universität wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

**Das Unendliche in der Mathematik -
Eine holistische Betrachtung unter besonderer Berücksichtigung des Vorkommens in der eindimensionalen reellen Analysis und der Nichtstandardanalysis**

verfasst von / submitted by

Katrin Pamperl

angestrebter akademischer Grad /
in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 456
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium: UF Mathematik UF Geographie und Wirtschaftskunde
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Vorwort und Danksagung

Die Idee mich in dieser Diplomarbeit mit der mathematischen Unendlichkeit zu beschäftigen, entstand nach angestrengtem Brainstorming und viel Recherche fast aus einem glücklichen Zufall. Ich erinnere mich gerne daran zurück wie ich mit zwei StudienkollegInnen in einer Lernnische der Universität Wien saß und meinen Unmut darüber äußerte kein Diplomarbeitsthema zu finden, das meinen Ansprüchen gerecht wurde.
Mir war es wichtig über einen persönlichen Zugang zu meinem Thema zu verfügen, da dadurch meine Motivation und meine Neugierde gestärkt sein würden. An diesem Tag entstanden spontane Einfälle, wobei der Begriff der Unendlichkeit fiel. Diese Idee ging mir nicht mehr aus dem Kopf. Ich finde es besonders spannend, dass der Begriff der Unendlichkeit in sehr vielen verschiedenen Wissenschaften ein Thema ist und die Menschheit eine Faszination dafür verspürt. Wie ich meine: nicht ohne Grund! Nichts ist derart mysteriös und abstrakt wie etwas, das noch kein Mensch tatsächlich erlebt hat. Unendlichkeit baut ohne Zweifel auf Vorstellungskraft auf! Diese Vorstellungskraft machte ich mir auch zu Nutze, als ich recherchierte und versuchte die vielen Ideen zu sortieren. Die Unedlichkeit ist - ohne zu philosophisch werden zu wollen- ein mathematisch und auch interdisziplinär betrachtet sehr vielschichtiges und endlos viel Stoff lieferndes Thema. Zufälligerweise stieß ich immer wieder auf Dinge, die mich an die Unendlichkeit erinnerten und mir weitere Ideen lieferten. Das interpretierte ich als Zeichen.

Nachdem ich meine Gedanken sortiert hatte, sowie eine Grundstruktur für meine Diplomarbeit und geeignete Literatur am Tisch lagen, traf ich mich mit meinem Diplomarbeitsbetreuer Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith. Er akzeptierte meinen Themenvorschlag und redete mir gut zu mich an die Arbeit zu machen und zu sehen, wo mich meine Ideen hinführen würden.
Danke an dieser Stelle an meinen Betreuer, der mir immer freie Hand ließ und es mir dadurch ermöglichte mich und meine Gedanken völlig frei entfalten zu können. Diese Offenheit weiß ich gut zu schätzen!
Ein Danke gebürt auch meiner Familie, meinen Freunden und natürlich auch im Speziellen meinen StudienkollegInnen, die mir von Beginn der Themenfindung an bis zur fertiggestellten Arbeit eine große Stütze waren. Selbst wenn mir fachlich kaum zu helfen war, offene Ohren waren mir in jeglicher Situation gewiss.
Danke an alle, die mir Kraft geschenkt haben und mir halfen das Licht am Horizont von endlos scheinenden Phasen zu sehen!

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Einleitung

Der menschliche Alltag ist geprägt von endlich andauernden Ereignissen: Menschen erfüllen ihre Arbeitsaufträge, brechen sie nach einer bestimmten Zeit ab oder verschieben etwas. Sie erledigen ihre täglichen Einkäufe, gehen ihren Hobbies für eine bestimmte Zeitspanne nach, etc. Jede Aktion wird entweder in der Gegenwart beendet oder das Ende liegt gewiss in der Zukunft.

Trotzdem ist die Unendlichkeit in der Philosophie, der Theologie, sowie unter anderem in naturwissenschaftlichen Disziplinen wie der Physik, der Biologie und vor allem auch in der Mathematik ein bedeutsamer Bestandteil. Diese thematische Überschneidung verdeutlicht die Rolle der Unendlichkeit und wird deshalb auch den Ausgangspunkt der vorliegenden Betrachtung darstellen. In diesem Teil werden künstlerische Werke wie der Grenzprozess einer Bilderfolge oder eine scheinbar unendliche Tonerhöhung in Kombination mit physikalischen Überlegungen zu den unendlich kleinen Bestandteilen des Lebens und dem unendlich großen Weltall auftreten. Es wird mit Illusionen des unendlichen Raumes, philosophischen Gedanken zu unendlichem Ideenreichtum oder religiösen Vorstellungen des Lebens nach dem Tod gearbeitet. Welche Ansichten stecken interdisziplinär hinter dem unscheinbaren Symbol ∞?

Nach diesem einführenden Kapitel werden sich die LeserInnen auf die innermathematische Ebene der Unendlichkeit begeben. In dieser Diplomarbeit wird die Vielfalt des Unendlichen in der Mathematik beleuchtet, da es eines der bedeutsamsten Konstrukte der Disziplin darstellt. Außergewöhnliche MathematikerInnen und PhilosophInnen haben sich dem Thema bereits vor tausenden Jahren angenommen. Es wurde viel geforscht und es stellten sich Fragen über Fragen, die teilweise bis heute noch ungeklärt oder zumindest umstritten sind. Euklid, Cantor, Hilbert, Newton, Leibniz oder Weierstraß sind nur ein Bruchteil der Beteiligten in diesem Forschungsbereich. Im Teil „Meilensteine der mathematischen Unendlichkeitsgeschichte“ wird zum disziplinären Verständnis deshalb ein Streifzug durch die Entwicklung des Unendlichkeitsbegriffes vorgenommen. Ziel dessen ist es aufzuzeigen wie Forschungen der verschiedensten Gebiete der Mathematik zu unserem heutigen Umgang mit der Unendlchkeit beigetragen haben. Die Auswahl der erwähnten Meilensteine erfolgte mit Fokus auf die disziplinäre und zeitliche Vielfalt, sowie den Nutzen für die folgenden Kapitel.
Es wird bemerkt werden, dass sich die Ansätze je nach Disziplin sehr deutlich unterscheiden können. Grob kann zwischen der Berufung auf das aktuale- oder das potentiell-Unendliche unterschieden werden. Einerseits wird von aktualen - also tatsächlich existenten - unendlich kleinen (infinitesimalen) und unendlich großen (infiniten) Objekten ausgegangen. Andererseits wird die Unendlichkeit potentiell im Sinne eines Prozesses gedeutet.

Danach wird das nötige Grundverständnis vohanden sein, um sich tiefgreifender mit dem tatsächlichen Vorkommen der Unendlichkeit in der Mengenlehre, der reellen (Standard-) analysis und Nichtstandardanalysis auseinanderzusetzen.
Die Mengenlehre beschäftigt sich dann insbesondere mit der Anzahl von Elementen einer Menge (der Mächtigkeit einer Menge). Dabei werden Fragen zu der Existenz unendlicher Mengen behandelt, wozu z.B.: zählt, ob es immer mächtiger werdende unendliche Mengen gibt.

Innerhalb der Analysis werden den LeserInnen allgemeine Begriffe wie Grenzwerte und Konvergenz von Folgen und Reihen, Stetigkeit oder Differenzier- und Integrierbarkeit begegnen. Dabei wird die Unendlichkeit einerseits für die gedankliche Konstruktion dieser Begriffe relevant sein. Andererseits wird auch noch explizit damit gerechnet. Als Beispiel für die Begriffsbildung kann an dieser Stelle schon die Entwicklung des Riemann-Integrals erwähnt werden. Das entspricht bekanntlich dem Grenzwert der Riemann-Summe, die wiederum zwischen Ober- und Untersumme liegt.
Für die begrifflichen Klärungen werden wichtige Definitionen, Propositionen, Sätze und Beweise eingeführt, wodurch rechnerisch Konvergenzuntersuchungen und Ähnliches möglich werden. Im weiteren Verlauf der Diplomarbeit können Zusammenhänge erfasst und Interpretationen getätigt werden.
In den Abschnitten „Grenzwerte und Konvergenz von Folgen“ und „Differentier- und Integrierbarkeit“ werden Exkurse zur Schulmathematik vorgenommen, wodurch der Horizont für verschiedene Betrachtungsweisen erweitert werden soll. Diese Einwürfe sind mir gerade deshalb wichtig, weil mich als zukünftige Lehrerin nicht nur interessiert was aus fachlicher Sicht wichtig ist, sondern auch wie aus fachdidaktischer Sicht damit umgegangen werden sollte.

Das Gesamtbild wird durch einen Einblick in die Nichtstandardanalysis abgerundet. Im Gegensatz zu der bekannteren (Standard-)analysis werden darin infinitesimale und infinite Elemente explizit verwendet und unendlich kleine Fehler werden vernachlässigt. In diesem Abschnitt wird das Grundgerüst der Nichtstandardanalysis, bestehend aus Filtern, Superstrukturen, den hyperreellen Zahlen, etc. vorgestellt. Danach wird eine Auseinandersetzung mit den wichtigsten Begriffen aus dem Abschnitt der Standardanalysis stattfinden. Dadurch soll das Perspektivenreichtum zu der Unendlichkeit vervollständigt werden. Es gibt eben nicht „Das eine und einzige Unendliche“ !

Teil II

Interdisziplinäre Betrachtung der Unendlichkeit

Abbildung 1: Kunst-Bild im Bild im Bild..., nach [1, S. 2]

Psychologie, Philosophie, Kunst, Physik, Theologie, Mathematik, Musik,... Die Liste an Disziplinen, die sich in irgendeiner Weise mit der Unendlichkeit beschäftigen, könnte noch durchaus weiter - wenn nicht sogar unendlich weit - fortgesetzt werden.
Mit etwas Aufmerksamkeit können uns Menschen in den banalsten Situationen Erscheinungen der Unendlichkeit unterkommen. Welche Möglichkeiten gibt es mit dem Thema konfrontiert zu werden? Diese Frage soll beispielhaft anhand von spotlights im Rahmen dieses Kapitels beantwortet werden. Dabei soll die Mathematik zu aller Erst gegenüber den anderen Disziplinen zurücktreten. Welche Motivation steckt hinter dem erkennbaren Interesse an der Unendlichkeit?

In der Mathematik ist bekanntlich der Grenzwert für das Thema essentiell. Interessant ist jedoch, dass der Grenzprozess beispielsweise aus künstlerischer Perspektive ebenfalls reizvoll erscheint. Mehrere KünstlerInnen spielen mit dem Gedanken eine Empfindung der Unendlichkeit in Bildern oder Fotografien zu wecken.
Man betrachte die obige Abbildung. Dieses Foto hält einen Moment fest, in dem ein Mann in der Natur ein Bild in seinen Händen hält. Das eigentliche Bild besteht aus einem immer wieder eingesetzten verkleinerten Foto oder Gemälde haargenau derselben Situation. Es ruft eine Illusion von unendlich vielen immer kleineren eingeschriebenen Bildern hervor. Nach einer bestimmten Anzahl an Bildern ist die verfügbare Bildfläche zu klein, um jeden Bestandteil unterzubringen. Die Ähnlichkeit zu mathematischen Näherungsprozessen besteht nach [1, S. 5] dadurch, dass sich die Bilderfolge immer stärker zu einem einzelnen Punkt zusammenzieht. Dieser Punkt wird aber natürlich nicht erreicht.
Analog zu obigem Bild wurden auch Gedichte verfasst, deren Strophen wiederum dieselbe Geschichte innerhalb der Geschichte erzählen.

Bilder wie jenes oberhalb können in Museen rund um die Welt bestaunt werden. Ein weiteres Museum, das sich sogar in Wien befindet, spielt ebenfalls mit dem Unendlichen: Das Museum der Illusionen nahe der Herrengasse im ersten Wiener Gemeindebezirk. Vor Ort erwartet die BesucherInnen eine Sammlung aus Hologrammen, einzigartigen Experimenten oder klassischen optischen Täuschungen. Darüber hinaus spielt die Perspektive der Betrachtung in vielen Fällen eine bedeutende Rolle. Demnach kann das Größenverhältnis zweier etwa gleich großer Personen auf einer stark geneigten Fläche insofern verzerrt werden, dass eine Person zum Beispiel doppelt so groß wirkt wie die andere.
Die Beschreibungen zu den jeweiligen Ausstellungsstücken sollen den BesucherInnen helfen reflexiv mit dem Beobachteten umzugehen. Es soll erkannt werden mit welchen Tricks das Auge getäuscht wird und wieso wir auf eine bestimmte Art und Weise wahrnehmen, obwohl die Wirklichkeit anders aussieht.
In diesem Museum wird auch in vielerlei Situationen mit Spiegeln gearbeitet. Zwei dieser Einsatzmöglichkeiten erwecken auch die Illusion von Unendlichkeit.
Einerseits handelt es sich dabei um einen sogenannten Unendlichkeitsspiegel.
Dieser Spiegel funktioniert wie folgt:
Der Unendlichkeitsspiegel besteht aus mehreren hintereinander angeordneten Spiegeln.
Jeweils einer davon reflektiert voll, der andere wieder nur teilweise. Die Spiegel sind so platziert, dass sich der zum Teil reflektierte Spiegel im voll Reflektierenden widerspiegelt. Dadurch wird eine Reihe von kleinen, unterschiedlich starken Spiegelungen erzeugt. Diese wirken, als ob sie grenzenlos fortsetzbar wären. In Abbildung 2 wird dieses Phänomen sichtbar. Es wurde nicht zentral, sondern von der linken Seite des Bildes aus fotografiert, um die Spiegelungen auf der rechten Seite klar und deutlich zu erkennen. Es spiegelt sich ein Werk bestehend aus einem schwarzen Grund und einem weißen Gitter und weißen Gitterpunkten wieder. An der Lichtquelle im oberen Bereich des Fotos ist die scheinbar unendlich weite Fortsetzung des Raumes besonders gut erkennbar.

Abbildung 2: Unendlichkeitsspiegel, eigene Aufnahme

Darüber hinaus wurde der sogenannte unendliche Raum im Museum der Illusionen geschaffen. Wie der Name schon vermuten lässt, wirkt das Zimmer unendlich groß.
Das wird wiederum durch Spiegel auf jeder Seite des Raumes ermöglicht. Sogar die Decke ist mit Spiegeln besetzt. Es ist unerheblich in welche Richtung geblickt wird. Überall sieht man die anderen Personen im Raum oder sich selbst, jedoch aus anderen Perspektiven.

Abbildung 3: Unendlichkeitsraum, eigene Aufnahme

Durch die Beschäftigung mit visuellen oder akustischen Erscheinungen, gelangt man schnell in die Tiefen der Physik. Die Physik ist ebenfalls dafür bekannt sich mit dem unendlich Kleinen und dem unendlich Großen zu beschäftigen, selbst wenn dies in der Natur nicht erkennbar ist. Es wird unter anderem darüber geforscht, was hinter unserem Seh- oder Hörempfinden steckt.
[10, S. 198 ff.] setzt für diese Erklärungen bei den alten Griechen an, die zu einem Großen Teil die Welt als Ort des Zusammenwirkens von Atomen mit ihren ganz speziellen Eigenschaften deuteten. Dieser Ansicht wird im Kapitel zu den antiken Griechen weiter auf den Grund gegangen.
Chemiker fanden im 19. Jahrhundert tatsächlich heraus, dass es solche kleinen - für uns selbst mit den besten Hilfsmitteln, gschweige denn mit den Augen- unsichtbaren Atome geben muss, da nur diese bestimmte stoffliche Reaktionen erklären würden. Über die Zeit gelangten ForscherInnen zum Ergebnis, dass Atome aus den kleineren Teilchen Protonen, Neutronen und Elektronen bestehen.
Der schwierige Umgang mit dem unendlich Kleinen stammt auch daher, dass es für uns Menschen eben nicht greifbar oder sichtbar ist.
[10, S. 201 ff.] beschreibt unser Sehvermögen wie folgt: Lichtwellen treffen auf der Netzhaut des Menschen auf. Dieser Impuls initiert eine chemische Reaktion, wodurch Signale an das Gehirn geschickt werden. Dieser Vorgang ist notwendig, damit wir Menschen ein Bild sehen. Wir sind aber nur dazu fähig einen bestimmten Lichtwellenlängenbereich bzw. eingeschränkte Lichtfarben wahrzunehmen. Zu kurzwelliges Licht (z.B.: das ultraviolette Licht) ist für unser Auge nicht erfassbar. Trotzdem kann auf Grund seines Energiereichtums eine Auswirkung davon in Form eines Sonnenbrandes sichtbar werden. Bei Ärzten begegnet uns eine noch energiereichere Strahlung - die Röntgenstrahlung. Davor müssen wir uns beim Röntgen sogar schützen, da sie sonst in unseren Körper eintritt. Radiowellen sind hingegen besonders energiearm und lang. Durch möglichst kurzwelliges Licht ist besonders viel in der Natur erkennbar. Unendlich viel Energie würde gebraucht werden, um unendlich Kleines sichtbar zu machen.
Wie würden demzufolge immer kleinere Elemente des Universums untersucht werden?
[10, S. 203 ff.] gibt Auskunft darüber. Es wurden einzelne Messinstrumente entwickelt, die das von den Atomen ausgesandte Licht und dessen Richtung feststellen können. Dadurch ist der Ort der Aussendung zumindest annähernd bestimmbar. Das Atom ist wegen der Unschärferelation (einem Teil der Quantenmechanik) jedoch nie genau verortbar. Bei der Lichtaussendung eines Atoms kommt es nämlich fast wie bei einem Gewehrrückstoß zu einer neuen Bewegung.

In Teilchenbeschleunigern (wie dem CERN) sollen Atomteile mit sehr großen Geschwindigkeiten auf Bahnen kollidieren, damit neue Teilchen entstehen. Durch dieses Verfahren und die zugehörigen Messgeräte ist es möglich weitere Daten zu den noch kleineren Teilchen, den Quarks, zu erfassen.

Verabschieden wir uns nun für den Moment vom Sehsinn und wenden wir uns dem Hören zu. Auch in diesem Bereich liefert die Physik gute Erkenntnisse. Im Schnittbereich mit der Musik liegt unter anderem die Tonerzeugung, hier erklärt nach [10, S. 208 ff.]. Um einen Ton mittels einer Saite zu erzeugen, muss die Saite in Schwingung gebracht werden. Durch die Bewegung wird die Dichte der umgebenden Luft und damit dann auch jene des Raumes beeinflusst, was wiederum vom menschlichen Gehirn in Form von Tönen wahrgenommen wird. Die Tonhöhe variiert nach Zeitabstand der bei uns ankommenden Verdichtungen. Um nocheinmal auf die schwingenden Saiten zurückzukommen: die Kombination der Schwingungstypen entscheidet über die Töne und Tonhöhen.
Auffällig ist, dass die Mathematik mit ihren unendlich dicht beinander liegenden Zahlen sowohl der Tonerzeugung, als auch den Teilchenuntersuchungen zu Grunde liegt.
Festzuhalten ist somit, dass wir weder in unserem alltäglichen Sehen, noch in unserem Hören direkt mit der Unendlichkeit konfrontiert sind. Trotzalldem steckt dahinter ein Konstrukt, das durch das unendlich Kleine mathematisch gestützt ist.

Die Musikgeschichte liefert einen nicht zu missenden Beitrag im Zusammenhang mit der Unendlichkeit. Johann Sebastian Bach fügte in sein Stück „Das musikalische Opfer“ den „Canon per tonos“, auch „Bach's neverending canon“ genannt, ein. Wie der informelle Titel schon zeigt, wird durch den Kanon das Gefühl eines nicht-endenwollenden Stücks kreiert. Ein Kanon hat grundsätzlich kein natürlich vorbestimmtes Ende. Er könnte ewig fortgesetzt werden. [1, S. 5] findet eine Analogie zur Mathematik. Der „Canon per tonos“ fokussiert nicht wie das oben beschriebene Bild im Bild im Bild auf ein Grenzobjekt, sondern sieht eher dem Durchlaufen der natürlichen Zahlen ähnlich. Theoretisch müsse der Kanon unendlich oft wiederholt werden. Es kommt nach [15] zu vorbereiteten Tonartwechseln, wobei regelmäßig eine Rückkehr zu C-Moll stattfindet. C-Moll wird dann jedoch immer um eine Oktave höher angesetzt. Für das Musikstück wurde die Shepard Tontechnik verwendet, die auf den Kognitionswissenschaftler Robert Shepard zurückgeht. Das Besondere daran ist, dass keine unendliche Tonerhöhung notwendig ist. Diese Tontechnik zeichnet aus, dass trotz endlicher Klangfolge mit Hilfe einer akustischen Täuschung der Eindruck erweckt wird, als ob die Töne immer weiter steigen oder sinken würden.

Der Begriff Echo (Widerhall) kommt in der Musik, aber auch z.B.: bei einem Wandertag in den Bergen, vor. Das Echo kann ebenfalls die Illusion von einer unendlich langen Tonfolge hervorrufen. Ein Echo in den Bergen kann leicht dadurch geschaffen werden, dass eine Person etwas ruft und genau dieser Satz oder die einfachen Laute widerhallen und so das Gefühl vermittelt wird, als ob jemand zurück rufen würde. Es wird also als eigenständig und nicht direkt vom Rufer abhängig wahrgenommen. Im Endeffekt sind es die reflektierten Schallwellen, die zu einem Echo führen. Je weniger reflektierende Objekte, desto eher wird das Empfinden eines Echos begünstigt.

Wird zur Physik zurückgekehrt, kann gefragt werden, ob sie sich tatsächlich am ehesten mit dem unendlich Kleinen auseinandersetzt, oder doch auch das unendlich Große eine bedeutende Rolle spielt. Letzteres ist der Fall! Die Physik beschäftigt sich im Bereich der Astrophysik mit Erscheinungen und Phänomenen, die über die Grenzen unseres Planeten hinausgehen. Das Weltall birgt eine Vielzahl an Untersuchungsschwerpunkten in sich. Dementsprechend kann eine Auseinandersetzung mit Planeten, Galaxien, Sternen, Schwar-

zen Löchern, dunkler Materie, etc. stattfinden. [10, Das unendlich große Weltall] setzt sich oberflächlich mit diesem Bereich auseinander. Darauf soll nun eingegangen werden.
Entfernungen innerhalb des Weltalls oder vom Weltall bis zu uns werden mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit in Relation gesetzt. Diese beträgt etwa 300000 km pro Sekunde. Zum Vergleich: ein Lichtstrahl vom Mond zu uns braucht etwa 1,5 Sekunden, einer von der Sonne zu uns schon 8 Minuten. Die Entfernung von der Sonne zu uns ist aber im Vergleich zu Strecken von anderen Planeten oder Sternen zu uns sehr gering. Die gängige Maßeinheit ist daher das Lichtjahr ($9,4605$ Billionen km), das die Strecke angibt, die innerhalb eines Jahren vom Licht zurückgelegt wird. Es ist bekannt, dass bis in die Enfernung von mehreren Milliarden Lichtjahren Sterne existieren.
Wir selbst sind mit dem Planeten Erde ein Teil der Milchstraße. Das Milchstraßensystem besteht aus der Scheibe der Milchstraße mit ca. hundert Millionen Sternen und darüber hinaus aus einem kugelförmigen Raumgebiet. Dieses Raumgebiet ist nicht mehr so dicht mit Sternen besetzt wie die Milchstraße selbst, beinhaltet aber trotzdem Sternhaufen.
Kugelsternhaufen sind nach [10, S. 217] Gruppen von bis zu einer Million Sternen, die auf sehr engem Raum zusammengedrängt sind. Die größte Sternenanzahl wird für uns Menschen sichtbar, wenn quer durch die Milchstraße zur Kante gesehen wird. Es ist von den äußeren Umständen (z.B.: Mondstand, Klarheit des Himmels) abhängig, ob von unserem Standort aus auch weiter zu anderen Sternensystemen bzw. Weltinseln gesehen werden kann. Es könnte sein, dass im Weltall unendlich viele Weltinseln vorkommen. Man nehme an, dass es unendlich viele Sternsysteme gibt. Sobald an einem vorbeigesehen wird, könnte ein anderes ins Sichtfeld geraden. Gleichzeitig verdecken manche Sterne aber natürlich auch andere. Die Entfernung bis etwas verdeckt wird, erhielt den Namen Deckentfernung und beträgt im Weltall 10^{43} Lichtjahre.
Die Schlüsselstelle ist nun aber, dass durch einen Blick in das Weltall im Endeffekt ein Blick in die Vergangenheit erfolgt. Das mag verwirrend klingen, da in einem Augenblick der Gegenwart in das Weltall gesehen wird. Zu bedenken ist allerdings, dass ein Blick zur Deckentfernung eine Zurücklegung des Lichts von 10^{43} Jahren voraussetzt. Es kann also nur gesehen werden, was an dieser Stelle im All vor 10^{43} Lichtjahren bereits bestand. Damit kann keine Aussage darüber getroffen werden, ob zum gegenwärtigen Zeitpunkt Sterne in dieser Entfernung vorhanden sind. Für uns wird die Sichtbarkeit eines Sternes aber im Alltag mit seiner Existenz verbunden, weil die Lebensdauer eines Sterns weit über die Zeit für die Zurücklegung des Lichts hinausgeht.

Edwin P. Hubble lieferte durch seine Forschungen im Jahr 1929 eine weitere wichtige Erkenntnis - die kosmische Expansion ([10, S. 225 ff.]). Einerseits stellte er fest, dass sich Sternsysteme immer weiter voneinander entfernen. Andererseits erkannte er aber auch, dass sich die Geschwindigkeit, mit der sich die Sternsysteme von uns wegbewegen, direkt proportional zur Entfernung verändert. Das Hubble'sche Gesetz sagt somit aus, dass eine erhöhte Entfernung eine um den selben Faktor erhöhte Geschwindigkeit nach sich zieht. Das Weltall dehnt sich also aus und die Sternsysteme bewegen sich immer weiter ins Unendliche. Dadurch wird aber klar, dass die Dichte im Weltall durch das Auseinanderdriften abnimmt. Zu einem bestimmten Zeitpunkt war der Raum (maximal) unendlich dicht und dieser Zeitpunkt wird wiederum mit dem Urknall vor 14 Milliarden Jahren gleichgesetzt. Bei einem Blick in den schwarz scheinende Universum sieht man demnach zurück in eine Zeit, wo noch keine Sterne existierten, da der Urknall noch nicht stattgefunden hatte. Die für uns zu langwellige und deshalb unsichtbare Strahlung des Urknalls wird kosmische Hintergrundstrahlung genannt.Es kann nicht herausgefunden werden, was sich noch weiter als diese 14 Milliarden Jahre weg befindet, da die Strahlung von dort noch nicht bei uns angekommen ist.

Sicher ist jedoch, dass die Astrophysik sich auch in Zukunft weiter mit dem unendlichen Weltall, seinen Mysterien und Paradoxien beschäftigen wird.

Es folgt ein Sprung von den Naturwissenschaften zum Glauben. Die verschiedenen Religionen beschäftigen sich alle mit dem Ende des Lebens und damit verbunden auch mit der Unendlichkeit. Sie sind sich darin einig, dass der Tod nicht das Ende des Lebens ist. Die fünf großen Weltreligionen Christentum, Judentum, Islam, Hinduismus und Buddhismus unterscheiden sich aber durch ihre Überzeugungen, was nach dem Tod folgt. In dieser Diplomarbeit soll nach [2] eine wertfreie Vorstellung dieser Ansichten stattfinden. Das Ziel soll lediglich sein aufzuzeigen, dass Menschen durch ihre unterschiedliche Religionszugehörigkeit bereits einen anderen facettenreichen Umgang mit der Unendlichkeit pflegen.
Die Christen glauben an die Auferstehung. Beim Übergang von Leben zum Tod findet eine Begegnung mit Gott statt, wobei der Mensch durch die göttliche Kraft des Geistes auferstehen kann. Die Auferstehung beschränkt sich dabei aber nicht wie vielfach angenommen nur auf die Seele. Die christliche Hoffnung baut darauf, dass die Verbindung zwischen Körper und Geist - also Leib und Seele - auch nach dem Tod bestehen bleibt. Es wird angenommen, dass der Mensch nach seiner Auferstehung als er selbst erkennbar bleibt. Oft wird in der Bibel im Zusammenhang mit der Auferstehung auch vom Jüngsten Gericht gesprochen, wobei über die gestorbene Person gerichtet wird.
Im Judentum wird der Tod als Anfang eines neuen Kapitels bezeichnet. Auch im Judentum gehen die Gläubigen von der Auferstehung aus. Wichtig sei es vor dem Tod die Sünden zu bekennen und die Nachkommen zu segnen. Darüber hinaus dürfen nach dem Tod keine Leichnamsverbrennungen stattfinden, Gräber sollen ewig bestehen bleiben und niemals aufgelassen werden.
Ganz im Gegenteil dazu läuft die Bestattung im Hinduismus ab. Dabei kommt es nach einer Reinigung des Körpers zur öffentlichen Verbrennung und Zerstörung des Leichnams, gefolgt von der Verstreuung der Asche in einem Fluss. Der Hinduismus setzt den Tod mit einem Neubeginn gleich. Er stellt den Übergang in ein neues Leben dar. Atman (die Seele) wird nach dem Tod in einem neuen, möglicherweise vollkommen unterschiedlichen, Lebewesen wiedergeboren. Ob die Seele in eine Pflanze, einen Einzeller, ein Tier oder sogar einen Menschen gelangt, hängt von den Handlungen, Gedanken und Neigungen während der Lebzeit (=Karma) ab. Umso besser dieses Karma, umso eher erfolgt die Wiedergeburt als Mensch. Dadurch kann der ewige Wiedergeburtenkreislauf verlassen werden.
Buddhismus und Hinduismus sind sich in einigen Bereichen ähnlich. So glauben auch Buddhisten an die Wiedergeburt. Sie wird oft als qualvoll und unangenehm bezeichnet, weil die Betroffenen dadurch öfters mit omnipräsent negativen Gefühlen wie Gier und Hass konfrontiert werden. Ihr Ziel ist es das Nirwana zu erreichen. Entgegen dem gängigen Himmel oder Paradies sollte mit dem Begriff aber ein Zustand verbunden werden. Es geht nicht darum einen bestimmten Ort zu erreichen, sondern eine Geisteswandlung. Eine spezielle Meditationsform soll den Übergang des Geistes in den Zustand des höchsten Glücks - das Nirwana - erleichtern.
Zu guter Letzt soll noch der Umgang des Islams mit dem Leben nach dem Tod behandelt werden. Muslime glauben an das jüngste Gericht, sowie Paradies und Hölle. Die Seelen warten nach dem Tod auf das jüngste Gericht, wo entschieden wird, ob für gute Taten belohnt oder für schlechte bestraft wird. Der Sterbeprozess soll durch das islamische Glaubensbekenntnis begleitet werden. Der Koran spielt überhaupt eine bedeutende Rolle. So ist zum Beispiel festgelegt, dass der Leichnam nicht verbrannt werden soll. Der Kopf des Toten soll nach der Bestattung nach Mekka gerichtet sein.
Die Analyse des Lebens nach dem Tod aus Sicht der fünf Weltreligionen hat die Vielfältigkeit der Vorstellungen aufgezeigt. Im Endeffekt kann niemand sicher wissen wie es aussehen wird oder, ob es überhaupt garantiert existiert. Der Tod als Ende des Lebens

und gleichzeitig als Anfang von etwas Neuem ist in gewisser Weise ein Mysterium, da er einerseits einen Abschluss darstellt, gleichzeitig aber nicht endgültig scheint.
Der Blick muss aber gar nicht bis zum Tod gerichtet werden, um ein Anzeichen der Unendlichkeit innerhalb der Weltreligionen zu finden. Beispielsweise symbolisiert das Ehebündnis die unendliche Liebe.

In den letzten Jahren gab es auch in der Schmuckbranche einen Run auf das Unendlichkeitssymbol, was seitdem in Form von Ringen, Ketten, Armbändern und Ohrringen vertreten ist.

Aufmerksame Wanderer können auch in der Natur auf Symbole, die der Unendlichkeit ähneln, stoßen. Am Feuerberg, der Gerlitzen, in Kärnten sind solche besonderen Steine anzutreffen. Auf diesen Steinen wurden Symbole verewigt, die zu großen Teilen von keltischer Bedeutung sind. [14] sieht das sogenannte Berg-Reich als Ort der Besinnlichkeit, als mögliche Stelle zur Bindungsstärkung zwischen Mensch und Berg.
Es ist der Schöpfungsgeschichte des Berges gewidmet. Dementsprechend haben auch die Symbole mit der Entwicklung des Berges zu tun. Sie sollen sein energetisches Wesen und Wirken illustrieren.
Es kann auch ein Stein gefunden werden, dessen Gravur an ein mehrfach verschlungenes Unendlichkeitszeichen erinnert. Es ähnelt dem Zibu Angelic Symbol Transition. Es steht für einen andauernden Veränderungsprozess. Das ist deshalb passend, weil die Prozesshaftigkeit, das Potentielle in der Mathematik ebenfalls eine Facette der Unendlichkeit darstellt.

Abbildung 4: Das Berg-Reich auf der Gerlitzen, eigene Aufnahme

Eine weitere Disziplin, die sich mit der Unendlichkeit beschäftigt, ist die Philosophie. Philosophen beschäftigen sich in den unterschiedlichsten Kontexten schon seit Jahrtausenden mit dem Thema. Zu Beginn der philosophischen Überlegungen zu diesem Thema wurde der Begriff unendlich aber nie konkret genannt. Die Unendlichkeit war ein Mysterium, das nicht beim Namen genannt wurde. In diesem Absatz soll nur ein grober Einblick in philosophische Gedanken gegeben werden, die mit der Unendlichkeit in irgendeiner Weise zusammenhängen. Dabei handelt es sich bloß um eine beispielhafte Auswahl. Sie ist weder vollständig, noch soll dadurch der Stellenwert anderer Gedanken oder sogar Philosophen gemindert werden.

[27, S. 7 ff.] belegt, dass bereits Aristoteles vom Unendlichen im Sinne des Unbegrenzten (apeiron) sprach. Unbegrenzt bedeutet in diesem Zusammenhang unvollständig und daher nicht erkennbar. Für Kant wird das Unbegrenzte durch das Kontinuierliche sichtbar. Er vermutet, dass diskursives Denken unbegrenzt sein müsse, da es ein unendliches Potenzial zur Diskussion gäbe.
David Hume, ein Philosoph des 18. Jahrhunderts, war hingegen der Meinung, dass das unendliche Potential zwar bestünde, dieses jedoch durch die begrenzte Fähigkeit des menschlichen Verstandes nicht ausschöpfbar wäre ([27, S. 47 ff.]).
Interessant ist auch die Auffassung von Gioberti, dass das Wort die Begrenzung eines unendlichen Gedankens sei. Ideen werden in der Literatur vielfach als unendlich bezeichnet. Platon geht davon aus, dass die menschliche Gedanken- und Sprechweise die Polarität des Endlichen und des Unendlichen benötigt. Er stellt fest, dass endlich und unendlich, begrenzt und unbegrenzt, Einheit und Vielfalt einander bedingen. Es sei unmöglich herauszufinden welcher Bestandteil der Paare die Voraussetzung für den anderen wäre (siehe [27, S. 21 f.]). Diese Auseinandersetzung scheint dem Henne-Ei-Problem zu ähneln. Was war zuerst da? Platon löst die Diskussion durch die Überzeugung auf, dass in allem auf der Erde eine Synthese zwischen Begrenztem und Unbegrenztem besteht.
In der Antike herrschte große Angst vor dem Unendlichen, da es mit dem Bekannten nicht erfassbar sei. Nach [27, S. 140] bezeichnete das auch Descartes als größte Schwierigkeit:
„Das Unendliche ist gerade deshalb paradox, weil in ihm die Gesetze der Vergleichbarkeit des Endlichen nicht gelten.“
Kant und Hegel, der für die Lehre des Seins und des Nicht-Seins bekannt ist, ergänzten diesen Gedanken:
„Das Unendliche wird im Verhältnis zur gewählten Größe nicht größer oder kleiner und bleibt, auch bei einer sich verändernden Einheit, als Unendliches unverändert. Sein Wesen besteht eher in der Fähigkeit, jede mit dem Zählvorgang erreichbare Größe zu umfassen und zu beinhalten. [...] Es handle sich um ein Verhältnis, um eine Eigenschaft und nicht um eine Größe. Das Unendliche war mit einer Angabe, wie groß es sei, nicht dingfest zu machen.“ ([27, S. 141])
Wichtig ist im Rahmen der philosophischen Betrachtung auch die Frage, ob das Unendliche tatsächlich existent oder doch nur potentiell vorhanden sei. Aktual-unendlich bezeichnet das Unendliche als Objekt und gründet im Glauben an die Existenz, potentiell-unendlich meint mit unendlich den unendlichen Prozess und baut auf bedingte Existenz und vor allem auf die Vorstellung der Unendlichkeit! Während es über einen längeren Zeitraum das aktual-Unendliche war, das mehr Zuspruch fand, plädierten andere Philosophen für das potentiell-Unendliche. Später kam auch der Wunsch nach Vereinbarkeit der beiden Konzepte auf. Diese Diskussion beschränkte sich nicht auf die Philosophie, wie im Kapitel „Rechnen mit der Unendlichkeit“ klarer wird.

Im Rahmen dieser einführenden interdisziplinären Auseinandersetzung mit dem Unendlichkeitsbegriff sollte deutlich werden, dass die Forschungszweige, die sich damit beschäftigen, sehr vielfältig und gleichzeitig sehr vernetzt sind. Trotz der Intention die Mathematik in diesem Kapitel zu vernachlässigen, ist sie trotzdem zeitweise durchgeblitzt. Es ist eben nicht trennscharf abgrenzbar, wo die Grenzen der Forschungsgegenstände verlaufen. Diese Überschneidungen sind es aber gerade, die Spannung und Interesse wecken können.
Besonders im nächsten Kapitel wird der Schnittbereich von Philosophie und Mathematik relevant sein.

Teil III
Meilensteine der mathematischen Unendlichkeitsgeschichte

Das Ziel dieses Kapitels ist es ein paar der wichtigsten Meilensteine in der mathematischen Unendlichkeitsgeschichte zu beleuchten. Es wird aber natürlich nur Platz für einen sehr kleinen Ausschnitt zur Verfügung stehen. Wie am Anfang des Kapitels „Rechnen mit der Unendlichkeit“ genauer beschrieben wird, bestehen innerhalb der Mathematik selbst große Unterschiede in der Auffassung und im Stellenwert der Unendlichkeit. Mir ist es daher wichtig auch dieses Kapitel möglicht vielfältig zu gestalten. In den folgenden Seiten werden Ergebnisse aus der Mengenlehre (Cantor und die unendlichen Dezimalzahlen, Hilberts Hotel), der Zahlentheorie (Euklid und die Unendlichkeit der Primzahlen), der Analysis (das Paradoxon von Zenon, die Infinitesimalrechnung) und auch der Geometrie (das Parallelenaxiom) gegeben. Der Aufbau dieses Kapitels erfolgt trotz der Vielfalt so chronologisch und thematisch passend wie möglich.
Auf diese Meilensteine wird auch im Laufe dieser Diplomarbeit an manchen Stellen zurückgegriffen, denn: Was wäre das Wissen über die heutige Mathematik ohne jegliche Ahnung über deren Entstehung?

Welche wichtigen Erkenntnisse und Forschungen in der Geschichte haben zu unserer heutigen Wahrnehmung der Mathematik beigetragen? Welche MathematikerInnen haben die Entwicklungen im Zusammenhang mit der Unendlichkeit geprägt? Bereits die Vorsokratiker haben sich vor Christus mehr oder weniger bewusst mit dem infinitesimalen Denken auseinandergesetzt. Im weiteren Streifzug werden die bedeutenden Mathematiker Cantor, Hilbert, Leibniz, Newton, Cauchy und Weierstraß vorkommen. Es sind ihre besonderen Gedankengänge und Leistungen, die uns Menschen auch noch heute prägen. Sie haben auf ihre Weise zur Weiterentwicklung der verschiedenen Forschungsgegenstände beigetragen. Was haben diese bedeutenden Persönlichkeiten gemeinsam? Sie sind durch ihre Überlegungen nicht selten auf Widerstand und Ablehnung gestoßen. Um fortschrittlich zu sein, müssen vor allem in der Mathematik oft unkonventionelle Wege verfolgt werden.

1 Die antiken Griechen und das Paradoxon von Zenon

Die antiken Griechen sind für eine Menge an philosophischen, aber auch mathematischen Überlegungen und Forschungen bekannt. Glaubt man [23, S. 40] und auch anderen AutorInnen sollten mathematisch-brisante Überlegungen zur Unendlichkeit, ihrer Existenz (oder nur potentiellen) Erscheinung nicht von den philosophischen Hintergründen abgetrennt werden. Die bloße mathematische Betrachtung würde die tatsächliche Problematik verkürzt darstellen. Diese Ansicht prägt auch die Herangehensweise an diese Diplomarbeit, die es ermöglichen soll einen möglichst breiten und vernetzten Einblick in die mathematische Unendlichkeit zu erlangen.

Wie bereits erwähnt, berufen sich die nächsten Zeilen auf [23]. Der Autor skizziert die Umstrittenheit, ob die antiken Griechen tatsächlich ihre Gedankengänge zur Unendlichkeit ausgeführt haben oder nicht doch teilweise davor zurückschreckten und sich eher auf Gedankenansätze beschränkten. Fakt ist, dass sie Bedeutendes zur Erforschung dieses Begriffes beigetragen haben und nicht pauschal von der griechischen Auseinandersetzung mit den Anfängen der Unendlichkeit gesprochen werden sollte. Dennoch können Charakteristika festgemacht und analysiert werden.

Die griechischen Naturphilosophen versuchten das eigentliche Sein, also das Stabile (immer Vorhandene) hinter auftretenden Veränderungen zu identifizieren. Um dieses Ziel zu erreichen, wurden aber auch verschiedene Ansätze entwickelt - der Atomismus des Demokritos und die Ideenlehre Platons.
Der Ideenlehre Platons liegen Ideen zu Grunde, die als objektiv und der Wirklichkeit entsprechend beschrieben werden. Entwicklungen werden gegenüber dem Sein vernachlässigt, da sie nicht beständig sind und daher von den einzelnen Auffassungen abhängig sind.
Der Atomismus beruft sich hingegen für die Quelle des Seins auf das physikalische Verständnis basierend auf unwandelbare Atome. Die Form, Lage und Bewegung der Atome würde dann den Wandel erklären.

Zenon, von dem gleich die Rede sein wird, beschäftigt sich unter anderem mit der physikalischen (empfindsamen) Bewegung und der zugehörigen mathematischen Deutung, die teils widersprüchlich sein können.

Das Paradoxon von Zenon Nach [24, S. 152 f.] haben sich bereits die Vorsokratiker der Struktur von Raum und Zeit gewidmet. Diskussionspunkte waren einerseits inwiefern räumliche und zeitliche Intervalle denn unendlich teilbar wären oder wie das Kontinuum interpretiert werden sollte. Auch Zenon von Elea interessierte sich dafür.
Er beschäftigte sich bereits im 5. Jahrhundert vor Chr. mit paradoxen und dichotomen Situationen wie in etwa dem Wettlauf von Achilles gegen eine Schildkröte. Er konstruierte einen Wettkampf, bei dem die Schildkröte aus Fairnessgründen einen Vorsprung erhält. Der Leser würde nun erwarten, dass Achilles die Schildkröte auf Grund der deutlich höheren Geschwindigkeit nach nicht allzu langer Zeit ohne Probleme einholen würde. Zenon argumentierte aber in eine ganz andere Richtung!
Er ging davon aus, dass Achilles, um irgendwann an der Schildkröte vorbeilaufen zu können, immer die Orte erreichen muss, an denen die Schildkröte zuvor war. Im Endeffekt zerlegt er daher die Rennstrecke zwischen Start- und Überholpunkt in unendlich viele Teile. Diese Intervallstücke werden im Laufe der Zeit beliebig klein, da der Abstand zwischen Zenon und der Schildkröte sich in Folge der unterschiedlichen Geschwindigkeiten immer weiter verkleinert. Achilles befindet sich in jedem Zeitintervall hinter der Schildkröte. Es scheint also so, als würde sich der mögliche Überholzeitpunkt unendlich weit nach hinten verschieben. Das stellt jedoch einen Widerspruch zu der Endlichkeit eines Rennens dar.
Zenon selbst beschäftigt sich über diese Überlegungen hinaus nicht mehr mit der tiefergehenden mathematischen Folgerung. Nach [23, S. 41] widmete er sich eher den physikalischen Atomen. Die Endlichkeit des griechischen Kosmos würde endlich viele Atome mit bestimmten Eigenschaften wie Größe oder Gewicht verlangen. Andererseits wird vom Kontinuum gesprochen, das kein kleinstes oder größtes Element enthält. Die immerwährende Teilbarkeit würde unendlich viele Atome verlangen. Die kleinsten Teile einer Strecke z.B.: aus Zenons Paradoxon müssten unendlich klein sein. Diese beiden Ansichten sind stark gegensätzlich. Durch dieses Paradoxon wird die Lücke zwischen intuitiver Idee und mathematischer Formulierung hervorgehoben.

In [9, S. 194] wird das Paradoxon etwas anders erklärt. Hierbei kommen weder Achilles noch die Schildkröte vor, sondern ein Sprinter, der nie das Ende der Rennstrecke erreicht. In diesem Werk wird erwähnt, dass der Rennläufer nie das Ziel erreicht, weil er jeweils die Hälfte der verbleibenden Strecke zurücklegen muss und das unendlich lange möglich ist.
Im Endeffekt deuten beide Quellen Zenons Betrachtung als erste Auseinandersetzung mit der Idee der unendlichen Reihe. [24, S. 153] spricht in diesem Zusammenhang von zwei geometrischen Reihen, die die Bewegungen von Achilles und der Schildkröte verkörpern und gegen den Treffpunkt konvergieren.

[9, S. 194] schätzt, dass Zenon die Summe unendlich vieler Zeitintervalle als unendlich benötigte Zeit deutet. Es wird auch noch ausgeführt wie heute mit dem Dilemma umgegangen werden könnte: Als erstes Bestimmungsstück wird die Hälfte der Strecke und die Referenzzeit 1 (Zeit zum Zurücklegen der halben Strecke) gewählt. Von nun an wird immer die Hälfte der verbleibenden Strecke betrachtet, die dann fortlaufend $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, usw. als Zeitangabe hat. Das Zurücklegen der ersten n-Streckenabschnitte erfordert als Zeit also $t_n = \dfrac{(1-\frac{1}{2}^n)}{(1-\frac{1}{2})} < 2$. Die Laufzeitdauer verfügt somit entgegen Zenons Vermutung über einen Grenzwert, nämlich: $\lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = 2$.
Mehr als 2 Zeiteinheiten werden also vom Läufer für die Gesamtstrecke nicht benötigt.
Das ist konsistent, da der Läufer für die doppelte Strecke die doppelte Zeit braucht.
Weitere Ausführungen zu Reihen und im Speziellen unendlichen Reihen finden sich im Hauptteil dieser Diplomarbeit im Kapitel der Standardanalysis.

Der bedeutende griechische Philosoph Aristoteles soll an dieser Stelle auch noch kurz erwähnt werden. Wie steht er dem Unendlichen gegenüber? Er vertritt nach [23, S. 42] die Ansicht, dass das Unendliche als werdend (also potentiell) und nicht als vollendetes Sein (aktual) verstanden werden müsse. Eine natürliche Zahlenreihe besitze kein explizites Ende und auch die unbegrenzte Teilbarkeit sei prozesshaft zu deuten.
Aristoteles Einstellung zur Unendlichkeit beeinflusste bedeutende Mathematiker. Sie blieb bis zu Georg Cantor gängig. Bedeutende Mathematiker wie Gauß lehnten die Interpretation als vollständige Größe strikt ab, auch Cantor selbst wehrte sich dagegen unendlich kleine Größen zu berücksichtigen. Diese Herangehensweise widerspricht gänzlich der Nichtstandardanalysis, aber dazu später am Ende dieser Arbeit.

Zuerst soll die Aufmerksamkeit noch bei einem alten Griechen namens Euklid bleiben. Er schrieb eines der populärsten und meist verkauften Mathematik-Lehrbücher aller Zeiten. In den nächsten beiden Abschnitten wird er wegen seinen bedeutenden Forschungen namentlich erwähnt werden.

2 Euklid und die Unendlichkeit der Primzahlen

Der Grieche Euklid zeigte in seinem bekannten und über tausende Jahre verwendeten Lehrbuch „Die Elemente“, dass es nicht endlich viele, sondern unendlich viele Primzahlen gibt. Er nahm typisch für die griechischen Mathematiker zu seier Zeit das Wort unendlich aber nicht in den Mund, sondern stellte fest, dass es mehr Primzahlen als eine vorgegebene Anzahl an Primzahlen gibt. Um diese Erkenntnis zu beweisen, braucht es zuallererst die Primzahldefinition und ein vorbereitendes Lemma. Für die Ausführungen zu diesem Subkapitel wurde [5, 1.4.] leicht abgeändert herangezogen.

Definition 1. Eine Zahl $p > 1 \in \mathbb{N}$, die als positive Teiler nur 1 und p besitzt (die also nur die trivialen Teiler hat), heißt prim oder Primzahl. Die Menge aller Primzahlen wird bezeichnet mit $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...\}$.

Lemma 1. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann ist die zweitkleinste Zahl in der Menge aller positiven Teiler von n eine Primzahl:*

$$\min\{d \in \mathbb{N}, d \geq 2 : d \mid n\} \in \mathbb{P}.$$

(Jede ganze Zahl z mit $\mid z \mid > 1$ hat einen Primteiler.)

Beweis. Aus $n \geq 2$ folgt, dass es einen positiven Teiler $d \geq 2$ von n geben muss, so dass

$$\{d \in \mathbb{N}, d \geq 2 : d \mid n\} \neq \emptyset.$$

Daher existiert ein kleinstes Element der Menge, das q genannt wird. Man nehme nun an, dass q nicht prim wäre. Dann gäbe es einen Teiler m von q mit $m > 1$, aber gleichzeitig auch $m < q$. Wegen der Transitivität gilt: $m|q|n \Rightarrow m|n$, also $m \in \{d \in \mathbb{N}, d \geq 2 : d \mid n\} \neq \emptyset$ und mit $m < q$ entsteht ein Widerspruch. □

Satz 1. ***2.Euklidischer Satz***
Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Bemerkung 1. Nach [22, S. 32] bedeutet Satz 1 aber nicht, dass eine Liste aller unendlich vielen Primzahlen bekannt wäre.

Beweis. Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ..., p_n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Definiere nun $N := 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$, dann ist $N \geq 2$. Nach Lemma 1 hat N einen Primteiler p. Nach Vorraussetzung muss p aber einer der Primzahlen p_n entsprechen. Damit gilt die Implikation:

$$p \mid N, (p_1 \cdots p_n) \Rightarrow p \mid N - (p_1 \cdots p_n).$$

Also $p \mid 1 \Rightarrow p \leq 1$. Das stellt erneut einen Widerspruch dar, weil eine Zahl ≤ 1 keine Primzahl sein kann. □

3 Das Parallelenaxiom: euklidische und nicht - euklidische Geometrie

Bleiben wir noch etwas bei Euklid. Die Vorstellung zur Bedeutung der Parallelität prägt die Geometrie auch heute noch. In diesem Abschnitt wird daher auf das Parallelenaxiom von Euklid, auch Parallelenpostulat genannt, Bezug genommen. Dabei soll der heutige Wissensstand zur Aussage: „Parallelen schneiden sich im Unendlichen“ diskutiert werden. In der Recherche wurden dafür [10, Wie wir das Unendliche sehen], [13, Parallelen] und [25] herangezogen.

Wird von Geometrie gesprochen, beschränkt sich die alltägliche menschliche Auffassung im Allgemeinen auf die euklidische Geometrie. Euklid schrieb ca. vier Jahrhunderte vor Christus sein bedeutendes Werk „Die Elemente“, das Axiome und Postulate enthält, auf die das mathematisches Verständnis aufbauen sollte. Das Parallelenpostulat ist eines davon. Euklid schrieb zitiert nach [25, S. 142]:
„Endlich, wenn eine gerade Linie zwei gerade Linien trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden geraden Linien ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte“.
Im Laufe der nächsten Jahrhunderte und Jahrtausende wurde das Parallelenpostulat auf Grund der Komplexität und der potentiellen Überflüssigkeit kritisiert. Am Ende des 18. Jahrhunderts formulierte der Engländer John Playfair das vereinfachte und auch heute weitaus populärere Parallelenaxiom (siehe [25, 142]), das Folgendes besagt:
Gegeben seien eine Gerade g und ein Punkt P, der nicht auf dieser Gerade liegt. Dann gibt es höchstens eine Parallele zu g, die durch P geht. Die Existenz folgte bereits aus den Axiomen der absoluten Geometrie (Inzidenzaxiome, Abstandsaxiome, Anordnungsaxiome und Bewegungsaxiom). Das Besondere an der euklidischen Geometrie ist eben das Parallelenaxiom, das zusätzlich zu den genannten Axiomen der absoluten Geometrie enthalten ist.

Der Beweis des Parallelenaxioms, auch Parallelenproblem genannt, bereitete den MathematikerInnen (weiterhin nach [25]) große Schwierigkeiten. Sie wollten oftmals zeigen, dass dieses Axiom von den anderen bereits bewiesenen Axiomen der Geometrie ableitbar wäre. Das Problem war, dass sie in ihren Beweisversuchen vermehrt etwas voraussetzten, was äquivalent zum Parallelenaxiom war. Beispiele dafür sind die 180° Innenwinkelsumme im euklidischen Raum oder das Wissen, dass Abstandslinien Geraden sind. David Hilbert, von dem etwas später die Rede sein wird, erreichte ein exakteres axiomatisches System. Das begünstigte fortschrittliche Forschungen.
Im Endeffekt dauerte der Beweis des Parallelenaxioms bis ins 19. Jahrhundert. Entgegen allen Erwartungen reichten die Axiome der absoluten Geometrie aber nicht aus. Bolyai, Gauß und Lobatschewski erschufen getrennt voneinander die nicht-euklidische Geometrie. Diese besteht aus den Axiomen der absoluten Geometrie und baut sogar auf die Negation des Parallelenaxioms von Euklid auf.

Das Parallelenaxiom der hyperbolischen Geometrie als Teil der nicht-euklidischen Geometrie unterscheidet sich weiterhin nach [25, 142 f.] dadurch, dass durch den Punkt P mindestens zwei und nicht höchstens eine parallele Gerade zu g verlaufen. [13] hält fest, dass für Sattel- und Torusflächen für jede Gerade unendich viele Parallelen existieren und die Winkelsumme immer weniger als 180° beträgt.

Die elliptische Geometrie hingegen, die ebenfalls ein Teil der nicht-euklidischen Geometrie ist, geht nach [13] von keiner existenten Parallelen aus. Zur Vorstellung dessen betrachte man die Objekte, auf die diese Art der Geometrie aufbaut: die Kugel- oder Ellipsoidoberfläche. Sobald zwei Punkte auf der Kugeloberfläche miteinander verbunden werden, entstehen auf Grund der Krümmung Kreislinien und keine Geraden mehr. Nach [10, S. 161 f.] muss auch noch zwischen den Kreisarten unterschieden werden. Nur Großkreise/Meridiane (=Kreise, deren Mittelpunkt dem Kugelmittelpunkt entspricht) stellen die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf. Man könnte sagen, dass diese Kreise den Geraden in der Ebene entsprechen, nicht aber z.B.: Parallelkreise, da diese keine kürzesten Verbindungen sind. Es gibt also in der elliptischen Geometrie keine Parallelen, weil sich alle „Geraden“ bereits in endlichen Abständen zwei Mal schneiden. Die Summe der Dreiecksinnenwinkel ist $> 180°$.

