurücklegen

Die Wahrscheinlichkeit beim 1. Zug eine rote Kugel zu ziehen ist $\frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit beim 2. Zug eine gelbe Kugel zu ziehen ist ebenfalls $\frac{1}{2}$. Auf lange Sicht gesehen tritt somit in der Hälfte aller

Fälle die Zugreihenfolge rot-gelb ein.

$$P(\text{rot-gelb}) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit beim 3. Zug eine rote Kugel zu ziehen bleibt wegen des Zurücklegens unverändert $\frac{1}{2}$. Somit folgt

$$P(\text{rot-gelb-rot}) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

2.5 Ziehen ungeordneter Stichproben[9]

Ungeordnete Stichproben entstehen, wenn wir n Kugeln auf einmal aus einer Urne ziehen. Mathematisch ausgedrückt ist eine geordnete Stichprobe eine Folge, eine ungeordnete Stichprobe eine Menge (wobei die einzelnen Elemente mehrfach auftreten können).

2.5.1 Ziehen ungeordneter Stichproben ohne Zurücklegen[10]

Beispiel: Ein Schüler einer Klasse hat sich nicht auf die Stundenwiederholung vorbereitet. Jede Stunde ruft der Lehrer zwei Schüler zufällig auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aufgerufen zu werden, wenn es in der Klasse insgesamt 15 Schüler gibt?

Im folgenden Diagramm (Abbildung 2.5) finden wir einen Überblick über das Auswahlverfahren: "rot" steht für "er kommt dran", "grün" steht für "er kommt nicht dran".

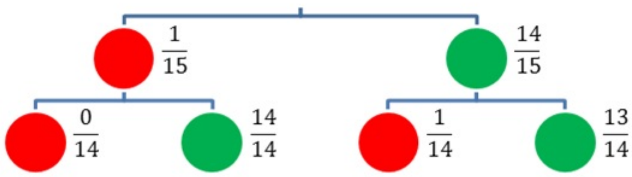

Abbildung 2.5: Baumdiagramm Stundenwiederholung 1

Wie wir sehen können, gibt es drei mögliche Ausgänge der Stundenwiederholung. In zwei davon kommt er dran. Laut der 1. Pfadregel treten sie mit einer Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{15} * \frac{14}{14} = \frac{1}{15}$ bzw. $\frac{14}{15} * \frac{1}{14} = \frac{1}{15}$ auf. Addieren wir nun die beiden Äste laut der **2. Pfadregel** (Die Wahrscheinlichkeit einer ungeordneten Stichprobe ist die Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten), so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit mit der der Schüler aufgerufen wird:

[9] vgl. Götz (2007a): 178-180.
[10] vgl. Götz (2007a): 178.

P(kommt dran) = P(kommt als 1. dran) + P(kommt als 2. dran) = $\frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$

Offensichtlich ist es egal, ob der Schüler als 1. oder als 2. aufgerufen wird, denn beide Male tritt dieselbe Wahrscheinlichkeit auf. Somit wissen wir, dass es egal ist, an welcher Stelle der Schüler sich in der Stichprobe befindet. Sein Interesse gilt den *ungeordneten Stichproben von n aus N Elementen ohne Zurücklegen* für den Fall n = 2 und N = 15.

2.5.2 Ziehen ungeordneter Stichproben mit Zurücklegen[11]

Beispiel: Der Schüler hat sich weder für die Mathematik- noch für die Deutschwiederholung vorbereitet. Jedoch wird in jedem Fach ohne Rücksicht auf die anderen Fächer geprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schüler mindestens einmal aufgerufen wird?

Im folgenden Diagramm (Abbildung 2.6) finden wir einen Überblick über das Auswahlverfahren: "rot" steht für "er kommt dran", "grün" steht für "er kommt nicht dran".

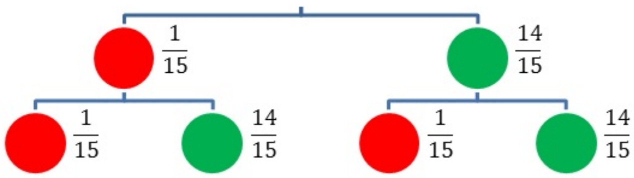

Abbildung 2.6: Baumdiagramm Stundenwiederholung 2

Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel gibt es hier drei mögliche Verläufe, bei denen er aufgerufen werden könnte. Laut der 1. Pfadregel treten die einzelnen Äste mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{15} * \frac{1}{15} = \frac{1}{225}, \frac{1}{15} * \frac{14}{15} = \frac{14}{225}$ und $\frac{14}{15} * \frac{1}{15} = \frac{14}{225}$ auf. Laut der 2. Pfadregel ergibt sich somit: P(kommt dran) = P(kommt in 1. und 2. Stunde dran) + P(kommt nur in 1. Stunde dran) + P(kommt nur in 2. Stunde dran) = $\frac{1}{225} + \frac{14}{225} + \frac{14}{225} = \frac{29}{225}$

Diese Aufgabe hätten wir auch mittels der Gegenwahrscheinlichkeit einfacher lösen können:
P(kommt dran) = 1 - P(kommt nicht dran) = $1 - \left(\frac{14}{15} * \frac{14}{15}\right) = \frac{29}{225}$.

2.6 Kombinatorik[12]

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Baumdiagrammen und der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit ist für große Werte von N und n mühsam. Daher verwenden wir Formeln aus der Kombinatorik.

[11] vgl. Götz (2007a): 179.
[12] vgl. Götz (2007a): 181.

2.6.1 Anordnungsmöglichkeiten von n Elementen[13]

Beispiel: Wir kaufen drei Bücher und wollen wissen, auf wie viele Arten wir sie anordnen können. Zwei Bücher können wir auf 2 verschiedene Arten anordnen. Für das dritte Buch haben wir dann 3 verschiedene Möglichkeiten: links, rechts und in der Mitte. Da wir bei jeder der beiden Anordnungsmöglichkeiten der ersten beiden Bücher so vorgehen können, gibt es für drei Bücher insgesamt $2*3$ verschiedene Anordnungsmöglichkeiten. Würden wir uns ein viertes Buch kaufen, so hätte dieses 4 Anordnungsmöglichkeiten. Daher gibt es für vier Bücher $1*2*3*4 = 24$ Anordnungsmöglichkeiten.

Ist n eine beliebige natürliche Zahl, so lassen sich n verschiedene Dinge mit Berücksichtigung der Reihenfolge auf $n! = 1*2*3*....*(n-1)*n$ verschiedene Arten anordnen.
Jede dieser Anordnung von n nennen wir eine Permutation. Somit gibt es für n verschiedene Dinge genau $n!$ Permutationen.

Beispiel: Wir haben einen runden Tisch mit 10 Sesseln, an dem 10 Personen sitzen sollen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Luise neben Klara sitzt? Um alle 10 Personen ohne Rücksicht auf die Reihenfolge auf die Sesseln zu verteilen gibt es 10! Möglichkeiten. Günstig sind für uns aber nur jene Sitzordnungen, in denen Luise neben Klara sitzt. Dieses Ereignis tritt ein, wenn Luise den 1. Platz und Klara den 2. oder 10. Platz einnimmt. Für die übrig gebliebenen Personen gibt es noch 8! verschiedene Anordnungsmöglichkeiten. Falls Luise den 1. Platz erhält gibt es somit 2∗8! günstige Fälle. Dieselbe Anzahl an günstigen Fällen gibt es, wenn Luise einen anderen beliebigen Platz einnimmt. Folglich gibt es für die 10 vorhandenen Plätze insgesamt $10*2*8!$ günstige Fälle. Somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2*10*8!}{10!} = \frac{2*10*8!}{8!*9*10} = \frac{2}{9}$$

Gibt es n Dinge, von denen jeweils $n_1, n_2, ..., n_r$ gleich sind, so lassen sie sich auf

$$\frac{n!}{n_1!*n_2!*...*n_r!}$$

verschiedene Arten anordnen. Dabei gilt $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$.

Beispiel: Wir haben 9 Fahnen (2 rote, 3 blaue und 4 gelbe), die in einer Reihe aufgehängt werden sollen. Auf wie viele verschiedene Arten ist die Bildung unterscheidbarer Anordnungen der Fahnen möglich?

$$\frac{9!}{3!*2!*4!} = \frac{(3+2+4)!}{3!*2!*4!} = 1260$$

[13] vgl. Bosch (1976): 15-18.

Zerfallen n Dinge in zwei Gruppen von jeweils lauter gleichen Dingen, von denen die eine k und die andere (n-k) Dinge enthält, so ergibt sich folgende Anzahl an verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten

$$\frac{n!}{k!*(n-k)!} = \frac{n*(n-1)*...*(n-k+1)}{k!*(n-k)!} = \frac{n*(n-1)*...*(n-k+1)}{1*2*3*...*(k-1)*k}$$

Der **Binominialkoeffizient** ist definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$$

mit $0! = 1$ und $\binom{n}{0} = 1$.

Beispiel: Wir haben 9 Fahnen, von denen 6 blau und 3 grün sind, die in einer Reihe aufgehängt werden sollen. Auf wie viele verschiedene Arten ist die Bildung unterscheidbarer Anordnungen der Fahnen möglich?

$$\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$$

2.6.2 Auswahlmöglichkeiten aus n Elementen[14]

Bisher war uns die Reihenfolge der gezogenen Elemente wichtig. Jetzt wollen wir aber nur eine gewisse Teilmenge auswählen.

Aus n verschiedenen Elementen können wir unter Berücksichtigung der Reihenfolge k Stück ($1 \leq k \leq n$) auf $n*(n-1)*(n-2)*...*(n-k+1)$ verschiedene Arten auswählen.

Beispiel: Wie viele vierziffrige Zahlen gibt es, deren Ziffern alle verschieden sind?
Die erste Ziffer kann nicht 0 sein. Daher gibt es 9 Möglichkeiten für die erste Ziffer. Für die zweite Ziffer gibt es somit noch 9, für die dritte 8 und für die vierte 7. Somit gibt es $9*9*8*7 = 4536$ Möglichkeiten.

Aus n verschiedenen Elementen können wir ohne Berücksichtigung der Reihenfolge k Stück ($1 \leq k \leq n$) auf

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!*(n-k)!} = \frac{n*(n-1)*(n-2)*...*(n-k+1)}{1*2*3*...*(k-1)*k}$$

verschiedene Arten auswählen. Dabei gilt $0! = 1$.

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus 20 Personen ein Team von 11 auszuwählen?

$$\binom{20}{11} = 167960$$

[14] vgl. Bosch (1976): 18-22.

2.6.3 Laplace'sche Wahrscheinlichkeit mittels Binomialkoeffizient[15]

Der Binomialkoeffizient wird definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

Es gilt:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n*(n-1)}{2}$

Eine Urne enthält N Kugeln, M schwarze und N - M weiße. Es gilt $1 \leq M \leq N$. Aus der Urne werden n $(n \leq N)$ Kugeln zufällig gezogen und die **Kugeln werden nicht zurückgelegt**. Die Wahrscheinlichkeit unter den n gezogenen Kugeln genau k schwarze zu finden beträgt

$$\frac{\binom{M}{k} * \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ für } 0 \leq k \leq min(M, n)$$

Beispiel: *Lotto 6 aus 45* [16]

Angenommen wir spielen Lotto und geben in einer Runde einen Tipp ab. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für

a) fünf Richtige:

$$\frac{\binom{6}{5} * \binom{39}{1}}{\binom{45}{6}} = \frac{234}{8145060} \approx 0,000028729$$

b) fünf Richtige und die Zusatzzahl:

$$P(5 \text{ Richtige}) * \frac{1}{39} = \frac{6}{8145060} \approx 0,000000737$$

c) fünf richtige ohne die Zusatzzahl

$$P(5 \text{ Richtige}) * \frac{38}{39} = \frac{228}{8145060} \approx 0,000027992$$

[15] vgl. Bosch (1976): 17-25.

[16] vgl. Koth (2014): 4-6.

Eine Urne enthält N Kugeln, von denen M schwarz und somit N - M Kugeln weiß sind. Es gilt $1 \leq M \leq N$. Aus der Urne werden n $(n \leq N)$ Kugeln einzeln gezogen, wobei **jede Kugel** nach dem Zug **zurückgelegt wird**. Die Wahrscheinlichkeit unter den n gezogenen Kugeln genau k schwarze zu finden beträgt

$$\binom{n}{k} * \left(\frac{M}{N}\right)^k * \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \quad \text{für} \;\; k = 0, 1, ..., n$$

Beispiel: In einer Urne befinden sich 7 rote und 3 weiße Kugeln. Wir ziehen fünf Mal je 1 Kugel und legen sie wieder zurück. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit unter den gezogenen Kugeln genau 1 weiße Kugel zu finden?

$$\text{P(4 rote und 1 weiße)} = \binom{5}{4} * \left(\frac{7}{10}\right)^4 * \left(1 - \frac{7}{10}\right)^{5-4} = 0,36015$$

2.7 Bedingte Wahrscheinlichkeit[17]

Beispiel: Die folgende Tabelle (Tabelle 2.1) zeigt die Wahrscheinlichkeit, mit der in einem utopischen Land die Ausprägungen blond bzw. brünett bei der Haarfarbe und die Ausprägungen blauäugig bzw. braunäugig bei der Augenfarbe zusammentreffen.

	blond	brünett
blauäugig	0,20	0,10
braunäugig	0,15	0,55

Tabelle 2.1: Augenfarbe/Haarfarbe

Aus der Tabelle wird ersichtlich, dass 20% der Bevölkerung blond und blauäugig sind. 30% sind blauäugig und 70% sind braunäugig. Insgesamt sind 35% blond und 65% brünett. Wenn wir wissen wollen, wie viele der Blonden blauäugig sind, dann berechnen wir das wie folgt:

$$\text{P(blauäugig|blond)} = \frac{\text{P(blond} \wedge \text{blauäugig)}}{\text{P(blond)}} = \frac{0,20}{0,35} \approx 0,571 \approx 57\%$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass ein Ereignis B eintritt, wird als **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)** bezeichnet. Das Ereignis A heißt vom Ereignis B stochastisch unabhängig, wenn folgendes gilt: $P(A|B) = P(A)$.

Regeln für das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten:

- Summenregel: $P(A \wedge B) + P(A \wedge \bar{B}) = P(A)$

[17] vgl. Götz (2007a): 187-189.

- Regel von der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$
- Produktregel: $P(A \wedge B) = P(B|A) * P(A) = P(A|B) * P(B)$
- Satz von Bayes: $P(B|A) = \frac{P(A|B)*P(B)}{P(A)}$

Beispiel: Fieber ist in der Medizin ein wichtiges Indiz für Infektionskrankheiten. Wir wissen, dass 90% der erkrankten Personen Fieber bekommen. 20% haben Fieber ohne infiziert zu sein. Ungefähr 30% der beim Arzt vorsprechenden Personen leiden an einer Infektionskrankheit. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Personen

a) wirklich an einem Infekt leiden, wenn sie Fieber haben?
   Wir wenden hier den Satz von Bayes an: $P(\text{Infekt}|\text{Fieber}) = \frac{P(\text{Fieber} \wedge \text{Infekt})}{P(\text{Fieber})}$, wobei
   $P(\text{Fieber}) = P(\text{Fieber}|\text{Infekt}) + P(\text{Fieber}|\text{kein Infekt})$ somit folgt, dass
   $P(\text{Infekt}|\text{Fieber}) = \frac{0{,}9*0{,}3}{0{,}9*0{,}3+0{,}2*0{,}7} = 0,6585$
   65,85% der Personen mit Fieber haben einen Infekt.

b) an einem Infekt leiden, obwohl sie kein Fieber haben?
   $P(\text{Infekt}|\text{kein Fieber}) = \frac{P(\text{kein Fieber} \wedge \text{Infekt})}{P(\text{kein Fieber})}$, wobei
   $P(\text{kein Fieber}) = P(\text{kein Fieber}|\text{Infekt}) + P(\text{kein Fieber}|\text{kein Infekt})$ somit folgt, dass
   $P(\text{Infekt}|\text{kein Fieber}) = \frac{0{,}1*0{,}3}{0{,}1*0{,}3+0{,}8*0{,}7} = 0,0508$
   5,1% der Personen ohne Fieber haben einen Infekt.

2.8 Diskrete Zufallsvariable

2.8.1 Definition einer Zufallsvariable[18]

Bei Zufallsexperimenten haben wir mögliche Versuchsergebnisse durch Zahlen dargestellt. Aber auch bei Zufallsexperimenten, bei denen die Versuchsergebnisse nicht unmittelbar Zahlen sind, interessieren wir uns häufig für Zahlenwerte, welche durch die Versuchsergebnisse $\omega \epsilon \Omega$ eindeutig bestimmt sind.

Wir stellen uns allgemein folgende Situation vor: Jedem Versuchsergebnis $\omega \epsilon \Omega$ ordnen wir durch eine wohlbestimmte Zuordnungsvorschrift genau eine reelle Zahl $X(\omega) \epsilon \mathbb{R}$ zu. Nach jeder Durchführung des entsprechenden Zufallsexperiments soll daher mit dem Versuchsergebnis ω auch der zugeordnete Zahlenwert $X(\omega)$ feststehen. X ist also eine auf Ω erklärte reellwertige Funktion. Wie die Ergebnisse ω eines Zufallsexperiments, so hängen auch die Werte der Funktion X vom Zufall ab. Daher nennen wir X eine Zufallsvariable.

[18] vgl. Bosch (1976): 55-56.

Eine auf Ω definierte reellwertige Funktion X heißt **Zufallsvariable**, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:
Für jedes Intervall $(a,b]$, $a \leq b$ besitzt das Ereignis $A_{(a,b]} = \{\omega\epsilon\Omega : a < X(\omega) \leq b\}$ eine Wahrscheinlichkeit. Dann ist jedes $x\epsilon\mathbb{R}$ und $A_x = \{\omega\epsilon\Omega : X(\omega) = x\}$.
Die Menge aller Zahlen, die eine Zufallsvariable X als Wert annehmen kann, nennen wir den Wertevorrat der Zufallsvariable X. Wir schreiben W=W(X).

2.8.2 Definition einer diskreten Zufallsvariable[19]

Eine Zufallsvariable X, deren Anzahl an Werten W nur endlich oder abzählbar unendlich viele verschiedene Werte enthält, nennt man **diskret**. Die Gesamtheit aller Zahlenpaare $(x_i, P(X = x_i))$, $x_i \epsilon W$ heißt **Verteilung** der diskreten Zufallsvariable X.

Unmittelbar aus der Verteilung von X können die Wahrscheinlichkeiten, mit denen eine diskrete Zufallsvariable X Werte aus einem Intervall annimmt, berechnet werden:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} P(X = x_i)$$

Beispiel: Wir spielen mit zwei gleichwertigen Würfeln folgendes Spiel: Zeigen beide Würfel eine sechs, so erhalten wir 1 €. Zeigt nur einer der beiden Würfel eine sechs, so erhalten wir 20 Cent. Wir bezeichnen mit X die Zufallsvariable, die den Gewinn beschreibt. Wir erhalten folgende Wahrscheinlichkeiten mittels der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{\text{Günstige}}{\text{Mögliche}}\right)$:

$$P(X = 1) = \frac{1}{36},\ P(X = 0,20) = \frac{10}{36} \text{ und } P(X = 0) = \frac{25}{36}$$

Es gilt: $P(X = 1) + P(X = 0,20) + (X = 0) = 1$.

Wir können die Werte der Zufallsvariablen X als Tabelle (Tabelle 2.2) oder Diagramm (Abbildung 2.7) darstellen:

Werte von X	0	0,2	1
Wahrscheinlichkeiten	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabelle 2.2: Werte einer Zufallsvariable X

[19] vgl. Bosch (1976): 56-58.

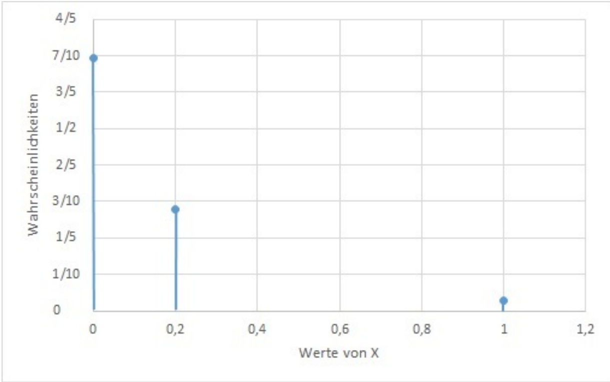

Abbildung 2.7: Werte einer Zufallsvariable X

2.8.3 Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable[20]

Die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariable X ist definiert als

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Wir benötigen diese Funktion, wenn wir uns beispielsweise für die Wahrscheinlichkeiten interessieren, wann eine Zufallsvariable X Werte annimmt, die nicht größer als ein vorgegebener Wert x ist.

Beispiel: Wir werfen einen Würfel. X beschreibt die Augenzahl nach einem Wurf. Die Verteilung von X lautet $\left(i, \frac{1}{6}\right)$, i=1,2,...,6. Diese Verteilung stellen wir als Stabdiagramm (Abbildung 2.8) dar:

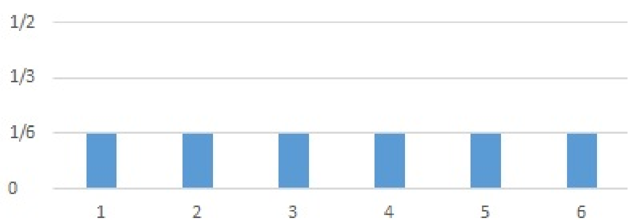

Abbildung 2.8: Verteilung einer Zufallsvariable

Wie wir anhand der Graphik erkennen können, gilt

- $F(x) = 0$ für $x = 1$
- $F(x) = \frac{1}{6}$ für $1 \leq x < 2$
- $F(x) = \frac{2}{6}$ für $2 \leq x < 3$
- $F(x) = \frac{3}{6}$ für $3 \leq x < 4$

[20] vgl. Bosch (1976): 58-61.

- $F(x) = \frac{4}{6}$ für $4 \leq x < 5$

- $F(x) = \frac{5}{6}$ für $5 \leq x < 6$

- $F(x) = 1$ für $x \geq 6$

Die Verteilungsfunktion von X ist die unten dargestellte Treppenfunktion (Abbildung 2.9), die an den Stellen i für i=1,2,...,6 Sprünge der Höhe $P(X = i) = \frac{1}{6}$ besitzt und dazwischen konstant ist. Die Verteilungsfunktion enthält also dieselben Informationen, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung enthält, nur anders dargestellt.

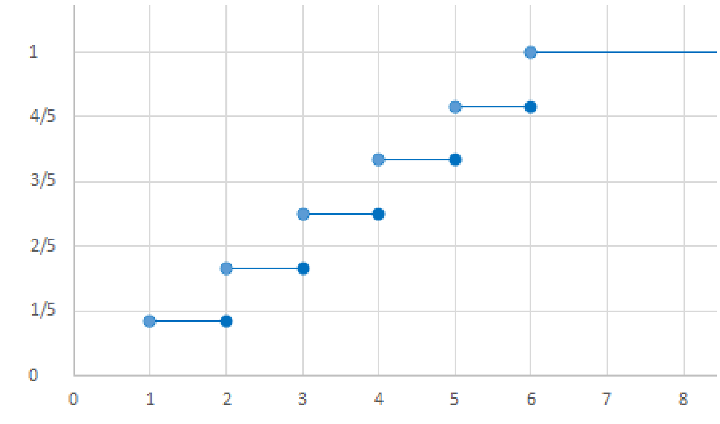

Abbildung 2.9: Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable

Eigenschaften jeder Verteilungsfunktion F[21]:

- F ist rechtsseitig stetig

- $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

- F ist monoton wachsend

Ist F die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen X, so gilt

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

- $P(a < X) = 1 - F(a)$

[21] vgl. Humenberger (2015b): 4.

2.8.4 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable[22]

Beispiel: (vgl. Beispiel unter Definition einer diskreten Zufallsvariable) Wir nehmen an, dass dieses Spiel in 20 Minuten n-mal gespielt wird. Außerdem nehmen wir an, dass in dieser Zeit der Hauptgewinn von 1 € a-mal, der Gewinn von 20 Cent b-mal ausgegeben wird. Bei den verbleibenden $c = n - a - b$ Spielen wird kein Gewinn erzielt. Somit erhalten wir für den gesamten ausgezahlten Gewinn die Gleichung $x = 1 * a + 0,2 * b + 0 * c$. Nun interessieren wir uns für den Durchschnittsgewinn, den wir wie folgt berechnen $\bar{x} = \frac{x}{n} = \frac{a}{n} + 0,2 * \frac{b}{n} + 0 * \frac{c}{n}$
$\frac{a}{n}, \frac{b}{n}$ sowie $\frac{c}{n}$ stellen die relativen Häufigkeiten der Spiele dar, bei denen 1 €, 20 Cent oder nichts gewonnen wird. Wir können die rechte Seite der Gleichung auch in Abhängigkeit von der Verteilung der Zufallsvariable darstellen: $\bar{x} \approx 1 * P(X = 1) + 0,2 * P(X = 0,20) + 0 * P(X = 0)$

Der mittlere Gewinn (=Durchschnittsgewinn) liegt mit großer Wahrscheinlichkeit in der Nähe dieser Zahl. Daher nennen wir ihn **Erwartungswert der Zufallsvariablen X** und bezeichnen ihn mit E(X) oder mit μ. Wenn eine Zufallsvariable X einen endlichen Wertevorrat $W = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ hat, so ist der Erwartungswert definiert als

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i * P(X = x_i)$$

In unserem Fall beträgt der Erwartungswert $E(X) = 1 * \frac{1}{36} + 0,2 * \frac{10}{36} = \frac{1}{12}$. Für große n wird der durchschnittliche Gewinn also $\frac{1}{12}$ € $\approx$ 8 Cent pro Spiel betragen.

Beispiel: Wie lange müssen wir im Durchschnitt warten, bis wir mit einem Würfel die erste 6 gewürfelt haben? Wir definieren vorab q=1-p.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i * P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} i * q^{i-1} * p = (1-q) * \sum_{i=1}^{\infty} i * q^{i-1} =$$

$$(1-q)*(q^0+2*q^1+3*q^3+...) = (q^0+2*q^1+3*q^2+...)-(q^1+2*q^2+3*q^3+...) = q^0+q^1+q^2+... = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

Da die Reihe absolut konvergent ist, dürfen wir die einzelnen Elemente umordnen. Setzen wir nun $p = \frac{1}{6}$, wie es für einen Würfel zutrifft, so erhalten wir einen Erwartungswert von 6. Somit ist im Durchschnitt jeder sechste Wurf eine 6.

2.8.5 Varianz und Streuung einer diskreten Zufallsvariable[23]

In den meisten Fällen ist ein Mittelwert nicht sehr aussagekräftig, da die einzelnen Werte stark vom Mittelwert abweichen können. Daher wird üblicherweise ein Streuungsmaß angegeben. Neben dem

[22] vgl. Bosch (1976): 61-69. und vgl. Humenberger (2015b): 6.
[23] vgl. Bosch (1976): 69-72.

Erwartungswert $E(X) = \mu$ ist auch eine zu erwartende Abweichung $X - \mu$ angegeben. Diese sind die Varianz und die Standardabweichung von X.

Ist μ der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable X, so heißt der Zahlenwert

$$V(X) = \sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 * P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu^2) * P(X = x_i)$$

Varianz und

$$\sqrt{\sigma^2(X)} = \sigma(X)$$

Standardabweichung oder **Streuung von X**.

Für die Varianz gibt es aber eine einfachere Formel zur Berechnung:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Beispiel: Wir schreiben eine Single-Choice-Prüfung. Es gibt 5 Fragen mit je 3 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils nur eine korrekt ist. Wir kreuzen wahllos an und X sei die Anzahl der korrekt angekreuzten Antworten. Wie sieht die Verteilung der Zufallsvariablen X durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion (Tabelle 2.3 und Abbildung 2.10), den Erwartungswert und die Varianz aus?

