



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Elementare Differentialgeometrie und die hyperbolische Ebene“

verfasst von / submitted by

Tobias Slowiak

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2017/ Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears on  
the student record sheet:

A190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears on  
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Mag. Dr. Michael Kunzinger



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Klassische Flächentheorie</b>	<b>6</b>
2.1	Raumkurven . . . . .	6
2.2	Grundbegriffe . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Innere Geometrie von Flächen</b>	<b>16</b>
3.1	Riemannsche Metriken und Isometrien . . . . .	16
3.2	Vektorfelder und kovariante Ableitung . . . . .	17
3.3	Krümmung und Krümmungstensor . . . . .	24
3.4	Geodätische und die Exponentialabbildung . . . . .	27
3.5	Geodätische Polarkoordinaten . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Modelle der hyperbolischen Ebene</b>	<b>38</b>
4.1	Das Hyperboloid-Modell . . . . .	38
4.2	Das Beltrami-Klein-Modell . . . . .	53
4.3	Das Poincaré'sche Scheibenmodell . . . . .	57
4.4	Das Halbebene-Modell . . . . .	60
4.5	Ein anderer Zugang . . . . .	63
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>78</b>
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>80</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>82</b>



# 1 Einleitung

Im Zentrum dieser Arbeit steht die Untersuchung der ebenen hyperbolischen Geometrie. Die hyperbolische Geometrie baut auf wenigen Axiomen auf, die sich im sogenannten Parallelenaxiom von denen der herkömmlichen euklidischen Geometrie unterscheiden. Man kann dabei verschiedene Modelle der hyperbolischen Geometrie erzeugen, also mathematische Strukturen, die die Axiome der hyperbolischen Geometrie erfüllen.

Ziel der Arbeit ist es, einige Modelle der hyperbolischen Ebene vorzustellen, also Modelle der hyperbolischen Geometrie in zwei Dimensionen. Sie soll damit für Studierende der Mathematik, die bereits die Grundvorlesungen der linearen Algebra und Analysis absolviert haben, eine Möglichkeit bieten, sich mit der hyperbolischen Geometrie auseinanderzusetzen.

Mit Hilfe der Differentialgeometrie von Flächen lassen sich in besonders anschaulicher Weise Modelle der hyperbolischen Ebene konstruieren. Aus diesem Grund wird in den ersten beiden Kapiteln dieser Arbeit die Differentialgeometrie von Flächen behandelt. Wie bereits erwähnt sind als Grundlage dafür die Grundvorlesungen der linearen Algebra und der Analysis eine Voraussetzung, außerdem sind elementare Kenntnisse von gewöhnlichen Differentialgleichungen nützlich. Diese ersten beiden Kapitel sollen dabei lediglich die Begriffe und Zusammenhänge darstellen, die für die Untersuchung der Modelle der hyperbolischen Ebene benötigt werden. Jene Begriffe und Zusammenhänge werden dabei in einer möglichst anschaulichen und kompakten Weise erarbeitet. Es wird deshalb auf eine mathematisch strenge Darstellung verzichtet.

Mit den Erkenntnissen der Differentialgeometrie von Flächen wird dann ausführlich die Geometrie des sogenannten Hyperboloid-Modells der hyperbolischen Ebene untersucht. Anschließend wird dieses noch in andere Modelle übergeführt, in denen sich einige Aspekte der hyperbolischen Geometrie besser beobachten lassen.

Die Darstellung der Differentialgeometrie von Flächen richtet sich dabei fast ausschließlich nach dem Buch von Christian Bär: *Elementare Differentialgeometrie*, Walter De Gruyter, Berlin, 2. Auflage 2010. Auch die Darstellung der Modelle der hyperbolischen Ebene richtet sich weiten Teils nach diesem Buch. Alle weiteren differentialgeometrischen Erkenntnisse über die hyperbolische Ebene stammen aus dem Buch von Martin R. Bridson und Andre Haefliger: *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1. Auflage 1999.

Es wird außerdem umrissen, wie Modelle der hyperbolischen Geometrie ohne das Grundgerüst der Differentialgeometrie konstruiert werden können, diese Ausführungen richten sich gänzlich nach dem Buch von James W. Anderson: *Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, London, 1. Auflage 1999.



## 2 Klassische Flächentheorie

Wie in der Einleitung erwähnt, sollen in diesem und dem nächsten Kapitel die Begriffe der Differentialgeometrie von Flächen auf eine möglichst anschauliche und kompakte Weise dargestellt werden. Wir verzichten darum auf eine mathematisch strenge Ausarbeitung. Dieses Kapitel richtet sich gänzlich nach [4, Kap.3].

### 2.1 Raumkurven

Wir beginnen damit, zu definieren, wie wir Kurven im Raum betrachten wollen. Dabei beschränken wir uns nur auf die einfachsten Begriffe, es sei jedoch dazu gesagt, dass Kurven an sich bereits eine Fülle an differentialgeometrischen Erkenntnissen bergen.

**Definition 2.1.1.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Abbildung  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *parametrisierte Kurve*, falls sie unendlich oft differenzierbar ist. Sie heißt außerdem *regulär*, falls ihre erste Ableitung auf  $I$  nie verschwindet.

Ohne formale Definition sei darauf hingewiesen, dass wir für unendlich oft differenzierbare Abbildungen im Folgenden auch die übliche Bezeichnung „glatt“ verwenden. Anschaulich gesprochen ist das Bild einer parametrisierten Kurve ein „Strich“ (ein eindimensionales Objekt), den man durch den Raum zieht, wobei dieser keine Sprungstellen haben darf. Falls die parametrisierte Kurve auch regulär ist, kann sie keine „Ecken“ haben. Man wird sich kaum dagegen erwehren können, eine parametrisierte Kurve als Flugbahn eines Körpers zu betrachten, wobei dann natürlich das Argument  $t \in I$  (wir nennen dieses auch Parameter) die Zeit darstellt. Aus dieser Anschauung kommt es auch, dass man die erste Ableitung  $\dot{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  beziehungsweise ihren Betrag manchmal Geschwindigkeit nennt. Es ist intuitiv einsichtig, dass der zurückgelegte Weg gleich Geschwindigkeit mal Zeit ist, damit machen wir folgende

**Definition 2.1.2.** Die *Länge*  $L[c]$  einer parametrisierten Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wobei das Intervall  $I = [a, b]$  sein soll, ist definiert als

$$L[c] := \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle} dt.$$

Dabei stellt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^3$  dar. Ab Kapitel 3 können anstelle des Standardskalarproduktes auch andere Bilinearformen verwendet werden, dazu allerdings später mehr. Wollen wir nur die Länge eines Teiles der parametrisierten Kurve, können wir das Intervall dementsprechend einschränken.

Man kann sich auch vorstellen, dass ein und dieselbe Flugbahn auf verschiedene Weisen durchflogen werden kann, je nachdem, wie schnell man an jedem Punkt der Flugbahn ist. Die folgende Definition präzisiert diese Vorstellung.

**Definition 2.1.3.** Sei  $c : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Kurve. Sei außerdem eine bijektive glatte Abbildung  $\phi : I_2 \rightarrow I_1$  gegeben, deren Umkehrabbildung  $\phi^{-1}$  ebenfalls glatt ist, wobei  $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$  Intervalle sind. Die Abbildung  $c \circ \phi : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *Umparametrisierung* von  $c$ , die zugehörige Funktion  $\phi$  heißt *Parametertransformation*.

Ohne formale Definition sei noch kurz darauf hingewiesen, dass man als *Kurve* die Menge der parametrisierten Kurven bezeichnet, die Umparametrisierungen voneinander sind und somit das gleiche Bild haben.

Wir würden uns für diese Definitionen natürlich wünschen, dass die Länge einer Kurve invariant unter Parametertransformationen ist. In der Analogie zur Flugbahn heißt das also, dass der zurückgelegte Weg gleich lang ist, egal wie schnell man ihn zurück gelegt hat. Dies kann man für diese Definitionen auch zeigen, wir verzichten hier allerdings auf den Beweis. Bezüglich der Geschwindigkeit einer parametrisierten Kurve gibt es noch einen besonders wichtigen Spezialfall.

**Definition 2.1.4.** Eine parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist *proportional zur Bogenlänge parametrisiert*, falls  $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = \text{const}$  ist für alle  $t \in I$ . Sie ist außerdem *mit Bogenlänge parametrisiert*, falls  $\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 1$  ist für alle  $t \in I$ .

Es ist leicht zu sehen, dass für eine parametrisierte Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die nach Bogenlänge parametrisiert ist, die Länge  $L[c] = b - a$  sein muss. Man würde vielleicht zunächst annehmen, dass Parametertransformationen keinen zu großen Einfluss auf geometrische Betrachtungen haben sollten, wir werden aber in Kapitel 3.4 sehen, dass es sehr wohl wichtig ist, *wie* man eine Kurve durchläuft.

Im Folgenden werden wir manchmal auch Kurven in der Ebene betrachten, also solche, deren Bild im  $\mathbb{R}^2$  liegt. Für diese gelten die genannten Begriffe in analoger Weise.

## 2.2 Grundbegriffe

Wir haben gesehen, dass man parametrisierte Kurven in der Differentialgeometrie als glatte Abbildungen von einem Intervall  $I$ , also einem eindimensionalen Objekt, in den Raum betrachtet. Flächen sind zweidimensionale Objekte, somit könnte man vermuten, dass wir Flächen ebenfalls als Abbildungen von einfachen zweidimensionalen Objekten in den Raum betrachten. Die Definition von Flächen korrespondiert tatsächlich zu solchen Abbildungen, es gibt allerdings einige Unterschiede, wie wir in der folgenden Definition sehen werden:

**Definition 2.2.1.** Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Wir betrachten zu jedem Punkt  $p$  in  $S$  zwei zugehörige offene Teilmengen  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $V \subset \mathbb{R}^3$  und eine Abbildung  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wobei  $p$  in  $V$  ist.  $S$  heißt *reguläre Fläche*, falls wir zu jedem Punkt  $p \in S$  ein solches Tripel  $(U, F, V)$  finden können, mit den Eigenschaften, dass

$$F(U) = S \cap V$$

ist, dass  $F : U \rightarrow S \cap V$  glatt und bijektiv ist, sowie, dass  $F^{-1} : S \cap V \rightarrow U$  stetig ist und die Jacobimatrix

$$D_u F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u^1}(u) & \frac{\partial F^1}{\partial u^2}(u) \\ \frac{\partial F^2}{\partial u^1}(u) & \frac{\partial F^2}{\partial u^2}(u) \\ \frac{\partial F^3}{\partial u^1}(u) & \frac{\partial F^3}{\partial u^2}(u) \end{pmatrix}$$

an jedem Punkt  $u \in U$  linear unabhängige Spaltenvektoren hat.

Dabei heißt  $(U, F, V)$  *lokale Parametrisierung* von  $S$  um  $p$ . Wir nennen außerdem  $u = (u^1, u^2)^\top$  die *Koordinaten* von  $F(u)$  bezüglich  $(U, F, V)$ .

Wir wollen uns nun kurz damit beschäftigen, diese zugegebener Maßen etwas umständliche Definition zu interpretieren.