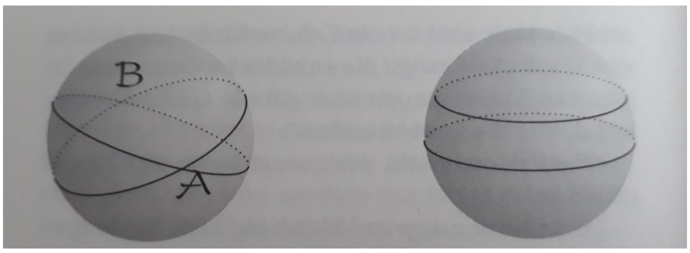

Abbildung 5: elliptische Geometrie: Großkreise und ihre Schnittpunkte A, B (links) und Parallelkreise (rechts), nach [10, Abb. 10.9.]

Ein wichtiger Schritt zum Verständnis dieser vielfältigen Unterschiede ist nach [10] der nötige Perspektivenwechsel. Je nachdem welche geometrischen Objekte aus welcher Perspektive betrachtet werden, ist das Parallelenaxiom von Euklid gültig oder eben nicht. Zur Vereinfachung kann noch die projektive Geometrie in Verbindung mit unserem Sehsinn herangezogen werden.
Parallelen sind in der euklidischen Geometrie Geraden, die im Endlichen keinen Punkt gemeinsam haben. In unserem Auge werden aber nach [10, S. 150 ff.] die Bilder von der

Linse auf die Netzhaut projiziert. Wenn ein Mensch frontal in eine Allee blickt, wird es deshalb so aussehen, als ob die Bäume in der Ferne deutlich näher zusammenstehen, sich vielleicht sogar berühren. Es scheint so als würde ein sichtbarer Schnittpunkt im Endlichen existieren. Trotzdem wissen wir, dass die Bäume der zwei Seiten in der Allee im Idealfall an jeder Stelle denselben Abstand haben.

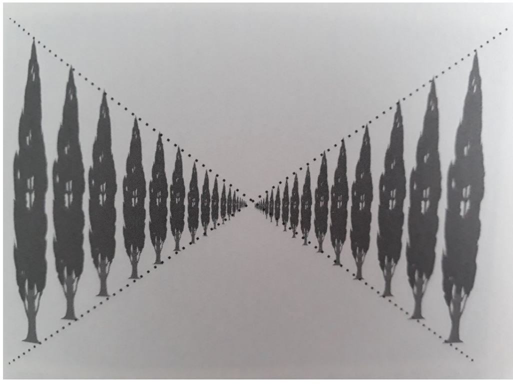

Abbildung 6: projektive Geometrie: die parallelen Linien laufen in der Ferne zusammen, nach [10, Abb. 10.3.]

Zusammenfassend soll noch einmal auf den Satz: „Parallele Geraden schneiden einander im Unendlichen“ eingegangen werden. In diesem Abschnitt konnte gezeigt werden, dass die Richtigkeit dieser Aussage von der betrachteten Geometrie abhängig ist. Sie trifft für die euklidische Geometrie zu. Ein Schnittpunkt im Unendlichen soll nach [13] aber nicht mit einer Inexistenz gleichgesetzt werden. In der projektiven Geometrie schneiden sich zwei Geraden, wobei der Schnittpunkt auch erst am Horizont liegen kann und damit perspektivisch sichtbar wird. In der elliptischen Geometrie schneiden sich äquivalent zu Geraden zwei Großkreise in zwei Punkten, in der hyperbolischen Geometrie gibt es Schnittpunkte an mindestens zwei Stellen. Die Physik macht sich diese Erkenntnisse zur nicht-euklidischen Geometrie zu Nutze, da der Weltraum gekrümmt ist.

Zum Abschluss des Abschnittes folgt an dieser Stelle noch eine Anekdote aus dem Alltag: Mir wurde berichtet, dass ein naher Angehöriger in der Schule mit dem Fakt des Schnittpunktes zweier Geraden im Unendlichen konfrontiert wurde. Wie so oft schien diese Aussage auf Grund des schulischen Wissens paradox. Die Auseinandersetzung mit den verschiedenen Geometrien und der Rolle des Unendlichen hat hierbei erneut aufgezeigt wie entscheidend die Perspektive ist, aus der ein bestimmter Sachverhalt analysiert wird. Diese Einsicht ist auch im Zusammenhang mit der Unendlichkeit von großer Bedeutung. Es gibt Unterschiede zwischen einer Betrachtung mit religiösem, physikalischem oder auch innermathematisch gesehen mengentheoretischem oder analytischem Blick. Diese Bemerkung soll den LeserInnen auch im weiteren Verlauf dieser Diplomarbeit im Hinterkopf bleiben.

4 Newton, Leibniz und die Infinitesimalrechnung

Das Gebiet der Geometrie wird nun verlassen und wir wenden uns dem wohl wichtigsten Bereich der Unendlichkeitsgeschichte zu: der Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Viele der bekanntesten Mathematiker haben an diesem Thema gearbeitet: Leibniz, Newton, Cauchy und Weierstraß sind nur einige von jenen, die uns den Weg zur Differential- und Integralrechnung geebnet haben. Das soll natürlich auch an dieser Stelle wertgeschätzt werden. Dafür werden [20, 2.2. Die Anfänge der Infinitesimalrechnung], [22, 4. Newton und die Unendlichkeit in der Bewegung] und [27, Leibniz] verwendet.

Isaac Newton (1643-1727) beschäftigte sich stark mit Bewegungen, Geschwindigkeiten und der Gravitation. Im war es ein besonderes Anliegen die Bewegung des Mondes um die Erde zu erforschen. Dabei stieß er auf Veränderungen im Sinne von Weg, Zeit und Geschwindigkeit. Er betrachtete Punkte nach [20, S. 14 f.] als unendlich kurze Linien. Ist der Punkt in Bewegung würde das einer gekrümmten Linie entsprechen. Eine Fläche würde demnach durch Bewegung einer Linie entstehen und ein Körper durch Bewegung einer Fläche. Fließende Größen wie die Zeit, die gleichmäßig fließt und unterteilbar ist, wurden von Newton als Fluenten bezeichnet. Das entspricht im heutigen Fachjargon den unabhängigen Variablen. Diese Zusammenhänge bauten die Fluxionsrechnung auf. Wird vom Calculus gesprochen, meint das nach [20, S. 15 ff.] ein System allgemein anwendbarer Rechenverfahren zur Lösung vielfältiger Infinitesimalprobleme. Er erreichte es dadurch die momentane Bewegung mathematisch zu formulieren. Bestandteile dessen sind die Betrachtung einer unendlich kleinen Zeitspanne und einer dadurch festegelegten Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Im Endeffekt erhält Newton durch seine Überlegungen bereits die Steigung des Geschwindigkeitsvektors oder mit größerem grafischen Bezug: die Tangente an einem bestimmten Punkt einer Kurve. Seine Begründungen dazu ähneln denen von Leibniz sehr. Diese werden gleich genauer ausgeführt.
Zu einer weiteren bedeutenden Erkenntnis führten seine Berechnungen von Flächeninhalten unter einer Kurve, wobei der Begriff des Integrals noch unbekannt war. Auch hierbei interessiert Newton das Änderungsverhalten, was ihn im Endeffekt zur Aufstellung des zweiten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (siehe Satz 28) führte ([20, S. 17 f.]).

Wir wenden uns nun Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) und seinem Beitrag zur Entwicklung der Differential- und Integralrechnung zu. Einige seiner Leistungen sind beispielsweise die Einführung des Funktionsbegriffes und der Funktionsschreibweise, die Beschäftigung mit Differentialen und deren Quotienten, sowie die Einführung des Integralsymbols. Bei Leibniz ist die Unendlichkeit in vielerlei Hinsicht omnipräsent.
Er unterscheidet nach [20, S. 20 f.] drei Grade des Unendlichen, die hier vom geringsten bis zum höchsten geordnet sind: Zuallererst gebe es ihm nach das Unendliche, das größer ist als jede angebbare Größe, dann das nächstgrößere Unendliche, das das Größte überhaupt ist (der gesamte Raum oder die Ewigkeit) und als letzten Grad der Unendlichkeit nennt er Gott.
Aus mathematischer Sicht stellt er fest, dass das unendlich-Kleine als gegen Null konvergent und daher als alles Andere als statisch angesehen werden soll. Nach [27, S. 152] wird das Infinitesimale von Leibniz als „wohlbegründete Fiktion“ bezeichnet. Das beinhaltet bereits die Auffassung des Unendlichen als potentiell und nicht aktual-vorhanden. Aus algebraischer Sicht dürfe das Infinitesimale mit Null gleichgesetzt werden, was einer Vernachlässigung von $\mathrm{d}x$ entspricht und bereits einen Gedanken der Nichtstandardanalysis wiederspiegelt. Geometrisch gesehen müsse aber immer das Verhältnis der Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ betrachtet werden (siehe [20, S. 19]).
Die letzten Zeilen weisen bereits darauf hin, dass die Überlegungen von Leibniz auf geometrischem und arithmetischem Hintergrund entstanden sind. Die Anschaulichkeit gründet auf dem charakteristischen Dreieck und damit der geometrischen Ebene, die nun angelehnt an [22, S. 61] und [27, S. 148 f.] unter die Lupe genommen wird. Es wird von einer Kurve c ausgegangen, auf der sich zwei Punkte P und Q befinden und, die in einem kartesischen Koordinatensystem liegt. $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ stehen für die Änderungen von x und y-Werten zwischen Punkt P und Q. Diese Änderungen werden durch ein Δ symbolisiert. Es existiert daher die Verhältnisgleichung
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Wird nun $\mathrm{d}x$ immer weiter verkleinert, verändert sich auch das Steigungsdreieck bestehend aus $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$, das zur Gerade durch P und Q gehört. Es wird immer kleiner. Das charakteristische Dreieck ist das erste bzw. das letzte Dreieck dieser Bewegung, das dann im Punkt P konzentriert ist. In Newtons physikalischer Deutung könnte es auch als erster oder letzter Moment der Bewegung interpretiert werden. In diesem Augenblick verschmelzen die Punkte P und Q. Dieses charakteristische Dreieck ist zwar nicht sichtbar, aber es wird durch eine Vergrößerung vorstellbar. Die Vergrößerung des charakteristischen Dreiecks führt zu den Differentialen. Fakt ist aber, dass die spezielle Vergrößerung irrelevant ist, weil das Verhältnis $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, das den Tangentenanstieg im Punkt P darstellt, dasselbe bleibt. An dieser Stelle zeigt sich nach [27] die Diskrepanz des Infinitesimalen. Leibniz meinte durch einen unbegrenzten Prozess etwas aktual- Unendliches erreicht zu haben. Es gäbe einen letzten effektiv-erreichten Fall einer unendlichen Folge von Verkleinerungen von $\mathrm{d}x$.

Durch die Ergebnisse von Leibniz und Newton kam es zu Mehrdeutigkeiten und Paradoxien, die über die nächsten Jahrhunderte weitere MathematikerInnen beschäftigten. Cauchy und Weierstraß widmeten sich dieser Thematik mit besonderem Elan. Ihre Terminologie unterschied sich jedoch nicht unbedeutend. Cauchy sprach von unendlich kleinen Zahlen (dem Infinitesimalen), während Weierstraß dies nicht tat. Nach [27, S. 29] bewies Karl Weierstraß im 19. Jahrhundert als Erster, dass mathematische Beweise, die auf die Unerreichbarkeit des Unendlichen aufbauen stichhaltig sein können. Damit gewann das potentielle Unendliche gegenüber dem Aktualen an Bedeutung und die Analysis wurde reformiert. Weierstraß war es auch, auf den die heutige ε, δ Schreibweise zurückgeht. Sie wird dann im Kapitel der Standardanalysis vorkommen.

5 Cantor und die unendlichen Dezimalzahlen

Georg Cantor wurde in der Mitte des 19. Jahrhunderts geboren. Ab seiner späten Kindheit lebte er in Deutschland. Er studierte Physik, Mathematik und Philosophie und entschied sich dann sich besonders der Mathematik zu widmen. Die theologischen und metaphysischen Einflüsse sind aber in seinen Abhandlungen nicht zu übersehen. Seine anderen Interessen haben somit die mathematischen Forschungen wesentlich mitbestimmt.
Dieser Abschnitt nimmt Bezug auf [22, Cantor und die unendlichen Dezimalzahlen] und [21, Cantor als bürgerlicher Vater der Mengenlehre].

Cantor ist speziell dafür bekannt die Mengenlehre begründet zu haben. Nicht ohne Grund wird von Cantor-Mengen etc. gesprochen. Bolzano, Cauchy und Weierstraß beschäftigten sich wie er ebenfalls zu etwa dieser Zeit mit dem paradoxen Unendlichen. Cantor bezeichnet sich selbst als denjenigen, der als Erster das Universum des Unendlichen vollkommen klar und logisch erfasst hat. Das wurde jedoch auf Grund von bedeutenden Leistungen u.a. Bolzanos von manchen MathematikerInnen in Frage gestellt (siehe [21, S. 215 ff.]).
In diesem Werk wird Cantors Weise der mathematischen Begriffsbildung auch als äußerst besonders hervorgehoben. In den beiden darauffolgenden Seiten wird er direkt zitiert ([21, S. 216 f.]): „Man setzt ein eigenschaftsloses Ding, das zuerst nichts anderes ist als ein Name oder ein Zeichen A, und gibt demjenigen ordnungsmäßig verschiedene, selbst unendlich viele verständliche Prädikate, deren Bedeutung an bereits vorhandenen Ideen bekannt ist [sic!], und die einander nicht widersprechen dürfen [sic!]; dadurch werden die Beziehungen von A zu den bereits vorhandenen Begriffen und namentlich zu den verwandten bestimmt; ist man hiermit vollständig zu Ende, so sind alle Bedingungen zur Weckung [sic!] des Begriffs A, welcher in uns geschlummert, vorhanden und er tritt fertig ins Dasein, versehen mit der intersubjektiven Realität, welche überall von Begriffen nur verlangt werden kann; seine transiente Bedeutung zu konstatieren ist alsdann Sache der Metaphysik.“

Es brauche also Definitionen, wodurch Beziehungen zu anderen Begriffen hergestellt werden können, gleichzeitig aber auch unterscheidbar blieben. Eine Zahl oder ein Begriff wäre existent, sobald alle obigen Bedingungen erfüllt sind.

Diese Herangehensweise scheint auch bei der Auseinandersetzung mit dem Unendlichen auf. Cantor nahm die Existenz unendlicher Dezimalzahlen an, Stellen nach dem Komma müssten nicht erst (wie zuvor von anderen Mathematikern) erschaffen werden, sondern wären von Natur aus gegeben und müssten nur entdeckt werden ([22, S. 69]).
Seine Ausführungen können mit dem Ausdruck $\sqrt{2}$ (nach [22, 68 f.]) leicht nachvollzogen werden. Dabei konstatierte Cantor, dass die unendliche Dezimalzahl $\sqrt{2}$ von Grund auf und unabhängig von einem speziellen Näherungsverfahren existiert und darüber hinaus alle Stellen nach dem Dezimalpunkt durch die Reihenfolge der Ziffern fixiert sind und nicht erst geschaffen werden. Diese Ansicht war deshalb eine Neuerung, weil die Mathematiker vor Cantor darüber stritten, was $\sqrt{2}$ bedeuten sollte. Sie erreichten es zwar immer mehr Dezimalstellen zu berechnen, die Deutung dessen hing aber in der Luft.
Die MathematikerInnen vor Cantor wandten eine Intervallschachtelung folgendermaßen an:
Die Abschätzung beginnt mit der Tatsache, dass $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ gilt.
Im ersten Schritt werden die Schranken $1 \cdot 1 = 1$ und $2 \cdot 2 = 4$ herangezogen, da $1 < 2$ und $2 < 4$.
Nach Wurzelziehen muss somit $1 < \sqrt{2} < 2$ gelten.
In einem weiteren Durchlauf wird jeweils die erste Nachkommastelle ab 1 aufwärts in Multiplikation mit sich selbst betrachtet. Damit sind die Zahlen von 1.0, 1.1, 1.2,..., 2.0 gemeint. Als neue Schranken ergeben sich $1.4 \cdot 1.4 = 1.96 < 2$ und $1.5 \cdot 1.5 = 2.25 > 2$, also $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$.
Aus dieser Abschätzung wird sofort ersichtlich, dass die gesuchte Zahl näher an 1.4 als 1.5 liegen wird. Es wird dasselbe Verfahren wie zuvor mit den Zahlen zwischen 1.4 und 1.5 auf die 2. Nachkommastelle genau durchgeführt, wonach einerseits $1.41 \cdot 1.41 = 1.9881 < 2$ und andererseits $1.42 \cdot 1.42 = 2.0164 > 2$ gilt. Ein weiterer Schritt liefert die Abschätzung $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$. Die Intervallschachtelung ist beliebig weit fortsetzbar.
Cantor bezeichnete die Zahl $\sqrt{2}$ als unendliche Dezimalzahl, also eine Zahl, die mit einer ganzen Zahl beginnt und nach dem Dezimalpunkt mit unendlich vielen Ziffern zwischen 0 und 9 fortgesetzt wird. Der Rechenprozess ist beliebig lange fortsetzbar und es wird damit eine immer bessere Näherung für den genannten Ausdruck bestimmt.
Cantor war es auch, der π als unendliche Dezimalzahl bezeichnete oder die Tangentensteigung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ als solche deutete, anstatt sie wie Leibniz oder Newton nur als existent zu zeigen. Damit würde die von Anfang an gegebene unendliche Dezimalzahl $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ durch immer kleinere Steigungsdreiecke immer genauer berechnet.

Er dachte er habe alle Probleme der sprachlichen Artikulierung über das Unendliche beseitigt. Kronecker meinte die Probleme des Unendlichen wären nun einfach verschoben worden - nämlich in Richtung der Objekte unendliche Dezimalzahlen. Man könne nicht einfach gedankenlos mit diesen Objekten operieren. Da aber niemand tatsächlich alle Ziffern von unendlichen Dezimalzahlen sehen könne, ist deren Existenz auch nicht bewiesen. Unendliches sei eben kein effektiv abgeschlossenes Ganzes. Cantor wollte aber etwas ziemlich Ähnliches erreichen: ein Weltbild etablieren, wo das Unendliche als gegebenes Ganzes betrachtet wird (siehe [22, S. 70 f.]).

Ein weiteres wichtiges Zitat von Cantor nach [22, S. 73] lautet:
„Wenn man unendliche Dezimalzahlen auf irgendeine Weise in einer Folge aufzählt, immer wird es eine unendliche Dezimalzahl geben, die in dieser Folge nicht vorkommt.“
Die Aussage erinnert an Euklids Erkenntnis, dass es zu jeder Liste von Primzahlen noch

eine gibt, wie es zuvor bei Satz 1 bewiesen wird.
Nun aber zurück zu Cantors Aussage, dass immer eine andere unendliche Dezimalzahl auffindbar ist. [10, S. 95 ff.] liefert dazu den gängigen Beweis:
An dieser Stelle werden noch Definitionen und Beispiele nach [16] benötigt.

Definition 2. Eine Menge A ist abzählbar (unendlich), wenn die Mächtigkeiten (die Anzahl der Elemente) dieser Menge A und jener der natürlichen Zahlen übereinstimmen. Das bedeutet es existiert eine Bijektion zwischen den beiden Mengen A und $\mathbb{N}$.
Die Elemente der Menge A können somit bei 1 beginnend durchnummeriert werden, auch wenn es unendlich lange dauert.

Beispiel 1. Beispiele für abzählbar unendliche Mengen sind:

(1) die Menge der endlichen Folge natürlicher/rationaler/ganzer Zahlen
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}^2, \mathbb{Z}^2, \mathbb{N}^3 ... \mathbb{N}^{<\omega}, \mathbb{Q}^{<\omega}, \mathbb{Z}^{<\omega}$, wobei ω eine unendlich große Zahl ist.

(2) die Mengen der Polynome mit rationalen bzw. ganzzahligen Koeffizienten
$\mathbb{Q}[X], \mathbb{Z}[X]$
Polynome in X mit Koeffizienten aus einer Menge A können injektiv auf die endlichen Folgen aus A abgebildet werden: $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ wird z.B.: auf die Koeffizientenfolge $(a_n, ..., a_0)$ abgebildet.

(3) die Menge der algebraischen Zahlen als rationale Nullstellen von einer Funktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, wobei die Koeffizienten ebenfalls rational sind.

Definition 3. Eine Menge B ist überabzählbar (unendlich), wenn sie nicht abzählbar ist und somit eine größere Mächtigkeit als $\mathbb{N}$ besitzt.

Beispiel 2. Beispiele für überabzählbare Mengen sind:

(1) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$;

(2) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$;

(3) die Intervalle $(0,1), [0,1]$;

(4) transzendente Zahlen.

Durch den folgenden Beweis (verändert nach [10, S. 95 ff.] und [16]) wird nämlich nicht nur bewiesen, dass immer weitere unendliche Dezimalzahlen gefunden werden können, sondern auch gleichzeitig gezeigt, dass die Menge der Dezimalzahlen größer ist als die der Brüche, weil sie mit den natürlichen Zahlen nicht zu Paaren angeordnet werden können. Die natürlichen Zahlen sind abzählbar, die Dezimalzahlen (als Zusammenfassung von Brüchen und irrationalen Zahlen) aber nicht.

Proposition 1. $[0,1)$ *ist überabzählbar. ($\mathbb{R}$ ist überabzählbar)*

Beweis. Angenommen $[0,1)$, also die Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, wären abzählbar. Dann sollten alle Dezimalzahlen der Reihe nach in Dezimalschreibweise notiert werden können.
$[0,1) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, wobei a_n mit $n \in N$ unendliche Dezimalzahlen darstellen.

$$a_1 = 0.a_{11}\, a_{12}\, a_{13} ...$$

$$a_2 = 0.a_{21}\, a_{22}\, a_{23} ...$$

$$a_3 = 0.a_{31}\, a_{32}\, a_{33}...$$

.

.

.

a_{ij} mit $i, j \in \{1, 2, ...9\}$ steht für eine beliebige Dezimalzahl. Der Index ij steht für die i-te Zeile und j-te Spalte. Es ist wichtig vorauszusetzen, dass diese Dezimalzahlen a_{ij} nur Ziffern aus $\{1, 2, \ldots, 8\}$ enthalten, da es sonst zu Problemen mit der nicht eindeutigen Schreibweise der unendlichen Dezimalzahlen kommen kann.
Um den Beweis zu erleichtern, werden die Einträge in der Diagonale durch * ersetzt:

$$a_1 = 0. * \, a_{12}\, a_{13}...$$

$$a_2 = 0.a_{21} \, * \, a_{23}...$$

$$a_3 = 0.a_{31}\, a_{32} \, * ...$$

.

.

.

Zur Konstruktion einer neuen Dezimalzahl werden nun nach 0. Ziffern gesucht, die sich von $*$ unterscheiden. Genauer bedeutet das, dass sich die erste Ziffer der neuen Zahl nach dem Komma von jener des $*$ in der ersten Zeite (a_{11}) unterscheiden soll, die zweite Ziffer soll von der Zahl an Stelle des zweiten $*$ verschieden sein. Mit der Fortsetzung dieses Verfahrens wird eine neue unendliche Dezimalzahl geschaffen, die in der gegebenen Anordnung nicht vorkommt. Sie verfügt gegenüber allen anderen angegebenen unendlichen Dezimalzahlen a_n zumindest über eine veränderte Stelle. Das ist ein Widerspruch zur Abzählbarkeit der Menge der unendlichen Dezimalzahlen. Damit ist bewiesen, dass sie überabzählbar sind. $\square$

Bemerkung 2. Cantor gab dem abzählbar Unendlichen als geringste Ausprägung des Unendlichen den Hebräischen Buchstaben $\aleph_0$. Alle anderen Mächtigkeiten im Unendlichen benannte er ebenfalls mit $\aleph$, wobei sich die Indizes unterscheiden, jedenfalls aber größer als 0 sind (siehe [6, S. 12]).

6 Hilberts Hotel

Ein Paradoxon, das an die abzählbare Unendlichkeit des vorigen Abschnittes anschließt, ist das Hilbert Hotel. Wenn von Paradoxa im Zusammenhang mit der Unendlichkeit gesprochen wird, ist es nahezu unmöglich darauf zu verzichten. Dieses fiktive Hotel trägt den Namen des Mathematikers, der das Paradoxon berühmt gemacht hat - der Deutsche David Hilbert (1862-1943).
Er veranschaulichte anhand des erfundenen Hotels verschiedene Widersprüchlichkeiten, die mit der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen auftreten und den Begriff abzählbar unendlich beinhalten. Zur Auseinandersetzung mit Hilberts Hotel wurden vorerst [10, S. 55 ff.] und [22, S. 133] herangezogen.

Ankunft eines zusätzlichen Gastes Die Ausgangssituation lautet wie folgt:
In einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern ist jedes Zimmer durch genau einen Gast belegt. Hilbert stellte gleichzeitig fest, dass ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern nie gänzlich ausgebucht sein kann.
Man nehme an in der Nacht kommt ein neuer Gast und fragt den Rezeptionist nach einem Zimmer. Es gibt nun eine Möglichkeit wie sogar der neue Gast im Hotel nächtigen kann, obwohl alle Zimmer belegt sind! Das letzte Zimmer kann nicht vom neuen Gast belegt werden, weil überhaupt kein letztes Zimmer existiert. Dafür ziehen alle bisherigen Hotelgäste wie in Abbildung 7 ersichtlich um. Der Gast aus Zimmer 1 wechselt zu Zimmer 2, jener von Zimmer 2 auf 3, der von 3 auf 4 usw. Somit ziehen alle Gäste in das Zimmer mit der nächsthöheren Nummer und Zimmer 1 bleibt für den neuen Gast übrig. Bei n-Zimmernummern bedeutet das eine Übersiedlung in das $n+1$-te Zimmer.
Das Hotel mit unendlich vielen Zimmern bleibt trotz einem neuen Gast eines mit unendlich vielen Zimmern, da eine Addition mit unendlich das Ergebnis unendlich nicht verändert.

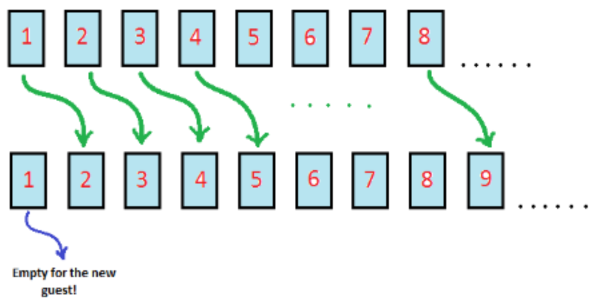

Abbildung 7: 1 neuer Gast in Hilberts Hotel, nach [19]

Ankunft eines Busses mit unendlich vielen Gästen Bei einer weiteren Version kommt ein Bus mit unendlich vielen Gästen an und alle Personen möchten im vollbelegten Hotel einen Platz finden. Die Intuition würde nun wieder erwarten lassen, dass ein vollbelegtes Hotel doch niemanden aufnehmen könne. Zur Erinnerung: das Hotel verfügt jedoch über unendlich viele Zimmer. Wie könnten in diesem Konstrukt alle Neuankömmlinge ein Zimmer ergattern?
Abbildung 8 zeigt wie dies möglich ist: Jeder Gast zieht in das Zimmer mit doppelt so großer Nummer um. Damit werden alle ungeraden Zimmer frei und keine Person muss doppelt umziehen. Die Zimmer mit den ungeraden Zimmernummern werden von den neuen Gästen belegt. Somit haben 2 Mal unendlich viele Gäste in einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern Platz gefunden.

Ankunft von mehr als einem Bus mit unendlich vielen Gästen In [3, S. 79 ff.] werden noch andere Paradoxien vorgestellt. Sobald zwei unendlich große Busse ankommen, muss zusätzlich noch darauf geachtet werden, dass die Reisenden der Busse parallel (und nicht zuerst der eine und dann der andere Bus) berücksichtigt werden. Sonst müssten die Reisenden eines Busses möglicherweise unendlich lang auf ihr Zimmer warten. Es kann die Strategie des vorigen Gedankenexperimentes in diesem Fall weiterverwendet werden. Nach der Umsiedelung der bereits im Hotel vorhandenen Gäste in die geraden Zimmer, werden die ungeraden nun abwechselnd mit TeilnehmerInnen aus dem 1.Bus und jenen aus dem 2.Bus belegt. Somit findet wieder jede Person einen Platz.

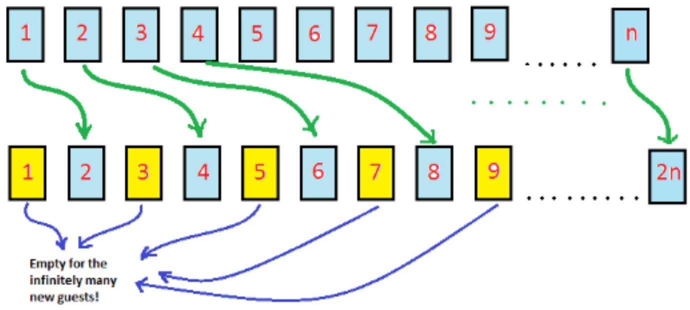

Abbildung 8: unendlich viele neue Gäste in Hilberts Hotel, nach [19]

Was passiert nun aber, wenn unendlich viele Busse mit unendlich vielen Gästen ankommen und alle ein Zimmer erhalten sollen? Ich gehe dafür wie [3, S. 79] vor.
Zu aller Erst braucht es die Erkenntnis, dass wie zuvor wieder alle Busse parallel berücksichtigt werden müssen. Um die Zimmeraufteilung besser nachvollziehen zu können, soll die Abbildung 9 herangezogen werden.

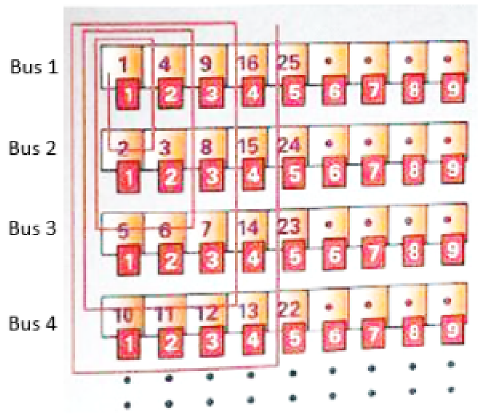

Abbildung 9: unendlich viele Busse mit unendlich vielen neuen Gästen in Hilberts Hotel, nach [3, S. 79]

Das spiralförmige Schema bedeutet, dass der erste Gast aus dem ersten Bus in Zimmer eins untergebracht wird, der erste Gast aus dem zweiten Bus kommt in Zimmer 2, der erste Gast aus dem dritten Bus in Zimmer 5, der vierte Gast aus Bus 4 kommt in Zimmer 13 usw. Die roten Rechtecke markieren die Sitzplätze i der Busse und die orangefarbenen Rechtecke stellen die Zimmernummern dar. Der eckigen roten Spirale folgend, wird klar, welchem Gast welches Zimmer zugeteilt werden soll. Verallgemeinert man diese Zuschreibungen erhält man: Der i-te Gast aus dem j-ten Bus wird für $i > j$ in Zimmer $j^2 - i + 1$ eingeteilt, während jene Gäste, auf die $i \leq j$ zutrifft das Zimmer $(j-1)^2$ beziehen $(\forall i, j \in \mathbb{N})$.
Das Problem könnte (ebenfalls nach [3, S. 79 f.]) auch mithilfe der Primzahlen gelöst werden. Dadurch bleiben außerdem noch unendlich viele Zimmer unbelegt. Nach Satz 1 gibt es unendlich viele Primzahlen. Jeder Reisende aus dem Bus 1 mit Sitzplatznummer i bekommt das Zimmer $2i$ zugeordnet. Die Personen aus Bus 2 mit Platznummer i bekommen jeweils das Zimmer $3i$ usw. Der i-te Fahrgast aus Bus j belegt das Zimmer p_j^i. Dabei meint p_j die j-te Primzahl.

Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung bedingt, dass keine Zimmer doppelt belegt werden. Das Zuordnungsverfahren erscheint relativ kompliziert. Zur Vereinfachung beachte man zuerst nur die beiden Primzahlen 2 und 3. Der i-ten Reisende aus dem j-ten Bus erhält Zimmer $2^i \cdot 3^j$. Wie bereits angesprochen bleiben bei dieser Überlegung Zimmer zwischendurch frei und werden nicht lückenlos besetzt.

An- und Abreise von Gästen Eine andere Weiterentwicklung beschäftigt sich nach [22, S. 133] mit dem Fall, in dem Gäste an- und abreisen, wobei alle nur eine Stunde im Hotel verbringen. Am Anfang jeder Stunde kommt um ein Gast mehr als die Stunde davor, das ist auch genau ein Gast mehr als die Anzahl an Personen, die das Hotel zu diesem Zeitpunkt verlässt. Kurz skizziert bedeutet das am Anfang der ersten Stunde kommt ein Gast, eine Stunde später kommen 2 Gäste und einer geht, dann 3 Gäste und zwei gehen,...
Es stellt sich demnach die Frage wie viele Gäste nach unendlich vielen Stunden noch im Hotel verweilen. An dieser Stelle ist die paradoxe Situation besonders gut erkennbar:
Es kann begründet werden, dass alle Zimmer belegt sind, da in jeder Stunde mehr Personen kommen als gehen und sich daher unendlich viele Gäste im Hotel befinden.
Ein anderer Ansatz ist jedoch darzulegen, dass alle Gäste nach unendlicher Periode das Hotel verlassen haben und das Hotel somit leer sein muss.

Teil IV

Rechnen mit der Unendlichkeit

Die Unendlichkeit erscheint dem Menschen als abstrakt, möglicherweise unnatürlich oder auch fern von jeder Realität. Wie soll es daher möglich sein mit etwas derart Ungreifbarem zu rechnen?
Die folgende Textpassage in [10, S. 21 f.] zeigt dieses Dilemma, das vor allem bei Kindern besteht, treffend: Dabei spricht ein Kind namens Alex mit dem Autor.
Alex beginnt: „Wenn ich zähle, gehe ich von einer Zahl zur nächsten, aber ist das, wohin ich nie komme, auch noch eine Zahl? "
„Was nennst du eine Zahl? "
„Na so was, womit ich rechnen kann, addieren und multiplizieren und so. Oder wenn ich sagen kann, ob eine andere Zahl größer ist oder kleiner..."
Daraufhin überlegt der Autor und versucht es dem Kind anhand eines einfachen Beispieles zu erklären.
„Dividiere die Zahl 1 durch 3. "
„Na, das ist doch kein Problem: 0,333333..., und danach unendlich viele Dreien. "
„Richtig, aber genauer gesagt sind es potentiell unendlich viele Dreien, denn du kannst sie nicht alle hinschreiben, du weißt aber, dass du dich dem wahren Ergebnis deiner Division schrittweise nähern könntest. "
Alex versteht den Zusammenhang noch nicht, daher setzt der Autor fort:
„Trotzdem kennst du die Zahl ganz genau, sie ist für dich aktual da, du kannst sie als Bruch $\frac{1}{3}$ schreiben und du kennst alle ihre Eigenschaften, zum Beispiel, dass die Hälfte von ihr $\frac{1}{6}$ ist. Hier hast du ein Beispiel für eine Zahl, die du in der Dezimaldarstellung erst nach unendlich vielen Schritten erreichst. Sie ist aber eine gewöhnliche Zahl, nämlich $\frac{1}{3}$ also kleiner als 1. So ist auch Unendlich eine Zahl, die du erst nach unendlich vielen Schritten erreichst, mit der du aber rechnen kannst.[...]Es gibt verschiedene Arten von unendlichen Zahlen, manche größer als andere, manche kleiner. "
Wie ist es nun möglich mit der Unendlichkeit zu rechnen?

Im Abschnitt Interdisziplinäre Betrachtung der Unendlichkeit kam bereits die Vielfalt der Forschung zur Unendlichkeit über die disziplinären Grenzen hinaus zum Vorschein. Es wäre eine falsche Annahme davon auszugehen, dass zumindest innerhalb einer Disziplin wie der Mathematik selbst Einheitlichkeit in der Verwendung vorherrscht. Diese Feststellung kann auch durch die verschiedenen Forschungsansätze innerhalb der Mathematik begründet werden. Es gibt nicht die eine Mathematik, sondern Teilbereiche wie Analysis, Algebra, Stochastik, Zahlentheorie und vieles Mehr- eine schier unendliche Liste, wobei diese Teilbereiche nicht scharf voneinander abgrenzbar sind, sondern sich überlappen. Angelehnt an [6, S. 1 f.] können verschiedene Betrachtungsweisen wie folgt grob strukturiert werden:

(1) elementare Zahlentheorie:
Unendlich spielt in dieser Fachrichtung, die sich besonders mit der Teilbarkeit beschäftigt, kaum eine Rolle. Das ist nicht verwunderlich, da ∞ bei Betrachtung der Teilbarkeit irrelevant ist. Am besten könnte noch damit argumentiert werden, dass 0 anstelle von ∞ die wichtige Position übernommen hat, da 0 von jeder ganzen Zahl geteilt wird.

(2) projektive ebene Geometrie:
Diese Teildisziplin der Geometrie interpretiert den Begriff unendlich als Gerade mit unendlich weit entfernten Punkten und Richtungen.

(3) Mengenlehre:
Innerhalb der Mengenlehre beschäftigt man sich mit verschiedenen Mächtigkeiten von unendlichen Mengen. Abzählbar und überabzählbar sind nur Beispiele davon, insgesamt gibt es eine unendliche Skala von unendlichen Mächtigkeiten.

(4) reelle Analysis:
In der reellen Analysis gibt es verschiedene Unendlichkeitsbegriffe. Es kommt klassisch ∞ zur Anwendung. Dieser darf aber nicht mit $+\infty$ und $-\infty$ verwechselt werden. Die Unendlichkeit ist in der Analysis auf den Grenzwertbegriff aufgebaut und wäre ohne diesen undenkbar.

(5) komplexe Analysis:
Im Gegensatz zur reellen Analysis ist der Wert ∞ ohne Hervorhebung des Vorzeichens in dieser Disziplin im Allgemeinen geläufiger.

(6) Nichtstandardanalysis:
Die Nichtstandardanalysis baut direkt auf die Existenz von infinitesimalen und unendlich großen Elementen auf. Unendlich kleine Fehler werden vernachlässigt.

Auffällig ist hierbei, dass die reelle und die komplexe Analysis das „potentiell-Unendliche“ betrachten, während Zahlentheorie, projektive Geometrie, Mengenlehre und Nichtstandardanalysis das „aktual-Unendliche“ in den Vordergrund rücken. Beide Betrachtungsweisen werden in diesem großen Kapitel „Rechnen mit der Unendlichkeit“ Einklang finden, wobei das potentiell-Unendliche innerhalb des Unterkapitels der Standardanalysis und das aktual-Unendliche in der Mengenlehre und der Nichtstandardanalysis vertreten ist. Wird das Kapitel „Meilensteine der mathematischen Unendlichkeitsgeschichte“ mitgezählt, kommen aber alle sechs beschriebenen Teilbereiche in dieser Arbeit vor.

7 Verortung im Lehrplan der AHS-Oberstufe

In diesem Unterkapitel werden wichtige Aspekte des Mathematik-Oberstufen-Lehrplanes (siehe [4]) genannt und im Überblick vorgestellt, die einen bedeutsamen Zusammenhang mit der Unendlichkeit aufweisen. Dadurch sollen die Anknüpfungspunkte in der AHS-Oberstufe sichtbar werden. Diese Auflistung soll es ermöglichen zwischendurch auch einen Schulbezug herstellen zu können. An zwei Stellen im Kapitel „Rechnen mit der Unendlichkeit“ wurde von mir nämlich ein Exkurs zur Schulpraxis vorgenommen. Damit sind diese Inhalte besser einordenbar.

Der neue, kompetenzorientierte und semestrierte Lehrplan in der Fassung von 2017 beinhaltet wie gewohnt die großen Bestandteile: allgemeine didaktische Grundsätze, die Bildungs- und Lehraufgabe und den Lehrstoff. Neuerungen sind einerseits die mathematischen Kompetenzbereiche, die durch die jeweilige Inhalts-, Handlungs- und Komplexitätsdimension festgelegt werden. Dabei besteht jede Dimension aus 3-4 verschiedenen Ausprägungen. Die Inhaltsdimension bezeichnet die inhaltliche Einordnung (Algebra und Geometrie, funktionale Anhängigkiten, Analysis, Wahrscheinlichkeit und Statistik). Die Zuordnung zu einer Handlungsdimension erfolgt nach der Tätigkeitsart, die für die Ausführung der Aufgabenstellung erforderlich ist (darstellend-modellierendes, formal-operatives, interpretieren-dokumentierendes, kritisch-argumentatives Arbeiten). Zuletzt gibt die Komplexitätsdimension an, wie und wie stark vernetzt werden muss (Einsetzen von Grundwissen und Grundfähigkeiten, Herstellen von Verbindungen, Problemlösen und reflektieren).
Kompetenzen werden in [4] als längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten beschrieben, die von Lernenden entwickelt werden sollen und sie befähigen bestimmte Tätigkeiten in

variablen Situationen auszuüben. Die Bereitschaft diese Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen zählt auch dazu.
Diese Dimensionen werden bei fachdidaktischen Abschnitten dieser Diplomarbeit im jeweiligen Kontext konkretisiert.
Eine weitere Neuerung dieser Lehrplanfassung ist die Semestrierung, die im Rahmen der modularen Oberstufe eingeführt wird. Kurz und knapp bedeutet das, dass die Lehrpläne nun ab der 6.Klasse AHS/ 10. Schulstufe nicht mehr für die Zeitspanne eines Schuljahres, sondern eines Semesters konzipiert sind.

Die folgende Auflistung beinhaltet die Bereiche des Lehrplanes der Sekundarstufe II, die am engsten mit der mathematischen Unendlichkeit in Verbindung gebracht werden können.

5. Klasse:
Mengen, Zahlen und Rechengesetze
- Mit Näherungswerten sinnvoll umgehen können

6. Klasse-3.Semester:
Folgen
- Zahlenfolgen als auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ (natürliche Zahlen ohne 0) definierte reelle Funktionen kennen (insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen); sie durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können
- Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert)

Reelle Funktionen
- Reelle Funktionen untersuchen können (Monotonie, lokale und globale Extremstellen, Symmetrie, Periodizität)

6. Klasse-4.Semester:
Reihen
- Summen endlicher arithmetischer und geometrischer Reihen berechnen können
- Summen unendlicher Reihen definieren und für konvergente geometrische Reihen berechnen können

Im vorigen Lehrplan der 6.Klasse AHS wurde den Folgen und dem Grenzwert zumindest der Formulierung nach noch ein größerer Stellenwert zugeschrieben. Es wurden über die oben angeführten Ziele, die im tagesaktuellen Lehrplan vorhanden sind zusätzlich noch folgende Inhalte vorgeschrieben:
- Untersuchen von Folgen zusätzlich zu Monotonie, Beschränktheit und Grenzwert auf Konvergenz, sowie intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert
- Definieren der Eulerschen Zahl
- Kennenlernen von Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen

7. Klasse-5.Semester:
Grundlagen der Differentialrechnung anhand von Polynomfunktionen
- Den Differenzenquotienten (die mittlere Änderungsrate) und den Differentialquotienten (die lokale bzw. momentane Änderungsrate) definieren können
- Den Differenzen- und Differentialquotienten als Sekanten- bzw. Tangentensteigung sowie in außermathematischen Bereichen deuten können
- Den Begriff der Ableitungsfunktion kennen; höhere Ableitungen kennen

- Monotonie- und Krümmungsbereiche, Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen (Terrassenstellen) mit Hilfe der Ableitung beschreiben können
- Untersuchungen von Polynomfunktionen in inner- und außermathematischen Bereichen durchführen können; einfache Extremwertaufgaben lösen können (Ermittlung von Extremstellen in einem Intervall)

7. Klasse-6.Semester:
Erweiterungen und Exaktifizierung der Differentialrechnung
- Den Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können
- Den Begriff Differentierbarkeit sowie den Zusammenhang zwischen Differentierbarkeit und Stetigkeit kennen

Letztere Kompetenzen, die im 6.Semester erworben werden sollen, sind im Lehrplan kursiv angeführt und daher nicht in jedem Schultyp verpflichtend. Hierbei existiert der Unterschied zwischen Gymnasium, also sprachlicher Orientierung, und Realgymnasium mit naturwissenschaftlichem Schwerpunkt und einer höheren Anzahl an Mathematikstunden.

8. Klasse-7.Semester:
Grundlagen der Integralrechnung
- Das bestimmte Integral kennen und als Zahl „zwischen" allen Ober- und Untersummen auffassen können sowie näherungsweise als Summe von Produkten auffassen und berechnen können:
- Größen durch Integrale ausdrücken können, insbesondere als Verallgemeinerungen von Formeln mit Produkten (zB für Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege)
- Den Begriff Stammfunktion kennen und anwenden können
- Bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln berechnen können

Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung
- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen)
- Die Hauptsätze (bzw. den Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung kennen; den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erläutern können
- Das unbestimmte Integral kennen

Bei all diesen Themen wird der Unendlichkeit ein hoher Stellenwert zugeschrieben. Wie diese Teile in der Schulpraxis behandelt werden (sollten oder könnten), wird im Laufe dieser Diplomarbeit stellenweise noch genauer ausgeführt. Davor werden jedoch immer fachmathematische Abhandlungen durchgeführt. Ziel ist es an diesen Stellen fachmathematische Inhalte durch fachdidaktische Zugänge zum Leben zu erwecken und einen Praxisbezug herzustellen.

8 Mengenlehre

Die Mengenlehre ist eine der wichtigsten und grundlegendsten Gebiete der Mathematik. Die Mengenschreibweise und ihre wichtigen Bestandteile werden nicht nur in der Zahlentheorie, sondern geschlossen über alle Bereiche der Mathematik als Merkmale der mathematischen Sprache verwendet. Ohne sie wäre die Eindeutigkeit und Verständlichkeit gefährdet!
Wie bereits in der Einführung zu diesem Kapitel erwähnt, beschäftigt man sich in der Mengenlehre mit der Existenz des Aktual-Unendlichen. Nach [27, S. 193] wird in der Sprache der Mengenlehre das Unendliche als eine aktuale und statische, vom zeitlichen Werden unabhängige Totalität beschrieben. Mengen sind somit festgelegt, was jedoch nicht heißt, dass jedes ihrer Elemente zur Identifizierung aufgezählt werden muss, das Bildungsgesetz reicht zur Festlegung aus.

In diesem Abschnitt sollen Fragen zur Mächtigkeit von unendlichen Mengen beantwortet werden. Dabei wird wiederum Bezug auf die Begriffe der Abzählbarkeit und der Überabzählbarkeit genommen. Es wird gezeigt, dass es unendlich viele unendliche Mächtigkeiten gibt. Außerdem wird auf eines der größten Probleme der Mathematikgeschichte - die Kontinuumshypothese - zurückgegriffen, da im Zusammenhang damit auch in der Gegenwart neue Erkenntnisse erreicht wurden.

8.1 Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

Bei Hilberts Hotel wurde die abzählbare Unendlichkeit der natürlichen Zahlen thematisiert, bei Cantors Diagonalbeweis die überabzählbare Unendlichkeit der reellen Zahlen. Die passende Eigenschaft der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wurde bisher aber noch nicht behandelt. Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist eine bijektive Abbildung zwischen den natürlichen und den rationalen Zahlen herzustellen. Die ersten Überlegungen würden vermuten lassen, dass die Menge der rationalen Zahlen mehr Elemente enthalten müsste. Bereits zwischen einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ und ihrer nächstgrößeren natürlichen Zahl $n+1$ liegen doch unendlich viele Brüche, oder nicht? Damit müsste $\mathbb{Q}$ mächtiger als $\mathbb{N}$ sein.
Trotz dieser Intuition ist es möglich die Gleichmächtigkeit der beiden Mengen zu beweisen und das soll in einem nächsten Schritt umgesetzt werden.

In diesem Abschnitt wird für die grundlegenden Definitionen [6, S. 2 ff.] und danach für den eigentlichen Beweis [3, S. 53] herangezogen.

Definition 4. Zwei Mengen A und B sind genau dann gleichmächtig ($A \approx B$), wenn es eine bijektive Abbildung von A nach B gibt, jedem Element aus A also genau ein Element aus B zugeordnet wird.

Bemerkung 3. Ist die Menge A endlich bedeutet $A \approx B$ in diesem Zusammenhang, dass die Menge A genauso viele Elemente wie B enthält. Im Unendlichen ist dies schon schwieriger! Die Aussage des Endlichen kann in diesem Fall nicht mehr automatisch getroffen werden. Der Grund dafür ist, dass eine Menge A zu einer echten Teimenge B ($B \subset A$) gleichmächtig sein kann. Als Beispiel dafür wird in [6, S. 3] dieses gegeben: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$. A und B sind gleichmächtig, weil eine Bijektion zwischen A und B vorliegt, die Abbildung erfüllt somit Injektivität und Surjektivität.

Definition 5. Eine Menge A heißt endlich, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass A und $\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$ gleichmächtig sind. Andernfalls heißt die Menge A unendlich.

Proposition 2. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich. ($\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig)*

Beweis. Ein Bruch ist in der Form $\frac{p}{q}$ und als Paar von ganzen Zahlen (p, q) darstellbar. Dabei steht p für den Zähler und q für den Nenner. Es soll nun eine Möglichkeit gefunden werden alle Brüche so anzuordnen, dass einwandfrei mittels der natürlichen Zahlen durchgezählt werden kann. Es soll keine Bruchzahl vergessen oder doppelt gezählt werden.
Dafür wird eine bestimmte Anordnung hergestellt, bei der das Paar $(0, 0)$ in der Mitte liegt. Ausgehend von diesem Mittelpunkt wird ein spiralförmiger Weg wie ersichtlich in Abbildung 10 verfolgt. Die jeweiligen Paare (p, q) befinden sich in Zeile p und Spalte q.
Da ein Mittelpunkt vorhanden ist, ist es trivial, dass p und q sowohl negativ, als auch positiv sein können.
Zur Nummerierung der Brüche bzw. Paare wird beim Mittelpunkt begonnen und spiralförmig nach außen gewandert. Der Abbildung folgend, wird bei die Nummerierung mit der Zahl 0 begonnen. In den grünen Kästchen ist die jeweilige Nummerierung zur gegebenen rationalen Zahl vermerkt. Das bedeutet die rationale Zahl, die im n-ten Schritt erreicht wird, erhält auch die Nummerierung n. Dieser spiralförmige Weg sorgt dafür, dass kein Zahlenpaar ausgelassen wird und auch keine Nummerierung doppelt vorkommt.
An dieser Stelle ist der Beweis jedoch noch nicht fertiggestellt, da manche Zahlenpaare wie z.B.: $\frac{4}{6}$ und $\frac{8}{12}$ dieselbe rationale Zahl $\frac{2}{3}$ darstellen. Das widerspricht aber der angestrebten Bijektion. Um dieses Problem zu beseitigen, werden alle Paare mit negativen Nennern und jene, die zu kürzbaren Brüchen gehören aus der Tabelle gestrichen. Wird der Spiralweg erneut durchlaufen, werden die gestrichenen Paare bei der Nummerierung ausgelassen. Somit ist die Bijektion zwischen zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gewährleistet. $\square$

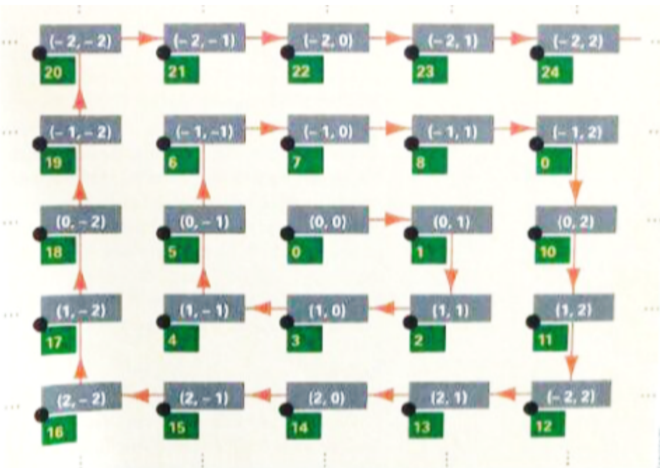

Abbildung 10: Veranschaulichung der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen, nach [3, S. 53]

8.2 Gibt es immer mächtiger werdende unendliche Mengen?

Im Laufe dieser Diplomarbeit wurde bereits gezeigt, dass es einerseits gleichmächtige Mengen wie $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gibt, andererseits zumindest eine Menge, nämlich $\mathbb{R}$ eine größere Mächtigkeit besitzt. Nun stellt sich die Frage, ob noch mehr verschiedene Mächtigkeiten außer den beiden abzählbar unendlich und überabzählbar gefunden werden können. Eine andere Frage ist wie viele dieser unterschiedlich mächtigen Mengen überhaupt exisiteren.

Für die Erforschung wird davon ausgegangen, dass noch nicht bewusst ist, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ eine andere Mächtigkeit besitzen.
Der Satz und der zugehörige verallgemeinerte Beweis stammen aus [6, S. 4 ff.].

Satz 2. ***Der abgeschwächte Satz von Cantor***
Es gibt zwei unendliche Mengen A und B, sodass A und B nicht gleichmächtig sind.

Beweis. In diesem Beweis werden die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ verwendet, wobei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen (auch Potenzmenge) von $\mathbb{N}$ ist.
Eine beliebige Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sei gegeben. Somit sind Objekte der Form $f(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ immer Teilmengen von $\mathbb{N}$.
Im Folgenden wird gezeigt, dass die Abbildung nicht bijektiv ist und somit die beiden Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht gleichmächtig sein können. Genauer gesagt, wird die Surjektivität von f nicht erfüllt sein, da eine Menge A_f gefunden wird, die in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, aber nicht im Wertebereich von f liegt.
Sei nun

$$A_f := \{n \in \mathbb{N} : n \notin f(n)\}.$$

Es ist dann $A_f \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Wäre f surjektiv, dann gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $f(k) = A_f$. Es muss demnach entweder $k \in A_f$ oder $k \notin A_f$ liegen.
Betrachte den ersten Fall: Nach der Definition von $A_f : k \notin f(k) = A_f$. Das ist ein Widerspruch.
Im zweiten Fall (also $k \notin A_f$) erhält man auch durch die Definition von A_f, dass $k \in f(k) = A_f$, was ebenfalls ein Widerspruch ist.
Somit ergibt sich ein Widerspruch zur Surjektivität von f. Es folgt daraus direkt, dass f nicht bijektiv sein kann. Daher sind $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht gleichmächtig. □

Mit diesem Beweis wurde einerseits gezeigt, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Der Beweis kann aber auch auf alle anderen Mengen A statt $\mathbb{N}$ umgelegt werden. Verallgemeinert bedeutet das, dass jede Menge A nicht gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist. Für endliche Mengen überrascht das nicht, doch diese Beziehung gilt auch für unendliche Mengen. Die Erkenntnis wird im starken Satz von Cantor nach [6, S. 6] erneut aufgegriffen. Der Beweis dieses Satzes erfolgt genau gleich wie jener von Satz 2.