P(X=0) =	$\binom{5}{0} * (\frac{2}{3})^5 * (\frac{1}{3})^0 = \frac{32}{243}$
P(X=1) =	$\binom{5}{1} * (\frac{2}{3})^4 * (\frac{1}{3})^1 = \frac{80}{243}$
P(X=2) =	$\binom{5}{2} * (\frac{2}{3})^3 * (\frac{1}{3})^2 = \frac{80}{243}$
P(X=3) =	$\binom{5}{3} * (\frac{2}{3})^2 * (\frac{1}{3})^3 = \frac{40}{243}$
P(X=4) =	$\binom{5}{4} * (\frac{2}{3})^1 * (\frac{1}{3})^4 = \frac{10}{243}$
P(X=5) =	$\binom{5}{5} * (\frac{2}{3})^0 * (\frac{1}{3})^5 = \frac{1}{243}$

Tabelle 2.3: Verteilung einer Zufallsvariable (Single-Choice-Prüfung)

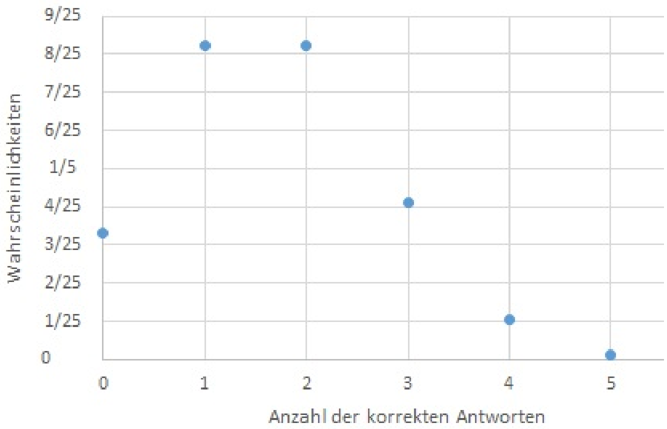

Abbildung 2.10: Verteilung der Zufallsvariable (Single-Choice-Prüfung)

$$E(X) = 0 * \frac{32}{243} + 1 * \frac{80}{243} + 2 * \frac{80}{243} + 3 * \frac{40}{243} + 4 * \frac{10}{243} + 5 * \frac{1}{243} = \frac{5}{3}$$

$$V(X) = \left(0 - \frac{5}{3}\right)^2 * \frac{32}{243} + \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 * \frac{80}{243} + \ldots + \left(5 - \frac{5}{3}\right)^2 * \frac{1}{243} = \frac{10}{9}$$

2.8.6 Erwartungswert und Varianz bei Summen und Produkten diskreter Zufallsvariablen[24]

Beispiel: Wie spielen gleichzeitig zwei Würfelspiele. Wer eine gerade Zahl würfelt erhält 1 €. Wer eine ungerade Zahl würfelt verliert 1 €. Beim zweiten Spiel erhalten wir bei Primzahlen (PZ) 1 €, ansonsten verlieren wir 1 €.

Es sei X der Gewinn beim ersten Spiel (gerade/ungerade Augenzahl), und Y der Gewinn beim zweiten Spiel (Primzahl). Wie groß ist der zu erwartende Gesamtgewinn E(X+Y)?

X	Gewinn/Verlust	Wahrscheinlichkeit
P(gerade)	+1 €	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
P(ungerade)	-1 €	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Tabelle 2.4: Würfelspiel 1

Y	Gewinn/Verlust	Wahrscheinlichkeit
P(PZ)	+1 €	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
P(keine PZ)	-1 €	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Tabelle 2.5: Würfelspiel 2

[24]vgl. Humenberger (2015b): 12-14. und vgl. Bosch (1976): 77.

$$E(X) = 1 * \frac{1}{2} + (-1) * \frac{1}{2} = 0$$

$$E(Y) = 1 * \frac{1}{2} + (-1) * \frac{1}{2} = 0$$

$$E(X) = 0 = E(Y)$$

X+Y	Gewinn/Verlust	bei Augenzahl	Wahrscheinlichkeit
P(ungerade+keine PZ)	-2 €	1	$\frac{1}{6}$
P(gerade+PZ)	+2 €	2	$\frac{1}{6}$
P(ungerade+PZ) + P(gerade+keine PZ)	0 €	3,5,4,6	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Tabelle 2.6: Würfelspiel 3

$$E(X + Y) = (-2) * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + 0 * \frac{1}{2} = 0$$

Allgemein gilt: Sind X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen und haben den Erwartungswert E(X) und E(Y), so gilt: E(X + Y) = E(X) + E(Y).

Zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y heißen **(stochastisch) unabhängig**, wenn für alle Wertepaare (x_i, y_j) folgende Gleichung gilt:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) * P(Y = y_j)$$

Sind X und Y zwei unabhängige diskrete Zufallsvariablen mit den existierenden Erwartungswerten E(X) und E(Y) bzw. den Varianzen V(X) und V(Y), so gilt:

$$E(X * Y) = E(X) * E(Y) \text{ und } V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

2.9 Spezielle diskrete Verteilungen

2.9.1 Die geometrische Verteilung[25]

Beispiel: *Mensch ärgere Dich nicht*:

Bei diesem Spiel dürfen wir erst ansetzen, wenn wir eine Sechs gewürfelt haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir genau einen, genau zwei, genau drei, genau vier, höchstens vier oder

[25]vgl. Götz (2008): 243.

mehr als vier Würfe benötigen? Wie lange müssen wir im Durchschnitt würfeln, um eine Sechs zu erhalten?

P(X=1) =	$\frac{1}{6}$
P(X=2) =	$\frac{5}{6} * \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$
P(X=3) =	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 * \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{216}$
P(X=4) =	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 * \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{125}{1296}$
P(X $\leq$ 4) =	$\sum_{i=1}^{4} q^{i-1} * p = \frac{671}{1296}$
P(X > 4) =	1-P(X $\leq$ 4)=$\frac{625}{1296} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$

Aus $E(X) = \frac{1}{p} = 6$ folgt, dass im Durchschnitt jeder sechste Wurf eine 6 ist.

Allgemein folgt somit, dass das **Verteilungsgesetz der geometrischen Verteilung** wie folgt aussieht:
$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} * p$ für $k \epsilon \mathbb{N}$.
Der **Erwartungswert** E(X) einer geometrischen Verteilung ist $E(X) = \frac{1}{p}$.
Die **Varianz** V(X) wird folgendermaßen berechnet: $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

2.9.2 Die Binomialverteilung[26]

Definition: Ein aus einer Folge von n Versuchen bestehendes Experiment, bei dem jeder Versuch genau zwei mögliche Versuchsausgänge besitzt und jeder Versuch unter genau den gleichen Voraussetzungen abläuft, heißt (n-stufiges) ***Bernoulli-Experiment****.*

Das ***Verteilungsgesetz der Binomialverteilung*** *besagt, dass die Wahrscheinlichkeit, bei einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p die Anzahl X der Erfolge genau k ist, wenn Folgendes zutrifft[27]:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k} \qquad \text{mit } k = 0, 1, ..., n$$

Das Bernoulli-Experiment ist ein Sonderfall der Binomialverteilung. Die Binomialverteilung tritt bei einer Wiederholung von n Versuchen auf, bei dem jeder Versuch zählt, bei dem ein Ereignis A auftritt. Man kann das auf ein Bernoulli-Experiment zurückführen, indem man einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega_1 = \{0, 1\}$ definiert mit $P(\{1\}) = P(A)$ und $P(\{0\}) = 1 - P(A)$.
Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass A bei n Versuchen k-mal eintritt gleich der Wahrscheinlichkeit, dass beim Bernoulli-Experiment {1} bei n-Versuchen k-mal eintritt.

[26]vgl. Götz (2008): 234-239.
[27]Götz (2008): 234-235.

Beispiel: In einem utopischen Land ist die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Sohnes 0,6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit fünf Kindern weniger als 2, genau 2 und mehr als 2 Söhne sind?

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Söhne. Somit ist $p = 0,6;\ q = 0,4;\ n = 5$

P(X<2) = $P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} * 0,6^0 * 0,4^5 + \binom{5}{1} * 0,6^1 * 0,4^4 = 0,08704$

P(X=2) = $\binom{5}{2} * 0,6^2 * 0,4^3 = 0,2304$

P(X>2) = $P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{3} * 0,6^3 * 0,4^2 + ... + \binom{5}{5} * 0,6^5 * 0,4^0 = 0,68256$

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, Aufgaben dieser Art zu lösen und zwar mittels der Tabellen für die Binomialverteilung. Im Schulbuch von Götz (2008) geben die Tabellenwerte bei den hellblau unterlegten Spalten und Zeilen die Wahrscheinlichkeit P(X ≥ k) und bei den dunkelblau unterlegten Spalten und Zeilen die Wahrscheinlichkeit P(X ≤ k) an.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens 2 bzw. mindestens 2 Söhne? Wir orientieren uns am rechten Rand sowie an der untersten Zeile, da $p = 0,6 > 0,5$.
$P(X \geq 2) = 0,91296$ finden wir bei n=5 im Schnittpunkt der Spalte p=0,6 mit der Zeile k=2.
$P(X \leq 2) = 1 - P(X \geq 3) = 0,31744$ ergibt sich aus $1 - P(X \geq 3)$, wobei wir $P(X \geq 3)$ bei n=5 im Schnittpunkt der Spalte p=0,6 mit der Zeile k=3 finden.

Der Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilung berechnen sich wie folgt:

$$E(X) = \mu = n * p \qquad V(X) = \sigma^2 = n * p * (1 - p) = n * p * q$$

Beispiel: Eine Maschine produziert Tennisbälle mit einem durchschnittlichen Ausschussanteil von 5%.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Karton mit 5 Dosen zu je 4 Bällen kein bzw. genau ein Ball Ausschussware ist? $n = 20;\ p = 0,05;\ q = 0,95$

$$P(\text{kein Ausschuss}) = \binom{20}{0} * 0,05^0 * 0,95^{20} = 0,35849$$

Ablesen mittels Tabelle: $0,05 \leq 0,5$. Daher müssen wir aus der dunkelblauen Zeile bzw. Spalte ablesen: $P(X = 0) = P(X \leq 0)$, zu finden unter n=20; p=0,05 und k=0

$$P(\text{genau 1 Ausschuss}) = \binom{20}{1} * 0,05^1 * 0,95^{19} = 0,37735$$

Ablesen mittels Tabelle: $P(X = 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0,37735$

Die Wahrscheinlichkeit für keinen schadhaften Ball beträgt rund 36% und jene für genau einen schadhaften Ball beträgt rund 38%.

b) Wie viele Bälle Ausschussqualität müssen wir unter 20 Stück erwarten und um wie viel schwankt dieser Wert voraussichtlich nach oben und unten?

$$E(X) = n * p = 20 * 0,05 = 1$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n * p * q} = \sqrt{20 * 0,05 * 0,95} = 0,975$$

Wir müssen mit einem Ball Ausschussware rechnen, wobei dieser Wert etwa um einen Ball nach oben bzw. unten schwankt.

2.9.3 Die Poisson-Verteilung[28]

Die Poisson-Verteilung ist der Grenzwert der Binomialverteilung, wenn n gegen unendlich strebt und zwar so, dass $n * p = \lambda$ konstant bleibt.
Durch

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, ...$$

wird eine diskrete Zufallsvariable X erklärt. Diese Verteilung heißt **Poisson-Verteilung mit dem Parameter** λ. Sie wird bei der Berechnung seltener Ereignisse verwendet.

Für eine mit dem Parameter λ Poisson-verteilte Zufallsvariable X berechnet sich der **Erwartungswert** und die **Varianz** wie folgt

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \sigma^2 = \lambda$$

Beispiel: In einem utopischen Land beträgt die Selbstmordrate 1:25000 pro Jahr. Insgesamt leben in diesem Land 100000 Menschen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden innerhalb eines Jahres k=0,1,2 bzw. mehr als 2 Selbstmorde statt?

p= $\frac{1}{25000}$, n= 100000 somit ist $\lambda = n * p = 4$

P(X=0)= $\frac{4^0}{0!} * e^{-4} = 0,0183$
P(X=1)= $\frac{4^1}{1!} * e^{-4} = 0,0732$
P(X=2)= $\frac{4^2}{2!} * e^{-4} = 0,1465$
P(X > 2)= $1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda} = 0,762$

Mit der Wahrscheinlichkeit von rund 1,8% findet innerhalb eines Jahres kein, mit rund 7,3% findet genau 1, mit rund 14,7% finden genau 2 und mit rund 76,2% finden mehr als 2 Selbstmorde statt.

[28] vgl. Bosch (1976): 92-96.

2.10 Stetige Zufallsvariable

2.10.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable[29]

Eine Zufallsvariable kann nicht nur einzelne, diskret liegende Werte annehmen, sondern jede reelle Zahl in einem Intervall [a;b]. Eine solche Zufallsvariable bezeichnen wir als stetige Zufallsvariable. Aufgrund des Intervalls ist es sinnlos die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion anzugeben, wie wir es bei den diskreten Zufallsvariablen gemacht haben. Denn die einzelnen Punkte hätten immer Wahrscheinlichkeit 0.

Beispiel: Eine Maschine stellt Nägel her, die eine Soll-Länge von 4 cm haben. Jedoch sind geringe Abweichungen von der Soll-Länge unvermeidbar. Diese geringen Abweichungen sind die Ist-Länge X, welche eine Zufallsvariable sind.
Messen wir jetzt die einzelnen Nägel, so entsteht eine Einteilung der Nägel nach einer Klasse, wie im folgenden Diagramm (Abbildung 2.11) dargestellt wird:

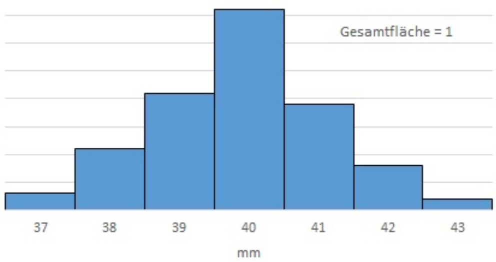

Abbildung 2.11: Länge der Nägel

Die relativen Häufigkeiten entsprechen dabei den Flächeninhalten der einzelnen Säulen.

Wenn die Einteilung der Klassen immer feiner wird, ergibt sich eine im Allgemeinen stetige (jedenfalls aber integrierbare) Kurve f, die als (Graph der) **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der stetigen Zufallsvariablen X** bezeichnet wird [30].

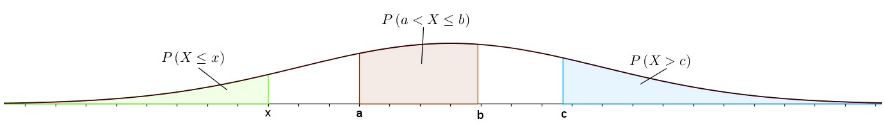

Abbildung 2.12: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

[29] vgl. Götz (2007b): 120.
[30] vgl. Humenberger (2015c): 2.

Die Flächeninhalte unter dieser Kurve im Intervall [a;b] geben wie oben Wahrscheinlichkeiten an. Die Gesamtfläche muss wie beim Histogrammen 1 betragen.

Eine Zufallsvariable X heißt **stetig**, wenn eine nicht negative, integrierbare Funktion f existiert, so dass für ihre Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ die Integraldarstellung

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{\infty}^{x} f(u)\,du$$

gilt. Die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ ist gleich der Fläche, welche die Kurve f links vom Punkt x mit der x-Achse einschließt. Die Funktion f heißt **Dichte** der stetigen Zufallsvariablen X [31].

Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f:

1) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
2) f ist integrierbar, d.h. $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ existiert für jedes $a, b \in \mathbb{R}$
3) Die Gesamtfläche unter f ist 1, d.h. $\int_{\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Dichtefunktionen sind zwar eng verwandt mit den Wahrscheinlichkeiten P$(X = x_i)$ im Diskreten, aber die Funktionswerte der Dichtefunktion sind nicht als Wahrscheinlichkeiten zu interpretieren! Diese sind bei Dichtefunktionen nur Flächeninhalte und die Dichtefunktionen können auch Funktionswerte > 1 annehmen.

Beispiel: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} * (9 - x^2) & \text{für } x \in [-3, 3] \\ 0 & \text{für} x \notin [-3, 3] \end{cases}$$

Ist f eine Dichtefunktion? Was ergibt P$(-2 \leq X \leq 1)$?

Um zu zeigen, dass f eine Dichtefunktion ist, müssen wir die obigen vier Eigenschaften überprüfen:

1) Im Intervall [-3,3] ist $f(x) \geq 0$ und außerhalb dieses Intervalls ist $f(x) = 0$.
2) Die Funktion f ist eine Polynomfunktion. Jede Polynomfunktion lässt sich aufgrund folgender Formel integrieren: Eine Stammfunktion vom f(x)=x^n ist die Funktion F(x)=$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.
3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-3} 0\,dx + \int_{-3}^{3} \frac{1}{36} * (9 - x^2)\,dx + \int_{3}^{\infty} 0\,dx = 0 + \frac{1}{36} * (9x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-3}^{3} + 0 = 1$

[31] vgl. Humenberger (2015c): 2.

P$(-2 \leq X \leq 1)$ ergibt

$$P(-2 \leq X \leq 1) = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{36} * (9x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-2}^{1} = \frac{2}{3}$$

2.10.2 Erwartungswert und Varianz einer stetigen Zufallsvariable[32]

Ist f die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X, so gilt für den **Erwartungswert** und die **Varianz** der stetigen Zufallsvariable X:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)\,dx \qquad V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 * f(x)\,dx$$

Beispiel: Berechne den Erwartungswert sowie die Streuung von X!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} * \left(9 - x^2\right) & \text{für } x \in [-3,3] \\ 0 & \text{für} x \notin [-3,3] \end{cases}$$

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-3} x * 0\,dx + \int_{-3}^{3} x * \frac{1}{36} * \left(9 - x^2\right)\,dx + \int_{3}^{\infty} x * 0\,dx = 0 + \frac{1}{36} * \left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_{-3}^{3} + 0 = 0$$

$$V(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-0)^2 * f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-3} x^2 * 0\,dx + \int_{-3}^{3} x^2 * \frac{1}{36} * \left(9 - x^2\right)\,dx + \int_{3}^{\infty} x^2 * 0\,dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{36} * \left(\frac{9x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right) \Big|_{-3}^{3} + 0 = \frac{9}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \sqrt{\frac{9}{5}}$$

2.11 Die Normalverteilung[33]

Die Normalverteilung ermöglicht es, mit Binomialverteilungen übersichtlich arbeiten zu können. Wie folgendes Beispiel zeigt, ist es nicht möglich eine sehr große Anzahl von Binomialkoeffizienten ohne Computer auszurechnen.

[32]vgl. Götz (2007b): 121-122.
[33]vgl. Humenberger (2015c): 5.

Beispiel: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Würfel bei 1000-maligem Werfen zwischen 100 und 200 mal die Augenzahl sechs erscheint?

$$P(100 \leq X \leq 200) = \sum_{k=100}^{200} \binom{1000}{k} * \left(\frac{1}{6}\right)^k * \left(\frac{5}{6}\right)^{1000-k}$$

2.11.1 Normalverteilung und Standardnormalverteilung[34]

Die durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

festgelegte stetige Verteilung heißt Normalverteilung mit den Parametern μ und σ, kurz N(μ,σ^2)-Verteilung. Sie hat Erwartungswert μ und Varianz σ. Das Aussehen dieser Kurve ist eine sogenannte Glockenkurve (Gauß'sche Glockenkurve).

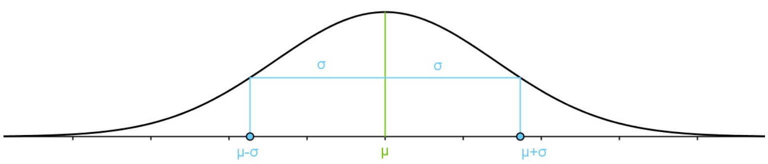

Abbildung 2.13: Gauß'sche Glockenkurve

Wir können diese Normalverteilung mittels einer Standardisierung zur Standardnormalverteilung machen. Kurz N(0,1). Diese hat $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Ihre Dichtefunktion φ ist

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Eigenschaften der Standardnormalverteilung:

1) φ ist unendlich oft differenzierbar.

2) Das Maximum liegt bei z=0 und beträgt $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} \approx 0,4$.

3) Es gibt zwei Wendepunkte an den Stellen (-1|0) und (1|0).

4) Die Kurve ist symmetrisch zur 2. Achse und somit gilt $\varphi(-z) = \varphi(z)$.

5) Die 1. Achse ist beiderseits Asymptote, daher gilt $\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = 0$.

[34] vgl. Humenberger (2015c): 6-7.

Um die Wahrscheinlichkeiten zu erhalten, benötigen wir den Flächeninhalt unter den Dichtefunktionen, die wir mittels der Integrale berechnen können.

$$\text{Allgemein: } P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2 * \pi}} * \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2*\sigma^2}}\, dt$$

$$\text{Standardnormalverteilung: } P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =: \Phi(z)$$

Die Funktion $\Phi(z)$ nennen wir die Verteilungsfunktion einer N(0,1)-verteilten Zufallsvariablen.

Integrale dieser Art können entweder mit dem Computer oder mittels Tabellen ausgerechnet werden.

2.11.2 Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten einer N(0,1)-verteilten Zufallsvariable mittels der Φ-Tabelle[35]

Die Tabelle zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten einer N(0,1)-verteilten Zufallsvariable enthält nur Werte $\Phi(z)$ für $z \in [0,4]$, weil die Glockenkurve bezüglich der y-Achse symmetrisch und außerhalb des Intervalls [-4,4] praktisch Null ist. Somit kann auf eine Tabelle für $z \in [-4,0]$ verzichtet werden. Für negative Werte von z muss folgende Umrechnung getätigt werden: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ für $z \geq 0$.

Beispiel: Ermittle mittels der Φ-Tabelle.

1) P(Z<2,44)

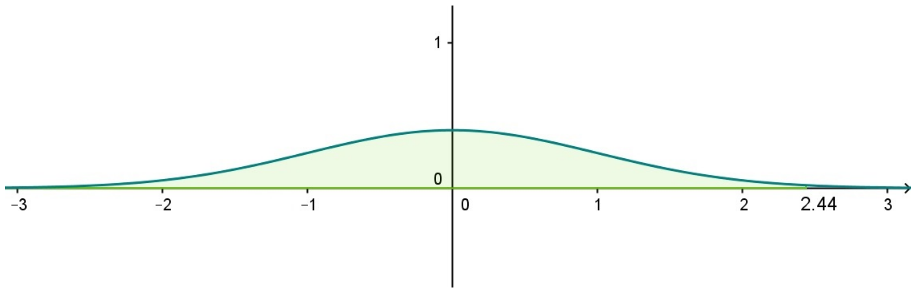

Abbildung 2.14: Skizze 1

$$P(Z < 2,44) = P(Z \leq 2,44) = \Phi(2,44) = 0,99266$$

[35]vgl. Götz (2007b): 124-126.

2) P(Z ≤ -1,24)

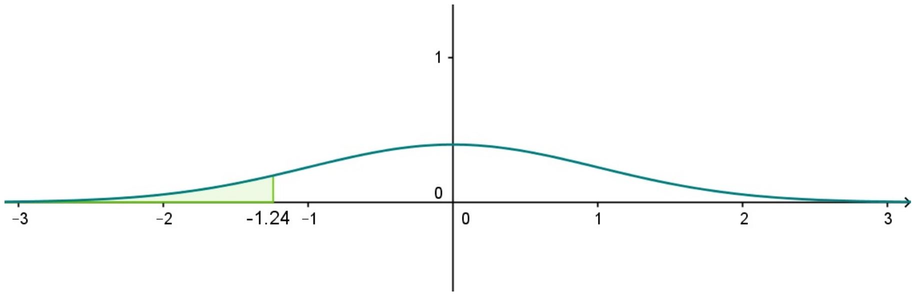

Abbildung 2.15: Skizze 2

$$P(Z \leq -1,24) = \Phi(-1,24) = 1 - \Phi(1,24) = 1 - 0,89251 = 0,10749$$

3) P(-1,45 ≤ Z < 0,33)

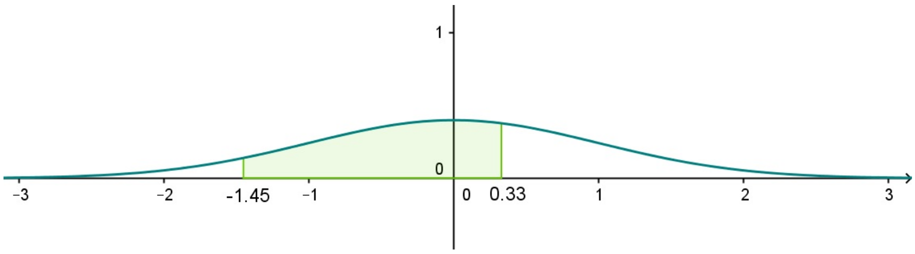

Abbildung 2.16: Skizze 3

$$P(-1,45 \leq Z < 0,33) = \Phi(0,33) - \Phi(-1,45) = \Phi(0,33) - (1 - \Phi(1,45)) = 0,55577$$

4) P(Z ≤ 0,358)

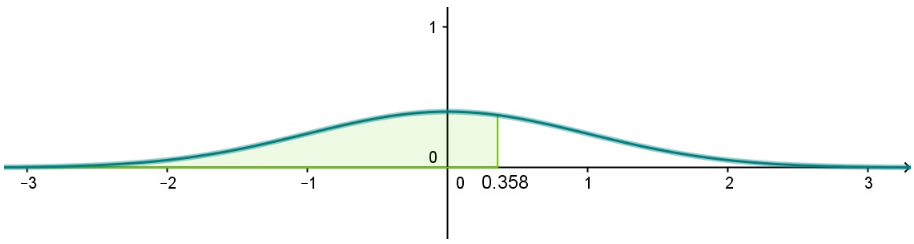

Abbildung 2.17: Skizze 4

Ist z mit mehr als zwei Nachkommastellen angegeben, so müssen wir $\Phi(z)$ mittels linearer Interpolation ermitteln:

$$P(Z \leq 0,358) = \Phi(0,35) + 0,8 * (\Phi(0,36) - \Phi(0,35)) = 0,63683 + 0,8 * 0,00375 = 0,63983$$

Mit dieser einen Tabelle können wir nicht nur das Integral unter der N(0,1)-Glockenkurve berechnen, sondern auch die Integrale unter jeder der ∞^2 vielen N(μ, σ^2)-Glockenkurven ermitteln. Dazu müssen wir durch Substitution alle Aufgaben auf die Standardnormalverteilung zurückführen. Dazu verwenden wir die **Standardisierungsformel**:

$$N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{z=\frac{x-\mu}{\sigma}} N(0,1)$$

$$N(\mu, \sigma^2) \xleftarrow{x=\mu+z*\sigma} N(0,1)$$

2.11.3 Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten einer N(μ, σ^2)-verteilten Zufallsvariable mittels der Φ-Tabelle[36]

Um die Wahrscheinlichkeiten einer N(μ, σ^2)-verteilten Zufallsvariable berechnen zu können, müssen wir die Grenzen x_1 und x_2 der Intervalle gemäß der Standardisierungsformel in die Werte z_1 und z_2 transformieren.

Beispiel: Ermittle mittels der Φ-Tabelle für die N(3; 2^2)-verteilte Zufallsvariable X die angegebenen Wahrscheinlichkeiten.

1) P(X ≤ 5)

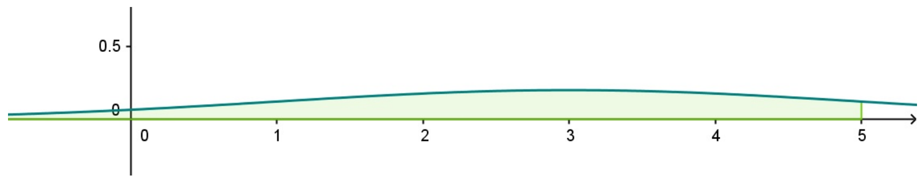

Abbildung 2.18: Skizze 5

$$x = 4 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{5-\mu}{\sigma} = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$P(X \leq 5) = P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0,84134$$

[36]vgl. Götz (2007b): 126.