Als erstes stellen wir fest, dass in dieser Definition die regulären Flächen tatsächlich der Menge der Punkte auf der Fläche entsprechen, im Gegensatz zu parametrisierten Kurven, welche Abbildungen sind. Dies liegt vor allem daran, dass sich nicht alle Flächen, die wir betrachten wollen, durch nur eine Abbildung erfassen lassen. Deshalb spricht man auch von einer *lokalen* Parametrisierung, eben weil die Fläche nicht unbedingt als ganzes (global) abgebildet wird. Die Argumente  $u^1$  und  $u^2$  von  $F$  sind dabei das Analogon des Parameters der Kurven, wir nennen sie also auch Parameter, üblicher ist aber die Bezeichnung Koordinaten. Im Allgemeinen kann die Parametrisierung von regulären Flächen sehr kompliziert werden und viele lokale Parametrisierungen verlangen, wir werden allerdings im Rahmen dieser Arbeit mit maximal zwei Abbildungen pro Fläche auskommen. Durch die glatte Abbildung  $F$  nehmen wir also ein einfaches zweidimensionales Objekt, nämlich  $U$ , und bilden es in den  $\mathbb{R}^3$  ab. Wir schränken dabei den  $\mathbb{R}^3$  auf das offene Hilfsvolumen  $V$  ein. Dass  $F$  glatt ist, stellt dabei wieder sicher, dass die Fläche keine Sprungstellen oder Ecken hat. Dass die Spaltenvektoren der Jacobimatrix linear unabhängig sind, stellt grob gesagt sicher, dass  $S$  nicht auf eine Kurve oder einen Punkt „zusammenklappt“. Was die Spaltenvektoren der Jacobimatrix darstellen wird später bei der Tangentialebene noch besser zu sehen sein.

In Abbildung 1 findet sich eine schematische Darstellung der lokalen Parametrisierung einer solchen regulären Fläche.

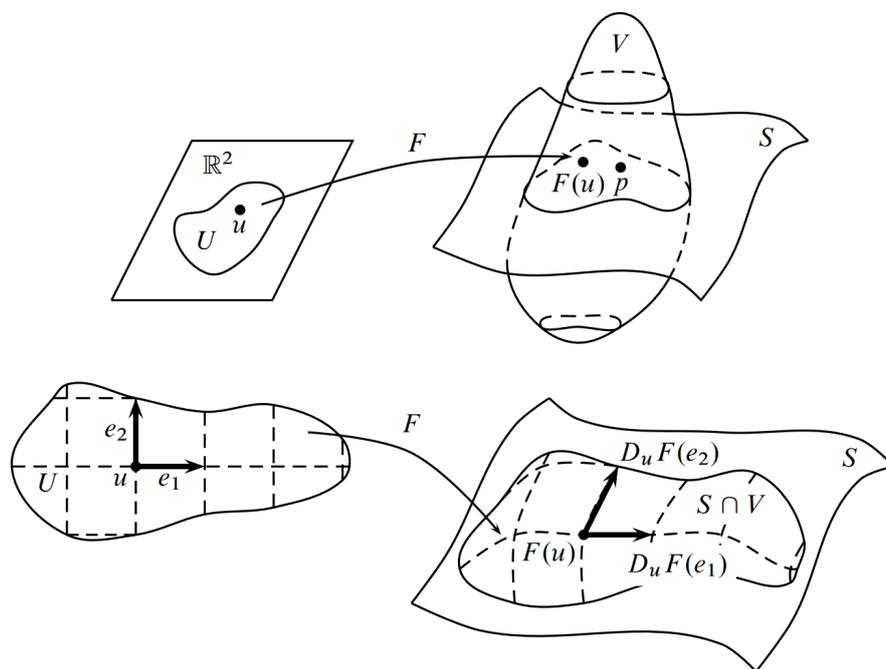


Abbildung 1: Eine schematische Darstellung der lokalen Parametrisierung einer regulären Fläche. Oben ist die lokale Parametrisierung als Abbildung dargestellt, unten liegt das Augenmerk auf den Spaltenvektoren der Jacobimatrix von  $F$ . [4, Kap.3.1, S.93]

Wir benötigen im Folgenden auch Abbildungen, die eine reguläre Fläche auf eine andere abbilden. Eine solche Abbildung muss eine Abbildung vom  $\mathbb{R}^3$  in den  $\mathbb{R}^3$  sein, wobei Definitionsmenge und Zielbereich auf die betrachteten regulären Flächen eingeschränkt werden. Man kann sich vorstellen, dass es nicht besonders elegant wäre die Abbildungen in dieser Form zu betrachten. Wesentlich einfacher wird es, wenn wir mit einer Abbildung zwischen den Koordinatenbereichen arbeiten. Sei also  $f : S_1 \rightarrow S_2$  eine Abbildung zwischen zwei regulären Flächen mit den lokalen Parametrisierungen  $(U_1, F_1, V_1)$  und  $(U_2, F_2, V_2)$  und sei  $p \in V_1 \cap S_1$ . Wir betrachten nun die Abbildung  $F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : U_1 \rightarrow U_2$ . Um im Kontext der Differentialgeometrie mit solchen Abbildungen  $f$  arbeiten zu können, würden wir uns natürlich wünschen, dass sie glatt sind. Über die Abbildung  $f$  selbst fällt es uns schwer zu sagen, ob sie glatt ist. Drücken wir  $f$  in den genannten Koordinaten durch  $F_2^{-1} \circ f \circ F_1$  aus, wissen wir aber, was es für diese Abbildung heißt, glatt zu sein. Wir machen folgende

**Definition 2.2.2.** Seien  $S_1, S_2$  reguläre Flächen und  $f : S_1 \rightarrow S_2$ .  $f$  ist *glatt nahe*  $p$ , falls wir lokale Parametrisierungen  $(U_1, F_1, V_1)$  und  $(U_2, F_2, V_2)$  von  $S_1$  und  $S_2$  finden können, für die  $F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : U_1 \rightarrow U_2$  glatt ist.

Man kann zeigen, dass dies unabhängig von den gefundenen lokalen Parametrisierungen ist. Wenn  $f$  glatt nahe  $p$  ist für alle  $p \in S_1$ , dann ist  $f$  glatt.

Wir sind es aus der Differentialrechnung gewohnt, „runde“ Objekte linear anzunähern. Reelle Funktionen werden zum Beispiel lokal durch ihre Tangente angenähert, wobei deren Steigung die erste Ableitung ist. Auch bei den regulären Flächen werden wir uns einer linearen Näherung bedienen, und zwar durch die folgende

**Definition 2.2.3.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $p$  ein Punkt in  $S$ . Die *Tangentialebene*  $T_p S$  von  $S$  an  $p$  ist die Menge der Vektoren  $v$  in  $\mathbb{R}^3$ , für die man eine parametrisierte Kurve  $c$  finden kann, die in  $S$  verläuft, mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = v$ .

Wenn wir sagen, dass die parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $S$  verläuft, meinen wir natürlich, dass  $c(I) \subset S$  für das Bild der parametrisierten Kurve gilt. Wir betrachten in dieser Definition also parametrisierte Kurven, die in  $S$  verlaufen. Somit muss deren Ableitung in eine Richtung zeigen, die dem Verlauf von  $S$  am Punkt  $p$  folgt. Die Tangentialebene  $T_p S$  einer Fläche  $S$  am Punkt  $p$  ist also die Menge aller Vektoren, die am Punkt  $p$  tangential an  $S$  liegen. Aber Achtung, diese Vektoren  $v$  sind einfache Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ , sie beinhalten also keine Information, die sagt, dass sie an  $p$  anliegen. Wir haben außerdem nicht verlangt, dass die parametrisierte Kurve regulär ist, somit ist auch der Ursprung Teil der Tangentialebene.

Man kann zeigen, dass die so definierte Tangentialebene das Bild der Jacobimatrix einer lokalen Parametrisierung von  $S$  um  $p$  ist. Wenn also  $(U, F, V)$  eine lokale Parametrisierung von  $S$  um  $p$  ist, dann ist die Tangentialebene

$$T_p S = D_u F(\mathbb{R}^2),$$

mit  $F(u) = p$ . Damit bilden die Spaltenvektoren von  $D_u F$  eine Basis für die Tangentialebene. Wir sehen nun auch, dass wir keine Tangentialebene aufspannen könnten, wären die Spaltenvektoren nicht linear unabhängig. Die Spaltenvektoren sind dabei die Bilder der Standardbasisvektoren von  $\mathbb{R}^2$ , also von  $(1, 0)^\top$  und  $(0, 1)^\top$  unter  $D_u F$ . Legt man also eine Ebene tangential an  $S$  an, am Punkt  $p$ , dann entspricht diese Ebene der affinen Tangentialebene  $T_p S + p$ . Die eigentliche Tangentialebene  $T_p S$  geht

durch den Ursprung und bildet somit einen zweidimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ . In Abbildung 2 findet sich eine schematische Darstellung einer solchen Tangentialebene.

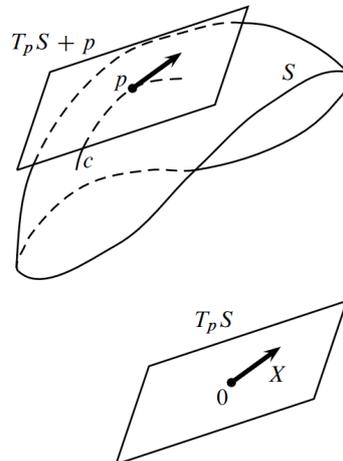


Abbildung 2: Eine schematische Darstellung der Tangentialebene einer regulären Fläche  $S$ . Oben ist ein Teil der Fläche mit der affinen Tangentialebene  $T_p S + p$  an den Punkt  $p \in S$  dargestellt. Unten ist die tatsächliche Tangentialebene dargestellt, wobei  $X$  der Geschwindigkeitsvektor einer parametrisierten Kurve ist, die in  $S$  verläuft. [4, Kap.3.2, S.106]

Wir wollen uns nun noch einmal kurz mit den Abbildungen zwischen regulären Flächen beschäftigen. Wir bestimmen, was das Differential einer solchen Abbildung ist. Diese kann betrachtet werden als die Einschränkung einer Abbildung von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}^3$ . In Anlehnung daran wollen wir also auch für das Differential eine Art Einschränkung des Differentials auf die Vektoren der Tangentialebene. Dies erreichen wir durch folgende

**Definition 2.2.4.** Sei  $f : S_1 \rightarrow S_2$  glatt, wobei  $S_1, S_2$  reguläre Flächen sind. Sei  $p \in S_1$ . Wir betrachten einen Vektor  $v \in T_p S_1$ . Wir können dann eine parametrisierte Kurve  $c$  finden, die in  $S_1$  verläuft, mit  $c(0) = p$ ,  $\dot{c}(0) = v$ . Das *Differential von  $f$  in  $p$*  ist die Abbildung  $d_p f$ , die

$$d_p f(v) = \left. \frac{d}{dt} (f \circ c) \right|_{t=0}$$

erfüllt für alle  $v \in T_p S_1$ .

Dabei ist natürlich  $d_p f(v) \in T_{f(p)} S_2$  für alle  $v \in T_p S_1$ , weil die parametrisierte Kurve  $f \circ c$  in  $S_2$  verläuft und  $(f \circ c)(0) = f(p)$  ist. Man kann zeigen, dass diese Abbildung linear ist (in Analogie zur Jacobimatrix).