Satz 3. ***Der starke Satz von Cantor***
Für jede Menge A gilt: A ist nicht gleichmächtig zu $\mathcal{P}(A)$.

Bis zu diesem Zeitpunkt sind die LeserInnen bereits um die Einsicht reicher, dass jede Menge nicht surjektiv auf ihre Potenzmenge abbildbar ist, was impliziert, dass die Potenzmenge aus mehr Elementen bestehen muss, also eine höhere Mächtigkeit aufweist. Für die Beantwortung der Ausgangsfrage dieses Abschnittes liegen daher schon mehr Erkenntnisse vor. Die Überlegungen sollen aber zur Sicherheit nach [6, S. 7] noch auf ein zweites Standbein gestellt werden.

Definition 6. $A \lesssim B$ (B ist mächtiger als A, A ist schmächtiger als B) ist definiert durch: Es gibt eine injektive Abbildung $f : A \to B$ oder äquivalent:
A ist gleichmächtig mit einer (nicht notwendigerweise echten) Teilmenge von B.

Definition 7. Die beiden Definitionen 4 und 6 definieren den Begriff Kardinalität oder auch Mächtigkeit. Damit ist die Anzahl an Elementen einer Menge gemeint.

Es gilt stets nach [6, S. 7]: $A \lesssim \mathcal{P}(A)$, denn die Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $a \in A \mapsto \{a\} \in \mathcal{P}(A)$ ist wohldefiniert und offensichtlich injektiv.
Die leere Menge wird daher nicht getroffen, somit ist ist A zu einer echten Teilmenge von $\mathcal{P}(A)$ gleichmächtig. Somit ist $\mathcal{P}(A)$ mächtiger als A.

Nun beschäftigen wir uns noch einmal mit $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Beide sind unendliche Mengen, wobei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mächtiger als $\mathbb{N}$ ist. Verfolgt man diesen Ansatz weiter ist auch $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ mächtiger als $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Nach einigen Schritten dieses Gedankenganges erhält man nach [6, S. 11] eine Folge von unendlichen Mengen, bei der eine mächtiger als die andere ist:

$$\mathbb{N} \lesssim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \lesssim \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \lesssim \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \lesssim ....$$

Es gibt somit unendlich viele verschiedene Kardinalitäten.

8.3 Die Kontinuumshypothese

David Hilbert, von dem bereits im Kapitel „Meilensteine der mathematischen Unendlichkeitsgeschichte“ die Rede war, stellte im Jahr 1900 im Rahmen des Internationalen Mathematikerkongress in Paris einen Katalog mit den 23 wichtigsten Problemen der Mathematik vor. Die Kontinuumshypothese wird als erstes Problem genannt und wurde unter anderem deshalb als besonders wichtig angesehen. Diese 23 Probleme beschäftigten daraufhin die fähigsten MathematikerInnen. Manche wurden trotz großer Anstrengung bis heute nicht gelöst (siehe [22, S. 75]).

Zusammenfassend wurde in diesem Kapitel und dem Cantor'schen Diagonalverfahren bisher gezeigt, dass es Mengen gibt, die mit $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind. Darüber hinaus können mit Hilfe der Potenzmenge immer mehr Mengen gefunden werden, die eine größere Kardinalität besitzen.
Vereinfacht nach [6, S. 13] stellt sich nun die Frage, ob es eine Menge A gibt, deren Mächtigkeit größer als jene der natürlichen Zahlen, aber auch kleiner als die der reellen Zahlen ist.

$$|\mathbb{N}| < A < |\mathbb{R}|?$$

Eine gleichwertige Formulierung lautet: Gibt es eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, die zwar überabzählbar ist, aber $A \approx \mathbb{R}$ noch nicht erfüllt?
Es kann beispielsweise bewiesen werden, dass $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gilt, wobei damit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht für A in Frage kommt.

Die Kontinuumshypothese (CH) besagt, dass es keine solche Menge A gibt, wonach die Folgerung wäre, dass jede unendliche Menge von reellen Zahlen entweder dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ besitzt.

Wie der Name Kontinuumshypothese schon vermuten lässt, handelt es sich hierbei um eine Hypothese und Hypothesen sind bekanntlich getätigte Vermutungen bzw. Annahmen, die aber (noch) nicht bewiesen wurden.
Die Kontinuumshypothese war und ist bisher weder beweisbar noch widerlegbar.
Diese Aussage scheint demotivierend bzw. ernüchternd. Berücksichtigt man den Gödel'schen Unvollständigkeitssatz (ebenfalls [6, S. 13]) kann dieses Empfinden relativiert werden:

Satz 4. ***Gödel'scher Unvollständigkeitssatz***
Jedes mathematische System ist unvollständig, d.h. es wird immer (im betrachteten System formulierbare) Fragen geben, die (im betrachteten System) nicht beantwortet werden können!

8.4 Aktuelle Forschungsergebnisse im Zusammenhang mit der Kontinuumshypothese

Selbst wenn die Kontinuumshypothese bisher nicht bewiesen oder widerlegt werden konnte, impliziert das nicht, dass keine bedeutenden Teilerkenntnisse möglich sind. Das haben die zwei MathematikerInnen Maryanthe Malliaris und Saharon Shelah im Jahr 2016 eindrucksvoll bewiesen. Ihnen wurde dafür eine der höchsten Auszeichnungen im Bereich der Mengenlehre, die Third Hausdorff Medal 2017, verliehen. Welche Erkenntnisse haben sie als Erste erlangt? Zur Beantwortung dieser Frage soll zuerst ein Rückblick getätigt werden. Der folgende Abschnitt basiert gänzlich auf [7].

In den 1960er Jahren entwickelte der Mathematiker Paul Cohen eine Methode namens „Forcing“. Dieses Verfahren widmet sich der Durchführung von Konsistenz- und Unabhängigkeitsbeweisen in der axiomatischen Mengenlehre. Damit konnte er zeigen, dass die Kontinuumshypothese nicht mit Hilfe der Mengenlehre gelöst werden kann, da sie nicht von ihren Gesetzen abhängig ist. Diese neue Methode half anderen MathematikerInnen bei der Untersuchung von Unendlichkeitsvergleichen. Diese gipfelten allerdings darin, dass einige Beweise zu diesen Vergleichen auf Grund der mathematischen Axiome schier unmöglich waren. Es blieben aber weiterhin andere Unsicherheiten im Zusammenhang mit der Kontinuumshypothese bestehen.

Bei der Recherche stößt man unweigerlich auf die zwei Größen p und t. Deren Beschreibung ist kompliziert, soll aber an dieser Stelle trotzalldem nicht vernachlässigt werden.
Dabei sind p und t Unendlichkeiten, die der minimalen Größe einer Sammlung von Teilmengen der natürlichen Zahlen entsprechen. Die Teilmengen erfüllen verschiedene spezielle Eigenschaften. Die Mächtigkeiten von p und t sind jeweils größer als jene der natürlichen Zahlen, aber auch kleiner als die der reellen Zahlen. Zusätzlich gilt $p \leq t$. Wäre p echt kleiner als t, wäre bewiesen, dass die eine Unendlichkeit zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ existiert und die Kontinuumshypothese wäre falsch. Der Fall ist aber durch Cohen's Forschung ausgeschlossen. Daraus folgt, dass entweder $p = t$ oder auch diese Frage zur Beziehung von p und t nicht beantwortet werden kann, was ebenfalls einen Beweis zur Unabhängigkeit von den mathematischen Axiomen bedarf. Malliaris und Shelah schafften es entgegen allen Erwartungen zu zeigen, dass $p = t$ erfüllt ist.

Für diesen Beweis war eine ungewöhnliche Kombination von Forschungsrichtungen notwendig. Um die Erkenntnis oberflächlich verstehen zu können, muss jedoch noch weiter ausgeholt werden. Zuerst sollen p und t genauer betrachtet werden.
Wie gesagt messen die beiden die Anzahl unendlich vieler Teilmengen von den natürlichen Zahlen. Solche Teilmengen könnten z.B.: alle geraden oder ungeraden Zahlen oder die Primzahlen sein. Zusätzlich müssen sich die Teilmengen aber einerseits unendlich überlappen und andererseits dürfen sich diese Mengen aber auch nicht zu ähnlich sein, d.h. der Schnitt aller Teilmengen darf nicht unendlich sein.
MathematikerInnen haben auf verschiedene Weisen solche Teilmengen gefunden. Deren Anzahl an Teilmengen wird dann von p und t gemessen und die kleinste Anzahl an Teilmengen wird ausgewählt. Zusätzlich müssen für t die Teilmengen aber auch noch ordenbar sein, wodurch sich die Anzahl an Teilmengen natürlich drastisch reduziert. Da die minimale Größe gesucht wird, vermutete man, dass höchstwahrscheinlich bei p (mit einer größeren Anzahl an Teilmengen) eher etwas Kleineres gefunden werden würde als bei t und daher $p < t$ gelten müsste. Das war aber eben durch den Erfolg von Malliaris und Shelah nicht der Fall, wie wir bald sehen werden.

Wie bereits erwähnt, kombinierten die beiden MathematikerInnen verschiedene Forschungsrichtungen. Einerseits handelt es sich dabei um die Keisler-Ordnung, eine Methode aus der Modelltheorie bei der eine Klassifikation mathematischer Theorien nach der Komplexität erstellt wird. Howard Jerome Keisler fand 1967 heraus, dass es mindestens zwei Ausprägungen von komplexen Theorien geben müsse: minimal und maximal komplexe Theorien. Eine komplexe Theorie würde eine größere Reichweite von der Theorie aufweisen als eine nicht-komplexe. Shelah fand heraus, dass es klare Grenzen zwischen den Komplexitätsstufen gibt.
Zusammen versuchten Malliaris und Shelah dann die Eigenschaften von komplexen Theorien zu erkunden. Sie stellten fest, dass maximale Komplexität bereits dann vorlag, wenn geordnete mathematische Theorien im Fokus stehen. Die Eigenschaft geordnet bezieht sich auf die Ordnungsrelation, bei der Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität erfüllt sind. Die ForscherInnen wollten herausfinden, ob maximale Komplexität auch bei einer abgeschwächten Variante der Ordnung vorliegen könnte. Nach einiger Zeit gelangten sie zu dem Schluss, dass sowohl die Ordnung, als auch die abgeschwächte Form maximal komplex sind.
Aus diesem Zusammenhang schlossen sie auf die Gleichheit von p und t. Sie schafften es auch zu bewiesen, dass eine unendliche Anzahl an Komplexitätsstufen in der Keisler-Ordnung vorhanden ist.

Im Endeffekt haben Malliaris und Shelah durch die Kombination von Mengenlehre und Modelltheorie das Mysterium um p und t lösen können. Dadurch konnte die Kontinuumshypothese natürlich trotzdem weder verifiziert noch falsifiziert werden und doch wurde eine neue Erkenntnis erreicht, die eng mit ihr im Zusammenhang steht. [7] stellt schließlich fest, dass die meisten ExpertInnen die Kontinuumshypothese weiter anzweifeln und davon ausgehen, dass es mehr zwischen den Mächtigkeiten von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ geben müsse.
Die Zeit wird zeigen, ob ein weiterer Schritt in Richtung einer Lösung des Hilbert'schen Problems gelingen kann!

9 Standardanalysis

Die mathematische Analysis [ist] gewissermaßen eine Symphonie des Unendlichen
-David Hilbert [9, S. 187]

Die Analysis ist eines der mathematischen Gebiete, wenn nicht sogar das Gebiet, welches am stärksten von der Unendlichkeit geprägt ist. Grenzwerte, Annäherung, Folgen, Reihen, Konvergenz, Asymptoten, Differentialrechnung, Integralrechnung, Stetigkeit,...
Die Liste der Schlagwörter, die im Schnitt von Analysis und Unendlichkeit liegen (wenn man es salopp so ausdrücken möchte) ist sehr lang.
Dieses Kapitel wird deshalb auch den Hauptteil dieser Diplomarbeit ausmachen. Es werden wichtige Zusammenhänge der Analysis aufgezeigt. Dabei wird der innermathematisch typischen Struktur Definition - Proposition - Satz - Beweis gefolgt, wobei diese Ausführungen durch Hilfssätze, Bemerkungen und an manchen Stellen auch Beispiele untermauert werden. Zusätzlich wird an ausgewählten Stellen ein Blick in die Schulpraxis gewagt, wodurch auch fachdidaktische Ansätze vorgestellt werden, die teilweise einen nicht unbedeuteden Kontrast zu der innermathematischen Herangehensweise darstellen können.

9.1 Grenzwerte und Konvergenz von Folgen

9.1.1 Fachlicher Hintergrund

Im mathematischen Kontext ist der Unendlichkeitsbegriff untrennbar mit dem Grenzwertbegriff verbunden. Die Betrachtung des Grenzwertes einer Folge bzw. einer Reihe bedeutet, dass untersucht wird, wie sich die Folgenglieder bzw. der Wert der Reihe weiterentwickeln, wenn entweder die Anzahl der Folgenglieder oder der Summanden einer Reihe immer weiter (also gegen unendlich gehend) steigt. Hierbei kann auch eine Differenzierung zwischen $+\infty$ und $-\infty$ vorgenommen werden, um sich nur auf eine der Richtungen am gedachten Zahlenstrahl zu konzentrieren. In der reellen Analysis ist das üblich.

Deshalb wird es notwendig sein entsprechend der typisch mathematischen Herangehensweise zuerst grundlegende Definitionen, Propositionen und Sätze, sowie deren Beweise einzuführen, um ein Grundgerüst für die später folgenden Ausführungen zu uneigentlichen Grenzwerten, dem Differentieren und Integrieren, der Stetigkeit, dem Umgang mit Potenz- oder Zahlenreihen etc. zu rechtfertigen.

Die folgenden ersten Ausführungen zum Grenzwert entstammen leicht abgeändert [26, S. 223 ff.].

Definition 8. Unter einer reellen Zahlenfolge versteht man eine geordnete Menge reeller Zahlen indiziert mit $1, 2, 3, ...$ Dann wird geschrieben: $(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Zahlen $a_1, a_2, a_3, ...$ heißen Glieder der Folge, a_n ist das $n-te$ Glied bzw. das allgemeine Glied der Folge (Bildungsgesetz).

Definition 9. Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert oder Limes der Zahlenfolge (a_n) mit $n \in \mathbb{N}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass für alle $n \geq N$ stets $\mid a_n - a \mid < \varepsilon$ gilt.

Definition 10. Eine Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Wir verwenden dann die Notation $a_n \overset{n\to\infty}{\to} a$ oder $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Eine Folge heißt divergent, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

Definition 11. Eine Nullfolge ist eine Folge (a_n), die gegen 0 konvergiert.
Kurz: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oder $a_n \to 0$ (siehe [16]).

Beispiel 3. Eine bekannte Nullfolge ist $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Die Idee zu diesem Beispiel gründet auf [26, S. 226]. In Abbildung 11 wird erkennbar, was es bedeutet, wenn eine Folge konvergiert. Bei Betrachtung der ersten 10 Folgenglieder nähert sich der Wert der Folge a_n immer weiter an 1 an. 1 wird auch danach, also je weiter die Anzahl der Folgenglieder n gegen unendlich geht, nicht berührt.

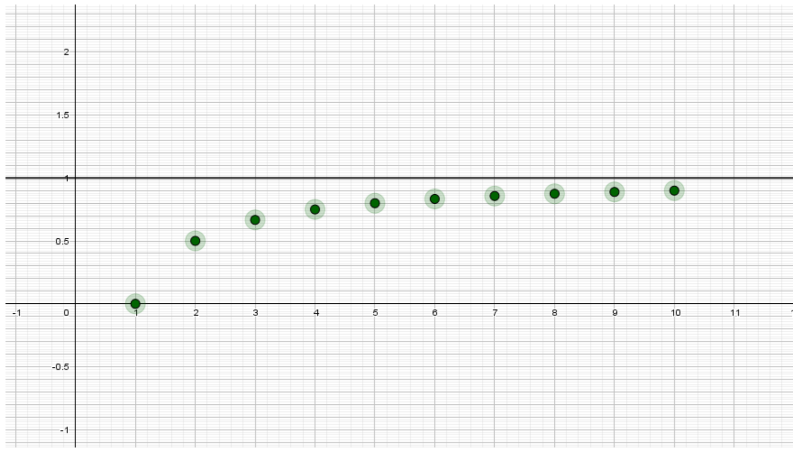

Abbildung 11: graphische Darstellung der Konvergenz von $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, eigene Darstellung

Im Folgenden wird auf wichtige Sätze und Propositionen im Zusammenhang mit dem Grenzwert eingegangen, wobei dafür [9] und [16] herangezogen wurden.

Lemma 2. ***Dreiecksungleichung***
Seien $x, y \in \mathbb{R}^s(\mathbb{C}^s)$ Dann gilt:

$$| x + y | \leq | x | + | y | \textit{ und } || x | - | y || \leq | x - y | \,.$$

An dieser Stelle sei auf Grund des geringen Stellenwertes für die Thematik und den trivialen Beweis nur auf die Beweisskizze eingegangen. Genauere Ausführungen finden sich in [16] bzw. [9, S. 83,S. 96 f.].

Beweis. rechte Seite der Dreiecksungleichung:
Es wird von $| x+y |^2$ ausgegangen. Zuerst wird dieser Ausdruck durch $\sum_{j=1}^{s}(x_j+y_j)^2$ ersetzt.
Dann wird ausquadriert, die Linearität benutzt, u.a. $\sum_{j=1}^{s} x^2 =| x |^2$
und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $\sum_{j=1}^{s} x_j \cdot y_j \leq | \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot y_j | \leq | x | \cdot | y |$ verwendet.
Das ergibt dann $(| x | + | y |)^2$.
Durch Wurzelziehen erlangt man die Ungleichung $| x + y | \leq | x | + | y |$.

linke Seite der Dreiecksungleichung:
$| a + b | \leq | a | + | b |$.
In diesem Schritt werden einerseits $a := x - y$, $b := y$ und andererseits $a := y - x$ und $b := x$ verwendet. Es wird nur ersterer Fall behandelt.
Der zweite funktioniert bis auf Austausch von Betrag $| y - x |$ durch $| x - y |$ analog:
Da $a := x - y$ und $b := y$ gilt:

$$| x | \leq | x - y | + | y | \Rightarrow | x | - | y | \leq | x - y | \,.$$

□

Satz 5. *Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.*

Beweis. Angenommen $a_n \to a$, $a_n \to b$ und es gelte $a \neq b \Rightarrow | b-a | > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot | b-a | > 0$.
Da $a_n \to a: \exists N_1 \, \forall n \geq N_1 : | a_n - a | < \frac{1}{2} \cdot | b - a |$, was eine beliebige Zahl darstellt.
Analog wird dieser Schritt für $a_n \to b$ durchgeführt:

$$\exists N_2 \, \forall n \geq N_2 : | a_n - b | < \tfrac{1}{2} \cdot | b - a |.$$

Setze nun $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$| a_n - a | < \tfrac{1}{2} \cdot | b - a | \text{ und } | a_n - b | < \tfrac{1}{2} \cdot | b - a |.$$

Sei $n \geq N$. Wegen der Dreiecksungleichung gilt: $| b - a | \leq | b - a_n | + | a_n - a |$.
Da sowohl $| b - a_n |$, als auch $| a_n - a | < \frac{1}{2} \cdot | b - a |$, ist insgesamt $| b - a | < | b - a |$.
Widerspruch. Daher muss $b = a$ gelten. □

Satz 6. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
(D.h. Sei (a_n) eine konvergente Folge. Dann $\exists \, c > 0$ mit $| a_n | \leq c \, \forall n$.)

Beweis. Da $a_n \to a$: Unter Verwendung des linken Teiles der Dreiecksungleichung

$$\exists N \, \forall n \geq N : | a_n | - | a | \leq | a_n - a | < 1.$$

Durch Umformung ist für $n \geq N$: $| a_n | \leq | a | + 1$.
Setze $c = \max\{| a_1 |, | a_2 |, ..., | a_{N+1} |, | a | + 1\}$.
Es ergeben sich 2 Fälle:
1.Fall: $n < N$: $| a_n | \leq c$.
2.Fall: $n \geq N$: $| a_n | \leq | a | + 1 \leq c$.
Also ist a_n in jedem Fall durch c beschränkt. □

Proposition 3. *Jede Teilfolge (a_{n_k}) einer konvergenten Folge (a_n) hat den selben Grenzwert wie (a_n).*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N : \forall n \geq N : | a_n - a | < \varepsilon$.
Sei $k \geq N$. Da eine Teilfolge weniger Glieder hat, gilt $n_k \geq k \geq N \Rightarrow | a_{n_k} - a | < \varepsilon$. □

Grenzwertsätze nach [16] und [9, S. 153]

Satz 7. *Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ (kurz: $a_n \to a$) und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ (kurz: $b_n \to b$). Dann gelten:*

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ (Summensatz)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ (Produktsatz)

(4) Falls $b \neq 0$, dann $\exists N_0 \, \forall n \geq N_0 : b_n \neq 0$ (fast alle $b_n \neq 0$) und es gilt $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ (Quotientensatz).

Beweis. Der Beweisteil 3 wird in der Reihenfolge beim Beweis hervorgezogen, da sowohl der Summensatz, als auch der Produktsatz im Weiteren für Teil 2 des Satzes benötigt werden.

(1) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N : \forall n \geq N : | a_n - a | < \dfrac{\varepsilon}{2}$ und $| b_n - b | < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Sei $n \geq N$.
Nach Umordnung und Verwendung der Dreiecksungleichung gilt:

$$| (a_n + b_n) - (a + b) | \leq | a_n - a | + | b_n - b | < \varepsilon.$$

(3) Verwende Satz 6: (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt $\Rightarrow \exists\, c > 0$, sodass $\mid a_n \mid \leq c \,\forall\, n$.
Es folgt eine Abschätzung:
Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N\ \forall n \geq N : \mid a_n - a \mid < \dfrac{\varepsilon}{c + \mid b \mid}$ und $\mid b_n - b \mid < \dfrac{\varepsilon}{c + \mid b \mid}$.
Sei $n \geq N$. Als Trick wird nun etwas innerhalb des Betrages ergänzt und abgezogen, sodass die Dreiecksungleichung verwendet werden kann.

$$\mid a_n b_n - ab \mid \overset{\text{Satz 2}}{\leq} \mid a_n b_n - a_n b \mid + \mid a_n b - ab \mid .$$

Nun werden a_n bzw. b als Linearfaktoren herausgehoben.

$$\mid a_n b_n - a_n b \mid + \mid a_n b - ab \mid = \mid a_n \mid \cdot \mid b_n - b \mid + \mid b \mid \cdot \mid a_n - a \mid < \frac{\varepsilon}{c + \mid b \mid} \cdot (c + \mid b \mid) = \varepsilon.$$

(2) Nun ist dieser Teil unter Verwendung der beiden vorigen sehr schnell erledigt.

$$a_n - b_n = a_n + (-1)\, b_n.$$
$$a_n \to a,\ (-1) \to -1,\ b \to b.$$

Wegen Satz 7, (3) konvergiert also (-1) b gegen -b. Aus Satz 7,(1) folgt

$$\lim_{n \to \infty} a_n + (-1)\, b_n = a + (-b) = a - b.$$

(4) Da $b \neq 0$, ist $|b| > 0 \Rightarrow \dfrac{\mid b \mid}{2} > 0$.
Nach der Dreiecksungleichung $\exists N_0 : \forall n \geq N_0$:

$$\mid b \mid - \mid b_n \mid \leq \mid b_n - b \mid \leq \frac{\mid b \mid}{2}.$$

Sei $n \geq N_0$. Dann gilt: $\frac{|b|}{2} \leq \mid b_n \mid$. Also $\mid b_n \mid > 0$.
In den nächsten Zeilen werden obere Schranken für $\mid a_n - a \mid$ und $\mid b_n - b \mid$ geschickt gewählt, die vorher genannten Abschätzungen, sowie die Eigenschaften der Betragsfunktion: $\mid x \cdot y \mid = \mid x \mid \cdot \mid y \mid$ und $\left| \dfrac{x}{y} \right| = \dfrac{\mid x \mid}{\mid y \mid}$ werden verwendet.
Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \geq N_0$:

$$\mid a_n - a \mid < \frac{\varepsilon \cdot \mid b \mid^2}{2 \cdot (\mid a \mid + \mid b \mid)}$$

und

$$\mid b_n - b \mid < \frac{\varepsilon \cdot \mid b \mid^2}{2 \cdot (\mid a \mid + \mid b \mid)}.$$

Sei $n \geq N$. Dann gilt wegen $a_n b - ab_n = a_n b - ab + ab - ab_n$:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \frac{\mid a_n b - ab_n \mid}{\mid b_n \mid\mid b \mid} \leq \frac{2}{\mid b \mid^2} \cdot \mid a_n b - ab_n \mid \leq$$

$$\leq \frac{2}{\mid b \mid^2} \cdot (\mid b \mid \cdot \mid a_n - a \mid - \mid a \mid \cdot \mid b_n - b \mid) < \frac{2}{\mid b \mid^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \mid b \mid^2}{2 \cdot (\mid a \mid + \mid b \mid)} \cdot (\mid b \mid + \mid a \mid) = \varepsilon.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, n \geq N$: $\left| \dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} \right| < \varepsilon$. Die Grenzwertdefinition ist also auch in diesem Fall erfüllt: unter den gegebenen Voraussetzungen ist $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

$\square$

Bemerkung 4. Der Satz bedeutet also kurz nach [9, S. 153] zusammengefasst, dass die Abbildung, die jeder konvergenten Folge ihren Grenzwert zuordnet linear ist.
Verkürzte Schreibweisen der Form $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ sind geläufig, müssen jedoch mathematisch korrekt von rechts gelesen werden, da die Voraussetzung ist, dass die einzelnen Grenzwerte von a_n und b_n existieren. Dadurch kann erst eine Aussage über den Grenzwert der Folgensumme getroffen werden, der dann existiert und der danach berechnet werden kann.

Bemerkung 5. Für Grenzwerte der Art „$\frac{\infty}{\infty}$“ oder „$\frac{0}{0}$“ gibt es eine spezielle Regel: die Regel von de l'Hospital.
Sie wird im Abschnitt Differenzier- und Integrierbarkeit näher ausgeführt.

Bevor die uneigentlichen Grenzwerte behandelt werden, bei denen ∞ bekanntlich doppelt in der Notation vertreten ist, sollen noch weitere wichtige Sätze zum Umgang mit Grenzwerten ihren Platz finden. Dabei wird weiterhin auf [16] und [9, S. 152 ff.] Bezug genommen.

Satz 8. ***Vergleichssatz***
Strebt $a_n \to a$, $b_n \to b$ und ist fast immer (d.h. durchweg ab einem gewissen Index) $a_n \leq b_n$. Dann gilt $a \leq b$.

Beweis. indirekt: Angenommen $a > b$. Wähle eine Zahl c, für die $a > c > b$ gilt. In der Vorstellung würde also das arithmetische Mittel $c = \dfrac{a+b}{2}$ eine Möglichkeit sein.
Der weitere Beweis kann auf mehreren Varianten fortgeführt werden. Jene von [9, 152] und [16] unterscheiden sich nur dadurch, dass in [9] der Begriff der Umgebung im Vordergrund steht, während in [16] stärker mit der förmlichen Grenzwertdefinition 9 gearbeitet wird. In diesem Fall werden beide kombiniert, um den Unterschied auch für die folgenden Ausführungen deutlich zu machen
Wegen der obigen Annahme $\exists N \; \forall n \geq N$ mit $b_n < c$. In der Sprache von [9] wären also fast alle b_n in einer $\varepsilon-$Umgebung um b $\left(U_\varepsilon(b) \text{ mit } \varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0\right)$ enthalten. Dasselbe gilt für fast alle a_n und die Umgebung $U_\varepsilon(a)$. Es ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung $a_n \leq b_n$, da $U_\varepsilon(a)$ rechts von $U_\varepsilon(b)$ liegen müsste und das mit $a_n \geq b_n$ gleichbedeutend ist.
Nach [16] sei dieser Schritt noch formaler zusammengefasst:
Sei $n \geq N: \; a_n \leq b_n < c \leq a_n$. Es ist aber unmöglich, dass $a_n < a_n$. Widerspruch. Damit ist $a \leq b$. □

Bemerkung 6. Beim Grenzübergang müssen die Ungleichheitszeichen besonders berücksichtigt werden! Es ist ein Irrglaube, dass $a_n > b_n \Rightarrow a > b$. In diesem Fall wäre nur $a_n > b_n \Rightarrow a \geq b$ richtig.

Satz 9. ***Einschnürungs-/Sandwichsatz***
Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$. Strebt $a_n \to a$ und $b_n \to a$ und gilt fast immer $a_n \leq c_n \leq b_n$. So strebt auch $c_n \to a$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Man sieht sich die Umgebung von a an.

$$a - \varepsilon < a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ und } a + \varepsilon > a = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Somit

$$\exists N \; \forall n \geq N: \; a - \varepsilon < a_n \text{ und } b_n < a + \varepsilon.$$

Sei $n \geq N$.

$$a - \varepsilon \; < \; a_n \; \leq \; c_n \; \leq \; b_n \; < \; a + \varepsilon.$$

Durch Subtraktion von a ergibt sich: $-\varepsilon \; < \; c_n - a \; < \; \varepsilon$.
Das ist gleichbedeutend mit $\mid c_n - a \mid < \; \varepsilon$.
Nach der Definition des Grenzwertes strebt also $c_n \to a$. □

Korollar 1. *Eine Verallgemeinerung aus dem Sandwichsatz lautet:*
Gilt mit einer Nullfolge (α_n) *fast immer* $\mid a_n - a \mid \leq \alpha_n$*, so strebt* $a_n \to a$*.*

Satz 10. ***Betragssatz***
Sei $(a_n) \in \mathbb{R}^s$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$*. Dann gilt:* $\lim_{n\to\infty} \mid a_n \mid = \mid a \mid$*.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N : \forall n \geq N : \mid a_n - a \mid < \varepsilon$.
Sei $n \geq N$. Dann ist wegen der linken Seite der Dreiecksungleichung

$$\varepsilon > \mid a_n - a \mid \geq \mid \mid a_n \mid - \mid a \mid \mid .$$

Daher $\mid a_n \mid \to \mid a \mid$. □

Wie stehen Monotonie, Schranken und Grenzwerte miteinander in Verbindung? Auch dazu gibt es einen wichtigen Satz, der Teil der Konvergenzsätze nach [9, S. 155 ff.] ist:
Es ist notwendig bereits bevor mit dem Rechnen begonnen wird zu klären, ob eine Folge überhaupt konvergiert. Durch die Konvergenzkriterien werden Bedingungen für eine Konvergenz gegeben. Zuvor werden aber noch einige Definitionen nach [16] benötigt.

Definition 12. Das Supremum einer Menge A ist die kleinste obere Schranke, das Infimum einer Menge A ist die größte untere Schranke.

Definition 13. (a_n) heißt Cauchyfolge, falls für $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N :\ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Definition 14. Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ heißt Intervall, falls $\forall a, b \in I$ mit $a \leq b$ und $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ gilt $x \in I$.

Die untere bzw obere Grenze des Intervalls wird mit a bzw. b bezeichnet. Diese Zahlen können je nach Klammernsetzung inbegriffen oder ausgeschlossen sein. Es wird eine Differenzierung zwischen abgeschlossenen, offenen und halboffenen Intervallen vorgenommen. In der Schreibweise wird zwischen eckigen und runden Klammern unterschieden, wobei eine eckige Klammer für abgeschlossen und eine runde für offen steht. Definiere die Begriffe offen und zusammenhängend nach [18].

Definition 15. Eine Menge U heißt offen, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle y mit $|y - x| < \varepsilon$ gilt, dass $y \in U$.

Definition 16. Man nennt eine Menge A zusammenhängend, wenn es keine zwei offenen Mengen U_1 und U_2 gibt, sodass $A \cap U_1 \neq \emptyset$, $A \cap U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $A \subset U_1 \cup U_2$.

Nur im Reellen, nicht im Rationalen gilt die folgende Äquivalenz:

Satz 11. *Sei A eine nichtleere Teilmenge der reellen Zahlen. Dann ist A genau dann zusammenhängend, wenn A ein Intervall ist.*

Bemerkung 7. Der Beweis dieses Satzes würde zu diesem Zeitpunkt zu weit gehen, da dafür u.a. die allgemeine Definition des metrischen Raumes aus der mehrdimensionalen reellen Analysis benötigt wird. Interessierte verweise ich an [18].

Darüber hinaus gibt es auch uneigentliche Intervalle. Diese zeichnen sich nach [16] durch mindestens eine Grenze mit $+\infty$ oder $-\infty$ aus. Beispiele dafür sind:
$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$, $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ oder $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$.

Definition 17. Eine Folge abgeschlossener Intervalle $I_n := [a_n, b_n]$ heißt Intervallschachtelung, wenn $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$ ist (die Folge der linken Endpunkte a_n wächst, jene der rechten Endpunkte b_n sinkt) und wenn darüber hinaus die Folge der Intervalllängen $b_n - a_n \to 0$. Die Intervallschachtelung wird mit $\langle a_n, b_n \rangle$ bezeichnet.

Konvergenzkriterien nach [9, S. 155 ff.]

Satz 12. *(1) Eine monotone Folge* (a_n) *konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. In diesem Falle strebt sie gegen ihr Supremum, wenn sie wächst, und gegen ihr Infimum, wenn sie fällt. Dann gilt entweder* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *oder* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$. *(Monotonieprinzip)*

(2) Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge (bzw. später: einen Häufungswert). (Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß/ Satz von Bolzano-Weierstraß)

(3) Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist. (Cauchy'sches Konvergenzprinzip)

(4) Jede Intervallschachtelung $\langle a_n, b_n\rangle$ *erfasst eine wohlbestimmte Zahl* a*, d.h. es gibt eine und nur eine Zahl* a*, die in allen Intervallen* $[a_n, b_n]$ *der Schachtelung liegt. Es streben sowohl* a_n*, als auch* b_n *gegen* a*. (Prinzip der Intervallschachtelung)*

Beweis.

(1) Da es sich bei dieser Aussage um eine Äquivalenz handelt, müssen beide Richtungen bewiesen werden: Bei Satz 6 wurde gezeigt, dass jede konvergente Folge beschränkt ist.
Im anderen Fall muss bewiesen werden, dass aus beschränkt und monoton wachsend oder sinkend die Konvergenz folgt. Ich zeige die Aussage für monoton wachsend und das Supremum, für monoton sinkend und das Infimum verläuft der Beweis analog.
Sei (a_n) monoton wachsend. Dann ist $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt.
Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gilt, dass $\exists\, a \in \mathbb{R}$ mit $a = \sup A$.
Sei $\varepsilon > 0$. Damit kann $a - \varepsilon$ keine obere Schranke sein und $a - \varepsilon < a$.
Also $\exists N$ mit $a_N > a - \varepsilon$.
Sei $n \geq N$, dann gilt $a_n \geq a_N > a - \varepsilon$. Außerdem bleibt immer $a_n \leq a$.
Daher gilt: $a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon$.
Wird a subtrahiert, folgt: $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, was dem Betrag $|a_n - a| < \varepsilon$ entspricht.
Daher $a_n \to a$.

(2) Für den Beweis dieses Punktes muss nur gezeigt werden, dass jede Folge eine monotone Teilfolge enthält.
Sei m eine Gipfelstelle von (a_n). Das bedeutet, wenn $n > m$ ist, ist $a_n < a_m$.
Man gehe nun davon aus, dass es eine Folge unendlich vieler Gipfelstellen $m_1 < m_2 < ...$ gibt. Dann ist $a_{m_1} > a_{m_2} > ...$ (a_{m_k}) ist also eine monoton fallende Teilfolge von (a_n).
Bei endlich vielen Gipfelstellen gibt es zumindest einen Index n_1, der größer ist als alle Gipfelstellen. Daher handelt es sich hierbei sicher um keine Gipfelstelle. Es gibt daher einen Index n_2 mit $n_2 > n_1$ und $a_{n_2} \geq a_{n_1}$, wobei das auch keine Gipfelstelle sein kann. Das Verfahren wird fortgesetzt und man erhält eine wachsende Teilfolge.
Unter Verwendung des Monotonieprinzips (1) folgt der Satz dann direkt.

(3) Einerseits gilt es hierbei zu zeigen, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist und andererseits, dass Cauchyfolgen einen Grenzwert besitzen.
Beginne mit dem erstgenannten Teil:
Angenommen $a_n \to a$. Wähle $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N\, \forall n \geq N : |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Sei nun $n, m \geq N : |a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n|$.
Da beide Summanden kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sind, folgt $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
Somit ist die erste Richtung der Äquivalenz gezeigt.
Man stellt fest, dass die Cauchyfolge (a_n) beschränkt ist.
Für $\varepsilon = 1\ \exists N\, \forall n, m > N$ ist immer $|a_m - a_n| < 1$.
Wegen der Dreiecksungleichung ist $|a_m| - |a_n| < 1$.
Wähle einen neuen Index für n, nämlich $N_1 = N + 1$, sodass für $m > N :\ |a_m| < 1 + |a_{N_1}|$.

(a_n) ist damit beschränkt, weil $|a_n| \leq \max\{|a_1|, ..., |a_N|, 1 + |a_{N_1}|\}$.
Aus (2) folgt, dass es eine konvergente Teilfolge (a'_n) gibt, also $a'_n \to a$ für ein passendes a.
Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N\ \forall m, n > N$ mit $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Weil $(a'_n) \to a$ gibt es ein Folgenglied namens a_{N_1}, wobei $N_1 > N$, sowie $|a_{N_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Für $\forall n > N : |a_n - a| \leq |a_n - a_{N_1}| + |a_{N_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Damit konvergiert die Gesamtfolge a_n gegen a.

(4) Da die Folgen (a_n) und (b_n) im Intervall $[a_1, b_1]$ liegen, sind sie monoton und beschränkt.
Wegen (1) existieren $\lim a_n =: a$ und $\lim b_n =: b$.
$(b_n - a_n)$ konvergieren daher gleichzeitig gegen $b - a$ und 0, weshalb $a = b$ gilt.
Außerdem ist für $\forall n\ a_n \leq \sup a_k = a = b = \inf b_k \leq b_n$.
a befindet sich somit in $[a_n, b_n]$. Auch die Zahl c befindet sich darin: $a_n \leq c \leq b_n\ \forall n$, womit $a \leq c \leq a$. Nach dem Sandwichsatz ist $c = a$. Die Zahl a ist damit die einzige Zahl, die in allen Intervallen (a_n, b_n) liegt. □

Häufungswerte Dieser Abschnitt bezieht sich auf [9, S. 179 ff.] und [16].

Definition 18. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}^s$ und $b \in \mathbb{R}^s$. Dann heißt b Häufungswert von (a_n), wenn b der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) ist:
$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b$.

Bemerkung 8. Als großer Unterschied zur Grenzwertdefinition einer Folge bei Definition 9 fehlt bei der Definition des Häufungswertes N. Außerdem kann es vorkommen, dass ∞ bzw $+\infty$ oder $-\infty$ als Häufungswerte zugelassen werden. Unendlich als Grenzwert führt nach diesem Abschnitt auch zum Begriff der uneigentlichen Grenzwerte.

Proposition 4. *Es ist b genau dann Häufungswert von (a_n), wenn es $\forall \varepsilon > 0$ unendlich viele Indizes n mit $|a_n - b| < \varepsilon$ gibt.*

Beweis. 1.Richtung:
Es existiere eine Teilfolge (a_{n_k}), wobei $a_{n_k} \to b$. Nach der Grenzwertdefinition gilt:
Sei $\varepsilon > 0 : \exists k\, \forall k \geq K : |a_{n_k} - b| < \varepsilon$.
2.Richtung:
Es wird behauptet, dass für alle k aufsteigend $n_1 < n_2 < ... < n_k$ mit $|a_{n_k} - b| < \dfrac{1}{j}$ existieren, wobei $j \in \{1, 2, 3, ..., k\}$. Für den Beweis der Behauptung wird die vollständige Induktion nach n verwendet.
Es gibt unendlich viele n mit $|a_n - b| < \dfrac{1}{k}$. Daher $\exists n_k > n_{k-1}$ mit $|a_{n_k} - b| < \dfrac{1}{k}$.
Wäre das nämlich nicht der Fall, gäbe es einen Widerspruch zur Unendlichkeit der n.
(Es wäre $r \leq n_{k-1}$ wegen $|a_r - b| < \dfrac{1}{k}$. Es gäbe dann nur n_{k-1}-viele r und das sind endlich viele.) Da $n_1 < n_2 < ...$ erhält man die Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $|a_{n_k} - b| < \dfrac{1}{k}$.
Dabei ist $\dfrac{1}{k}$ eine Nullfolge. Deshalb $a_{n_k} \to b$ und b ist ein Häufungswert von (a_n). □

Definition 19. Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann nennt man den größten Häufungswert Limes superior von (a_n)

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup\{b : b \text{ ist Häufungswert von } (a_n)\}$$

und analog den kleinsten Häufungswert Limes inferior von (a_n).
Für jede konvergente Teilfolge (a'_n) von (a_n) ist

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} a'_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

und es sind immer Teilfolgen vorhanden, die gegen $\liminf_{n\to\infty} a_n$ oder $\limsup_{n\to\infty} a_n$ konvergieren. Außerdem gilt immer: $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Proposition 5. *Es sei eine beschränkte Folge* (a_n) *in* $\mathbb{R}$ *gegeben. Weiters sei* $b \in \mathbb{R}$*.*

(1) $b = \liminf_{n\to\infty} a_n$ *genau dann, wenn*

(i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : a_n > b - \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ *gibt es unendlich viele* n *mit* $a_n < b + \varepsilon$

(2) $b = \limsup_{n\to\infty} a_n$ *genau dann, wenn*

(i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : a_n < b + \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ *gibt es unendlich viele* n *mit* $a_n > b - \varepsilon$

Beweis. Es wird nur die Aussage über den Limes inferior bewiesen, da jene zum Limes Superior analog erfolgt.
„$\Rightarrow$“
Angenommen $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N : a_n \leq b - \varepsilon$. Dann gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \leq b - \varepsilon$.
Da (a_n) und (a_{n_k}) beschränkt sind, folgt nach dem Satz von Bolzano Weierstraß (Satz 12), dass eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_l}})$ von (a_{n_k}) mit $a_{n_{k_l}} \to c \leq b - \varepsilon$ existiert.
Somit ist c Häufungswert von (a_n). Da aber auch $c < b = \inf\{d : d \text{ Häufungswert von } (a_n)\}$ ist, handelt es sich um einen Widerspruch.
Daher $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : a_n > b - \varepsilon$, wobei b ein Häufungswert von (a_n). ist
Nach Proposition 4 folgt:
Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt unendlich viele n mit $|a_n - b| < \varepsilon$. Daher ist $a_n < b + \varepsilon$.
„$\Leftarrow$ “
Es ist b ein Häufungswert von (a_n). Es soll gezeigt werden, dass b der kleinste Häufungswert von (a_n) ist.
Angenommen c wäre Häufungswert von (a_n) mit $c < b$. Setze $\varepsilon = \dfrac{b-c}{2}$.
Dann $\exists N\ \forall n \geq N : a_n > b - \varepsilon = b - \dfrac{b-c}{2} = \dfrac{b+c}{2}$.
Da c Häufungswert ist, folgt wiederum nach Proposition 4, dass es unendlich viele n mit $a_n < c + \varepsilon = \dfrac{b+c}{2}$ gibt.
Da es aber in Wirklichkeit nur endlich viele solcher n gibt, ergibt sich auch hier ein Widerspruch.
Es gibt keinen kleineren Häufungswert. Somit ist $b = \inf\{c : c \text{ Häufungswert von } (a_n)\}$. und $b = \liminf_{n\to\infty} a_n$. □

Aus den vorigen Ausführungen folgt auch ein weiterer Satz nach [9, S. 181]:

Proposition 6. *Eine Folge* (a_n) *konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und nur einen Häufungswert besitzt.*
In diesem Fall ist:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Definition 20. uneigentliche Grenzwerte (siehe [16])
Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}^s$.
Dann sagt man $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists N\ \forall n \geq N : |\ a_n\ | > r$.
Genauer: Sei a_n eine Folge in $\mathbb{R}$.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n) = +\infty$, falls $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists N\ \forall n \geq N : a_n > r$.

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n) = -\infty$, falls $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists N\ \forall n \geq N : a_n < r$.

Bemerkung 9. Laien würden nun dabei ansetzen die Bezeichnung uneigentlicher Grenzwert als eigentlich kein Grenzwert zu deuten. Das ist in gewisser Weise auch richtig. Bei uneigentlichen Grenzwerten liegt also nach [9, S. 183] tatsächlich keine Konvergenz vor. Man sagt: die Folge (a_n) divergiert gegen $-\infty$, $+\infty$ oder ∞. Im Gegensatz zu den eigentlichen Grenzwerten z.B.: in Form einzelner reellen Zahlen sind $-\infty$ und $+\infty$ keine wohlbestimmten Zahlen.
Folgen werden bestimmt konvergent genannt, wenn $a_n \to -\infty$ oder $a_n \to +\infty$ geschrieben wird. Später beim Satz von l'Hospital wird u.a. „$\frac{\infty}{\infty}$“ angeschrieben. Das ist jedoch nur eine gedankliche Stütze und in Wirklichkeit nicht rechnerisch durchführbar.

9.1.2 Schulpraxis: der propädeutische Grenzwertbegriff

In diesem Abschnitt soll dem Anfang der Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff aus fachdidaktischer Sicht Platz eingeräumt werden. Kinder lernen in ihrer Schulkarriere zwar in der Oberstufe den Grenzwert in Form der mathematisch-formalen Präzisierung kennen, es sollte jedoch schon viel früher bei der intuitiven Vorstellung angesetzt werden. Damit können die später vorkommenden Formalitäten auf Grundvorstellungen aufgebaut werden und der Umgang mit dem doch abstrakt wirkenden Thema wird vereinfacht. Demnach ist es besonders im Bereich der Differential- und Integralrechnung notwendig erste Erfahrungen mit Annäherungen und im Konkreten mit dem Grenzwert gemacht zu haben. Fehlvorstellungen sollen damit bereits im Keim erstickt werden.
Als Lehrperson ist es daher unerlässlich auf symbolische, ikonische und enaktive Repräsentationsformen zurückzugreifen, da SchülerInnen dadurch umdenken lernen und Vernetzungen stattfinden können.
Der Mathematikunterricht soll - insbesondere unter der Betrachtung des Unendlichen - nach [24, S. 158]:
„Lernprozesse nicht so weit glätten, dass die für das Verständnis zentralen Probleme und Denkhindernisse ausgeklammert oder umgangen werden. Mathematikunterricht sollte vielmehr genügend Raum geben, um solche Probleme aufzuwerfen, sodass Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, sich mit ihnen auseinander zu setzen, mit ihnen zu ringen – wobei auch manche gedankliche Sackgasse ein produktiver Schritt zur Problembewältigung sein kann – und sie schließlich zu überwinden.“
Inhalte des Schulfaches Mathematik sollen problem- und anwendungsorientiert statt kontextlos unterrichtet werden. Die Forschungspraxis zeigt, dass eine intensive eigenständige Auseinandersetzung langfristig deutlich nachhaltiger wirkt als stures Auswendiglernen ohne Verständnis.

Ein Beispiel für die Diskrepanz zwischen intuitiver Verstehensbasis und mathematisch-formaler Präzisierung wird ebenfalls von [24, S. 159] gegeben. Durch diese tabellarische Anordnung wird ersichtlich, dass mathematische Begriffe über eine verkürzte Schreibweise verfügen. Hinter einem Begriff wie dem Grenzwert steckt eine Fülle an notwendigen Vorstellungen. Die in den letzten Jahren starke Fokussierung auf die Kompetenzorientierung hebt den hohen Stellenwert der propädeutischen Erfahrung des Grenzwertprozesses ebenfalls hervor, da der Lernprozess in den Vordergrund rückt und qualitative und intuitive Argumentationsformen an Wert gewinnen. Einerseits werden die mathematisch-formalen Ausdrücke in alltäglichere Formulierungen übersetzt, andererseits werden anwendungsorientierte Textaufgaben mit den Mitteln der Mathematik gelöst. Darüber hinaus wird viel mit Grafiken, tabellarischen Darstellungen etc. gearbeitet.

	Intuitive Verstehensbasis	Math.-formale Präzisierung
Folge	Aneinanderreihung von Elementen, in der Regel nach einer Gesetzmäßigkeit	Abbildung: $N \to \Re$
Folgenkonvergenz	Einem Ziel zustreben, sich beliebig verdichten	Konvergenzkriterien
Folgengrenzwert	Das Ziel des Prozesses, das u. U. nie erreicht, aber als ideelle Vervollständigung gedacht wird; es verkörpert die Stelle der größten Verdichtung	Definition des Grenzwertes

Abbildung 12: intuitive Verstehensbasis und mathematisch-formale Präzisierung am Beispiel Folgengrenzwert, nach [24, Tab 6.1.]

Wie könnten nun aber propädeutische (also im Großen und Ganzen vorbereitende) Erfahrungen eines Grenzwertprozesses bereits in der Sekundarstufe I einen Platz finden? [1] liefert dazu eine erste Annäherung. Dabei ist es auch wichtig zu verstehen, dass diese propädeutischen Erfahrungen nicht direkt im Lehrplan einer bestimmten Klasse aufscheinen. Sie sollen bei passender Thematik in den Lernprozess eingebunden werden, anstatt ein abgegrenztes Thema darzustellen.

Faszinierende, möglicherweise widersprüchliche Phänomene sollen im Vordergrund stehen. Sie erhalten ihren Wert dadurch, dass ein natürlicher Kontext vorhanden ist und die Darstellungen Anschaulichkeit vermitteln. Statt der expliziten Nennung des Grenzwertbegriffes d.h. der exakt formalen Grenzwertdefinition geht es um die implizite Entwicklung von Vorstellungen. Man denke dabei daran einen Papierstreifen immer wieder in der Hälfte zu teilen und die eine Hälfte wegzulegen. Das ist theoretisch unendlich oft möglich, obwohl nur eine endliche Fläche vorhanden ist. Es sollen Erfahrungen gemacht werden und das impliziert die Einbeziehung möglichst vieler Sinne. Beim obigen Bespiel soll eine haptische Erfahrung gemacht werden. Eine enge Verbindung zur Handlungsorientierung ist zu erkennen.
Außerdem wird in der Literatur erwähnt, dass nicht jedes Problem gelöst werden muss. Dadurch kann der Anreiz für die Thematisierung in der weiterer Schullaufbahn geschaffen werden.

Durch die Vorbereitung auf die weitere Nutzung der Erfahrungen in der Sekundarstufe 2 wird das Spiralcurriculum verfolgt, dessen Ziel es ist die Komplexität der jeweiligen Inhalte über die Schuljahre zu steigern.
Es wird durch [8] hervorgehoben, dass es in diesem Sinne darum gehe einerseits auf vertraute Konzepte aufzubauen und andererseits eine Grundlage zu höherem mathematischen Denken zu schaffen. Solche Konzepte werden „cognitive roots“ genannt.

Wo könnten sich mögliche Anknüpfungspunkte in der Unterstufe finden? Der fachdidaktischen Literatur (v.a. [1]) zu folgen eignet sich für den ersten Zugang zum Grenzwertbegriff vor allem die Auseinandersetzung mit Brüchen und somit sogar die 2.Klasse der Sekundarstufe I (in Deutschland wird entsprechend die 5./6.Klasse erwähnt). Auch die angeführten Beispiele stammen aus obiger Quelle.
Ein Beispiel hierfür wäre die Addition $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$ und die zugehörige Darstellung im Kreisdiagramm (Abbildung 13). Hierbei können Schüler und Schülerinnen visuell sehr einprägsame Erfahrungen sammeln. Auf einem Blick kann man nämlich gleich erkennen, dass unendlich viele Flächenstücke nicht automatisch unendlich viel Platz benötigen.

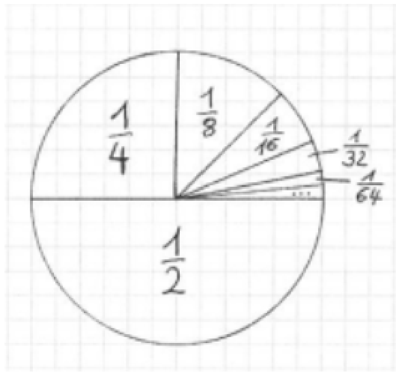

Abbildung 13: Addition von Brüchen im Kreisdiagramm, nach [1, Abb. 2]

Die folgende Aufgabe ist für die Sekundarstufe I, aber auch den Beginn der Sekundarstufe II geeignet, da damit geometrische Vorstellungen trainiert werden. Ab der 2. Klasse kann auch mit Dreiecken gearbeitet werden. Dabei reichen die Grundkenntnisse über die allgemeinen Dreieckseigenschaften aus, um durch das Einschreiben von Mitteldreiecken nahe an den Schwerpunkt zu gelangen. Bei dieser Aufgabe (dargestellt in Abbildung 14) kann man beobachten, dass sich die Dreiecke um den Schwerpunkt zusammenziehen. Die Dreiecke werden nicht nur immer kleiner, sondern beliebig klein. Neben dieser erwünschten Vorstellung birgt die Aufgabe auch Potenzial für Missverständnisse in sich. Die Zeichenbarkeit der Dreiecke stößt wegen der Liniendicke ziemlich bald an die Grenzen. Der theoretische Prozess des Einschreibens von Dreiecken endet jedoch niemals. Die Vorstellung, dass aus dem Dreieck irgendwann ein Punkt werde, ist unangemessen. Es ist eine wichtige Erfahrung festzustellen, dass das Grenzobjekt (entsprechend dem Grenzwert einer Folge) nicht selbst Teil des Grenzprozesses ist.

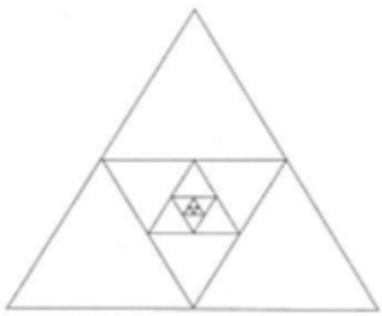

Abbildung 14: Mitteldreiecke - Schwerpunktannäherung, nach [1, Abb. 1]

Anknüpfungspunkte für den propädeutische Grenzwertbegriff können aber beispielsweise auch in der 4.Klasse der Sekundarstufe I beim Unterpunkt „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ gefunden werden. Es kann mit Näherungswerten gearbeitet werden und Gedanken über sinnvolle Genauigkeit können geäußert werden. Hier stellt sich z.B.: die Frage, ob 0.9 periodisch wirklich gleich 1 oder doch etwas kleiner ist.