2) P(X < 2,4)

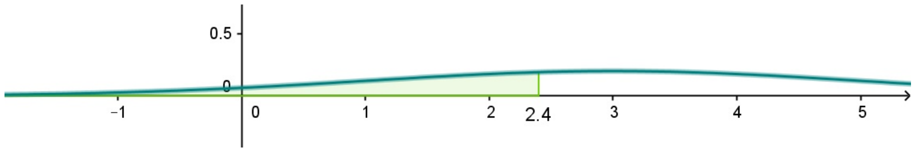

Abbildung 2.19: Skizze 6

$$x = 2,4 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{2,4-\mu}{\sigma} = \frac{2,4-3}{2} = -0,3$$

$$P(X < 2,4) = P(Z < -0,3) = \Phi(-0,3) = 1 - \Phi(0,3) = 1 - 0,61791 = 0,38209$$

3) P(4,2 ≤ X ≤ 5,1)

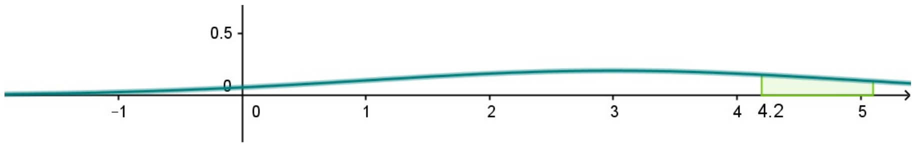

Abbildung 2.20: Skizze 7

$$x_1 = 4,2 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = \frac{4,2-3}{2} = 0,6$$

$$x_2 = 5,1 \qquad \Rightarrow \qquad z_2 = \frac{5,1-3}{2} = 1,05$$

$$P(4,2 \leq X \leq 5,1) = P(0,6 \leq Z \leq 1,05) = \Phi(1,05) - \Phi(0,6) = 0,85314 - 0,72575 = 0,12739$$

4) P(-1,55 < X < 0,884)

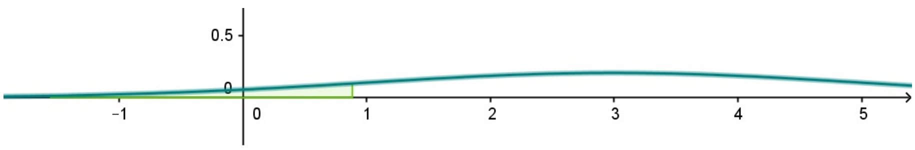

Abbildung 2.21: Skizze 8

$$x_1 = -1,55 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = \frac{-1,55-3}{2} = -2,275$$

$$x_2 = 0,884 \qquad \Rightarrow \qquad z_2 = \frac{0,884-3}{2} = -1,058$$

$$\Phi(2,275) = \Phi(2,27) + 0,5 * (\Phi(2,28) - \Phi(2,27)) = 0,98855$$

$$\Phi(1,058) = \Phi(1,05) + 0,8 * (\Phi(1,06) - \Phi(1,05)) = 0,85497$$

$$P(-1,55 < X < 0,884) = P(-2,275 < Z < -1,058) = \Phi(-1,058) - \Phi(-2,275) =$$

$$= (1 - \Phi(1,058) - (1 - \Phi(2,275)) = 0,98855 - 0,85497 = 0,13358$$

2.11.4 Lösen von Umkehraufgaben mittels der Φ-Tabelle[37]

Im letzten Unterkapitel haben wir uns für die Wahrscheinlichkeiten interessiert, mit der eine normalverteilte Zufallsvariable X in einem bestimmten Intervall auftritt. Nun aber wollen wir wissen, wie das Intervall aussehen muss, damit dort eine N(μ, σ^2)-verteilte Zufallsvariable X mit einer vorgegebenen Wahrscheinlickeit auftritt?

Beispiel: Wie groß muss z sein, damit $P(Z \leq z) = 0,4$ ist? Wegen 0,4 < 0,5 muss unser z negativ sein (siehe Abbildung 2.22).

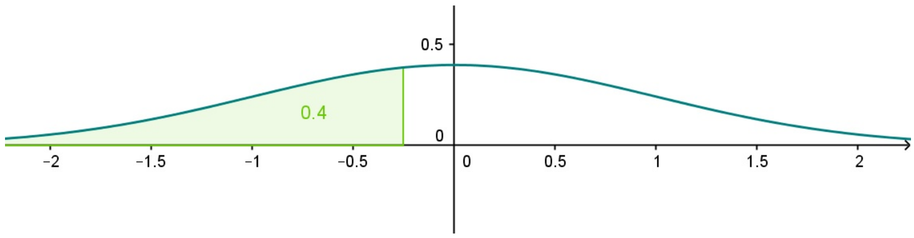

Abbildung 2.22: Skizze 9

Da wir aber keine negativen z-Werte in der Tabelle finden, müssen wir $-z$ ausrechnen:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = 1 - 0,4 = 0,6$$

Jetzt suchen wir den Wert 0,6 in der Tabelle. Wir stellen fest, dass dieser Wert zwischen den z-Werten von 0,25 und 0,26 liegen muss. Daher errechnen wir uns den genauen z-Wert mittels linearem Interpolieren: $\Phi(0,25) = 0,59871$ und $\Phi(0,26) = 0,60257$

$$0,6 = \Phi(0,25) + a * (\Phi(0,26) - \Phi(0,25)) = 0,59871 + a * 0,00385 \qquad \Rightarrow \qquad a \approx 0,3$$

$$\Rightarrow \qquad -z = 0,253 \qquad \Rightarrow \qquad z = -0,253$$

[37] vgl. Götz (2007b): 127.

Beispiel: Die Zufallsvariable X ist N(2;3^2)-verteilt. Wie groß ist x, wenn folgendes gilt: P(X ≤ x)=0,4?

Zuerst müssen wir P(Z ≤ z)=0,4 ermitteln. Das haben wir im obigen Beispiel bereits getan. Daher wissen wir, dass z=-0,253 beträgt. Nun müssen wir die Standardisierung umkehren, indem wir in die Standardisierungsformel einsetzen:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \Leftrightarrow \qquad -0,253 = \frac{x-2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x = 1,241$$

Somit wissen wir, dass für eine Zufallsvariable X, die N(2;3^2)-verteilt ist, gilt: P(X ≤ 1,241)=0,4.

2.11.5 Anwendungsaufgaben zur Normalverteilung[38]

Anwendungsaufgaben zur Normalverteilung werden großteils bei Qualitätskontrollen eingesetzt. Wir möchten bei bekannter Verteilung N(μ, σ^2) wissen, wie hoch der relative Anteil γ an brauchbaren Erzeugnissen ist bzw. wie hoch der Anteil an Ausschussware $\alpha = 1-\gamma$ ist. Hierzu gibt es in der Schule vier Typen an Aufgaben, die im Folgenden behandelt werden. Alle diese Aufgabentypen lassen sich auf Gleichungen der Art $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \gamma$ mit $x_1, x_2 \in]-\infty, \infty[$ zurückführen.

Es gibt ein um μ symmetrischen Toleranzintervall, genannt γ-Streubereich, welches wie folgt berechnet wird: für x_1 und x_2 gilt $x_1 = \mu - \varepsilon$ bzw. $x_2 = \mu + \varepsilon$ und somit ist

$$P(\mu - \varepsilon \leq X \leq \mu + \epsilon) = P(|X - \mu| \leq \varepsilon) = \gamma,$$

wobei $\varepsilon = z * \sigma$ ist.

Der Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass wir die gesuchten Intervallwahrscheinlichkeiten mit $\Phi(z)$ ohne Umrechnung durch die Standardnormalverteilung ausrechnen können.

Erste Grundaufgabe - Berechnung von α bzw. γ

Beispiel: Eine Maschine stellt Tennisbälle her. Ihr Gewicht X ist gemäß N($57,6; 0,9^2$)-verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) das Gewicht um höchstens 0,5g vom Erwartungswert abweicht?

$$P(57,6 - \mu \leq X \leq 57,6 + \mu = P(57,1 \leq X \leq 58,1)$$

$$x_1 = 57,1 \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = \frac{57,1 - 57,6}{0,9} = -\frac{5}{9} \approx -0,56$$

$$x_2 = 58,1 \qquad \Rightarrow \qquad z_2 = \frac{58,1 - 57,6}{0,9} = \frac{5}{9} \approx 0,56$$

[38] vgl. Götz (2007b): 129-133.

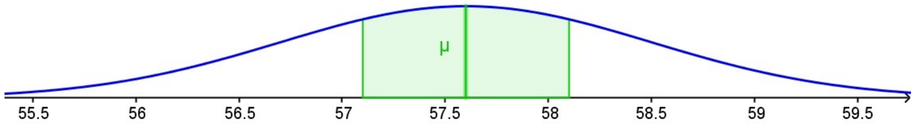

Abbildung 2.23: Skizze 10

$$P(57,1 \leq X \leq 58,1) = P(-0,56 \leq Z \leq 0,56) = \Phi(0,56) - (1 - \Phi(0,56)) =$$

$$= 2 * \Phi(0,56) - 1 = 2 * 0,71226 - 1 = 0,42452$$

Auf lange Sicht weichen 42,5% aller Tennisbälle höchstens um 0,5g vom Erwartungswert ab.

b) die Gewichtsuntergrenze von 56,7g unterschritten wird? Somit gilt P($X < 56,7$).

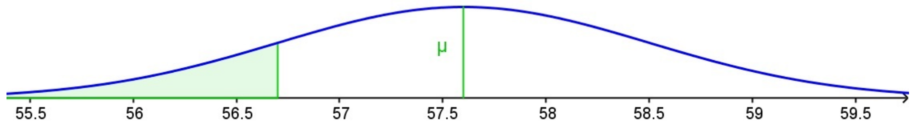

Abbildung 2.24: Skizze 11

$$x = 56,7 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{56,7 - 57,6}{0,9} = -1$$

$$P(X < 56,7) = P(X \leq 56,7) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84134 = 0,15866$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem zufällig herausgegriffenen Tennisball das Mindestgewicht von 56,7g unterschritten wird, beträgt 15,9%.

Zweite Grundaufgabe: Berechnung von ϵ

Beispiel: Eine Maschine produziert Tennisbälle. Deren Durchmesser sei normalverteilt mit $\mu = 6,7$ und $\sigma = 0,1$. Wie sind die Toleranzgrenzen (symmetrisch zu μ) festgelegt, wenn wir wissen, dass 89% der produzierten Tennisbälle zum Verkauf freigegeben werden?

$$P(|X - \mu| \leq \varepsilon) = \gamma \qquad \Leftrightarrow \qquad P(|X - 6,7| \leq \varepsilon) = 0,89$$

Wir lösen zunächst die in die Standardnormalverteilung transformierte Aufgabe:

$$P(|Z| \leq z) = 0,890 = 2 * \Phi(z) - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(z) = 0,945 \qquad \Rightarrow \qquad z = 1,595$$

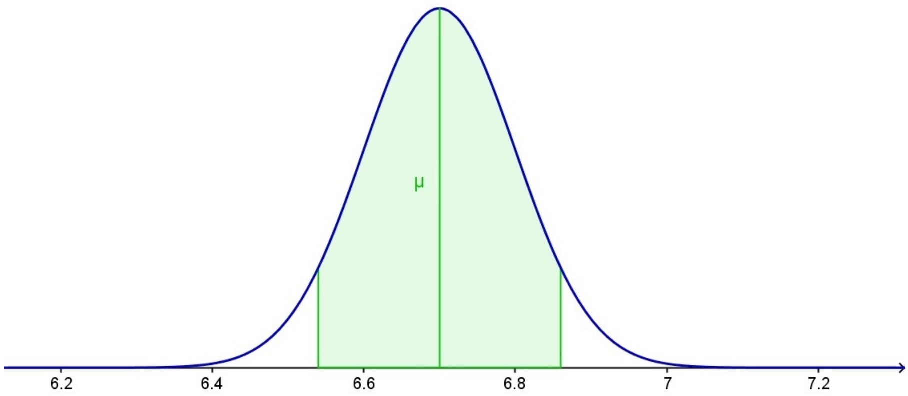

Abbildung 2.25: Skizze 12

Nun machen wir die Standardisierung rückgängig, indem wir ε berechnen:

$$\varepsilon = z * \sigma = 1,595 * 0,1 = 0,1595$$

Aus diesem Ergebnis berechnen wir die Toleranzgrenzen:

$$x_1 = \mu - \varepsilon = 6,5405 \qquad \text{und} \qquad x_2 = \mu + \varepsilon = 6,8595$$

Der zum Verkauf freigegebene Durchmesser für Tennisbälle beträgt zwischen 6,54 und 6,86 cm.

Dritte Grundaufgabe: Berechnung von μ

Beispiel: Ein Hersteller von Tennisbällen behauptet, dass 95% seiner Bälle mindestens 135 cm hoch springen, wenn sie aus einer Höhe von 254 cm auf eine ebene, harte Fläche fallen gelassen werden. Wie hoch ist die durchschnittliche Sprunghöhe der Tennisbälle unter der Voraussetzung, dass eine Normalverteilung mit $\sigma = 3,6$ cm vorliegt?

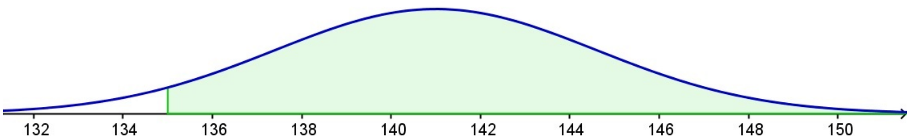

Abbildung 2.26: Skizze 13

Wir müssen μ aus $P(X \leq 135) = 0,95$ berechnen, indem wir zur Standardnormalverteilung übergehen:

$$P(Z \geq z) = 0,95 = 1 - \Phi(z) \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(z) = 0,05 \qquad \Rightarrow \qquad z = -1,645$$

Nun entsprechen z und x einander in der Standardisierungsformel:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \Leftrightarrow \qquad -1,645 = \frac{135-\mu}{3,6} \qquad \Rightarrow \qquad \mu = 141cm$$

Die Tennisbälle springen durchschnittlich 141 cm hoch, wenn sie aus einer Höhe von 254 cm auf eine ebene, harte Fläche fallen gelassen werden.

Vierte Grundaufgabe: Berechnung von σ

Beispiel: Eine Firma produziert Tennisbälle, von denen 95% eine Gumminaht haben, die zwischen 3 und 7 mm dick ist. Wie groß ist die Standardabweichung σ der Gumminaht X, wenn wir annehmen, dass die Breite der Gumminaht eines Tennisballs normalverteilt ist und das gegebene Intervall symmetrisch um μ liegt?

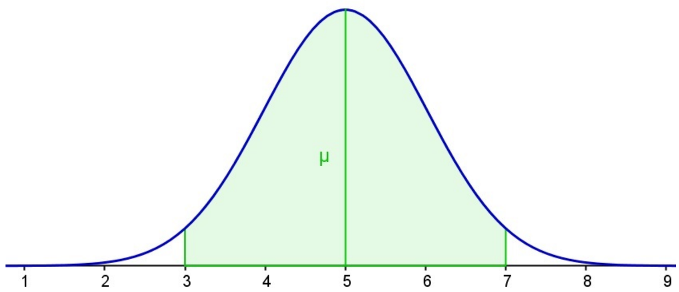

Abbildung 2.27: Skizze 14

Aus der Symmetrie folgt: $\mu = \frac{3+7}{2} = 5$ und $\epsilon = 2$.
Um die Standardnormalverteilung nutzen zu können, formen wir um:

$$P(3 \leq X \leq 7) = P(|X-3| \leq 2) = 0,95$$

also

$$P(|Z| \leq z) = 0,95 = 2 * \Phi(z) - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(z) = 0,975 \qquad \Rightarrow \qquad z = 1,96$$

Aus $\epsilon = z * \sigma$ folgt $\sigma = 1,02$mm.

Die Standardabweichung der Gumminaht eines Tennisballs beträgt rund 1 mm.

2.12 Die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung[39]

Beim Berechnen der Wahrscheinlichkeiten einer binomial-verteilten Zufallsvariablen müssen wir Summen berechnen. Einfacher wäre dies jedoch, wenn wir diese Summen näherungsweise mittels bestimmter Integrale berechnen könnten. Die Frage ist jedoch, über welche Kurve wir integrieren können?

Im Abschnitt 2.9.3 haben wir festgestellt, dass die Binomialverteilung für sehr kleine p und große n durch die Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda = n * p$ approximiert werden kann.

Jetzt betrachten wir den Fall, dass der Parameter p konstant bleibt und n gegen unendlich geht, kurz gesagt, dass wir ein Bernoulli-Experiment mit einem großen Versuchsumfang n durchführen. Die Zufallsvariable X_n sei B(n,p)-verteilt mit den Wertevorrat $\mathrm{W}(X_n) = \{0, 1, 2, ..., n\}$, den Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(X = k) = b(k, n, p) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$ mit $k = 0, 1, ..., n$ und $0 < p < 1$, dem Erwartungswert $\mathrm{E}(X_n) = n * p$ und der Varianz $\sigma^2 = n * p * q$.

Die Wahrscheinlichkeiten der diskreten Zufallsvariable X^n stellen wir in einem Histogramm und nicht wie bei einer diskreten Zufallsvariable üblich, in einem Streudiagramm dar, wobei jedes Rechteck die Breite 1 und die Höhe b(k,n,p) aufweist. Somit ist die Wahrscheinlichkeit der Flächeninhalt von Rechtecken.

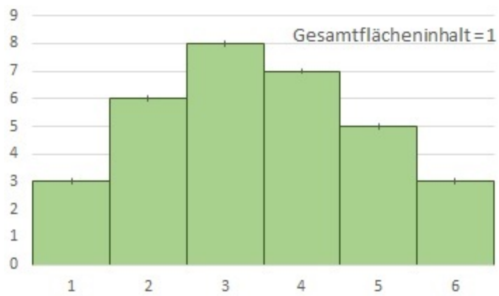

Abbildung 2.28: Wahrscheinlichkeiten der diskreten Zufallsvariable

Wie wir erkennen können, besitzt die gesuchte Funktion f ungefähr die Form der Glockenkurve. Die drei Mathematiker A. Moivre, P. Laplace und C. Gauss fanden heraus, dass die Gauss'sche Glockenkurve die bestmögliche Approximation darstellt. Bestmöglich bedeutet hierbei, dass die Differenz zwischen dem Wert des Integrals und dem Wert der Summe für $n \to \infty$ gegen 0 strebt. Kurz gesagt, die Grenzverteilung der Binomialverteilung ist die Normalverteilung. Diese Approximation gilt, wenn $\sigma = \sqrt{n * p * q} > 3$ ist.

[39]vgl. Götz (2007b): 134-144.

Somit gilt die integrale Näherungsformel: Ist X eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsvariable, so kann diese im Fall $\sigma > 3$ in sehr guter Näherung durch eine Zufallsvariable Y ersetzt werden, die normalverteilt ist mit $\mu = n * p$ und $\sigma = \sqrt{n * p * q}$:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) \approx P(x_1 - 0,5 \leq Y \leq x_2 + 0,5) = \int_{x_1-0,5}^{x_2+0,5} \frac{1}{\sigma * \sqrt{2 * \pi}} * e^{-\frac{1}{2}*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \, dx$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2 + 0,5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - 0,5 - \mu}{\sigma}\right)$$

Die Verbreiterung des Integrationsintervalls $[x_1, x_2]$ um je 0,5 heißt Stetigkeitskorrektur. Dadurch wird die Approximation für kleine σ wesentlich genauer. X ist im Gegensatz zu Y eine diskrete Zufallsvariable und hier gilt: $P(x_1 < X < x_2) \neq P(x_1 \leq X < x_2) \neq P(x_1 \leq X \leq x_2) \neq P(x_1 < X \leq x_2)$.

Beispiel: Die Lawn Tennis Championships werden jährlich in Wimbeldon ausgetragen. Den größten Platz für Zuschauer hat der Center Court, in dem 15000 Zuseher Platz finden. Erfahrungsgemäß vergessen 10% der Zuschauer ihre mitgebrachten Smartphones auszuschalten. Wie groß ist die Chance der Platzordner bei zufälliger Durchsuchung von 200 Zusehern weniger als 10 oder mehr als 30 eingeschaltete Smartphones zu finden?

$$\mu = 200 * 0,1 = 20 \qquad \sigma = \sqrt{200 * 0,1 * 09} = \sqrt{18}$$

$$P(X < 10) + P(x > 30) = P(X \leq 9) + P(X \geq 31) = \Phi\left(\frac{9,5 - 20}{\sqrt{18}}\right) - \Phi\left(\frac{30,5 - 20}{\sqrt{18}}\right) =$$

$$= \Phi(-2,47487) - \Phi(2,47487) = 2 * (1 - \Phi(2,47487)) = 0,01333$$

Die Platzordner werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,33% weniger als 10 oder mehr als 30 eingeschaltete Smartphones zu finden

2.12.1 γ-Streubereiche für die absolute und relative Häufigkeit einer binomialverteilten Zufallsvariable

Die absolute Häufigkeit X der Treffer in einer Stichprobe vom Umfang n ist binomialverteilt, wenn es nur zwei Arten von Möglichkeiten gibt, nämlich Treffer und Nieten.

Wir interessieren uns für Wahrscheinlichkeiten der Form $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \gamma$. Gibt es einen γ-Streubereich, das bedeutet, ein um den Erwartungswert E(X)=μ symmetrisches Intervall vom Radius $\epsilon > 0$, so erhalten wir

$$P(\mu - \epsilon \leq X \leq \mu + \epsilon) = P(|X - \mu| \leq \epsilon) = \gamma$$

Die näherungsweise Berechnung des obigen Ausdrucks erfolgt wie bereits im vorherigen Kapitel durch Rückführung auf $\gamma = P(|Z| \leq z) = 2*\Phi(z)-1$ bei der Standardnormalverteilung. Somit erhalten wir die **γ-Streubereichsformel für die absolute Häufigkeit X**, wobei X binomialverteilt ist:

ohne Stetigkeitskorrektur	mit Stetigkeitskorrektur
$P(\|X - n*p\| \leq z*\sqrt{n*p*q}) = \gamma \approx 2*\Phi(z)-1$	$P(\|X - n*p\| \leq z*\sqrt{n*p*q} - 0,5) = \gamma \approx 2*\Phi(z)-1$

Analog können wir den γ-Streubereichen für die relative Häufigkeit X/n der Treffer in einer Stichprobe vom Umfang n ermitteln.
Somit können wir die **γ-Streubereichsformel für die relative Häufigkeit X/n**, wobei X binomialverteilt ist, anschreiben:

ohne Stetigkeitskorrektur	mit Stetigkeitskorrektur
$P\left(\left\|\frac{X}{n} - p\right\| \leq z*\sqrt{\frac{p*(1-p)}{n}}\right) = \gamma \approx 2*\Phi(z)-1$	$P\left(\left\|\frac{X}{n} - p\right\| \leq z*\sqrt{\frac{p*(1-p)}{n}} - \frac{0,5}{n}\right) = \gamma \approx 2*\Phi(z)-1$

2.12.2 Systematisches Lösen von Anwendungsaufgaben zur Binomialverteilung mittels der Normalverteilung

Analog wie bei den Anwendungsaufgaben zur Normalverteilung gibt es auch bei der Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung vier Arten von Grundaufgaben.

Erste Grundaufgabe: Berechnung von γ aus n, p und ϵ (bzw. z)

Beispiel: Ein Tennisspieler schlägt mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,10$ nicht korrekt auf. Als Training macht er insgesamt innerhalb einiger Wochen 1000 Aufschläge. Mit welcher Wahrscheinlichkeit γ weichen die unbrauchbaren Aufschläge um höchstens $\epsilon = 0,02$ vom Wert p ab?

Wir haben die folgende Gleichung für γ zu lösen: $P(|X/n - 0,1| \leq 0,02) = \gamma$ bzw. nach Übergang zu den absoluten Häufigkeiten durch Multiplikation mit $n = 1000$: $P(|X - 100| \leq 20) = \gamma$.
Wegen $\mu = 1000*0,1 = 100$ und $\sigma = \sqrt{1000*0,1*0,9} = \sqrt{90} > 3$ dürfen wir die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximieren. Aus Gründen der Genauigkeit verwenden wir die Stetigkeitskorrektur.

$$\epsilon = z*\sigma - 0,5 \qquad \Rightarrow \qquad 20 = z*\sqrt{90} - 0,5 \qquad \Rightarrow \qquad z = 2,16$$

$$\Rightarrow \gamma = 2*\Phi(2,16) - 1 = 2*0,98461 - 1 = 0,96922$$

Der Anteil der nicht korrekt ausgeführten Aufschläge weicht mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma \approx 97\%$ um höchstens 0,02 vom erwarteten Anteil $p = 0,1$ ab.

Zweite Grundaufgabe: Berechnung von ϵ (bzw. z) aus n, p und γ

Beispiel: Eine Tennisspielerin schlägt mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,95$ korrekt auf. Als Training plant sie insgesamt $n = 200$ Aufschläge hintereinander zu machen. Für welches ϵ können wir mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0,98$ voraussagen, dass die Anzahl der korrekt ausgeführten Aufschläge im Intervall $[\mu - \epsilon, \mu + \epsilon]$ liegt?

X ist binomialverteilt mit $\mu = 200 * 0,95$ und $\sigma = \sqrt{200 * 0,95 * 0,05} = 3,08$. Somit dürfen wir die Approximation durch die Normalverteilung durchführen und die Stetigkeitskorrektur anwenden. Folgende Gleichung ist zu lösen: $P(|X - 190| \leq \epsilon) = 0,98$.

$$\gamma = 0,98 = 2 * \Phi(z) - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(z) = \frac{0,98 + 1}{2} = 0,99 \qquad \Rightarrow \qquad z = 2,33$$

$$\epsilon = z * \sigma - 0,5 \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon = 2,33 * 3,08 - 0,5 = 6,7$$

Die Anzahl der korrekt ausgeführten Aufschläge liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% im Intervall [190-6,7;190+6,7]. Folglich dürfen wir erwarten, dass mindestens 184 und höchstens 196 Aufschläge korrekt ausgeführt werden.

Dritte Grundaufgabe: Berechnung von n aus p, ϵ (bzw. z) und γ

Beispiel: Bei einem Tennisturnier werden erfahrungsgemäß 80% der Karten verkauft. Wie viele Plätze sollen bereitgestellt werden, wenn wir mit 90% Wahrscheinlichkeit sicher stellen wollen, dass höchstens 50 Plätze frei bleiben, aber auch höchstens 50 Personen keinen Platz mehr finden?

X ist binomialverteilt mit $\mu = n*0,80$ und $\sigma = \sqrt{n * 0,8 * 0,2} = 0,4*\sqrt{n}$. Wir müssen folgende Gleichung lösen: $P(|X - n * p| \leq z * \sqrt{n * p * q} - 0,5) = 0,9$

$$\gamma = 0,9 = 2 * \Phi(z) - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(z) = 0,95 \qquad \Rightarrow \qquad z = 1,645$$

$$\epsilon = z * \sigma - 0,5 \qquad \Rightarrow \qquad 50 = 1,645 * 0,4 * \sqrt{n} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{n} = 67,74772 \qquad \Rightarrow \qquad n = 5891$$

Es müssen also 5891 Plätze zur Verfügung gestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% höchstens 50 Plätze frei bleiben, aber auch höchstens 50 Personen keinen Platz mehr finden.

Vierte Grundaufgabe: Berechnung von p aus n, ϵ (bzw. z) und γ

Beispiel: Eine häufige Erkrankung unter Tennisspielern ist eine Sehnenscheidenentzünung. Wie groß ist die Heilung unter 1000 Patienten, wenn wir aus Erfahrung wissen, dass mit 90% Wahrscheinlichkeit der Anteil der Heilungen innerhalb eines Monats um höchstens 0,020 um eine Heilungsrate p schwankt? Welchen Wert hat p?

$$P(|X/n-p| \leq 0,020) = 0,9 \qquad \Rightarrow \qquad P(|X-1000*p| \leq 20) = 0,9$$

$$\mu = 1000*p \qquad \sigma = \sqrt{1000*p*(1-p)}$$

$$\gamma = 0,9 = 2*\Phi(z)-1 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(z) = 0,95 \qquad \Rightarrow \qquad z = 1,645$$

$$\epsilon = z*\sigma - 0,5 \qquad \Rightarrow \qquad 20 = 1,645*\sqrt{1000*p*(1-p)} - 0,5 \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = 0,8079 \wedge p_2 = 0,1921$$

Es gibt entweder 808 oder 192 Heilungen.