Wir wollen nun die Geometrie von regulären Flächen untersuchen. Grundbausteine für geometrische Untersuchungen sind die Fähigkeiten, Winkel und Längen zu mes-

sen. Aus der linearen Algebra sind wir es gewohnt, diese mit Hilfe des Skalarproduktes zu messen. Für reguläre Flächen verwenden wir etwas sehr ähnliches, nämlich die sogenannte *erste Fundamentalform*. Wir werden dazu wieder auf das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^3$  zurückgreifen, nur, dass wir dieses nun auf die Tangentialebenen der betrachteten regulären Fläche einschränken. Wir werden außerdem nicht die Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  in der Standardbasis betrachten, sondern in der Basis der Spaltenvektoren der Jacobimatrix der betrachteten lokalen Parametrisierung  $(U, F, V)$ . Die Form der ersten Fundamentalform ist damit natürlich abhängig von der betrachteten lokalen Parametrisierung. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass wir das Standardskalarprodukt in dieser Basis des zweidimensionalen Unterraumes  $T_p S$  von  $\mathbb{R}^3$  schreiben können als

$$g_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle,$$

wobei  $F(u) = p$  gilt. Wenn wir also den Winkel zwischen zwei parametrisierten Kurven  $c_1$  und  $c_2$ , die in  $S$  verlaufen, wissen wollen, wobei sie sich schneiden sollen in  $c_1(0) = c_2(0) = p$  und wir beide in ihrer Koordinatenform  $\tilde{c}_i = F^{-1} \circ c_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  haben. Dann entspricht die erste Fundamentalform den Ausdrücken

$$\langle \dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0) \rangle = \dot{\tilde{c}}_1(0)^\top (g_{ij}(u)) \dot{\tilde{c}}_2(0) =: I_p(\dot{c}_1(0), \dot{c}_2(0)).$$

Der Winkel ist dann wie gewohnt daraus zu berechnen.

Die erste Fundamentalform birgt noch kaum eine Neuerung gegenüber dem Standardskalarprodukt, das aus der linearen Algebra schon gut bekannt ist. An ihre Stelle werden allerdings in Kapitel 3 die allgemeinen riemannschen Metriken treten, die eine Fülle von neuen Erkenntnissen ermöglichen.

Im Folgenden wollen wir die Krümmung von regulären Flächen untersuchen. Diese kann grob gesprochen daran gemessen werden, wie sich die Tangentialebene neigt, wenn man einer parametrisierten Kurve auf der Fläche folgt. Um die Neigung der Tangentialebene besser zu kodieren machen wir folgende

**Definition 2.2.5.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche. Eine Abbildung  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *Normalenfeld*, falls  $N(p) \perp T_p S$  für alle  $p \in S$  gilt. Falls außerdem  $\|N(p)\| = 1$  für alle  $p \in S$  gilt, heißt  $N$  *Einheitsnormalenfeld* von  $S$ . Aufgefasst als Abbildung zwischen den zwei regulären Flächen  $S$  und der Einheitskugel  $S^2$  nennen wir  $N$  auch die *Gauß-Abbildung*.

Im Zusammenhang mit dem Normalenfeld spricht man von dem Begriff der Orientierbarkeit. Eine Fläche ist orientierbar, falls ein stetiges Normalenfeld über die gesamte Fläche gespannt werden kann. Das klassische Beispiel für eine nicht orientierbare Fläche ist das Möbiusband (vgl. [4, Kap.3.4, S.117]). Anschaulich gesprochen ist eine Fläche orientierbar, falls man ihr eine Ober- und eine Unterseite (austauschbar) zuordnen kann.

Wir wollten uns damit beschäftigen, wie sich die Neigung der Tangentialebene ändert. Dies kodieren wir in der sogenannten Weingartenabbildung in

**Definition 2.2.6.** Sei  $S$  eine orientierbare reguläre Fläche mit Gauß-Abbildung  $N$ . Die Abbildung  $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$ , die durch

$$W_p(v) = -d_p N(v)$$

definiert ist, heißt *Weingartenabbildung*.

Damit ist  $W_p(v)$  wieder in  $T_pS$  für alle  $v \in T_pS$ , weil  $N_p \perp T_pS$  und  $N_p \perp T_{N(p)}S^2$ , damit  $T_pS = T_{N(p)}S^2$ . Man kann zeigen, dass die Weingartenabbildung selbstadjungiert ist bezüglich der ersten Fundamentalform, also  $I_p(v, W_p(w)) = I_p(W_p(v), w)$  für alle  $v, w \in T_pS$ . Aus der linearen Algebra wissen wir, dass wir damit eine eindeutige, der Weingartenabbildung zugehörige, symmetrische Bilinearform  $II_p$  finden können, mit  $II_p(v, w) = I_p(W_p(v), w)$  für  $v, w \in T_pS$ .

**Definition 2.2.7.** Die Bilinearform  $II_p : T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ , die definiert ist durch

$$II_p(v, w) := I_p(W_p(v), w)$$

für alle  $v, w \in T_pS$  heißt die *zweite Fundamentalform* von  $S$  an  $p$ .

Für eine lokale Parametrisierung  $(U, F, V)$  einer regulären Fläche  $S$  mit der entsprechenden Basis der Tangentialebenen führt man die Bezeichnung

$$h_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle \quad (2.1)$$

für  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $u \in U$  für die Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform ein. Für  $\tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}^2$  mit  $D_{\tilde{u}}F(\tilde{v}) = v \in T_pS$  und  $D_{\tilde{u}}F(\tilde{w}) = w \in T_pS$  ist also

$$II_p(v, w) = \tilde{v}^\top (h_{ij}(\tilde{u}))\tilde{w},$$

wobei  $F(\tilde{u}) = p$  gilt. Wir bezeichnen außerdem die Matrixdarstellung der Weingartenabbildung in einer lokalen Parametrisierung mit  $w_i^j(u)$  für  $u \in U$ . Damit ist also zum Beispiel

$$W_p(v) = D_{\tilde{u}}F \left( (w_i^j(\tilde{u})) \cdot \tilde{v} \right).$$

Wir schreiben die zweite Fundamentalform aus mit

$$\tilde{v}^\top (h_{ij}(\tilde{u}))\tilde{w} = II_p(v, w) = I_p(W_p(v), w) = \tilde{v}^\top (w_i^j(\tilde{u}))^\top (g_{ij}(\tilde{u}))\tilde{w}.$$

Dies können wir für alle  $p \in S$  tun, damit gilt

$$h_{ij}(u) = \sum_{k=1}^2 w_i^k(u) g_{kj}(u),$$

für alle  $u \in U$ . Daraus lässt sich auch die Koordinatenform der Weingartenabbildung berechnen durch

$$w_i^j(u) = \sum_{k=1}^2 h_{ik}(u) g^{kj}(u), \quad (2.2)$$

wobei  $(g^{kj}(u))$  die inverse Matrix von  $(g_{kj}(u))$  ist.

Der interessierte Leser wird sich an dieser Stelle fragen, warum wir die Indizes der betrachteten Größen manchmal oben und manchmal unten schreiben. Man benutzt diese Indexschreibweise in der Differentialgeometrie aus einem Grund, der im Kontext dieser Arbeit noch nicht wirklich zum tragen kommt, nämlich wegen der Einsteinschen Summenkonvention (vgl. [4, Kap.5.2, S.254]). Wir wollen hier darauf nicht näher eingehen.

Da die Weingartenabbildung selbstadjungiert ist, können wir eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren  $w_1$  und  $w_2$  finden, für die  $W_p(w_i) = \kappa_i w_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , mit  $\kappa_i \in \mathbb{R}$  gilt.

**Definition 2.2.8.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche. Für Bezeichnungen wie oben heißen die Eigenwerte der Weingartenabbildung  $W_p$ , also  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  *Hauptkrümmungen* von  $S$  in  $p$ . Die Richtungen der dazugehörigen Eigenvektoren  $w_1$  und  $w_2$  heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*.

Was bedeuten nun diese Hauptkrümmungen? Wir geben ohne Herleitung folgende Anschauung: Betrachte eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve  $c$ , deren Bild in  $S \cap E$  liegt, mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = v$ , wobei  $E$  die Ebene ist, die von  $N(p)$  und  $v$  an  $p$  aufgespannt wird. Die sogenannte Normalkrümmung  $\kappa_{nor}$  von  $c$  in  $p$  ist dann gegeben durch  $\ddot{c}(0) = \kappa_{nor}N(p)$ . Parametrisierte Kurven dieser Art, deren erste Ableitung in eine der Hauptkrümmungsrichtungen zeigen, haben maximale bzw. minimale Normalkrümmung, deren Wert der jeweiligen Hauptkrümmung entspricht.

Mit den Hauptkrümmungen können wir die Begriffe der Krümmung definieren, die uns (zumindest zum Teil) bis zum Ende dieser Arbeit begleiten werden.

**Definition 2.2.9.** Für Bezeichnungen wie in Definition 2.2.8 ist

$$K(p) := \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

die *Gaußkrümmung* und

$$H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

die *mittlere Krümmung* von  $S$  in  $p$ .

Man sieht, dass für eine positive Gaußkrümmung in einem Punkt  $p$  gelten muss, dass  $\text{sign}(\kappa_1) = \text{sign}(\kappa_2)$  (für negative Gaußkrümmung umgekehrt). Wie zu vermuten ist, kann man zeigen, dass damit die Fläche  $S$  für positives  $K$  lokal „auf einer Seite“ der Tangentialebene liegt, und für negatives  $K$  „auf beiden Seiten“. Die mittlere Krümmung ist vor allem deshalb interessant, weil Flächen mit einer konstanten mittleren Krümmung von Null (Minimalflächen), jene Flächen sind, die für einen vorgegebenen Rand der Fläche den minimalen Flächeninhalt haben.

**Beispiel 2.2.10.** Wir rechnen hier die eingeführten Größen für zwei Flächen konkret durch. Die Berechnung ist relativ „mechanisch“ und steht repräsentativ für beliebige andere reguläre Flächen. Wir betrachten zwei Flächen, die uns in der Untersuchung der hyperbolischen Ebene wieder begegnen werden. Zuerst betrachten wir ein Hyperboloid, das später das Hyperboloid-Modell der hyperbolischen Ebene wird. Danach betrachten wir noch kurz das triviale Beispiel der euklidischen Ebene, die aber ebenfalls noch interessant für die Modelle der hyperbolischen Ebene werden wird.

Wir betrachten das Hyperboloid

$$\mathbb{M}_{-1}^2 = \{(x^1, x^2, x^3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = \sqrt{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2}\},$$

das auch in Abbildung 4 als obere grüne Schale dargestellt ist. Zur Verkürzung der Schreibweise verwenden wir die Bezeichnung  $u = (u^1, u^2)^\top$ . Wir können leicht eine lokale Parametrisierung  $(U, F, V)$  für diese Fläche finden mit

$$F(u) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \sqrt{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Durch diese wird sogar die gesamte Fläche  $M_{-1}^2$  parametrisiert, wobei  $U = \mathbb{R}^2$  und  $V = \mathbb{R}^3$  gelten soll.

Damit können wir die zur lokalen Parametrisierung  $(U, F, V)$  zugehörige Basis der Tangentialebenen aufschreiben mit

$$\frac{\partial F}{\partial u^1}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{u^1}{\sqrt{1+(u^1)^2+(u^2)^2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{u^2}{\sqrt{1+(u^1)^2+(u^2)^2}} \end{pmatrix}.$$

Die zweiten Ableitungen  $\frac{\partial^2 F}{(\partial u^1)^2}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{(\partial u^2)^2}$  und  $\frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2 \partial u^1}$  lassen sich daraus leicht berechnen und werden nicht explizit angeführt. Damit können wir die Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung  $(U, F, V)$  einfach bestimmen, wir berechnen exemplarisch die erste Komponente mit

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) \right\rangle = 1 + \frac{(u^1)^2}{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2}.$$

Die anderen Komponenten berechnen sich analog und wir erhalten

$$(g_{ij}(u)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2} \begin{pmatrix} (u^1)^2 & u^1 u^2 \\ u^1 u^2 & (u^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Wir ermitteln den Normalvektor durch das Kreuzprodukt der Basisvektoren der Tangentialebene und anschließendes Dividieren durch die Norm des Kreuzproduktes. Damit können wir die Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform bezüglich der genannten Basis aufschreiben, wobei wir wieder exemplarisch die erste Komponente berechnen mit

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{(\partial u^1)^2}(u), N(p) \right\rangle = \frac{1 + (u^2)^2}{(1 + (u^1)^2 + (u^2)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2}{1 + 2(u^1)^2 + 2(u^2)^2}}$$

mit  $F(u) = p$ . Damit erhalten wir die Matrixdarstellung

$$(h_{ij}(u)) = \frac{(1 + (u^1)^2 + (u^2)^2)^{-1}}{\sqrt{1 + 2(u^1)^2 + 2(u^2)^2}} \begin{pmatrix} 1 + (u^2)^2 & -u^1 u^2 \\ -u^1 u^2 & 1 + (u^1)^2 \end{pmatrix}$$

der zweiten Fundamentalform. Wir können direkt die Inverse  $(g^{ij})$  der Matrix  $(g_{ij})$  berechnen und damit auch die Matrixdarstellung der Weingartenabbildung  $(w_i^j)$  nach Gleichung (2.2). Diese schreiben wir nicht explizit an. Schließlich können wir die Gaußkrümmung als Determinante der Matrixdarstellung der Weingartenabbildung und die mittlere Krümmung als deren halbe Spur berechnen, mit dem Ergebnis

$$K(p) = \frac{1}{(1 + 2(u^1)^2 + 2(u^2)^2)^2},$$

$$H(p) = \frac{1 + (u^1)^2 + (u^2)^2}{(1 + 2(u^1)^2 + 2(u^2)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Insbesondere ist die Gaußkrümmung weder konstant noch gleich  $-1$ .