Es könnte bei den irrationalen Zahlen auch die „Archimedische Methode zur näherungsweisen Bestimmung von π mit Hilfe eingeschriebener oder umschreibender n-Ecke“ verwendet werden (siehe [1, S. 4]).
[22, Archimedes und die unendliche Erschöpfung] beschäftigt sich eben mit dieser bedeutsamen Bestimmung der Kreisfläche. Seine Überlegungen begannen mit dem Ein- und Umschreiben des Kreises durch ein Sechseck. Dafür wurde der Kreisradius am Kreisbogen

sechsmal direkt nacheinander abgeschlagen. Durch das Verbinden dieser Punkte am Kreis entsteht das eingeschriebene Sechseck. Wird nun an den Kreis in diesen Punkten auch eine Kreistangente gelegt, ergibt sich das umgeschriebene Sechseck, wie in Abbildung 15 ersichtlich. Archimedes bestimmte die Sechseckflächen durch die Zusammensetzung von Dreiecksflächen und folgerte, dass die Kreisfläche zwischen den beiden Sechseckflächen liegen muss. Er schaffte es durch seine Berechnungen immer auf die Fläche einer eingeschriebenen Figur mit doppelt so vielen Ecken zu schließen. Auch die Fläche der umgeschriebenen Figur bereitete ihm bis zum 96-Eck keine Probleme. Aus dem Ausdruck $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ wurde über Jahrhunderte unter Verwendung der Dezimalzahlen eine immer bessere Annäherung erreicht. π wurde aber erst im 18. Jahrhundert als das Verhältnis des Kreisflächeninhalts zum Flächeninhalt des Quadrates mit demselben Radius als Seite eingeführt ([22, S. 46 ff.]). Heute kann π mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen bis über eine Billion Stellen genau berechnet werden. Die Griechen der Antike, wie Archimedes einer war, deuteten ihre Erkenntnisse nicht im Zusammenhang mit der Unendlichkeit. Aus heutiger Sicht könne der Kreis bei Ein- und Umschreibung durch Figuren mit immer mehr Ecken quasi als Unendlicheck gedeutet werden, wobei die Seiten der Figuren (d.h. die Abstände zwischen den Punkten) unendlich klein werden.
Für die Schule reicht es sich hierbei z.B.: dynamische Darstellungen mit steigender Eckenzahl der Vielecke anzusehen und festzustellen, dass diese immer näher an den Kreis herankommen. Auf diese Vorerfahrung kann auch bei der Differential- und Integralrechung aufgebaut werden. Man denke dabei an die Annäherung der Fläche unter einer Kurve durch die Ober- und Untersumme bei der Einführung zum Integral. Die Ausführungen zu dieser Thematik finden sich ab Definition 40.

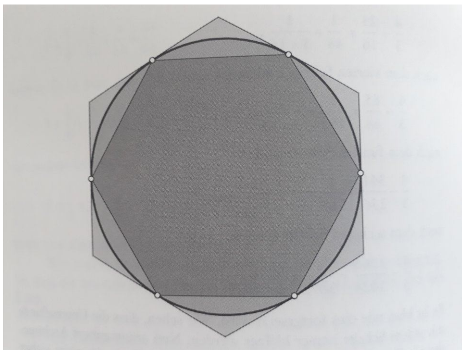

Abbildung 15: Annäherung der Kreisfläche durch ein eingeschriebenes und ein umgeschriebenes Sechseck, nach [22, Abb. 19]

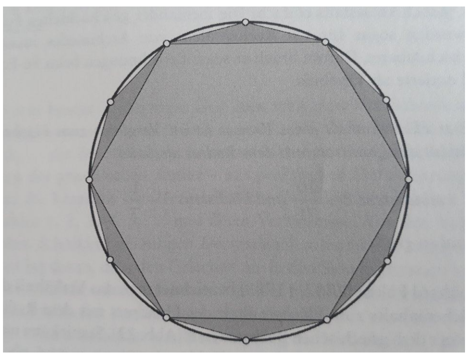

Abbildung 16: Annäherung der Kreisfläche durch ein eingeschriebenes Zwölfeck, nach [22, Abb. 21]

Es gibt jedoch noch viel mehr Möglichkeiten Erfahrungen zum Grenzwertprozess propädeutisch aufzubauen. Die spielerischen Auseinandersetzungen „(Stamm-)brüche unterbieten“ und „Fuchsen“ seien nach [1, S. 3] an dieser Stelle noch vorgestellt.
Unter dem Titel „(Stamm-)brüche unterbieten“ wird die Arbeit mit dem Zahlenstrahl und dessen Grenzen 0 und 1 verstanden, bei der Schülerinnen und Schüler versuchen sollen ausgehend von der Zahl 1 (Stamm-)Brüche zu finden, die immer kleiner werden. In der Literatur wird bereits vorgesehen ausschließlich mit Stammbrüchen zu arbeiten. Um der Bearbeitung der Aufgabe mehr Raum zu lassen, kann die Anweisung jedoch bloß auf Brüche reduziert werden, wodurch auch Bruchzahlen ohne Eins im Zähler möglich wären.
Bei dieser Unterrichtssequenz soll nicht nur ein kleinerer Bruch genannt werden, sondern dieser auch graphisch am Zahlenstrahl situiert werden. Es soll auf Seiten der SchülerInnen die Erkenntnis geweckt werden, dass immer kleinere Brüche gefunden werden können, die aber trotzdem einen positiven Wert haben. Durch diese ikonische Darstellung wird im Laufe der Erarbeitung immer klarer, dass eine Annäherung an die Zahl 0 stattfindet, sie aber nie erreicht wird. Die Brüche werden also unendlich klein.

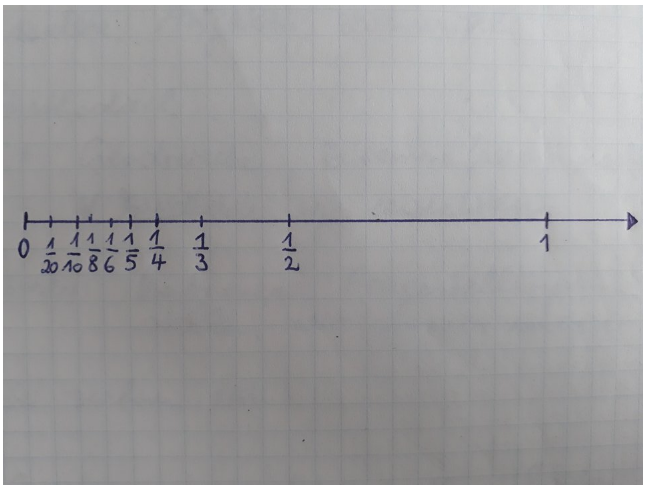

Abbildung 17: Stammbrüche unterbieten- exemplarische graphische Veranschaulichung, eigene Darstellung

Das Spiel mit dem Titel „Fuchsen“ erfordert speziellere Rahmenbedingungen. Es werden eine freie Wand, ausreichend Platz vor der Wand, ein Tixo und eine Schere für die Festlegung der Startlinie und ausreichend Münzen (z.B.: mit dem Wert 5 Cent) benötigt. Jeder Spieler und jede Spielerin erhält eine 5 Cent Münze. Ziel ist es für die Schüler und Schülerinnen die Münze so weit als möglich an die Wand zu schießen, wobei die Wand nicht berührt werden darf. Münzen, die die Wand berühren sind verloren. Es gewinnt die Person, deren Münze am nächsten an der Wand liegt. Diese darf die anderen Münzen behalten. Mit der Frage: „Glaubst du, dass du noch näher an die Wand schießen kannst?“ sollen die Jugendlichen darauf aufmerksam gemacht werden, dass dies immer weiter möglich wäre. Theoretisch betrachtet wird auch hier wieder gezeigt, dass der Grenzwert (bildlich die Wand) tatsächlich (um nicht gegen die Spielregeln zu verstoßen) nicht erreicht wird.

Wie bereits erwähnt, sind die passenden Inhaltsbereiche zu diesem Thema sehr vielfältig und lassen einen großen Gestaltungsspielraum. Bei den Komplexitätsbereichen nach den Bildungsstandards bzw. den Richtlinien zur Standardisierten Reifeprüfung sind besonders die Teile K2-Herstellen von Verbindungen und auch K3-Einsetzen von Reflexionswissen betroffen. Als Handlungsbereiche sind einerseits H3-interpretieren (tabellarisch, grafisch oder symbolisch gegebene Zusammenhänge beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten) und andererseits H4-argumentieren/begründen (mathematische Vermutungen formulieren und begründen sehr passend.

In der Sekundarstufe II finden Grenzwerte besonders in der 6. und 7.Klasse Einklang im Lehrplan. Er wird nicht nur in der Fachmathematik, sondern auch in der Schule bei den Folgen eingeführt und im Weiteren bei den Reihen verwendet. Die Untersuchung von reellen Funktionen beinhaltet mit der Beachtung der Periodizität und möglicher Asymptoten ebenfalls Grenzwertaspekte. In der 7.Klasse bei der Differentialrechnung steht der Grenzwert im Fokus, da er für die Berechnung des Differentialquotienten und der Ableitung essentiell ist und in diesem Schuljahr unter Berücksichtigung der Stetigkeit konkretisiert wird. In der 8.Klasse AHS taucht er bei der Einführung in die Integralrechnung wieder auf.

9.2 Stetigkeit

Stetigkeit ist eine Eigenschaft, die Funktionen aufweisen können, aber nicht immer aufweisen. Wird von Stetigkeit gesprochen, wird in den meisten Fällen zuallererst versucht die Eigenschaft bildlich zu erklären. Dabei wird oft davon gesprochen, dass der Funktionsgraph lückenlos ist, also durchgängig gezeichnet werden kann. Dadurch verfügt eine Funktion sicher über keine Sprungstelle, wenn sie an jeder Stelle des Definitionsbereiches stetig ist. Wird innerhalb der reellen Funktionen $f(x) = x^2$ betrachtet, kann alleine durch diese Erklärung schon darauf geschlossen werden, dass $f(x)$ stetig ist ([26, S. 235]). Wie die Eigenschaft aber genau definiert wird, kommt bei diesem Beispiel nicht vor.
Hinter der Stetigkeit steckt noch viel mehr!
Dem starken Zusammenhang zwischen der Stetigkeit und dem Grenzwert soll in diesem Abschnitt Rechnung getragen werden.

Auffällig ist, dass sich bereits die Definitionen zur Stetigkeit stark voneinander unterscheiden. Je nach Zielgruppe werden Schwierigkeits- und Genauigkeitsgrad adaptiert. Um nicht nur von diesem Unterschied zu sprechen, soll dieser durch die Erwähnung der folgenden drei verschiedenen Definitionen auch tatsächlich greifbar werden.
Die Definitionen stammen aus [26, S. 235], [9, S. 212] und [16] und werden nun der Reihe nach angeführt:

Definition 21. Ist $x_0 \in \mathbb{D}$ und ist die Funktion f in einer Umgebung von x_0 definiert. Die Funktion f heißt stetig in x_0, wenn der Funktionsgrenzwert in x_0 existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt.
kurz: f ist in $x_0 \in \mathbb{D}$ stetig, wenn

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} f(x_0 - h) = f(x_0).$$

bzw.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0).$$

Definition 22. Man sagt die Funktion f sei an der Stelle ξ ihres Definitionsbereiches X stetig, wenn für jede Folge (x_n) aus X, die gegen ξ strebt, immer auch $f(x_n) \to f(\xi)$ konvergiert.

Definition 23. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^s$, $x_0 \in M$ und $f : M \to \mathbb{R}^r$ eine Funktion.

(1) Dann heißt f stetig in x_0, falls

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in M \text{ mit } |x - x_0| < \delta : \; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(2) Man nennt f stetig auf M, falls für jedes $x \in M$ die Funktion f stetig in x ist.

Entscheidend ist, dass die betroffenen Stellen im Definitionsbereich liegen müssen. Bei Definition 23 kommt deutlich heraus, dass die Umgebung der Stelle eine große Rolle spielt. Dasselbe ist später auch bei Definition 24 der Fall.
Im Gegensatz zur Folgenkonvergenz (Definition 10) kommt bei der Stetigkeit nach [16] noch δ hinzu. Dabei hängt δ natürlich von f, viel spannender aber von ε und x_0 ab. Wird ε kleiner gewählt, nimmt auch δ ab.
Im Gegensatz zur bekannten Grenzwertdefinition läuft der Index nicht gegen unendlich, der Abstand zwischen zwei Punkten geht gegen 0, wird also unendlich klein.

Die Stetigkeitseigenschaft sagt aus, dass sich bei einer minimalen Änderung des Arguments auch der Funktionswert nur geringfügig ändert. Dem widerspricht wieder das Vorkommen einer Sprungstelle, bei der sich der Funktionswert deutlich ändert.
Wenn Stetigkeit vorliegt, dürfen Grenzwertbildung und Funktionsauswertung vertauscht werden.

[11, S. 29] stellt vier Funktionsgraphen vor, anhand denen die häufigsten Kombinationen von erfüllter oder unerfüllter Stetigkeit und der Grenzwertexistenz aufgezeigt werden sollen.

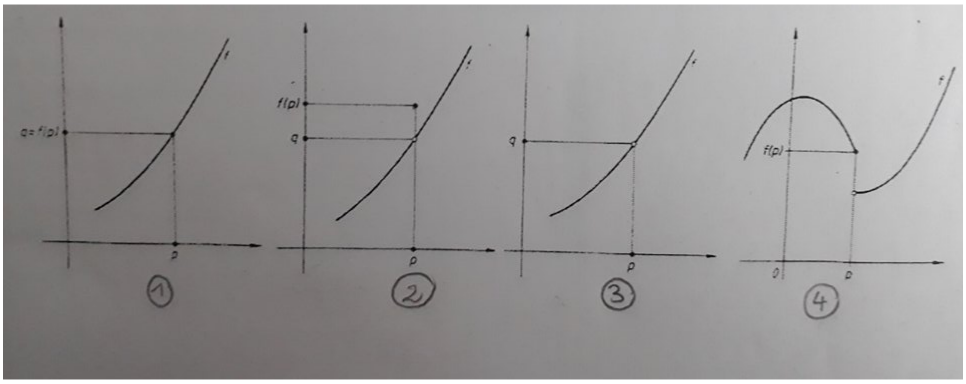

Abbildung 18: typische Beispiele im Zusammenhang mit Grenzwertexistenz und Stetigkeit, nach [11, S. 29]

Man betrachte jede Abbildung einzeln nacheinander. Die jeweilige Stelle auf der x-Achse wurde mit p gekennzeichnet, der zugehörige Funktionswert ist $f(p) = q$.
Abbildung 1 entspricht der Stetigkeitsdefinition. Der Grenzwert von $f(p)$ existiert und stimmt mit dem Funktionswert an der Stelle p überein: $\lim_{z \to p} f(z) = q = f(p)$.
f ist daher an der Stelle p stetig.
Bei Abbildung 2 hat f in p eine Ausnahmestelle. Der Grenzwert von f an der Stelle p existiert, unterscheidet sich aber von $f(p)$, wodurch f an der Stelle p unstetig ist.
In Abbildung 3 wird wiederum eine neue Situation dargestellt. In diesem Fall ist f an der Stelle p überhaupt nicht definiert. Der Grenzwert von f an der Stelle p existiert trotzdem. f ist an der Stelle p aber weder stetig noch unstetig, weil die Stetigkeit an Definitionslücken nicht untersucht wird.

Die 4. und damit letzte Abbildung zeigt die Situation, über die bereits zu Beginn des Kapitels geschrieben wurde. f besitzt in p eine Sprungstelle. Der Grenzwert von f an der Stelle p existiert nicht und f ist daher an der Stelle p unstetig.

Ein anderes Beispiel für eine Art der Unstetigkeit kann durch folgende Funktion (nach [11, S. 30]) erklärt werden:

Beispiel 4.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

f ist an der Stelle 0 definiert. Wie in Abbildung 19 ersichtlich, befindet sich bei 0 zwar keine Sprungstelle, trotzdem ist f an dieser Stelle unstetig. Auffällig ist, dass f in einer beliebig kleinen Umgebung von 0 die Funktionswerte 1 und -1 annimmt. Je näher man an die Stelle 0 kommt, desto stärker schwanken die Funktionswerte. Der Grenzwert von f an der Stelle 0 existiert somit nicht, f ist an dieser Stelle unstetig. Die Stelle wird Oszillationsstelle genannt.

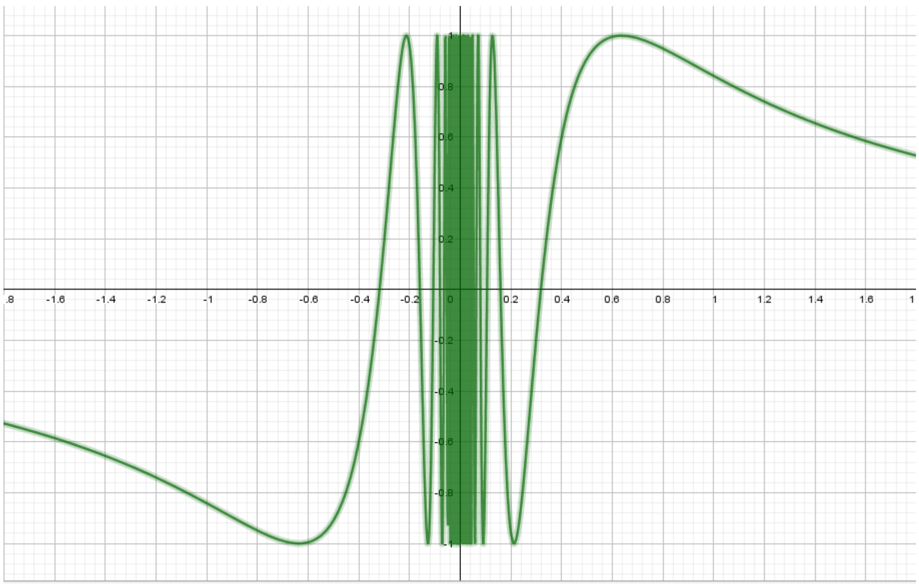

Abbildung 19: Beispiel 4 Oszillationsstelle als Unstetigkeitsstelle, eigene Darstellung

Für ein besseres Verständnis soll noch eine andere Stetigkeitsdefinition nach [9, S. 215] erwähnt werden, die den Umgang mit der $\varepsilon\delta$-Umgebung und den nächsten Zeilen erleichtern soll. Die Definition entspricht im ersten Teil im Wesentlichen jener von [16]. Nur die Deutung im unteren Teil der Definition wird neu eingeführt und die Notation wird leicht verändert.

Definition 24. Die auf X definierte Funktion f ist genau dann in x_0 stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass
für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$ immer $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ausfällt.
Oder völlig gleichbedeutend: f ist genau dann in x_0 stetig, wenn zu jeder ε-Umgebung V von $f(x_0)$ immer eine δ-Umgebung U von x_0 existiert, so dass $f(U \cap X) \subset V$ ist.

Der Charakter der Oszillationsstelle wurde durch das selbst erstellte Beispiel 4 intuitiv erfasst. [9, S. 241 f.] definiert und fasst die Eigenschaften der Oszillation formalmathematisch zusammen. Diese Ausführungen wurden etwas verändert.

Definition 25. Sei f eine beschränkte Funktion auf dem Intervall $[a,b]$ und T eine Teilmenge von $[a,b]$.

$\Omega_f(T) := \sup f(T) - \inf f(T) = \sup\{f(x)-f(y) : x,y \in T\} = \sup\{|f(x)-f(y)| : x,y \in T\}$ wird die Oszillation von f auf T genannt. Für feste $x \in [a,b]$ ist

$$\delta \mapsto \Omega_f(U_\delta(x) \cap [a,b])$$

eine wachsende (und nichtnegative) Funktion auf $(0,+\infty)$. $U_\delta(x)$ ist dabei die Delta-Umgebung von x.
Die nichtnegative Zahl $\omega_f(x)$, definiert durch:

$$\omega_f(x) := \lim_{\delta \to 0+} \Omega_f(U_\delta(x) \cap [a,b])$$

wird die Oszillation von f im Punkt x genannt.

Das Stetigkeitsverhalten einer Funktion kann mithilfe von $\omega_f(x)$ untersucht werden. Der folgende Satz gibt Auskunft darüber:

Satz 13. *Sei f eine beschränkte Funktion auf dem Intervall $[a,b]$. Dann ist f stetig in x_0, wenn $\omega_f(x_0)$ verschwindet, also $\omega_f(x_0) = 0$ gilt.*

Beweis. „$\Rightarrow$“:
Sei f stetig in x_0. Wähle $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall z \in V_\delta := U_\delta(x) \cap [a,b]$ immer $|f(z) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Für je zwei Punkte x, y aus V_δ ist also

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| \ < \ \varepsilon.$$

Wegen der Definition von Ω_f folgt $\Omega_f(V_\delta) \leq \varepsilon$ und daher auch $\omega_f(x_0) \leq \varepsilon$.
ε ist aber eine beliebige positive Zahl, wodurch $\omega_f(x_0) = 0$ gelten muss.
„$\Leftarrow$“:
Wähle $\omega_f(x_0) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0 : \Omega_f(V_\delta) \leq \varepsilon$. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall x \in V_\delta$.
Somit ist f stetig in x_0. □

Wende diesen Satz 13 auf Beispiel 4 an und verwende eine abgekürzte bzw. vereinfacht wirkende Berechnungsmethode für $\omega_f(x_0)$.
$\omega_f(x) = 0$, wenn $x \neq 0$. Wenn $x \neq 0$, ist $f(x)$ somit stetig.
Wie wir bereits vorher gesehen haben, ist f in $x = 0$ nicht stetig. Das ergibt sich auch unter Anwendung von Satz 13 durch folgende Berechnung:
Sei $x = 0$. Dann gilt $\omega_f(x) = \limsup_{n\to\infty} f(x) - \liminf_{n\to\infty} f(x) = 1 - (-1) = 2 \neq 0$.
Für diese Berechnung wird f als Funktionenfolge aufgefasst.
Das Ergebnis $\omega_f(x) \neq 0$ lässt direkt folgern, dass f an der Stelle $x = 0$ unstetig ist.
Eine 2.Möglichkeit dafür die Unstetigkeit von f in 0 zu zeigen, wäre ganz klassisch eine Folge zu finden, sodass f nicht gegen $f(0)$ konvergiert:
Betrachte $x_n := \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.
$f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \to 1 \neq 0 = f(0)$.
In diesem Fall können Grenzwertbildung und Funktionsauswertung also nicht vertauscht werden.

Wir legen den Begriff der Oszillation beiseite und beschäftigen uns wieder allgemeiner mit der Stetigkeit. Dazu gehört unter anderem zu wissen, welche Funktionstypen denn von Grund auf stetig sind.
[16] liefert:

Proposition 7. *Konstante Funktionen ($f(x) = c\ \forall x$) sind stetig.*

Beweis. Sei x_0 beliebig, sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $\delta = \varepsilon > 0$. Sei x so, dass $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. □

Aus den Grenzwertsätzen (Satz 7) folgt nach [9, S. 214 f.]:

Satz 14. *Seien die Funktionen f und g auf X definiert und in x_0 stetig, so sind auch die Funktionen $f + g$, $f - g$ und fg stetig. Ist überdies $g(x_0) \neq 0$, so ist die auf $\{x \in X : g(x) \neq 0\}$ definierte Funktion $\frac{f}{g}$ ebenfalls in x_0 stetig.*

Korollar 2. *Polynome ($p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$) sind stetig und rationale Funktionen $\left(f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ mit } p, q \text{ Polynome}\right)$ sind stetig auf $\{x : q(x) \neq 0\}$.*

Beweis. (Skizze) Zuerst wird die Stetigkeit der Polynome bewiesen. Dafür verwendet man den vorigen Satz 14 über die Stetigkeit algebraischer Verknüfungen und beweist durch vollständige Induktion.
Für den Beweis über die Stetigkeit rationaler Funktionen wird die Stetigkeit der Polynome p, q und derselbe Satz wie zuvor benötigt. □

Proposition 8. *Die Zusammensetzung $g \circ f$ stetiger Funktionen $g : X_2 \to \mathbb{R}$ und $f : X_1 \to X_2$ ist stetig.*

Beweis. Auch für diesen Beweis wird nicht viel benötigt. Aus $x \to x_0$ folgt $f(x) \to f(x_0)$ und danach auch $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \to g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$. □

Mit Hilfe der Stetigkeit kann der Grenzwertbegriff aus einem anderen Blickwinkel betrachtet und präzisiert werden. Bei der Definition zur Konvergenz einer Zahlenfolge (Definition 10) sprach man davon, was passiert, wenn der Index gegen unendlich geht. Im Laufe der letzten Seiten hat sich aber auch herausgestellt, dass der Grenzwert auch in Kombination mit der Wanderung einer Variable gegen einen bestimmten Wert betrachtet werden kann. Außerdem kann auch nur eine bestimmte Richtung von Interesse sein.
Alle diese Fälle sollen in der nächsten Definition nach [16] noch einmal zusammengefasst werden. Die nächsten Propositionen entstammen derselben Quelle.

Definition 26. Sei f eine Funktion mit dem jeweiligen Definitionsbereich und seien a eine beliebige untere und b eine beliebige obere Intervallgrenze.

(1) $f : (x_0, b) \to \mathbb{R},\ \alpha := \lim_{x \to x_0+} f(x)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \text{ mit } x_0 < x < x_0 + \delta :\ |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

(2) $f : (a, x_0) \to \mathbb{R},\ \alpha := \lim_{x \to x_0-} f(x)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \text{ mit } x_0 - \delta < x < x_0 :\ |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha := \lim_{x \to \infty} f(x)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists r\ \forall x \text{ mit } |x| > r :\ |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

(4) $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R},\ \alpha := \lim_{x \to +\infty} f(x)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists r\ \forall x \text{ mit } x > r :\ |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

(5) $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R},\ \alpha := \lim_{x\to-\infty} f(x)$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists r\ \forall x \text{ mit } x < r : |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Proposition 9. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existiert genau dann, wenn* $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$. *Dann gilt:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x).$$

In Worten: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existiert genau dann, wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert existieren und gleich sind.*

Beweis. „$\Rightarrow$“
Sei $\alpha := \lim_{x\to x_0} f(x)$. Nach der Definition dieses Grenzwerts sei

$$\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Danach wähle x jeweils so, dass es den obigen Definitionen von links- und rechtsseitigem Grenzwert (Definition 26) entspricht:
Wähle x so, dass $x_0 < x < x_0 + \delta$. Daraus folgt $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$, was bedeutet, dass $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \alpha$.
Analog für den linksseitigen Grenzwert: Wähle x so, dass $x_0 - \delta < x < x_0$. Daraus folgt $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$, was bedeutet, dass $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \alpha$. Somit stimmen alle diese drei Grenzwerte überein.
„$\Leftarrow$“
Setze nun $\alpha = \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$ und zeige, dass α dann mit $\lim_{x\to x_0} f(x)$ gleichzusetzen ist. Verwende wieder die Definitionen von oben: Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists \delta_1 > 0\ \forall x \text{ mit } x_0 < x < x_0 + \delta_1 : |f(x) - \alpha| < \varepsilon,$$

$$\exists \delta_2 > 0\ \forall x \text{ mit } x_0 - \delta_2 < x < x_0 : |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Um des Weiteren die Definition von $\lim_{x\to x_0} f(x)$ zu erfüllen, benötigen wir δ.
Setze $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Sei x so, dass $|x - x_0| < \delta$.
Betrachte nun zwei Fälle:
1.Fall: $x > x_0$. Das impliziert $x_0 < x < x_0 + \delta \le x_0 + \delta_1$. Daher $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.
2.Fall: $x < x_0$. Das impliziert $x_0 - \delta_2 \le x_0 - \delta < x < x_0$. Daher $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$.
Somit ist $\alpha = \lim_{x\to x_0} f(x)$. □

Nicht überraschend führt das nach [16] zu der folgenden Proposition. Präzisiere dann die uneigentlichen Grenzwerte von Definition 20 mithilfe von Definition 26 (siehe [16]).

Proposition 10. f *ist genau dann stetig in* $x_0 \in (a, b)$, *wenn*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$$

Definition 27.

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall r\ \exists \delta > 0\ \forall x \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x)| > r.$

(2) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall r\ \exists \delta > 0\ \forall x \text{ mit } x_0 < x < x_0 + \delta : f(x) > r.$

(3) $\lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall r\ \exists \delta > 0\ \forall x \text{ mit } x_0 - \delta < x < x_0 : f(x) < r.$

(4) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall r\ \exists s\ \forall x \text{ mit } x < s : f(x) < r.$

(5) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall r\ \exists s\ \forall x \text{ mit } x > s : f(x) > r.$

(6) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall r\ \exists s\ \forall x \text{ mit } |x| > s : f(x) > r.$

Der Vollständigkeit halber werden hier noch zwei bedeutende Sätze zur Stetigkeit nach [9, S. 223 ff.] und [16] angeführt: einerseits der Zwischenwertsatz von Bolzano, andererseits der Satz von Minimum und Maximum. Sie werden in etlichen Beweisen benutzt und dürfen daher nicht vernachlässigt werden. Da sie jedoch keinen großen Mehrwert für den Umgang mit der Unendlichkeit haben, wird nicht weiter auf sie eingegangen.

Satz 15. ***Nullstellensatz von Bolzano***
Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und ist überdies $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann besitzt f mindestens eine Nullstelle in (a, b). (Die Rollen von a und b können auch vertauscht sein.)

Satz 16. ***Zwischenwertsatz von Bolzano***
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann wird jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ angenommen.

Bemerkung 10. In der Literatur wird manchmal auch der Nullstellensatz von Bolzano als Zwischenwertsatz geführt. Klar ist jedoch, dass die beiden Sätze untrennbar miteinander verbunden sind. Wichtig ist auch, dass der Satz 15 in $\mathbb{Q}$ nicht erfüllt sein muss.

Satz 17. ***Satz von Minimum und Maximum***
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $m_1, m_2 \in [a, b]$ mit $f(m_1) \leq f(x) \leq f(m_2) \forall x \in [a, b]$. m_1 ist dabei das Minimum, m_2 das Maximum.

Dieser Satz sagt also aus, dass eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ein Minimum und ein Maximum besitzt. Minimum und Maximum werden verstärkt im Kapitel zur Differential- und Integralrechnung vorkommen.

Die letzten Definitionen, Sätze und Beweise dieses Kapitels stammen wiederum verändert aus [16].

weitere Stetigkeitsbegriffe

Definition 28.

(1) gleichmäßige Stetigkeit:
Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}^r$ heißt gleichmäßig stetig auf einer nichtleeren Menge M, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \forall x, y \in M \text{ mit } |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(2) Lipschitz-Stetigkeit:
Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit I als ein Intervall ($I \subseteq \mathbb{R}$) heißt Lipschitz-stetig, falls

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ mit } |f(x) - f(y)| \leq C \, |x - y| \; \forall x, y \in I.$$

C wird dabei Lipschitz-Konstante genannt und kann (um die Ungleichung zu erfüllen) als positiv angenommen werden.

Bemerkung 11. Ein wichtiger Unterschied von gleichmäßiger Stetigkeit zur allgemeinen Stetigkeit wie in Definition 23 ist, dass δ bei gleichmäßiger Stetigkeit nicht von der Stelle x_0 abhängt.
Aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt immer Stetigkeit, die Umkehrung (Satz 18) muss erst bewiesen werden.
Konstante Funktionen sind gleichmäßig stetig, genauso wie die Summe und Komposition oder eine Einschränkung auf eine Teilmenge von gleichmäßig stetigen Funktionen wieder gleichmäßig stetig ist.

Definition 29. Eine Zahlenmenge ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Ein Intervall ist somit der Definition von [9, S. 225] nach genau dann kompakt, wenn die Grenzen des Intervalls inbegriffen sind, das Intervall also der Form [a,b] entspricht.

Auch die letzten Sätze dieses Abschnitts zur Stetigkeit berufen sich auf [16] und [9].

Satz 18. *Sei f eine stetige Funktion mit kompaktem Definitionsbereich. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis. Dieser Beweis wird indirekt geführt. f sei also stetig auf eine kompakte Menge A, aber nicht gleichmäßig stetig auf diese Menge. Durch die Verneinung der gleichmäßigen Stetigkeit (begonnen mit nicht zu jedem $\varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$) existiert ein sogenanntes Ausnahme-ε, das ich mit ε_0 bezeichne. Also:

$$\exists \varepsilon_0 > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x_\delta, y_\delta \in A \text{ mit } |x_\delta - y_\delta| \text{ und } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Setze $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$ für $n \in \mathbb{N}$.
Dann $\forall n\, \exists x_n, y_n \in A$ mit $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.
Daraus erhält man zwei Folgen $(x_n), (y_n)$.
Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 12) gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $x_0 \in A$ mit $x_{n_k} \to x_0$.
y_{n_k} wird umgeschrieben, indem x_{n_k} addiert und subtrahiert wird:

$$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}).$$

Der zweite Summand $(y_{n_k} - x_{n_k}) \to 0$, da $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ und $\dfrac{1}{n}$ eine Nullfolge ist.
Der erste Summand x_{n_k} konvergiert gegen x_0. Daher $y_{n_k} \to x_0$.
Man fasse zusammen:
Zu $\dfrac{\varepsilon_0}{2}\, \exists \delta > 0\, \forall x$ mit $|x - x_0| < \delta : \; |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$.
$\exists K\, \forall k \geq K : \; |x_{n_k} - x_0| < \delta$ und $|y_{n_k} - x_0| < \delta$.
Sei $k \geq K$.

$$\varepsilon_0 \;\leq\; |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \;\leq\; |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_{n_k})| \;<\; \varepsilon_0.$$

Letzte Ungleichung ergibt sich aus der Addition von zwei Mal $\dfrac{\varepsilon_0}{2}$, da die jeweiligen Beträge durch diesen Wert abgeschätzt wurden.
$\varepsilon_0 < \varepsilon_0$ liefert aber einen Widerspruch.
Somit ist f entgegen der Annahme gleichmäßig stetig. □

Satz 19. *Sei f Lipschitz-stetig, dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \dfrac{\varepsilon}{C}$ mit C Lipschitz-Konstante.
Verwende die Definition dr Lipschitz-Stetigkeit.
Seien $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$. Dann ist $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|$.
Aufgrund der δ -Wahl wird mit C gekürzt und $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Daher ist f gleichmäßig stetig. □

9.3 Differentier- und Integrierbarkeit

Wie bereits öfters im Rahmen dieser Diplomarbeit erwähnt wurde, beschäftigen sich besonders die Differential- und die Integralrechnung mit der Unendlichkeit. Dabei kommen auch in großem Ausmaß bereits vorgestellte Begrifflichkeiten wie Grenzwert, Konvergenz oder Stetigkeit zum Tragen.
Differential- und Integralrechnung sind ohne Zweifel unverzichtbare mathematische Zweige, was sich auch im Lehrplan der Sekundarstufe II wiederspiegelt. Es sind neben der Stochastik die Themen mit größtem Augenmerk und hoher Relevanz für die standardisierte Reifeprüfung. Die 7. und die 8. Klasse der AHS (11. und 12. Schulstufe) widmen sich dieser Thematik direkt, während in den Stufen davor ein guter Grundstock dafür geschaffen werden soll (siehe [4]).

In diesem Kapitel werden Grundbegriffe wie Differentier- und Integrierbarkeit vorgestellt. Es wird Bezug auf bisherige Begriffe genommen, wodurch ein Netz an Verbindungen geschaffen werden soll. Wichtig dabei sind auch die Interpretationsmöglichkeiten, wodurch manche Beweise zugusten eines größeren Raumes für Verständnisfragen eingespart werden. Es wird jedoch versucht den interessierten Lesern Quellen für die genauere Auseinandersetzung zu liefern.
Es erscheint mir auch wichtig einen Einblick in schulbezogene Ansätze zu geben. Dementsprechend wird ein Blick auf die Einführung des Differentialquotienten und die Einführung des Integrals geworfen.

Wie in den bisherigen Abschnitten zur Standardanalysis, werden auch in diesem Kapitel größtenteils [9] und [16] herangezogen. Ändern sich die Quellen, werden sie explizit angegeben.

9.3.1 Differentierbarkeit

Wird von Differentier- oder Integrierbarkeit gesprochen, betrachtet man gezielt Veränderungen. Bei der Differentierbarkeit, auch Differenzierbarkeit geschrieben, geht es um die Veränderung des Funktionswertes als Resultat einer kleinen Veränderung des Arguments (x-Wert). Formal-mathematisch ist der Begriff nach [9, S. 261] und [16] folgendermaßen definiert:

Definition 30. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit einer Stelle $x_0 \in (a,b)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann wird f differenzierbar an der Stelle x_0 genannt, falls

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ oder gleichbedeutend } f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert $f'(x_0)$ bezeichnet die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Man nennt $f'(x)$ auch den Differentialquotienten. Dieser darf nicht mit dem Differenzenquotient verwechselt werden. Die beiden Quotienten sehen sich zwar sehr ähnlich, da der Differenzenquotient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ sich nur durch den fehlenden Limes vom Differentialquotienten unterscheidet. Trotzdem sind sie der Aussage nach klar zu unterscheiden!
Der Differenzenquotient beschreibt z.B.: die Veränderung über einen Zeitraum, während beim Differentialquotienten die Argumente unendlich nah zusammenwandern und eine Momentaufnahme im Fokus steht.
Falls nicht nur die erste Ableitung $f'(x_0)$, sondern auch weitere Ableitungen existieren, werden diese wie folgt bezeichnet: $f''(x_0) = (f')'(x_0), ..., f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$.
Dabei kann die jeweilige Ableitung von der Ursprungsfunktion aus oder von der vorigen Ableitung aus betrachtet werden. Daran schließt die folgende Definition an:

Definition 31.

(1) f heißt stetig differentierbar, falls f' stetig ist. (Abgekürzt: C^1, wobei C die Abkürzung für continuous ist und 1 für ein Mal steht.)

(2) f heißt (n-mal) differentierbar, falls $f^{(n)}$ überall existiert.

(3) f heißt (n-mal) stetig differentierbar ($C^{(n)}$), falls $f^{(n)}$ stetig ist.

(4) f heißt unendlich oft differentierbar, falls $f^{(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ existiert.

Nach diesen Definitionen stellt sich nun die Frage, ob möglicherweise eine der Eigenschaften Stetigkeit oder Differentierbarkeit die andere impliziert. Das ist auch tatsächlich der Fall.

Proposition 11. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine in x_0 differentierbare Funktion. Dann ist f stetig in x_0.*

Beweis. Für den Beweis wird die Differenz der Funktionswerte umgeschrieben:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Betrachte nun den Grenzwert dieses Ausdruckes mit dem Produktsatz der Grenzwertsätze.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Damit ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ und f stetig in x_0. □

Regeln zur Differentierbarkeit nach [9, S. 270 ff.] und [16]

Proposition 12. *Seien zwei Funktionen $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ gegeben, die differentierbar in $x_0 \in (a,b)$ sind.*

(1) Sind die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ist $(\alpha_1 f + \alpha_2 g)$ ebenfalls differentierbar in x_0 und die Summenregel lautet:

$$(\alpha_1 f + \alpha_2 g)'(x_0) = \alpha_1 f'(x_0) + \alpha_2 g'(x_0).$$

(2) Das Produkt $f \cdot g$ ist dann differentierbar und es gilt die Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

(3) Der Quotient $\dfrac{f}{g}$ ist differentierbar, wenn $g(x_0) \neq 0$. Ist diese Voraussetzung erfüllt, besagt die Quotientenregel, dass

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

(4) Die Kettenregel besagt: Sei $g : (a,b) \to (c,d)$ differentierbar in $x_0 \in (a,b)$ und $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ differentierbar in $g(x_0)$. Dann ist $f \circ g$ differentierbar in x_0 und es gilt:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0).$$

(5) *Eine bijektive Funktion $f : (a,b) \to (c,d)$ sei gegeben, $x_0 \in (c,d)$, also im Wertebereich. Als weitere Voraussetzung ist f differentierbar in $f^{-1}(x_0)$ und $f'(f^{-1}(x_0)) \neq 0$. Außerdem ist f^{-1} stetig in x_0. Dann ist f^{-1} differentierbar in x_0 und*

$$f^{-1}(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Beweis. An dieser Stelle wird nur eine Beweisskizze angeführt, da die Teilbeweise trivial und nicht von höherer Bedeutung sind.
Die Beweise für (1), (2) und (3) erfolgen alle ausgehend vom jeweils abzuleitenden Ausdruck. Es wird der Differentialquotient verwendet. Dabei werden zumeist der Bruch $\frac{1}{x - x_0}$ und auch andere Faktoren herausgehoben und im bisherigen Nenner werden gleichwertige Terme addiert und subtrahiert, damit wieder eine Zurückführung auf den Differentialquotienten möglich ist.
Für den Beweis von (4) wird eine Hilfsfunktion $\psi : (c,d) \to \mathbb{R}$ geschaffen, für die gilt:

$$\psi(y) := \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} & \text{, falls } y \neq g(x_0), \\ f'(g(x_0)) & \text{, falls } y = g(x_0). \end{cases}$$

Die Stetigkeit von ψ an der Stelle $g(x_0)$ folgt aus Proposition 11, da
$\lim_{y \to g(x_0)} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} = f'(g(x_0) = \psi(g(x_0))$. Also ist $\psi \circ g$ stetig in x_0.
Für beide Fälle der Fallunterscheidung gilt:

$$\psi(g(x))(g(x) - g(x_0)) = (f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0).$$

Für den Fall $y = g(x) \neq g(x_0)$ folgt das durch Umformung direkt aus der Definition von $\psi(y)$.
Für $y = g(x) = g(x_0)$ ergibt jeweils ein Faktor oder die gesamte Differenz 0.
Genauer: $\psi(g(x))\,(g(x) - g(x_0)) = 0 = (f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)$. Das nimmt man sich zur Hilfe, um letztendlich die Ableitung von $(f \circ g)(x_0)$ zu berechnen:

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\,\psi(g(x))\,(g(x) - g(x_0)) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,\psi(g(x)) = g'(x_0)\,\psi(g(x_0)) = g'(x_0)\,f'(g(x_0)).$$

Es fehlt noch (5) zu zeigen. Dafür wird vor allem mit der Stetigkeitsdefinition gearbeitet.
Sei $\varepsilon > 0$. Da $\frac{1}{x}$ stetig in $f'(f^{-1}(x_0))$ ist

$$\exists \eta_1\, \forall \varepsilon > 0 \text{ mit } |y - f'(f^{-1}(x_0))| < \eta_1 : \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \right| < \varepsilon.$$

Außerdem ist f' stetig in $f^{-1}(x_0)$. Also

$$\exists \eta_2 > 0\, \forall y \text{ mit } 0 < |y - f^{-1}(x_0)| < \eta_2 : \left| \frac{f(y) - f(f^{-1}(x_0))}{y - f^{-1}(x_0)} - f'(f^{-1}(x_0)) \right| < \eta_1.$$

f^{-1} ist ebenfalls stetig in x_0, somit

$$\exists \delta > 0 \text{ mit } |x - x_0| < \delta : |f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)| < \eta_2.$$

Die Stetigkeiten wurden also der Reihe nach aufgelöst. $f'(f^{-1}(x_0))$ besteht aus zwei Verknüpfungen.
Setze mit der Stetigkeit von f^{-1} in x_0 fort:
Sei x so, dass $0 < |x - x_0| < \delta : |f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)| < \eta_2$.
Bilde nun zuerst die Ableitung und wende dann die Funktion $\frac{1}{x}$ darauf an:

$$\Rightarrow \left| \frac{f(f^{-1}(x)) - x_0}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)} - f'(f^{-1}(x_0)) \right| < \eta_1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} - \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \right| < \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass auch f^{-1} differentierbar ist und

$$(f^{-1})'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

□

elementare Ableitungen nach [9, S. 273] und [16]

Proposition 13.

(1) $(e^x)' = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $(\log(x))' = \frac{1}{x} \ \forall x > 0 \in \mathbb{R}$

(3) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ *und* $x > 0$ *gilt* $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

(4) $(\sin x)' = \cos x$

(5) $(\cos x)' = -\sin x$

(6) Für $x \in \mathbb{R} \backslash \{n \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{2} + n\pi\}$ *gilt:* $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Beweis. (1)

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

(2)

$$(\log x)' \overset{\text{Inversenregel}}{=} \frac{1}{(e^x)'(\log x)} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

(3) Schreibe x^α unter der Verwendung von e zu $e^{\alpha \log x}$ um und leite erst dann ab.

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \log x})' \overset{\text{Kettenregel}}{=} e^{\alpha \log x} \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

(4)

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} \overset{\text{Additionstheoreme Sinus}}{=}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h - \sin h \cdot \cos x - \sin x}{h} = \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} =$$

$$\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

(5) Dieser Beweis erfolgt analog zu (4) mit den Additionstheoremen von Cosinus:

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

(6)

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \overset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{\cos x \cos x - \sin x \sin x}{\cos^2 x},$$

was sowohl $\frac{1}{\cos^2 x}$, als auch $1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = 1 + \tan^2 x$ entspricht. □

Monotonieverhalten und Krümmung Mit Hilfe der ersten und der zweiten Ableitung können das Monotonieverhalten und die Krümmung einer Funktion untersucht werden. Dadurch wird es auch möglich Extrem- oder Wendestellen zu bestimmen, falls diese existieren. In diesem Abschnitt werden diese wichtigen Zusammenhänge vorgestellt und Vorbereitungen für die besonders wichtige Regel von de l'Hospital getroffen. Als Quellen werden [9], [11] und [16] verwendet. Den Beginn macht eine adaptierte Definition zum Monotonieverhalten nach [11, S. 11], gefolgt von Sätzen nach [16].

Definition 32. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann nennt man:

(1) f streng monoton steigend in einem Teilintervall $J \subseteq I$, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in J : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

(2) f monoton steigend in $J \subseteq I$, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in J : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

(3) f streng monoton fallend in $J \subseteq I$, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in J : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

(4) f monoton fallend in $J \subseteq I$, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in J : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Satz 20. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und differentierbar auf einem offenen Teilintervall I^0. I ist ein zumindest auf einer Seite geschlossenes Intervall. Dann gelten:*

(1) Wenn $f'(x) > 0\ \forall x \in I^0$, dann ist f streng monoton steigend.

(2) Wenn $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I^0$, dann ist f monoton steigend.

(3) Wenn $f'(x) < 0\ \forall x \in I^0$, dann ist f streng monoton fallend.

(4) Wenn $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I^0$, dann ist f monoton fallend.

Beweis. An dieser Stelle wird nur (4) bewiesen. Alle anderen Teile erfolgen analog.
Seien $x < y \in I$. Nach dem Mittelwertsatz $\exists \xi \in (x, y)$ mit
$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{\leq 0} \underbrace{(y - x)}_{>0} \leq 0 \Rightarrow f(y) \leq f(x)$. Daher ist f monoton fallend. □

Definition 33. Sei $f : I^0 \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit $x_0 \in I^0$. Dann heißt x_0 lokale Extremstelle, wenn sich an dieser Stelle das Monotonieverhalten ändert.

Satz 21. *Sei $f : I^0 \to \mathbb{R}$ differentierbar in $x_0 \in I^0$. Falls x_0 ein lokales Extremum von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Es wird indirekt angenommen, dass $f'(x_0) \neq 0$. O.B.d.A. sei $f'(x_0) > 0$. Dann sind wegen der Definition von streng monoton steigend:
$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ und $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.
Das führt zu einem Widerspruch zu x_0 lokales Extremum und deshalb ist $f'(x_0) = 0$. □

Eine Extremstelle kann entweder eine Minimums- oder ein Maximumsstelle sein.
[11, S. 13] fasst den Unterschied noch einmal wie folgt zusammen. Der nächste Satz stammt wieder aus [16].

Definition 34. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit $J \subseteq I$.
Die Stelle m_1 heißt Minimumstelle von f in J, falls $\forall x \in J : f(x) \geq f(m_1)$.
Die Stelle m_2 heißt Maximumstelle von f in J, falls $\forall x \in J : f(x) \leq f(m_2)$.

Satz 22. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf I^0 differentierbar. Dann besitzt f ein Minimum m_1 und ein Maximum m_2 und $m_1, m_2 \in (I \setminus I^0) \cup \{x : f'(x) = 0\}$.*

Beweis. Durch den Satz von Minimum und Maximum, siehe Satz 17, ist garantiert, dass f ein Minimum m_1 und ein Maximum m_2 besitzt. Falls $m_1 \in I^0$, dann ist es ein lokales Minimum und $f'(x) = 0$. Falls $m_2 \in I^0$, dann ist es ein lokales Maximum und $f'(x) = 0$. □

Nach der Beschäftigung mit der ersten Ableitung, dem Monotonieverhalten und Extremstellen kann zur zweiten Ableitung übergegangen werden. Mit der zweiten Ableitung sind das Krümmungsverhalten und Wendestellen in Verbindung zu bringen. [11, S. 17] fasst die Charakteristik treffend zusammen, die nächste Definition und der Satz wurden aber unter Verwendung von [16] verändert. Dabei baut die folgende Definition auf den Vergleich von einem Funktionswert und einem Punkt auf der jeweiligenen Sekante auf. Der darauffolgende Satz behandelt die Verbindung von Monotonie- und Krümmungsverhalten.

Definition 35. Sei $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) Die Funktion f heißt in I linksgekrümmt oder konvex, wenn für alle $x_1 < x_2 \in I$ und alle $t \in (0, 1)$ gilt, dass $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

(2) Die Funktion f heißt in I rechtsgekrümmt oder konkav, wenn für alle $x_1 < x_2 \in I$ und alle $t \in (0, 1)$ gilt, dass $f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

(3) Eine Stelle $x_0 \in I$ heißt Wendestelle, von f, wenn sich an dieser Stelle x_0 das Krümmungsverhalten von f ändert, also $f((1-t)x_1 + tx_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

Satz 23. *Sei $f : I \subseteq \mathbb{R}$ stetig und zwei Mal differentierbar auf einem offenen Teilintervall I^0. Es sind äquivalent:*

1. *Die Funktion f ist konvex.*
2. *Es gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I^0$.*
3. *Es ist $f'(x)$ monoton steigend auf I.*

Für die Eigenschaft konkav würde im Satz 23 monoton steigend durch monoton fallend und $f''(x) \geq 0$ durch $f''(x) \leq 0$ ersetzt werden. Der Beweis kann in [16] nachgelesen werden.
Nach diesen wichtigen Zusammenhängen folgen wichtige Sätze zur Differentierbarkeit, die auch für den Beweis der Regel von de l'Hospital benötigt werden. Dieser Abschnitt bezieht sich wieder auf [9] und [16]. Begonnen wird mit dem Satz von Rolle, einem Spezialfall des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung nach [9, S. 279 f.], gefolgt von ebendiesem.

Satz 24. ***Satz von Rolle***
Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die differentierbar auf (a, b) ist. Stimmen die Intervallendpunkte überein, gelte also $f(a) = f(b) = 0$, dann gibt es mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Für den Beweis wird wieder Satz 17 verwendet. Es werden zwei Fälle unterschieden, bei denen die Extremstellen unterschiedlich angeordnet sind.
1.Fall: beide Extremstellen liegen am Rand
$f(m_1) = f(a) = 0 = f(b) = f(m_2)$. Es muss sich um eine konstante Funktion handeln, deren Monotonieverhalten werder steigend, noch fallend ist. Sei nun $\xi \in (a, b)$ beliebig, dann $f'(\xi) = 0$.
2.Fall: mindestens eine Extremstelle liegt im Intervallinneren.
Ist m_1 das Minimum und m_2 das Maximum, dann ist $f(m_1) < f(m_2)$ erfüllt. Liegt nun o.B.d.A. m_1 am Rand, muss m_2 bereits im Inneren liegen und umgekehrt. Wenn m_2 ein lokales Maximum ist, gilt dadurch $f'(m_2) = 0$. Setze $\xi = m_2$. Dann ist $f'(\xi) = 0$. □

Wie bereits erwähnt, ist der einfache Mittelwertsatz eine Erweiterung des vorigen Satzes von Rolle und wird auch mit dessen Hilfe bewiesen.

Satz 25. ***Mittelwertsatz der Differentialrechnung***
Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die differentierbar auf (a,b) ist. Dann gibt es mindestens ein $\xi \in (a,b)$, für das $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ gilt.

Beweis. In diesem Beweis wird der Satz von Rolle auf eine neu definierte Funktion $g(x)$ angewandt. Definiere $g(x) := f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
Die Summe stetiger Funktionen g ist stetig auf $[a,b]$.
Die Ableitung von $g(x)$ liefert $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Daher ist g differentierbar auf (a,b).
Betrachtet man die Funktionswerte von g am Rand des Intervalls, erhält man $g(a) = 0$ und $g(b) = 0$.
Nach dem Satz von Rolle existiert daher ein $\xi \in (a,b)$ mit $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Durch Umformung ergibt sich $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$. □

Es gibt aber auch noch eine Verallgemeinerung dieses Mittelwertsatzes, der deshalb auch 2. Mittelwertsatz genannt wird. Die Formulierung von diesem Satz und Beweis erfolgt wiederum nach [9, S. 284 f.] und [16].

Satz 26. ***Verallgemeinerter Mittelwertsatz***
*Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differentierbar auf (a,b).
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi),$$

was unter der Voraussetzung $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$ zu

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

führt.

Beweis. Der Beweis läuft sehr ähnlich zu jenem des einfachen Mittelwertsatzes ab.
Setze dieses Mal $h(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$, $h(x)$ ist stetig.
Es ist h differentierbar auf (a,b), da unter Verwendung der Produktregel $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x)$ gilt. Die Funktionswerte $h(a), h(b)$ verschwinden wiederum.
Wegen dem Satz von Rolle $\exists \xi \in (a,b)$ mit $0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$, woraus durch Umformung mit $g'(x) \neq 0 \, \forall x \in (a,b)$ folgt, dass

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

□

Nun wurden die wichtigsten Sätze für den Beweis der Regel von de l'Hospital erarbeitet. Worum handelt es sich bei der Regel von de l'Hospital, die auch als Satz von de l'Hospital bekannt ist?

Nach [9, S. 286] besteht die Problematik darin den Grenzwert $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ zu bestimmen, sobald Zähler als auch Nenner für $x \to a$ gegen 0 konvergieren. Ein weiterer Fall für Schwierigkeiten ergibt sich, wenn der Nenner gegen unendlich konvergiert.
Auch bei $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$ oder $x \to a^+$ oder $x \to b^-$ ist dies der Fall. Diese Varianten sind nämlich durch die bisherigen Regeln nicht behandelt worden. Die Regel von de l'Hospital erlaubt es bei Berücksichtigung der Voraussetzungen (siehe den folgenden Satz) durch Ableitung des Zählers und des Nenners den Grenzwert zu bestimmen. Wann das möglich ist und wie dieser Ansatz begründet ist, wird durch folgenden Satz und den zugehörigen Beweis klarer. Beide orientieren sich an [9, S. 286 ff.].

Satz 27. ***Die Regel von de l'Hospital***
Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differentierbar mit $a \in \mathbb{R}$. Weitere Voraussetzungen sind $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$ und die Existenz von $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Existenz soll hier meinen, dass der Grenzwert entweder eine reelle Zahl, aber auch $\infty, +\infty$ oder $-\infty$ sein kann.
Unterscheide zwei Aussagen:

(1) Falls $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, dann existiert $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(2) Falls $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$, dann existiert $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Der Beweis wird allgemein anfangen und allgemein enden, dazwischen wird aber passend zur obigen Formulierung der Regel von de l'Hospital eine Unterscheidung durch die Annahmen stattfinden. Die herangezogenen Intervalle sind besonders relevant.