2.13 Testen von Hypothesen[40]

2.13.1 Testen von Hypothesen bei gegebenem Ablehnungsbereich

In der Statistik geht es darum Hypothesen über einen Parameter zu testen. Dazu entnehmen wir eine Stichprobe und betrachten die Abweichungen vom erwarteten Wert. Kleine Abweichungen werden akzeptiert, größere werden darauf hinweisen, dass die Richtigkeit der Behauptung angezweifelt werden sollte. Um zu wissen, in welchem Ausmaß die Abweichung vorliegt, betrachten wir den Erwartungswert $\mu = E(X)$ sowie das Intervall $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$.
Liegt der beobachtete Wert x der Anzahl X an Erfolgen eines Bernoulli-Experiments innerhalb dieses Intervalls, so gibt es keine auffälligen Abweichungen und wir werden die Hypothese nicht ablehnen. Liegt der beobachtete Wert x der Anzahl X an Erfolgen jedoch außerhalb, werden wir die Richtigkeit der Hypothese anzweifeln und sie ablehnen, obwohl wir dadurch die Unrichtigkeit der Hypothese nicht beweisen können. Daher gibt es eine Irrtumswahrscheinlichkeit α mit der die Möglichkeit angegeben wird, dass wir die Hypothese zu Unrecht abgelehnt haben. Somit ist die Irrtumswahrscheinlichkeit α eine Größe, die die Zuverlässigkeit des Testverfahrens angibt.
Im Allgemeinen müssen wir beim Testen von Hypothesen wie folgt vorgehen:

- Festlegung des Testverfahrens (Prüfgröße, Stichprobenumfang, kritischer Bereich) und Überprüfung der Sinnhaftigkeit des gewählten Testverfahrens durch Berechnung der Irrtumswahrscheinlichkeit,

[40]vgl. Götz (2007b): 145-157.

- Ziehung und Analyse der Stichprobe,
- Interpretation der Ergebnisse.

Der Ablehnungsbereich einer Hypothese kann linksseitig, rechtsseitig sowie zweiseitig vom Erwartungswert liegen. In der folgenden Abbildung (Abbildung 2.29) ist der Annahmebereich $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$ grün und der Ablehnungsbereich rot dargestellt:

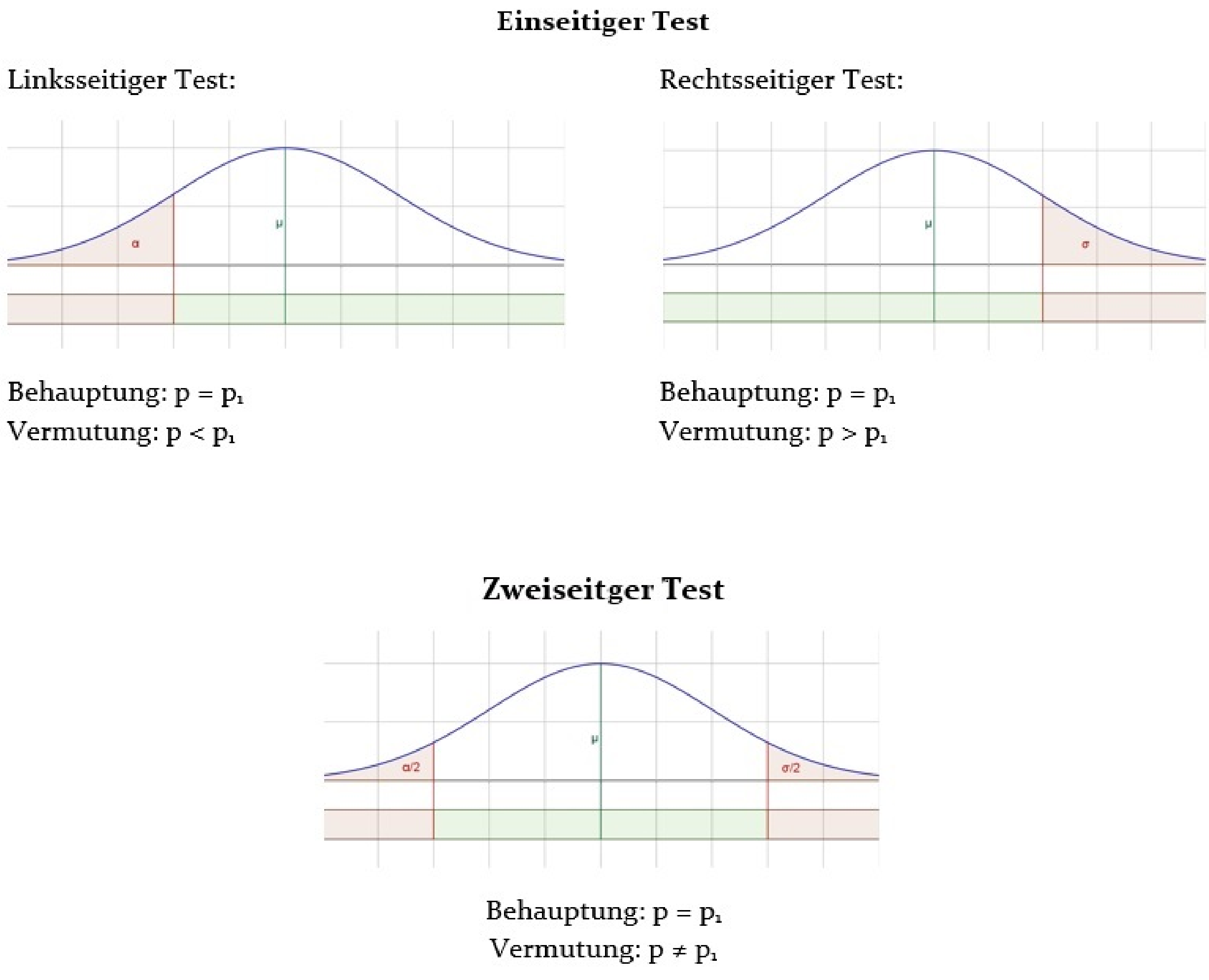

Abbildung 2.29: Ablehnungsbereich einer Hypotehese

Beispiel: In einem utopischen Land spielen 38% der Männer Tennis. In einer Stichprobe von 1000 Männern finden wir jeweils 400 tennisspielende Personen. Hat sich der Anteil der Tennisspieler verändert? Wir wollen die Hypothese eines unveränderten Anteils verwerfen, wenn das Testergebnis außerhalb des 3σ-Intervalls um μ liegt. Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit dieses Tests?

$$\mu = n * p = 1000 * 0,38 = 380 \qquad \sigma = \sqrt{n * p * q} = \sqrt{235,6} > 3$$

$$\Rightarrow 3\sigma\text{-Intervall}=[\mu - 3*\sigma; \mu + 3*\sigma] = [334; 426] \qquad \Rightarrow \qquad K = [0;333] \cup [427;1000]$$

$$\alpha = 1 - P(334 \leq X \leq 426) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{426,5-380}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{333,5-380}{\sigma}\right)\right) = 1 - (\Phi(3,03) - \Phi(-3,03))$$

$$= 1 - (\Phi(3,03) - (1 - \Phi(3,03))) = 1 - (2*\Phi(3,03) - 1) = 1 - (2*0,99878 - 1) = 0,00244$$

Nein, die Anzahl der Tennisspieler hat sich mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \approx 0,244\%$ nicht verändert.

2.13.2 Testen von Hypothesen bei gegebener Irrtumswahrscheinlichkeit

In der Praxis ist es üblich, die Irrtumswahrscheinlichkeit α vorzugeben und den zugehörigen Ablehnungsbereich auszurechnen.
Die Zahl $\gamma = 1 - \alpha$ heißt Signifikanzniveau. Liegt das Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich des Tests, so sagen wir, wenn $\alpha = 0,05$, dass es eine signifikante Abweichung der Prüfgröße X vom erwarteten Wert gibt. Ist $\alpha = 0,003$, so gibt es eine hochsignifikante Abweichung der Prüfgröße X vom erwarteten Wert.

Beispiel: In einem utopischen Land spielen laut Angabe des Gesundheitsministeriums 37% aller Frauen Tennis. Unter 1000 zufällig ausgewählten Frauen finden wir 402 Tennisspielerinnen. Hat sich der Anteil der Tennisspielerinnen aufgrund der eben beendeten Sportkampagne signifikant verändert? Der Test soll zweiseitig sowie geeignet einseitig (ohne Stetigkeitskorrektur) durchgeführt werden.

$$\mu = n*p = 370 \qquad \sigma = \sqrt{n*p*q} = \sqrt{233,1}$$

Zweiseitig:

$$\frac{\alpha}{2} = 0,025 = \Phi(z) \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = -1,96 \qquad \text{und} \qquad \frac{\alpha}{2} = 0,025 = 1 - \Phi(z) \qquad \Rightarrow \qquad z_2 = 1,96$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 340 \qquad \text{und} \qquad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 400$$

Die Anzahl der Tennisspielerinnen hat sich signifikant verändert, da $402 \in K = [0,340] \cup [400,1000]$.

Einseitig (rechtsseitig):

$$\alpha = 0,05 = 1 - \Phi(z) \qquad \Rightarrow \qquad z = 1,645 \qquad \Rightarrow \qquad z = 1,645 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-370}{\sigma} \qquad \Rightarrow \qquad x \approx 395$$

Die Anzahl der Tennisspielerinnen ist signifikant gestiegen, da $402 \in K = [396,1000]$.

2.13.3 Alternativhypothesen

Bis jetzt haben wir eine Hypothese getestet und angenommen oder verworfen. Nun gibt es aber auch die Möglichkeit eine zweite, alternative Hypothese aufzustellen. Um diese beiden Hypothesen unterscheiden zu können, nennen wir die erste Hypothese H_0 und die Alternativhypothese H_1. Um sich zwischen den beiden Hypothesen entscheiden zu können, gibt es folgende Möglichkeiten:

	H_0 ist wahr	$H_1 istwahr$
H_0 wird verworfen (d.h. H_1 wird angenommen)	H_0 wird zu Unrecht verworfen Fehler 1. Art Irrtumswahrscheinlichkeit α	Entscheidung ist richtig
H_1 wird verworfen (d.h. H_0 wird angenommen)	Entscheidung ist richtig	H_1 wird zu Unrecht verworfen Fehler 2. Art Irrtumswahrscheinlichkeit β

Tabelle 2.7: Hypothese - Alternativhypothese

Beispiel: Ein Anbieter von Tennisdressen behauptet, dass 49 von 50 Dressen fehlerlos seien. Ein konkurrierendes Unternehmen behauptet hingegen, dass 3% dieser Dressen Fehler beinhalten. Eine Sportzeitschrift testet 500 Dressen.

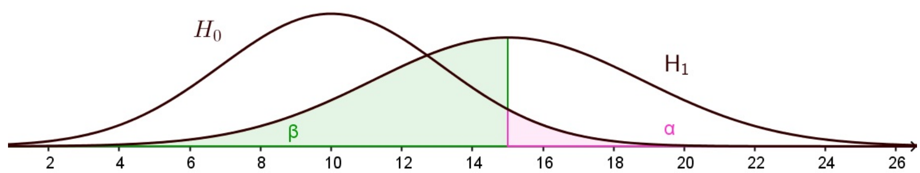

Abbildung 2.30: Skizze 15

1) Wo muss die Ablehnungsgrenze c für H_0 gezogen werden, wenn die Zeitschrift ausschließlich signifikante Ergebnisse veröffentlicht?
   Es sei X die Anzahl von fehlerhaften Dressen unter $n = 500$ Stück. Da es sich um eine signifikante Aussage handelt, beträgt $\alpha = 0,05$. H_0: $p = \frac{49}{50} = 0,98$ $\quad\Rightarrow$ 2% der Dressen sind fehlerhaft.

$$\mu_0 = 500 * 0,02 = 10 \qquad \sigma_0 = \sqrt{n * p * q} = \sqrt{9,8}$$

$$P(X \geq x) = \alpha = 0,05 \quad \Rightarrow \quad P(Z \leq z) = \Phi(z) \quad \Rightarrow \quad z = 1,645 = \frac{c-10}{\sigma_0} \quad \Rightarrow \quad c = 15,15$$

Für H_0 erhalten wir den Ablehnungsbereich $K_0 = [16, 500]$.

2) Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit β dieses Tests?

H_1: $p = 3\%$ der Dressen sind fehlerhaft.

$$\mu_1 = 500 * 0,03 = 15 \qquad \sigma_1 = \sqrt{n * p * q} = \sqrt{14,55}$$

$$\beta = P(X \notin K_0) = P(X \leq 15) = P\left(Z \leq \frac{15-15}{\sigma_1}\right) = P(Z \leq 0) = \Phi(0) = 0,5$$

Die Irrtumswahrscheinlichkeit β beträgt 0,5.

3) Wie lautet die Entscheidung, wenn 15 mangelhafte Dressen gefunden werden?

H_0 kann nicht verworfen werden. Somit müssen wir den Angaben des Herstellers mehr Glauben schenken als den Angaben des konkurrierenden Unternehmens, obwohl das Stichprobenergebnis $X = 15$ hier sogar mit dem vom konkurrierenden Unternehmen angegebenen Erwartungswert übereinstimmt. Das liegt an der sehr großen Irrtumswahrscheinlichkeit.

Kapitel 3

Wahrscheinlichkeitsrechnung im Tennis

3.1 Spielregeln[1]

Im Tennis gibt es drei verschiedene Spielarten: das Einzel, das Doppel und das Mixed. Beim Einzel spielt auf jeder Seite ein Spieler, beim Doppel und Mixed spielen auf jeder Seite des Spielfeldes zwei Spieler. Beim Doppel sind die Spieler immer gleichen, beim Mixed verschiedenen Geschlechts. Um im Tennis ein Match zu gewinnen, müssen Männer bei Grand Slam Turnieren (z.B. French Open, Wimbledon, Australien Open, US Open etc.) drei Sätze für sich entscheiden. Ansonsten ist ein Match nach zwei gewonnenen Sätzen beendet. Ein Satz gilt als gewonnen, wenn man sechs Games (Spiele) bei zwei Games Unterschied für sich entscheiden konnte. Die Satzergebnisse bzw. Zwischenstände werden mittels eines Querstriches angegeben, wobei der aktuelle Aufschläger zuerst genannt wird: z.B. 6/4, 6/1, 6/3. Steht es 6/5 muss das Match fortgesetzt werden bis zum Spielstand 7/5. Gibt es den Spielstand 6/6, wird ein Tie-Break gespielt und im entscheidenden Satz müssen zwei gewonnene Games Unterschied ausgespielt werden. Man schlägt abwechselnd auf und jedes gewonnene Game wird als +1 gezählt.

Ein Game gilt als gewonnen, sobald man vier Punkte erzielen konnte. Punkte kann man aufgrund von Fehlern seines Gegenspielers erhalten, wenn dieser beispielsweise den Ball außerhalb der Spielfeldbegrenzung (ins Out) spielt, den Ball ins Netz wirft oder den Ball nicht erreicht, um ihn zurückzuschlagen. Um den Punktestand des aktuellen Satzes von jenem des aktuellen Games zu unterscheiden wird hier 15, 30, 40, Punkt anstatt von 1, 2, 3 gezählt. Diese Zählweise hat einen historischen Hintergrund: Bevor man Tennis gespielt hat, spielte man ein Spiel namens Jeu de Paume. Das ist ein zirka 400 Jahre altes Ballspiel aus Frankreich, bei dem ein Ball mit der Handfläche geschlagen wird. Damals war es üblich um Geld zu spielen und der Einsatz pro Spielpunkt betrug 15 Denier. Beim zweiten Punkt stand es folglich 30 Denier. Warum man 40 anstatt von 45 zählt geht aus der

[1] vgl. Scholl (2014): 18-19.

Geschichte nicht hervor.

Ein Gleichstand beim Tennis wird Einstand genannt. Trifft dieser Fall bei einem Spielstand von 40/40 zu und es wird vom Aufschläger ein Punkt erzielt, so lautet das Ergebnis Vorteil Aufschläger. Macht dieser einen weiteren Punkt, so kann er den Satz für sich entscheiden. Ansonsten würde es wieder Einstand stehen. Um ein Game oder einen Satz zu gewinnen ist es im Tennis stets notwendig einen zwei-Punkte-Unterschied zu erreichen. Einzig beim Spielgewinn reicht es drei von fünf Sätze zu gewinnen. Kommt es jedoch zu einem Satzspielstand von 6/6, so wird ein Tiebreak gespielt. Hier wird die Zählweise vom Tischtennis übernommen, also für jeden Punkt nach einem Aufschlag wird +1 gezählt. Wer zuerst sechs Punkte (mit zwei Punkten Unterschied) erzielt, gewinnt diesen Satz und dieser Satz endet mit 7/6.

3.2 Gewinnwahrscheinlichkeit im Tennis[2]

Angenommen ein Spieler A gewinnt einen Punkt mit der Wahrscheinlichkeit p. Spieler B gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von q = 1 - p. Diese Wahrscheinlichkeiten bleiben während des gesamten Spiels konstant. $G_{A,k}$ ist die Wahrscheinlichkeit für den Punktgewinn von Spieler A nach k Punkten. Der gesamte Spielverlauf sieht wie folgt aus:

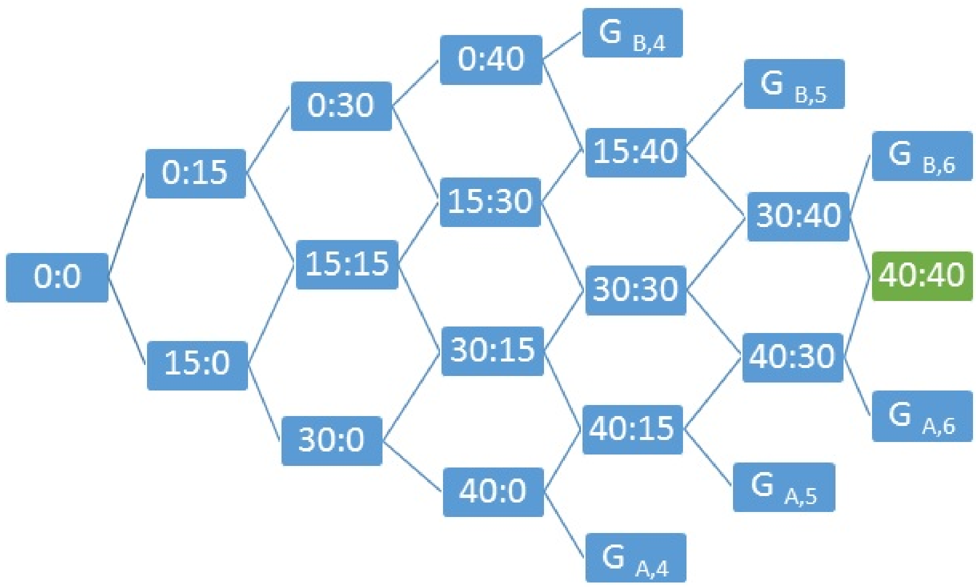

Abbildung 3.1: Spielverlauf eines Games

[2]vgl. Rendl (2003): 3-4.

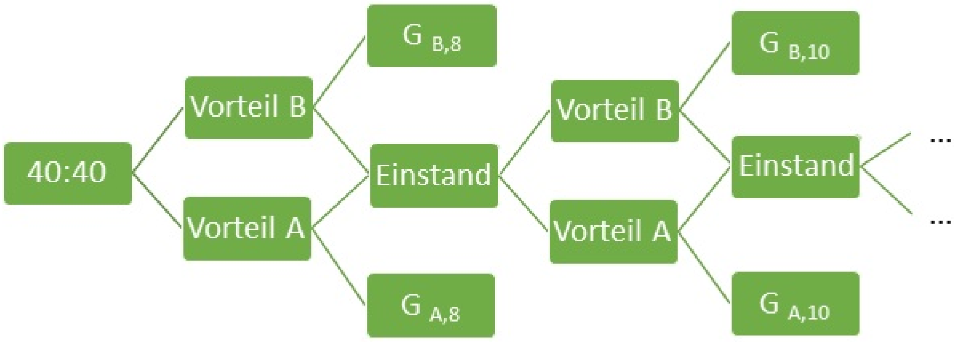

Abbildung 3.2: Spielverlauf bei Einstand

Gewinnt Spieler A k Punkte hintereinander so betragen die Wahrscheinlichkeiten

$$G_{A,4} = p^4$$

$$G_{A,5} = \binom{4}{1} * p^4 * q = 4 * p^4 * q$$

$$G_{A,6} = \binom{5}{2} * p^4 * q^2 = 10 * p^4 * q^2$$

Falls das Game nach 6 Punkten nicht beendet ist, so muss es nach 6 Punkten 40:40 stehen (siehe Abbildung). E_6 bezeichnet die Wahrscheinlichkeit für Einstand nach 6 Punkten. Dieses Ergebnis tritt ein mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$E_6 = \binom{6}{3} * p^3 * q^3 = 20 * p^3 * q^3$$

Da kein Game nach 7 Punkten beendet werden kann (siehe Abbildung), beträgt die Wahrscheinlichkeit für $G_{A,7} = 0$. Ebenso verhält es sich mit dem neunten Punkt, usw.

Wie hoch ist folglich die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Game gewinnt?

$$G_A = G_{A,4} + G_{A,5} + G_{A,6} + G_{A,8} + G_{A,10} + ...$$

$G_{A,8} + G_{A,10} + ...$ führt zu folgender geometrische Reihe:

$$20 * p^5 * q^3 + 40 * p^6 * q^4 + 80 * p^7 * q^5 + ... =$$

$$= 20 * p^5 * q^3 * (1 + 2 * p * q + (2 * p * q)^2 + (2 * p * q)^3 + ...) =$$

$$= \frac{20 * p^5 * q^3}{1 - 2 * p * q}$$

Konvergiert diese Reihe?

$$2 * p * q = 2 * p * (1 - p) = 2 * (p - p^2)$$

Aus diesem Grund definieren wir f(x) wie folgt und betrachten es im Intervall [0,1]:

$$f(x) = x - x^2$$

$$0 = f'(x) = 1 - 2 * x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad \text{Rand betrachten:} \quad f(0) = 0 \text{ und } f(1) = 0$$

Diese Reihe konvergiert daher, weil $2 * p * q \leq 0,5$.

Spieler A gewinnt daher mit der Wahrscheinlichkeit

$$G_A = p^4 + 4 * p^4 * q + 10 * p^4 * q^2 + \frac{20 * p^5 * q^3}{1 - 2 * p * q} = p^4 * \left(1 + 4 * q + \frac{10 * q^2}{1 - 2 * p * q}\right)$$

Beispiel: Rafael Nadal und Roger Federer sind zwei weltberühmte Tennisspieler. Sie sind seit 2004 insgesamt 34 Mal in einem Match aufeinander getroffen. Nadal hält derzeit bei 23 Gewinnen, Federer bei 11. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Nadal a) ein Match b) einen Ballwechsel gegen Federerer?

Lösungsweg:

a) P(Nadal gewinnt ein Match gegen Federer)= $\frac{23}{34} = 0,677$

a) P(Nadal gewinnt einen Ballwechsel gegen Federer)

$$\frac{23}{34} = p^4 * \left(1 + 4 * q + \frac{10 * q^2}{1 - 2 * p * q}\right)$$

$$p = 0,5728$$

Somit gewinnt Nadal mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% ein Match gegen Federer. Einen Ballwechsel gewinnt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 57%.

Dieses Beispiel ist eine reine Modellierung. Nichtsdestotroz kann man die Gewinnwahrscheinlichkeiten bei Spitzensportlern damit gut darstellen, denn deren Leistung ist durchwegs sehr konstant. Bei Hobbysportlern hingegen ist die Performance von der täglichen Verfassung, Umgebungslärm, Wetter, Gegner, etc. abhängig.

Im Tennis kommt es aber nicht nur auf den Gewinn eines Matches an. Auch die **Gewinnwahrscheinlichkeit für ein Tie-Break** kann von Interesse sein. Ein Tie-Break wird gespielt, wenn beide Spieler sechs Games gewonnen haben. Für einen Sieg ist es erforderlich, sieben Punkte mit einem Unterschied von mindestens zwei Punkten zu erzielen. Gezählt wird mittels Ziffern. Die einzelnen Spielstände werden in folgendem Baumdiagramm (Abbildung 3.3) dargestellt:

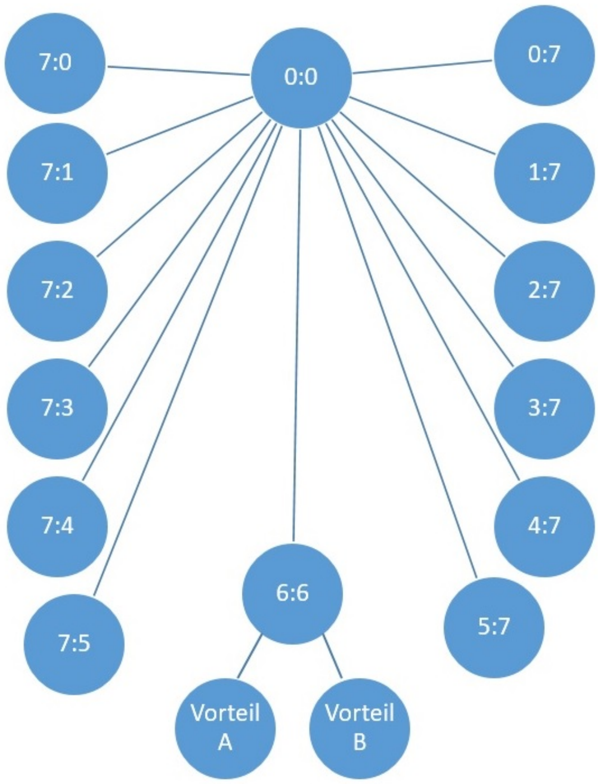

Abbildung 3.3: Verlauf Tie-Break

Die Wahrscheinlichkeit t ein Tie-Break zu gewinnen berechnet man wie folgt

$$t = \sum_{i=0}^{5} \binom{6+i}{6} * p^7 * q^i + \binom{12}{6} * p^6 * q^6 * \frac{p^2}{1-2*p*q}$$

3.3 Matchgewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Satzgewinnwahrscheinlichkeit[3]

Im Damentennis besteht ein Match aus 2 gewonnenen Sätzen. Spielerin A gewinnt gegen ihre Gegnerin Spielerin B einen Satz mit der Wahrscheinlichkeit p. Diese Wahrscheinlichkeit ist unabhängig von den bereits gespielten Sätzen. Aus diesem Grund ist diese Berechnung eine reine Näherung beziehungsweise ein Modell.

Von Interesse ist nun die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der Spielerin A ein Match gewinnt. Die möglichen Spielverläufe sind im folgenden Baumdiagramm (Abbildung 3.4) abgebildet:

Abbildung 3.4: Spielverlauf Damenmatch

Das Match kann entlang von 6 unterschiedlichen Ästen verlaufen. Zwei davon sind nach zwei Sätzen beendet, bei den restlichen vier Ästen sind drei Sätze notwendig. Insgesamt sind drei Spielverläufe für Spielerin A günstig. Die Matchgewinnwahrscheinlichkeit berechnet sich folgendermaßen

$$p^2 + p^2 * (1-p) + (1-p) * p^2 = p^2 * (1 + 2 * (1-p))$$

In der folgenden Tabelle (Tabelle 3.1) ist die Matchgewinnwahrscheinlichkeit für gewisse Satzgewinnwahrscheinlichkeiten p angegeben.

[3]vgl. Bosch (1937): 75-78.

Wahrscheinlichkeit für einen Satzgewinn	Wahrscheinlichkeit für den Matchgewinn
0,3	0,216
0,4	0,352
0,5	**0,5**
0,51	0,514998
0,52	0,529984
0,55	0,57475
0,6	0,648
0,65	0,71825
0,7	0,784
0,75	0,84375
0,8	0,896
0,85	0,93925
0,9	0,972
0,95	0,99275
0,98	0,998816
0,99	0,999702
1	1

Tabelle 3.1: Matchgewinnwahrscheinlichkeit für gewisse Satzgewinnwahrscheinlichkeiten

Falls Spielerin A einen Satz mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wie Spielerin B gewinnt, d.h. $p = 0,5$, dann gewinnt sie auch das Match mit derselben Wahrscheinlichkeit von 0,5. In diesem Fall würde es reichen, wenn nur ein Satz ausgespielt wird. Bei allen Satzgewinnwahrscheinlichkeiten von $p > 0,5$ ist die Matchgewinnwahrscheinlichkeit größer als die Satzgewinnwahrscheinlichkeit. Das bedeutet, dass dieser Spielmodus die bessere Spielerin bevorteilt.

Ein Match endet nach zwei Sätzen, wenn Spielerin A entweder die ersten beiden Sätze gewinnt oder verliert. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt

$$p^2 + (1-p)^2 = 2 * p^2 - 2 * p + 1$$

Wahrscheinlichkeit für einen Satzgewinn	Wahrscheinlichkeit für den Matchgewinn nach 2 Sätzen
0,5	0,5
0,6	0,52
0,7	0,58
0,8	0,68
0,9	0,82
1	1

Tabelle 3.2: Matchgewinnwahrscheinlichkeit nach zwei Sätzen

Aus obiger Tabelle (Tabelle 3.2) ist ersichtlich, dass die Wahrscheinlichkeiten für einen Matchgewinn nach nur zwei Sätzen viel geringer sind, als der Gewinn unter Berücksichtigung aller Spielverläufe.