Nun betrachten wir noch die euklidische Ebene. Diese kann offensichtlich parametrisiert werden durch  $F(u) = (u^1, u^2, 0)^\top$  für  $U = \mathbb{R}^2$  und  $V = \mathbb{R}^3$ . Dann ergeben die beiden ersten Ableitungen der lokalen Parametrisierung mit dem Normalvektor, unabhängig vom Ort, die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Alle zweiten Ableitungen der lokalen Parametrisierung verschwinden. Damit ist die Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform die Einheitsmatrix. Die Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform ist die Nullmatrix, genauso wie die der Weingartenabbildung. Damit sind, wie wir uns das wünschen würden, sowohl die Gaußkrümmung, als auch die mittlere Krümmung Null. Mit anderen Worten ist die euklidische Ebene flach. Wir werden später sehen, dass es unter einer anderen Betrachtung allerdings auch Sinn machen kann, dieses Ergebnis aufzugeben.

### 3 Innere Geometrie von Flächen

Nun wollen wir uns mit der inneren Geometrie von Flächen beschäftigen. Was ist die innere Geometrie einer Fläche? Wir betrachten dazu einen zweidimensionalen Bewohner einer regulären Fläche. In Anlehnung an M.C. Escher sei dieser Bewohner eine Ameise [9, 41. Moebius strip II]. Diese Ameise kann sich in der betrachteten regulären Fläche bewegen und Messungen von Winkeln und Längen durchführen. Mit anderen Worten hat die Ameise eine Bilinearform für Vektoren der Tangentialebene zur Verfügung, mit der sie Winkel und Längen messen kann. Wie wir gleich sehen werden, ist diese Bilinearform allerdings nicht unbedingt die erste Fundamentalf orm. Alles was die betrachtete Ameise mit diesen Messungen finden kann ist Teil der inneren Geometrie der regulären Fläche auf der sie lebt. Eine Größe, die zum Beispiel nicht Teil der inneren Geometrie der Fläche ist, ist der Normalvektor der Tangentialebene. Die Ameise hat als zweidimensionales Wesen ja gar keine Möglichkeit sich überhaupt eine Richtung vorzustellen, die nicht in der Tangentialebene liegt, eine solche würde ja eine dritte Dimension im Denken der Ameise verlangen.

Wir untersuchen also in diesem Kapitel nur noch Größen der inneren Geometrie von Flächen. Stellenweise werden wir allerdings dennoch Begriffe, die nicht Teil der inneren Geometrie sind, benutzen. Wenn dies der Fall ist, wird explizit darauf hingewiesen. Dieses Kapitel richtet sich fast gänzlich nach [4, Kap.4].

#### 3.1 Riemannsche Metriken und Isometrien

Wir beginnen damit, wie versprochen, das Konzept der ersten Fundamentalf orm zu erweitern, durch

**Definition 3.1.1.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche. Sei  $g$  eine Abbildung, die jedem Punkt  $p \in S$  eine Bilinearform  $g_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnet. Für eine beliebige lokale Parametrisierung  $(U, F, V)$  von  $S$  sei dann die Matrixdarstellung von  $g_p$  in der Basis  $\{\partial F/\partial u^1, \partial F/\partial u^2\}$  von  $T_p S$  gegeben durch  $(g_{ij}(u))$ , wobei wieder die Bezeichnung  $F(u) = p$  gilt.  $g$  heißt *riemannsche Metrik*, falls die Funktionen  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g_{ij}(u) = g_p \left( \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right)$$

glatt sind für alle  $i, j \in \{1, 2\}$  und außerdem  $(g_{ij}(u))$  positiv definit ist für alle  $u \in U$ .

Die riemannschen Metriken stellen also wieder ein Werkzeug dar, um Längen und Winkel zu messen, und damit Geometrie zu betreiben. Welche Auswirkungen der Schritt vom Standardskalarprodukt hin zur riemannschen Metrik hat werden wir im Folgenden allgemein untersuchen und anschließend am Beispiel der hyperbolischen Ebene sehen. Unsere geometrischen Untersuchungen hängen vor allem von der riemannschen Metrik ab. Wir führen einen Begriff für Abbildungen zwischen regulären Flächen ein, die geometrische Eigenschaften nicht verändern.

**Definition 3.1.2.** Seien  $(S_1, g_1)$  und  $(S_2, g_2)$  zwei reguläre Flächen mit jeweils einer riemannschen Metrik. Sei  $L : S_1 \rightarrow S_2$  eine glatte Abbildung zwischen diesen regulären Flächen. Wir nennen  $L$  eine *lokale Isometrie*, falls

$$g_{1,p}(v, w) = g_{2,L(p)}(d_p L \cdot v, d_p L \cdot w)$$

gilt, für alle Vektoren  $v, w$  aus  $T_p S_1$  und für alle Punkte  $p \in S_1$ .

Wenn  $L$  dazu noch bijektiv ist, dann ist  $L$  eine *Isometrie*. Falls eine solche Isometrie existiert, nennen wir  $(S_1, g_1)$  und  $(S_2, g_2)$  *isometrisch*.

Diese Isometrien werden später eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung der Geometrie der hyperbolischen Ebene spielen. Es wird sich zeigen, dass die Isometrien des Hyperboloid-Modells der hyperbolischen Ebene lineare Abbildungen sind, und somit einer Teilmenge der  $3 \times 3$  Matrizen entsprechen.

Wir definieren hier noch eine Form der riemannschen Metrik, die bei den Karten der hyperbolischen Ebene wichtig werden wird. Dazu betrachten wir den Koordinatenbereich  $U$  der lokalen Parametrisierung  $(U, F, V)$  einer regulären Fläche mit riemannscher Metrik  $(S, g)$  als reguläre Fläche  $\bar{U}$ , mit  $\bar{U} = \{(u^1, u^2, 0)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid (u^1, u^2)^\top \in U\}$ . Wir benutzen  $(U, \bar{F}, \bar{V})$ , wobei  $\bar{V} = \mathbb{R}^3$  und  $\bar{F}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0)^\top$  sein soll, als lokale Parametrisierung. Damit sind Vektoren  $\bar{v}$  aus den Tangentialebenen von  $\bar{U}$  quasi gleich ihrer Komponentendarstellung  $\tilde{v}$ , denn  $\bar{v} = (\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, 0)^\top$ . Für einen Punkt  $u = (u^1, u^2)^\top \in U$  schreiben wir für den entsprechenden Punkt  $\bar{u} = (u^1, u^2, 0)^\top \in \bar{U}$ . Wie man sieht handelt es sich bei diesen Unterscheidungen eher um eine Formalität, da die dritten Komponenten immer verschwinden.

**Definition 3.1.3.** Für Bezeichnungen wie oben betrachten wir zwei Vektoren  $v$  und  $w$  in  $T_{F(u)} S$  mit den Komponentendarstellungen  $\tilde{v}$  und  $\tilde{w}$  mit entsprechenden  $\bar{v}, \bar{w}$ . Die *zurückgezogene riemannsche Metrik*  $F^*g$  auf  $\bar{U}$  ist definiert durch

$$(F^*g)_{\bar{u}}(\bar{v}, \bar{w}) := g_{F(u)}(D_u F(\tilde{v}), D_u F(\tilde{w}))$$

für alle  $u \in U$  und  $\tilde{v}, \tilde{w} \in \mathbb{R}^2$ .

Diese Definition ist eine „abgespeckte“ Version der üblichen Definition.

Eine Intuition zu dieser Definition ist Folgende. Wir betrachten an einem beliebigen Punkt  $F(u) = p$  in  $S$ ,  $u \in U$ , zwei Vektoren  $v$  und  $w$  in  $T_p S$ . Man kann zu diesen Vektoren zwei parametrisierte Kurven  $c_v$  und  $c_w$  in  $S$  finden mit  $c_v(0) = c_w(0) = p$ ,  $\dot{c}_v(0) = v$ , und  $\dot{c}_w(0) = w$ . Wir betrachten außerdem die parametrisierten Kurven  $\tilde{c}_v = F^{-1} \circ c_v$  und  $\tilde{c}_w = F^{-1} \circ c_w$ , die in  $U$  liegen. Offensichtlich gilt  $\tilde{c}_v(0) = \tilde{c}_w(0) = u$ . In diesem Punkt  $u$  gibt die zurückgezogene Metrik  $F^*g$  das gleiche Produkt für die Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{\tilde{c}}_v(0) = \tilde{v}$  und  $\dot{\tilde{c}}_w(0) = \tilde{w}$ , welches die Metrik  $g$  für die Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{c}_v(0)$  und  $\dot{c}_w(0)$  gibt, also  $(F^*g)_{\bar{u}}(\bar{v}, \bar{w}) = g_p(v, w)$ .

## 3.2 Vektorfelder und kovariante Ableitung

In Kapitel 2 haben wir die Krümmung von Flächen mit der zweiten Ableitung von parametrisierten Kurven in Zusammenhang gebracht. Nun, da wir nur noch die innere Geometrie von Flächen betrachten, stellt dies potentiell ein Problem dar, weil die

zweite Ableitung einer parametrisierten Kurve, die in der betrachteten Fläche verläuft, im allgemeinen nicht in der Tangentialebene liegt. Wir werden für die Krümmung, aber auch für andere Untersuchungen, also einen neuen Begriff der Ableitung von Vektoren der Tangentialebene brauchen. Diesen wollen wir nun erarbeiten.

**Definition 3.2.1.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche. Ein *Vektorfeld auf  $S$*  ist eine Abbildung  $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die jedem Punkt  $p \in S$  einen Vektor  $v(p) \in T_p S$  in der Tangentialebene zuordnet.

Wieder ist es praktisch diese Vektorfelder in der Basis einer lokalen Parametrisierung zu betrachten. Sei also  $(U, F, V)$  eine lokale Parametrisierung der betrachteten Fläche  $S$ , dann können wir ein Vektorfeld schreiben als

$$v(p) = v^1(u) \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) + v^2(u) \frac{\partial F}{\partial u^2}(u),$$

wobei wieder  $F(u) = p$  gilt. Wir sagen, dass  $v$  eine Eigenschaft hat (wie zum Beispiel Differenzierbarkeit), falls seine Komponentenfunktionen  $v^1$  und  $v^2$  diese haben.

Wir geben zusätzlich noch folgende

**Definition 3.2.2.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Kurve, die in  $S$  verläuft. Ein *Vektorfeld an  $S$  längs  $c$*  ist eine Abbildung  $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die jedem  $t \in I$  einen Vektor der Tangentialebene  $T_{c(t)} S$  zuordnet.