Definiere zuerst $\alpha := \lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, +\infty)$.
Wähle eine beliebige Zahl $y_0 > \alpha$. Dieses y_0 existiert auf jeden Fall, da zumindest $+\infty$ die Aussage erfüllt. Sei y_1, für das $\alpha < y_1 < y_0$ gilt, ebenfalls gegeben.
Bestimme zu y_1 ein $x_1 \in (a,b)$, so dass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < y_1\ \forall x \in (a, x_1). \tag{01}$$

Bezeichne $x \neq u$ als zwei Punkte in (a, x_1).
Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert eine Stelle ξ zwischen x und u, für die gilt, dass

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Verwende (01) und erhalte

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} < y_1 < y_0\ \forall x, u \in (a, x_1). \tag{02}$$

Betrachte nun die Annahme (1) aus der Formulierung der Regel von de l'Hospital.
Aus (02) ergibt sich durch $x \to a$ wegen dem Wegfall von $f(x)$ und $g(x)$

$$\frac{f(u)}{g(u)} \leq y_1 \leq y_0\ \forall u \in (a, x_1). \tag{03}$$

Man wende sich nun der Annahme (2) zu und beachte die Änderung des Intervalls bei folgendem Schritt:
Bestimme zu einem festen $u \in (a, x_1)$ ein $x_2 \in (a, u)$:

$$\text{für } \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty : \ g(x) > \max\{0, g(u)\} \quad \text{und}$$

$$\text{für } \lim_{x \to a^+} g(x) = -\infty : \ g(x) < \min\{0, g(u)\} \ \forall x \in (a, x_2).$$

In beiden Fällen ist $\dfrac{g(x) - g(u)}{g(x)} \in (a, x_2) > 0$.
Multipliziere diesen Ausdruck mit der linken Ungleichung von (02), die wie bereits erwähnt unabhängig von der betrachteten Annahme ist. Es ergibt sich

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x)} < y_1 \frac{g(x) - g(u)}{g(x)}$$

und durch weitere Umformungen

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_1 - y_1 \frac{g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)} \ \forall \ x \in (a, x_2).$$

Für $x \to a$ konvergiert die rechte Seite dieser Ungleichung gegen y_1, weil die beiden Brüche gegen 0 gehen.
Da $y_1 < y_0$ existiert ein $x_3 \in (a, x_2)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \ \forall x \in (a, x_3). \tag{04}$$

Wenn nun (03) und (04) vergleichend betrachtet werden, kann festgestellt werden, dass sowohl mit (1) als auch mit (2) $\forall y_0 > \alpha \ \exists x_0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \ \forall x \in (a, x_0). \tag{05}$$

Wir erinnern uns zurück an das anfänglich gewählte Intervall für α. Dabei wurde $+\infty$ ausgeschlossen, was sich nun ändern soll.
Sei α daher in $(-\infty, +\infty]$.
Analog zum Anfang dieses Beweises gibt es demnach zu jedem $\tilde{y}_0 < \alpha$ ein $\tilde{x}_0$:

$$\tilde{y}_0 < \frac{f(x)}{g(x)} \ \forall x \in (a, \tilde{x}_0). \tag{06}$$

Komme nun wieder zur Zusammenführung der bisherigen Erkenntnisse.
(05) und (06) ermöglichen für endliches oder unendliches α die Fertigstellung des gesamten Beweises.
Falls α nämlich unendlich ist, bedeutet das nocheinmal zusammengefasst, dass $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ oder $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$. O.B.d.A. $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$.
Wegen der Definition 20 heißt das eben, dass

$$\text{für } \tilde{y}_0 > 0 \ \exists \tilde{x}_0 \ \forall x \in (a, \tilde{x}_0) : \ \frac{f'(x)}{g'(x)} > \tilde{y}_0.$$

Die Schritte dieses Beweises haben dann unter besonderer Berücksichtigung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes dazu geführt, dass ersichtlich bei (06) auch $\dfrac{f(x)}{g(x)} > \tilde{y}_0$, was

unter wiederholter Verwendung von Definition 20 $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ entspricht.
Dadurch war $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ für diesen Fall gezeigt.
Analog dazu verlief der Beweis für $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.
Durch (05) wurde auch hier $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ bewiesen.
Die Fälle für $\alpha = \infty$ sind somit gezeigt.
Für ein endliches α führt die Kombination der Abschätzungen mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes zur Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \tilde{x}_0 : \; \alpha - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \varepsilon \; \forall x \in (a, \tilde{x}_0).$$

Damit gilt auch für α endlich $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$ und die Regel von de l'Hospital ist bewiesen. □

Der Beweis der Regel von de l'Hospital ermöglicht es nun relativ einfach Folgerungen für die Grenzwerte der Form $\lim_{x\to b^-}$, $\lim_{x\to x_0}$, $\lim_{x\to +\infty}$, $\lim_{x\to -\infty}$ und $\lim_{x\to \infty}$ zu treffen. Um den vorher bewiesenen Satz aber gut einsetzen zu können, braucht es noch eine Proposition, die sich mit der Umformung eines Grenzwertes der Form $\lim_{x\to b^-}$, $\lim_{x\to +\infty}$ oder $\lim_{x\to -\infty}$ auf $\lim_{x\to a^+}$ beschäftigt. Die folgenden Propositionen und auch das Beispiel stammen aus [16].

Proposition 14.

(1) $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(b - x)$.

(2) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(3) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(-x)$.

Beweis. Führe nur den Beweis von (2) durch.
Sei $\alpha := \lim_{x\to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$. Der Grenzwertdefinition nach

$$\exists r > 0 \; \forall x \geq r : |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Setze $\delta := \dfrac{1}{r} > 0$ und sei $x \in (0, \delta)$. Dann ist $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\delta} = r$ und somit $\left| f\left(\dfrac{1}{x}\right) - \alpha \right| < \varepsilon$.
Betrachte den Fall $\lim_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.
Sei außerdem $s > 0 \in \mathbb{R}$, dann $\exists \delta > 0 \; \forall x \in (0, \delta) : f\left(\dfrac{1}{x}\right) > s$.
Setze $r = \dfrac{1}{\delta}$. Sei $x > r$.
Forme um und erhalte $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{r} = \delta$, was bedeutet, dass $\dfrac{1}{x} \in (0, \delta)$ und $f\left(\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\right) > s$.
Damit ist $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ gezeigt. □

Die genannten anderen Grenzwerte, die ableitbar aus der Regel von de l'Hospital sind, sollen in den folgenden Propositionen noch erwähnt werden, da erst dadurch der rechnerische Umgang mit all diesen Grenzwerten zweifelsfrei geklärt ist.

Proposition 15.

(i) $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differentierbar auf* (a, b), $b \in \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. *Außerdem existiert* $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(1) Falls $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$, *dann ist* $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) Falls $\lim_{x \to b^-} g(x) = \infty$, *dann ist* $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(ii) Seien $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, +\infty)$. *Außerdem existiert* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(1) Falls $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, *dann ist* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) Falls $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty$, *dann ist* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(iii) Seien $f, g : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (-\infty, b)$. *Außerdem existiert* $\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(1) Falls $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$, *dann ist* $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) Falls $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$, *dann ist* $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(iv) $f, g : (a, b) \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *differentierbar,* $x_0 \in (a, b)$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b) \backslash \{x_0\}$. *Außerdem existiert* $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(1) Falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, *dann ist* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) Falls $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$, *dann ist* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(v) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differentierbar,* $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. *Außerdem existiert* $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(1) Falls $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$, *dann ist* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) Falls $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$, *dann ist* $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis. Die Beweise für (i), (ii) und (iii) ergeben sich leicht durch Rückführung auf Proposition 14.
Für den Beweis von (iv) wird $\lim_{x \to x_0}$ durch $\lim_{x \to x_0^-}$ ersetzt und dann wird das bewiesene (i) verwendet.
Der Beweis (v) baut auf (ii) auf und benutzt $\lim_{x \to +\infty}$ statt $\lim_{x \to \infty}$.
Das ist deshalb möglich, weil für die Existenz von $\lim_{x \to x_0}$ und $\lim_{x \to \infty}$ der jeweilige linksseitige und der zugehörige rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen müssen und der Grenzwert dann eben diesen beiden entspricht. □

Beispiel 5. Regel von de l'Hospital Bestimme $\lim_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{\log(1+x)}$.
In Gedanken wird für $x = 0$ gesetzt, wodurch „$\frac{0}{0}$" enstehen würde. Das erinnert bereits an die Regel von de l'Hospital. Wende also die Regel von de l'Hospital und die Kettenregel an.

$$\lim_{x\to 0} \frac{7^x - 1}{\log(1+x)} = „\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{7^x \log 7}{\frac{1}{1+x} \cdot 1} = \lim_{x\to 0} (x+1)\, 7^x \, \log 7 = \log 7.$$

Natürlich würden noch deutlich mehr wichtige Sätze zur Differentierbarkeit existieren. Ziel ist es aber nicht diese thematischen Schwerpunkte der Analysis innerhalb dieser Diplomarbeit vollständig auszuschöpfen, sondern die Bereiche vorzustellen, in denen die Unendlichkeit entweder versteckt im Hintergrund besteht oder aktiv im Vordergrund zur Berechnung verwendet wird.

Werden die Grenzen der eindimensionalen Analysis hin zur mehrdimensionalen reellen Analysis überschritten, ändern sich bisher bekannte Definitionen, Propositionen und Sätze. Nach [18] liegen metrische Räume dann allen Ausführungen zu Grunde. Konnte die Stetigkeit im Eindimensionalen noch anhand von Geraden untersucht werden, sind es im Mehrdimensionalen schon Kurven. Auch die Differentierbarkeit muss im Mehrdimensionalen anders behandelt werden. Wurde beispielsweise im Eindimensionalen die Differentierbarkeit auf einem offenen Intervall betrachtet, sieht man sich im Mehrdimensionalen die Differentierbarkeit auf offenen Mengen an. Mit der Erhöhung der Dimension werden partielle Ableitungen und Richtungsableitungen relevant. Es stellen sich Fragen zur Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen und Matrizen gewinnen an Bedeutung.
Vergleiche beispielsweise die Definition 30 zur Differentierbarkeit im Eindimensionalen mit folgender im Mehrdimensionalen aus [18]:

Definition 36. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^s$ offen, $x_0 \in U, f : U \to \mathbb{R}^r$ eine Funktion.
Dann heißt f differentierbar in x_0, falls es eine lineare Abbildung $df_{(x_0)} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ gibt, sodass $\lim_{x\to x_0} \dfrac{|f(x) - f(x_0) - df_{(x_0)}(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$.
Man nennt $df_{(x_0)}$ die erste Ableitung von f an der Stelle x_0.

Falls f im Mehrdimensionalen in x_0 differentierbar ist, entspricht die Ableitung einer Matrix mit Einträgen, die sich aus der Auswertung der jeweiligen partiellen Ableitungen an x_0 ergeben.

Natürlich werden die Zusammenhänge durch Dimensionserhöhung komplexer, wodurch Erweiterungen und Präzisierungen der Erkenntnisse aus der eindimensionalen Analysis notwendig sind. Sätze wie der Satz über die inverse Funktion haben im Mehrdimensionalen einen größeren Stellenwert als im Eindimensionalen. Warum wird das an dieser Stelle erwähnt? Die Gedanken des unendlich Kleinen und unendlich Großen bleiben selbstverständlich auch im Mehrdimensionalen erhalten, wenn auch in verändertem Kontext oder unter anderen Voraussetzungen. An manchen Stellen kommt sogar das Konstrukt des Unendlichdimensionalen ins Gespräch. [10, Reich der Dimensionen] beschäftigt sich mit der Problematik sich eine höhere Dimensionenanzahl als bekannt vorzustellen. Menschen kennen nur eine Welt, die auf drei Dimensionen aufbaut. Wird nun gedanklich die Dimensionsanzahl erhöht, entstehen Probleme in der Vorstellung. Wie soll ein 4-dimensionaler Raum aussehen? Spinnt man diese Fragestellung weiter kann auch die Existenz eines möglicherweise unendlichdimensionalen Raumes interessant werden. Fakt ist, dass kein Mensch sich einen Raum mit derart vielen Dimensionen vorstellen kann und auch nicht bewiesen ist, ob es mehr als 3 Dimensionen gibt. Es ist aber dennoch möglich damit zu rechnen! Durch dieses Beispiel wird wieder die Abstraktheit des Unendlichkeitsbegriffes deutlich.

Bevor jedoch zu weit philosophiert wird, soll wieder der Blick auf etwas mathematisch Bekanntes gerichtet werden, was eng mit der zuvor thematisierten Differentierbarkeit zusammenhängt: die Integrierbarkeit.

9.3.2 Integrierbarkeit

Die Differentierbarkeit ist untrennbar mit der Integrierbarkeit verbunden.
[11, S. 6] beschreibt den Zusammenhang wie folgt:
„Durch den Prozess des Differentierens wird einer reellen Funktion f eine Funktion f' zugeordnet; durch das Bilden der Stammfunktion wird dieser Prozess rückgängig gemacht.“
Interessant ist hierbei, dass die Stammfunktion als Umkehrung genannt wird und nicht die Integration als allgemeiner Begriff. Begründet werden kann dies dadurch, dass es zwei populärere Varianten gibt zu integrieren. Einerseits die unbestimmte Integration, die mit der Bildung von Stammfunktionen übereinstimmt, und andererseits die bestimmte Integration, die auf den Begriff des Riemann-Integrals aufbaut. In diesem Kapitel werden beide Integralarten vorgestellt. Dabei wird Wert auf deren Eigenschaften und Rechenregeln gelegt. Die wichtigsten Sätze der Differential- und Integralrechnung werden ebenfalls behandelt. Besonders wichtig wird es aber sein den Aspekt der Annäherung hervorzuheben, da genau dieser den bedeutenden Brückenschlag zur Unendlichkeit darstellt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten sich dem Integral zu nähern. Manche AutorInnen wie [9] oder [11] setzen bei den Stammfunktionen an, [17] beginnt beim Riemann-Integral. Beide Ansätze haben zweifelsfrei ihre Berechtigung. Der Beginn beim Riemann-Integral hat den Vorteil, dass das Grundkonzept dann bereits bekannt ist und die Stammfunktion danach ohne viel Aufwand mitgeliefert wird. Am Anfang den Begriff der Stammfunktion zu thematisieren, unterstützt hingegen den nahtlosen Übergang zum neuen Thema. Dabei kann direkt bei der bereits bekannten Ableitung angesetzt werden. Als angehende Lehrerin ist mir der didaktische Hintergrund besonders wichtig. Deshalb werde ich mit dem unbestimmten Integral beginnen. Die wichtigeren Zusammenhänge mit der Unendlichkeit werden aber erst beim Riemann-Integral klar werden. Die erste Definition stammt von [11, S. 1].

Definition 37. Sei f eine reelle Funktion. Eine Funktion F heißt unbestimmtes Integral oder Stammfunktion von f, wenn $F' = f$. Man schreibt auch $F(x) = \int f = \int f(x)\,\mathrm{d}x$

Bemerkung 12. An dieser Stelle ist es wichtig anzumerken, dass es nicht die eine Stammfunktion zu finden gibt. Wurde bereits eine Stammfunktion gefunden, unterscheidet sich eine andere Stammfunkton von ihr um bloß eine Konstante und Konstanten gibt es bekanntlich unendlich viele. Ist der Definitionsbereich von f ein Intervall, so unterscheiden sich zwei Stammfunktionen von f um eine Konstante ([11, S. 1]).

Auf welche Art und Weise können Stammfunktionen gebildet werden? Welche Maßnahmen sind anwendbar? Diese Fragestellungen werden im nächsten Schritt nach [9, S. 439] und [17] beantwortet. Sie ergeben sich leicht durch Ableitung der rechten Gleichungsseite.

Integrationsregeln

Proposition 16. *Seien f, g reelle, auf einem Intervall definierte und stetig differentierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.*

(1) Summenregel:
Ist F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g. Dann ist $F + G$ auch eine Stammfunktion von $f + g$: Es gilt

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

(2) Regel vom konstanten Faktor:
Ist F eine Stammfunktion von f, so ist $c \cdot F$ eine Stammfunktion von $c \cdot f$. Es gilt:

$$\int (c \cdot f) = c \cdot \int f.$$

(3) lineare Substitution:

$$\int f(\alpha \cdot x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4) Produktregel oder partielle Integration:

$$\int (f \cdot g')(x)\,\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f' \cdot g\,\mathrm{d}x.$$

(5) Kettenregel oder Substitution:

$$\int (f \circ g)\, g'\,\mathrm{d}x = F \circ g \Leftrightarrow \int f(g(x))\, g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)).$$

Für diese Regel ist es relevant, dass die Definitionsbereiche von f und g wie bei Proposition 12,(4) zusammenpassen.

Eine weitere Integrationsmethode ist die Partialbruchzerlegung. Sie wird bei der Integration von rationalen Funktionen angewandt. Dabei wird die rationale Funktion, hier $f(x) = \dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ genannt, in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt. Das sieht dann beispielsweise für Polynome p_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ wie folgt aus: $f(x) = p_3(x) + \dfrac{p_4(x)}{p_2(x)}$.
Der Grad, also der höchste Exponent des Polynoms ist für p_4 kleiner als jener von p_2.
Es kann für $f(x)$ eine Stammfunktion gefunden werden, wenn Stammfunktionen der Partialbrüche gebildet werden können.

elementare Stammfunktionen nach [9, S. 436 f.] und [17]

Proposition 17.

(1) $\int c\,\mathrm{d}x = cx\ \forall x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$ *konstant.*

(2) $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
Die Intervalle unterscheiden sich nach dem Wert von α. Für $\alpha \in \mathbb{N} : (-\infty, +\infty)$, für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} : (0, +\infty)$ und für $\alpha \in \mathbb{Z} < -1 : (-\infty, 0), (0, +\infty)$.

(3) $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(4) $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|\ \forall x > 0 \in \mathbb{R}$.

(5) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(6) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(7) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \arctan x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(8) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x\ \forall x \in (-1, 1)$.

Die Beweise dafür erfolgen ebenfalls durch Differenzierung.

Das Riemann Integral Bisher haben wir uns nur mit der ganz allgemeinen Stammfunktion beschäftigt, jedoch noch keine konkreten Intervalle betrachtet. Gehe nun über zu tendentiell schwierigeren Begrifflichkeiten und Zusammenhängen - dem Riemann-Integral und den zugehörigen Sätzen, Beweisen und Deutungen.
Der Aufbau dieses Abschnittes orientiert sich an [16], während die jeweiligen Sätze und Beweise wiederum aus [9], [17] und an einzelnen Stellen aus [11] stammen.

Für den Begriff des Riemann-Integrals werden einige bisher unbekannte Begriffe wie Zerlegung, Ober-und Untersumme und Riemann-Summe benötigt, die daher zuerst nach [17] definiert werden müssen. Ziel davon ist es ein Intervall immer feiner zu unterteilen.

Definition 38. Partition
Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall.
Dann nennt man $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ eine Partition oder Zerlegung von $[a, b]$, wobei $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ gelten muss.
Die Menge aller Partitionen wird als $\mathcal{P}$ bezeichnet.
P_2 wird eine Verfeinerung von P_1 genannt, wenn $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ und $P_1 \subseteq P_2$. Verfeinerung bedeutet hierbei, dass die Menge P_2 mehr Elemente enthält als P_1 und das Intervall durch P_2 in mehrere Teilintervalle zerlegt werden kann.
Falls $P \in \mathcal{P}$ mit $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, dann nennt man $\tilde{P} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n\}$ Zwischenwerte für P, falls $\forall j \in \{1, 2, 3, ..., n\} : \tilde{x}_j \in [x_{j-1}, x_j]$.

Definition 39. Riemann-Summe
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ eine Partition und $\tilde{P} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n\}$ seien Zwischenwerte zu P.
Dann wird $S(f, P, \tilde{P}) = \sum_{j=1}^{n} f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1})$ die Riemann-Summe von f bezüglich P und $\tilde{P}$ genannt.
In Worten bedeutet das also, dass die Riemann-Summe das Produkt der Funktionswerte an Stelle der Zwischenwerte und der Intervallsabstände, in denen die Zwischenwerte liegen, ist. Oft wird in der Definition auch $\triangle\, x_j$ statt $x_j - x_{j-1}$ verwendet.

Die Abbildung 20 zeigt wie die Vorstellung der Riemann-Summe aussehen könnte. Dabei bezeichnet $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ wieder eine Partition P und $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ die zugehörigen Zwischenwerte. Die jeweiligen Rechtecke stellen die einzelnen Summanden der Riemann-Summe dar, also in diesem Fall das Produkt $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.
$f(\xi_k)$ steht beispielsweise für die Höhe eines Rechteckes an der Stelle ξ, während der Abstand zwischen x_{k-1} und x_k alias $(x_k - x_{k-1})$ die Breite des Rechtecks ist.

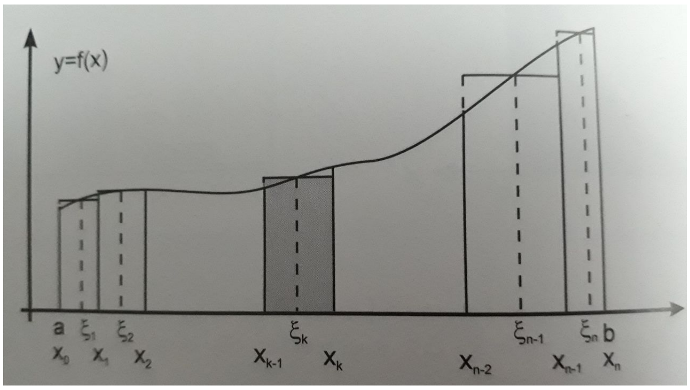

Abbildung 20: Die Riemann-Summe, nach [26, Abb. 8.1.]

Definition 40. Ober- und Untersumme
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ eine Partition.

(1) Man nennt $\overline{S}(f,P) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x))}_{M_j} (x_j, x_{j-1})$ Obersumme von f bezüglich P.

(2) Man nennt $\underline{S}(f,P) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x))}_{m_j} (x_j, x_{j-1})$ Untersumme von f bezüglich P.

Gut vorstellbar ist anhand der Abbildung 20 auch wie die Ober- und die Untersumme aussehen würden. Die jeweiligen Summanden der Unter-Summe würden sich wie folgt ergeben: Man betrachte wieder das Rechteck um den Zwischenwert ξ_k. Für die Untersumme wird $f(\xi_k)$ jedoch durch $f(x_{k-1})$ ersetzt, $(x_k - x_{k-1})$ bleibt als 2.Faktor bestehen. Der einzelne Summand der Obersumme wird mit den Faktoren $f(x_k)$ und $(x_k - x_{k-1})$ gebildet. Die Summanden der Untersumme sind damit kleiner als jene der Riemann-Summe und diese sind wiederum kleiner als die Summanden der Obersumme.
Damit sind alle Vorbereitungen für die Definition der Riemann-Integrierbarkeit getroffen.

Definition 41. Riemann-Integrierbarkeit
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists P_1 \in \mathcal{P} \; \forall P_2 \in \mathcal{P} \; P_2 \supseteq P_1 \text{ und } \forall \tilde{P} \text{ als Zwischenwerte für } P_2 :$$

$$|\alpha - S(f, P_2, \tilde{P})| < \varepsilon.$$

Man nennt dann $\alpha = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\tilde{x}_j)\,(x_j, x_{j-1})$ das Riemann-Integral auf $[a,b]$. Das Riemann-Integral ist somit der Grenzwert der Riemann-Summe.
Es kann auch durch die zwei folgenden Varianten definiert werden:

$$\exists \alpha \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall P \in \mathcal{P} \text{ mit Maschenweite } \sup_{j \in \{1,2,...,n\}} |x_j - x_{j-1}| < \delta :$$

$$\forall \text{ Zwischenwerte } \tilde{P} \text{ von } P : \; |\alpha - S(f, P, \tilde{P})| < \varepsilon.$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{P \in \mathcal{P}} \underline{S}(f,P) \text{ , falls } \inf_{P \in \mathcal{P}} \overline{S}(f,P) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \underline{S}(f,P).$$

Die 3.Definition des Riemann-Integrals erlaubt es im Vergleich zur ersten Definition auf α und eine der beiden Partitionen zu verzichten.

Diese Stelle ist wahrscheinlich am wichtigsten für das Grundverständnis des bestimmten Integrals. Der Übergang von der Riemann-Summe zum Riemann-Integral erfolgt, indem immer mehr Unterteilungen vorgenommen werden. Dadurch werden die Abstände zwischen zwei Elementen einer Partition natürlich immer kleiner. Das führt dazu, dass die Rechtecksflächen schrumpfen, die Rechtecke sich dafür aber für wachsendes n besser an den betrachteten Funktionsgraphen anschmiegen.
Die folgende Abbildung nach [26, 299] zeigt zwei Momentaufnahmen dieses Prozesses besonders gut. In Abbildung 21 werden die Werte des Integrals $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$ auf der linken Seite für 50 Unterteilungen und auf der rechten Seite für 100 Unterteilungen dargestellt. Wenn n nun gegen unendlich geht, werden die Abstände auf der $x-$Achse unendlich klein. Die diskrete Riemann-Summe wird durch das kontinuierliche Riemann-Integral abgelöst.

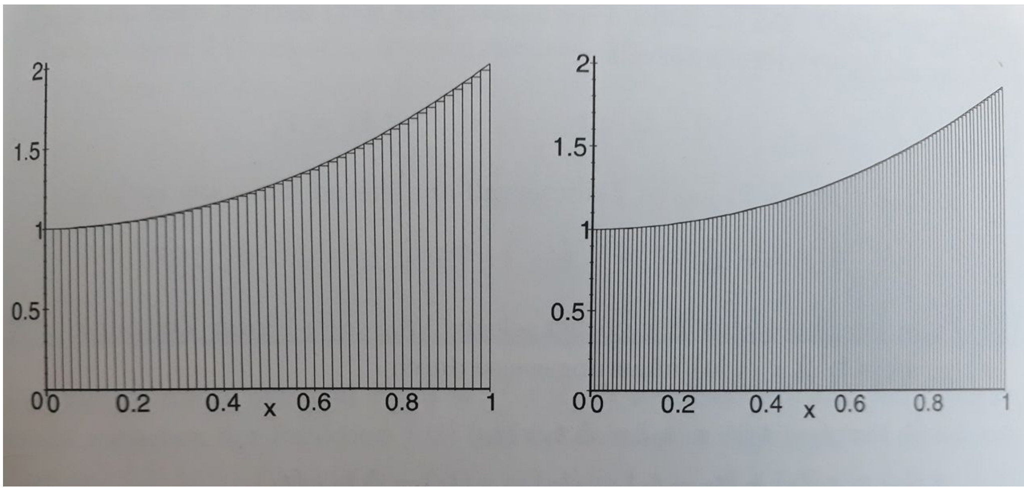

Abbildung 21: Der Weg zum Riemann Integral: die Erhöhung der Unterteilungsanzahl, nach [26, S. 299]

Es wird eine der ersten Anwendungsmöglichkeiten des Integrals erkennbar. Nach [26, S. 329 ff.] dient das Integral bereits durch seine Definition der Berechnung von Flächeninhalten. Dabei erfolgt die Begrenzung des Flächenstücks durch die Grenzen des Integrals, anders formuliert durch $x = a$ und $x = b$, sowie durch die $x-$Achse und die gegebene Funktion. Neben der Flächenberechnung sind weitere Anwendungen des Integrals die Volumsberechnung ausgehend von einer bekannten Querschnittsfläche- insbesondere aber auch von Rotationskörpern, sowie die Berechnung von Bogenlängen oder von Mantelflächeninhalten eines Drehkörpers.
Diese Berechnungen bauen allesamt auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf, der im Laufe dieses Kapitels detailliert behandelt wird.

elementare Eigenschaften Nachdem nun das Grundkonzept des Integrals bekannt ist, können wichtige Propositionen zu Eigenschaften des Riemann-Integrals oder wichtigen Implikationen aufgestellt werden. Nicht alle Propositionen werden im Zusammenhang mit dem Integral erwähnt und auch bewiesen. Die wichtigsten Neuerungen im Vergleich zum bereits vorgestellten unbestimmten Integral werden in den Fokus gerückt.
Dabei werden beispielsweise Monotonie, Beschränktheit, Zerlegung des Integrals oder gleichmäßige Konvergenz berücksichtigt. Ich verwende dafür [17] und [9, 79 Das Riemann'sche Integral].

Proposition 18. ***Monotonie***
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, wobei $f(x) \leq g(x) \, \forall x \in [a, b]$.
Dann gilt: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis. Zur Erleichterung des Beweises setze $\alpha = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\beta = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
Verwende die Definition des Riemann-Integrals:
Sei $\varepsilon > 0 \; \exists P_1 \; \forall Q \supseteq P_1 \; \forall \tilde{Q}$ (Zwischenwerte von Q): $|\alpha - S(f, Q, \tilde{Q})| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Das bedeutet $\alpha - \dfrac{\varepsilon}{2} < S(f, Q, \tilde{Q})$.
Analog dazu entspricht das zweite Integral der Definition nach:
$\exists P_2 \; \forall Q \supseteq P_2 \; \forall \tilde{Q}$ (Zwischenwerte von Q): $|\beta - S(g, Q, \tilde{Q})| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Das bedeutet $S(g, Q, \tilde{Q}) < \beta + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Verbinde nun beide Aussagen zu einer. Sei $Q \supseteq P_1 \cup P_2$ und $\forall \tilde{Q}$ (Zwischenwerte von Q):

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < S(f, Q, \tilde{Q}) = \sum_{j=1}^{n} f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} g(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1}) = S(g, Q, \tilde{Q}) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daher $\alpha < \beta + \varepsilon$ und $\alpha \leq \beta$, weil $f \leq g$ vorausgesetzt war. □

Die Linearität des Riemann- Integrals ist wie die Linearität der Stammfunktion (siehe Proposition 16) gegeben, wobei hierbei natürlich die Grenzen des Integrationsintervalls vermerkt sind.

Proposition 19. *Sei $f : [a, b] \to R$ Riemann-integrierbar, dann ist f beschränkt.*

Beweis. Setze $\alpha = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Wegen der Definition der Riemann-Integrierbarkeit

$$\exists P \in \mathcal{P}\ \forall Q \supseteq P\ \forall \text{ Zwischenwerte } \tilde{Q} \text{ zu } Q:\ |\alpha - S(f, Q, \tilde{Q})| < 1.$$

1 ist dabei frei gewählt. Forme um.

$$1 > |S(f, Q, \tilde{Q}) - \alpha| \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\geq} |S(f, Q, \tilde{Q})| - |\alpha|\ , \text{ also } |S(f, Q, \tilde{Q})| < |\alpha| + 1.$$

Für $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ und $\tilde{P} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n\}$ Zwischenwerte für P gilt also explizit $|S(f, P, \tilde{P})| < |\alpha| + 1$.
Beginne jetzt einen indirekten Beweis.
Angenommen f wäre unbeschränkt. Daher $\exists x \in [a, b]$ mit

$$|f(x)| > \frac{2}{\delta_0}(|\alpha| + 1) + \max_{j \in \{1,2,...,n\}} \{|f(\tilde{x}_j)|\} \text{ mit } \delta_0 := \min_{j \in \{1,2,...,n\}} |x_j - x_{j-1}|.$$

Ersetze nun gedanklich $\tilde{x}_j$ durch x. $\exists j$ mit $x \in [x_{j-1}, x_j]$. Dadurch verändern sich die Zwischenwerte von P und werden neu bezeichnet als $\widehat{P} := \{\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{j-1}, x, \tilde{x}_{j+1}, ..., \tilde{x}_n\}$.
Von zuvor weiß man, dass damit $|S(f, P, \widehat{P})| < |\alpha| + 1$.
In den nächsten Schritten wird nicht viel mehr gemacht als derselbe Ausdruck addiert und subtrahiert, die Dreiecksungleichung angewandt, herausgehoben oder abgeschätzt.

$$\begin{aligned} |\alpha| + 1 > |S(f, P, \widehat{P})| &= |S(f, P, \widehat{P}) - S(f, P, \tilde{P}) - (-S(f, P, \tilde{P}))| \geq \\ &\geq |S(f, P, \widehat{P}) - S(f, P, \tilde{P})| - |S(f, P, \tilde{P})| = \\ &= |f(x)(x_j - x_{j-1}) - f(\tilde{x}_j)(x_j - x_{j-1})| - \underbrace{|S(f, P, \tilde{P})|}_{|S(f,P,\tilde{P})| < |\alpha| + 1} > \\ &> |f(x) - f(\tilde{x}_j)|\,|x_j - x_{j-1}| - (|\alpha| + 1) \geq \\ &\geq (|f(x)| - |f(\tilde{x}_j)|)\,|x_j - x_{j-1}| - (|\alpha| + 1) \geq \\ &\geq \frac{2}{\delta_0}(|\alpha| + 1) \cdot \delta_0 - (|\alpha| + 1) = |\alpha| + 1. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch und f muss daher beschränkt sein. □

Im vorigen Beweis wurde zu wiederholtem Male die allgemeine Dreiecksungleichung verwendet. Im Laufe dieses Abschnittes wird aber auch die Dreiecksungleichung für Integrale von Bedeutung sein. Diese besagt nach [9, S. 475]:

Lemma 3. ***Dreiecksungleichung für Integrale***
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist $|f|$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Zeige zuerst, dass $|f|$ Riemann-integrierbar ist.
Definiere $\alpha = \int_a^b f$ und nutze die Definition des Riemann-Integrals: Sei $\varepsilon > 0$.
$\exists P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{P}$ mit $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$. Sei $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $x, y \in [x_{j-1}, x_j]$.
Unter Anwendung der allgemeinen Dreiecksungleichung gilt:

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_j - m_j,$$

also auch

$$\sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x)| \; - \inf_{y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(y)| \leq M_j - m_j$$

und letztendlich

$$\overline{S}(|f|, P) - \underline{S}(|f|, P) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x)| \; - \inf_{y \in [x_{j-1}, x_j]} |f(y)| \Big) (x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \; \leq \; \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \; \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass $|f|$ Riemann-integrierbar ist.
Da $-f, f \leq |f|$ ist nach Proposition 18 auch $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b f\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f|\,\mathrm{d}x$ und unter Betragsbildung $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. □

Verwende weiterhin [17].

Proposition 20. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ unterscheidet sich von f nur an endlich vielen Stellen.*
Dann ist auch g Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Die Intervalle werden um die Punkte, wo $g(x) \neq f(x)$ ist beliebig klein angesetzt. Damit sind auch die Unterschiede innerhalb der Riemann-Summe sehr klein und unter Verwendung des Grenzwertes inexistent. □

Proposition 21. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$. Falls f integrierbar auf $[a, c]$, sowie auf $[c, b]$ ist, dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$. Es gilt: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Beweis. Im Beweis wird mit der Definition der Riemann-Integrierbarkeit von f auf die beiden Intervalle begonnen und dann wird auf die Vereinigung der beiden Intervalle und der jeweiligen Partitionen hingearbeitet.
Setze zunächst $\alpha = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\beta = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Es soll durch diesen Beweis gezeigt werden, dass $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha + \beta$.
Sei $\varepsilon > 0$. Der Definition nach

$$\exists P_1 \in \mathcal{P}_{[a,c]} \, \forall Q \supseteq P_1 \, \forall \, \text{Zwischenwerte } \tilde{Q} : \, |\alpha - S_{[a,c]}(f, Q, \tilde{Q})| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und}$$

$$\exists P_2 \in \mathcal{P}_{[c,b]} \, \forall Q \supseteq P_2 \, \forall \, \text{Zwischenwerte } \tilde{Q} : \, |\beta - S_{[c,b]}(f, Q, \tilde{Q})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wie bereits erwähnt, sieht man sich nun die Vereinigung der Partitionen bezeichnet als $P = P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ an.
Sei $Q = \{x_0, x_1, ..., x_k, ..., x_n\} \in \mathcal{P}$, $Q \supseteq P$, $\tilde{Q}$ Zwischenwerte zu Q.
Darüber hinaus sei $Q_1 = \{x_0, ..., x_k\} \in \mathcal{P}_{[a,c]}$, $\tilde{Q}_1 := (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_k)$ Zwischenwerte zu Q_1 und $Q_2 = \{x_k, ..., x_n\} \in \mathcal{P}_{[c,b]}$, $\tilde{Q}_2 := (\tilde{x}_{k+1}, ..., \tilde{x}_n)$ Zwischenwerte zu Q_2.

Unter Berücksichtigung dieser Voraussetzungen gilt:

$$|\alpha+\beta-S(f,Q,\tilde{Q})| = \Big|\alpha+\beta-\sum_{j=1}^{n} f(\tilde{x}_j)(x_j-x_{j-1})\Big| =$$

$$= \Big|\alpha+\beta-\Big(\sum_{j=1}^{k} f(\tilde{x}_j)(x_j-x_{j-1}) + \sum_{j=k+1}^{n} f(\tilde{x}_j)(x_j-x_{j-1})\Big)\Big| =$$

$$= \Big|\alpha+\beta-\Big(S_{[a,c]}(f,Q_1,\tilde{Q}_1)+S_{[c,b]}(f,Q_2,\tilde{Q}_2)\Big)\Big| \overset{\textit{Dreiecksungl.}}{\leq}$$

$$\leq |\alpha - S_{[a,c]}(f,Q_1,\tilde{Q}_1)| + |\beta - S_{[c,b]}(f,Q_2,\tilde{Q}_2)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha+\beta$ und f ist integrierbar auf $[a,b]$. □

Es gibt auch zwei relevante Aussagen zum Zusammenhang zwischen Riemann-Integrierbarkeit und Stetigkeit, wobei ihre Beweise an dieser Stelle zugunsten anderer wichtiger Zusammenhänge ausgelassen werden. Für interessierte LeserInnen können sie in [9, S. 461] und [17] nachverfolgt werden.

Proposition 22. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f Riemann-integrierbar. Die Umkehrung gilt nicht!*

Proposition 23. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, dann ist f Riemann-integrierbar und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.*

Bemerkung 13. Bei punktweiser Konvergenz sind Grenzwert und Integral hingegen nicht vertauschbar.

Proposition 24. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, wobei $x_0 \in [a,b]$. Dann ist $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ stetig, sogar Lipschitz-stetig und dadurch auch gleichmäßig stetig.*

Bisher wurden nur Riemann-Integrale behandelt, für deren Grenzen a, b gilt, dass $a < b$. Nun soll auch der Umgang mit den anderen Fällen $a = b$ und $a > b$ thematisiert werden. Dafür und auch für die Definition und den Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung wird [17] herangezogen.

Definition 42. Sei $f : [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in [a_n, b_n]$ Riemann-integrierbar.

(1) Für $a < b$ gelte die bekannte Definition $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(\tilde{x}_j)(x_j, x_{j-1})$.

(2) Für $a = b$ ist $\int_a^a f = 0$.

(3) Für $a > b$ gilt $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Einer der wichtigsten Sätze der Differential- und Integralrechnung wird Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung genannt und muss auf Grund seines Stellenwertes auch in diese Diplomarbeit zwingend integriert werden. Dieser Satz ist nach [9, S. 451 f.] gerade deshalb derart bedeutend, weil dadurch der aufwendige Riemannsche Grenzprozess zur Berechnung eines gesuchten Integrals durch eine einfachere Rechenmethode ersetzen kann. Grundlegend dafür ist die Funktion f eine Stammfunktion auf dem betrachteten Intervall $[a,b]$ besitzen muss und diese auch berechenbar ist. Wie die Berechnung funktioniert wird durch folgenden Satz klar.

Satz 28. ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung***
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gelten:

(1) f ist Riemann-integrierbar.

(2) Für $x \in [a,b]$ definiere $F_0(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Dann ist $F_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differentierbar auf (a,b) und $\forall x \in (a,b)$ gilt: $F_0'(x) = f(x)$.

(3) Falls $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differentierbar auf (a,b) ist, sowie $\forall x \in (a,b)$ gilt: $F'(x) = f(x)$. Dann ist die Gleichung $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ erfüllt.

Beweis. Der Beweis wird in die drei Teile (1), (2) und (3) zerlegt, die der Reihe nach bewiesen werden und an manchen Stellen sogar aufeinander aufbauen.
(1) Nach Satz 17, dem Satz von Minimum und Maximum, ist f beschränkt. Sei $\varepsilon > 0$. Weil f stetig auf $[a,b]$ ist, ist f wegen Satz 18 auch gleichmäßig stetig.
Daher $\exists\, \delta > 0$, sodass $\forall x, y \in [a,b]$ mit $|y - x| < \delta : \; |f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Treffe nun die Vorbereitungen für die Bildung von Ober- und Untersumme, die für den Beweis der Riemann-Integrierbarkeit notwendig sind.
Wähle $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ so, dass $x_j - x_{j-1} < \delta \; \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$.
Wähle die Partition $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{P}$.
Sei j wie zuvor. Setze $M_j = \sup_{x \in [x_j, x_{j-1}]} f(x)$ und $m_j = \inf_{x \in [x_j, x_{j-1}]} f(x)$.
Seien zusätzlich $x, y \in [x_j, x_{j-1}]$.
Damit ist der Abstand $|y - x| \leq (x_j - x_{j-1}) < \delta$.
Deshalb ist $f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ und nach Umformung
$f(y) \leq f(x) + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \; \forall y \in [x_{j-1}, x_j]$, also gilt auch für das Supremum $\sup_{x \in [x_j, x_{j-1}]} f(x)$:
$M_j = \sup_{y \in [x_j, x_{j-1}]} f(y) \leq f(x) + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, was wiederum durch Umformung zu
$M_j - \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq f(x) \; \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$ führt und für $\inf_{x \in [x_j, x_{j-1}]} f(x)$ gilt:
$M_j - \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq \inf_{x \in [x_j, x_{j-1}]} f(x) = m_j$. Also ist $M_j - m_j \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Da f beschränkt ist, kann mit der Definition 40 gearbeitet werden. Durch Summation werden die Unter- und die Obersumme gebildet:

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{j=1}^{n} M_j\,(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} m_j\,(x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\,(x_j - x_{j-1}) \;\leq\; (M_j - m_j) \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

f ist deshalb Riemann-integrierbar und Teil (1) des Beweises ist abgeschlossen.

(2) F_0 ist stetig, da f nach Proposition 24 Riemann-integrierbar ist.
Sei $x \in (a,b)$. Verwende die Stetigkeitsdefinition.
Sei $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \; \forall y \in [a,b]$ mit $|y - x_0| < \delta : \; |f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Sei nun $y \in [a,b]$ so, dass $0 < |y - x| < \delta$.

$$\left|\frac{\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t}{y-x} - f(x)\right| = \left|\frac{\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t}{y-x} - \frac{f(x)(y-x)}{y-x}\right| =$$

$$= \left|\frac{\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)(y-x)}{y-x}\right| = \left|\frac{\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^y f(x)\,\mathrm{d}t}{y-x}\right| =$$

$$= \left|\frac{\int_x^y (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t}{y-x}\right| \overset{\textit{Dreiecksungl.f.Integrale}}{\leq} \frac{|\int_x^y |f(t)-f(x)|\mathrm{d}t\,|}{|y-x|} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}|y-x|}{|y-x|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Das bedeutet $\lim_{y\to x} \dfrac{\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t}{y-x} = f(x)$.
Es wird gezeigt, dass $F_0'(x)$ differentierbar ist und mit $f(x)$ übereinstimmt:

$$F_0'(x) = \lim_{y\to x} \frac{F_0(y)-F_0(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{\int_a^y f - \int_a^x f}{y-x} \overset{\text{Proposition 21}}{=} \lim_{y\to x} \frac{\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t}{y-x} = f(x).$$

Beginne nun mit (3).
Aus (2) ist bereits bekannt, dass $F_0(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ stetig und differentierbar auf (a,b) ist, da $F_0' = f$.
Es ist ebenso F stetig und $F' = f$ auf (a,b).
Schaffe die neue Funktion G aus F und F_0. $G(x) = F(x) - F_0(x)$, wobei G stetig ist und auf (a,b) gilt wegen der Summenregel: $G'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f - f = 0$.
Durch den Mittelwertsatz (Satz 25) ist $G = c$ mit $c \in \mathbb{R}$, wobei $F(x) = F_0(x) + c\ \forall x \in [a,b]$.

$$F(b) - F(a) = F_0(b) + c - (F_0(a) + c) = F_0(b) - F_0(a) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Damit ist auch die dritte und letzte Komponente des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bewiesen. □

Bereits der Begriff des Riemann-Integrals, benannt nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann, wäre ohne die Vorstellung des Unendlichen nicht möglich. Hierbei spielt das unendlich Kleine im Sinne der immer kleiner werdenden Rechtecke der Riemann-Summe genauso eine wichtige Rolle wie das unendlich Große bei der Anzahl der Unterteilungen. Diese beiden Komponenten zeichnen bekanntlich den Charakter der Infinitesimalrechnung aus.
Darüber hinaus bestehen aber noch weitere Möglichkeiten für die Auseinandersetzung mit der Unendlichkeit im Rahmen der Integralrechnung. Der Begriff der uneigentlichen Integrale erinnert bereits an die uneigentlichen Grenzwerte aus Definition 20. Auch bei den uneigentlichen Integralen spielt das Unendlichkeitssymbol wieder eine bedeutende Rolle. Im Vergleich zu den bisher vorgestellten Riemann-Integralen können bestimmte Integrale aber auch auf unendlichen Intervallen untersucht werden. Betrachte die zugehörige Definition nach [17] und [9, S. 480]. Dabei werden alle möglichen Intervallsformen (ausgenommen dem gänzlich geschlossenen Intervall) als Definitionsbereich berücksichtigt, um die bisher genannten Varianten zu vervollständigen.

Definition 43. uneigentliche Integrale
Die folgenden Integrale heißen konvergent, wenn die jeweiligen uneigentlichen Integrale bzw. die zugehörigen Grenzwerte existieren. Ansonsten wird das Integral divergent genannt.

(1) Sei $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann heißt $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent, wenn dieser Grenzwert existiert.

(2) Sei $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ mit $b \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist das zugehörige Integral wie folgt definiert: $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to-\infty} \int_r^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(3) Sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist das zugehörige Integral wie folgt definiert: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x$.

(4) Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist das zugehörige Integral wie folgt definiert: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to a^+} \int_r^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(5) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $c \in (a, b)$. Dann ist das zugehörige Integral wie folgt definiert: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Damit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, müssen sowohl $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, als auch $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergieren.

Bemerkung 14. Vergleiche Proposition 21 und Definition 43, (5). Bei letzterer ist f auf einem offenen Intervall definiert, während der Definitionsbereich von f bei Proposition 21 geschlossen ist. Obwohl $[a, b] > (a, b)$ sind die Berechnungsmethoden aber dennoch gleich. Wie ist das möglich?
Diese Erkenntnis lässt sich leicht aus Definition 42 ableiten. Im Endeffekt wurden nur die Integrale $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_b^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bei Definition 43, (5) vernachlässigt. Das ist deshalb irrelevant, weil bestimmte Integrale mit exakt derselben oberen wie unteren Grenze 0 ergeben.

Wie ist es jedoch möglich das bestimmte Integral zu berechnen, wenn einzelne Stellen im Inneren einer vermeintlich zusammenhängenden Menge (eines Intervalls in $\mathbb{R}$) nicht definiert sind? Das soll durch die folgende Definition, ebenfalls nach [17], beantwortet werden. Es handelt sich dabei um eine weitere Spezialisierung von Definition 43, (5).

Definition 44. Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $F \subseteq (a, b)$ ist eine endliche Menge und $f : (a, b)\backslash F \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.
Dann $\exists x_1 < x_2 < ... < x_n$ mit $F = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
Unter diesen Voraussetzungen definiert man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_n}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Diese Definition besagt also, dass nicht über Stellen hinwegintegriert werden darf, die nicht im Definitionsbereich liegen. Das ursprüngliche Integral muss in Teilintegrale zerlegt werden, wobei die nicht definierten Stellen die Grenzen darstellen. Wichtig ist auch, dass die Menge F, die alle diese nicht definierten Stellen umfasst, endlich ist. Würde sie unendlich viele Stellen umfassen, könnte das Integral nicht explizit berechnet werden.
Die obige Definition findet des Öfteren bei Integralen auf unendlichen Intervallen ihre Anwendung.
Ein Beispiel dafür ist das Integral $\int_0^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x$. Wir haben bereits bei Proposition 17, (2) gesehen, dass $\alpha = -1$ ein kritischer Wert in Bezug auf den Definitionsbereich ist. Das bestätigt sich auch in diesem Zusammenhang nach [9, S. 481].
Demzufolge konvergiert $\int_1^{+\infty} x^\alpha$ genau dann, wenn $\alpha < -1$ und $\int_0^1 x^\alpha$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > -1$. Das Integral über das gesamte Intervall ($\int_0^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x$) wird zur Untersuchung an der Stelle 1 in die zwei Teilintegrale $\int_0^1 x^\alpha$ und $\int_1^{+\infty} x^\alpha$ zerlegt.

In Folge wird ein erweitertes Beispiel zu den uneigentlichen Riemann-Integralen nach [17] vorgestellt.

Beispiel 6. Untersuche das Konvergenzverhalten des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} x^5 \,\mathrm{d}x$. Wird naiv ohne die Kenntnis der Definition 43, (5) gerechnet, kann das falsche Ergebnis $\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} x^5 \,\mathrm{d}x = \lim_{r\to+\infty} (\frac{x^6}{6})\Big|_{-r}^{r} = 0$ aufscheinen.
Bei Aufspaltung von $\int_{-\infty}^{+\infty} x^5 \,\mathrm{d}x$ in $\int_{0}^{+\infty} x^5 \,\mathrm{d}x$ und $\int_{-\infty}^{0} x^5 \,\mathrm{d}x$ ergibt sich aber etwas ganz Anderes. Das bestimmte Integral $\int_{0}^{+\infty} x^5 \,\mathrm{d}x$ divergiert nämlich, weil

$$\int_0^{+\infty} x^5 \,\mathrm{d}x = \lim_{x\to r^+} \int_0^r x^5 \,\mathrm{d}x = \lim_{x\to r^+} \frac{x^6}{6}\Big|_0^r = \lim_{x\to r^+} \frac{r^6}{6} = \infty.$$

Wie bereits erwähnt, konvergiert ein Integral nur, wenn beide Teilintegrale konvergieren. Das ist hier nicht der Fall. Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x^5 \,\mathrm{d}x$ divergiert, weil bereits eines der beiden Teilintegrale divergiert. Diese Zerlegung in zwei Teilintegrale ist notwendig, weil das betrachtete Intervall $(-\infty, +\infty)$ offen ist.
Wie im Absatz vor diesem Beispiel erläutert wurde, gibt es aber eine noch deutlich schnellere Methode um die Divergenz von $\int_{-\infty}^{+\infty} x^5 \,\mathrm{d}x$ festzustellen.
Für dieses Beispiel ist $\alpha = 5$. Damit existiert $\int_0^1 x^5 \,\mathrm{d}x$ zwar, weil $\alpha > -1$, $\int_1^{+\infty} x^5 \,\mathrm{d}x$ existiert hingegen nicht, weil $\alpha < -1$ nicht erfüllt ist.
Bereits aus diesen beiden Überlegungen hätte auf die Divergenz von $\int_0^{+\infty} x^5 \,\mathrm{d}x$ und damit auch auf jene von $\int_{-\infty}^{+\infty} x^5 \,\mathrm{d}x$ geschlossen werden können.

Eine allgemeinere Möglichkeit der Konvergenzuntersuchung kann durch den Majorantentest erfolgen. In diesem Abschnitt wird aber nur die Proposition nach [17] angeführt, da im Reihenkapitel unter Satz 37 der Beweis für die Reihenkonvergenz erfolgt und dieser analog für das bestimmte Integral zu führen ist.

Proposition 25. *Sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und auch $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ mit nichtnegativem $x \in \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar.*
Außerdem existiere $\int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x$ und $|f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in [a, b)$.
Wenn diese konvergente Majorante $\int_a^b g(x)$ gefunden wurde, konvergiert auch $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$.

Wir verlassen das Eindimensionale und richten den Blick auf die mehrdimensionale Integration. Für den Abschluss dieses Teilkapitels wurde [18] herangezogen.
Beginne wieder mit dem Zusammenhang zur Differentierbarkeit.

Proposition 26. *Sei $f : (a, b) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig und die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ sei stetig.*
Setze $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_c^d f\binom{x}{y} \,\mathrm{d}y$.
Dann ist F differentierbar und es gilt:

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\int_c^d f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mathrm{d}y\Big) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mathrm{d}y.$$

Auffällig ist bei dieser Proposition, dass der Definitionsbereich von f kein einfaches Intervall mehr ist, wie es im Eindimensionalen der Fall war. Bei der Wahl der Grenzen des Integrals muss also besser aufgepasst werden. Wie bereits am Ende des Kapitels zur Differentierbarkeit erwähnt wurde, müssen außerdem die partiellen Ableitungen berücksichtigt werden, da f eben nicht mehr nur von einer Variable abhängt, sondern wie in dieser Proposition gleich von zwei. Das erkennt man durch die Darstellung $f\binom{x}{y}$.

Im Mehrdimensionalen werden bisher unbekannte Fragen, wie jene nach der Vertauschbarkeit von Integralen gestellt. Sind mehrere Veränderliche vorhanden und mehrere Integrale gegeben, so findet de Satz von Fubini seine Anwendung.

Satz 29. ***Satz von Fubini***
Sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f\binom{x}{y} \,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f\binom{x}{y} \,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y.$$

Bei Stetigkeit darf also die Reihenfolge der Integrale geändert werden, ohne dass sich das Ergebnis ändert.

Beweis. Der Beweis lässt sich unter Anwendung der bereits aus dem Eindimensionalen bekannten Sätze und im Speziellen dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung und dem Mittelwertsatz, sowie der Proposition 26 ohne große Anstrengung durchführen. □

Im Mehrdimensionalen ändern sich die betrachteten Objekte im Zusammenhang mit dem Riemann-Integral. Waren im Eindimensionalen noch die Intervalle von Interesse, werden diese im Mehrdimensionalen durch halboffene Quader ersetzt. Ober- und Untersumme, sowie Riemann-Summe bleiben vom Grundgedanken her gleich, werden aber an die neuen Gegebenheiten angepasst. Natürlich ändern sich auch die Berechnungsmethoden beim Übergang vom Eindimensionalen auf das Mehrdimensionale. Die Transformationsformel stellt beispielsweise die Substitution im Mehrdimensionalen dar.

Weitere Möglichkeiten sich im Mehrdimensionalen mit der Unendlichkeit zu beschäftigen bieten unter anderem die uneigentlichen mehrdimensionalen Integrale, sowie die Kurven- und Oberflächenintegrale. Für Oberflächenberechnungen ist die Orientierung sehr wichtig. Besonders interessant sind in diesem Zusammenhang geometrische Objekte, an denen die Unendlichkeit einerseits symbolisch, andererseits aber auch real erfassbar ist.
Das Möbiusband soll ein Beispiel dafür sein. Wie sollte man sich ein Möbiusband vorstellen? [18] gibt Aufschluss darüber.
Gehe von einem Papierstreifen aus und biege die Enden des Streifen derart zusammen, dass ein Ring entsteht. Wie bereits im Kapitel „Interdisziplinäre Betrachtung der Unendlichkeit“ beschrieben wurde, ist der Ring bereits an sich ein Symbol der Unendlichkeit. Wird nun aber ein Ende des Papierstreifens vor der Fixierung des Objektes um 180 Grad gedreht, entsteht der Möbiusring. Er zeichnet sich dadurch aus, dass Innen und Außen, sowie Oben und Unten nicht mehr unterscheidbar sind. In der Mathematik wird davon gesprochen, dass das Möbiusband nicht orientierbar ist. Dadurch ist das Oberflächenintegral von einem Möbiusband auch nicht berechenbar.
Das menschliche Raumvorstellungsvermögen wird durch das Möbiusband klar beeinträchtigt. Würde mit einem Stift der Verlauf des Möbiusbandes verfolgt werden, würde jede Seite des ursprünglichen Papierstreifens erreicht werden und dieser Prozess könnte unendlich lange durchgeführt werden. Aus diesem Grund hat das Möbiusband auch den Spitznamen Unendliche Schleife erhalten.