Dennoch ist auch hier die bessere Spielerin im Vorteil. Bei der Betrachtung dieser Wahrscheinlichkeiten muss man berücksichtigen, dass es keine Informationen zu den vorhergehenden Sätzen bekannt sind.

Ist jedoch das Ergbnis des ersten Satzes bekannt, so bedarf es der bedingten Wahrscheinlichkeit. Hat Spielerin A den ersten Satz gewonnen, so muss sie für den Matchgewinn entweder den zweiten oder den dritten Satz für sich entscheiden.

$$p + (1-p) * p = p * (2-p)$$

Wahrscheinlichkeit für Gewinn 1. Satz	**Wahrscheinlichkeit für Matchgewinn**
0,5	0,75
0,6	0,84
0,7	0,91
0,8	0,96
0,9	0,99
1	1

Tabelle 3.3: Matchgewinnwahrscheinlichkeit bei Gewinn 1. Satz

Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten sind erheblich größer als die bisher berechneten absoluten Matchgewinnwahrscheinlichkeiten. Der Grund dafür liegt darin, dass nach einem gewonnenen Satz die Matchgewinnwahrscheinlichkeit erheblich größer ist. Dies gilt auch im realen Tennissport, denn ein gewonnener erster Satz gibt der Spielerin einen enormen Schub Selbstvertrauen.

Wie verhalten sich die Matchgewinnwahrscheinlichkeiten jedoch, wenn Spielerin A den ersten Satz verloren hat? Nun muss sie die nächsten beiden Sätze unbedingt gewinnen, um noch das Match für sich entscheiden zu können. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt p^2.

Wahrscheinlichkeit Gewinn 1. Satz	**Wahrscheinlichkeit Verlust 1. Satz**	**Wahrscheinlichkeit Matchgewinn**
0,5	0,5	0,25
0,6	0,4	0,36
0,7	0,3	0,49
0,8	0,2	0,64
0,9	0,1	0,81
1	0	1

Tabelle 3.4: Matchgewinnwahrscheinlichkeit bei Verlust 1. Satz

Sollte Spielerin A einen der ersten beiden Sätze gewonnen und den anderen verloren haben, so gewinnt sie das Match mit der Satzgewinnwahrscheinlichkeit p.

Bei den Männern wird bei Grand Slam Turnieren auf drei gewonnene Sätze gespielt. Dieser Spielmodus erhöht die Siegchance des besseren Spielers noch mehr als bei zwei gewonnenen Sätzen (siehe Tabelle).

Die Matchgewinnwahrscheinlichkeit berechnet sich hier folgendermaßen

$$p^3 + 3 * p^3 * (1-p) + 6 * p^3 * (1-p)^2 = p^3 * (1 + 3 * \big((1-p) + 2 * (1-p)^2)\big)$$

Wahrscheinlichkeit für einen Satzgewinn	Wahrscheinlichkeit für den Matchgewinn
0,3	0,0,16308
0,4	0,31744
0,5	**0,5**
0,51	0,518745001
0,52	0,537460019
0,55	0,593126875
0,6	0,68256
0,65	0,764830625
0,7	0,83692
0,75	0,896484375
0,8	0,94208
0,85	0,973388125
0,9	0,99144
0,95	0,998841875
0,98	0,999922381
0,99	0,999990149
1	1

Tabelle 3.5: Matchgewinnwahrscheinlichkeit bei drei gewonnenen Sätzen

3.4 Gewinnwahrscheinlichkeit bei Aufschlag[4]

Das bereits im Kapitel Spielregeln erklärte Zählsystem im Tennis weist einige Tücken auf. Eine davon ist, dass ein sehr guter Spieler, der bei einem Stand von 40/30 oder 30/15 gegen einen gleich starken Spieler aufschlägt, geringere Chancen hat das Game zu gewinnen als bei einem Stand von 0/0.

P(a,b) sei die Wahrscheinlichkeit, dass der Aufschläger den nächsten Punkt erzielt, wobei der Aufschläger bei a und der Gegner bei b Punkten steht. Das heißt bei einem Stand von 40/30 ist P(40,30)

[4] vgl. Havil (2007): 5-15.

die Wahrscheinlichkeit, dass der Aufschläger den nächsten Punkt macht und somit das Game gewinnt.

Um obige Aussage zu beweisen, ist es notwendig, P(40,30) und P(30,15) zu berechnen und danach mit P(0,0) zu vergleichen. Dieser Vergleich wird graphisch als auch algebraisch durchgeführt.

1) **P(40,30)**

   Bemerkung: Die Situation "Vorteil Aufschläger" entspricht einem Spielstand von 40/30. Daher gilt für die Situation Einstand Folgendes

$$P(40,40) = p * P(40,30) + q * P(30,40)$$

   Für den Fall, dass der Aufschläger bzw. der Gegner den Punkt macht, gilt

$$P(40,30) = p + q * P(40,40)$$

$$P(30,40) = p * P(40,40)$$

   Setzt man nun die beiden unteren Gleichungen in die erste ein, so ergibt sich

$$P(40,40) = p * (p + q * P(40,40)) + q * p * P(40,40)$$

   durch Umformung erhält man

$$P(40,40) = \frac{p^2}{1 - 2 * p * q}$$

   Weiters gilt, da $p = 1 - q \quad \Rightarrow \quad 1 = p + q$

$$1 - 2 * p * q = (p+q)^2 - 2 * p * q = p^2 + q^2$$

   Durch erneutes Einsetzen in die umgeformte Gleichung ergibt sich

$$P(40,40) = \frac{p^2}{p^2 + q^2}$$

   Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein sehr guter Spieler, der bei einem Stand von 40/30 gegen einen gleich starken Spieler aufschlägt, das Game gewinnt

$$P(40,30) = p + q * P(40,40) = p + \frac{p^2 * q}{p^2 + q^2}$$

2) **P(30,15)**

In der folgenden Abbildung (Abbildung 3.5) findet sich das Baumdiagramm für den Fall P(30,15).

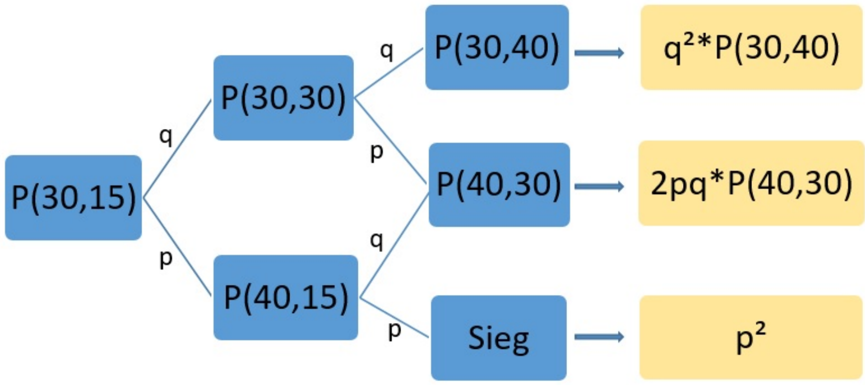

Abbildung 3.5: Baumdiagramm für den Fall P(30,15)

Die Ergebnisse von P(40,30) und P(30,40) kann man von Punkt 1) übernehmen. Durch das Zählen der einzelnen Äste erhält man

$$P(30,15) = p^2 + 2*p*q*P(40,30) + q^2*P(30,40) = p^2 + 2*p*q*(p + q*P(40,40)) + q^2*p*P(40,40)$$

$$= p^2 + 2*p*q*\left(p + \frac{p^2*q}{p^2+q^2}\right) + q^2*\left(\frac{p^3}{p^2+q^2}\right) = p^2*(1+2*q) + \frac{3*p^3*q^2}{p^2+q^2}$$

3) **P(0,0)**

Diese Situation wurde bereits unter 3.2. Gewinnwahrscheinlichkeit im Tennis berechnet und mit G_A bezeichnet.

$$P(0,0) = G_A = p^4*(1+4*q+10*q^2) + \frac{20*p^5*q^3}{p^2+q^2}$$

In den folgenden drei Abbildungen der Graphen von P(40,30), P(30,15) und P(0,0) ist erkennbar, dass sie sich alle sehr ähnlich sehen. Dennoch gibt es Überschneidungen.

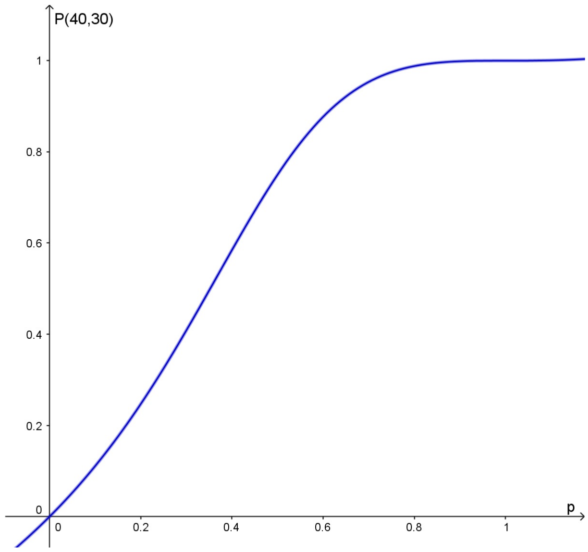

Abbildung 3.6: Graph von P(40,30)

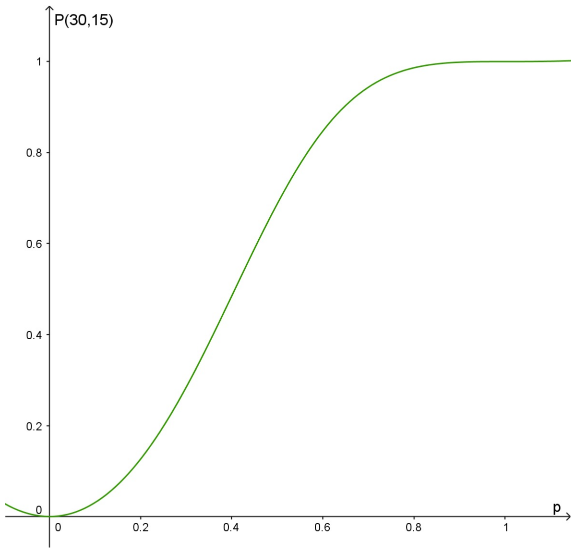

Abbildung 3.7: Graph von P(30,15)

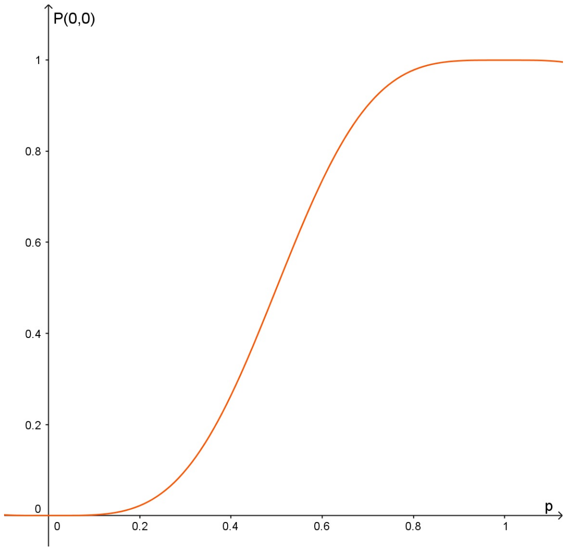

Abbildung 3.8: Graph von P(0,0)

Der Schnittpunkt S_1 von P(40,30) und P(0,0) berechnet sich aus folgender Gleichung

$$p + \frac{p^2 * q}{p^2 + q^2} = p^4 * (1 + 4 * q + 10 * q^2) + \frac{20 * p^5 * q^3}{p^2 + q^2}$$

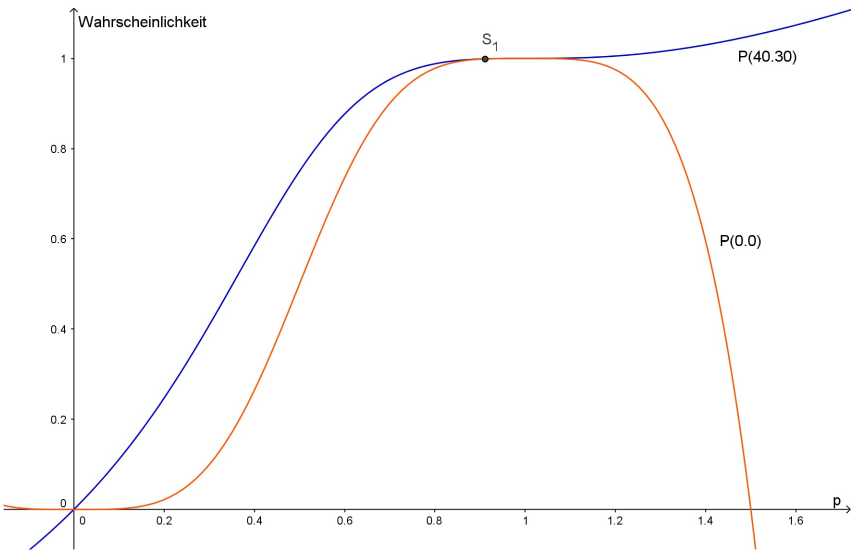

Abbildung 3.9: Schnittpunkt P(40,30) und P(0,0)

Durch die Anwendung einer mathematischen Software erhält man folgende Werte

$$p = 0, \quad p = 1 \quad \wedge \quad p = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} * \sqrt[3]{1216 - 192 * \sqrt{33}} + \frac{1}{6} * \sqrt[3]{19 + 3 * \sqrt{33}} \approx 0,919643$$

Die Lösungen p=1 und p=0 sind trivial. Somit gilt für alle $p > 0,919643$, dass P(0,0)>P(40,30). Das heißt, dass die Aussage, dass ein sehr guter Spieler, der bei einem Stand von 40/30 gegen einen gleich starken Spieler aufschlägt, geringere Chancen hat das Game zu gewinnen als bei einem Stand von 0/0, bewiesen ist.

Der Schnittpunkt S_2 von P(30,15) und P(0,0) berechnet sich aus folgender Gleichung

$$p^2 * (1 + 2 * q) + \frac{3 * p^3 * q^2}{p^2 + q^2} = p^4 * (1 + 4 * q + 10 * q^2) + \frac{20 * p^5 * q^3}{p^2 + q^2}$$

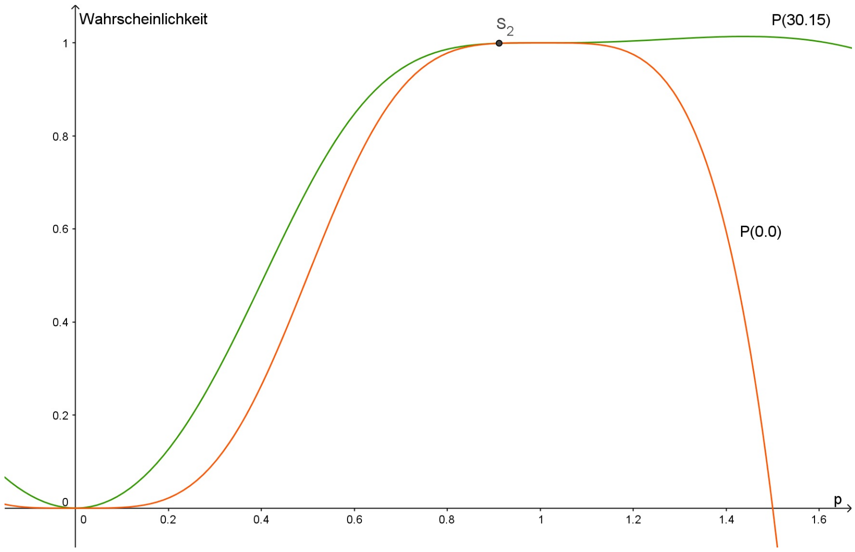

Abbildung 3.10: Schnittpunkt P(30,15) und P(0,0)

Durch die erneute Anwendung einer mathematischen Software erhält man neben den trivialen Werten p=1 und p=0 folgende Werte

$$p = \frac{1}{4} * \left(1 + \sqrt{7}\right) \;\wedge\; p = \frac{1}{4} * \left(1 - \sqrt{7}\right)$$

$p = \frac{1}{4} * \left(1 + \sqrt{7}\right) \approx 0,911437$ ist die einzige positive Lösung. Somit gilt für alle $p > 0,911437$, dass P(0,0)>P(30,15). Das heißt dass auch die Aussage, dass ein sehr guter Spieler, der bei einem Stand von 30/15 gegen einen gleich starken Spieler aufschlägt, geringere Chancen hat das Game zu gewinnen als bei einem Stand von 0/0 bewiesen ist.

Zusammenfassend kann man sagen, dass zwei gleich gute Spieler, die gut genug sind, den Punkt als Aufschläger in mehr als 90% zu gewinnen, zu Beginn des Games eine größere Chance haben das Match zu gewinnen, als bei einem Spielstand von 30/15 oder 40/30.

3.5 Durchschnittlich gespielte Punkte pro Game[5]

Ähnlich wie die Gewinnwahrscheinlichkeit eines Spielers für ein Game lässt sich auch die durchschnittliche Spieldauer analysieren. D_k ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Game nach k Punkten entweder von Spieler A oder von Spieler B gewonnen wird. Es ist $D_1 = D_2 = D_3 = D_7 = D_9 = D_{11} = ... = 0$.

$$D_4 = p^4 + q^4$$

$$D_5 = 4 * (p^4 * q + p * q^4)$$

$$D_6 = 10 * (p^4 * q^2 + p^2 * q^4)$$

$$D_8 = 20 * (p^5 * q^3 + p^3 * q^5) = 20 * p^3 * q^3 * (p^2 + q^2)$$

$$D_{10} = 20 * p^3 * q^3 * (p^2 + q^2) * (2 * p * q)$$

$$...$$

Wenn D der Erwartungswert für die Dauer ist, so gilt

$$D = 4 * D_4 + 5 * D_5 + 6 * D_6 + 8 * D_8 + 10 * D_{10} + ...$$

Zuerst wird die folgende unendliche Summe betrachtet

$$8 * D_8 + 10 * D_{10} + 12 * D_{12} + ... =$$

$$20 * p^3 * q^3 * (p^2 + q^2) * \Big(8 + 10 * (2 * p * q) + 12 * (2 * p * q)^2 + ...\Big) =$$

$$40 * p^3 * q^3 * (p^2 + q^2) * \left(\sum_{k \geq 1} (2 * p * q)^{k-1} * (k + 3)\right)$$

Hier ist folgende Betrachtung hilfreich:

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k \geq 0} x^k = 1 + \sum_{k \geq 1} x^k \quad \text{falls } |x| < 1.$$

Gliederweise Differentation auf beiden Seiten ist erlaubt, da man Potenzreihen gliederweise differenzieren darf (der Konvergenzradius ändert sich dabei nicht). Somit ergibt sich nach Vertauschen der Grenzübergänge

$$\sum_{k \geq 1} k * x^{k-1} = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

[5] vgl. Rendl (2003): 4-5.

Nach Einsetzen aller Werte, und Vereinfachungen ($1-2*p*q = p^2+q^2$) ergibt sich

$$D = 4*p^4*(1+5*q+15*q^2)+4*q^4*(1+5*p+15*p^2)+40*p^3*q^3*\left(3+\frac{1}{1-2*p*q}\right)$$

Beispiel: Berechne die durchschnittlich gespielten Punkte wenn p a) 0,5 b) 0,6 c) 0,75 und d) 1 beträgt.

a) p=0,5	b) p=0,6	c) p=0,75	d) p=1
6,75 Punkte	6,48 Punkte	5,45 Punkte	4 Punkte

Tabelle 3.6: durchschnittlich gespielte Punkte für gewisse p

Aus der Tabelle 3.6 ist ersichtlich, dass zwei gleich gute Tennisspieler die meisten Punkte ausspielen müssen, um einen Sieger zu ermitteln. Je überlegener ein Spieler dem anderen ist, desto schneller findet ein Game sein Ende. Hat ein Spieler gar keine Chance auf einen Spielsieg, so dauert das Game logischerweise nur 4 Punkte. Dies ist bei einer Wahrscheinlichkeit von p=0 und p=1 der Fall.

3.6 Besonderheiten im Doppel[6]

Im Doppel gibt es keinen dritten Satz, sondern nur ein Tie-Break bis zehn. Bei Einstand gewinnt jenes Paar das Game, welches den nächsten Punkt erzielt. Das bedeutet, dass es nach Einstand keinen Vorteil gibt. Diese beiden Besonderheiten führen zu einer enormen Verkürzung des gesamten Machtes. Der Sinn hinter diesen Änderungen liegt vermutlich darin, den Tennissport für die Zuseher interessanter zu machen.

Im Folgenden wird eine elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung durchgeführt, welche den Effekt dieser Regeländerungen auf die Gewinnwahrscheinlichkeit sowie die Spieldauer darlegen soll.

3.6.1 Gewinnwahrscheinlichkeit im Doppel

Zwei Teams, Team A und Team B spielen gegeneinander ein Match. Team A serviert und die Wahrscheinlichkeit, dass Team A einen Punkt gewinnt beträgt p. Der Rückschläger, Team B, erhält einen Punkt mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$.

[6] vgl. Borovcnik (o.J.).

Somit kann man folgende Wahrscheinlichkeiten für die Regeln im Einzel berechnen (siehe auch Kapitel 3.2 Gewinnwahrscheinlichkeit im Tennis):

$$P(\text{A gewinnt zu Null}) = p^4$$

$$P(\text{A gewinnt zu 15}) = 4 * p^2 * q^2$$

$$P(\text{A gewinnt zu 30}) = 10 * p^4 * q^2$$

$$P(\text{Einstand bei 40:40 }) = 20 * p^3 * q^3$$

$$P(\text{A gewinnt}|\text{40:40}) = \frac{p^2}{p^2 + q^2}$$

Daraus folgt für den Gewinn des Games nach den Einzelregeln

$$P(\text{A gewinnt nach den Einzelregeln}) = p^4 * (1 + 4 * q + 10q^2) + \frac{20 * p^5 * q^3}{p^2 + q^2}$$

Betrachtet man nun die Regeln für das Doppel, so erkennt man, dass die Wahrscheinlichkeiten bei einem Spielgewinn für Team A zu Null, zu 15, zu 30 und für Einstand ident sind. Erst für die Wahrscheinlichkeit, dass Team A unter der Voraussetzung gewinnt, dass es 40/40 steht, kommt es zu einer Änderung.

$$P(\text{A gewinnt nach den Doppelregeln}|\text{40:40}) = p$$

Daraus folgt für den Gewinn des Games nach den Doppelregeln

$$P(\text{A gewinnt nach den Doppelregeln}) = p^4 * (1 + 4 * q + 10q^2) + 20 * p^4 * q^3$$

Vergleicht man nun die beiden Ergebnisse P(A gewinnt nach den Einzelregeln) und P(A gewinnt nach den Doppelregeln) erkennt man, dass die Wahrscheinlichkeit mit den Einzelregeln zu gewinnen eine andere ist, als mit den Doppelregeln.

$$g = P(\text{A gewinnt nach den Doppelregeln}) - P(\text{A gewinnt nach den Einzelregeln}) =$$

$$= p^4 * (1 + 4 * q + 10q^2) + 20 * p^4 * q^3 - p^4 * (1 + 4 * q + 10q^2) - \frac{20 * p^5 * q^3}{p^2 + q^2} =$$

$$= 20 * p^4 * q^3 * \left(1 - \frac{p}{p^2 + q^2}\right)$$

Es gilt, dass $g > 0$, falls $p < 0,5$ ist.

Das bedeutet, dass ein Team nach der Doppelregel eine höhere Wahrscheinlichkeit hat, ein Game als Aufschläger zu gewinnen, wenn es weniger als die Hälfte der Punkte bei eigenem Aufschlag gewinnt. Diese Situation kommt im Profitennis jedoch eher selten vor. Daher kann man daraus schließen, dass die Regeln im Doppel den Rückschläger begünstigen. Um das genaue Ausmaß berechnen zu können, muss man jene Werte von p finden, welche maximale beziehungsweise minimale Werte für g ergeben.

Dazu muss man die Funktion g(p) ableiten und Null setzen.

$$g(p) = 20 * p^4 * q^3 * \left(1 - \frac{p}{p^2 + q^2}\right) = 20 * p^4 * (1-p)^3 * \left(1 - \frac{p}{p^2 + (1-p)^2}\right)$$

$$g'(p) = -\frac{5}{2*(2*p^2 - 2*p + 1)^2} + \frac{5}{2*(2*p^2 - 2*p + 1)} - 140*p^6 + 420*p^5 - 400*p^4 + 100*p^3 + 15*p^2 + 5*p$$

$$g'(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad p \approx 0,953 \ \wedge \ p \approx 0,347$$

Die Funktion g erreicht somit einen maximalen Wert bei p=0,347 von 0,0295 und einen minimalen Wert bei p=0,653 von -0,0295.

Dass ein Profispieler einen Wert für p von 0,65 hat, ist nicht unrealistisch. Setzt man p=0,65 und q=0,35 ein, so erhält man

$$P(\text{A gewinnt nach den Einzelregeln}) = p^4 * (1 + 4*q + 10q^2) + \frac{20 * p^5 * q^3}{p^2 + q^2} = 0,8296$$

$$P(\text{A gewinnt nach den Doppelregeln}) = p^4 * (1 + 4*q + 10q^2) + 20 * p^4 * q^3 = 0,8002$$

Das bedeutet, dass ein Team beziehungsweise ein Einzelspieler unter der Doppelregel 80% der Games mit eigenem Aufschlag gewinnt. Wird unter den Einzelregeln gespielt, gewinnt er jedoch 83% der Games mit eigenem Aufschlag.

In der folgenden Abbildung (Abbildung 3.11) wird die Auswirkung der Doppelregeln für verschiedene Werte von p nochmals deutlich:

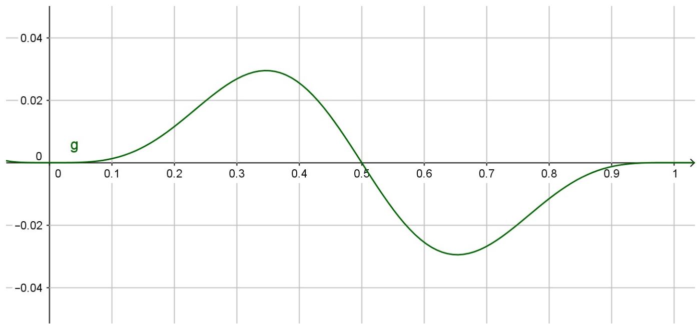

Abbildung 3.11: Gewinnwahrscheinlichkeit im Doppel für verschiedene p

3.6.2 Zu erwartende Dauer eines Doppels

Wie bereits im Kapitel 3.5 Durchschnittlich gespielte Punkte pro Game beschrieben, wird D, der Erwartungswert für die Dauer und k, die Zahl der ausgespielten Punkte in einem Game, folgendermaßen berechnet

$$D(k) = \sum_k k * P(\text{A oder B gewinnt nach k Punkten})$$

Laut der Regeln im Einzel wird dieser Wert folgendermaßen berechnet

$$D(\text{k Punkte nach Einzelregeln}) = 4{*}(p^4{+}q^4){+}20{*}(p^4{*}q{+}q^4{*}p){+}60{*}(p^4{*}q^2{+}q^4{*}p^2){+}40{*}p^3{*}q^3{*}\left(3+\frac{1}{p^2+q^2}\right)$$

Nach den Regeln im Doppel erhält man

$$D(\text{k Punkte nach Doppelregeln}) = 4*(p^4+q^4)+20*p*q*(p^3+3*p^3*q+7*p^2*q^2+3*p*q^3+q^3$$

Logischerweise kann der Wert von D(k Punkte nach Einzelregeln) nicht größer sein, als der Wert von D(k Punkte nach Einzelregeln), egal welchen Wert p annimmt. Der genaue Unterschied u zwischen den beiden Fällen ist somit

$$u = D(\text{k Punkte nach Einzelregeln}) - D(\text{k Punkte nach Doppelregeln}) = 20*p^3*q^3*\left(\frac{2}{p^2+q^2}-1\right)$$

Berechnet man die erste Ableitung von u und setzt sie im Anschluss gleich 0, so erhält man

$$u'(p) = -\frac{20*p}{(2*p^2-2*p+1)^2} + \frac{10}{(2*p^2-2*p+1)^2} + 120*p^5 - 300*p^4 + 160*p^3 + 60*p^2 - 20*p - 10$$

$$u'(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0,5$$

Die Funktion u hat in p=0,5 ein Maximum von 0,9375. Das bedeutet, dass in einem Game, in dem jedes Team der Erwartung nach die Hälfte der Punkte gewinnt, die zu erwartende Verkürzung der Dauer größtmöglich ist. Sie beträgt 0,9375 Punkte. Also knapp einen Punkt.