Wir denken dabei natürlich sofort an die Geschwindigkeitsvektoren einer parametrisierten Kurve, aber wir werden auch andere wichtige Vektorfelder an parametrisierte Kurven kennenlernen.

Nun machen wir uns daran, einen vernünftigen Begriff der Ableitung solcher Vektorfelder zu konstruieren, der innerhalb der inneren Geometrie von regulären Flächen funktioniert. Um der Anschauung willen werden wir uns dazu eines schmutzigen Tricks bedienen. Wir werden den Begriff dieser Ableitungen in einem Rahmen konstruieren, der Begriffe verwendet, die nicht Teil der inneren Geometrie von regulären Flächen sind. Auf diesem Wege werden wir die Ableitung in eine Form bringen, die nur Größen der inneren Geometrie enthält, nämlich die sogenannten Christoffel-Symbole. Mit diesen werden wir dann die Ableitung von Vektorfeldern *definieren*. Es sei hier dazu gesagt, dass man die Christoffel-Symbole und die Darstellung der gesuchten Ableitung durch diese, auch finden kann, indem man einige vernünftige Anforderungen an die gewünschte Ableitung von Vektorfeldern stellt (vgl. [12, Kap.4, S.47ff]). Auf diesem Wege verlässt man die Begriffe der inneren Geometrie von regulären Flächen nicht und alles ist in Ordnung. Diesen Weg zu gehen würde allerdings die Ziele dieser Arbeit verfehlen.

Wenn wir die Änderung des Vektors eines Vektorfeldes betrachten, ist diese wieder ein Vektor. Der Änderungsvektor liegt allerdings nicht unbedingt in der Tangentialebene der betrachteten Fläche. Da wir aber nur Vektoren in der Tangentialebene betrachten wollen, projizieren wir den Vektor kurzerhand auf die Tangentialebene. Wenn also  $w$  der betrachtete Vektor und  $T_p S$  die betrachtete Tangentialebene ist, hat die Projektion  $w_p$  die Form

$$w_p = w - \langle w, N(p) \rangle N(p).$$

Hier haben wir die innere Geometrie der regulären Flächen gleich in zwei Begriffen verlassen. Erstens haben wir den Normalvektor  $N(p)$  verwendet, der offensichtlich nicht in der Tangentialebene liegt. Wir haben außerdem das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^3$  verwendet, in den die reguläre Fläche eingebettet ist. Die innere Geometrie einer Fläche kennt aber nur ihre eigene riemannsche Metrik, das Standardskalarprodukt ist also ein zweites Objekt, das wir benutzen und das nicht Teil der inneren Geometrie ist. Wie schon gesagt soll diese Konstruktion nur eine Anschauung liefern. Wir betrachten ab jetzt eine reguläre Fläche  $S$  und ein Vektorfeld  $v$  an  $S$  längs einer Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die in  $S$  verläuft. Dabei definieren wir nun die sogenannte *kovariante Ableitung* von  $v$  als

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) := \dot{v}(t) - \langle \dot{v}(t), N(c(t)) \rangle N(c(t)),$$

dafür muss  $v$  natürlich differenzierbar sein. Sei nun  $(U, F, V)$  eine lokale Parametrisierung von  $S$ . Wir können  $v$  in seinen Koeffizientenfunktionen ausdrücken (eingeschränkt auf die  $t \in I$  für die  $c(t) \in V$  ist) mit

$$v(t) = \sum_{i=1}^2 v^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)),$$

wobei wieder  $\tilde{c} = F^{-1} \circ c$  die Darstellung der parametrisierten Kurve  $c$  in ihren Koordinaten bzgl.  $(U, F, V)$  ist.

Für die kovariante Ableitung benötigen wir nun  $\dot{v}(t)$ , welches die Form

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^2 \left( \dot{v}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + v^i(t) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(\tilde{c}(t)) \dot{\tilde{c}}^j(t) \right)$$

bezüglich der lokalen Parametrisierung hat. Dazu haben wir zuerst die Produktregel verwendet und danach im rechten Term die Kettenregel für  $\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t))$ . Wir sehen also, dass wir für die Ableitungen von Vektorfeldern die doppelten Ableitungen der lokalen Parametrisierung  $\partial^2 F / (\partial u^i \partial u^j)$  brauchen. Wir stellen diese in der Basis  $\{\partial F / \partial u^1(u), \partial F / \partial u^2(u), N(p)\}$  dar, wobei wieder  $F(u) = p$  ist. Wir schreiben

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = \Gamma_{ij}^1(u) \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) + \Gamma_{ij}^2(u) \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) + h_{ij}(u) N(p),$$

wobei nach Gleichung (2.1) die Projektion der zweiten Ableitungen von  $F$  auf den Normalvektor gleich der Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform ( $h_{ij}$ ) ist, dies wird uns hier allerdings weniger interessieren. Außerdem ist natürlich auch die zweite Fundamentalform nicht Teil der inneren Geometrie von regulären Flächen. Durch diese Gleichung werden die *Christoffel-Symbole*  $\Gamma_{ij}^k$  eingeführt. Diese lassen sich durch die erste Fundamentalform ausdrücken, mit

**Lemma 3.2.3.** *Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $(U, F, V)$  eine lokale Parametrisierung von  $S$ . Die Christoffel-Symbole lassen sich dann bestimmen durch die Gleichung*

$$\Gamma_{ij}^k(u) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i}(u) + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j}(u) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}(u) \right) g^{mk}(u), \quad (3.1)$$

für alle  $u \in U$ .

*Beweis.* Wir schreiben zum Zwecke der Übersicht die funktionalen Abhängigkeiten nicht explizit an. In den Termen  $\partial g_{ij}/\partial u^k$  werden bestimmt die zweiten Ableitungen von  $F$  vorkommen. Wir berechnen also direkt diese Terme und versuchen die Christoffel-Symbole damit auszudrücken. Also

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^m} \right\rangle.\end{aligned}$$

Wir können nun die zweiten Ableitungen von  $F$  in der oben genannten Basis darstellen. Damit fallen in den Ausdrücken der Form

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle$$

alle Terme, die den Normalvektor enthalten weg, denn

$$\left\langle N(p), \frac{\partial F}{\partial u^m}(u) \right\rangle = 0$$

für alle  $u = F^{-1}(p) \in U$  und  $m \in \{1, 2\}$ . Damit bleibt nur

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} &= \left\langle \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \sum_{k=1}^2 \Gamma_{im}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ij}^k g_{km} + \Gamma_{im}^k g_{kj}).\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} = \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{mi}^k g_{km} + \Gamma_{jm}^k g_{ki})$$

und

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{mi}^k g_{kj} + \Gamma_{mj}^k g_{ki}).$$

Wir wissen aus der Analysis, dass  $F$  die Voraussetzung dafür erfüllt, dass die Ableitungen nach verschiedenen Variablen vertauschbar sind, also

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u)$$

für alle  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $u \in U$  (Satz von Schwarz). Damit wissen wir, dass die Christoffel-Symbole symmetrisch in den unteren Indizes sind, also

$$\Gamma_{ij}^k(u) = \Gamma_{ji}^k(u)$$

für alle  $i, j, k \in \{1, 2\}$ ,  $u \in U$ . Man sieht, dass damit in den berechneten Summen für die Ableitungen der ersten Fundamentalform einige Terme gleich sind. Wir addieren diese so, dass nur noch ein Christoffel-Symbol bleibt mit

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = 2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k g_{km}.$$

Betrachten wir nun  $\Gamma_{ij}^k$  als Vektor  $(\Gamma_{ij}^1, \Gamma_{ij}^2)$  und  $(g_{km})$  als Matrix, dann ist die rechte Seite dieser Gleichung das Produkt  $2(\Gamma_{ij}^1, \Gamma_{ij}^2) \cdot (g_{km})$ . Wir können also mit der inversen Matrix von  $(g_{km})$  multiplizieren und erhalten

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g^{mk},$$

was wir zeigen wollten. □

Nun haben wir also die Christoffel-Symbole ausgedrückt, in einer Form, die nur von der ersten Fundamentalform abhängt. Die Christoffel-Symbole sind also Teil der inneren Geometrie einer Fläche, wenn man  $(g_{ij})$  als riemannsche Metrik auffasst. Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, dass wir auch für die Konstruktion dieser Christoffel-Symbole mit Größen gearbeitet haben, die nicht Teil der inneren Geometrie waren. Wieder gilt, dass man die Gleichung aus Lemma 3.2.3 auch auf einem sauberen Weg der inneren Geometrie finden kann. Wir betrachten die Formel aus Lemma 3.2.3 von nun an als *Definition* der Christoffel-Symbole, wobei die Matrixdarstellung der Metrik  $(g_{ij})$  dabei eine allgemeine riemannsche Metrik darstellt.

Eigentlich wollten wir ja einen Begriff für die Ableitungen von Vektorfeldern konstruieren. Dies können wir nun mit den Christoffel-Symbolen tun. Wir erinnern uns daran, dass wir bei der Form

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^2 \left( \dot{v}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + v^i(t) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(\tilde{c}(t)) \dot{c}^j(t) \right)$$

stehen geblieben waren. Nun können wir in diese Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = \Gamma_{ij}^1(u) \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) + \Gamma_{ij}^2(u) \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) + h_{ij}(u)N(p)$$

einsetzen. Wir schreiben dies nicht explizit aus, denn man sieht direkt, dass die einzigen Terme, die nicht in der Tangentialebene liegen, die der Form  $h_{ij}(u)N(p)$  sind. Da wir ja an der Projektion der Ableitung  $\dot{v}(t)$  auf die Tangentialebene  $T_{\tilde{c}(t)}S$  interessiert sind, fallen diese Terme in der kovarianten Ableitung weg und es bleibt

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) = \sum_{i=1}^2 \left( \dot{v}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + v^i(t) \sum_{k,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)) \dot{c}^j(t) \right).$$

Wir spalten die Summe auf mit

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) = \sum_{i=1}^2 \dot{v}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \sum_{i,k,j=1}^2 v^i(t) \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)) \dot{c}^j(t),$$

benennen den Index der ersten Summe um mit

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) = \sum_{k=1}^2 \dot{v}^k(t) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)) + \sum_{i,k,j=1}^2 v^i(t) \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)) \dot{c}^j(t),$$

formen auf die Basisvektoren der Tangentialebene um mit

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) = \sum_{k=1}^2 \left( \dot{v}^k(t) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t))v^i(t)\dot{\tilde{c}}^j(t) \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)),$$

und können so die Koeffizienten der kovarianten Ableitung bezüglich dieser Basis angeben. Man beachte, dass die Koeffizienten nun nur noch Größen der inneren Geometrie der betrachteten Fläche enthalten. Diese Form verwenden wir nun für die *Definition* der kovarianten Ableitung. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die kovariante Ableitung in der folgenden Form auch hergeleitet werden kann, ohne die innere Geometrie der betrachteten regulären Fläche zu verlassen.

**Definition 3.2.4.** Sei  $(S, g)$  eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik und  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Kurve, die in  $S$  verläuft. Sei  $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein differenzierbares Vektorfeld an  $S$  längs  $c$ . Wir betrachten eine lokale Parametrisierung  $(U, F, V)$  von  $S$ , dabei sei  $\tilde{c} : I \rightarrow U$  die Koordinatenform von  $c$ , also  $\tilde{c} = F^{-1} \circ c$  und wir benennen die Koeffizientenfunktionen von  $v(t)$  mit

$$v(t) = v^1(t) \frac{\partial F}{\partial u^1}(\tilde{c}(t)) + v^2(t) \frac{\partial F}{\partial u^2}(\tilde{c}(t)).$$

Die *kovariante Ableitung* von  $v(t)$  ist definiert durch die Gleichung

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) = \sum_{k=1}^2 \left( \dot{v}^k(t) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t))v^i(t)\dot{\tilde{c}}^j(t) \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)).$$

Man kann zeigen, dass diese Definition unabhängig von der lokalen Parametrisierung ist.