Nach diesem Ausblick zur mehrdimensionalen Integrierbarkeit, wird nun ein Schritt zurück ins Eindimensionale gemacht. Genauer gesagt wird der Umgang mit der Differential- und Integralrechnung in der Schule thematisiert.

9.3.3 Schulpraxis: Differential- und Integralrechnung

Im Kapitel „Verortung im Lehrplan der AHS“ wurde bereits ein Überblick über Bereiche gegeben, in denen die Unendlichkeit in unterschiedlichen Ausprägungen vertreten ist. Am Ende des Abschnittes zu Grenzwerten und Konvergenz wurde ein Blick in die Schulpraxis gewagt und das soll auch bei diesem Thema geschehen.

Der Lehrplan der Sekundarstufe II der AHS ([4]) lässt den hohen Stellenwert der Differential- und Integralrechnung zweifelsfrei erahnen. Sie nimmt neben der Stochastik den Großteil des 7. und 8. Klasse-Stoffs ein. In der 5. und 6. Klasse wird das Grundwissen geschaffen, das für den Aufbau dessen unbedingt notwendig ist. Besonders im schulischen Bereich müssen greifbare Kontexte herangezogen werden, um das Verständnis von teilweise abstrakten Inhalten zu fördern. Nach [24, S. 181] wurde durch die Kompetenzorientierung eine Schwerpunktverlagerung von innermathematischen Problemstellugen zum Modellieren in anwendungsorientierten Kontexten initiiert. Ziele sind unter anderem Verbindungen herstellen zu können, analysieren und argumentieren zu können, aber auch ein gutes reflexives Verständnis aufzubauen.

Aus fachmathematischer Sicht wurden die Begriffe Ableitung und Integral bereits ausführlich behandelt. Natürlich werden aber in Fach- und Schulmathematik andere Ansätze zur Einführung in die Differential- und Integralrechnung verfolgt. In diesem Unterkapitel sollen daher verschiedene fachdidaktische Zugänge zum Ableitungsbegriff und zum Integral nach [24, Analysisunterricht. Wege zur Ableitung und zum Integral] vorgestellt werden. Ziel ist es dabei nicht einen Ansatz auf Grund der persönlichen Meinung hervorzuheben, sondern fachdidaktisch-fundierte Erkenntnisse zu verschiedenen Herangehensweisen einzubeziehen.

Die Zugänge zum Ableitungsbegriff können im Wesentlichen in zwei Gruppen eingeteilt werden. Die einen Ansätze heben die Untersuchung des Änderungsverhaltens einer Funktion im Rahmen der Differentialrechnung hervor. Dabei wird der Ableitungsbegriff aus der relativen Änderung entwickelt. Die anderen Ansätze legen hingegen mehr Wert auf den Gedanken der linearen Approximation einer Kurve in der Nähe eines Punktes. Innerhalb dieser Gruppierung soll die Ableitung als Steigung der an die Funktion angenäherten Gerade interpretiert werden. In der heutigen Fachdidaktik besteht Einigkeit darüber, dass der erste Ansatz besser für den Schulunterricht geeignet ist als jener der Linearisierung. Letzterer würde zwar das vernetzte Denken z.B.: mit Begrifflichkeiten wie der Approximation oder der Taylorreihenentwicklung fördern, aber dafür bereits bei der Untersuchung von nicht-rationalen Funktionen zu Problemen führen.
Ich beschäftige mich im Folgenden daher gezielt mit dem 1. Zugang. Auch innerhalb dieses Zugangs sind verschiedene Schwerpunktsetzungen vorhanden.
Aus Sicht der Lehrkraft muss entschieden werden, worauf mehr Wert gelegt wird. Soll die innermathematisch-geometrische Deutung der Tangentensteigung im Vordergrund stehen oder soll der Änderungsrate im Sinne der Anwendungsorientierung der Vortritt überlassen werden? Wird der innermathematisch-geometrische Zugang gewählt, soll die Tangente als Grenzlage einer Geradenschar interpretiert werden. Dafür wird eine Geradenschar durch einen fixen Punkt $P_a(a|f(a))$ und jeweils einen weiteren Punkt auf dem Graphen $P_{a+h}(a+h|f(a+h))$ mit variablem h gebildet. Wird der Abstand der beiden Punkte P_a und P_{a+h} für $h \to 0$ immer weiter verringert, entsteht aus den Sekanten die Tangente als Grenzgerade der Sekanten. Über Jahrzehnte war dieser geometrische Zugang äußerst beliebt. Heute wird aber vermehrt nach [24, S. 169 f.] der Differenzenquotient als Änderungsrate zum Ausgangspunkt herangezogen. Dieser Zugang unterstützt den Fokus auf Anwendungsorientierung und Modellierungsaufgaben. Außerdem ist es zusätzlich möglich geometrische Veranschaulichung zur Stärkung des Verständnisses zu verwenden. Ein klassischer Kontext

dafür wäre die Geschwindigkeitsveränderung eines Zuges, Autos oder Ähnliches.
Wenn das Grundverständnis geschaffen wurde, sollen weitere Darstellungsformen kennengelernt werden. Dazu gehören einerseits die verschiedenen Definitionen der 1.Ableitung wie in Definition 30, andererseits beispielsweise aber auch die graphische Darstellung der Ableitungen und zugehörige Interpretationen. Damit soll verhindert werden, dass die SchülerInnen die Definition der 1.Ableitung auswendig lernen, aber nicht verstanden haben wie es zu dieser Definition kommt, geschweige denn, was sie aussagt.

Zur Erarbeitung des Integrals werden ebenfalls zwei Hauptzugänge unterschieden. Diese zwei Zweige werden nach den Ansätzen von Newton und Leibniz getrennt (siehe auch „Newton, Leibniz und die Infinitesimalrechnung"). Newton nennt nach [24, S. 170] die aus den Änderungsraten rekonstruierte Stammfunktion F die Integralfunktion und schreibt $F_a(x) = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t$. Mögliche Rekonstruktionen dieser Art betreffen beispielsweise die Ermittlung des zurückgelegten Weges aus der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion.
Leibniz nähert sich dem Integral hingegen über die Riemann-Summe und schreibt
$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$. Der Übergang der diskreten Riemann-Summe zum stetigen Integral ist hier von besonderer Bedeutung.

Grundsätzlich besteht auch die Möglichkeit mit der formalen Umkehrung des Differenzierens durch die Bestimmung von Stammfunktionen zu beginnen. Problematisch ist es aber das bestimmte Integral danach ohne Berücksichtigung der Riemann-Summe nur als Differenz zweier Stammfunktionswerte zu erhalten. Dabei wird nämlich der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt und dessen Relevanz könnte nicht zum Ausdruck kommen.

Nach [24, S. 172] sollte das Ziel daher sein die Ansätze von Leibniz und Newton zu kombinieren und erst im Laufe der Erarbeitung zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu gelangen. Aufmerksame LeserInnen werden bemerken, dass auch ich diesen Zugang bei der Erarbeitung des Integrals vorgezogen habe.

Wesentlich ist immer wieder zu hinterfragen, ob Fehlvorstellungen vorliegen könnten. Gerade die Grenzwertbildung, sowie darauf folgend die Differential- und Integralrechnung bergen einige Gefahren für Missverständnisse in sich. Anschaulichkeit und intuitives Verständnis sollen gefördert werden, sie dürfen aber nicht zu weitreichenden Fehlvorstellungen führen. Am Ende von Erarbeitungsphasen soll ein mathematisch-korrektes Begriffsverständnis stehen.

9.4 Reihen

„Gerade durch die Lehre von den unendlichen Reihen hat die höhere Analysis sehr bedeutende Erweiterungen erfahren.“ (Leonard Euler in [9, S. 353])

Im Kapitel Grenzwert und Konvergenz waren die Folgen stark vertreten, die Reihen wurden aber bisher vernachlässigt. Da die Reihen untrennbar mit den Folgen verbunden sind und sie außerdem im Zuge der Beschäftigung mit der Unendlichkeit nicht fehlen dürfen, soll dies nun geändert werden.
In diesem Kapitel erwarten die LeserInnen Konvergenzsätze und Konvergenztests, Umordnungssätze, sowie ein detaillierter Blick auf spezielle Reihen wie die Potenzreihen.
Dabei wird die komplexe Analysis zum ersten Mal innerhalb dieser Arbeit aktiv miteinbezogen, damit sind sowohl die eindimensionale und die mehrdimensionale reelle Analysis, auch die eindimensionale komplexe Analysis vertreten. Die Welt besteht genauso wie die Mathematik aus mehr als nur einer Dimension, Ebene oder Perspektive und eines meiner Ziele war es den Blick dafür zu schärfen. Oft versteckt sich gerade im Unbekannten und Weitläufigen etwas, wovon man nie geahnt hätte, dass es existiert.

9.4.1 Zahlenreihen

Zuallererst soll der Brückenschlag zwischen Folgen und Reihen erfolgen.
Diese erste Herangehensweise beruht auf [26, S. 344 f.].
Betrachte dafür die Folge $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$, die durch das allgemeine Glied $a_n = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gebildet wird.
Aus diesen Folgengliedern bilden wir nun Teilsummen (=Partialsummen), wobei für die Bestimmung der jeweils nächsten Teilsumme immer ein Folgenglied mehr addiert wird. Diese Teilsummen bezeichnen wir mit $S_i, i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1\\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\\
S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}\\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}\\
&.\\
&.\\
&.
\end{aligned}$$

Diese Partialsummen werden in einem nächsten Schritt zu einer Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammengefasst. Das Bildungsgesetz dieser Folge lautet:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Diese Reihe baut übrigens auf die harmonische Folge auf und wird deshalb auch harmonische Reihe genannt.

Die Erkenntnisse dieser Heranführung an die Reihen werden nun durch eine Definition, weiterhin nach [26, S. 345] besiegelt:

Definition 45. Reihe
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Dann heißt

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die Partialsumme und die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt unendliche Reihe (kurz: Reihe):

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Bemerkung 15. Eine Reihe ist also zusamengefasst nach [9, S. 188] „eine neue Schreibweise für eine wohldefinierte Folge" (die Folge der Teilsummen). Der Index der Reihe beginnt üblicherweise bei 0 oder 1. Unendlich ist dann besonders präsent, wenn es auch symbolisch in der Schreibweise unter anderem als oberer Summationsindex vorkommt.

Die folgende Konvergenzdefinition für Reihen und die Beispiele für besondere Reihen entstammen verändert [26, S. 346 ff.] und [9, S. 189 f.].

Definition 46. Reihenkonvergenz

(1) Sei a_n eine Folge in $\mathbb{R}^s$. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent, wenn die Folge der Teilsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ mit $n \in \mathbb{N}$ konvergiert.
Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so bezeichnet man den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

als Summe oder Wert der (unendlichen) Reihe. Man sagt auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert.

(2) Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Partialsumme der Beträge $s_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ konvergiert.

(3) Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt bedingt konvergent, wenn sie zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergent (unbedingt konvergent) ist.
Die unbedingte Konvergenz einer Reihe des Wertes s sagt aus, dass selbst bei Umordnung der Glieder die Konvergenz und der Wert s erhalten bleibt (siehe Definition 48).

(4) Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert oder existiert nicht, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

(5) Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt bestimmt divergent, wenn der Wert der Reihe entweder $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Bemerkung 16. Sprachlich versteckt sich in dieser Definition eine Schwierigkeit. Das Summenzeichen und die Bezeichnung Summe könnte dazu verleiten eine unendliche Reihe als eine Summe von unendlich vielen Summanden zu deuten. Die Summe einer konvergenten Reihe, wie sie in der Definition vorkommt, ist aber der Grenzwert einer Folge der Teilsummen.
Eine weitere wichtige Feststellung wird zum Ausdruck $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ benötigt. Einerseits wird dadurch die Folge der Teilsummen bezeichnet, andererseits aber auch der Grenzwert, falls Konvergenz vorliegt. Von Situation zu Situation sollte die passende Deutung hinterfragt werden.

Reiheneigenschaften nach [9, 32 Das Rechnen mit konvergenten Reihen] und [17]

Proposition 27. ***Linearität***
Konvergente Reihen dürfen gliedweise addiert, subtrahiert und mit einer Konstante multipliziert werden. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergieren, sowie* $c \in \mathbb{R}$ *ist, dann gelten:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ und } \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Beweis. Es wird mit der Definition 46 gearbeitet. Ändere die Bezeichnungen, damit die Schreibweise vereinfacht wird.
$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist der Grenzwert von A_n. Analog für B.
Verwende nun die Reiheneigenschaften und die Grenzwertsätze.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = A + B.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = \lim_{n\to\infty} c \cdot A_n = c \cdot A.$$

□

Proposition 28. ***Monotonie***
Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergieren,* $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *und* $a_n \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$ *dann gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu oben. Wegen $a_n \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \text{ und daher } A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty} B_n = B.$$

□

Satz 30. *Sei* a_n *Folge in* $\mathbb{R}^s$*. Falls* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Umgekehrt folgt aber aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *nicht, dass* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, keine Äquivalenz!*

Beweis. Die Voraussetzung lautet $A_n \to A$.
a_n ist darstellbar als $A_n - A_{n-1}$, da es das n-te Glied der Folge (a_n) ist und dieses Glied das einzige ist, das nur in A_n und nicht in A_{n-1} enthalten ist.
Somit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(A_n - A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = A - A = 0.$ □

Definition 47. Cauchy-Produkt
Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei Reihen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Das Cauchy-Produkt bezeichnet dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big)$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0$.

Bemerkung 17. Über die vorige Definition aus [9, S. 201] hinaus sind weitere Überlegungen nötig. Aus zwei divergenten Reihen kann sich ein konvergentes Cauchy-Produkt ergeben, aus zwei absolut konvergenten Reihen erhält man ein absolut konvergentes Cauchy-Produkt. Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ aber nur konvergent und nicht absolut konvergent, muss das Cauchy-Produkt nicht konvergieren.

Nach diesen allgemeinen Reiheneigenschaften soll die Frage beantwortet werden, ob beliebig ausgeführte Umordungen der Reihenglieder das Konvergenzverhalten oder den Wert einer Reihe verändern. Um etwas vorwegzunehmen: die Beantwortung dieser Frage hängt von der Art der Konvergenz ab.
Die Antworten liefern die Umordnungssätze nach [9, S. 197 ff.] und [17].

Umordnungssätze

Definition 48. Eine Umordnung ist eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die der Vorschrift $n \mapsto \sigma(n)$ folgt. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ ist daher eine Umordnung von der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Unterscheide nun zwischen zwei Umordnungssätzen, wobei der eine den Fall der absoluten Konvergenz und der andere jenen der bedingten Konvergenz behandelt.

Satz 31. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und die Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei bijektiv. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Beweis. In diesem Beweis wird gezeigt, dass der Wert der Reihe unabhängig von der Reihenfolge der absolut konvergenten Reihen ist.
Definiere $B_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, $B := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Grenzwertdefinition $\exists N_0$, sodass $\forall n \geq N_0 : |A - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|B - B_n| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Bezeichne die Umkehrfunktion von σ als σ^{-1}.
Setze $N := \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), ..., \sigma^{-1}(N_0)\}$, das bedeutet $N \geq N_0$.
Sei $n \geq N$, also auch $n \geq N_0$. Setze $r := \max\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)\}$.
Die beiden Mengen hängen dadurch zusammen, dass in $\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)\}$ mit Sicherheit $\{1, 2, ..., N\}$ vorkommt, da $N \geq N_0$ und k jeweils einem σ^{-1} entspricht.
Da $\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{N_0} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$, wobei $\sigma(k) > N_0$, gilt nach der Dreiecksungleichung und der Betragseigenschaft für $\sigma(k) > N_0$:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - A| \;\leq\; |\sum_{k=1}^{N_0} a_k - A| + \sum_{\substack{k=1 \\ \sigma(k)>N_0}}^{n} |a_{\sigma(k)}| \;<\; \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=1}^{n} |a_k| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} + |B_n - B_{N_0}| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3} + |B_n - B| + |B - B_{N_0}| < \varepsilon.$$

Somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Satz 32. ***Riemann'scher Umordnungssatz***
Gegeben seien eine reelle Folge (a_n), die bedingt konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine bijektive Funktion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, für die $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = r$ erfüllt ist.
In Worten: Eine bedingt konvergente Reihe besitzt immer eine Umordnung, die gegen eine frei wählbare, also willkürlich vorgegebene, Zahl konvergiert.

Beweis. Ich beschränke mich hierbei auf die Beweisidee, der detaillierte Beweis findet sich unter [9, S. 197 ff.].
Definiere zwei Mengen $J_1 := \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\}$ und $J_2 := \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\}$.
Damit $|a_n|$ nicht konvergent ist, d.h. absolute Konvergenz ausgeschlossen ist, müssen beide Reihen $\sum_{n \in J_1} a_n$ und $\sum_{n \in J_2} a_n$ divergieren. Aus der Konvergenz einer dieser Reihen würde nämlich schon die Konvergenz der zweiten und damit auch die absolute Konvergenz folgen.
Nehme Zahlen k aus J_1 solange bis $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \in J_1}}^{n_1} a_k > r$ und nehme solange Zahlen k aus J_2 bis

$\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \in J_1}}^{n_1} a_k + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \in J_2}}^{n_2} a_k < r$.
n_1 und n_2 bezeichnen dabei immer den kleinsten Index, ab dem die Aussage gilt.
Es werden immer weiter alternierende Glieder hinzugefügt. Durch dieses Verfahren erhält man eine Umordnung der Ausgangsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$.
Im Endeffekt streben alle vorkommenden Folgen gegen 0, wonach die untersuchte umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergieren muss. Genauer konvergiert sie sogar gegen r. □

Die Feststellung, dass das Konvergenzverhalten der Teilfolgen natürlich relevant für die Existenz des Grenzwertes ist, führt zur nächsten wichtigen Überlegung. Es muss eine Möglichkeit geben zu entscheiden, ob Konvergenz vorliegt. Im Allgemeinen ist der Grenzwert einer Reihe nämlich unbekannt. Analog zu den Konvergenzkriterien für Folgen wird das Konvergenzverhalten der Reihen durch die Reihenkonvergenzkriterien bestimmt.
Bevor diese Verfahren jedoch erklärt werden, sollen noch bekannte Grenzwerte spezieller Reihen vorgestellt werden, für deren Bestimmung die Konvergenzkriterien nicht benötigt werden.

Spezielle Reihen und deren Grenzwerte Die folgenden Sätze zu den speziellen Grenzwerten stammen aus [26, S. 346 ff.]. Als Vorbereitung für den Beweis des Satzes zur geometrischen Reihe wird noch eine Proposition nach [16] benötigt:

Proposition 29. *Sei $q \in \mathbb{C}$. Falls $|q| < 1$, dann ist $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.*

Beweis. Es werden zwei Fälle unterschieden.
1.Fall: $q = 0$: $q^n = 0^n = 0 \to 0$.
2.Fall: $q \neq 0$. Ausgehend von $|q| > 0$, $1 < \frac{1}{|q|}$ und unter Verwendung der Betragseigenschaft $|q^n| = |q|^n$ erhält man $|q|^{n+1} < |q|^n$.
Daher ist $(|q^n|)$ (streng) monoton fallend.
$|q^n| \geq 0$, also $\exists a \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim_{n \to \infty} |q^n| = \inf_{n \in \mathbb{N}} |q^n|$, woraus folgt, dass $a \geq 0$.
Die Annahme $a > 0$ liefert $a < \frac{a}{|q|}$ und $\exists n$ mit $|q^n| = |q|^n < \frac{a}{|q|}$.
Durch Umformung ergibt sich $|q^{n+1}| = |q|^{n+1} < a \leq |q^{n+1}|$. Widerspruch.
Somit ist $\lim_{n \to \infty} |q^n| = 0$ und daher $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$. □

Satz 33. ***Die geometrische Reihe***
Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + ...$$

konvergiert für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| \geq 1$.
Es gilt also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Beweis. Verwende zuerst die Definition 46 und dann die Eigenschaft der endlichen geometrischen Reihe (der geometrischen Summenformel), dass $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Da nur q^{n+1} von n abhängt, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q}.$$

Da nach Proposition 29 für $|q| < 1 : \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, ergibt sich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

□

Satz 34. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ *ist divergent.*

Beweis. Betrachte die Folge der Partialsummen:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, \\ s_1 &= 1-1=0, \\ s_2 &= 1-1+1=1, \\ s_3 &= 1-1+1-1=0, \\ s_4 &= 1, \\ s_5 &= 0, ... \end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen divergiert, da $s_{2n} = 1, s_{2n-1} = 0$.
Somit divergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ □

Satz 35. ***Die arithmetische Reihe***
Die arithmetische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1+2+3+4+5+...$ *ist bestimmt divergent.*

Beweis. Untersuche wieder die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+5+...+n.$$

Wende zuerst die vollständige Induktion an, um zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$:
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
Induktionanfang: Für $n = 1$: linke Seite: $\sum_{k=1}^{1} k = 1,$ rechte Seite: $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.
Induktionsschritt: $n-1 \to n$:
Sei $n > 1$: $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$.
Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)\,n}{2} + n = n\left(\frac{(n-1)}{2}+1\right) = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Berechne nun den Grenzwert.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,n\,(n+1) = \infty.$$

Daher ist $\sum_{k=1}^{\infty} k$ bestimmt divergent. □

Satz 36. *Die harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$ *ist divergent.*

Beweis. Um obigen Satz zu beweisen, erfolgt eine Art Ausdünnungsverfahren- es wird eine Vergleichsreihe mit kleineren Folgengliedern herangezogen und von dieser Vergleichsreihe aus wird auf das Konvergenzverhalten der harmonischen Reihe geschlossen.

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + \frac{1}{2^n}.$$

Nun beginnen die Abschätzungen. Man überlegt sich, dass $\frac{1}{2^0} = 1$, $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2^1}$, $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, ...$ gilt. Die durch diese Berechnungen entstehenden Bruchzahlen werden für die Abschätzungen verwendet.
So ist $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \geq \frac{1}{8}, \frac{1}{6} \geq \frac{1}{8}, ...$ Der Wert der Summe wird somit verkleinert und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + ... = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = n\,\frac{1}{2} \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Da die Glieder der harmonischen Reihe größer als die der Vergleichsreihe sind, divergiert auch sie. □

Dieser letzte Beweis leitet bereits zu den Konvergenztests über. Es scheint, als ob ein Trick verwendet wurde, doch in Wirklichkeit kam das Minorantenkriterium bzw. der Minorantentest zum Einsatz. Es zeigt sich nämlich anhand von vielen Beispielen, dass eine fahrlässige Berechnung des Reihenwerts einem Trugschluss gleichkommt, wenn die Reihe überhaupt nicht konvergiert. Je nach typischer Reihenart wird entschieden welcher der Tests angewandt werden kann. Öfters gibt es auch mehrere Möglichkeiten dafür.

Konvergenztests In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Konvergenztests, oftmals auch Konvergenzkriterien genannt, vorgestellt. Ziel ist es einen Überblick über die wichtigsten Verfahren und ihre Einsatzbedingungen zu erhalten. Diese Einsicht wird durch ausgewählte Beispiele gefördert.
In Bezug auf [4] soll aber erwähnt werden, dass diese Konvergenztests die Erfordernisse der Sekundarstufe II bei Weitem überschreiten. In den letzten Jahren hat der Stellenwert der Folgen und Reihen innerhalb des Lehrplans abgenommen.
Diese Konvergenztests sind dennoch für uns MathematikerInnen ein wichtiges Instrument zur Untersuchung des Grenzwertverhaltens von Reihen. Sie bauen auf spezielle Eigenschaften der Reihen auf und erleichtern es damit zu entscheiden, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt.

Im Folgenden werden Majoranten- und Minorantentest, Wurzeltest, Quotiententest, Integraltest und Leibniztest genauer behandelt. Darüber hinaus existieren aber auch noch andere Kriterien\ Tests wie das Kriterium von Raabe, das Abel'sche Kriterium oder das Dirichlet'sche Kriterium. Die folgenden Ausführungen belaufen sich auf ein Zusammenspiel von [9, 33 Konvergenz- und Divergenzkriterien], [17] und [26, 9.1.], wobei der Wurzeltest in [26] nicht enthalten ist und der Integraltest überhaupt nur bei [17] vorkommt.

Satz 37. ***Majorantentest***
Eine Reihe konvergiert, wenn eine betragsmäßig größere Reihe (Majorante genannt) schon konvergiert, d.h.:
Seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}^s$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit nicht-negativen Gliedern in* $\mathbb{R}$ *gegeben. Außerdem konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Falls nun $|a_n| \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, *dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Es zeigt sich, dass sogar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *also absolute Konvergenz vorliegt.*

Beweis. Der Beweis zum Majorantentest kann entweder über das Monotoniekriterium geführt werden, das aussagt, dass eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern genau dann konvergiert, wenn die Folge ihrer Teilsummen beschränkt ist.
Eine andere Variante ist sich an die Dreiecksungleichung, die Definitionen zur Reihenkonvergenz, den Satz von Bolzano Weierstraß und diverse Abschätzungen zu halten, was auch hier geschehen soll.
Aus der Voraussetzung $|a_n| \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$|A_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = B_n \to B.$$

$|A_n|$ ist somit beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}^s$ gibt es eine Teilfolge (A_{n_k}) von (A_n) und ein A in $\mathbb{R}^s$ mit $A_{n_k} \to A$.
Verwende nun den Satz von Bolzano-Weierstraß und, dass $B_n \to B$:
Sei $\varepsilon > 0$. Da $B_n \to B : \exists N \, \forall n \geq N : |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Wegen dem Satz von Bolzano-Weierstraß $\exists K \, \forall k \geq K : |A_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Sei $n \geq N$. Da für den Index $n_k \to \infty$ gelten soll, wähle $k \geq K$ so, dass $n_k > n$.
Führe nun eine Abschätzung durch:

$$|A_n - A| \leq |A_n - A_{n_k}| + |A_{n_k} - A|.$$

Schreibe $|A_n - A_{n_k}|$ zu $|A_{n_k} - A_n| = |\sum_{i=1}^{n_k} a_i|$ um und setze mit Berücksichtigung der Betragseigenschaften fort:

$$|A_n - A| \leq |A_n - A_{n_k}| + |A_{n_k} - A| < \sum_{i=1}^{n_k} |a_i| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \sum_{i=1}^{n_k} b_i + \frac{\varepsilon}{3}$$

Führe nun die gleichen Rechenschritte wie zuvor für A und A_{n_k} in die andere Richtung für $\sum_{i=1}^{n_k} b_i$ durch, wobei $B_{n_k} - B_n > 0$ ist:
$\sum_{i=1}^{n_k} b_i = B_{n_k} - B_n = |B_{n_k} - B_n| = |B_{n_k} - B| + |B - B_n|$. Somit

$$\sum_{i=1}^{n_k} b_i + \frac{\varepsilon}{3} \leq |B_{n_k} - B| + |B - B_n| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Es wurde gezeigt, dass $A_n \to A$, weshalb $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.
Außerdem ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, da $|a_n| \leq b_n$ für (a_n) und das zu der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ führt. □

Der folgende Minorantentest wird in der Regel seltener verwendet, hat aber durchaus seine Berechtigung. Wegen Analogie wird der Beweis an dieser Stelle ausgelassen. [9, Seite 203 ff.], [17] und [26, 9.1.] werden weiterhin für diesen Abschnitt der Konvergenztests verwendet..

Satz 38. ***Minorantentest***
Eine Reihe divergiert, wenn eine kleinere Reihe (Minorante genannt) schon divergiert, d.h.:
Seien die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit nicht-negativen Gliedern in $\mathbb{R}$ gegeben. Außerdem divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Falls nun $a_n \geq c_n \, \forall n \in \mathbb{N}$, dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 39. ***Wurzeltest***
Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}^s$. Man unterscheidet mehrere Fälle:

(1) Falls $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(2) Falls $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.*

(3) Für den Fall $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ *ist kann keine allgemeine Aussage getroffen werden.*

Beweis.

(1) Sei q so, dass $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$. Dann $\exists N : \forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} < q$.
Sei $n \geq N$. Durch Potenzierung erhält man $|a_n| < q^n$.
q^n erinnert bereits daran, dass die geometrische Reihe zum Zug kommen könnte, was auch der Fall ist.

$$\sum_{n=N}^{\infty} q^n = q^N \sum_{n=0}^{\infty} q^n \overset{Satz\ 33}{=} q^N \frac{1}{1-q}$$

konvergiert, weil $|q| < 1$.
Nach dem Majorantentest (Satz 37) ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, wodurch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist.

(2) Laut Voraussetzung $\exists N\, \forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Damit diese Aussage erfüllt ist, muss $|a_n| > 1$ sein. Verwende Satz 30.
Da $a_n \to 0$ sicher nicht erfüllt ist, folgt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. □

Satz 40. ***Quotiententest***
Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}^s$, wobei $a_n \neq 0\ \forall n$. Man unterscheidet zwei Fälle:

(1) Falls $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Falls $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis.

(1) Wähle wieder q so, dass $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q < 1$.
Damit $\exists N\, \forall n \geq N : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$ und durch Umformung ergibt sich $|a_{n+1}| < q \cdot |a_n|$.
Führe nun innerhalb dieses Beweises einen Beweis durch Induktion, wobei die geometrische Reihe als Majorante verwendet wird.
Behauptung: Für $n \geq N : |a_n| \leq \dfrac{|a_N|}{q^N} \cdot q^n$.
Beweis der Behauptung durch Induktion nach n.
Induktionsanfang: Für $n = N : |a_N| \leq \dfrac{|a_N|}{q^N} \cdot q^N = |a_N|$.
Induktionsschritt: Sei $n > N$. Verwende nun, dass $|a_{n-1}| \leq \dfrac{|a_N|}{q^N} \cdot q^{n-1}$.
Dann ist $|a_n| \leq q \cdot |a_{n-1}| \leq \dfrac{|a_N|}{q^N} \cdot q^n$. Diese Behauptung ist somit bewiesen.
Berücksichtige die geometrische Reihe mit $|q| = q < 1$, daher ist $\sum_{n=N}^{\infty} \dfrac{|a_N|}{q^N} \cdot q^n$ konvergent. Nach dem Majorantentest ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und damit auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(2) Nach Voraussetzung $\exists N\, \forall n \geq N : \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, was äquivalent zu $|a_{n+1}| > |a_n|$ ist.
Sei $n \geq N$. Dann ist immer das Glied mit dem nächstgrößeren Index betragsmäßig größer als das vorige. Es entsteht eine Ungleichungskette der Form

$$|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq |a_{n-2}| \geq ... \geq |a_N| > 0.$$

Es ist nicht schwer zu erkennen, dass Satz 30 nicht erfüllt sein wird.
a_n kann nicht gegen 0 konvergieren, woraus folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert. □

Der Quotienten- und der Wurzeltest sind eng miteinander verbunden, was sich auch in den Beweisen widergespiegelt hat. Der Zusammenhang wird nach [9, S. 206] und [17] erklärt.

Proposition 30. ***Verbindung zwischen Wurzel- und Quotiententest***
Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}^s$ mit $a_n \neq 0\ \forall n$.
Dann gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Beweis. Dass $\liminf \leq \limsup$ wissen wir seit Definition 19.
Zeige daher $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.
Der Beweis für $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ verläuft dann analog.
Wähle also $q > \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ beliebig.
Demnach $\exists N\ \forall n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$.
Wie im obigen Beweis des Quotiententests gilt für $n \geq N$, dass $|a_n| \leq \frac{|a_N|}{q^N} \cdot q^n$.
Aus eben diesem Beweis stammt: Sei $n \geq N$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{q^N}} \cdot q \to q \text{ , da } \sqrt[n]{a} \to 1 \text{ und daher } \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{q^N}} \to 1.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$. Beliebig gewählt war q mit $q > \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.
Verbindet man diese beiden Ungleichungen erhält man somit:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

□

Diese Proposition lässt folgern, dass sobald der Quotiententest anwendbar ist auch der Wurzeltest seine Berechtigung hat. Da der Wurzeltest aber auch in Fällen anwendbar ist, in denen der Quotiententest keine sinnvollen Ergebnisse liefert, bietet es sich meistens in der Praxis an den Wurzeltest zu verwenden. Das Integralkriterium gestaltet sich als sehr hilfreich, wenn die gegebene Funktion monoton fallend ist ([17]).

Satz 41. ***Integraltest***
Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion.
Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ genau dann, wenn $\int\limits_1^\infty f(x)$ konvergiert.

Beweis. Für den Beweis und auch die Anwendung des Integraltests muss bereits Einiges über die Integration bekannt sein.
Denke an das Riemann-Integral bzw. die Riemann-Summe und die Annäherung durch Unter- und Obersumme, wie sie in Definition 40 vorgestellt wurde. Ohne große Überlegungen führt das zu:

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Nach den Konvergenzkriterien (Satz 12) konvergiert eine monotone Folge genau dann, wenn sie beschränkt ist und das ist auch auf die Funktion $f(x)$ übertragbar. f ist monoton und beschränkt und konvergiert somit. □

Satz 42. ***Leibniztest*** *nach [17]*
Sei (a_n) eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$, das heißt $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots > 0$.
Dann ist die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \ldots$ genau dann konvergent, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Eine alternierende Reihe besteht aus abwechselnd positiven und negativen Gliedern.

Beweis. Für den Beweis dieses Satzes benenne zuerst $A_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ und zeige daraufhin, dass die Reihen mit geradem Index immer einen kleineren Wert haben als jene mit ungeradem Index ($A_{2n-1} \geq A_{2n+1} \geq A_{2n+2} \geq A_{2n}$).
Beginne mit dem erwarteten kleinsten Wert der Reihen, nämlich A_{2n}.

$$A_{2n} = A_{2n-1} + (-1)^{2n-1}a_{2n} = A_{2n-1} - a_{2n} \leq A_{2n-1}.$$

$$A_{2n+1} = A_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = A_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq A_{2n-1} \text{ , da } a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0.$$

$$A_{2n+2} = A_{2n+1} - a_{2n+2} \leq A_{2n+1}.$$

$$A_{2n+2} = A_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq A_{2n} \text{ , da } a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0.$$

Setze nun alle diese vier Ungleichungen zu einer Ungleichungskette zusammen, dann ergibt sich:

$$A_{2n-1} \geq A_{2n+1} \geq A_{2n+2} \geq A_{2n} \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es ist leicht ersichtlich, dass (A_{2n}) monoton wachsend und durch A_1 nach oben beschränkt ist, (A_{2n}) ist also nach Satz 12 konvergent, das heißt:
$\exists A \in \mathbb{R}$ mit $A_{2n} \to A$.
Sei $\varepsilon > 0$. $\exists K$;
$\forall k \geq K : |A_{2k} - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
$\exists N \, \forall n \geq N : |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Sei $n = \max\{N, 2k\}$.
Unterscheide zwei Fälle:
1.Fall: n gerade. Dann $\exists k \geq K : n = 2k$ und $|A_n - A| = |A_{2k} - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
2.Fall: n ungerade. Dann $\exists k \geq K : n = 2k+1$ und
$|A_n - A| = |A_{2k+1} - A| = |A_{2k} + a_n - A| \overset{\textit{Lemma 2}}{\leq} |A_{2k} - A| + |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Somit konvergiert A_n in jedem Fall gegen A, also ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konvergent. □

[9, S. 204 ff.] weist darüber hinaus noch auf andere Konvergenzkriterien (Tests) hin, die jedoch in der Praxis nicht denselben Stellenwert haben wie die zuvor erwähnten und daher nur in Form von Sätzen und Beweisen und nicht durch Beispiele illustriert werden.

Satz 43. ***Grenzwertkriterium***
Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei Reihen mit nicht-negativen Gliedern.
Falls die Folge der Quotienten $\dfrac{a_n}{b_n}$ gegen einen positiven Grenzwert konvergiert ($0 < \liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$), haben a_n und b_n dasselbe Konvergenzverhalten. Gilt $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, kann von der Konvergenz der zweiten Folge b_n auf die Konvergenz der ersten Folge a_n geschlossen werden.

Beweis. Man nehme an, dass $\dfrac{a_n}{b_n} \to c > 0$.
Demnach liegen dann fast alle $\dfrac{a_n}{b_n}$ zwischen den positiven Zahlen $d_1 = \dfrac{c}{2}$ und $d_2 = \dfrac{3c}{2}$, was der Ungleichung $d_1 < \dfrac{a_n}{b_n} < d_2$ entspricht. Forme um.

In den meisten Fällen ist somit $0 < d_1 b_n < a_n < d_2 b_n$.
Wende nun das Majorantenkriterium (Satz 37) an. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.
Gilt jedoch $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ ist der Quotient $\dfrac{a_n}{b_n}$ zumeist ≤ 1, was äquivalent zu $a_n \leq b_n$ ist. Durch den Majorantentest kann bei Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wieder auf jene von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ geschlossen werden. □

Für die Erläuterung der nächsten und letzten beiden Kriterien wird [9, S. 208] verwendet. Dafür wird aber zuvor noch die Abel'sche partielle Summation nach [9, S. 91 f.] benötigt. Diese wird zur Addition von Produkten verwendet und beschäftigt sich mit Teleskopsummen, die den folgenden Regeln folgen:

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1} \text{ bzw. } \sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}, \text{ falls } m \leq n.$$

Proposition 31. ***Abel'sche partielle Summation***
Gegeben seien die Zahlen a_i und b_i mit $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k\,(b_k - b_{k+1}),$$

$$\textit{wobei } A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \textit{ und } b_{n+1} \textit{ beliebig.}$$

Beweis. Setze $A_0 := 0$, dann ist $a_k = A_k - A_{k-1}$ für $k = \{1, ..., n\}$ und es ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})\,b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k =$$

Im nächsten Schritt ändere die obere Summationsgrenze von n auf $n-1$ und in Verbindung damit natürlich den Index des zugehörigen Glieds und ersetze diese Summe dann wiederum durch eine Summe $\sum_{k=1}^{n}$ und einen einzelnen Summanden:

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} =$$

Faktorisiere noch und der Beweis ist beendet.

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k\,(b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}.$$

□

Proposition 32. *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ sei gegeben und A_k ist wie in der vorigen Proposition definiert als $A_k := \sum_{j=1}^{k} a_j$.*
Sind die Folge $(A_n b_{n+1})$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} A_k\,(b_k - b_{k+1})$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Beweis. Die zu beweisende Proposition ergibt sich leicht aus der Abel'schen partiellen Summation, da wie oben bewiesen für gegebenes A_k und beliebiges b_{n+1}

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$$

gilt. Um den Wert der Reihe zu erhalten, wird $\lim_{n\to\infty}$ herangezogen.
Aus den Grenzwertsätzen bzw. der Linearität des Grenzwertes von Folgen und Reihen (Satz 7, Proposition 27) und der Konvergenz der gegebenen Folge und der vorliegenden Reihe folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ ebenfalls konvergent ist. □

Satz 44. ***Abel'sches Kriterium***
Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und die Folge $(b_k) \in \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ monoton und beschränkt. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Beweis. Setze wie zuvor wieder $A_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$, (A_n) und (b_n) sind konvergente Folgen. Das ist bekannt, weil (b_n) monoton und beschränkt ist.
Nach dem Produktsatz als Teil der Grenzwertsätze konvergiert auch die Folge $(A_n b_{n+1})$.
Die Teleskopreihe $\sum_{k=1}^{n} b_k - b_{k+1}$ konvergiert insbesondere absolut, da alle ihre Glieder ≤ 0 oder ≥ 0 sind. Die Partialsumme der Beträge konvergiert. Die absolut konvergenten Glieder werden mit den beschränkten Faktoren A_k multipliziert. Die $\sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$ bleibt weiterhin konvergent, weil die Folge der Absolutteilfolgen durch die Multiplikation beschränkt ist (entsprechend Satz 12, (1)).
Wende nun noch die Proposition 32 an. Damit ist das Abelsche Kriterium bewiesen. □

Satz 45. ***Dirichlet'sches Kriterium***
Sind die Teilsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ beschränkt und strebt (b_k) monoton gegen 0, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Beweis. Sei $A_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$. Die Teilsummen dieser Reihe sind beschränkt und (b_k) strebt monoton gegen 0. Dann konvergiert $A_n b_{n+1}$ ebenfalls gegen 0.
Man begründe wie im vorigen Beweis, dass auch $\sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$ konvergiert.
Nach Proposition 32 ist somit auch das Dirichlet'sche Kriterium bewiesen. □

Beispiele zu den Konvergenztests Diese Beispiele stammen verändert aus den Übungen zu [17].

Beispiel 7. Integraltest und Majorantentest
Untersuche das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{3}{4}}$. Suche eine Majorante.
Schätze dafür zuerst den Nenner ab:
$n^2 - \frac{3}{4} \geq n^2 - \frac{3}{4}n^2 \geq \frac{1}{4}n^2$. Daraus folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{3}{4}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$\frac{1}{n^2}$ ist monoton fallend und der Exponent im Nenner ist größer als 1, also konvergiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{n^2}\, dn$ und dann nach dem Integraltest auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Wende nun den Majorantentest an. Demnach ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{3}{4}}$ konvergent.

Beispiel 8. Wurzeltest
Untersuche das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.
Ziehe die n-te Wurzel und verwende, dass $\sqrt[n]{n}^2 \to 1$, weil $\forall n : \sqrt[n]{n} \to 1$.

$$\frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}^2}{3} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{3} < 1.$$

Daher konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ absolut.

Beispiel 9. Wurzeltest
Untersuche das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^2}{5^n}$.

$$\sqrt[n]{\frac{n^4+3n^2}{5^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^4+3n^2}}{5}$$

Schätze nun nur den Zähler ab:

$$\sqrt[n]{n^4} \leq \sqrt[n]{n^4+3n^2} \leq \sqrt[n]{4n^4}$$

Das stimmt überein mit

$$\sqrt[n]{n}^4 \leq \sqrt[n]{n^4+3n^2} \leq \sqrt[n]{4} \cdot \sqrt[n]{n}^4$$

Sowohl $\sqrt[n]{n}^4$, als auch $\sqrt[n]{4}$ (und somit auch ihr Produkt) konvergieren gegen 1. Nach dem Sandwichsatz (Satz 9) folgt damit $\sqrt[n]{n^4+3n^2} \to 1$.

$$\sqrt[n]{\frac{n^4+3n^2}{5^n}} \to \frac{1}{5} < 1.$$

Nach dem Wurzeltest ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^2}{5^n}$ somit absolut konvergent, da $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

Beispiel 10. Quotiententest
Untersuche das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.
Betrachte $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

$$\frac{\left|\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|} = \frac{2^n \cdot (n+1)^2}{2^{n+1} \cdot n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \to \frac{1}{2} < 1.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert absolut.
Diese Aufgabe wäre auch mit dem Wurzeltest gut lösbar.

Beispiel 11. Integraltest
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ sei gegeben.
Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ist monoton fallend.
Betrachte daher

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-3x^2}\bigg|_1^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Also konvergiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$.
Unter Anwendung des Integraltests ist daher auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergent.

Beispiel 12. Leibniztest
Betrachte die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$.
$a_n = \frac{1}{n!}$ ist streng monoton fallend und eine Nullfolge, da

$$\frac{1}{1!} > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > ... > \frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!} > ... > 0.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$ aus alternierenden Gliedern besteht, ist auch die dritte und letzte Bedingung des Leibniztests für die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$ erfüllt.

Beispiel 13. Leibniztest
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ sei gegeben. Es soll wieder überprüft werden, ob diese Reihe konvergent ist.
Man schreibe die Reihe um zu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, wobei $a_n = 1$.
Die Reihe entspricht den Kriterien zur Anwendbarkeit des Leibniztests. Einerseits ist a_n monoton fallend und andererseits ist die Reihe alternierend. Die Aussage des Leibniztests war: Es ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ genau dann konvergent, wenn $a_n \to 0$.
Nachdem $a_n \to 1 \neq 0$ folgt aus dem Leibniztest, dass $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ divergiert.

An dieser Stelle soll noch eine andere Beweisvariante vorgestellt werden. Denke zurück zu Satz 34. Im zugehörigen Beweis wurde unter Verwendung der Folge der Partialsummen gezeigt, dass $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ divergiert.
Analog dazu ist es auch für dieses Beispiel von Vorteil die Folge der Partialsummen zu betrachten, die wieder abwechselnd die Werte 1 und 0 annehmen. Daher kann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nicht konvergieren und muss somit divergent sein.

9.4.2 Potenzreihen

Seit Anfang des Reihenkapitels stand die Untersuchung von Zahlenreihen und deren Konvergenzverhalten im Vordergrund. Über die Zahlenreihen hinaus existieren aber noch andere Reihenarten. Nach [26, S. 355] bestehen Funktionsreihen im Gegensatz zu Zahlenreihen aus Summanden, die selbst Funktionen einer bestimmten Variablen sind.
So stellt der Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ eine Funktionenreihe dar, wobei die Glieder entsprechend der Funktionsschreibweise von x abhängig sind. Potenzreihen sind eine Spezialform der Funktionsreihen. Sobald x fix ist, ist diese Potenzreihe eine klassische Zahlenreihe. Was sie exakt auszeichnet, wird durch die nächste Definition aufgeklärt. Die Quellen dieses Kapitels werden wieder [9, 63 Potenzreihen], [17] und [26, 9.2 Potenzreihen] sein. Da Potenzreihen sowohl im Reellen, als auch im Komplexen vorkommen, wird sofort die komplexe Version verwendet.

Definition 49. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ der Entwicklungs- oder Mittelpunkt des Konvergenzintervalles.
Dann nennt man eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe.
Der Definitionbereich einer Potenzreihe besteht aus all jenen komplexen Zahlen z, für die die Potenzreihe konvergiert. Man nennt daher die Menge

$$K := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$$

Konvergenzbereich oder Konvergenzgebiet,
wobei $R := \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe ist.
Für diesen gelten: $\frac{1}{+\infty} := 0$ und $\frac{1}{0} := +\infty$.

Definition 50. Eine Zahl $R \in \mathbb{R}$ ist genau dann der Konvergenzradius der Potenzreihe, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $|z-z_0| < R$ konvergiert und für $|z-z_0| > R$ divergiert.

Durch diese Definitionen ist somit bereits der Konvergenzbereich festgelegt. Außerdem liegt sogar für alle $z \in K$ absolute Konvergenz vor.

Proposition 33. *Falls $|z - z_0| < R$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ absolut.*

Beweis. Die Beweisführung gestaltet sich durch die Anwendung des Wurzelkriteriums sehr leicht.
Ziehe die n-te Wurzel: $\sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|z - z_0|$.
Danach wird der Limes Superior gebildet und $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ verwendet:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z - z_0|}{R} < 1.$$

Aus dem Wurzelkriterium folgt daher, dass $\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n$ absolut konvergiert. □

In Abbildung 22 werden alle möglichen Fälle im Reellen in Form eines Konvergenzintervalls gut zusammengefasst. Falls x in $(x_0 - r, x_0 + r)$ liegt, ist die Potenzreihe konvergent. Für alle außerhalb liegenden x ist sie divergent. Für den Rand des Konvergenzintervalls kann keine allgemeingültige Aussage getroffen werden. Der Rand muss bei jeder Aufgabe einzeln überprüft werden.
Im Komplexen muss die Vorstellung des Konvergenzintervalles durch einen Kreis mit Radius R und Mittelpunkt z_0 ersetzt werden. Falls der Konvergenzradius ∞ entspricht, handelt es sich beim Konvergenzgebiet um eine Ebene.

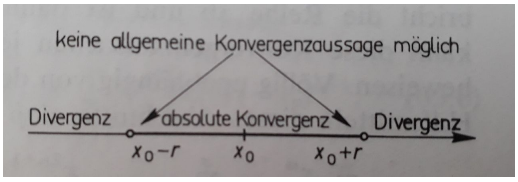

Abbildung 22: Konvergenz- und Divergenzverhalten der Potenzreihe in $\mathbb{R}$, nach [9, Fig. 63.1.]

wichtige Potenzreiheneigenschaften aus [9, S. 364 f.], ergänzt durch [17].

Proposition 34. *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius R_1 und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius R_2 zwei Potenzreihen. Dann gilt:*

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(z - z_0)^n$.
Der Konvergenzradius erfüllt $r \geq \min\{R_1, R_2\}$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n(z - z_0)^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, *wobei* $r \geq R_1$.

(3) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n\right) =$
$= \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0) \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
Der neue Konvergenzradius r erfüllt: $r \geq \min\{R_1, R_2\}$.

Beweis. Die Beweise für (1) und (2) ergeben sich direkt aus der Reihenlinearität (Satz 27) und jener für (3) folgt aus Definition 47, dem Cauchy-Produkt. □

Weitere wichtige Eigenschaften der Potenzreihen sind die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihen, die sich leicht unter Anwendung des Wurzeltests ergibt und die Stetigkeitseigenschaft der Potenzreihen, für deren Beweis die gleichmäßige Konvergenz benutzt wird. Beide Eigenschaften werden noch ausformuliert. Verwende weiterhin [9] und [17] und definiere $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_0)^k$ und $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$.

Proposition 35. *Eine Potenzreihe $f(z)$ mit Konvergenzradius $R > 0$ sei gegeben.*
Wähle $0 < r < R$.
Dann konvergiert $f(z)$ kompakt gleichmäßig, also auf jedem kleineren Teilintervall.
Das bedeutet $f(z)$ konvergiert gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Proposition 36. *Sei $f(z)$ wie zuvor eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Darüber hinaus ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z - z_0| < R$.*
Dann ist f stetig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Man sagt f ist stetig in z.

[17] beweist durch mehrere Abschätzungen mit Hilfe von Teilfolgen, Grenzübergängen und Eigenschaften von Potenzen, Wurzeln und des Betrags, dass der Konvergenzradius beim Differentieren und Integrieren unverändert bleibt. Man achte bei der folgenden Proposition auch auf die Indizes. Es hat eine Indexverschiebung stattgefunden, die es erleichtern soll den jeweiligen Grad zu unterscheiden.

Proposition 37. *Sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann haben $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, a_{n+1}\, (z - z_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\, (z - z_0)^n$ den Konvergenzradius R.*

Der folgende Satz lässt sich unter anderem mit der gerade genannten Proposition beweisen. Darin wird festgehalten wie die Gestalt einer Potenzreihe nach Ableitung und Integration in $\mathbb{R}$ aussieht.

Satz 46. *Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und $x \in \{x : |x - x_0| < R\}$.*
Dann gelten:

(1) $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)\, a_{n+1}\, (x - x_0)^n$.

(2) $\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(x - x_0)^n$.

Beweis. Um den Beweis zu erleichtern, beginne mit

(2) Sei x so, dass $|x - x_0| < R$ und setze $r = |x - x_0| < R$, sodass die Potenzreihe auf $[x_0 - r, x_0 + r]$ konvergiert.
f_n ist stetig. Nach Proposition 35 gilt sogar, dass $f_n \to f$ gleichmäßig. Für f_n gilt dabei: $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t - x_0)^k$.
Die Integrierbarkeit der Grenzfunktion ist gegeben, Grenzwert und Integral können vertauscht werden:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Linearität}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^k\,\mathrm{d}t =$$

Finde nun eine Stammfunktion: $\int_{x_0}^{x}(t - x_0)^k\,\mathrm{d}t = \left.\frac{(t - x_0)^{k+1}}{k + 1}\right|_{x_0}^{x}$ und setze fort.

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k + 1} \overset{\text{Proposition 37}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k}(x - x_0)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(x - x_0)^n.$$

(1) Setze $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)\, a_{n+1}\, (x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius R.
Ziel ist es nun durch Integration und mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zu zeigen, dass $g = f'(x)$ gilt.
Verwende (2) und die Definition von $f(x)$:

$$\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, a_n}{n}(x - x_0)^n = f(x) - a_0.$$

Wegen dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt daher:

$$f'(x) = (f(x) - a_0)' = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)\, a_{n+1}\, (x - x_0)^n$$

und der Konvergenzradius bleibt nach Proposition 37 erhalten. □

Die Untersuchung des Konvergenzverhaltens von Potenzreihen kann erleichtert werden, indem Potenzreihen auf spezielle Potenzreihen wie die geometrische Reihe, die binomische Reihe oder $\sin z$, $\cos z$, e^z zurückgeführt werden, von denen das Konvergenzverhalten allgemein bekannt ist. Diese speziellen Potenzreihen sollen deshalb an dieser Stelle nach [17] mit dem zugehörigen Konvergenzradius angeführt werden.

wichtige Potenzreihen

(1) geometrische Reihe:
$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ R = 1.$

(2) binomische Reihe:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}$ der Binomialkoeffizient, für den gilt, dass $\binom{\alpha}{0} = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist dann

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,\ R = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \alpha \notin \mathbb{N}_0 \\ \infty & \text{, falls } \alpha \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

(3) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ R = \infty.$

(4) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},\ R = \infty.$

(5) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},\ R = \infty.$

Beispiel 14. Ein klassisches Beispiel zur Untersuchung von Potenzreihen ist folgendes: Bestimme den Konvergenzradius und das Konvergenzgebiet von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{7^n}$.
Nach der allgemeinen Form ist $a_n = \frac{1}{7^n}$ und $x_0 = 5$ ist der Entwicklungspunkt.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{7^n}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{7}.$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 7.$$

Bestimme das Konvergenzgebiet noch explizit:
Im Reellen: $K = (x_0 - R, x_0 + R) = (-2, 12)$
im Komplexen: $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-5| < 7\}$

Beispiel 15. Entwickle $\frac{1}{x-3}$ um 6.
In diesem Fall ist eine Zurückführung auf die geometrische Reihe hilfreich. Ihr Konvergenzverhalten ist bereits bekannt. Forme deshalb den zu entwickelnden Ausdruck soweit um, dass die geometrische Reihe verwendet werden kann.

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-6)+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-6}{3}\right)} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-6}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-6)^n.$$

Konvergenz liegt für $\left|\frac{x-6}{3}\right| < 1$ vor, für $\left|\frac{x-6}{3}\right| > 1$ handelt es sich um Divergenz.
Wegen Definition 50 ist $R = 3$.

Bisher wurde das Konvergenzverhalten offener Intervalle analysiert. Die Randpunkte wurden nicht berücksichtigt, da an diesen Stellen prinzipiell sowohl Konvergenz, als auch Divergenz möglich sind. Der Abel'sche Grenzwertsatz greift gerade diese Problematik auf. Seine Aussage und der Beweis basieren auf [9, S. 379 f.] und weiterhin auf [17], wobei [9] zur Vereinfachung den Entwicklungspunkt 0 voraussetzt und hier die allgemeine Form verwendet wird. Auch das Beispiel zur Illustration stammt von [17].

Satz 47. ***Abel'scher Grenzwertsatz***
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius R ($0 < R < \infty$). Für $z_1 \in \mathbb{C}$ gelte $|z_1 - z_0| = R$, das heißt z_1 liegt am Rand des Konvergenzgebietes. Falls f in z_1 und für sonstige z definiert ist und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert, dann ist die Potenzreihe (linksseitig) stetig. Es gilt:

$$\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t(z_1 - z_0))^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Zusammengefasst bedeutet das, dass bei Konvergenz und Stetigkeit von f in z_1 Potenzreihe und Funktionswert an der Randstelle z_1 übereinstimmen.