In der folgenden Abbildung (Abbildung 3.12) wird die Auswirkung der Doppelregeln für verschiedene Werte von p nochmals deutlich:

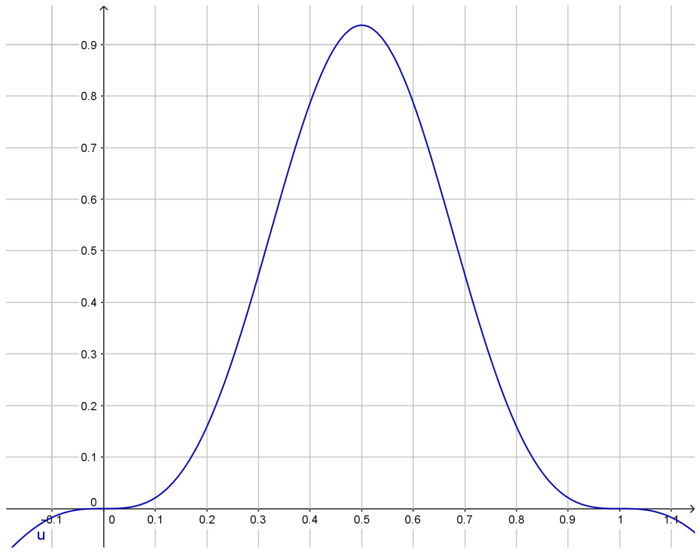

Abbildung 3.12: Dauer eines Doppel für verschiedene p

3.7 Problem der abgebrochenen Partien[7]

Zwei Spieler A und B setzen je 20 € und vereinbaren, dass jener Spieler, der zuerst drei Games gewonnen hat, den Gesamteinsatz von 40 € erhält. Aufgrund von plötzlich einsetzendem Regen muss die Partie bei einem Stand von 2:1 abgebrochen werden. Welche Aufteilung wäre bei diesem Spielstand gerecht?

Diesem Problem widmeten sich bereits im Jahr 1654 die beiden Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat. Aber dieses Problem beschäftigte die Mathematiker bereits viel früher.

1. Man könnte den Einsatz im Verhältnis der gewonnen Games aufteilen. In diesem Fall würde Spieler A 26,66 € und Spieler B 13,33 € erhalten.

2. Eine weitere Möglichkeit wäre, den Einsatz unter Berücksichtigung der noch zum Sieg notwendigen Games aufzuteilen. Dies würde ebenfalls eine Aufteilung im Verhältnis 2:1 bedeuten und Spieler erhält A 26,66 € und Spieler B 13,33 €.

3. Wenn man die einzelnen Möglichkeiten des potentiellen weiteren Spielverlaufs betrachtet, kommt man zu folgender Darstellung:

[7] vgl. Schmidt (1998).

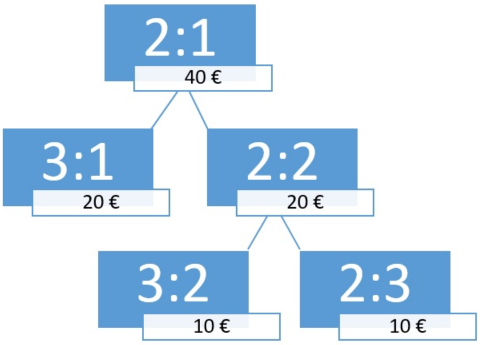

Abbildung 3.13: Möglichkeiten des potentiellen weiteren Spielverlaufs

Sollte B das nächste Game gewinnen, würde Gleichstand herrschen und jeder würde im Falle eines Spielabbruchs 20 € bekommen. Sollte Spieler A gewinnen, so würde er den gesamten Einsatz von 40 € erhalten, falls er verliert, erhält er wie bereits oben beschrieben 20 €. Spieler A kann sich somit sicher sein, dass er mindestens 20 € erhält. Nun könnte er argumentieren, dass die Chancen, für einen Spielgewinn seinerseits genauso hoch sind wie für Spieler B. Daher müsste das verbleibende Geld (20 €) erneut gleichmäßig aufgeteilt werden. Somit würde Spieler A 30 € erhalten und Spieler B 10 €.

4. Mit Hilfe der Pfadregeln kann die Gewinnwahrscheinlichkeit berechnet werden. Angenommen beide Spieler sind gleich gut, dann beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit p für beide Spieler $\frac{1}{2}$.

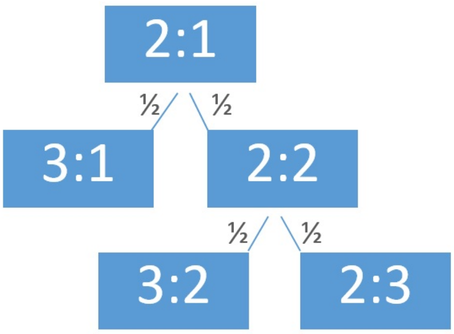

Abbildung 3.14: Baumdaigramm Spieler A gewinnt

$$P(\text{Spieler A gewinnt}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} * 40 = 30€$$

5. Eine Aufteilung nach dem Pascalschen Dreieck wäre eine weitere Möglichkeit um eine gerechte Aufteilung zu finden.

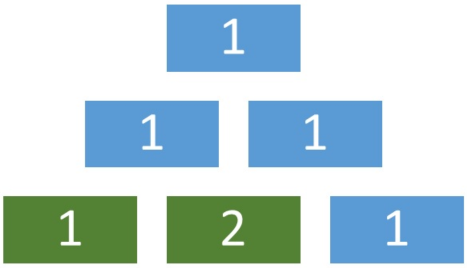

Abbildung 3.15: Pascalschen Dreieck

Gemäß dieser Aufteilungsweise berechnet sich das Aufteilungsverhältnis folgendermaßen

$$a : b = (1 + 2) : 1 = 3 : 1$$

Spieler erhält A 30 € und Spieler B 10 €.

6. Berechnung anhand der Möglichkeiten eines potentiellen weiteren Spielverlaufs (kombinatorisches Abzählen).

   - B gewinnt das erste Game nach der Regenpause und A gewinnt das zweite Game $\Rightarrow$ 3:2
   - B gewinnt zwei Games $\Rightarrow$ 2:3

   beziehungsweise die Kombinationen, bei denen das Match bereits nach dem ersten Game entschieden ist:

   - A gewinnt das erste und zweite Game nach der Regenpause $\Rightarrow$ 4:1
   - A gewinnt das erste und B gewinnt das zweite Game nach der Regenpause $\Rightarrow$ 3:2

   Anhand dieser Aufstellung kann man nun ablesen, dass Spieler A drei Möglichkeiten hat, das Spiel zu gewinnen. Spieler B hat hingegen nur eine einzige. Aus diesem Grund erhält Spieler A 30 € und Spieler B 10 €.

7. Mittels der Binomialverteilung kann man dieses Problem ebenfalls lösen. Es handelt sich hierbei um eine Bernoullikette mit $n = 2$ und $p = \frac{1}{2}$. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für den Spieler A berechnet man folgendermaßen

$$P(\text{A gewinnt}) = P(X \geqslant 1) = \frac{2}{1} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Auch mittels dieser Art der Berechnung kommt man auf ein Verhältnis von 3:1 und Spieler A erhält 30 € und Spieler B erhält 10 €.

Kann man diese Arten der Berechnung der Gerechtigkeit auch auf drei Spieler A, B und C anwenden, wenn das Spiel bei einem Spielstand von 2:1:0 abgebrochen werden muss?

Da Tennis ein vielfältiges Spiel ist, kann man es auch zu dritt spielen. Bei dieser Spielvariante befinden sich zwei Spieler auf der Aufschlagseite und ein Spieler auf der Rückschlagseite. Nach dem Aufschläg läuft der Aufschläger auf die andere Seite des Spielfeldes und schlägt den Ball wieder über das Netz. Die Spieler laufen so lange im Kreis, bis ein Spieler einen Fehler macht. Dieser Spieler bekommt dann einen (Schlecht-)Punkt. Sieger ist jener Spieler mit den wenigsten Punkten.

Die Spieler haben jeweils 27 € einbezahlt und gewonnen hätte jener Spieler, der die wenigsten Schlechtpunkte gesammelt hat.

1. Das folgende Baumdiagramm (Abbildung 3.16) beschreibt den potentiellen weiteren Spielverlauf.

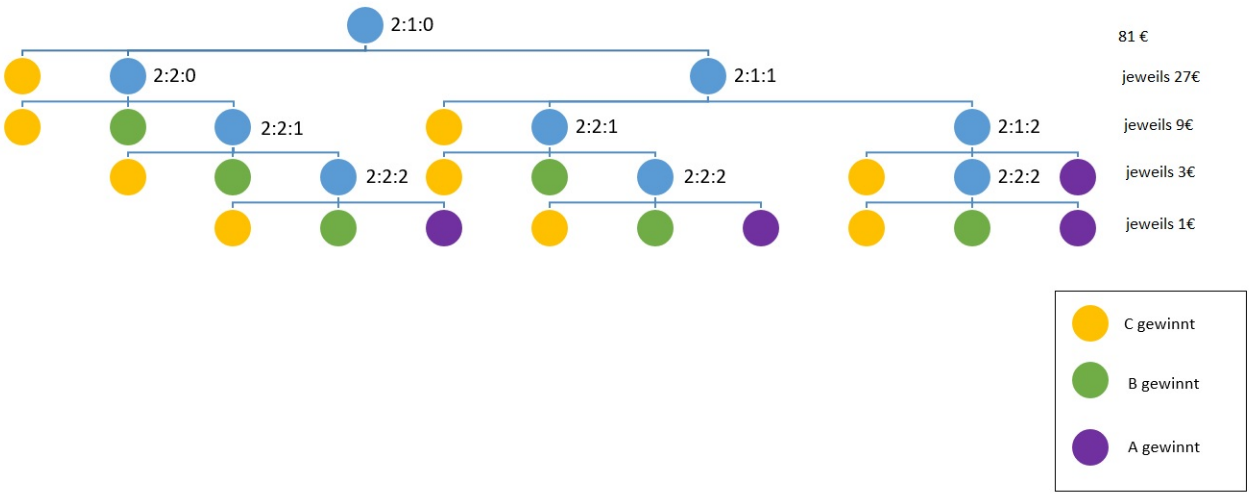

Abbildung 3.16: Baumdiagramm Spielverlauf bei drei Spielern

Bei der Berechnung der einzelnen Spielausgänge ergeben sich folgende Werte:

$$C: \quad 27 + 2*9 + 3*3 + 3*1 = 57 \quad \Rightarrow \quad 57\,€$$

$$B: \quad 9 + 2*3 + 3*1 = 18 \quad \Rightarrow \quad 18\,€$$

$$A: \quad 3 + 3*1 = 6 \quad \Rightarrow \quad 6\,€$$

2. Die Pfadregeln mit $p = \frac{1}{3}$ ergeben folgende Aufteilung des Geldes

$$C: \quad \frac{1}{3} + 2 * \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 * \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 * \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{57}{81} \quad \Rightarrow \quad 57\,€$$

$$B: \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 * \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 * \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{18}{81} \quad \Rightarrow \quad 18\,€$$

$$A: \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 * \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{6}{81} \quad \Rightarrow \quad 6\,€$$

3. Manche Berechnungsarten, die man bei zwei Spielern anwenden kann, sind bei drei oder mehr Spielern nur begrenzt anwendbar.
   Ein Spiel wird bei einem Spielstand von 2:2:1 abgebrochen. Versucht man den weiteren Spielverlauf mittels kombinatorischem Abzählen festzustellen, so kommt man zu folgendem Ergebnis

   - C verliert, A verliert
   - C verliert, B verliert
   - C verliert, C verliert

   beziehungsweise die Kombinationen, bei denen das Match bereits nach dem ersten Game entschieden ist:

   - A verliert, B verliert
   - A verliert, C verliert
   - A verliert, A verliert
   - B verliert, A verliert
   - B verliert, B verliert
   - B verliert, C verliert

   Die maximale Spiellänge beträgt zwei Games, insgesamt gibt es somit neun Kombinationen.
   Die Geldaufteilung sieht wie folgt aus: 1:4:4
   C erhält 36 €.
   B erhält 36 €.
   A erhält 9 €.

4. Das Pascalsche Dreieck würde eine Aufteilung auf drei oder mehr Personen nicht zulassen. Ebenso die Berechnung mittels der Binomialverteilung.

3.8 Auswertung aller bisherigen Wimbledon Tennisfinale[8]

Im folgenden Abschnitt werden die erwartete und die tatsächliche Satzanzahl einzelner Wimbledonspieler unter der Annahme gleicher Spielstärke der Finalisten miteinander verglichen. Es stellt sich auch die Frage, ob ein sogenannter "Rücken-an-die-Wand"–Effekt stattfindet. Dieser Effekt begünstigt den zurückliegenden Spieler, da er aufgrund seines Rückstandes mehr riskante Spielzüge wagt beziehungsweise einen größeren Ehrgeiz entwickelt.

Das Tennisturnier Wimbledon gibt es seit 1877. Während der beiden Weltkriege fanden keine Turniere statt. Aus diesem Grund gab es bisher 130 Finalentscheidungen (ein Finale wurde entschieden indem der Gegner nicht erschienen ist).

Zwei Finalisten A und B gewinnen jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{2}$ einen Satz. Ein Match endet nach genau drei Sätzen, wenn entweder Spieler A oder Spieler B drei Sätze hintereinander gewinnen konnte. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall berechnet sich wie folgt

$$P(\text{genau 3 Sätze}) = 2 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 2 * \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Analog berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass das Match nach genau 4 Sätzen beendet ist

$$P(\text{genau 4 Sätze}) = 6 * \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

sowie, dass das Match nach genau 5 Sätzen gewonnen wurde

$$P(\text{genau 5 Sätze}) = 12 * \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{8}$$

Jene Anzahl an Spielen, die nach drei, vier oder fünf Sätzen beendet wurden, berechnet man folgendermaßen

$$P(\text{genau 3 Sätze}) * \text{Gesamtzahl von Spielen}$$

[8] vgl. Croucher (1982).

In den folgenden Tabellen gibt es einen Überblick über die berechneten Werte und die tatsächlichen Werte. Die Spiele vor und nach dem 2. Weltkrieg werden getrennt voneinander betrachtet.

Anzahl der Sätze	**Wahrscheinlichkeit p**	**1877-1939 tatsächlich**	**1877-1939 berechnet**
3	0,25	26	14,5
4	0,375	17	21,75
5	0,375	15	21,75
Summe		58	58

Tabelle 3.7: Werte vor dem 2. Weltkrieg

Anzahl der Sätze	**Wahrscheinlichkeit p**	**1946-2016 tatsächlich**	**1946-2016 berechnet**
3	0,25	33	17,75
4	0,375	20	26,625
5	0,375	18	26,625
Summe		71	71

Tabelle 3.8: Werte nach dem 2. Weltkrieg

Anzahl der Sätze	**Wahrscheinlichkeit p**	**1877-2016 tatsächlich**	**1877-2016 berechnet**
3	0,25	59	32,25
4	0,375	37	48,375
5	0,375	33	48,375
Summe		129	128

Tabelle 3.9: Werte von 1877 bis 2016

Anhand dieser drei Tabellen erkennt man, dass die Finalgegner meist nicht dieselbe Spielstärke aufwiesen, denn mehr Matches endeten mit drei Sätzen als erwartet. Vor dem Krieg endeten 44,8 % der Spiele nach drei Sätzen. Nach dem Krieg beläuft sich dieser Wert auf 46,5 %.

Wie hoch aber ist die Wahrscheinlichkeit, dass jener Spieler, der den ersten Satz für sich entscheiden konnte, auch das gesamte Match gewinnt? Die Wahrscheinlichkeit dazu berechnet man folgendermaßen

$$P(\text{A gewinnt Spiel} \mid \text{A gewinnt 1. Satz}) = \sum_{j=3}^{5} P(\text{A gewinnt in j Sätzen} \mid \text{A gewinnt 1. Satz}) =$$

$$= 0,25 * 0,25 * 0,1875 = 0,6875$$

74,14 % aller Matches vor dem Krieg gewann der Gewinner des ersten Satzes. Somit würde der berechnete Wert in etwa stimmen. Bei den Matches nach dem 2. Weltkrieg gewann der Sieger des ersten Satzes nur mehr mit einer Wahrscheinlichkeit von 71,83 %.

Anzahl der Sätze	**1877-1939 Sieger 1. Satz und Match**	**1946-2016 Sieger 1. Satz und Match**	**1877-2016 gesamt**
3	26	33	59
4	12	12	24
5	5	6	11
Summe	43	51	94

Tabelle 3.10: Sieger im 1. Satz und Match

Betrachtet man nun jene Matches, die über vier oder fünf Sätze laufen, bemerkt man folgendes: in 55 Fällen (78,57 %), der insgesamt 70 Matches, stand es nach drei Sätzen 2:1 für den späteren Sieger.

Berechnet man diese Wahrscheinlichkeit, so kommt man auf folgenden Wert

$$P(\text{A gewinnt Spiel} \mid \text{A führt 2:1}) = 0{,}75$$

Dieser Wert liegt somit sehr nahe am tatsächlichen Wert.

Insgesamt gab es 37 vier-Satz-Matches. Davon haben die späteren Gewinner 24 Mal den ersten Satz gewonnen. Das macht eine Gewinnquote von 64,86 %. Dies passt ebenfalls mit der berechneten Wahrscheinlichkeit zusammen, welche

$$P(\text{A gewinnt 1. Satz} \mid \text{A gewinnt in 4 Sätzen}) = \frac{2 * 0{,}0625}{3 * 0{,}0625} = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

beträgt.

Eine Divergenz zwischen dem berechneten Wert und dem tatsächlichen Wert ergibt sich, wenn man die 33 fünf-Satz-Spiele betrachtet. In nur 11 Spielen $\left(\frac{1}{3}\right)$ konnte der spätere Matchgewinner den ersten Satz für sich entscheiden. Die berechnete Wahrscheinlichkeit hingegen ergibt

$$P(\text{A gewinnt 1. Satz} \mid \text{A gewinnt das Spiel in 5 Sätzen}) = \frac{3 * 0{,}03125}{6 * 0{,}03125} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Der Rücken-an-die-Wand-Effekt wird durch dieses Ergebnis bestätigt. Das bedeutet, dass der Spieler, der den ersten Satz verloren hat, aufgrund von Ehrgeiz und höherer Risikobereitschaft seinen Gegner schlägt. Vor dem zweiten Weltkrieg war dies in 10 von 15 Fällen $\left(\frac{2}{3}\right)$ und nach dem zweiten Weltkrieg in 12 von 18 Fällen $\left(\frac{2}{3}\right)$ der Fall.

Kapitel 4

Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht

4.1 Wahrscheinlichkeitsrechnung im Lehrplan

In **Allgemeinbildenden höheren Schulen** wird Stochastik ab der 1. Klasse unterrichtet. Eine Ausnahme bildet die 5. Klasse (9. Schulstufe), in welcher keine Stochastik gelehrt wird. Der Lehrstoff der Unterstufe hat jedoch nur periphär mit jenen Inhalten in der Oberstufe zu tun.
Nach der 6. Klasse sollen die Schüler und Schülerinnen Folgendes beherrschen:

- *Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik*
- *Kennen des Begriffes Zufallsversuch, Beschreiben von Ereignissen durch Mengen*
- *Kennen der Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; Auffassen von Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile, als relative Häufigkeiten und als subjektives Vertrauen*
- *Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten; Arbeiten mit der Multiplikations- und der Additionsregel; Kennen des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit*
- *Arbeiten mit dem Satz von Bayes*[1]

Folgende Inhalte werden in der 7. Klasse gelehrt:

- *Kennen der Begriffe diskrete Zufallsvariable und diskrete Verteilung*
- *Kennen der Zusammenhänge von relativen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen; von Mittelwert und Erwartungswert sowie von empirischer Varianz und Varianz*

[1] BMB (2004).

- *Arbeiten mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen*[2]

Nach Absolvierung der 8. Klasse können die Schüler und Schülerinnen:

- *Kennen der Begriffe stetige Zufallsvariable und stetige Verteilung*
- *Arbeiten mit der Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen*
- *Kennen und Interpretieren von statistischen Hypothesentests und von Konfidenzintervallen*[3]

In der **Handelsakademie** wird die Stochastik nicht so ausführlich besprochen wie in der AHS. Für die Handelsakademie gibt es bereits einen semestrierten und kompetenzorientierten Lehrplan. Daher beschränkt sich die Stochastik hier auf das 8. und 9. Semester. Nach dem 8. Semester können die Schüler und Schülerinnen

- *unterschiedliche Streumaße (Standardabweichung und Varianz, Spannweite, Quartile) berechnen und interpretieren*
- *Median, Quartile und Spannweite in einem Boxplot darstellen und interpretieren* [4].

Im 9. Semester lernen die Schüler und Schülerinnen

- *den klassischen und statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff beschreiben, diesen verwenden und deuten,*
- *die Additions- und Multiplikationsregel auf Ereignisse anwenden, die Ergebnisse interpretieren und damit argumentieren,*
- *die Begriffe des Binomialkoeffizienten und der Fakultät beschreiben, diese berechnen und deuten.*
- *den Unterschied zwischen diskreten und kontinuierlichen Zufallsvariablen, die Begriffe Wahrscheinlichkeits- bzw. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, Verteilungsfunktion sowie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung erklären,*
- *die Modelle der Binomial- und Normalverteilung erklären, anwenden und interpretieren,*
- *die Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung beschreiben und die Binomialverteilung in die Normalverteilung überführen,*

[2] BMB (2004).
[3] BMB (2004).
[4] Berufsbildende Schulen (2014).

- *die Auswirkung von Erwartungswert und Standardabweichung auf die Normalverteilungskurve erklären und damit argumentieren*[5].

In einer **höheren Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe** können die Schüler und Schülerinnen neben der grundlegenden Stochastik nach dem 9. Semester auch Folgendes:

- *den Begriff der Wahrscheinlichkeit erläutern;*
- *die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Zufallsereignisses berechnen und deuten;*
- *die Regeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten auf einander ausschließende bzw. voneinander unabhängige Ereignisse anwenden;*
- *Zufallsexperimente (Ziehen mit/ohne Zurücklegen) mit Baumdiagrammen modellieren, Pfadregeln anwenden und Baumdiagramme interpretieren;*
- *Wahrscheinlichkeitsrechnung bei schulartenspezifischen Aufgabenstellungen durchführen und die Ergebnisse interpretieren sowie den Lösungsweg argumentieren;*
- *die Grundvoraussetzung und die Parameter für eine Binomial- und eine Normalverteilung nennen;*
- *die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Binomial- und Normalverteilung grafisch skizzieren;*
- *die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von binomial- bzw. normalverteilten Ereignissen mit Technologieeinsatz berechnen und interpretieren;*
- *Erwartungswert und Standardabweichung der beiden Verteilungen berechnen;*
- *die Auswirkung von Erwartungswert und Standardabweichung auf die Verteilungskurve interpretieren und erklären;*
- *praxisorientierte Aufgabenstellungen aus Wirtschaft, Alltag und Wissenschaft mit Hilfe der Binomial- und Normalverteilung lösen*[6].

Die Stochastik hat somit in keiner Schulform eine Randposition. Bis zu den Themen Erwartungswert und Standardabweichung sollte jeder Schüler ein umfassendes Wissen nach Absolvierung der jeweiligen Schulform erhalten haben. Somit sollten die grundlegenden Fertigkeiten wie die Berechnung von Gewinnwahrscheinlichkeiten im Glücksspiel oder Sport für die Schüler möglich sein.

[5] Berufsbildende Schulen (2014).
[6] Berufsbildende Schulen (2015).

4.2 Analyse von Schulbuchaufgaben

Im Folgenden findet sich eine Sammlung an Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Zusammenhang mit Tennis aus populären österreichischen Schulbüchern. Der Lösungsweg ist jeweils angegeben.

1) **MatheMaster 7 (Steiner, Novak):**

   Herr Muster und Herr Schett spielen ein Tennismatch mit 5 Sätzen gegeneinander. Die Prämien sind 50€ für mindestens 4 gewonnene Sätze, 30€ für 3 gewonnene Sätze, 10€ für 2 und 5€ für einen oder keinen gewonnen Satz. Welche Gewinnerwartung hat Herr Muster, wenn seine Gewinnchancen gegen Herrn Schett 60% betragen?

   Lösungsweg:

gewonnene Sätze	**Wahrscheinlichkeit**	**Erwartungswert**
5	$0,6^5$	$0,6^5 * 50$
4	$0,6^4 * 0,4 * \binom{5}{1}$	$0,6^4 * 0,4 * \binom{5}{1} * 50$
3	$0,6^3 * 0,4^2\binom{5}{2}$	$0,6^3 * 0,4^2\binom{5}{2} * 30$
2	$0,6^2 * 0,4^3\binom{5}{3}$	$0,6^2 * 0,4^3\binom{5}{3} * 10$
1	$0,6 * 0,4^4\binom{5}{4}$	$0,6 * 0,4^4\binom{5}{4} * 5$
0	$0,4^5$	$0,4^5 * 5$
		$\sum_{n=0}^{5} = 29,96$€

Tabelle 4.1: Gewinnerwartung

   Die Gewinnerwartung für Herr Muster beträgt 29,96€.

2) **Dimensionen - Mathematik 6 (Bleier):**

   Bei einem Tennisturnier eines Vereins nehmen 65% Frauen und 35% Männer teil.

   a) Die Frauen haben sich zu 80% auf das Turnier vorbereitet. Von diesen gewinnen 70% das erste Entscheidungsspiel. Die lokale Presse macht ein Interview mit einer Frau. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Befragte sich auf das Turnier vorbereitet und das Spiel gewonnen hat?
   b) Die Männer haben sich zu 70% auf das Turnier vorbereitet. Von diesen gewinnen 65% das erste Entscheidungsspiel. Die lokale Presse macht ein Interview mit einem Mann. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Befragte sich auf das Turnier vorbereitet und das Spiel gewonnen hat?

Lösungsweg:

a) P(vorbereitet und gewonnen)=$0,8 * 0,7 = 0,56$

Die Befragte hat sich auf das Turnier mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,56% vorbereitet und gewonnen.

b) P(vorbereitet und gewonnen)= $0,7 * 0,65 = 0,455$

Der Befragte hat sich auf das Turnier mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,45,5% vorbereitet und gewonnen.

3) **Mathematik verstehen 6 (Malle, Koth et al):**

Elias spielt drei Tennispartien abwechselnd gegen Vater und Mutter. Die Wahrscheinlichkeit, dass Elias gegen den Vater gewinnt, beträgt $\frac{1}{3}$, die Wahrscheinlichkeit gegen seine Mutter zu gewinnen schätzt Elias mit $\frac{2}{3}$ ein. Es wird vereinbart, dass Elias Sieger gegen die Eltern ist, wenn er zwei Partien hintereinander gewinnt. Soll Elias zuerst gegen den Vater oder zuerst gegen die Mutter spielen? Berechne für beide Möglichkeiten seine Gewinnwahrscheinlichkeit!

Lösungsweg:

- Vater-Mutter-Vater: $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} + \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{10}{27} = 0,37$
- Mutter-Vater-Mutter: $\frac{2}{3} * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} + \frac{2}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{8}{27} = 0,296$

Elias sollte zuergt gegen den Vater spielen, da er hier eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 37% hat. Spielt er hingegen zuerst gegen die Mutter, beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit nur 30%.