Zur besseren Übersicht schreiben wir die Vektorfelder manchmal auch als zweizeilige Vektoren ihrer Komponentenfunktionen, also

$$v(t) \hat{=} \begin{pmatrix} v^1(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix},$$

und

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) \hat{=} \begin{pmatrix} \dot{v}^1(t) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(\tilde{c}(t))v^i(t)\dot{\tilde{c}}^j(t) \\ \dot{v}^2(t) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(\tilde{c}(t))v^i(t)\dot{\tilde{c}}^j(t) \end{pmatrix}.$$

Die kovariante Ableitung hat, wie man es erwarten würde, natürlich einige schöne Eigenschaften. Wir geben eine Auswahl ohne Beweis an.

**Satz 3.2.5.** Wir benutzen die Bezeichnungen aus Definition 3.2.4. Sei  $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein weiteres differenzierbares Vektorfeld an  $S$  längs  $c$ . Sei außerdem  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und  $\phi : J \rightarrow I$  eine Parametertransformation der betrachteten parametrisierten Kurve  $c$ . Dann erfüllt die kovariante Ableitung die folgenden Eigenschaften: Die Additivität, also

$$\frac{\nabla}{dt}(v+w)(t) = \frac{\nabla}{dt}v(t) + \frac{\nabla}{dt}w(t).$$

Die Produktregel für das Produkt mit einer reellen Funktion, also

$$\frac{\nabla}{dt}(fv)(t) = \dot{f}(t)v(t) + f(t)\frac{\nabla}{dt}v(t).$$

Die Produktregel bezüglich der riemannschen Metrik, also

$$\frac{d}{dt}g_{c(t)}(v(t), w(t)) = g_{c(t)}\left(\frac{\nabla}{dt}v(t), w(t)\right) + g_{c(t)}\left(v(t), \frac{\nabla}{dt}w(t)\right).$$

Die Kettenregel bezüglich Parametertransformationen

$$\frac{\nabla}{dt}(v \circ \phi) = \dot{\phi} \cdot \left( \left( \frac{\nabla}{dt}v \right) \circ \phi \right).$$

Für die Vektorfelder brauchen wir auch noch eine entsprechende Ableitung. Wenn man nach der Änderung der Vektoren eines solchen Vektorfeldes fragt, muss man natürlich auch eine Richtung geben, in die man geht, während sich der Vektor ändert. Diese Richtung war bei den Vektorfeldern längs parametrisierter Kurven quasi automatisch durch den Verlauf der parametrisierten Kurve gegeben. Für ein Vektorfeld muss die Ableitung also von einer Richtung abhängig sein, wir machen dazu folgende

**Definition 3.2.6.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $v, w$  zwei differenzierbare Vektorfelder auf  $S$ . Sei außerdem  $r_p$  ein Vektor in  $T_pS$  für einen Punkt  $p \in S$ . Man kann eine parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  finden, die in  $S$  verläuft und die Bedingungen  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = r_p$  erfüllt. Die kovariante Ableitung von  $v$  in Richtung  $r_p$  ist dann gegeben durch

$$\nabla_{r_p}v(p) := \frac{\nabla}{dt}\tilde{v}(0),$$

wobei  $\tilde{v} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  das Vektorfeld an  $S$  längs  $c$  ist, für das  $\tilde{v}(t) = v(c(t))$  gilt für alle  $t \in I$ . Die kovariante Ableitung von  $v$  in Richtung des Vektorfeldes  $w$ ,  $\nabla_wv : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist gegeben durch

$$\nabla_wv(q) := \nabla_{w(q)}v(q)$$

für alle Punkte  $q$  in  $S$ .

Man kann zeigen, dass diese Definition nicht von der gewählten parametrisierten Kurve abhängt. Diese Ableitungen sind linear, was wir wieder ohne Beweis festhalten in

**Satz 3.2.7.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche. Seien  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Seien  $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2$  differenzierbare Vektorfelder auf  $S$ . Dann erfüllen die kovarianten Ableitungen die folgenden Eigenschaften:

Sie sind linear bezüglich des zu differenzierenden Vektorfeldes, also

$$\nabla_w(\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2) = \lambda_1\nabla_wv_1 + \lambda_2\nabla_wv_2.$$

Sie sind linear bezüglich des Vektorfeldes, nach dem differenziert wird, also

$$\nabla_{\lambda_1w_1 + \lambda_2w_2}v = \lambda_1\nabla_{w_1}v + \lambda_2\nabla_{w_2}v.$$

### 3.3 Krümmung und Krümmungstensor

Wir machen uns nun daran, die Krümmung einer regulären Fläche innerhalb der inneren Geometrie vernünftig zu definieren. Dazu konstruieren wir noch die zweite kovariante Ableitung und damit den riemannschen Krümmungstensor rein mit Größen der inneren Geometrie. Wir werden dann noch einmal zurück zu den Größen außerhalb der inneren Geometrie kommen um den Krümmungstensor mit der dort definierten Gauß-Krümmung in Verbindung zu bringen.

Beginnen wir also damit, eine zweite kovariante Ableitung zu konstruieren. Wir betrachten dazu wieder eine reguläre Fläche  $S$  und ein zweifach differenzierbares Vektorfeld  $v$  auf  $S$ . Nun brauchen wir noch die Richtung in die abgeleitet wird, wobei wir bei der zweiten Ableitung im Allgemeinen zwei Richtungen brauchen, seien deshalb  $w_1$  und  $w_2$  zwei differenzierbare Vektorfelder auf  $S$ . Wir können damit erst einmal die kovariante Ableitung  $\nabla_{w_1} v$  bestimmen. Diese ist aber wieder ein Vektorfeld auf  $S$ . Es macht also Sinn, die kovariante Ableitung von  $\nabla_{w_1} v$  in Richtung des Vektorfeldes  $w_2$  aufzuschreiben. Macht man sich die Mühe diesen Ausdruck, also  $\nabla_{w_2}(\nabla_{w_1} v)$ , in der Komponentendarstellung bezüglich einer lokalen Parametrisierung aufzuschreiben, erkennt man allerdings, dass dieser auch Ableitungen nach den Komponenten von  $w_1$  enthält. Dies ist nicht besonders überraschend, wir möchten allerdings eine Größe, die nur von den Richtungen  $w_1(p)$  und  $w_2(p)$  für einen betrachteten Punkt  $p \in S$  abhängt. Dazu machen wir die

**Definition 3.3.1.** Für Bezeichnungen wie oben ist die *zweite kovariante Ableitung* von  $v$  nach  $w_1$  und  $w_2$  gegeben durch

$$\nabla_{w_2, w_1}^2 v := \nabla_{w_2}(\nabla_{w_1} v) - \nabla_{\nabla_{w_2} w_1} v.$$

Wenn man für diese Definition die Komponenten der zweiten kovarianten Ableitung bezüglich einer lokalen Parametrisierung berechnet, kann man zeigen, dass darin nur noch Komponenten von  $w_1$  und  $w_2$  ohne Ableitung vorkommen. Damit ist die zweite kovariante Ableitung eines Vektorfeldes eine Abbildung von  $T_p S \times T_p S$  nach  $T_p S$  für einen Punkt  $p \in S$ . Das bedeutet, dass die zweite kovariante Ableitung von  $v$  in  $p$  die gleiche ist für alle Vektorfelder  $w_1$  und  $w_2$ , die in  $p$  die gleichen Werte  $w_1(p)$  und  $w_2(p)$  haben. Für zwei Vektoren  $w_{1,p}$  und  $w_{2,p}$  in  $T_p S$  schreiben wir dann

$$\nabla^2 v(w_{2,p}, w_{1,p}) := (\nabla_{w_2, w_1}^2 v)(p),$$

wobei  $w_1$  und  $w_2$  beliebige Vektorfelder auf  $S$  sind, die  $w_1(p) = w_{1,p}$  und  $w_2(p) = w_{2,p}$  erfüllen.

Die zweite kovariante Ableitung ist im Allgemeinen nicht unabhängig von der Reihenfolge, in der man nach den Richtungen ableitet. Wie die Vertauschung die zweite kovariante Ableitung ändert, kodieren wir in

**Definition 3.3.2.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche und  $p$  ein Punkt in  $S$ . Seien außerdem  $w_{1,p}$  und  $w_{2,p}$  zwei Vektoren in  $T_p S$  und  $v$  ein zweifach differenzierbares Vektorfeld auf  $S$ . Dann ist der *riemannsche Krümmungstensor*  $R$  gegeben durch

$$R(w_{2,p}, w_{1,p})v := \nabla^2 v(w_{2,p}, w_{1,p}) - \nabla^2 v(w_{1,p}, w_{2,p}).$$

Wir können den riemannschen Krümmungstensor natürlich auch bezüglich einer lokalen Parametrisierung ausdrücken. Sei also  $(U, F, V)$  eine lokale Parametrisierung der betrachteten regulären Fläche  $S$  und seien  $w_{i,p}^j, v^j$  mit  $i, j \in \{1, 2\}$  die Komponenten der betrachteten Vektoren und Vektorfelder bezüglich der zu  $(U, F, V)$  zugehörigen Basis. Dann hat der riemannsche Krümmungstensor die Form

$$R(w_{2,p}, w_{1,p})v = \sum_{i,j,k,l=1}^2 R_{ijk}^l(u) v^i(u) w_{2,p}^j w_{1,p}^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u),$$

wobei wieder  $F(u) = p$  gilt, und die Funktionen  $R_{ijk}^l$  gegeben sind durch

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial u^j} + \sum_{m=1}^2 (\Gamma_{mi}^l \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m). \quad (3.2)$$

Wir sparen uns hier die Herleitung.

Man sieht, dass in der Komponentendarstellung des riemannschen Krümmungstensors keine Ableitungen der Komponenten von  $v$  vorkommen. Der Wert des Ausdrucks  $R(w_{2,p}, w_{1,p})v$  ist also nur abhängig von  $w_{2,p}, w_{1,p}$  und dem Wert von  $v$  in  $p$ . Damit ist es wieder sinnvoll eine Abbildung  $R_p$  zu definieren, die von  $(T_p S)^3$  nach  $T_p S$  geht mit

$$R_p(w_{2,p}, w_{1,p}, v_p) := R(w_{2,p}, w_{1,p})v,$$

wobei  $v$  ein beliebiges Vektorfeld auf  $S$  ist, mit  $v(p) = v_p$ .

Wie angekündigt gehen wir nun noch einmal zurück zu den Größen außerhalb der inneren Geometrie.

Für eine reguläre Fläche  $S$  mit der ersten Fundamentalform, der zweiten Fundamentalform und der Weingartenabbildung kann man zeigen, dass bezüglich einer lokalen Parametrisierung  $(U, F, V)$  von  $S$  der riemannsche Krümmungstensor gegeben ist durch

$$R_{ijk}^l = h_{jk} w_i^l - h_{ik} w_j^l.$$

Diese Beziehung nennt man auch Gauß-Gleichung.