Beweis. Der Beweis wird zur besseren Übersichtlichkeit in zwei Schritte aufgeteilt.
Der 1.Schritt besteht aus einer Behauptung und ihrem Beweis.
Behauptung: Unter der Annahme des Konvergenzradius $R = 1$, $z_1 = 1$ und des Mittelpunktes $z_0 = 0$ reicht es aus zu zeigen, dass $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
Bestimme zuerst den Konvergenzradius. Setze $b_n := a_n(z-z_0)^n$, $x = t$.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|z_1 - z_0|} = |z_1 - z_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R \cdot \frac{1}{R} = 1.$$

Wegen der Definition von R entspricht der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 1.
Zeige nun, dass in diesem Fall $\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t(z_1 - z_0))^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ gilt. Verwende dafür die Bezeichnungen von b_n und x.

$$\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t(z_1-z_0))^n = \lim_{t\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n t^n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.
2.Schritt:
Setze $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $A_{-1} = 0$, $A_0 = 0$, $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.
Außerdem setze für $|x| < 1 : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Es soll gezeigt werden, dass $\lim_{x\to 1^-} f(x) = A$ gilt, also der Grenzwert der Potenzreihe dem Funktionswert entspricht.
Trivialerweise gilt $a_n = A_n - A_{n-1}$. Sei $|x| < 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1})\, x^k = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} x^k =$$

$$= A_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k - (\underbrace{A_{-1}}_{=0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} x^k) \overset{\text{Indexverschiebung}}{=} A_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^{k+1} =$$

$$= A_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} (A_k x^k - A_k x^{k+1}) = A_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k (1-x) \overset{\text{Reihenlinearität}}{=} A_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k.$$

Forme um.

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k x^k = \frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \frac{1}{1-x}A_n x^n \to \frac{1}{1-x}f(x),$$

da $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x)$, $A_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ und $x^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, falls $|x|<1$.
Daher konvergiert auch der Ausdruck $\frac{1}{1-x}A_n x^n$ gegen 0.
Daraus ergibt sich dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \frac{1}{1-x}f(x) \Rightarrow f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

Schreibe A um:

$$A = (1-x)\,A\,\frac{1}{1-x} \overset{geom.Reihe\,(|x|<1)}{=} (1-x)\,A\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)\,\sum_{n=0}^{\infty} A x^n.$$

Arbeite nun wieder mit der Grenzwertdefinition:
Sei $\varepsilon > 0$. Da $A_n \to A : \exists N\,\forall n \geq N : |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Wähle nun δ geschickt als $\delta = \min\left\{1, \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\sum_{k=0}^{N}|A_n - A|}\right\} > 0$.
Sei x so, dass $1-\delta < x < 1$.
Ziel ist es nun zu zeigen, dass $\lim_{x\to 1^-} f(x) = A$. Dann ist der Beweis beendet.

$$|f(x)-A| = |(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A x^n| = (1-x)\,|\sum_{n=0}^{\infty}(A_n - A)x^n| \overset{Lemma\ 2}{\leq}$$

$$\leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|A_n - A|\,|x|^n \overset{0<x\leq 1}{=} (1-x)\sum_{n=0}^{N}|A_n - A|\,x^n + (1-x)\sum_{N+1}^{\infty}|A_n - A|\,x^n \leq$$

$$\leq (1-x)\sum_{n=0}^{N}|A_n - A| + \frac{\varepsilon}{2}\,(1-x)\,x^{N+1}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \overset{\text{geom. Reihe}}{\leq} (1-x)\sum_{n=0}^{N}|A_n - A| + \frac{\varepsilon}{2}\,(1-x)\,\frac{1}{1-x}.$$

Da $(1-x) < \delta$, $(1-x)\sum_{n=0}^{N}|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, wegen der Minimumseigenschaft von δ und $(1-x)$ gekürzt werden kann, gilt: $|f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Damit ist $\lim_{x\to 1^-} f(x) = A$ gezeigt und der Abel'sche Grenzwertsatz ist vollständig bewiesen. □

Der Abel'sche Grenzwertsatz erlaubt es die konkreten Grenzwerte einer Potenzreihe zu bestimmen, was nur durch die Verwendung der Konvergenzkriterien nicht möglich wäre, da diese nur eine Aussage darüber treffen können, ob Konvergenz vorliegt. Betrachte dazu ein verkürztes Beispiel aus den Übungen von [17].

Beispiel 16. Entwickle $f(x) = \log(x+1)$ in eine Potenzreihe um 0 und berechne danach $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
Die Ableitung vom Logarithmus ist bekannt. Leite $f(x)$ ab und verwende dann wieder die geometrische Reihe.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $R = 1$, die Reihe ist für $|x| < 1 \Leftrightarrow |-x| < 1$ konvergent und für $|x| > 1 \Leftrightarrow |-x| > 1$ divergent. R bleibt auch nach Integration gleich (Proposition 37). Integriere im nächsten Schritt unter Verwendung des Mittelwertsatzes:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + c.$$

Setze den Entwicklungspunkt 0 ein, um c zu berechnen und die Potenzreihenentwicklung fertigzustellen: $0 = \log(0+1) = f(0) = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} 0^n = c \Leftrightarrow c = 0$.
Daher ist $\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ mit $R = 1$.

Berechne nun $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
Zuerst muss überprüft werden, ob die Reihe konvergent ist. Die alternierende Folge $\frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend und eine Nullfolge. Nach dem Leibniztest ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ daher konvergent.
$f(x) = \log(x+1)$ ist stetig in 1.
Somit ist der Abel'sche Grenzwertsatz anwendbar und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$.

Über die bisherigen Ausführungen hinaus, spielen die Potenzreihen auch in der eindimensionalen komplexen Analysis eine wichtige Rolle. Außerdem sind in der komplexen Analysis die Laurentreihen von besonderer Bedeutung. Im Unterschied zur Potenzreihe (Definition 49) beinhaltet die Laurentreihe nach [18] mit $(a_n)_{-\infty}^{+\infty}$ eine Doppelfolge in $\mathbb{C}$ und sieht folgendermaßen aus: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.
Sie wird durch Aufspaltung in zwei Potenzreihen berechnet:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big)^n.$$

Das Konvergenzgebiet der Laurentreihe ist

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : r := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} < |z-z_0| < R := \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \right\}.$$

Die möglichen geometrischen Vorstellungen der Konvergenzgebiete ändern sich damit auch. Es sind keine einfachen Kreise mehr möglich. Zumindest der Mittelpunkt ist ausgenommen. Bei der Ebene als Konvergenzgebiet ist es das Gleiche.
Diese Bereiche, die nicht zum Konvergenzgebiet gehören, werden als isolierte Singularitäten bezeichnet und werden in der komplexen Analysis gezielt untersucht.

Um den Fokus auf die Unendlichkeit beizubehalten und nicht zu spezifisch zu werden, werden die in der komplexen Analysis stattfindenden Änderungen und Erweiterungen im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht weiter behandelt. Das Augenmerk soll nun im letzten Kapitel auf die Nichtstandardanalysis gelegt werden, die sich durch ihren Zugang deutlich von der Standardanalysis unterscheidet, trotzalldem aber sehr wichtig für die Auseinandersetzung mit der Unendlichkeit ist!

10 Nichtstandardanalysis

Analog zur Unterscheidung zwischen euklidischer und nicht- euklidischer Geometrie lässt auch die Bezeichnung Nichtstandardanalysis bereits vermuten, dass sie sich grundlegend von der geläufigeren Standardanalysis abhebt. Diese wird im Normalfall nur durch die Bezeichnung Analysis gekennzeichnet. Wird die Nichtstandardanalysis angesprochen, darf nicht auf „Nicht-" verzichtet werden.
Ist die Rede von der Nichtstandardanalysis kommt die Sprache in der Regel sehr schnell auf ihren Mitbegründer Abraham Robinson. Dieser erschuf am Anfang der 1960er-Jahre angelehnt an die Modelltheorie die erste Form der Nichtstandardanalysis.
Kurzgefasst zeichnet die Nichtstandardanalysis nach [12, S. 1] aus, dass das Infinitesimale einen Statuswandel vollzieht. Unendlich kleine Größen werden nicht mehr bloß als Hilfsmittel gesehen, sondern werden zu wohldefinierten mathematischen Objekten. Dieser Ansatz ermöglicht die zentrale und vereinfachte Verwendung von unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen, in Fachsprache: des Infinitesimalen und des Infiniten.
Einige strikte Verbote der Analysis fallen durch die Neuerungen der Nichtstandardanalysis weg. Beispielsweise nennen die Autoren, dass der Ausdruck dx innerhalb der Nichtstandardanalysis zu einer realen Größe für numerische Rechnungen wächst, anstatt wie in der populäreren Analysis als uneigenständiger Bestandteil in der Schreibweise von Differentialen oder Integralen zu bestehen.
Erstaunlich ist auch, dass dadurch unter anderem die Integration und die Flächen- oder die Volumsberechnung einen Wandel durchmachen. Die Integration wird von [12, VI] auf eine Summation reduziert, die Flächenberechung salopp mit dem Prozess des Abzählens gleichgesetzt.

Der Nichtstandardanalysis liegt nach [12, S. 2] und [21, S. 24] eine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ auf $^*\mathbb{R}$ zu Grunde. Die Elemente von $^*\mathbb{R}$ werden hyperreelle Zahlen genannt.
$^*\mathbb{R}$ entspricht einem angeordneten Körper, der $\mathbb{R}$, aber darüber hinaus eben auch infinitesimale und unendlich große Elemente enthält. Auf Grund des Transferprinzips gelten über $^*\mathbb{R}$ dieselben formalen Aussagen wie über $\mathbb{R}$, wodurch $^*\mathbb{R}$ in der reellen Analysis anwendbar ist. Betrachtete Funktionen beziehen sich in der Nichtstandardanalysis ebenfalls auf den Definitions- und Wertebereich der hyperreellen Zahlen. Etwas später wird das Wesen dieser Zahlen genauer behandelt.
Über die hyperreellen Zahlen hinaus wird das Gerüst der Nichtstandardanalysis von weiteren, bisher unbekannten, Begriffen wie Filter und Ultrafilter oder Superstruktur aufgebaut.

Ein Ziel dieses Kapitels wird es sein einige Grundzüge dieser Richtung der Analysis zu erläutern. Die Nichtstandardanalysis ist für die Beschäftigung mit der mathematischen Unendlichkeit unerlässlich. Nach der Vorstellung der nötigsten Grundbegriffe werden einige Definitionen, Sätze und Beweise, die bereits im Kapitel der Standardanalysis behandelt wurden, mit der Brille der Nichtstandardanalysis betrachtet. Dadurch soll ein Gespür für die unterschiedlichen Ansätze hergestellt werden und ein Bewusstsein darüber geschaffen werden, dass unterschiedlich gewählte Perspektiven Auswirkungen auf Formulierungen, Interpretationen, Aussagen oder auch auf das Beweisverhalten haben können. Die Voraussetzungen sind entscheidend. Mit welchem Blick und welchen Annahmen werden Sachverhalte der Analysis betrachtet? Präzise und unmissverständliche Begrifflichkeiten sind notwendig. Neue Regeln (z.b. hier durch $^*\mathbb{R}$) können laut [21, S. 24] zu anderen Ergebnissen führen. Andererseits können manche Beweise aber auch einfacher erscheinen und kürzer wirken.

Da es schwierig ist sich eine andere Analysis als bekannt vorzustellen, habe ich den Beschluss gefasst an dieser Stelle bereits naiv mit einem praktischen Beispiel nach [21, S. 193 ff.] zu beginnen. Das soll es den LeserInnen ermöglichen sich vor allen formalen Voraussetzungen ein Bild von der Herangehensweise der Nichtstandardanalysis zu machen. Passend zum vorigen Unterkapitel wird begonnen mit einem Standardbeweis zur Reihenkonvergenz.

Beispiel 17. Wegen $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ ergibt sich der

Satz 48.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... = 1.$$

Beweis. **Standardbeweis**
Zuerst ist zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert.
Wir erinnern uns an die verschiedenen Konvergenzkriterien.
In diesem Fall bietet sich der Majorantentest (Satz 37) an.
Suche zuerst eine Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, indem abgeschätzt wird.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ weil } n^2 < n(n+1) = n^2 + n.$$

Überprüfe nun zuerst mittels Integraltest, ob $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.
Setze $f(x) = \frac{1}{x^2}$. f ist also monoton fallend.
$\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, weil $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-2x}\Big|_1^{\infty} = 0 - \Big(- \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}$.
Somit konvergiert $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und damit auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Mittels Majorantentest konvergiert daher auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
Nachdem die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ gezeigt wurde, kann der Beweis fortgesetzt werden. Berechne nun den Wert der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n+1}\Big) \overset{\textit{Teleskopsumme}}{=} \lim_{m\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{m+1}\Big) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} 1 - \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} = 1 - 0 = 1.$$

□

Beweis. **Nichtstandardbeweis**
Die Konvergenz der Reihe wird ebenfalls im Vornhinein überprüft. Da Konvergenz vorliegt, entsteht bei Summierung bis zum unendlichfernen Glied $n = \Omega$ nur ein unendlichkleiner Fehler und dieser wird im Sinne der Nichtstandardanalysis erlaubt. Als Zeichen der Näherung wird das Symbol $\approx$ verwendet. Es besteht also die Äquivalenz $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta$ unendlich klein ist.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \approx \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\Omega} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{\Omega+1} \approx 1.$$

□

Der Standardbeweis bezieht sich auf bekannte Rechenregeln oder führt eine Grenzwertbestimmung durch. Beim Nichtstandardbeweis wird direkt mit unendlichgroßen festen Werten und einem speziellen unendlichen Kommutativgesetz gerechnet, während der Standardbeweis je nach Rechenschritt ein bis zwei Folgen mit endlichem Grenzwert betrachtet. [21, S. 194] sieht den Vorteil des Nichtstandardbeweises im direkteren Vorgehen und in einer vereinfachten Argumentationslinie, weil weniger verboten wird (z.B. kann mit unendlichgroßen festen Werten gerechnet werden).

Das vorige Beispiel beschäftigt sich mit einem Fall, bei dem die Beweise sich unterscheiden, der Satz aber derselbe ist. Als interessant erscheint jedoch, dass manche Sätze der Standard- und Nichtstandardanalysis sich gegenseitig widersprechen oder auch einer einen anderen enthält. Da die Nichtsstandardanalysis der Analysis aber natürlich nicht diametral gegenüberstehen will, wurden innerhalb der Nichtstandardanalysis zwei Sprachebenen geschaffen- eine interne und eine externe. Nach [21, S. 195] lässt diese Unterscheidung die Grenzen zwischen endlich und unendlich verschwimmen. Daran sieht man wie vorsichtig mit dem Begriff unendlich umgegangen werden muss.
Vergleiche dafür die beiden Sätze, ebenfalls nach [21, S. 195].

Satz 49. ***Standardsatz***
Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar unendlich.

Satz 50. ***Nichtstandardsatz***
Die Anzahl der reellen Zahlen ist kleiner als jede unendlichgroße Zahl (also abzählbar).

Wie im Kapitel zur Mengenlehre thematisiert wurde, gibt es einen Unterschied in der Mächtigkeit zwischen abzählbaren und überabzählbar unendlichen Mengen, wodurch die Sätze ohne Unterscheidung nach Sprachebenen widersprüchlich sind. Berücksichtigt man diese aber, wird das Dilemma zumindest verständlicher. Das unendlichferne Glied Ω ist intern betrachtet endlich, weil damit gerechnet werden kann wie mit normalen natürlichen Zahlen. Extern betrachtet ist es aber unendlichgroß, weil es größer als jede charakteristisch natürliche Zahl ist. Kleine Unterschiede können verschiedene Bedeutungen hervorrufen.

Nach diesen einführenden Worten sollen nun die Strukturen der Nichtstandardanalysis genauer unter die Lupe genommen werden.

10.1 Das Grundgerüst der Nichtstandardanalysis

In diesem Abschnitt werden unter anderem Begriffe wie Filter, Ultrafilter, Superstrukturen und die hyperreellen Zahlen thematisiert. Es wird versucht die wichtigsten Definitionen und Sätze vorzustellen und auch einzelne Beweise durchzuführen, um ein Gefühl für die Struktur der Nichtstandardanalysis zu erhalten. An dieser Stelle soll aber gleich festgehalten werden, dass diese Darstellung stark reduziert ist, um den Fokus auf das eigentliche Thema nicht zu verlieren. Die Nichtstandardanalysis würde alleine schon Stoff genug für mehrere Abschlussarbeiten liefern.
Interessierten LeserInnen empfehle ich zur Vertiefung [12]. Meine Ausführungen beziehen sich Großteils auf dieses detaillierte Werk. Darin können Antworten auf weiterführende Fragen gefunden werden.

10.1.1 Filter und Ultrafilter

Am Beginn der Auseinandersetzung mit der Nichtstandardanalysis muss die mathematische Grundlage platziert sein, die Ultrafilter (hier nach [12, §2 Filter und Ultrafilter]). Ohne sie würden Nichtstandard-Modelle nicht existieren.
Im Folgenden sei I eine feste nicht-leere Menge und $\mathcal{P}(I) := \{A : A \in I\}$ die zugehörige Potenzmenge von I. Beginne mit einer Definition von Filter und Ultrafilter nach [12, S. 8].

Definition 51. Ein System $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ (ein System von Teilmengen von I) wird genau dann Filter genannt, wenn

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$, was bedeutet, dass mindestens eine Teilmenge $\neq \emptyset$ von I zu $\mathcal{F}$ zählt.

(2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$, was bedeutet, dass bei zwei vorhandenen Teilmengen von I, die zu $\mathcal{F}$ gehören auch der Durchschnitt dieser Teilmengen zu $\mathcal{F}$ zählt.

(3) $A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset I \Rightarrow B \in \mathcal{F}$, was bedeutet, dass jede Teilmenge von I, die Obermenge einer zu $\mathcal{F}$ gehörenden Menge ist, selbst zu $\mathcal{F}$ zählt.
Gibt es keinen echten Oberfilter zum gegebenen Filter $\mathcal{F}$, dann wird $\mathcal{F}$ Ultrafilter genannt.

Dass die Unendlichkeit innerhalb der Nichtstandardanalysis unverzichtbar ist, wird auch sofort wieder hervorgehoben, wenn einer der bedeutendsten Filter vorgestellt wird- der Filter der koendlichen Mengen. Koendliche Mengen sind nach [12, S. 9] Mengen, deren Komplement eine endliche Menge ist. Die folgenden Definitionen, Sätze und Beweise zu Filtern und Ultrafiltern entstammen alle [12, S. 11 ff.], wobei kleine Veränderungen vorgenommen wurden.

Definition 52. Sei I eine unendliche Menge. $\mathcal{F}$ wird Filter der koendlichen Mengen genannt, wenn $\mathcal{F} := \{A \subset I : I - A \text{ endlich }\}$ ein Filter über I ist.

Bemerkung 18. Ist $\mathcal{F}$ wie in der obigen Definition, dann ist es immer ein Filter über I, wie sich leicht unter Nachweis der drei Filterbedingungen aus Definition 51 zeigen lässt.

Im Folgenden wird bereits auf einen sehr wichtigen Satz zur Existenz von Ultrafiltern hingearbeitet. Dafür ist das Zorn'sche Lemma die entscheidene Voraussetzung. Es stellt eine Äquivalenz zum Auswahlaxiom dar.

Proposition 38. ***Das Zorn'sche Lemma***
Sei $\langle X, \leq \rangle$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, d.h. eine partiell geordnete Menge, so dass jede nicht-leere total geordnete Menge $K \subset X$ eine obere Schranke hat. Dann besitzt X ein maximales Element.

Satz 51. *Zu jedem Filter $\mathcal{F}_0$ über I existiert ein ihn umfassender Ultrafilter $\mathcal{F}$ über I ($\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$).*

Beweis. Sei $\mathcal{F}_0$ ein Filter über I und wähle $X := \{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I) : \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}, \mathcal{F} \text{ Filter }\}$.
Da $\mathcal{F}_0$ der Definition nach in X liegt, ist X nicht-leer.
Seien zusätzlich $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2 \in X$, dann gilt $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$.

$\langle X, \leq \rangle$ ist also eine partiell-geordnete Menge und es soll im Beweis gezeigt werden, dass

(1) jede nicht-leere totalgeordnete Menge $K \subset X$ eine obere Schranke besitzt

(2) jedes maximale Element von X einem Ultrafilter entspricht, der $\mathcal{F}_0$ enthält.
Wegen den Voraussetzungen von (1) und Proposition 38 besitzt X ein maximales Element. Nachdem (2) gezeigt wurde, ist dann der Satz bewiesen.

Beginne nun mit dem Beweis von (1). Zuerst muss bewiesen werden, dass

$$\mathcal{H} := \cup_{\mathcal{F} \in K} \mathcal{F} (= \{A : A \in \mathcal{F} \text{ für ein } \mathcal{F} \in K\}) \text{ ein Filter ist.}$$

Da $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{H}$ kann daraus gefolgert werden, dass $\mathcal{H} \in X$ ist, wobei $\forall \mathcal{F} \in K : \mathcal{F} \leq \mathcal{H}$. Somit ist $\mathcal{H}$ eine obere Schranke von K.
Es fehlt also nur die drei Bedingungen dafür zu beweisen, dass $\mathcal{H}$ ein Filter ist.
Erstens muss $\mathcal{H}$ eine nicht-leere Menge sein, weil $I \in \mathcal{F}_0 \subset H$. Außerdem kann die leere Menge auch nicht in $\mathcal{H}$ enthalten sein, weil sie für alle $\mathcal{F} \in K$ auch kein Element von $\mathcal{F}$

ist. Damit ist die erste Bedingung gezeigt.
Seien nun $A, B \in \mathcal{H}$. Nach der Definition von $\mathcal{H}$ existieren dann $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in K$, wobei $A \in \mathcal{F}_1$ und $B \in \mathcal{F}_2$.
K ist nach Voraussetzung total geordnet, wodurch $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ bzw. $\mathcal{F}_2 \leq \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ gelten muss. Somit $A, B \in \mathcal{F}_1$ oder $A, B \in \mathcal{F}_2$.
Da $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ beide Filter sind, gilt wegen der zweiten Filtereigenschaft, dass $A \cap B \in \mathcal{F}_1$ oder $A \cap B \in \mathcal{F}_2$. Also ist auch $A \cap B \in \mathcal{H}$.
Es muss noch die dritte Filtereigenschaft von $\mathcal{H}$ gezeigt werden. Gegeben seien also $A \in \mathcal{H}, A \subset B \subset I$. Wegen der Definition von $\mathcal{H}$ ist daher $A \in \mathcal{F}$ für ein $\mathcal{F} \in K$. Es ist bekanntlich $\mathcal{F} \in K$ ein Filter auf I, wodurch $B \in \mathcal{F} \subset \mathcal{H}$.
Beweise nun noch (2).
Bezeichne $\widehat{\mathcal{F}}$ das maximale Element von X. $\widehat{\mathcal{F}}$ ist daher natürlich in X enthalten, wodurch der Filter $\widehat{\mathcal{F}}$ klarerweise $\mathcal{F}_0$ enthält. Bezeichne nun $\mathcal{G}$ mit $\widehat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{G}$ als Filter über I. Wegen $\mathcal{G} \in X$ und der Maximaleigenschaft von $\widehat{\mathcal{F}}$ gilt $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{G}$ und $\widehat{\mathcal{F}}$ ist ein Ultrafilter. □

Bei weiterer Überlegung fällt auf, dass das Wesen der Ultrafilter noch Klärungsbedarf hat. Die folgenden zwei wichtigen Sätze zu den Ultrafiltern werden aber an dieser Stelle ohne Beweise erwähnt. Interessierte LeserInnen können sie unter [12, S. 12 f.] studieren.

Satz 52. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über I. Dann besteht die Äquivalenz*

$$\mathcal{F} \textit{ ist Ultrafilter, genau dann wenn } \forall A \subset I : A \in \mathcal{F} \textit{ oder } I - A \in \mathcal{F}.$$

Bemerkung 19. Mithilfe des Satzes 52 kann auch bewiesen werden, dass der Filter der koendlichen Teilmengen kein Ultrafilter sein kann. Das entscheidende Argument hierbei ist, dass weder A noch $I - A$ in $\mathcal{F}$ liegen, da sonst $\emptyset = A \cap (I - A) \in \mathcal{F}$.

Man beschäftige sich weiter mit den Eigenschaften von einem Filter oder Ultrafilter. Folgender Satz ist leicht mit der Definition eines Filters und einem indirekten Beweis für Teil (2) unter Verwendung des Satzes 52 nach [12, S. 13] zu zeigen.

Satz 53. ***Eigenschaften von (Ultra-)Filtern***

(1) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über I. Dann gilt für $A \subset I$:

$$A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F} \textit{ und } A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{F}.$$

(2) Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter über I. Dann gilt für $A_1, ..., A_n \subset I$:

$$A_1 \cup ... \cup A_n \in \mathcal{F} \to A_k \in \mathcal{F} \textit{ für ein } k \in \{1, 2, ..., n\}.$$

10.1.2 Der Erweiterungskörper *ℝ

Die Vorstellung wie $^*\mathbb{R}$ aussehen könnte, gehört wahrscheinlich zu den größten Hürden im Umgang mit der Nichtstandardanalysis. Es ist zwar möglich der Bildung des Erweiterungskörpers $^*\mathbb{R}$ auf den Grund zu kommen, oft ist es aber sinnvoll sich von zwanghaften bildlichen Vorstellungen zu lösen und sich den wesentlichen, teils auch sehr abstrakten, Charakteristika zu widmen.
Ziel dieses Unterkapitels soll es deshalb sein das Verständnis für $^*\mathbb{R}$ zu schaffen, wobei der Bezug zu den bekannten Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ im Vordergrund steht. Für diesen Teil wurden [12, §3] und [20, 3.2-3.4] verwendet.

Die Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ auf $^*\mathbb{R}$ läuft sehr ähnlich zu jener von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ ab. $^*\mathbb{R}$ wird mit einer Äquivalenzrelation gewonnen, die erst durch einen zu Grunde liegenden Ultrafilter über $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ erschaffen wird. Im Gegensatz zu den Standardmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

besteht $^*\mathbb{R}$ nicht aus Elementen in Form von Zahlen, sondern aus Äquivalenzklassen.
Für einen verständlichen Aufbau sollen zuvor jedoch noch wichtige Bezeichnungen vorgelegt werden.
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die Menge aller Abbildungen $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$, $\alpha(i) \in \mathbb{R}$), wobei die Elemente der Menge mit α, β, γ bezeichnet werden und für Folgen reeller Zahlen stehen.
Komme noch einmal zum erwähnten Ultrafilter $\mathcal{F}$ zurück. Dieser umfasst den Filter der koendlichen Mengen, besteht also selbst über $\mathbb{N}$ mit $N - A \in \mathcal{F}$ für endliche $A \subset \mathbb{N}$. Dass der Filter der koendlichen Mengen enthalten ist, ermöglicht erst die Existenz unendlicher Elemente in $^*\mathbb{R}$.

Dass $^*\mathbb{R}$ ein Körper ist und $\langle ^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ insbesondere ein angeordneter Körper ist, interessiert uns derzeit nicht vordergründig. Es ist im Augenblick von größerer Relevanz einführende Definitionen im Zusammenhang mit $^*\mathbb{R}$ nach [12, S. 16 ff.] und [20, S. 38 ff.] vorzunehmen.

Satz 54. ***Einführung von*** $^*\mathbb{R}$
Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *wird* $\alpha \sim \beta$ *geschrieben, falls* $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) = \beta(i)\} \in \mathcal{F}$ *ist.*
Die Relation $\sim$ *besteht also nur genau dann, wenn höchstens endlich viele Glieder der beiden Folgen verschieden sind.*
Dann ist $\sim$ *eine Äquivalenzrelation in* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*.*
Für $r \in \mathbb{R}$ *sei* $r_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *die konstante Abbildung, die definiert ist durch* $r_{\mathbb{N}}(i) := r$ *für* $i \in \mathbb{N}$*.*
Für $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *setze*

$$\overline{\alpha} := \begin{cases} r & \text{, falls } \alpha \sim r_{\mathbb{N}} \text{ für ein } r \in \mathbb{R} \text{ ist;} \\ \{\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \beta \sim \alpha\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei $^*\mathbb{R} := \{\overline{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$*.*
Es gilt:

(1) $\overline{\alpha} = \overline{\beta} \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$ *für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*;*

(2) $\overline{r_{\mathbb{N}}} = r$ *für* $r \in \mathbb{R}$*;*

(3) $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$*.*

Beweis. Es soll gezeigt werden, dass es sich bei der Relation $\sim$ tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt, $\overline{\alpha}$ eindeutig bestimmt ist und (1),(2),(3) gelten.
Überprüfe zuerst die Bedingungen der Äquivalenzrelation:
Reflexivität liegt vor, weil $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) = \alpha(i)\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ und daher $\alpha \sim \alpha$.
Antisymmetrie ($\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$) gilt, weil $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) = \beta(i)\} = \{i \in \mathbb{N} : \beta(i) = \alpha(i)\}$.
Außerdem ist die Transitivität ($\alpha \sim \beta$ und $\beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$) erfüllt, weil
$\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) = \beta(i)\} \cap \{i \in \mathbb{N} : \beta(i) = \gamma(i)\} \subset \{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) = \gamma(i)\}$.
Wegen den Filtereigenschaften (Satz 53) liegt die gegebene Menge in $\mathcal{F}$.
Zeige nun die Eindeutigkeit der hyperreellen Zahlen $\overline{\alpha}$. Dafür seien $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sowie $r, s \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ und $\alpha \sim s_{\mathbb{N}}$, wodurch wegen der Transitivität $r_{\mathbb{N}} \sim s_{\mathbb{N}}$ und
$\{i \in \mathbb{N} : r_{\mathbb{N}}(i) = s_{\mathbb{N}}(i)\} \in \mathcal{F}$.
Daher gibt es ohne Zweifel ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $r_{\mathbb{N}}(i_0) = s_{\mathbb{N}}(i_0)$, wodurch $r = s$ nach dem ersten Teil des Satzes folgt.
Fehlt (1), (2), (3) zu zeigen. Hierbei ist nur (1) etwas aufwendiger. Um die Äquivalenz zu beweisen, müssen beide Implikationen gezeigt werden.
(1.1.) Setze zuerst $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$ voraus. Unterscheide zwei Fälle. Sei $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ für ein $r \in \mathbb{R}$, so ist der Definition nach $\overline{\alpha} = r$ und somit $\overline{\beta} = r$, was gleichbedeutend ist mit $\beta \sim r_{\mathbb{N}}$. Daher gilt auch $\alpha \sim \beta$ und der erste Fall ist bewiesen.
Sei als zweite Möglichkeit der Fallunterscheidung $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ für kein $r \in \mathbb{R}$, so ist nach der Definition $\overline{\alpha}$ keine reelle Konstante, sondern eine Äquivalenzklasse. Das bedeutet $\alpha \in \overline{\alpha} = \overline{\beta}$

und $\alpha \sim \beta$.
(1.2.) Betrachte nun die zweite Implikation. Sei $\alpha \sim \beta$ vorausgesetzt.
Unterscheide wieder wie zuvor. Sei $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ für ein $r \in \mathbb{R}$. Dann ist $\beta \sim r_{\mathbb{N}}$ und $\overline{\alpha} = r = \overline{\beta}$. Ist aber $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ für kein $r \in \mathbb{R}$, so ist $\beta \sim r_{\mathbb{N}}$ ebenfalls für kein $r \in \mathbb{R}$.
Daher ergibt sich, dass $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ Äquivalenzklassen sind. Außerdem gilt wegen $\alpha \sim \beta$, dass $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$.
(2) Bei $r_{\mathbb{N}} \sim r_{\mathbb{N}}$ ist wegen der Definition $r_{\mathbb{N}} = r$ erfüllt und (3) ergibt sich sofort aus (2). Den $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die äquivalent zu einer konstanten Abbildung sind, wird nämlich die Konstante aus $\mathbb{R}$ zugeordnet und keine Äquivalenzklasse. Damit sind die reellen Zahlen durch $^*\mathbb{R}$ abgedeckt und darüber hinaus gibt es noch weitere Elemente in $^*\mathbb{R}$, womit gewährleistet ist, dass $\mathbb{R}$ und $^*\mathbb{R}$ nicht übereinstimmen. $\square$

Nach diesem langen Beweis stellt sich die Frage wie der rechnerische Umgang mit Elementen aus $^*\mathbb{R}$ nun aussehen könnte. Im Endeffekt ist dieser sehr unkompliziert, wenn bereits etwas mit Äquivalenzklassen gearbeitet wurde. Die Operationen $+, \cdot, \leq$ in $^*\mathbb{R}$ sind Fortsetzungen von $+, \cdot, \leq$ in $\mathbb{R}$. Für Konstanten entsprechen die Rechenweisen einander, da es sich dabei bekanntlich um reelle Zahlen handelt. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dann bleiben sowohl ihre Summe, als auch ihr Produkt Elemente aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Nach [12, S. 18] gilt u.a. für $i \in \mathbb{N} : (\alpha \cdot \beta)(i) = \alpha(i) \cdot \beta(i)$ als Beispiel dafür, dass die Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ punktweise definiert sind. Also ist $\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\alpha + \beta}$ und $\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = \overline{\alpha \cdot \beta}$ mit den Resultaten $\overline{\alpha + \beta}$ und $\overline{\alpha \cdot \beta} \in {}^*\mathbb{R}$.
Für $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$ muss $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) \leq \beta(i)\} \in \mathcal{F}$ gelten. Da die hyperreellen Zahlen durch Äquivalenzklassen gebildet werden, wird für $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ auch jeweils nur ein Repräsentant verlangt. Wie das spezielle Aussehen ist, ist für Berechnungen irrelevant.
Das neutrale Element bezüglich der Addition ist 0, das bezüglich der Multiplikation 1 und das inverse Element bezüglich der Addition zu $\overline{\alpha}$ ist $-\overline{\alpha}$.

In Anlehnung an die „fast-sichere Wahrscheinlichkeit“ P ($P = 1$), die in der Stochastik auftritt, gibt es auch in der Nichtstandardanalysis einen speziellen Ausdruck. Ist dieser bekannt, kann das Rechnen in $^*\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ zurückgeführt werden.
Die Verbindung der Begriffe „fast-sicher“ und „fast-überall“ besteht wie folgt: Jedem Ultrafilter wird nach [12, S. 22] eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Eigenschaften gelten genau dann fast überall, wenn für sie Wahrscheinlichkeit 1 gegeben ist. Demnach ist „fast überall“ folgendermaßen durch dieselbe Quelle definiert:

Definition 53. Rechnen in $^*\mathbb{R}$ durch fast-überall-Rechnen in $\mathbb{R}$
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $r, \varepsilon \in \mathbb{R}$, sowie $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

(1) $\overline{\alpha} = \overline{\beta} \Leftrightarrow \alpha(i) = \beta(i)$ fast überall (also, wenn $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) = \beta(i)\} \in \mathcal{F}$).

(2) $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta} \Leftrightarrow \alpha(i) \leq \beta(i)$ fast überall (also, wenn $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) \leq \beta(i)\} \in \mathcal{F}$).

(3) $|\overline{\alpha} - \overline{\beta}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha(i) - \beta(i)| \leq \varepsilon$ fast überall (also, wenn $\{i \in \mathbb{N} : |\alpha(i) - \beta(i)| \leq \varepsilon\} \in \mathcal{F}$).

(4) $|\overline{\alpha} - r| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha(i) - r| \leq \varepsilon$ fast überall (also, wenn $\{i \in \mathbb{N} : |\alpha(i) - r| \leq \varepsilon\} \in \mathcal{F}$).

Im Teil zur Standardanalysis ist der Unendlichkeitsbegriff die meiste Zet über implizit verwendet worden. Wie bereits erwähnt wurde, baut die Nichtstandardanalysis gerade auf das unendlich Kleine und das unendlich Große auf. Daher werden die wichtigsten Begriffe im Zusammenhang damit schon sehr früh definiert(siehe [12, S. 23 ff.]).

Definition 54. endlich, unendlich, infinitesimal
Seien $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$. Dann nennt man:

(1) $\overline{\alpha}$ endlich bzw. finit, falls $|\overline{\alpha}| \leq n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

(2) $\overline{\alpha}$ unendlich bzw. infinit, falls $|\overline{\alpha}| \geq n \; \forall n \in \mathbb{N}$ ist.

(3) $\overline{\alpha}$ infinitesimal (unendlich klein), falls $|\overline{\alpha}| \leq \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}$.

(4) $\overline{\alpha}$ unendlich nahe bei $\overline{\beta}$ bzw. $\overline{\alpha}$ infinitesimal benachbart zu $\overline{\beta}$ ($\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}$), falls $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$ infinitesimal ist. Zusammengefasst bedeutet das $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta} \Leftrightarrow |\overline{\alpha} - \overline{\beta}| < \frac{1}{n}$ fast überall $\forall n \in \mathbb{N}$.

In $\mathbb{R}$ ist 0 das einzige infinitesimale Element. Liegen zwei reelle Zahlen also unendlich nahe beisammen, müssen sie übereinstimmen. Ob die Existenz infinitesimaler und unendlicher Elemente in ${}^*\mathbb{R}$ immer gegeben ist, wollen wir uns im nächsten Schritt ansehen.
Es kann bereits vorweggenommen werden, dass für infinitesimal benachbarte Elemente in ${}^*\mathbb{R}$ gilt, dass auch ihre additiv inversen Elemente, sowie die Summe zweier solcher Paare und das endliche Produkt ebenfalls infinitesimal benachbart sind.

Satz 55. ***Existenz von infinitesimalen und unendlichen Elementen***

(1) ${}^*\mathbb{R}$ enthält infinitesimale Elemente $\neq 0$, weshalb $\mathbb{R} \subsetneq {}^*\mathbb{R}$.

(2) ${}^*\mathbb{R}$ enthält unendliche Elemente (, ist also nicht-archimedisch).

(3) ${}^*\mathbb{R}$ ist nicht ordnungsvollständig. (Ein angeordneter Körper K heißt nach [12, S. 17] odnungsvollständig, falls jede nicht-leere Teilmenge von K, die eine obere Schranke hat, eine kleinste obere Schranke besitzt.)

Beweis. (1) Wähle eine reelle Folge $\alpha(i) := \frac{1}{i}$ mit $i \in \mathbb{N}$, dann ist $\overline{\alpha} \neq 0$.
[12, 3.8] hält fest, dass bei reellem Grenzwert r einer Folge $\alpha(i)$, wie sie hier gegeben ist, $|\overline{\alpha} - r| < \frac{1}{i} \forall i \in \mathbb{N}$ ist. Angewandt auf $r = 0$ bedeutet das also, dass $\overline{\alpha}$ infinitesimal sein muss.
(2) Hierfür wähle eine reelle Folge $\beta(i) = i$ mit $i \in \mathbb{N}$.
$\lim_{i \to \infty} i = \infty$, wodurch wiederum nach [12, 3.8] $\overline{\beta} \geq i \; \forall i \in \mathbb{N}$.
Da $\overline{\beta} > 0 : |\overline{\beta}| = \overline{\beta}$ und darum ist $\overline{\beta}$ ein unendliches Element.
Das widerspricht der Folgerung aus dem archimedischen Axiom, dass die natürlichen Zahlen nach oben unbeschränkt sind.
(3) Schaffe zuerst die Voraussetzungen: Gegeben sei $\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{R}$ und $\overline{\beta}$ das unendliche Element aus (2), das größer als alle natürlichen Zahlen ist. Der Definition nach ist $\overline{\beta}$ dann eine obere Schranke. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathbb{N}$ keine kleinste obere Schranke besitzt.
Man nehme dafür gleich die obere Schranke $\overline{\beta}$ her. Dann gilt:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \leq \overline{\beta} \Rightarrow n \leq \overline{\beta} - 1.$$

Also ist auch $\overline{\beta} - 1$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Dieser Gedanke kann immer weitergesponnen werden. Deshalb kann keine kleinste obere Schranke existieren. □

Es ist allgemein bekannt, dass die Menge der rationalen Zahlen dicht in der Menge der reellen Zahlen liegt. Das bedeutet, dass sich immer eine rationale Zahl zwischen zwei unterschiedlichen reellen Zahlen befindet. An diese Aussage erinnert der folgende Satz nach [12, S. 25], bei dem $\mathbb{R}$ und ${}^*\mathbb{R}$ beteiligt sind.

Satz 56. *Zu jedem endlichen $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ existiert genau ein $r \in \mathbb{R}$, welches unendlich nahe bei $\overline{\alpha}$ liegt.*

Beweis. Sei $\overline{\alpha}$ endlich. Dann existiert nach Definition 54 ein $n_0 \in \mathbb{N} : |\overline{\alpha}| \leq n_0$.
$\overline{\alpha}$ ist beschränkt und es gilt $-n_0 \leq \overline{\alpha} \leq n_0$.
Definiere

$$A := \{s \in \mathbb{R} : s \leq \overline{\alpha}\} \subset \mathbb{R}.$$

Wegen der vorigen Abschätzung von $\overline{\alpha}$ weiß man, dass $-n_0 \in A$ und $s \leq n_0 \forall s \in A$, wodurch klar ist, dass A eine nicht-leere und in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkte Menge ist.
Im Gegensatz zu $^*\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$ ordnungsvollständig, wodurch eine kleinste obere Schranke $r \in \mathbb{R}$ von A existiert.
Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} : r - \frac{1}{n} \leq \overline{\alpha} \leq r + \frac{1}{n}$.
Beweis der Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Da r die kleinste obere Schranke von A ist, kann $r + \frac{1}{n}$ nicht in A liegen und die rechte Ungleichung ist bereits bewiesen.
Demgegenüber kann $r - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von A sein. Also kann auch für $s \in A$ die Ungleichung $s \leq r - \frac{1}{n}$ nicht erfüllt sein, wodurch $r - \frac{1}{n} \leq s \leq \overline{\alpha}$ ist und die Behauptung bewiesen ist.
Durch Umformung der bewiesenen Behauptung stellt sich heraus, dass
$-\frac{1}{n} \leq \overline{\alpha} - r \leq \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}$ gilt und daher $\overline{\alpha}$ infinitesimal benachbart zu r ist ($\overline{\alpha} \approx r$).
Wähle ein ebenso unendlich nahe an $\overline{\alpha}$ liegendes $t \in \mathbb{R}$ ($\overline{\alpha} \approx t$). Da es sich bei $\approx$ um eine Äquivalenzrelation handelt, folgt aus $\overline{\alpha} \approx r$ direkt $t \approx r$. Da beide Elemente aus $\mathbb{R}$ sind, muss $t = r$ sein und r ist eindeutig bestimmt. □

In [12, S. 99 f.] wird über die Begriffe endlich, unendlich, infinitesimal und infinitesimal benachbart hinaus noch die Menge der finiten Elemente inklusive ihrer Eigenschaften definiert. Diese ist dann besonders für das Kapitel „Ausschnitte der reellen Nichtstandardanalsis“ relevant.

Definition 55. Die Menge der finiten Elemente von $^*\mathbb{R}$ wird definiert als

$$\text{fin}(^*\mathbb{R}) := \{x \in {}^*\mathbb{R} : x \,\text{ist finit}\}.$$

Seien $x, y \in^* \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) x, y finit $\Rightarrow x \pm y, x \cdot y$ finit;

(2) x finit und $x \approx y \Rightarrow y$ finit;

(3) x nicht infinitesimal $\Rightarrow \frac{1}{x}$ finit.

Durch Satz 56 und Definition 55 kann eine Abbildung namens Standardteil-Abbildung gebildet werden. Diese geht im Gegensatz zu * von der Nichtstandardwelt zurück in die Standardwelt (siehe [12, S. 100 f.]).

Satz 57.

(1) Sei $y \in \text{fin}(^*\mathbb{R})$. Dann existiert ein eindeutiges $r \in \mathbb{R}$ mit $y \approx r$ und es wird $st(y)$ genannt.

(2) Es ist $st : \text{fin}(^*\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ und $y_1, y_2 \in \text{fin}(^*\mathbb{R})$. Dann gilt:
(a) $st(y_1 \pm y_2) = st(y_1) \pm st(y_2)$;
(b) $st(y_1 \cdot y_2) = st(y_1) \cdot st(y_2)$;
(c) $st\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{st(y_1)}{st(y_2}$, falls $st(y_2) \neq 0$.
(d) $y_1 \leq y_2 \Rightarrow st(y_1) \leq st(y_2)$.

Beweis. (1) Sei $r := \sup\{s \in \mathbb{R} : s \leq y\}$. Wie beim Beweis vom Satz 56 gilt
$r - \frac{1}{n} \leq y \leq r + \frac{1}{n}$, was übereinstimmt mit $|y - r| \leq \frac{1}{n}$, was wiederum $y \approx r$ bedeutet. Ist nun $y \approx r'$, so ist wegen der Äquivalenzrelation auch $r \approx r'$ und da im Reellen zwei infinitesimal benachbarte Zahlen gleich sind auch $r = r'$, womit die Eindeutigkeit bewiesen ist.
(2) Sei $r_i := st(y_i)$, wobei $i \in \{1, 2\}$. Dann ist $r_i \approx y_i$ und die jeweiligen Summen oder Differenzen der r_i und y_i sind äquivalent, wonach $st(y_1 \pm y_2) = r_1 \pm r_2 = st(y_1) + st(y_2)$.
Die Beweise von (b) und (c) verlaufen analog und für (d) gilt:
$\forall n \in \mathbb{N} : st(y_1) \leq y_1 + \frac{1}{n} \leq y_2 + \frac{1}{n} \leq st(y_2) + \frac{2}{n}$. □

Die Definitionen und Sätze dieses Abschnittes haben einen guten Einblick darin gegeben, was den Erweiterungskörper $^*\mathbb{R}$ ausmacht und, was ihn von $\mathbb{R}$ unterscheidet.
Nun soll durch die Abbildung 23 und dem zugehörigen Text aus [12, S. 26] noch ergänzend die geometrische Vorstellung geschult werden.
Mit den reellen Zahlen wird bekanntlich die Zahlengerade in Verbindung gebracht. Die Darstellung für $^*\mathbb{R}$ ähnelt ihr, unterscheidet sich aber beispielsweise dadurch, dass es für alle drei disjunkten Bereiche (endlich, negativ unendlich, positiv unendlich) weder kleinste, noch größte Elemente gibt (hier dargestellt durch die Punkte zwischen den verschiedenen Bereichen). Negativ unendliche Werte sind Zahlen, die kleiner als jede reelle Zahl sind, positiv unendliche Werte sind größer als jede reelle Zahl. Besonders ist aber vor allem der Bereich der endlichen Elemente von $^*\mathbb{R}$. Dieser besteht nämlich wieder aus disjunkten Bereichen, die gebildet werden aus den reellen Zahlen und ihren jeweils infinitesimal benachbarten Elementen. Die disjunkten Bereiche werden Monaden genannt und sind folgendermaßen definiert:

$$m(r) := \{r \pm \varepsilon : 0 \leq \varepsilon \approx 0\}, r \in \mathbb{R}.$$

In Abbildung 23 wird die Monade $m(r)$ vergrößert dargestellt. Auch Monaden besitzen kein kleinstes oder größtes Element, da auch Vielfache von ε wie z.B.: $3\varepsilon \approx 0$ sind.
Werden zwei reelle Zahlen r_1, r_2 betrachtet, wobei $r_1 < r_2$ ist, so liegt auch die gesamte Monade $m(r_1)$ links von $m(r_2)$. Es werden also durch eine Monade mit zwei Elementen auch immer alle Elemente dazwischen berücksichtigt.

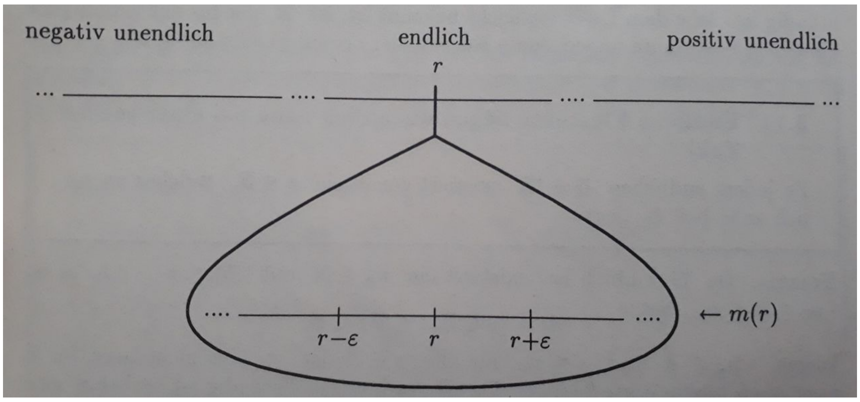

Abbildung 23: geometrische Vorstellung von $^*\mathbb{R}$, nach [12, S. 26]

Um alle Facetten der Monaden noch einmal auf einem Blick zu haben, wird hier noch der passende Satz nach[12, S. 101 f.] angeführt.

Satz 58. *Für $r \in \mathbb{R}$ setze $m(r) := \{y \in^* \mathbb{R} : y \approx r\}$.*
$m(r)$ wird bezeichnet als die Monade des Punktes r. Für $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $m(r) = \{r + \varepsilon : \varepsilon \text{ infinitesimal}\}$;

(2) $m(r) = \{y \in \text{fin}(^*\mathbb{R}) : st(y) = r\}$;

(3) $m(r_1) \cap m(r_2) = \emptyset$, *falls* $r_1 \neq r_2$;

(4) $\text{fin}(^*\mathbb{R}) = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} m(r)$.

Mit dieser Abbildung zum Abschluss dieses Kapitels sollte die Vorstellung von $^*\mathbb{R}$ optimiert werden. Nun ist es möglich sich einem anderen wichtigen Bestandteil der Nichtstandardanalysis zuzuwenden.

10.1.3 Die Superstruktur

Für die allgemeine Nichtstandardtheorie ist der Begriff Superstruktur unverzichtbar, weshalb er auch an dieser Stelle unbedingt behandelt werden muss. Zuerst wird der Begriff der Superstruktur erarbeitet und im Anschluss daran werden grundlegende Einblicke in die Nichtstandardanalysis gegeben, die stark an die mathematische Logik angelehnt ist. Dafür werden [12, §5, 6] verwendet.

Superstrukturen sind nach [12, S. 36 f.] im Allgemeinen Mengen, die alle für eine Theorie benötigten Objekte als Elemente beinhalten.
Man geht von einer nicht-leeren Menge V von Urelementen aus, die keine Mengen sind. Beispielsweise wäre für $V := \mathbb{R}$ jede reelle Zahl ein Urelement. Es wird dann ausgehend von den Urelementen eine Menge $\tilde{V}$ gesucht, die alle durch V erzeugbaren mathematischen Objekte enthält, über die in jeglicher Form Aussagen getätigt werden könnten.

Definition 56. Die Erfordernisse einer Superstruktur $\tilde{V}$
Erfordernisse für $\tilde{V}$ wären

(1) Die Urelemente V sind Teil einer Superstruktur $\tilde{V}$ $(V \in \tilde{V})$.

(2) Befindet sich eine Menge A innerhalb einer Superstruktur $\tilde{V}$, dann auch ihre Potenzmenge $(A \in \tilde{V} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \tilde{V})$.

(3) Sind zwei Mengen A_1, A_2 Teil einer Superstruktur $\tilde{V}$, dann auch ihre Vereinigung $(A_1, A_2 \in \tilde{V} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \tilde{V})$.

(4) Befindet sich eine Menge A in einer Superstruktur $\tilde{V}$, dann auch alle ihre Elemente $(A \in \tilde{V} \Rightarrow a \in \tilde{V}\ \forall a \in A)$.

Nun wird auf eine spezielle Superstruktur $\widehat{V}$ nach [12, S. 37] eingegangen.

Definition 57. Die Superstruktur $\widehat{V}$
Sei V eine nicht-leere Menge von Urelementen. Setze induktiv

$$V_0 := V \text{ , für } \nu \in \mathbb{N}_0, V_{\nu+1} := V_\nu \cup \mathcal{P}(V_\nu) \text{ und } \widehat{V} := \cup_{\nu=0}^{\infty} V_\nu = V_0 \cup V_1 \cup ....$$

Die Menge $\widehat{V}$ heißt Superstruktur über V und ist die kleinste Menge $\tilde{V}$.

Bezüglich der Bezeichnungen soll festgehalten werden, dass Großbuchstaben wie zuvor A für Mengen stehen, bei Kleinbuchstaben wie a können je nach Kontext Mengen oder Urelemente gemeint sein. $\langle a, b\rangle := \{a, \{a, b\}\}$ ist das geordnete Paar von a, b und $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$ ist das geordnete $n-$Tupel von $a_1, ..., a_n$.
Bei gegebenen Mengen $A_1, ..., A_n : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{\langle a_1, ..., a_n\rangle : a_i \in A_i$ für $i = 1, ..., n\}$.
Betrachte nun Eigenschaften von V_ν und $\widehat{V}$ ohne Beweis. Die genauen Schritte und Beweise finden sich bei [12, S. 40]. Proposition 39 ist eine wichtige Voraussetzung für Satz 59 ([12, S. 41]).

Proposition 39. ***Eigenschaften von V_ν***
Für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt:

(1) $A \in V_\nu - V \Leftrightarrow A \subset V_{\nu-1}$*;*

(2) $A \in V_\nu - V \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in V_{\nu+1}$*;*

(3) $B \subset A \in V_\nu - V \Rightarrow B \in V_\nu$*;*

(4) $A_j \in V_\nu - V$ *für* $j \in J \Rightarrow \bigcup_{j\in J} A_j \in V_\nu$*;*

(5) $a, b \in V_{\nu-1} \Leftrightarrow \{a, b\} \in V_\nu$*;*

(6) $a, b \in V_{\nu-1} \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in V_{\nu+1}$*;*

(7) $A, B \in V_\nu - V \Rightarrow A \times B \in V_{\nu+2}$*.*

Satz 59. ***Eigenschaften der Superstruktur*** $\widehat{V}$

(1) $\widehat{V}$ *ist transitiv, d.h.* $A \in \widehat{V} \Rightarrow A \subset \widehat{V}$*;*

(2) $\widehat{V} \notin \widehat{V}$*;*

(3) $A \in \widehat{V}$ *Menge* $\Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \widehat{V}$*;*

(4) $A \in \widehat{V}$ *Menge,* $B \subset A \Rightarrow B \in \widehat{V}$*;*

(5) $A_1, A_2, ..., A_n \in \widehat{V}$ *Mengen* $\Rightarrow A_1 \cup ... \cup A_n \in \widehat{V},\ A_1 \times ... \times A_n \in \widehat{V}$*;*

(6) $a_1, ..., a_n \in \widehat{V} \Rightarrow \{a_1, ..., a_n\} \in \widehat{V}$ *und* $\langle a_1, ..., a_n\rangle \in \widehat{V}$*;*

(7) $A_1, A_2, ..., A_n \in \widehat{V}$ *Mengen* $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \subset V_\nu$ *für ein* $\nu \in \mathbb{N}$*.*

Um die Notation für Relationen und deren Spezialfälle die Funktionen festzulegen, seien an dieser Stelle noch weitere Definitionen nach [12, S. 42] angeführt.