4) **Mathematik Lehrbuch 6 (Götz, Reichel, Müller, Hanisch):**

Der Drahtzaun um einen Tennisplatz hat quadratische Maschen von 7,5 cm Seitenlänge.

a) Berechne unter Bezugnahme auf untenstehende Abbildung (Abbildung 4.1) die geometrische Wahrscheinlichkeit, dass ein Tennisball von exakt 7 cm Durchmesser durch den Zaun hindurch fliegt! Betrachte dazu das Qudrat, innerhalb dessen der Mittelpunkt des Tennisballs beim Passieren des Zauns hindurch fliegt und setze dessen Flächeninhalt zu dem einer Masche ins Verhältnis!

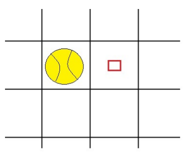

Abbildung 4.1: Skizze Maschen

b) Inweiweit liegt hier ein *kontinuierlicher* Ergebnisraum zugrunde?

c) Wie lägen die Verhältnisse bei einer Maschengröße von exakt 7 cm mal 7 cm?

d) Tennisbälle treffen im Allgemeinen nicht genau orthogonal auf den Zaun. Hat die Flugbahnneigung einen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des Hindurchfliegens? Zeichne für einige Winkel Skizzen analog zur obigen Abbildung und begründe!

Lösungsweg:

a) Nur wenn der Mittelpunkt des Balls in den roten Bereich in der Graphik fällt, kann er durch den Zaun hindurch fliegen. Die Seitenlänge dieses Quadrats hat die Länge x.

$$x + 7 = 7,5$$

$$x = 0,5$$

Nun kann man die Flächeninhalte der beiden Quadrate gemäß der geometrischen Wahrscheinlichkeit zueinander in Beziehung setzen:

$$\frac{0,5^2}{7,5^2} = 0,00\overline{4}$$

Die geometrische Wahrscheinlichkeit, dass dieser Ball den Zaun passiert, beträgt $0,\overline{4}$%.

b) Es gibt keinen kontinuierlichen Ergebnisraum, da es für den Mittelpunkt des Balles unendlich viele Möglichkeiten gibt.

c) Bei 7 cm mal 7 cm würde das Quadrat im Inneren der Masche (siehe Graphik) nicht existieren, da x=0. Folglich passt der Ball nicht durch die Maschen.

d) nein

5) **Mathematik Lehrbuch 7 (Götz, Reichel, Müller, Hanisch):**

Julia und Rupert spielen ein Tennismatch auf 3 gewonnene Sätze. Julia gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit 0,6. Rupert gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit 0,4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit a) für Julia, b) für Rupert,

- das Match ohne Satzverlust zu gewinnen?
- das Match in 4 Sätzen zu gewinnen?
- das Match in 5 Sätzen zu gewinnen?

Lösungsweg:

- Julia gewinnt ohne Satzverlust: $0,6^3 = 0,216$.
- Julia gewinnt 3 von 4 Sätzen: $0,6^3 * 0,4 * 3 = 0,259$.
- Julia gewinnt 3 von 5 Sätzen: $0,6^3 * 0,4^2 * 6 = 0,207$.

- Rupert gewinnt ohne Satzverlust: $0,4^3 = 0,064$.

- Rupert gewinnt 3 von 4 Sätzen: $0,4^3 * 0,6 * 3 = 0,115$.
- Rupert gewinnt 3 von 5 Sätzen: $0,4^3 * 0,6^2 * 6 = 0,138$.

Sieglinde und Brigitte spielen ein Tennisturnier um die Platzmiete von 20€, dh., die Verliererin (die weniger als die Hälfte der Games gewinnt) zahlt die Platzmiete allein. Sieglinde gewinnt ein Game mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{7}$, Brigitte daher mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{7}$. Es sollen n Games ($n \epsilon \mathbb{N}_u$) gespielt werden. Brigitte will als schlechtere Spielerin diesen Vorschlag nur akzeptieren, wenn ihre Verlusterwartung höchstens 12€ beträgt. Welche Anzahl von Games darf (höchstens) gespielt werden?

Lösungsweg:

- Erwartungswert für 1 Game: $P(X = 1) * 20 = \frac{4}{7} * 20 = 11,43$€
- Erwartungswert für 3 Games: $(P(X = 2) + P(X = 3)) * 20 = ((\frac{4}{7})^3 + (\frac{4}{7})^2 * \frac{3}{7} * 3) * 20 = 12,13$€.

Es darf höchstens 1 Game gespielt werden.

6) **bifie (Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS 11. Mai 2015 Teil-1-Aufgaben)**
Stefan und Helmut spielen im Training 5 Sätze Tennis. Stefan hat eine konstante Gewinnwahrscheinlichkeit von 60% für jeden gespielten Satz. Es wird folgender Wert berechnet:

$$\binom{5}{3} * 0,4^3 * 0,6^2 = 0,2304$$

Geben Sie an, was dieser Wert im Zusammenhang mit der Angabe aussagt!

Lösungsweg: Dieser Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der Helmut 3 von 5 Sätzen im Training gewinnt.

Diese Aufgaben decken im Großen und Ganzen die Möglichkeiten, die man in der Schule hat, ab. Die einzige Aufgabe, welche vernetztes Denken benötigt, ist Aufgabe 4. Hier müssen die Schüler eine Gleichung mit einer Unbekannten aufstellen und diese im Anschluss lösen. Desweiteren müssen sie neben der geometrischen Wahrscheinlichkeit auch die grundlegende Fertigkeit der Berechnung eines Flächeninhalts (Stoff Volksschule) anwenden.

4.3 Schülerschwierigkeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung fällt es Schülern am Beginn meist sehr leicht, sich die zu lösenden Aufgaben beziehungsweise Probleme vorzustellen und intuitiv zu lösen. Mit zunehmendem Komplexitätsgrad treten jedoch Fehlvorstellungen in den Vordergrund.

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen geboren wird, ist gleich hoch wie jene, dass ein Bub geboren wird. Welche Reihenfolge ist wahrscheinlicher?

1. Bub, Bub, Bub, Mädchen
2. Bub, Mädchen, Bub, Mädchen

Aus ihrer bisherigen Lebenserfahrung werden Schüler wissen, dass es ungefähr gleich viele Mädchen wie Buben auf der Welt gibt. Daher würden Schüler intuitiv die zweite Reihenfolge als wahrscheinlicher einstufen, da sie gleich viele Mädchen wie Buben enthält.

Diese und ähnliche Fehlauffassungen betreffend gleichwahrscheinlicher Möglichkeiten sind die häufigsten Schülerfehler. Um diese auszumerzen, muss man mit den Schülern Simulationen durchführen und mit ihnen die Ergebnisse diskutieren. Reines Bruchrechnen führt zu keiner Verbesserung in der Vorstellungskraft beziehungsweise der Fähigkeit, Ergebnisse abzuschätzen. [7]

Die Mathematik ist bei Schülern deshalbt oft unpopulär beziehungsweise unbeliebt, da sie dieses Fach als zu abstrakt, komplex, formal empfinden. Ab der 10. Schulstufe besteht auch oft das Problem, dass die Schüler den Nutzen des Lehrstoffes in ihrem Alltag nicht mehr erkennen können.

Alle Textaufgaben in Schulbüchern sollten einen sinnvollen Kontext haben, denn eingekleidete Aufgaben vermitteln den Schülern, dass die Mathematik und die Realität keinen Zusammenhang haben.

Beispiel: Matthias spielt gegen seinen Vater eine Stunde lang Tennis. In den ersten 5 Minuten gewinnt er 2 Games. Nach 10 Minuten hat er 4 Games gewonnen. Wie viele Games hat er nach 15 Minuten gewonnen?

In diesem Beispiel wird der Faktor Mensch komplett ausgeschlossen. Die Tatsache, dass Matthias und sein Vater müde werden beziehungsweise keine Maschinen sind, die regelmäßige Bewegungen ausführen, wird außen vorgelassen.

Aus diesem Grund sollten alle Aufgaben, egal aus welchem Bereich sie stammen, realistisch und authentisch sein. Die Lehrkraft sollte sich nicht scheuen fächerübergreifende Themen zu behandeln, die Aufgaben mit längeren Texten auszustatten und den Sachkontext mit den Schülern diskutieren. Oftmals ist eine Aufgabe nicht mit den tatsächlichen Rahmenbedingungen der ausgewählten Situation lösbar. Dann ist es jedenfalls zulässig eine Vereinfachung durchzuführen. Solange der Kontext

[7] vgl. Monks (1986): 25-30.

realistisch bleibt und die Ergebnisse annähernd realitätsgetreu sind, kann man die Aufgabe als authentisch bezeichnen.

Neben der Authentizität spielt aber auch die Schülernähe der gestellten Aufgabe eine wichtige Rolle für die Schüler in der Motivation diese zu rechnen. [8]

Im Rahmen der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung soll eine Aufgabe in einem naturwissenschaftlichen Kontext formuliert sein, jedoch soll das Lösen keine naturwissenschaftlichen Kenntnisse oder Kompetenzen erfordern. Das Ergebnis dieser Regelung ist, dass der Kontext nur darin besteht, der Problemstellung neben ihren mathematischen Symbolen einen anderen Namen zu geben. Dieser Name existiert zwar in der Wissenschaft, ist jedoch für das Lösen der Aufgabe irrelevant. [9]

4.4 Mittels Stochastik das kritische Denken der Schüler fördern

Vielen Schülern ist nicht bewusst, dass für alle technischen Geräte und für die meisten Wissenschaften die Mathematik die Basis ist. Ohne sie könnten diese Dinge nicht existieren. Die Mathematik stärkt außerdem das kritische Denken und Hinterfragen von Graphiken. Vor allem in der Statistik ist die Manipulation von Graphiken sehr populär.

Diese Vorgehensweise verwenden Gratiszeitungen sehr gerne, um Umstände wie zum Beispiel die Zuwanderung nach Österreich dramatischer darzustellen als sie in Wahrheit ist. Im Folgenden ein Beispiel zur Entwicklung der Bevölkerung mit Migrationshintergrund in Österreich in der Zeit von 2008 bis 2015:

Abbildung 4.2: Bevölkerung mit Migrationshintergrund (nicht manipuliert)

[8] vgl. Maaß (2008).
[9] vgl. Spreitzer (2015).

Abbildung 4.3: Bevölkerung mit Migrationshintergrund (manipuliert)

Die beiden Säulendiagramme haben als Grundlage dieselben Zahlen. Die untere Graphik wurde so manipuliert, dass es aussieht, als ob sich die Zahl der Menschen mit Migrationshintergrund innerhalb von sieben Jahren versechzehnfacht hätte. Dies kommt zustande, indem man die Ordinate beschneidet. In diesem Fall beginnt die y-Achse nicht im Ursprung (bei Null), sondern erst bei einer Personenanzahl von 1400. Weitere Möglichkeiten zur Manipulation sind das Stauchen und Strecken ganzer Achsen oder bestimmter Achsenabschnitte sowie das falsche Verhältnis von Längen, Flächen und Volumina.

Diese und ähnliche Beispiele sollte man in der Schule unbedingt mit den Schülern besprechen. Ansonsten kommt es zu Fehlvorstellungen. Außerdem könnte es passieren, dass sich die Schüler nicht mehr auf ihr *Bauchgefühl*, welches intuitiv meist richtig liegt, verlassen können oder wollen.

4.5 Beispielaufgaben für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung

Im Folgenden werden Beispiele für die einzelnen Grundkompetenzen, die bei der österreichischen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung verlangt werden, vorgestellt. Die folgenden Beispiele sind, solange nicht anders gekennzeichnet, Typ-1-Aufgaben.

> *Typ-1-Aufgaben sind Aufgaben, die auf die im Katalog angeführten Grundkompetenzen fokussieren. Bei diesen Aufgaben sind kompetenzorientiert (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten ohne darüber hinausgehende Eigenständigkeit nachzuweisen.*
>
> *Folgende Kriterien für Typ-1-Aufgaben sollen bei allen Aufgaben in Teil 1 berücksichtigt werden:*

- *Als durchschnittliche Bearbeitungszeit pro Aufgabe sind 5 Minuten vorzusehen.*
- *Jede Aufgabe hat möglichst genau eine Grundkompetenz aus dem SRP-Konzept oder eine andere lehrplankonforme Kompetenz zu repräsentieren.*
- *Die Aufgaben müssen ohne über (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten hinausgehende Eigenständigkeit gelöst werden können.*
- *Die Antwortformate dieser Aufgaben sollen den im SRP-Konzept beschriebenen Antwortformaten entsprechen (vgl. https://www.bifie.at/node/1442).*
- *Die Aufgaben in Teil 1 werden nach dem SRP-Konzept grundsätzlich mit gelöst oder nicht gelöst beurteilt. Ausnahmen sind im Zuge der Implementierung der neuen Prüfungsformate möglich.*
- *Alle Aufgaben von Teil 1 sollen derart erstellt werden, dass die Lösung ohne höherwertige Technologie erfolgen kann.*
- *Eine Schularbeit darf nicht nur aus Aufgaben zu Teil 1 bestehen, da dadurch im Sinne der Notendefinition keine bessere Note als Befriedigend erreicht werden könnte. Beurteilungen mit Gut oder Sehr gut bedürfen einer Anwendung und/oder Vernetzung von Grundkompetenzen, Reflexionsanlässe bzw. den Einsatz von komplexeren lehrplankonformen Aufgaben, die durch die Grundkompetenzen alleine nicht abgedeckt sind.*[10]

Jedes Beispiel hat einen Bezug zum Tennissport, jedoch wirken manche Aufgaben mit diesem Kontext nur eingekleidet. Durch die Verwendung vom Kontext Tennis kann man versuchen die Aufmerksamkeit und das Interesse der Schüler auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu ziehen. In manchen Fällen wird es gelingen, in vielen Fällen jedoch nicht. Die Beispiele wurden anhand des Aufgabenpools des bifie erstellt[11]. Zu Beginn steht jeweils die Kompetenz, im Anschluss folgt ein exemplarisches Beispiel.

4.5.1 Beschreibende Statistik

1. Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können:

   Beispiel: Die folgenden Graphiken enthalten Daten zu den männlichen U16 Spielern im Österreichischen Tennisverband.

[10] bifie (o.J.).
[11] vgl. bifie (2017).

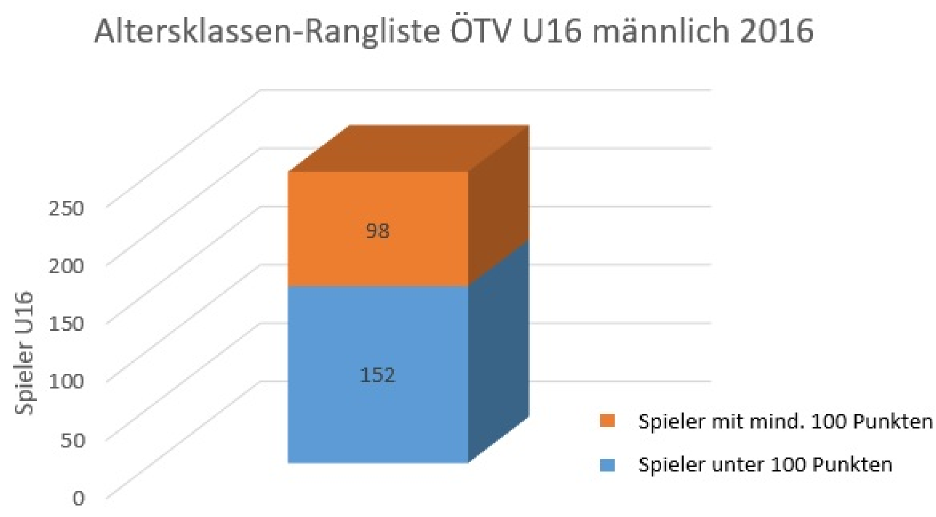

Abbildung 4.4: Spieler über bzw. unter 100 Punkten

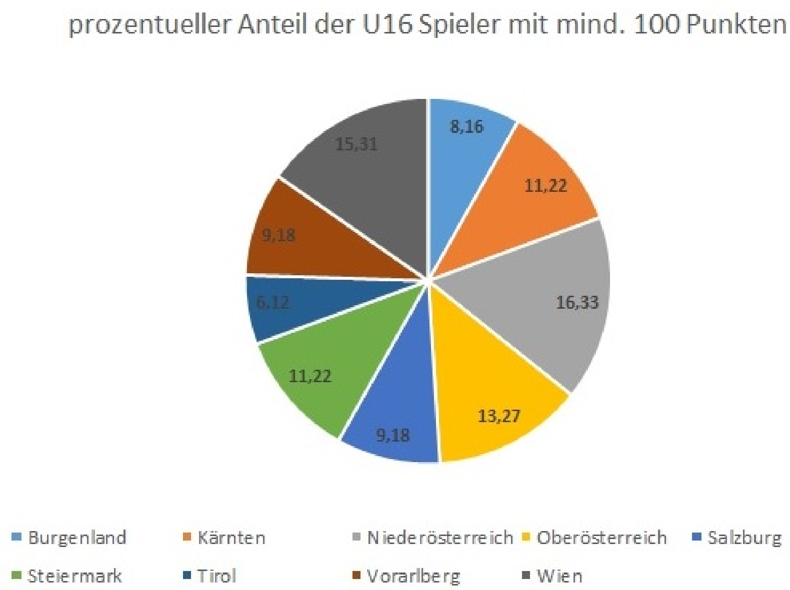

Abbildung 4.5: prozentueller Anteil nach Bundesland

Aufgabenstellung: Berechnen Sie die Anzahl der Spieler mit mindestens 100 Punkten in den jeweiligen Bundesländern!

Lösungsweg:

Bundesland	**Berechnung**	**Ergebnis**
Burgenland	$\frac{8{,}16*98}{100}$	8 Spieler
Kärnten	$\frac{11{,}22*98}{100}$	11 Spieler
Niederösterreich	$\frac{16{,}33*98}{100}$	16 Spieler
Oberösterreich	$\frac{13{,}27*98}{100}$	13 Spieler
Salzburg	$\frac{9{,}18*98}{100}$	9 Spieler
Steiermark	$\frac{11{,}22*98}{100}$	11 Spieler
Tirol	$\frac{6{,}12*98}{100}$	6 Spieler
Vorarlberg	$\frac{9{,}18*98}{100}$	9 Spieler
Wien	$\frac{15{,}31*98}{100}$	15 Spieler

Tabelle 4.2: Anzahl der Spieler mit mind. 100 Punkten und Bundesland

2. Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen:

   Beispiel: In einer Umfrage werden 500 Schüler zu ihrer Lieblingssportart befragt. Das folgende Kreisdiagramm zeigt das Ergebnis der Umfrage:

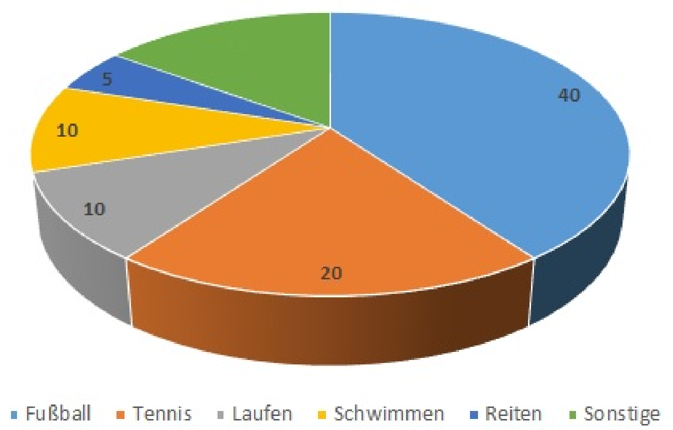

Abbildung 4.6: Umfrage Lieblingssportart

Aufgabenstellung: Vervollständigen Sie das folgende Säulendiagramm anhand der Werte aus dem obenstehenden Kreisdiagramm!

Abbildung 4.7: leeres Säulendiagramm Umfrage

Lösungsweg:

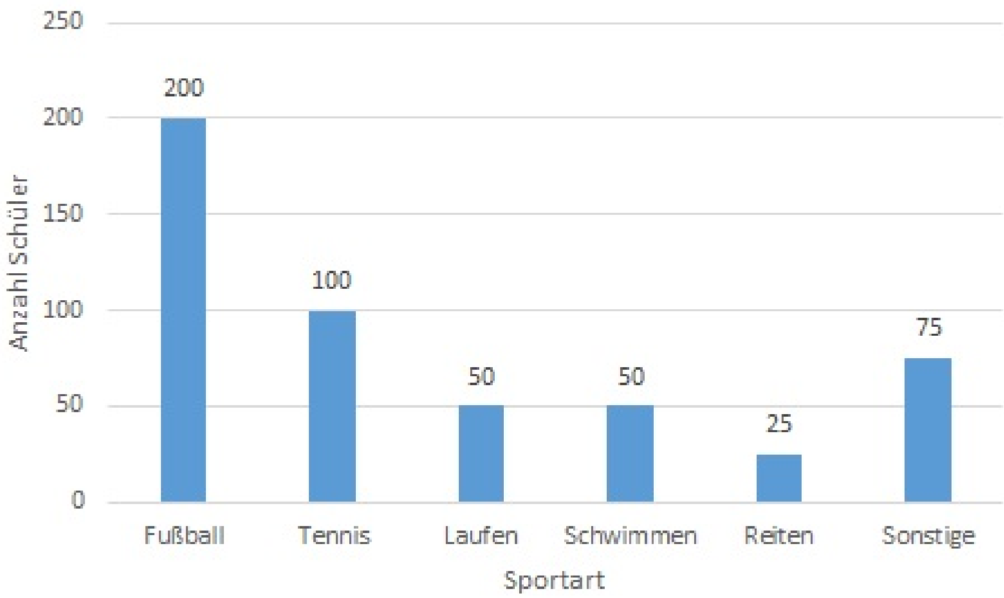

Abbildung 4.8: vollständiges Säulendiagramm Umfrage

3. Statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus; Quartile; Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können:

   Beispiel: 8 Mädchen die Tennis spielen wurden befragt, wie viele Stunden pro Woche sie Tennis spielen. Folgende Tabelle zeigt ihre Antworten:

Mädchen A	14 Stunden
Mädchen B	4 Stunden
Mädchen C	2 Stunden
Mädchen D	10 Stunden
Mädchen E	12 Stunden
Mädchen F	8 Stunden
Mädchen G	1 Stunde
Mädchen H	2 Stunden

Tabelle 4.3: Tennisstunden pro Woche

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die drei zutreffenden Aussagen an!

Der Median würde sich erhöhen, wenn Mädchen B eine Stunde mehr spielen würde.	
Der Median ist kleiner als das arithmetische Mittel der gespielten Tennisstunden.	
Die Spannweite der gespielten Tennisstunden beträgt 10.	
Das arithmetische Mittel würde sich erhöhen, wenn Mädchen F anstelle von 8 Stunden 10 Stunden spielen würde.	
Der Modus ist 1.	

Lösungsweg:

Der Median würde sich erhöhen, wenn Mädchen B eine Stunde mehr spielen würde.	X
Der Median ist kleiner als das arithmetische Mittel der gespielten Tennisstunden.	X
Die Spannweite der gespielten Tennisstunden beträgt 10.	
Das arithmetische Mittel würde sich erhöhen, wenn Mädchen F anstelle von 8 Stunden 10 Stunden spielen würde.	X
Der Modus ist 1.	

4. Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können:

Beispiel: Eine Baufirma hat eine Tennishalle gebaut. Sie haben an 20 aufeinanderfolgenden Tagen im April immer zur selben Uhrzeit die Temperatur in der Halle gemessen. Folgende Werte haben sie dabei abgelesen:

$$\{1,3,4,6,7,8,8,10,10,11,12,13,14,14,15,15,15,16,16,17\}$$

Aufgabenstellung: Wie viel Grad gab es mindestens an den wärmsten 25% der Tage in den Halle?
Geben Sie an, welche statistische Kennzahl Sie zur Beantwortung dieser Frage benötigen.

Lösungsweg: Man benötigt Quartile. 3. Quartil: 15°

4.5.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können:

   Beispiel: Laura und Sarah spielen Tennis. Laura gewinnt 2 Sätze, Sarah gewinnt nur einen Satz.

   Aufgabenstellung: Wie viele Möglichkeiten für den Spielverlauf gibt es? Wie sehen diese Möglichkeiten aus?

   Lösungsweg: L für Laura gewinnt, S für Sarah gewinnt
   {LLS, LSL, SLL } $\Rightarrow$ 3 Möglichkeiten

2. Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können:

   Beispiel: Zwei gleich starke Spieler A und B spielen ein Tennismatch gegeneinander.

   Aufgabenstellung: Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

   Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A 3 Sätze hintereinander gewinnt, ist __★__ Wahrscheinlichkeit, dass er zwei von drei Sätzen gewinnt, weil __♦__.

★	
größer als die	
kleiner als die	
gleich der	

♦	
die Wahrscheinlichkeit beide Male $0,5^3$ beträgt.	
es nur eine Möglichkeit gibt 3 Sätze zu gewinnen, aber 3 Möglichkeiten 2 von 3 Sätzen zu gewinnen	
man um 3 Sätze zu gewinnen, sowieso 2 Sätze gewinnen muss	

Lösungsweg:

★	
größer als die	
kleiner als die	X
gleich der	

♦	
die Wahrscheinlichkeit beide Male $0,5^3$ beträgt.	
es nur eine Möglichkeit gibt 3 Sätze zu gewinnen, aber 3 Möglichkeiten 2 von 3 Sätzen zu gewinnen	X
man um 3 Sätze zu gewinnen, sowieso 2 Sätze gewinnen muss	

3. Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (LaplaceWahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können:

   Beispiel: Anton gewinnt ein Tennismatch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6. Den ersten Satz gewinnt er in der Regel in 50% der Fälle.

   Aufgabenstellung: Anton und Benjamin spielen ein Tennismatch gegeneinander. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anton das Match sowie den ersten Satz gewinnt!

   Lösungsweg: $0,6 * 0,5 = 0,3$
   Die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg beträgt 30%.

4. Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können:

   Beispiel: Für einen Tenniskurs stehen 10 Tennislehrer zur Verfügung. Für die in dieser Woche geplanten Tenniskurse werden aber nur 7 Tennislehrer benötigt.

   Aufgabenstellung:

   Geben Sie die Bedeutung des Ausdrucks $\binom{10}{7}$ in diesem Zusammenhang an!

   Lösungsweg: Dieser Ausdruck gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, sieben Tennislehrer für die Kurse (unabhängig von der Zuordnung zur jeweiligen Gruppe) auszuwählen.

4.5.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1. Die Begriffe Zufallsvariable, (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung, Erwartungswert und Standardabweichung verständlich deuten und einsetzen können:

   Beispiel: Marius und Anna spielen Tennis. Anna gewinnt 60% der Sätze. Der Gewinner eines Satzes erhält vom Verlierer 1 € und umgekehrt.

   Aufgabenstellung: Die beiden spielen einen Satz gegeneinader. Berechnen Sie Annas Gewinnerwartung!

   Lösungsweg:

   $$E(X) = 1 - 0,6 - 1 * 0,4 = 0,2$$

   Die Gewinnerwartung für Anna beträgt 20 Cent.

2. Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen; Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können:

   Beispiel: Eine Firma produziert Tennisbälle. 95 % der Bälle werden fehlerfrei produziert und in die bereitgestellten Dosen gefüllt. Die Werte der Zufallsvariablen X beschreiben die Anzahl der fehlerhaft produzierten Bälle bei einem Stichprobenumfang von 500 Stück. Verwenden Sie die Binomialverteilung als Modell.

   Aufgabenstellung: Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Zufallsvariable X!

Lösungsweg:

$$\mu = n * p = 500 * 0,05 = 25$$

$$\sigma = \sqrt{500 * 0,05 * 0,95} = 4,8734$$

3. Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann:

   Beispiel: Einige der unten angeführten Situationen können mit einer Binomialverteilung modelliert werden.

   Aufgabenstellung: Kreuzen Sie jene Situationen an, bei denen die Zufallsvariable X binomialverteilt ist!