Betrachten wir nun die Größe

$$\sum_{i,j,k=1}^2 g^{jk} R_{ijk}^i,$$

und setzen gemäß der Gauß-Gleichung ein. Damit erhalten wir

$$\sum_{i,j,k=1}^2 g^{jk} (h_{jk} w_i^i - h_{ik} w_j^i).$$

Wir verwenden noch Gleichung (2.2) und erhalten

$$\sum_{i,j=1}^2 w_j^j w_i^i - \sum_{i,j=1}^2 w_i^j w_j^i.$$

Die linke Summe können wir als Produkt von zwei Summen aufspalten. Damit entspricht die linke Summe

$$\left( \sum_{i=1}^2 w_i^i \right)^2 = (\text{tr}(w_j^i))^2,$$

also der quadrierten Spur der Weingartenabbildung, wobei wir aus der linearen Algebra wissen, dass diese unabhängig von der Wahl der Basis ist, somit können wir schreiben

$$\sum_{i=1}^2 w_i^i = \text{tr}(W).$$

Die rechte Summe nach dem Index  $i$  können wir als Matrixmultiplikation

$$(w_j^i) \cdot (w_j^i) = \left( \sum_{k=1}^2 w_k^i w_j^k \right)$$

auffassen, sie entspricht damit

$$\sum_{i,j=1}^2 w_i^j w_j^i = \sum_{j=1}^2 (w_j^i)^2_{jj},$$

also der Spur des Quadrates der Matrixdarstellung der Weingartenabbildung, damit können wir schreiben

$$\sum_{i,j,k=1}^2 g^{jk} R_{ijk}^i = \text{tr}(W)^2 - \text{tr}(W^2).$$

Dargestellt in ihrer Eigenbasis der Hauptkrümmungsrichtungen ist die Weingartenabbildung eine Diagonalmatrix und hat damit als Spur  $\text{tr}(W) = \kappa_1 + \kappa_2$  die Summe der Eigenwerte. Somit erhalten wir

$$\sum_{i,j,k=1}^2 g^{jk} R_{ijk}^i = (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) = 2\kappa_1\kappa_2 = 2K.$$

Es gilt also

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 g^{jk} R_{ijk}^i. \quad (3.3)$$

Diese Gleichung gibt uns einen Zusammenhang zwischen dem riemannschen Krümmungstensor und der Gauß-Krümmung. Man beachte, dass wir in der Definition des riemannschen Krümmungstensors nur Größen der inneren Geometrie benutzt haben. Da in Gleichung (3.3) keine anderen Größen vorkommen, sehen wir, dass auch die Gauß-Krümmung eine Größe der inneren Geometrie ist. Diese Einsicht ist auch bekannt unter dem Namen *Theorema Egregium*. Man fragt sich nun vielleicht warum diese so einen rühmlichen Namen verdient. Eine der treibenden Kräfte in der Entwicklung der Differentialgeometrie war die Aufgabe, Karten der Welt zu erstellen. Wir wissen nun, dass die Gauß-Krümmung eine Größe der inneren Geometrie ist und sich deshalb unter Isometrien nicht ändert. Betrachten wir die Einheitskugel  $S^2$  mit der ersten Fundamentalfom, hat diese eine konstante Krümmung von  $K_{S^2} = 1$ . Die Ebene mit der ersten Fundamentalfom hat, wie wir gesehen haben, konstante Gauß-Krümmung  $K_E = 0$ . Das Theorema Egregium sagt uns nun, dass es unmöglich ist, eine Isometrie zwischen der Kugel und der Ebene zu finden. Es ist also unmöglich eine perfekte Karte der Erde herzustellen, also eine, in der man sowohl Winkel als auch Längen über den gesamten Kartenbereich 1 : 1 ablesen kann.

Für eine reguläre Fläche  $S$  mit riemannscher Metrik  $g$  benutzen wir Gleichung (3.3) nun als *Definition* der Gauß-Krümmung.

**Beispiel 3.3.3.** Ganz ähnlich wie am Ende der klassischen Flächentheorie wollen wir auch hier wieder die eingeführten Größen an einem konkreten Beispiel durchrechnen. Es handelt sich dabei wieder um eine reguläre Fläche, die später bei der Untersuchung der hyperbolischen Ebene interessant sein wird.

Sei  $S$  die reguläre Fläche  $S = \{(x^1, x^2, 0)^\top \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$ . Wir parametrisieren  $S$  mit  $U = \mathbb{R}^2$ ,  $V = \{(x^1, x^2, x^3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$  durch kartesische Koordinaten  $F(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0)^\top$ . Nun definieren wir eine riemannsche Metrik  $g$  auf  $S$  in den genannten Koordinaten, die durch

$$(g_{ij}(u)) = \frac{4}{(1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Man sieht direkt, dass die inverse der Matrixdarstellung der Metrik gegeben ist durch  $g^{ij} = g_{ij}^{-1}$  für alle  $i, j \in \{1, 2\}$ . Nun können wir die Christoffel-Symbole mit Hilfe von Gleichung (3.1) berechnen und erhalten durch konsequentes Einsetzen

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{2u^1}{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \\ \Gamma_{22}^2 &= -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{2u^2}{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}. \end{aligned}$$

Nun können wir mit Gleichung (3.2) die Komponenten des riemannschen Krümmungstensors berechnen mit

$$R_{212}^1 = -R_{122}^1 = -R_{211}^2 = R_{121}^2 = \frac{4}{(-1 + (u^1)^2 + (u^2)^2)^2},$$

alle anderen Komponenten verschwinden. Zuletzt können wir noch in Gleichung (3.3) einsetzen, wobei sich alle Koordinaten wegekürzen und wir erhalten das Ergebnis

$$K = -1.$$

Die Gaußkrümmung ist also konstant gleich  $-1$  auf ganz  $S$ . Insbesondere sieht man, wie in Beispiel 2.2.10 angekündigt, dass hier die Ebene eine Krümmung ungleich Null hat. Dieses Beispiel entspricht dabei, wie wir später sehen werden, dem Poincaré'schen Scheibenmodell der hyperbolischen Ebene. Eine Veranschaulichung der Geometrie dieser Ebene stellt der sogenannte „Circle Limit I“ von M.C. Escher dar, der in Abbildung 12 dargestellt ist.

### 3.4 Geodätische und die Exponentialabbildung

Wir suchen nun nach der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten in einer regulären Fläche mit riemannscher Metrik. Dabei betrachten wir natürlich parametrisierte Kurven, und versuchen eine Eigenschaft zu finden, die eine parametrisierte Kurve haben muss, um die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten zu sein.

Bei Definition 2.1.2 haben wir bereits erwähnt, dass wir die Definition der Länge von parametrisierten Kurven verallgemeinern werden. Wenn wir also nun von der Länge einer parametrisierten Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  in einer regulären Fläche mit riemannscher Metrik  $(S, g)$  sprechen, meinen wir natürlich

$$L[c] = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt.$$

Sucht man nach parametrisierten Kurven mit minimaler Länge, zeigt es sich, dass es eine verwandte Menge von parametrisierten Kurven gibt, die eine wesentlich schönere und nützlichere Charakterisierung haben. Wir betrachten dazu eine der Länge verwandte Größe.

**Definition 3.4.1.** Sei  $(S, g)$  eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik und  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Kurve, die in  $S$  verläuft. Die *Energie* der parametrisierten Kurve  $c$  ist definiert durch

$$E[c] = \int_a^b \frac{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}{2} dt.$$

Achtung: Die Energie einer parametrisierten Kurve entspricht nicht dem Begriff der physikalischen Energie. Es hat sich allerdings eingebürgert die eben eingeführte Größe dennoch als die Energie einer parametrisierten Kurve zu benennen. Dass es sich um keine physikalische Energie handeln kann, sieht man schon alleine daran, dass sie nicht die richtige Einheit hat. Nehmen wir als einfaches Beispiel eine parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit konstanter Geschwindigkeit  $|\dot{c}(t)| = v$ , für alle  $t \in I$ . Die physikalische kinetische Energie des Körpers, der sich entlang der parametrisierten Kurve bewegt, ist dann  $v^2/2$ , wenn wir die Masse des Körpers gleich 1 setzen. Die Energie der Kurve hat diese kinetische Energie zwar als Argument des Integrals, dieses integriert aber über die Zeit und für eine konstante kinetische Energie wäre dann  $E[c] = (t_2 - t_1)v^2/2$ , wenn  $I = [t_1, t_2]$  ist.  $E[c]$  hat also die Einheit einer physikalischen Energie mal Zeit.

Die Energie einer parametrisierten Kurve entspricht im physikalischen Sinn eher einer Wirkung. Genauer entspricht die Energie einer parametrisierten Kurve der Wirkung eines Körpers, der sich gemäß dieser parametrisierten Kurve bewegt, wenn der Körper sich in einem potentialfreien Raum bewegt. Es sei bemerkt, dass die klassische Mechanik auf dem Prinzip der minimalen Wirkung aufgebaut werden kann. Das bedeutet, dass Körper sich auf Bahnen minimaler Wirkung bewegen. Im potentialfreien Raum bewegen sie sich damit auf parametrisierten Kurven minimaler Energie (vgl. [11, Kap. 14, S.111]).

Wir werden im Folgenden parametrisierte Kurven suchen, die minimale Energie haben.

Die Energie einer parametrisierten Kurve ist dabei im Gegensatz zur Länge nicht invariant unter Parametertransformationen. Dies kann man leicht sehen an einer einfachen Form der Umparametrisierung, nämlich einer linearen Parametertransformation der Form  $\phi : [a, b] \rightarrow [\lambda a, \lambda b]$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  mit  $\phi(t) = \lambda t$ . Sei  $c : [\lambda a, \lambda b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

eine parametrisierte Kurve, die in einer regulären Fläche  $S$  mit riemannscher Metrik  $g$  verläuft. Dann ist die Energie der parametrisierten Kurve  $c \circ \phi$  gegeben durch

$$\begin{aligned} E[c \circ \phi] &= \int_a^b \frac{\lambda^2}{2} g_{(c \circ \phi)(t)}(\dot{c}(\lambda t), \dot{c}(\lambda t)) dt \\ &= \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{\lambda^2}{2} g_{c(s)}(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) \frac{ds}{\lambda} \\ &= \lambda E[c]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Energie hat sich also durch die Parametertransformation verändert. Es ist übrigens leicht zu sehen, dass die Länge gleich geblieben wäre, da sich nach der Substitution im Integral der Faktor  $\lambda$  komplett weggekürzt hätte.

Wenn wir parametrisierte Kurven minimaler Energie wollen, sollten wir uns also zuerst überlegen, wie diese parametrisiert sein müssen.

**Lemma 3.4.2.** *Sei  $(S, g)$  eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik  $g$ . Sei außerdem  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Kurve, die in  $S$  verläuft. Es gilt*

$$L[c]^2 \leq 2(b-a)E[c],$$

wobei Gleichheit gilt, falls  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

*Beweis.* Wir benutzen die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Sei  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(t) = \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}$  die Geschwindigkeit der parametrisierten Kurve  $c$ , aufgefasst als reelle Funktion. Wir betrachten den Vektorraum der differenzierbaren reellen Funktionen mit Definitionsintervall  $[a, b]$  mit der Bilinearform

$$\int_a^b f_1(t) f_2(t) dt$$

für zwei Funktionen  $f_1, f_2$  aus diesem Vektorraum. Dann können wir das Quadrat der Länge von  $c$  auffassen als

$$L[c]^2 = \left( \int_a^b v(t) \cdot 1 dt \right)^2,$$

wobei das Integral die genannte Bilinearform der Funktionen  $v$  und  $1$  darstellt. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung lautet in diesem Fall

$$\left( \int_a^b v(t) \cdot 1 dt \right)^2 \leq \int_a^b v(t)^2 dt \int_a^b 1^2 dt.$$

Wir wissen dabei, dass das erste Integral der rechten Seite der Ungleichung die (zweifache) Energie  $2E[c]$  ist und das zweite Integral einfach der Intervalllänge  $(b-a)$  entspricht. Es gilt also

$$L[c]^2 \leq 2(b-a)E[c].$$

Wir wissen außerdem, dass für die Cauchy-Schwarz-Ungleichung Gleichheit gilt, falls die betrachteten Elemente des Vektorraumes linear abhängig sind. Das bedeutet in

unserem Fall  $v(t) = \lambda \cdot 1$  für alle  $t \in [a, b]$  und ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dies bedeutet weiter, dass  $c$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist mit

$$v(t) = \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} = \text{const}$$

für alle  $t \in [a, b]$ .