Definition 58. Eine Menge $\mathcal{R}$ heißt Relation, wenn es Mengen A, B mit $R \subset A \times B$ gibt. Der Definitionsbereich einer Relation $\mathcal{R}$ ist definiert durch

$$\mathcal{D}(\mathcal{R}) := \{a \in A : \langle a, b\rangle \in \mathcal{R}\,\text{für ein}\, b \in B\}.$$

Der Wertebereich einer Relation $\mathcal{R}$ ist definiert durch

$$\mathcal{W}(\mathcal{R}) := \{b \in B : \langle a, b\rangle \in \mathcal{R}\,\text{für ein}\, a \in A\}.$$

Ist A_0 eine Menge, schreiben wir $\mathcal{R}[A_0] := \{b \in B : \langle a, b\rangle \in \mathcal{R}\,\text{für ein}\, a \in A_0\}$.
$\mathcal{R}^{-1} := \{\langle b, a\rangle : \langle a, b\rangle \in \mathcal{R}\}$ ist die inverse Relation zu $\mathcal{R}$.
Die Komposition von Relation $\mathcal{R}_2$ mit der Relation $\mathcal{R}_1$ ist definiert durch

$$\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1 := \{\langle a, c\rangle : \langle a, b\rangle \in \mathcal{R}_1\,\text{und}\,\langle b, c\rangle \in \mathcal{R}_2\,\text{für ein}\, b\}.$$

Eine Relation heißt Funktion oder Abbildung, falls gilt: $\langle a, b\rangle \in f$ und $\langle a, c\rangle \in f \Rightarrow b = c$.
Zu jedem $a \in \mathcal{D}(f)$ existiert also genau ein b mit $\langle a, b\rangle \in f$ und es gilt $f(a) = b$.
Ist eine Funktion $f : A \to B$ mit $A_0 \subset A, B_0 \subset B$ gegeben, so schreibt man:

$$f[A_0] = \{f(a) : a \in A_0\};\ f^{-1}[B_0] = \{a \in A : f(a) \in B_0\}.$$

Weitere Erkenntnisse diesbezüglich sind nach [12, §5] beispielsweise, dass mit einer oder zwei Relationen in $\widehat{V}$ auch die inverse Relation, die Komposition, der Definitions- und Wertebereich, sowie für f, A, $B \in \widehat{V}$ und auch $f(a)$, $f[A_0]$, sowie das System aller Funktionen B^A und Operationen über A in $\widehat{V}$ liegen.
Angewandt auf die reelle Analysis bedeutet das, dass alle in ihr vorkommenden Objekte Elemente der Superstruktur $\widehat{\mathbb{R}}$ sind und mittels Aussagen über diese Superstruktur auf die Objekte aus $\mathbb{R}$ geschlossen werden kann.
Der Begriff der Aussage wird in [12, S. 63] erklärt. Aussagen sind demnach Formeln, die aus (an allen Stellen durch Quantoren) gebundenen Variablen bestehen. Variable werden in Folge unterstrichen, einfache Elemente von Superstrukturen nicht.
Formeln in $\widehat{V}$ bestehen wiederum aus den Zeichen $=, \in, \wedge, \forall, \neg, \langle, \rangle, (,)$, dem $\restriction$ als Zeichen im Kontext von Abbildungen, Variablen und Elementen von $\widehat{V}$. So kann beispielsweise für eine Funktion g und ein Element a aus dem Definitionsbereich von g der Ausdruck $g \restriction a$ statt $g(a)$ geschrieben werden (siehe [12, S. 45]).
Die obig erwähnten Zeichen sind die Mindestanforderungen, um alles Nötige darstellen zu können. Natürlich kommen auch andere Zeichen als Ergänzungen und zur vereinfachten Darstellung im Rahmen von Aussagen vor.

Nach der Beschäftigung mit der Superstruktur, folgt nun ein weiterer unverzichtbarer Bestandteil der Nichtstandardtheorie - das Transferprinzip.

10.1.4 Das Transferprinzip zwischen Standard- und Nichtstandardwelt

Bereits in den einführenden Worten zum Kapitel Nichtstandardanalysis durfte das Transferprinzip nicht fehlen. In diesem Abschnitt soll dieses Prinzip nun genauer unter die Lupe genommen werden. Dafür wird [12, §7] herangezogen.

Das Besondere am Transferprinzip ist, dass es ermöglicht Sätze der Standardwelt in die Nichtstandardwelt zu übertragen.
Man gehe dafür wieder von einer beliebigen Menge S aus, die die relevanten Urelemente enthält (z.B.: alle reellen Zahlen). Durch $\widehat{S} = \bigcup_{\nu=0}^{\infty} S_\nu$ ist die zugehörige Superstruktur definiert, die die Standardwelt aufbaut. Die Nichtstandardwelt wird jedoch nicht in derselben Superstruktur liegen, sondern Teil einer noch größeren Superstruktur $\widehat{W}$ sein.
Dadurch kann die Zuordnung eines Objektes ${}^*a \in \widehat{W}$ zu einem $a \in \widehat{S}$ durch die Betrachtung der Abbildung ${}^* : \widehat{S} \to \widehat{W}$ durchgeführt werden. Genauer bedeutet das also, dass für die Objekte ${}^*a$ wegen dem Transferprinzip dieselben Sätze gelten wie für a.

Wir nähern uns dem Thema nun etwas formaler durch [12, S. 66].

Definition 59. satztreue Einbettung und Transferprinzip
Es heißt ${}^* : \widehat{S} \to \widehat{W}$ eine satztreue Einbettung, wenn gilt:

(1) ${}^*S = W$;

(2) ${}^*s = s \ \forall s \in S$;

(3) für alle Aussagen ϕ in $\widehat{S}$ ist ϕ genau dann gültig, wenn ${}^*\phi$ gültig ist. (Transferprinzip)

Da durch (1) $W = {}^*S$ und damit $\widehat{W} = \widehat{{}^*S}$ wird ${}^* : \widehat{S} \to \widehat{W}$ oft durch ${}^* : \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ ersetzt.

Proposition 40. *Das Transferprinzip kann auch anders formuliert werden:*
Ist ϕ eine gültige Aussage in $\widehat{S}$, dann ist ${}^*\phi$ gültig.

Beweis. Aus obiger Proposition folgt direkt (3): Sei nämlich ${}^*\phi$ gültig. Nehme nun indirekt an, dass ϕ nicht gültig ist. Das stimmt mit der Aussage $X \equiv \neg\phi$ überein, woraus die Gültigkeit von ${}^*X \equiv \neg{}^*\phi$ folgt. Damit ist ${}^*\phi$ nicht gültig und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Beschäftigen wir uns nun mit den Folgerungen aus dem Transferprinzip, die durch [12, S. 79 f.] knapp zusammengefasst sind. Demnach erhält die zuvor definierte Abbildung ${}^* : \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ Strukturen und Eigenschaften. Sie überführt

(1) Urelemente in Urelemente

(2) Mengen in Mengen

(3) Teilmengen in Teilmengen

(4) transitive Mengen in transitive Mengen

(5) endliche Mengen in endliche Mengen

(6) endliche Durchschnitte bzw. Vereinigungen in endliche Durchschnitte bzw. Vereinigungen

(7) Relationen in Relationen

(8) Funktionen in Funktionen

(9) Operationen in Operationen

(10) kommutative Gruppen in kommutative Gruppen

(11) Körper in Körper

Durch diese Aufzählung wird schon sichtbar, dass sich das Transferprinzip im Normalfall nur auf endliche Mengen, Durchschnitte und Vereinigungen bezieht.
Für den unendlichen Fall kann man sich also nicht des Transferprinzips bedienen.
Der Grund, warum in $^*\mathbb{R}$ also gerechnet werden kann wie in $\mathbb{R}$ ist, dass die Eigenschaften des angeordneten Körpers $^*\mathbb{R}$ sich unter Anwendung des Transferprinzips aus den entsprechenden Eigenschaften von $\mathbb{R}$ ergeben. Die Übernahme von Strukturen und Eigenschaften (wie oberhalb aufgezählt) rechtfertigt den weiteren Umgang mit $^*\mathbb{R}$.

Bei der Analyse des Transferprinzips wurde bereits naiv der Begriff der Nichtstandardwelt verwendet. Nun wird es Zeit diesen zu definieren. Beginne dafür wie zuvor mit der passenden Einbettung nach [12, S. 82].

Definition 60. Nichtstandardeinbettung
Eine satztreue Einbettung $^* : \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ heißt Nichtstandardeinbettung, falls gilt:

$$\mathbb{R} \subset S \,\text{und}\, \mathbb{R} \neq {}^*\mathbb{R}.$$

Es wurde ebenfalls bereits knapp vor dem Beginn des Unterkapitels „Das Grundgerüst der Nichtstandardanalysis“ erwähnt, dass innerhalb dieses Gebiets zwischen intern und extern unterschieden wird. Die Hintergründe dazu sollen an dieser Stelle beleuchtet werden. Dabei wird wiederum Bezug auf [12, S. 83 f.] genommen.

Definition 61. Nichtstandardwelt, interne und externe Elemente
Sei $^* : \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ eine Nichtstandardeinbettung und $\widehat{S}$ die Standardwelt. Die Menge

$$\mathfrak{F} := \bigcup_{A \in \widehat{S} - S} {}^*A$$

heißt Nichtstandardwelt.
Die Elemente von $\mathcal{F}$ heißen intern, die Elemente von $\widehat{^*S} - \mathfrak{F}$ heißen extern.
Wenn es sich bei den Elementen um Mengen handelt, werden diese interne oder externe Mengen genannt.
Eigenschaften der Nichtstandardwelt sind:

(1) $\mathfrak{F}$ ist transitiv (d.h. Elemente interner Mengen sind intern);

(2) $\emptyset \in \mathfrak{F}, \mathfrak{F} \notin \mathfrak{F}$;

(3) $^*a \in \mathfrak{F}\ \forall a \in \widehat{S}$;

(4) $\langle a, b\rangle,\ a \restriction b,\ \{a, b\} \in \mathfrak{F}\ \forall a, b \in \mathfrak{F}$.

Hilfreich kann bezüglich der Einordnung von $\mathfrak{F}$ auch noch folgende Inklusionskette sein:

$$S \subset {}^*S \subset \mathfrak{F} \subset \widehat{^*S}.$$

$\mathfrak{F}$ besticht nach [12, S. 94] durch seine Abgeschossenheitseigenschaften für $\cup, \cap, -, \times$. Trotzdem soll $\mathfrak{F}$ aber nicht überschätzt werden. Sie ist als kleinste transitive Menge, die alle Standardelemente enthält, eine echte Teilmenge von $\widehat{^*S}$. Die Menge der Standardelemente ist aber auch nur eine Teilmenge der internen Elemente.
Nicht alle Abgeschlossenheitseigenschaften gehen direkt von der Standardwelt in die Nichtstandardwelt über. So ist beispielsweise $\mathfrak{F}$ nur unter endlichem, aber nicht unter abzählbarem Durchschnitt abgeschlossen. Außerdem ist nicht automatisch jede Teilmenge interner Mengen wieder intern. Um zu prüfen, ob das in einem Spezialfall gilt, kann das Prinzip

der internen Definition herangezogen werden.
Zuvor muss noch der Begriff der internen Formel definiert werden. Die folgende Definition, sowie der Satz stammen aus [12, S. 87 f.]. Dort findet sich für die interessierten LeserInnen auch der zugehörige Beweis.

Definition 62. Sei $^* : \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ eine Nichtstandardeinbettung und ϕ eine Formel in $\widehat{^*S}$. ϕ wird interne Formel genannt, wenn alle in der zugehörigen Zeichenreihe auftretenden Elemente von $\widehat{^*S}$ Elemente von $\mathfrak{F}$ sind.

Satz 60. ***Prinzip der internen Definition***
Sei $^* : \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ *eine Nichtstandardeinbettung und* $\phi[\underline{x}_1, ..., \underline{x}_n]$ *sei eine interne Formel. Dann gilt für jede interne Menge* B :
$\{\langle b_1, ..., b_n\rangle \in B : \phi[b_1, ..., b_n]$ *ist gültig*$\}$ *ist eine interne Menge.*

Dieser Satz sagt aus, dass alle Teilmengen einer internen Menge dann ebenfalls intern sind, wenn sie durch interne Formeln beschrieben werden ([12, S. 94]).

Das Permanenzprinzip für interne Formeln ist ein weiteres Prinzip, das auf Grund seiner oftmaligen Verwendung für Beweise unbedingt behandelt gehört. Dieses sagt im Allgemeinen nach [12, S. 102] aus, dass eine - für alle Elemente einer bestimmten externen Menge - gültige interne Aussage auch für eine größere interne Menge gültig bleibt. Mathematisch-formal ist dieses Prinzip wie folgt zu beschreiben. Der Beweis ist wiederum unter oberer Quelle nachzulesen.

Satz 61. ***Permanenzprinzip für interne Formeln***
Sei $\underline{x}$ *die einzige freie Variable und* $\phi[\underline{x}]$ *eine interne Formel.*

(1) Overflow-Prinzip:
Gilt $\phi[n]\,\forall\, n \in \mathbb{N}$. *Dann gibt es ein* $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} : \phi[n]\ \forall n \in {}^*\mathbb{N}$ *mit* $n \leq h$ *gültig ist.*

(2) Underflow-Prinzip:
Gilt $\phi[h]\,\forall\, h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. *Dann gibt es ein* $m \in \mathbb{N} : \phi[n]\ \forall n \in {}^*\mathbb{N}$ *mit* $n \geq m$ *gültig ist.*

(3) Gilt $\phi[\varepsilon]\,\forall\, \varepsilon \approx 0$. *Dann gibt es ein* $c \in \mathbb{R}_+ : \phi[b]\ \forall b \in {}^*\mathbb{R}$ *mit* $|b| \leq c$ *gültig ist.*

Externe Teilmengen von $^*\mathbb{R}$ sind nach [12, S. 104] beispielsweise die Monaden, die Menge der finiten Elemente oder für alle unendlichen Mengen $A \subset \mathbb{R} : A,\ {}^*A - A,\ {}^*\mathbb{R} - A$.
$^*A$ kann hierbei u.a. für $^*\mathbb{N}$ - die hypernatürlichen Zahlen stehen.

Nachdem nun die wichtigsten Grundlagen der Nichtstandardanalysis thematisiert wurden, kann der nächste Schritt hin zur reellen Nichtstandardanalysis gemacht werden.

10.2 Ausschnitte aus der reellen Nichtstandardanalysis

Wie der Titel dieses Unterkapitels schon erahnen lässt, wird der Fokus in diesem Abschnitt auf die reelle Nichtstandardanalysis gelegt. Da die reelle Nichtstandardanalysis (genauso wie die Standardanalysis) sehr umfangreich ist, wird auch hier nur Platz für bewusst gewählte Blitzlichter sein.
Die Auswahl wird angelehnt an die bereits in dieser Diplomarbeit behandelten Teile der Standardanalysis stattfinden.
Ziel dessen ist es die beiden verschiedenen Richtungen der Analysis noch besser kontrastieren zu können. Der didaktische Hintergrund ist dabei, dass durch die verschiedenen Ansätze bereits Bekanntes mit anderen Augen gesehen werden kann und gleichzeitig das unter Anführungszeichen Neue durch bereits bekannte Inhalte leichter erfassbar wird.
Außerdem wurden innerhalb der Standardanalysis die wichtigsten Themen im Zusammenhang mit der Unendlichkeit behandelt und diese sind natürlich auch innerhalb der Nichtstandardanalysis an prominenter Stelle vertreten.

So soll nach der Beschäftigung mit der Unendlichkeit im Rahmen des Konstrukts der Nichtstandardanalysis noch ein konkreterer Blick auf den Stellenwert der Unendlichkeit anhand von weniger abstrakten Beispielen erfolgen. Dabei orientiere ich mich weiterhin an [12] und versuche einen ähnlichen Aufbau wie im Kapitel zur Standardanalysis beizubehalten.

10.2.1 Grenzwerte und Konvergenz von Folgen

Auch im Gebiet der Nichtstandardanalysis wird mit dem Begriff des Grenzwertes einer Folge in [12, §10] begonnen. Auffällig wird sein, dass weniger Definitionen als Sätze vorkommen werden, da die jeweiligen Aussagen für die Nichtstandardanalysis in den meisten Fällen aus den Definitionen der Standardanalysis abgeleitet werden.

Reelle Folgen a_n mit $n \in \mathbb{N}$ sollen als Abbildungen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$ aufgefasst werden. Ist $a \in \widehat{S}$, so ist wegen dem Transferprinzip $^*a : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ und $^*a(n) = a(n) = a_n = {}^*a_n$. Nach dieser kurzen Vorarbeit beschäftigen wir uns jetzt mit dem ersten Satz im Zusammenhang mit Folgengrenzwerten nach [12, S. 106].

Satz 62. ***Grenzwerte und Häufungspunkte in der Nichtstandardanalysis***
Sei $a_n, n \in \mathbb{N}$, eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) a ist Grenzwert von a_n, $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow {}^*a_h \approx a \,\forall\, h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

(2) a ist Häufungspunkt von a_n, $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow {}^*a_h \approx a$ für ein $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Beweis. Beweise die beiden Äquivalenzen wie gewohnt wieder mittels zweier Implikationen.
(1) „ $\Rightarrow$ “: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach der bereits bekannten Grenzwertdefinition für den Grenzwert a von a_n mit $n \in \mathbb{N}$ (Definition 9) und unter veränderter Schreibweise existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$(\forall \underline{n} \in \mathbb{N})(\underline{n} \geq n_0 \Rightarrow |a \restriction \underline{n} - a| \leq \varepsilon).$$

Daher ist nach dem Transferprinzip auch die folgende Aussage erfüllt:

$$(\forall \underline{n} \in {}^*\mathbb{N})(\underline{n} \geq n_0 \Rightarrow |{}^*a \restriction \underline{n} - a| \leq \varepsilon).$$

Deshalb gilt für $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, dass $|{}^*a_h - a| \leq \varepsilon \,\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, wodurch ${}^*a_h \approx a \,\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.
„ $\Leftarrow$ “: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Eine gültige interne Formel ist wegen ${}^*a_h \approx a \,\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ gegeben durch $\phi[\underline{n}] \equiv |a \restriction \underline{n} - a| \leq \varepsilon$.
Wende nun das Permanenzprinzip (Satz 61,(2)) an.
Also $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ für $n \geq n_0 : \phi[n] \,\forall\, n \in {}^*\mathbb{N}$.
Für $n \in \mathbb{N}$ ist aber sogar ${}^*a_n = a$ und daher $|a_n - a| \leq \varepsilon \,\forall n \in \mathbb{N}$ und $n \geq n_0$.
(2) „ $\Rightarrow$ “: Nach Voraussetzung ist a Häufungspunkt von a_n, $n \in \mathbb{N}$.
Wende das Transferprinzip auf die Definition des Häufungspunktes an und erhalte die Aussage ${}^*\psi$:

$$(\forall \underline{\varepsilon} \in {}^*\mathbb{R}_+)\,(\forall \underline{m} \in {}^*\mathbb{N})\,(\exists \underline{n} \in {}^*\mathbb{N})\,(\underline{n} \geq \underline{m} \,\wedge\, |{}^*a \restriction \underline{n} - a| \leq \underline{\varepsilon}).$$

Sei ein infinitesimales $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+$ und $m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.
Da ${}^*\psi$ gilt, existiert ein $h \in {}^*\mathbb{N}$ mit $h \geq m$ und $|{}^*a_h - a| \leq \varepsilon$, wodurch $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, ${}^*a_h \approx a$.
„ $\Leftarrow$ “: Sei zuletzt $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ mit ${}^*a_h \approx a$, sowie $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $m \in \mathbb{N}$.
Dann ist $h \geq m$ und es gilt:

$$(\exists \underline{n} \in {}^*\mathbb{N})\,(\underline{n} \geq m \wedge |{}^*a \restriction \underline{n} - a| \leq \varepsilon).$$

Wende das Transferprinzip an und erhalte

$$(\exists \underline{n} \in \mathbb{N})\,(\underline{n} \geq m \wedge |a \restriction \underline{n} - a| \leq \varepsilon).$$

Es kann also zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $m \in \mathbb{N}$ ein $n \geq m$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ gefunden werden. $\square$

Die Grenzwertsätze gelten unverändert wie in Satz 7.

Ein weiterer wichtiger Bestandteil bei der Auseinandersetzung mit Grenzwerten und dem Konvergenzverhalten von Folgen sind die Konvergenzkriterien, die im Standardanalysisteil unter Satz 12 vorkamen. Wir sehen uns dazu jetzt näher (2) - das Auswahlprinzip bzw. den Satz von Bolzano-Weierstrass und (3) - das Cauchy-Konvergenz-Prinzip an.
Zuerst wird der Satz von Bolzano-Weierstrass nach [12, S. 108] behandelt, für den jedoch noch eine Vorbereitung getroffen werden muss.

Satz 63. ***Beschränktheit einer Folge***
Eine Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$ reeller Zahlen ist genau dann beschränkt, wenn $^*a_h \; \forall\, h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ finit ist.

Beweis. Sei a_n mit $n \in \mathbb{N}$ beschränkt. Das bedeutet: $\exists c \in \mathbb{R} : (\forall n \in \mathbb{N})\, |a \restriction \underline{n}| \leq c$.
Die Anwendung des Transferprinzips liefert wiederum, dass $^*a_n \; \forall n \in {}^*\mathbb{N}$ finit ist, also auch in $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.
Gehe für die zweite Implikation davon aus, dass $^*a_h \; \forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ finit ist. Damit besteht die gültige interne Formel

$$\psi[\underline{m}] \equiv (\forall \underline{n} \in {}^*\mathbb{N})\, |a \restriction \underline{n}| \leq \underline{m} \; \forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}.$$

Wegen des Permanenzprinzips (2) existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\psi[m]$ gültig ist. Dadurch ist $^*a_n = a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ durch m beschränkt. □

Satz 64. ***Satz von Bolzano-Weierstrass in der Nichtstandardanalysis***
Jede beschränkte reelle Zahlenfolge besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis. Gegeben sei eine beschränkte Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$ und $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Mit Hilfe der Definition einer beschränkten Folge (Satz 63) ist klar, dass $^*a_h$ finit ist und wegen dem Standardteilsatz ist $^*a_h \approx st(^*a_h) =: a \in \mathbb{R}$. Daher ist der Definition nach a ein Häufungspunkt von a_n, $n \in \mathbb{N}$. □

Die Cauchy-Konvergenz ist innerhalb der Nichtstandardanalysis durch den folgenden Satz nach [12, S. 108] geregelt. Kurzgefasst sagt er aus, dass die Werte der Folge an unendlich großen Stellen unendlich benachbart sein müssen, damit Cauchy-Konvergenz vorliegt. Der Beweis wird an dieser Stelle ausgelassen, da die Beweisführung wie bereits hinreichend bekannt wieder unter Verwendung des Transfer-, sowie des Permanenzprinzips abläuft.

Satz 65. *Sei $a_n, n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahlenfolge. Dann gilt:*

$$a_n,\, n \in \mathbb{N} \text{ Cauchy-Folge } \Leftrightarrow {}^*a_h \approx {}^*a_k \; \forall\, h, k \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \Leftrightarrow a_n,\, n \in \mathbb{N} \text{ ist konvergent.}$$

Besonders am Beispiel des Cauchy'schen Konvergenzprinzips wird sichtbar, dass öfters eine sehr knappe Formulierung in der Nichtstandardanalysis auftritt. Diese ist aber nach Auseinandersetzung mit dem Grundgerüst der Nichtstandardanalysis oft sehr intuitiv erfassbar. So sind auch die folgenden Propositionen für uneigentliche Grenzwerte und $+\infty$ oder $-\infty$ als Häufungspunkte nach [12, S. 109] nicht überraschend.

Proposition 41. *Sei a_n, $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahlenfolge. Dann gilt:*

(1) $+\infty$ ist uneigentlicher Grenzwert von $a_n, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow^* a_h$ ist positiv unendlich $\forall h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

(2) $-\infty$ ist uneigentlicher Grenzwert von $a_n, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow^* a_h$ ist negativ unendlich $\forall h \in^* \mathbb{N} - \mathbb{N}$.

(3) $+\infty$ ist Häufungspunkt von a_n, $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow {}^*a_h$ ist positiv unendlich für ein $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

(4) $-\infty$ ist Häufungspunkt von a_n, $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow {}^*a_h$ ist negativ unendlich für ein $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Auch die zugehörigen Beweise würden wieder ohne großen Aufwand auf die Definition 20 und das Transferprinzip zurückgreifen.
Es kann also festgestellt werden, dass sich die Beweisführungen innerhalb der reellen Nichtstandardanalysis von Folgen sehr ähneln. Des Weiteren möchte ich mir diesbezüglich noch ein Bild von der Nichtstandardanalysis reeller Funktionen machen.
Das folgende Unterkapitel soll in Kombination mit den Abschnitten Stetigkeit und Differentierbarkeit der Standardanalysis betrachtet werden. Das soll wiederum den Vergleich der beiden Gebiete ermöglichen.

10.2.2 Reelle Funktionen: Stetigkeit und Differentierbarkeit

Im Abschnitt Stetigkeit der Standardanalysis konnte der Stetigkeitsbegriff bereits erarbeitet werden und auch das Verständnis für die Bedeutung von Differentier- und Integrierbarkeit wurde bereits geschaffen.
Daher ist es möglich und auch sinnvoll diesen Teil abgekürzt zu behandeln und nur auf eine Auswahl der wichtigsten Definitionen und Sätze Rücksicht zu nehmen. Immerhin sind die Möglichkeiten für Themen dieser Diplomarbeit schier unendlich und es soll trotz der Fülle an Inhalten nicht der rote Faden verloren gehen.

Ausgegangen wird für die Nichtstandardkriterien für Stetigkeit und Differentierbarkeit nach [12, §11] vom Grenzwert von Funktionen. Dieser muss erst noch definiert werden und das geschieht unter Anlehnung an [12, S. 116]. Den folgenden Aussagen liegt weiterhin eine Nichtstandardeinbettung $^* : \widehat{S} \to \widehat{^*S}$ zugrunde. Außerdem beschäftigen wir uns bekanntlich mit der Funktion $^*f : {}^*\mathbb{R} \to^* \mathbb{R}$, die als Fortsetzung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besteht.

Satz 66. ***Grenzwert einer Funktion in der Nichtstandardanalysis***
Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und in jeder ε-Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ liegt ein Punkt von $\mathcal{D}$ (kurz: x_0 ist Berührungspunkt von $\mathcal{D}$). Sei außerdem $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in \mathbb{R}$.
Dann sind äquivalent:

(1) $\lim_{\mathcal{D}\ni x\to x_0} f(x) = c$;

(2) $(x \in {}^*\mathcal{D}$ *und* $x \approx x_0) \Rightarrow {}^*f(x) \approx c$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2):
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Voraussetzung ist c der Grenzwert von $f(x)$, wenn $x \to x_0$.
Der Definition nach existiert dann ein $\delta \in \mathbb{R}_+$:

$$(\forall \underline{x} \in \mathcal{D})\,(|\underline{x} - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f \upharpoonright \underline{x} - c| \leq \varepsilon).$$

Wende wieder das Transferprinzip an. Dann gilt $\forall x \in {}^*\mathcal{D}$ mit $|x - x_0| \leq \delta : |{}^*f(x) - c| \leq \varepsilon$.
Wenn nun als Voraussetzungen $x \in {}^*\mathcal{D}$ und $x \approx x_0$ gegeben sind, dann folgt
$|{}^*f(x) - c| \leq \varepsilon\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und das bedeutet ${}^*f(x) \approx c$.
(2) $\Rightarrow$ (1):
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. (2) liefert die gültige interne Formel

$$\psi[\underline{n}] \equiv (\forall \underline{x} \in {}^*\mathcal{D})\,(|\underline{x} - x_0| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow |{}^*f \upharpoonright \underline{x} - c| \leq \varepsilon)\ \forall n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}.$$

Nach dem 2. Teil des Permanenzprinzips ist diese interne Formel damit auch für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gültig. Daher folgt (1) daraus, dass für $\delta := \frac{1}{n_0}$:

$$(\forall x \in {}^*\mathcal{D})\,(|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - c| \leq \varepsilon).$$

□

Sehen wir uns nun das Nichtstandardkriterium für Stetigkeit nach [12, S. 116] an und vergleichen dieses mit den Definitionen zur Stetigkeit der Standardanalysis (Definitionen 21, 22, 23, 24).

Satz 67. ***Stetigkeit in der Nichtstandardanalysis***
Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}$ und sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(1) f ist stetig in x_0;

(2) $(x \in {}^*\mathcal{D}$ und $x \approx x_0) \Rightarrow {}^*f(x) \approx f(x_0)$.

Beweis. Für den Beweis reicht es Satz 66 anzuwenden und $c = f(x_0)$ zu wählen. □

Während die zuvor genannten Definitionen der Analysis stärker auf die Verwendung von δ und ε bauen, kommt das in Satz 67 nur implizit vor. Es wäre für den Beweis dieses Satzes (wie in jenem von Satz 66) relevant, direkt in der Formulierung wird jedoch darauf verzichtet. In dieser Ausdrucksweise wird bekanntlich wieder ein infinitesimaler Fehler in Kauf genommen. Stetigkeit in einer bestimmten Stelle liegt also genau dann vor, wenn unter gegebenen Voraussetzungen aus zwei infinitesimal benachbarten Größen folgt, dass auch ihre Bilder wieder infinitesimal benachbart sind.
Die Stetigkeit bei Summen, Differenzen, Produkten oder Verknüpfungen stetiger Funktionen wie in Satz 14 und Proposition 8 gelten natürlich auch in ${}^*\mathbb{R}$ durch Abbildung von f auf ${}^*f$.

Ein weiterer äußerst relevanter Stetigkeitsbegriff ist jener der gleichmäßigen Stetigkeit (Definition 28,(1)). Wir erinnern uns an den Unterschied zwischen gleichmäßiger Stetigkeit und dem allgemeinen Stetigkeitsbegriff. Dabei wird nicht die Stetigkeit in einem Punkt, sondern die gleichmäßige Stetigkeit einer Menge betrachtet und dafür werden zwei Elemente aus dem Definitionsbereich herangezogen. In der Nichtstandardanalysis wird der Begriff nach [12, S. 118] wie folgt erklärt. Hierbei gehen alle infinitesimal benachbarten Punkte wieder in infinitesimal benachbarte Bilder über.

Satz 68. ***gleichmäßige Stetigkeit in der Nichtstandardanalysis***
Sei $\mathcal{D} \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(1) f ist gleichmäßig stetig;

(2) $(x, y \in {}^*\mathcal{D}$ und $x \approx y) \Rightarrow {}^*f(x) \approx f(y)$.

Beweis. „(1) $\Rightarrow$ (2)“:
Der Beweis erfolgt typisch für die bisherigen Nichtstandardbeweise mittels gegebener Definitionen aus der Standardanalysis, der Anwendung des Transferprinzips und darauffolgender Deutung mit $\approx$.
„(2) $\Rightarrow$ (1)“:
Hier wird wieder von einer gültigen Aussage

$$ {}^*\psi \equiv (\exists\, \underline{\delta} \in {}^*\mathbb{R}_+)\, (\forall \underline{x}, \underline{y} \in {}^*\mathcal{D})(|\underline{x} - \underline{y}| \leq \underline{\delta} \Rightarrow |{}^*f \restriction \underline{x} - {}^*f \restriction \underline{y}| \leq \varepsilon \in \mathbb{R}_+) $$

ausgegangen, das Transferprinzip für ein infinitesimales δ angewandt und dadurch die gültige Aussage ψ geliefert, die die gleichmäßige Stetigkeit darstellt. □

Aus Satz 18 wissen wir bereits, dass mit einer auf einer kompakten Menge stetigen Funktion f die gleichmäßige Stetigkeit von f gegeben ist. Der Beweis dazu ist in der Nichtstandardanalysis überraschend einfach.

Satz 69. *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Dieser Beweis erfolgt ohne großen Aufwand durch die Anwendung von Satz 68,(2) und die Wahl von $\mathcal{D} = [a,b]$. Für Elemente $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ wird dann $x, y \in {}^*[a,b]$ betrachtet. Es ist bekanntlich $x \approx y$ gegeben, weshalb $x \approx st(x), y \approx st(y)$ und damit $st(x) = st(y) \in [a,b]$ gilt. Da f stetig ist, gilt also ${}^*f(x) \approx f(st(x)) = f(st(y)) \approx {}^*f(y)$ und die gleichmäßige Stetigkeit von f ist gezeigt. □

Ein weiterer wichtiger Begriff ist jener der Differentierbarkeit. Auch hierfür soll das Nichtstandardkriterium nach [12, S. 119] erfasst werden.

Satz 70. ***Differentierbarkeit in der Nichtstandardanalysis***
Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathcal{D}$ ein Häufungspunkt von $\mathcal{D}$ (also x_0 Berührpunkt von $\mathcal{D} - \{x_0\}$). Außerdem sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $c \in \mathbb{R}$.
Dann sind äquivalent:

(1) f ist differentierbar in x_0 mit der Ableitung $f'(x_0) = c$;

(2) $\frac{{}^*f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx c \; \forall x \in \mathcal{D}$ mit $x \approx x_0$, $x \neq x_0$.

Beweis. Definiere $g(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \in \mathcal{D}_1 := \mathcal{D} - \{x_0\}$.
Nach Voraussetzung ist x_0 ein Häufungspunkt von $\mathcal{D}$, also ein Berührpunkt von $\mathcal{D}_1$.
Der Ausdruck

$$\lim_{\mathcal{D}_1 \ni x \to x_0} g(x) = c$$

entspricht dem ersten Teil der Differentierbarkeitsdefinition.
Eine andere Notation dafür ist: ${}^*g(x) \approx c \forall x \in {}^*\mathcal{D}_1$ mit $x \approx x_0$.
Also ist ${}^*g(x) := \frac{{}^*f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \in {}^*\mathcal{D}_1$, sowie $x \in {}^*\mathcal{D}_1 \Leftrightarrow x \in {}^*\mathcal{D} \wedge x \neq x_0$.
Damit ist (2), sowie sofort auch die Äquivalenz zu (1) gezeigt. □

Mit Hilfe von [20, S. 77] und [12, S. 32] soll noch die Verbindung zu den Ansätzen von Leibniz hergestellt werden und die Differentierbarkeit in der Nichtstandardanalysis präzisiert werden.
Leibniz definierte den uns bekannten Differenzenquotient als $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Wenn sich nun x unendlich nahe an x_0 annähert, werden Δx, Δy unendlich klein. Diese unendlich kleinen Größen wurden von ihm dann Differentiale genannt und mit $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ bezeichnet.
Es wird sich im Folgenden zeigen, dass die Ableitung einer Funktion f innerhalb der Nichtstandardanalysis unter Vernachlässigung eines infinitesimalen Fehlers als Quotient zweier infinitesimaler Größen verstanden wird. In Anlehnung an Leibniz wird daher Satz 70, (2) auch oft direkter mit den Differentialen nach Leibniz in Verbindung gebracht.
In dieser Schreibweise steht dann der infinitesimale Zuwachs ${}^*f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$ im Zähler und die infinitesimale Veränderung $\mathrm{d}x$ im Nenner, wobei $0 \neq \mathrm{d}x \approx 0$ gilt.
Ein wichtiges Ergebnis ist $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \approx f'(x)$, wobei $f'(x)$ der Standardteil von $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ist.
Im Vergleich zur geläufigeren Analysis kann der Differentialquotient zweifelsfrei immer gebildet werden. Das ist für den Grenzwert des Differenzenquotienten aber nicht sicher. Außerdem muss der Differentialquotient nicht für jedes $\mathrm{d}x$ endlich sein. Nur wenn jedes $\mathrm{d}x$ endlich ist und der Standardteil $f'(x)$ nicht von der Wahl von $\mathrm{d}x$ abhängt, existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten und stimmt mit dem Standardteil überein.

Zum Abschluss dieses Abschnittes soll noch der letzte der Grundbegriffe zu Stetigkeit und Differentierbarkeit nach [12, S. 120] behandelt werden: die stetige Differentierbarkeit. Sie ist eine weitere Spezialisierung der Differentierbarkeit von f über $[a,b]$, die wegen Satz 70 wie folgt definiert ist:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann über $[a,b]$ differentierbar, wenn zu jedem $x_0 \in [a,b]$ ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $\frac{{}^*f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx c$, falls $x \in {}^*[a,b], x \approx x_0$, aber $x \neq x_0$.

Satz 71. ***stetige Differentierbarkeit in der Nichtstandardanalysis***
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(1) f ist stetig differentierbar auf $[a,b]$;

(2) zu jedem $x_0 \in [a,b]$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\frac{{}^*f(x)-{}^*f(y)}{x-y} \approx c$ für alle $x, y \in {}^*[a,b]$ mit $x, y \approx x_0$ und $x \neq y$ ist.

Beweis. (1) „⇒“(2):
Berücksichtige die Definition der Differentierbarkeit von f über $[a,b]$, wie sie vor dem zu beweisenden Satz getätigt wurde. Seien demnach $x, y \in {}^*[a,b]$ mit $x, y \approx x_0$ und $x \neq y$.
Es genügt zu beweisen, dass $\frac{{}^*f(x)-{}^*f(y)}{x-y} \approx f'(x_0)$ ist.
Wegen der Stetigkeit von f' gilt nach Satz 67:

$$^*(f')(z) \approx f'(x_0)\ \forall z \in {}^*[a,b]\,\text{mit}\, z \approx x_0.$$

O.B.d.A. gelte $x < y$. Nach Voraussetzung gilt $x, y \approx x_0$ und daher reicht es zu zeigen, dass

$$\frac{{}^*f(x) -{}^* f(y)}{x-y} \approx {}^*(f')(z) \text{ für ein } z \in {}^*\mathbb{R} \text{ wobei } x \leq z \leq y.$$

Beweise diese Behauptung über den Transfer des Mittelwertsatzes der Analysis (Satz 25).
Wegen dem Mittelwertsatz gilt nämlich (01):

$$(\forall \underline{x}, \underline{y} \in [a,b])\,(\underline{x} < \underline{y} \Rightarrow (\exists \underline{z} \in \mathbb{R})\,(\underline{x} < \underline{z} < \underline{y} \wedge \frac{f \restriction \underline{x} - f \restriction \underline{y}}{\underline{x} - \underline{y}} = f' \restriction \underline{z})).$$

Da $x < y$ und $x, y \in {}^*[a,b]$ sind, ist der oben beschriebene Transfer gerechtfertigt und liefert die Gültigkeit der Behauptung (01).
(2) „⇒“(1):
Sei $x_0 \in [a,b]$ beliebig und setze $y = x_0$ für (2), wodurch f in x_0 differentierbar ist und die Ableitung $f'(x_0) = c$ ist.
Da die Differentierbarkeit somit schon gezeigt ist, fehlt nur noch der Beweis der Stetigkeit von f' in x_0.
Sei dafür $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Um die Stetigkeit zu zeigen, muss ein δ eingeführt werden. Es reicht aus zu beweisen, dass ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert, sodass (02):

$$\forall x, y \in [a,b] \text{ mit } x_0 - \delta < x, y < x_0 + \delta,\, x \neq y : \left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} - f'(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Ist diese Behauptung (02) bewiesen, würde nämlich für den gesuchten Grenzwert für $x \to y\ \forall y \in [a,b]$ mit $|y - x_0| < \delta$ gelten, dass $|f'(y) - f'(x_0)| \leq \varepsilon$.
Setze diese Überlegungen nun auch in der Tat um:
Wegen (2) als Voraussetzung gilt die folgende Aussage $^*\phi$:

$$(\exists\, \delta \in {}^*\mathbb{R}_+)\,(\forall\, \underline{x}, \underline{y} \in {}^*[a,b])$$

$$(((x_0 - \underline{\delta} < \underline{x}, \underline{y} < x_0 + \underline{\delta})\ \wedge\ \underline{x} \neq \underline{y}) \Rightarrow \left| \frac{{}^*f \restriction \underline{x} -{}^* f \restriction \underline{y}}{\underline{x} - \underline{y}} - f'(x_0) \right| \leq \varepsilon).$$

Um die Gültigkeit der Aussage $^*\phi$ zu zeigen, muss nur $\delta > 0$ infinitesimal sein.
ϕ gilt dann wegen dem Transferprinzip, wodurch dann (02) und damit (1) gezeigt ist. □

Das Kapitel der Nichtstandardanalysis neigt sich dem Ende zu. Innerhalb der letzten rund zwanzig Seiten haben wir uns dem Themengebiet der Analysis durch eine neue Perspektive genähert. Die Nichtstandardanalysis ist wahrscheinlich das Gebiet, das sich innerhalb der Mathematik am bewusstesten mit der Unendlichkeit beschäftigt. Es existieren im Gegensatz zur Standardanalysis endliche, infinitesimale, aber auch unendlich große Elemente, mit denen auch gerechnet werden kann. Oft scheinen Beweise aus diesem Gebiet kürzer und leichter, da über uns bekannte Verbote der Analysis hinweggesehen wird. Unendlich kleine Fehler werden vernachlässigt. Es wurden neue Begriffe wie Filter und Ultrafilter, Superstrukturen, hyperreelle Zahlen, Standard- und Nichtstandardwelt, interne und externe Aussagen etc. eingeführt, die nun schon normal erscheinen und uns lehren, dass neue (anfänglich vielleicht etwas suspekt wirkende) Sichtweisen im Endeffekt eine große Bereicherung darstellen können.

Teil V
Zusammenfassung und Abstract

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit setzt sich auf verschiedenen Ebenen mit der Unendlichkeit auseinander. Das ist deshalb essentiell, weil das Thema die Vernetzung von Forschungsrichtungen und Disziplinen bedarf. Ohne eine vielschichtige Betrachtung würden die vorhandene Perspektivenvielfalt und die Faszination verborgen bleiben und eine verkürzte Darstellung wäre das Resultat.

Die „interdisziplinäre Betrachtung der Unendlichkeit“ beschäftigt sich als erste Ebene mit den verschiedensten Kontexten der Unendlichkeit. Es werden einige Bereiche aufgezeigt, in denen sie außerhalb der Mathematik ein Gesprächsthema ist. Auffällig ist dabei, dass keine wissenschaftliche Forschungsrichtung eine Vormachtstellung einnimmt, sondern tatsächlich viele Disziplinen miteinander einhergehen. Es steckt viel mehr hinter dem einfachen Symbol ∞, als es auf den ersten Blick scheint.
Das Unendlichkeitssymbol, das erst im 17. Jahrhundert eingeführt wurde, wird oft als Zeichen für die grenzenlose Liebe oder Freundschaft verstanden, genauso wie der Ehering (eben ohne Ende) die unendliche Liebe verkörpert. Im religiösen Kontext findet die Unendlichkeit Einklang in der Auseinandersetzung mit dem Leben nach dem Tod und der Auferstehung. Aus künstlerischer Perspektive sollen Empfindungen der Unendlichkeit geschaffen werden, indem ein Bild immer kleinere Bilder von sich selbst enthält, scheinbar unendliche Tonerhöhungen oder Gedichte mit einer unendlich fortsetzbaren Wiederholung von Strophen geschrieben werden. Die Physik forscht immer weiter in Richtung unendlich kleiner Elemente oder dem unendlich großen Weltall. Im Zusammenhang damit stehen auch immer philosophische Gedanken zu Sein oder Nicht-Sein, unbegrenzten Diskursen, unendlichem Potential und unendlichen Ideen.

Die zweite Betrachtungsebene ist von innermathematisch-geschichtlichen Meilensteinen geprägt. Diese Auseinandersetzung reicht von den Griechen der Antike wie Zenon und Euklid über die Einflüsse von Newton, Leibniz und weiteren Entwicklern der Infinitesimalrechnung und Cantor als Begründer der Mengenlehre und der unendlichen Dezimalzahlen bis hin zu immer noch gegenwärtig diskutierten Paradoxa. Was wäre die heutige Mathematik ohne die frühe Auseinandersetzung mit der Unendlichkeit? Sicher nicht das, was sie heute ist!

Als dritte Ebene dieser Diplomarbeit ist das Vorkommen der Unendlichkeit in einigen verschiedenen gegenwärtigen Forschungsgebieten der Mathematik zu verstehen. Das Kapitel „Rechnen mit der Unendlichkeit“ ist das Herz dieser Arbeit. Es wird gezeigt, dass der Stellenwert der Unendlichkeit innerhalb der elementaren Zahlentheorie beispielsweise sehr klein ist, da sie für die Teilbarkeit irrelevant ist. Innerhalb der Mengenlehre oder der Analysis sieht das hingegen gänzlich anders aus. Die Mengenlehre beschäftigt sich stark mit verschiedenen Mächtigkeiten von unendlichen Mengen. Dabei kommen Begriffe wie Abzählbarkeit oder Überabzählbarkeit, sowie Probleme wie die bis heute unbewiesene Kontinuumshypothese ins Spiel.
Ein besonderer Fokus wird aber auf die eindimensionale reelle Analysis und Nichtstandardanalysis gelegt. Innerhalb der reellen Analysis bauen bereits die grundlegenden Begriffe auf die Unendlichkeit auf. Die Unendlichkeit wird aus dieser Sicht als potentiell erfasst. Das bedeutet die Vorstellung der Unendlichkeit, ihre bedingte Existenz und der unendliche Prozess rücken anstelle des Glaubens an die Existenz eines unendlichen Objektes.

Den Gedanken der Analysis verkörpert der Grenzwertbegriff am besten. Ausgehend vom Grenzwert einer Folge werden die Grundbegriffe der Analysis erarbeitet. Dabei wird der Grenzwert einer Folge durch einen Prozess gebildet, bei dem die Anzahl der Folgenglieder gegen unendlich geht, diesen Wert aber eben nicht erreicht. Der Grenzwert findet infolgedessen Anwendung bei Untersuchungen von Funktionen und Reihen. Von besonderer Bedeutung sind auch die Begriffe der Differentier- und Integrierbarkeit. Eine Funktion wird an einer bestimmten Stelle differentierbar genannt, wenn die Ableitung, d.h. der Grenzwert für $n \to \infty$ des Differenzenquotienten existiert. Das Riemann-Integral wird als Grenzwert der Riemann-Summe verstanden. Die jeweiligen Begriffe werden möglichst intuitiv und logisch aufgebaut und des Weiteren mit wichtigen Definitionen, Propositionen, Sätzen, Beweisen und Beispielen ergänzt. Von besonderer praktischen Relevanz sind dabei Konvergenzuntersuchungen und einfache Berechnungen im Zusammenhang mit der Unendlichkeit.
Zum Abschluss wird die Nichtstandardanalysis in Grundzügen vorgestellt. Sie unterscheidet sich dadurch von der gewöhnlichen Analysis, dass sie vom aktual-Unendlichen und damit von real existierenden infinitesimalen und infiniten Größen ausgeht. Es werden unendlich kleine Fehler vernachlässigt, wodurch einige Verbote der Analysis hinfällig sind. Einige Begriffe, Sätze und Beweise wirken dadurch teilweise intuitiver, einfacher oder kürzer. Dieses Kapitel enthält zuerst einen Überblick über die Struktur der Nichtstandardanalysis. Darin werden Begriffe wie Filter, Superstrukturen, die hyperreellen Zahlen oder das Transferprinzip zwischen Standard- und Nichtstandardwelt vorgestellt.
Danach werden die Grundbegriffe der Analysis in das Licht der Nichtstandardanalysis gerückt, wodurch das Spezielle dieser Forschungsrichtung deutlich wird.

Durch diese Diplomarbeit soll gezeigt werden, dass der Umgang mit der Unendlichkeit ein hohes Maß an abstraktem Denken verlangt. Es braucht einen möglichst offenen und neugierigen Blick, um dem Unendlichen auf die Spur zu kommen. Nach [27, S. 140] stellte bereits der Philosoph und Mathematiker Descartes fest, dass das Problem des Unendlichen darin bestünde, dass es sich von dem bekannten Endlichen unterscheide. Es ist in vielerlei Hinsicht paradox.
Genauso paradox erscheint es auch diese Diplomarbeit über die Unendlichkeit in der Mathematik zu beenden. In diesem Spezialfall ist es aber notwendig das Ende für etwas zu finden, das eigentlich gar kein Ende hat.

Abstract

The aim of this diploma thesis is to examine the complex term of infinity concerning the mathematical occurrence. Infinity has to be observed out of various perspectives, including different levels in order to create a holistic and well-connected understanding of mathematical infinity. In this case the elaboration is divided into three main parts, which stand for three levels of infinity-examination.

The first level deals with approaches to infinity out of disciplines as physics, theology, music, art or philosophy. To give some examples physicists do research on as small particles as possible or on the boundless universe, artists paint pictures, which contain the same picture always a degree smaller or some poets are writing poems with verses repeating endlessly. Adherents of the five main religions have faith in the resurrection, which means that they are convinced of an existing life after death. Bach pretended in his „Neverending Canon“ a sense of infinite modulation. Last but not least, philosophers are reflecting on our existence for several thousand years, are thinking about endless ideas or potential and the connection between limits and infinity.

In addition to that, the second level of interest is the history of infinity in mathematical research. In this part some influences for today's mathematical vision of infinity are described. Euklid, Cantor, Hilbert, Leibniz or Newton affected e.g. geometry, set theory or infinitesimal calculus \ analysis. This level has to be included in this diploma thesis to get a better understanding of difficulties in the development of mathematical infinity.

After discussing the historical and interdisciplinary frame the current state of scientific knowledge is analysed as core of this diploma thesis. The importance of infinity varies throughout the different disciplines. It is decided to concentrate on set theory, but even more important on one dimensional real analysis and non-standard analysis.
In the field of the set theory studies about the cardinality of infinite sets can be found. Words as countable or uncountable are discussed, as well as the proof that it is possible to find for any infinite set further infinite sets with higher cardinality. Attention is also given to the continuous hypothesis and appropriate present scientific results.
Afterwards, the main sections analysis and non-standard analysis are following. They differ in their view on infinity. While the analysis uses infinity as potentially existing (in sense of a process or imagination), the non-standard analysis handles with actually existing infinitesimal and infinite objects.
The limit is probably the most-associated mathematical term with today's infinity. Therefore, the chapter analysis is based on this concept. The following pages are dominated by theorems concerning limits of sequences and series, continuity, differentiability and integrability. The scope is to explain the important role of infinity for these concepts and additionally to show how it is practically used for calculations.
The shorter chapter of non-standard analysis starts with the description of some crucial structural elements for this mathematical field. Explanations of e.g. filter, superstructures, the transfer principle or the hyperreal numbers are followed by a more concrete discussion of the above mentioned concepts of limits, continuity and differentiability. This step should finally empower to compare the roles of infinity between analysis and non-standard analysis.

To sum up, the mathematical infinity is quite abstract and complex. This diploma thesis highlights the need of perspective-changes and a holistic view in order to realise the various issues of infinity throughout the different fields of mathematical research.

Teil VI
Literatur- und Abbildungsverzeichnis

Literatur

[1] A. Ableitinger, Heitzer, *Grenzwerte unterrichten. Propädeutische Erfahrungen und Präzisierungen.* In: mathematik lehren 180, 2 - 10, Friedrich Verlag, Seelze, 2013.

[2] B. Bayrischer Rundfunk (Hrsg.), *Der Tod ist nicht das Ende. Sterben in den Weltreligionen.* online am 02.03.2016: https://www.br.de/themen/religion/religion-tod-weiterleben-weltreligion-100.html, 2016.

[3] B. Breuer (Red.), *Unendlichkeit (plus eins).* In: Spektrum der Wissenschaft Spezial (2), Heidelberg, 2005.

[4] B. Bundesministerium für Bildung (Hrsg.), *Lehrpläne der AHS Oberstufe. Mathematik.* Tagesaktuelle Fassung 22.02.2018.

[5] F. Fulmek, *Skriptum zur Vorlesung Zahlentheorie.* Universität Wien, 2015.

[6] G. Goldstern, *Mengenlehre: Hierarchie der Unendlichkeiten.* http://info.tuwien.ac.at/goldstern/papers/didaktik.pdf, TU Wien, o.J.

[7] H. Hartnett, *Mathematik-Sensation: Von Unendlichkeit zu Unendlichkeit.* Spektrum, online am 13.10.2017: http://www.spektrum.de/news/von-unendlichkeit-zu-unendlichkeit/1507787, 2017.

[8] H. Henning, Hoffkamp, *Aufbau von Vorstellungen zum Grenzwert im Analysisunterricht.* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013 Digital, Vorträge auf der 47.Tagung für Didaktik der Mathematik, 456-459, Berlin, 2013.

[9] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis.* 12.Auflage, B.G.Teubner Stuttgart Leipzig, Stuttgart, 1998.

[10] K. Kippenhahn, *Eins,zwei,drei,...unendlich. Eine Reise an die Grenzen der Mathematik.* Piper Verlag München Zürich, München, 2007.

[11] K. Koth, *Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 6. Differential- und Integralrechnung.* Universität Wien, 2015.

[12] L. Landers, Rogge, *Nichtstandard Analysis.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

[13] L. Lotter, *Kompaktes Wörterbuch der Unendlichkeit.* http://unendliches.net/german/index.htm?, Ronneburg, 2015.

[14] M. Matthiessen, *Die mit dem Berg spricht.* online 04.09.2008: http://www.hotel-feuerberg.at/de/sommer/aktiv/wandern-erleben/erlebnisplaetze/bergreich/, 2008.

[15] M. Monroe, *Bach's Neverending Canon.* online 02.03.2008: https://www.youtube.com/watch?v=A41CITk85jk, 2008.

[16] R. Raith, *Vorlesung zur Einführung in die Analysis.* Universität Wien, 2014.

[17] R. Raith, *Vorlesung zur eindimensionalen Analysis.* Universität Wien, 2014.

[18] R. Raith, *Vorlesung zur mehrdimensionalen reellen und eindimensionalen komplexen Analysis.* Universität Wien, 2015.

[19] R. Revanentcreatives, *Hilbert's paradox of Grand Hotel.* In: Intuitive Science, online 10.03.2017: https://intuitivescienceblog.wordpress.com/2017/03/10/hilberts-paradox-of-grand-hotel/, London, 2017.

[20] S. Sailer, *Eine Einführung in die Nicht-Standard-Analysis. Entstehung, Motivation und Konstruktion der hyperreellen Zahlen.* Diplomarbeit, Universität Wien, 2002.

[21] S. Spalt (Hrsg.), *Rechnen mit dem Unendlichen. Beiträge zur Entwicklung eines kontroversen Gegenstandes.* Birkhäuser Verlag Basel Boston Berlin, 1990.

[22] T. Taschner, *Das Unendliche. Mathematiker ringen um einen Begriff.* 2.Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[23] T. Thiele, *Philosophische Reflexionen über das unendlich Kleine.* In: Geschichte der Analysis, 39-42, Spektrum Akademischer Verlag Berlin Heidelberg, 1999.

[24] V. Vom Hofe, Lotz, Salle, *Analysis: Leitidee Zuordnung und Veränderung.* In: Handbuch der Mathematikdidaktik, 149-184, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015.

[25] W. Walz (Hrsg.), *Lexikon der Mathematik. Band 4.* Springer Spektrum, Mannheim, 2017.

[26] W. Westermann, *Mathematik für Ingenieure. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch.* 6.Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[27] Z. Zellini, *Eine kurze Geschichte der Unendlichkeit.* Verlag C. H. Beck, München, 2010.

Abbildungsverzeichnis

Ich habe mich bemüht, sämtliche InhaberInnen der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.