Die Wahrscheinlichkeit, dass Sophie einen Satz im Tennis gegen Adrian gewinnt, liegt bei 52%. Sophie und Adrian spielen 3 Sätze. (X = Anzahl gewonnen Sätze von Sophie)	
25 Personen wollen sich für ein Tennismatch anmelden. 10 davon sind weiblich. Es gibt jedoch nur mehr 3 freie Plätze. (X = Anzahl der weiblichen Personen)	
11% der weltbesten Tennisspieler sind Linkshänder. Es werden zufällig 4 Tennisspieler ausgewählt. (X = Anzahl der Linkshänder)	
Luis hat 3 Tennisbälle (1 grün, 1 gelb, 1 weiß) in seiner Tasche. Er zieht drei mal einen Ball mit zurücklegen aus seiner Tasche. (X = Anzahl der gelben Tennisbälle)	
Ein Großhändler erhält eine Lieferung von 2 000 Tennisbällen, von denen erfahrungsgemäß 5 % kaputt sind. (X = Anzahl der kaputten Bälle)	

Lösungsweg:

Die Wahrscheinlichkeit, dass Sophie einen Satz im Tennis gegen Adrian gewinnt, liegt bei 52%. Sophie und Adrian spielen 3 Sätze. (X = Anzahl gewonnen Sätze von Sophie)	X
25 Personen wollen sich für ein Tennismatch anmelden. 10 davon sind weiblich. Es gibt jedoch nur mehr 3 freie Plätze. (X = Anzahl der weiblichen Personen)	
11% der weltbesten Tennisspieler sind Linkshänder. Es werden zufällig 4 Tennisspieler ausgewählt. (X = Anzahl der Linkshänder)	
Luis hat 3 Tennisbälle (1 grün, 1 gelb, 1 weiß) in seiner Tasche. Er zieht drei mal einen Ball mit zurücklegen aus seiner Tasche. (X = Anzahl der gelben Tennisbälle)	X
Ein Großhändler erhält eine Lieferung von 2 000 Tennisbällen, von denen erfahrungsgemäß 5 % kaputt sind. (X = Anzahl der kaputten Bälle)	X

4. Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können:

Beispiel: Einer Veröffentlichung der Statistik Austria zufolge machen 41,6% der Österreicher und Österreicherinnen zwischen 18 und 30 Jahren mindestens zwei Mal pro Woche Sport.

Aufgabenstellung: Es werden 500 zwischen 18 und 30 Jahre alte Österreicher/innen zufällig ausgewählt.

Geben Sie für die Anzahl derjenigen Personen, die mindestens zwei Mal pro Woche Sport machen, näherungsweise ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit an!

Lösungsweg:

$$n = 500, p = 0,416, q = 1 - p = 0,584$$

$$\mu = n * p = 208$$

$$\sigma = \sqrt{n * p * q} = 11,021$$

$$2 * \phi(z) - 1 = 0,95 \quad \Rightarrow \quad \phi(z) = 0,975 \quad \Rightarrow \quad z = 1,96$$

$$x_{1,2} = \mu \pm z * \sigma \quad \Rightarrow \quad x_1 = 229 \wedge x_2 = 187 \quad \Rightarrow \quad [187; 229]$$

4.5.4 Schließende Statistik

Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekannten Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können

Beispiel: Die besten 100 Tennisspieler (ATP-Liste) werden nach ihrer bevorzugten Hand analysiert. Als Ergebnis wird das 95-%-Konfidenzintervall [0,05; 0,17] für den Anteil der Linkshänder unter den ATP-100 berechnet.

Aufgabenstellung: Welche der nachstehenden Aussagen können Sie aufgrund dieses Ergebnisses tätigen? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Ungefähr 11 Spieler sind Linkshänder.	
Das Konfidenzintervall wäre breiter, wenn der Anteil der Linkshänder in der Untersuchung kleiner gewesen wäre.	
Hätte man 10 000 Spieler analysiert, wäre das 95-%-Konfidenzintervall schmäler geworden.	
Der Anteil der Linkshänder im gesamten Profisport liegt jedenfalls zwischen 5% und 17%.	
Das entsprechende 99-%-Konfidenzintervall ist breiter als das 95-%-Konfidenzintervall.	

Lösungsweg:

Ungefähr 11 Spieler sind Linkshänder.	X
Das Konfidenzintervall wäre breiter, wenn der Anteil der Linkshänder in der Untersuchung kleiner gewesen wäre.	
Hätte man 10 000 Spieler analysiert, wäre das 95-%-Konfidenzintervall schmäler geworden.	X
Der Anteil der Linkshänder im gesamten Profisport liegt jedenfalls zwischen 5% und 17%.	
Das entsprechende 99-%-Konfidenzintervall ist breiter als das 95-%-Konfidenzintervall.	X

4.5.5 Typ-2-Aufgaben

Typ-2-Aufgaben sind Aufgaben zur Anwendung und Vernetzung der Grundkompetenzen in definierten Kontexten und Anwendungsbereichen. Dabei handelt es sich um umfangreichere kontextbezogene oder innermathematische Aufgaben, im Rahmen derer verschiedene Teilaufgaben bearbeitet werden müssen und bei deren Lösung operativen Fertigkeiten ggf. größere Bedeutung zukommt. Eine selbstständige Anwendung von Wissen und Fertigkeiten ist erforderlich. Typ-2-Aufgaben können auch Komponenten enthalten, die einzelnen Grundkompetenzen zuordenbar sind.

Folgende Kriterien sollen bei den Aufgaben in Teil 2 berücksichtigt werden:

- *Bei den Teilaufgaben einer Aufgabe werden verschiedene, inhaltlich zusammenhängende Arbeitsaufträge erteilt. Die Bearbeitung dieser Teilaufgaben muss voneinander unabhängig möglich sein, sodass ein fehlerhafter Lösungsweg eines Teils die weitere Bearbeitung der Aufgabe nicht behindert.*
- *Liegen Anwendungsbezüge vor, die im Unterricht nicht behandelt wurden, sind die zur Lösung der Aufgabe notwendigen Sachzusammenhänge, Begriffe, Größen und Einheiten genau und verständlich in der Angabe zu erläutern.*
- *Bei Aufgaben, zu deren Lösung mehrere Grundkompetenzen verknüpft werden müssen, ist auf eine selbstständige Anwendung der Grundkompetenzen zu achten.*
- *Die Aufgaben sollen eigenständiges Nutzen von Grundkompetenzen in variablen und auch weniger vertrauten Situationen erfordern.*
- *Typ-2-Aufgaben sollen auch Komponenten enthalten, die wesentlichen Bereichen zuordenbar sind. Diese Komponenten, die zum Erreichen der Beurteilung Genügend herangezogen werden, sind zu kennzeichnen und so zu gestalten, dass nur die Erfüllungsgrade gelöst oder nicht gelöst möglich sind. Diese Komponenten dürfen maximal ein Sechstel der zu erreichenden Punkte von Teil 2 umfassen.*[12]

Beispiel: An einer Schule mit Schwerpunkt auf die Sportarten Fußball, Tennis und Volleyball wurde eine anonyme Umfrage gemacht. Befragt wurden alle Klassen der Oberstufe. Folgende Graphiken zeigen die Ergebnisse:

[12] bifie (o.J).

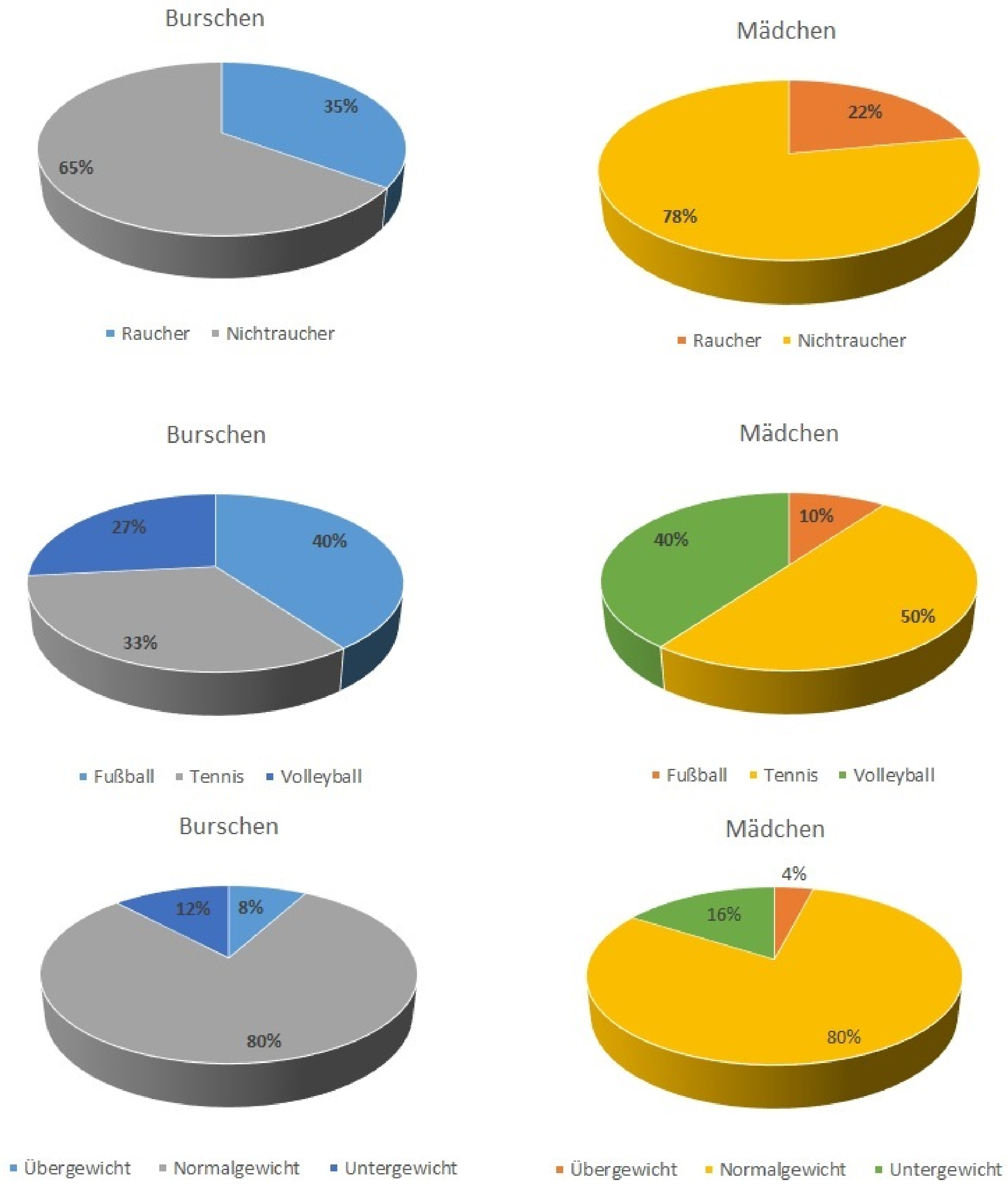

Abbildung 4.9: Umfrage in Schule mit Schwerpunkt Sport

In der nachstehenden Tabelle finden sich die einzelnen Schülerzahlen.

	5A	5B	6A	6B	7A	7B	8A	8B
männlich	13	11	9	10	15	13	13	15
weiblich	18	17	20	16	7	13	12	8
Summe	31	28	29	26	22	26	25	23

Tabelle 4.4: Schüler nach Klassen

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie auf Basis der obigen Graphiken einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "In den 6. Klassen gibt es höchstens 2 Raucher" an (Die angegebenen Prozentsätze sind unabhängig von der Schulstufe).
Angenommen die Schüler/innen gehen ungeordnet zur Schuluntersuchung. Wie viele Schüler/innen müsste ein Schularzt untersuchen, um mit absoluter Sicherheit mindestens eine Raucherin/einen Raucher aus den 6. Klassen zu finden, wenn er weiß, dass es in den 6. Klassen mindestens eine/n davon gibt?

b) Auf Basis der oben angeführten Daten wurde für die Mädchen eines Jahrgangs der folgende statistische Kennwert ermittelt:

$$\mu = n * p = 200,04 = 0,8$$

Was drückt dieser Kennwert aus? Interpretieren Sie diesen Kennwert im gegebenen Zusammenhang und nutzen Sie dabei sowohl die grafische Abbildung der Untersuchungsergebnisse als auch die tabellarische Übersicht über die Klassenschülerzahlen.
Ist der so errechnete Kennwert aussagekräftig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungsweg:

a) X.........Anzahl der Raucher in der 6. Schulstufe
X.........binomialverteilt mit $s = 19, p = 0,35$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{19}{0} * 0,65^{19} * 0,35^{0} + \binom{19}{1} * 0,65^{18} * 0,35^{1} + \binom{19}{2} * 0,65^{17} * 0,35^{2} = 0,01696$$

In der Angabe werden nur statistische Aussagen gemacht. Daher kann nicht mit Sicherheit behauptet werden, ob es mehr als eine/n Raucher/in in den 6. Klassen gibt. Somit müssen alle Schüler/innen untersucht werden, um mit Sicherheit eine rauchende Person in der 6. Klasse zu finden.

b) In der 7. Schulstufe gibt es insgesamt 20 Mädchen. Der Prozentsatz der übergewichtigen Mädchen beträgt 4%. Somit beschreibt der berechnete Wert jene zu erwartende Anzahl an Mädchen aus den 7. Klassen, welche übergewichtig sind.
Da es sich um eine reine Sportschule handelt, ist dieser Wert nur bedingt aussagekräftig. Aufgrund des speziellen Trainings werden die Schüler/innen an Muskelmasse zulegen und somit auch an Gewicht. Auch das Körperwachstum ist in der 5. Klasse meist noch nicht abgeschlossen. Das bedeutet, dass die Schüler/innen der 5. Klassen weniger Gewicht haben werden als jene in den 8. Klassen.

Kapitel 5

Fazit

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde verdeutlicht, wie eng der Tennissport mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung verknüpft ist. Der Zufall spielt nicht nur im Glücksspiel eine große Rolle, sondern auch im Sport. Hier jedoch spielt auch der Faktor Mensch eine große Rolle, da seine Tagesverfassung, die äußeren Bedingungen wie Temperatur beziehungsweise Wetter im Allgemeinen die Leistungsfähigkeit beeinflussen.

Nach einer ausführlichen Einführung in die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wurden diverse Wahrscheinlichkeiten in einem Tennismatch berechnet. Es stellte sich heraus, dass die für einen Laien komplizierte Zählweise im Tennis den besseren Spieler begünstigt. Dennoch ist Tennis ein vergleichsweise fairer Sport, da es keinen Punkterichter wie zum Beispiel im Schispringen oder Kunstturnen gibt. Somit ist der Spieler unabhängig von willkürlichen Schiedsrichterentscheidungen, denn nur die sportliche Leistung zählt. In den letzten Jahren gibt es im Tennis neue Methoden beziehungsweise technische Geräte, um strittige Bälle zu beurteilen. Die neueste technische Errungenschaft nennt sich *Hawk-Eye* und kann den Weg des Balles rekunstruieren und somit feststellen, ob der Ball innerhalb, außerhalb oder auf der Linie war. Notwendig ist diese Technologie nur auf Gras oder Hartplatz, da die Bälle im Sand Abdrücke hinterlassen.

Im Anschluss an die Tennistheorie wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule betrachtet. Der Lehrplan begünstigt die Wahrscheinlichkeitsrechnung in allen Schultypen. Damit ist bewiesen, dass für eine fundierte Ausbildung im Fach Mathematik die Wahrscheinlichkeitsrechnung fundamental ist.

Bei der Analyse von Schulbüchern wurde festgestellt, dass die Sportart Tennis in Aufgaben eher selten vorkommt. Als Grundlage für Schulbuchaufgaben dienen meistens Glücksspiele (Ziehen von Kugeln aus einer Urne, Lotto, Toto, Roulette, Würfelspiele, Münzenwurf und Kartenspiele). Sportarten sind eher selten vertreten. Im Schulbuch Mathematik Lehrbuch 6 von Götz, Reichel (Hrsg.), Müller, Hanisch gibt es 79 Textaufgaben im Kapitel Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Davon haben 19 Aufgaben einen Kontext im Zusammenhang mit Glücksspielen und neun Aufgaben einen sportlichen Kontext. Eine dieser Aufgaben handelt von Tennis, eine von Tanzen, drei von Staffelbewerben (Leichtathletik, Schwimmen) und 4 von Fußball. Um die Vielfalt in einem Schulbuch zu erhöhen, könnte man die Aufgaben mit einem Fußballkontext austauschen gegen Volleyball, Handball, Hockey, etc. Dadurch könnten sich mehr Schüler mit den einzelnen Aufgaben identifizieren beziehungsweise könnten sie etwas über die Wahrscheinlichkeiten in ihrer eigenen Sportart erfahren. Berechnungen zu Themen, die einen Schüler selbst betreffen, motivieren ihn deutlich mehr als abstrakte Kontexte. Außerdem bietet die Analyse von Sportergebnissen eine Vielzahl an Möglichkeiten. Ein Beispiel hierfür wären Untersuchungen bezüglich von Mustern.

Um die Sportart Tennis in der Schule und der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch präsenter zu machen, wurden Aufgaben für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung erstellt. Dabei wurde festgestellt, dass sich die Sportart Tennis nicht für alle Aufgabenformate eignet. Bei einigen Aufgaben wirkt der Kontext Tennis künstlich hergestellt.

Abschließend sei gesagt, dass diese Arbeit nur einen kleiner Teil einer Analyse des Tennissports darstellt. Eine weitere Vertiefung der Gewinnwahrscheinlichkeiten wäre möglich, indem man die verschiedenen Bodenbeläge berücksichtigt. Auf Gras ist der Ball langsamer als auf Sand. Auf einem Hartplatz ist der Ball schneller als auf Sand. Aber auch in anderen mathematischen Gebieten könnte man Analysen durchführen. Beispielsweise eine Analyse der Flugbahn der Bälle, eine Analyse der unterschiedlichen Ballhersteller bezogen auf deren Einzelverhalten im Spiel, Vergleiche von Tennis mit anderen Sportarten, etc.

Literaturverzeichnis

- *Berufsbildende Schulen* (2014): Handelsakademie / Lehrplan 2014; online 27.8.2014, https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/download/1990/Lehrplan_HAK_2014.pdf (7.11.2016).
- *Berufsbildende Schulen* (2015): Höhere Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe / Lehrplan; online 2015, https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/download/2074/HLW.pdf (7.11.2016).
- *bifie* (2015): Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS 11. Mai 2015 Teil-1-Aufgaben. - online http://www.oegp.cz/docs/2014_15/Matura_2015_Typ1.pdf (8.11.2016).
- *bifie* (2017): Übungsklausuraufgaben für die SRP in Mathematik; online https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/index.php?action=14 (27.3.2017).
- *bifie* (o.J.): Hinweise und Empfehlungen zur Erstellung von Mathematikschularbeiten in der AHS-Oberstufe. - online https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_ptsam_hw_25416.pdf?5te970 (27.3.2017).
- *Bleier* Gabriele (2010): Dimensionen - Mathematik 6. - Wien.
- *BMB* (2004): Lehrpläne der AHS-Oberstufe: Mathematik; online 8.7.2004, https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?5i84kh (7.11.2016).
- *Borovcnik* Manfred (o.J.): Änderungen der Tennisregeln: Wer profitiert davon?. - Original von Teaching Statistics? Vol. 7(1985): Changing the Rules of Tennis: Who has the Advantage?. - online, http://wwwg.uni-klu.ac.at/stochastik.schule/1979-90_abstracts/Beitraege/1986-2_Croucher.html (13.3.2017).
- *Bosch* Karl (1937): Lotto und andere Zufälle: Wie man die Gewinnquoten erhöht. - München, Wien.

- *Bosch* Karl (1976): Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung: mit 82 Beispielen und 73 Übungsaufgaben mit vollständigem Lösungsweg. - Braunschweig.
- *Croucher* J.S. (1982): Eine Auswertung der Wimbledon Tennisfinale der ersten 100 Jahre. - In: Stochastik in der Schule, Heft 3, 32-35.
- *Götz* Stefan, *Reichel* Hans-Christian (Hg.), *Müller* Robert und *Hanisch* Günter (2007a): Mathematik-Lehrbuch 6. - Wien.
- *Götz* Stefan, *Reichel* Hans-Christian (Hg.), *Müller* Robert und *Hanisch* Günter (2007b): Mathematik-Lehrbuch 8. - Wien.
- *Götz* Stefan, *Reichel* Hans-Christian (Hg.), *Müller* Robert und *Hanisch* Günter (2008): Mathematik-Lehrbuch 7. - Wien.
- *Havil* Julian (2007): Verblüfft?! Mathematische Beweise unglaublicher Ideen. - New Jersey.
- *Humenberger* Hans (2015a): Schulmathematik 5 (Stochastik): Wahrscheinlichkeitstheorie. - Wien: Fakultät für Mathematik.
- *Humenberger* Hans (2015b): Schulmathematik 5 (Stochastik): Stetige Zufallsvariablen. - Wien: Fakultät für Mathematik.
- *Humenberger* Hans (2015c): Schulmathematik 5 (Stochastik): Zufallsvariablen. - Wien: Fakultät für Mathematik.
- *Koth* Maria (2014): Schulmathematik 3 (Angewandte Mathematik): Mathematikaufgaben zum Lotto 6 aus 45. - Wien: Fakultät für Mathematik.
- *Maaß* Katja (2008): Und man braucht sie doch! Nützlichkeit von Mathematik erfahrbar machen. - 11. Internationale Schulmathematiktagung 2008; online http://www.univie.ac.at/mathematik_didaktik/2008_schulmathematik_tagung/vortraege/download/Katja_Maass_Und%20man%20braucht%20sie%20doch-1.pdf (20.3.2017).
- *Malle* Günther, *Koth* Maria und *Salzger* Bernhard (2010): Mathematik verstehen 6. - Wien.
- *Monks* A. R. (1986): Gleich Wahrscheinlich. - In: Stochastik in der Schule, Heft 2, 25 - 30.
- *Rendl* Franz (2003): Wie lang dauert ein Tennisspiel? (Angewandte Stochastik). - Universität Klagenfurt; online 28.5.2003, https://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjpj8LCzarQAhUKESwKHfYEBiAQFggdMAA&url=http%3A%2F%2Foptimierung.mathematik.uni-kl.de%2Fmamaeusch%2Faktivitaeten%2Flehrerfortbildung%2Faustria_teacher_tr_rendl.pdf&usg=AFQjCNHf0tclrlxR6ZtUWHY5g4qZFrblCQ (5.11.2016).

- *Schmidt* Günter (1998): Experimenteller und anschaulicher Stochastikunterricht rund um das "Problem der abgebrochenen Partien". - In: Stochastik in der Schule, Heft 1, 17-42.
- *Scholl* Peter (2014): Richtig Tennis spielen. Optimales Training von Anfang an. – BLV Buchverlag GmbH & Co. KG, München.
- *Spreitzer* Christian (2015): Kontexte aus den Naturwissenschaften bei der Zentralmatura AHS; online http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/Amstetten_15/physik_kontexte_feb_2015_neu.pdf (20.3.2017).
- *Steiner* Gerald und *Novak* Johann (2007): MatheMaster: Mathematik für die 7. Klasse AHS. - Wien.

Abbildungsverzeichnis

2.1 Baumdiagramm Ziehen mit Zurücklegen 9
2.2 Baumdiagramm Ziehen ohne Zurücklegen 10
2.3 Baumdiagramm 1. Pfadregel ohne Zurücklegen 11
2.4 Baumdiagramm 1. Pfadregel mit Zurücklegen 11
2.5 Baumdiagramm Stundenwiederholung 1 12
2.6 Baumdiagramm Stundenwiederholung 2 13
2.7 Werte einer Zufallsvariable X 20
2.8 Verteilung einer Zufallsvariable 20
2.9 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable 21
2.10 Verteilung der Zufallsvariable (Single-Choice-Prüfung) 24
2.11 Länge der Nägel 29
2.12 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 29
2.13 Gauß'sche Glockenkurve 32
2.14 Skizze 1 33
2.15 Skizze 2 34
2.16 Skizze 3 34
2.17 Skizze 4 34
2.18 Skizze 5 35
2.19 Skizze 6 36
2.20 Skizze 7 36
2.21 Skizze 8 36
2.22 Skizze 9 37
2.23 Skizze 10 39
2.24 Skizze 11 39
2.25 Skizze 12 40
2.26 Skizze 13 40
2.27 Skizze 14 41
2.28 Wahrscheinlichkeiten der diskreten Zufallsvariable 42

2.29 Ablehnungsbereich einer Hypotehese 47
2.30 Skizze 15 49

3.1 Spielverlauf eines Games 52
3.2 Spielverlauf bei Einstand 53
3.3 Verlauf Tie-Break 55
3.4 Spielverlauf Damenmatch 56
3.5 Baumdiagramm für den Fall P(30,15) 61
3.6 Graph von P(40,30) 62
3.7 Graph von P(30,15) 62
3.8 Graph von P(0,0) 63
3.9 Schnittpunkt P(40,30) und P(0,0) 63
3.10 Schnittpunkt P(30,15) und P(0,0) 64
3.11 Gewinnwahrscheinlichkeit im Doppel für verschiedene p 68
3.12 Dauer eines Doppel für verschiedene p 70
3.13 Möglichkeiten des potentiellen weiteren Spielverlaufs 71
3.14 Baumdaigramm Spieler A gewinnt 71
3.15 Pascalschen Dreieck 72
3.16 Baumdiagramm Spielverlauf bei drei Spielern 73

4.1 Skizze Maschen 82
4.2 Bevölkerung mit Migrationshintergrund (nicht manipuliert) 86
4.3 Bevölkerung mit Migrationshintergrund (manipuliert) 87
4.4 Spieler über bzw. unter 100 Punkten 89
4.5 prozentueller Anteil nach Bundesland 89
4.6 Umfrage Lieblingssportart 90
4.7 leeres Säulendiagramm Umfrage 91
4.8 vollständiges Säulendiagramm Umfrage 91
4.9 Umfrage in Schule mit Schwerpunkt Sport 100

Tabellenverzeichnis

2.1 Augenfarbe/Haarfarbe 17
2.2 Werte einer Zufallsvariable X 19
2.3 Verteilung einer Zufallsvariable (Single-Choice-Prüfung) 23
2.4 Würfelspiel 1 24
2.5 Würfelspiel 2 24
2.6 Würfelspiel 3 25
2.7 Hypothese - Alternativhypothese 49

3.1 Matchgewinnwahrscheinlichkeit für gewisse Satzgewinnwahrscheinlichkeiten 57
3.2 Matchgewinnwahrscheinlichkeit nach zwei Sätzen 57
3.3 Matchgewinnwahrscheinlichkeit bei Gewinn 1. Satz 58
3.4 Matchgewinnwahrscheinlichkeit bei Verlust 1. Satz 58
3.5 Matchgewinnwahrscheinlichkeit bei drei gewonnenen Sätzen 59
3.6 durchschnittlich gespielte Punkte für gewisse p 66
3.7 Werte vor dem 2. Weltkrieg 76
3.8 Werte nach dem 2. Weltkrieg 76
3.9 Werte von 1877 bis 2016 76
3.10 Sieger im 1. Satz und Match 77

4.1 Gewinnerwartung 81
4.2 Anzahl der Spieler mit mind. 100 Punkten und Bundesland 90
4.3 Tennisstunden pro Woche 92
4.4 Schüler nach Klassen 101

Abstract

Die vorliegende Arbeit handelt von der grundlegenden Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie ihren Einsatzmöglichkeiten in der Schule und im Tennis. Unter anderem zeigt sie die Möglichkeiten der Berechnung von Gewinnwahrscheinlichkeiten, der durchschnittlich gespielten Punkte pro Game und der Besonderheiten im Tennisdoppel auf. Hier werden die Stärken und Schwächen der geltenden Tennisregeln aufgedeckt. Außerdem werden die Vorzüge der Doppelregeln gegenüber jenen im Einzel vorgestellt und mathematisch belegt. Im Anschluss werden anhand einer Analyse aller bisherigen Wimbledon-Finalbegegnungen einige mathematische Erkenntnisse mit den realen Spielausgängen verglichen.

In der Schule verlieren die Schüler oft aufgrund von zu komplexen Kontexten der Textaufgaben das Interesse an der Mathematik. Aus diesem Grund ist es wichtig Aufgaben aus den Interessensgebieten der Schüler zu erstellen. Daher sind Beispielaufgaben mit dem Kontext Tennis zu allen Grundkompetenzen der österreichischen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung im Fach Mathematik enthalten.

English Abstract

This diploma thesis deals with basic calculus of probability and its field of application within school and tennis. It especially shows the possibilities of calculating the winning probability, the average points per game and the specifics in doubles. The strengths and weaknesses of the current rules in tennis are discussed. Moreover the advantages of the rules for doubles compared to those for singles are presented and mathematically proved. Subsequent all Wimbledon finales are analysed and are used to compare mathematical findings with real end scores.
At school students often lose interest in mathematics due to overly complex contexts of mathematical tasks formulated in text form. For this reason it is important to create tasks with reference to their fields of interest. Therefore this thesis includes examples of tasks with the context of tennis for all core competences of the Austrian standardised written final examination in mathematics.