□

Damit wissen wir also, dass die Energie einer gegebenen parametrisierten Kurve  $c$  mit gegebener Intervalllänge  $(b - a)$  minimal wird, wenn sie proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Dabei muss eine Intervalllänge vorgegeben sein, denn es ist klar, dass  $c$  nicht die minimale Energie unter allen Umparametrisierungen haben kann, denn nach Gleichung (3.4) können wir durch eine lineare Parametertransformation  $\phi(t) = \lambda t$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  die Energie beliebig verkleinern, wobei aber dennoch  $c \circ \phi$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, denn

$$(c \circ \phi)' = \lambda \dot{c}(\phi) = \text{const.}$$

Wenn wir zwei Punkte einer regulären Fläche betrachten und bereits die Verbindungskurve mit minimaler Länge gefunden haben, dann hat eine Parametrisierung proportional zur Bogenlänge dieser Kurve auch minimale Energie unter allen Verbindungskurven dieser beiden Punkte, bei gegebener Intervalllänge. Umgekehrt gilt auch, dass die parametrisierte Kurve minimaler Energie zwischen den beiden Punkten dann eine mögliche Parametrisierung der längenminimierenden Kurve ist, wieder bei gegebener Intervalllänge. Wir wollen nun die parametrisierten Kurven minimaler Energie charakterisieren in

**Satz 3.4.3.** *Sei  $(S, g)$  eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Seien außerdem  $p, q \in S$  zwei Punkte in  $S$  und  $c_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Kurve, die in  $S$  verläuft und  $c_0(a) = p$  sowie  $c_0(b) = q$  erfüllt. Wenn  $c_0$  die parametrisierte Kurve ist, die  $p$  und  $q$  verbindet und minimale Energie hat, für diese Intervalllänge, dann gilt*

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}_0(t) = 0$$

für alle  $t \in [a, b]$ .

*Beweisskizze.* Unsere Strategie ist es, grob gesprochen, eine Menge von parametrisierten Kurven zu untersuchen, die alle die Punkte  $p$  und  $q$  verbinden und unter diesen Kurven diejenige mit der kleinsten Energie zu finden. Wir werden genauer gesagt eine Variationsformel für die Energie untersuchen.

Sei  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow S$  eine glatte Abbildung und seien  $c_s : [a, b] \rightarrow S$  die parametrisierten Kurven  $c_s(t) = c(s, t)$  für ein  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Wir verlangen, dass  $c_s(a) = p$  und  $c_s(b) = q$  für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  gilt.  $c$  stellt also eine Schar von parametrisierten Kurven dar, die  $p$  und  $q$  verbinden. Es soll außerdem die Bezeichnung  $V(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)$  gelten.

Wir betrachten also eine parametrisierte Kurve  $c_0$ , die  $p$  und  $q$  verbindet, und eine Schar von anderen parametrisierten Kurven, die ebenfalls  $p$  und  $q$  verbinden und die „dicht gepackt“ um  $c_0$  liegen. Das Vektorfeld  $V(t)$  an  $S$  längs  $c_0$  gibt uns ein Maß dafür, wie sich die parametrisierte Kurve zu ihren Nachbarn der Kurvenschar ändert.

Wir können nun die Energie der parametrisierten Kurven  $c_s$  nach  $s$  ableiten. Dort, wo diese Ableitung verschwindet hat die Energie ein lokales Extremum unter den benachbarten Kurven und die dazugehörige parametrisierte Kurve ist potentiell die gesuchte parametrisierte Verbindungskurve minimaler Energie. Sie wird bestimmt nicht ein lokales Maximum der Energie darstellen, weil man die Energie durch Umparametrisierung beliebig vergrößern kann. Betrachten wir also die Ableitung

$$\frac{d}{ds}E[c_s] = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{ds} g_{c_s(t)}(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)) dt.$$

Diese Ableitung wollen wir an der Stelle  $s = 0$  auswerten. Wir erinnern uns an die Produktregel der kovarianten Ableitung bezüglich der riemannschen Metrik aus Satz 3.2.5. Wenn wir  $c_s(t)$  für ein festes  $t$  als parametrisierte Kurve  $c_s(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  betrachten, können wir die Produktregel anwenden. Für die kovariante Ableitung solcher parametrisierter Kurven, die Teil einer Abbildung wie  $c$  sind, schreiben wir

$$\frac{\nabla}{\partial s} c_s.$$

Nun können wir also die Ableitung der Energie auswerten, mit

$$\left. \frac{d}{ds} E[c_s] \right|_{s=0} = \frac{1}{2} \int_a^b \left( g_{c_0(t)} \left( \left. \frac{\nabla}{\partial s} \dot{c}_s(t) \right|_{s=0}, \dot{c}_0(t) \right) + g_{c_0(t)} \left( \dot{c}_0(t), \left. \frac{\nabla}{\partial s} \dot{c}_s(t) \right|_{s=0} \right) \right) dt.$$

Man kann zeigen, dass für  $c$  die Gleichung

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial s}$$

gilt. Für die Ableitung der Energie gilt also

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} E[c_s] \right|_{s=0} &= \frac{1}{2} \int_a^b \left( g_{c_0(t)} \left( \frac{\nabla}{dt} V(t), \dot{c}_0(t) \right) + g_{c_0(t)} \left( \dot{c}_0(t), \frac{\nabla}{dt} V(t) \right) \right) dt \\ &= \int_a^b g_{c_0(t)} \left( \frac{\nabla}{dt} V(t), \dot{c}_0(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Betrachten wir nun noch ein anderes Integral. Wir haben verlangt, dass  $c(s, a) = p$  und  $c(s, b) = q$  für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Damit muss die Ableitung von  $c$  nach  $s$  an diesen Punkten verschwinden, also auch  $V(a)$  und  $V(b)$ . Damit muss auch

$$g_p(V(a), \dot{c}_0(a)) = 0$$

und

$$g_q(V(b), \dot{c}_0(b)) = 0$$

gelten. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt uns damit

$$\int_a^b \frac{d}{dt} g_{c_0(t)}(V(t), \dot{c}_0(t)) dt = 0.$$

Wir wenden wieder die Produktregel der kovarianten Ableitung bezüglich der riemannschen Metrik an, spalten dann das Integral auf und erhalten

$$\int_a^b g_{c_0(t)} \left( \frac{\nabla}{dt} V(t), \dot{c}_0(t) \right) dt + \int_a^b g_{c_0(t)} \left( V(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}_0(t) \right) dt = 0.$$

Dies setzen wir nun in Gleichung (3.5) ein und erhalten

$$\frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} = - \int_a^b g_{c_0(t)} \left( V(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}_0(t) \right) dt.$$

Wir sehen also, dass falls

$$\frac{\nabla}{dt} c_0(t) = 0$$

für alle  $t \in [a, b]$  gilt, die parametrisierte Kurve  $c_0(t)$  (lokal) energieminimierend ist. Die Umkehrung gilt ebenfalls, für diese Intervalllänge.

Parametrisierte Kurven mit dieser Eigenschaft sind von besonderer Bedeutung für differentialgeometrische Untersuchungen.

**Definition 3.4.4.** Sei  $(S, g)$  eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik. Eine parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die in  $S$  verläuft, heißt *Geodätische*, falls

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) = 0$$

für alle  $t \in I$  gilt.

Man nennt die Bedingung

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) = 0$$

auch *Geodätengleichung*. Diese können wir auch in der Darstellung der Komponentenfunktionen schreiben, mit

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \hat{=} \begin{pmatrix} \ddot{c}^1(t) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(\tilde{c}(t)) \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) \\ \ddot{c}^2(t) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(\tilde{c}(t)) \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei wieder  $\dot{c}^i$  die Komponentenfunktionen von  $\dot{c}$  in der Basis der lokalen Parametrisierung sind für  $i \in \{1, 2\}$ .  $\ddot{c}^i$  sind einfach die Zeitableitungen der  $\dot{c}^i$ . Die  $\dot{c}^i$  und die  $\ddot{c}^i$  sind dabei völlig austauschbar, denn  $D_{\tilde{c}} F \cdot \dot{\tilde{c}} = \dot{c}$ . In dieser Darstellung sieht man direkt, dass die Geodätengleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Für solche Gleichungen wissen wir, aus dem Satz über die Eindeutigkeit der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, dass sie eine eindeutige Lösung haben, für gegebene Startbedingungen  $c(t_0)$  und  $\dot{c}(t_0)$ . Diese geben nun auch die Intervalllänge vor.

Dass eine Geodätische proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, ist leicht zu sehen, denn für eine Geodätische  $c$  gilt mit der Produktregel der kovarianten Ableitung bezüglich der riemannschen Metrik

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = g_{c(t)} \left( \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t), \dot{c}(t) \right) + g_{c(t)} \left( \dot{c}(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \right) = 2g_{c(t)}(0, \dot{c}(t)) = 0.$$

Wir haben also eine schöne Charakterisierung für parametrisierte Kurven gefunden, die zu parametrisierten Kurven mit minimaler Energie korrespondieren. Dass eine parametrisierte Kurve zwischen zwei gegebenen Punkten die Geodätengleichung erfüllt heißt aber nicht automatisch, dass sie auch die (global) energie- bzw. längenminimierende Verbindungskurve ist. Ein Gegenbeispiel finden wir etwa auf der

Einheitskugelschale mit der ersten Fundamentalform. Dort entsprechen die längenminimierenden Kurven den Großkreisen (vgl. [4, Kap.4.5, S.192ff]). Geodätische sind dann parametrisierte Kurven, deren Bilder in Großkreisen liegen und die proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Betrachten wir nun zwei Punkte auf der Einheitskugelschale und den Großkreis, der durch beide Punkte geht. Wir können von einem Punkt aus den anderen auf zwei verschiedenen Geodätischen erreichen, je nachdem in welcher Richtung wir starten. Dabei wird die Länge der beiden möglichen Geodätischen im Allgemeinen nicht gleich sein, es sind aber dennoch beide Geodätische. Es gibt also Fälle in denen eine Geodätische nicht die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten darstellt, im Folgenden werden wir aber nicht mehr auf diese Ausnahmefälle treffen.

Nun führen wir noch die Exponentialabbildung ein. Diese entspricht einer Abbildung, welche für eine reguläre Fläche  $S$ , die Geodätischen in  $T_p S$  durch  $(0, 0, 0)^\top$  auf Geodätische in  $S$  abbildet, wenn wir  $T_p S$  als reguläre Fläche mit der ersten Fundamentalform auffassen.

**Definition 3.4.5.** Sei  $(S, g)$  eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Sei außerdem  $p \in S$ . Zu jedem Vektor  $v \in T_p S$  sei  $c_v$  die eindeutige Geodätische in  $S$  mit  $c_v(0) = p$  und  $\dot{c}_v(0) = v$ . Wir betrachten die Menge aller  $v \in T_p S$ , deren zugehörige Geodätische an der Stelle  $c_v(1)$  noch definiert sind. Diese Menge nennen wir  $\mathcal{D}_p$ . Die *Exponentialabbildung* ist die Abbildung, die jedem  $v \in \mathcal{D}_p$  den Punkt  $c_v(1) \in S$  zuordnet. Wir schreiben sie als

$$\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow S.$$

Diese hat natürlich viele schöne Eigenschaften, wir betrachten im folgenden Kapitel einen Spezialfall der Exponentialabbildung.

### 3.5 Geodätische Polarkoordinaten

Hier wollen wir genauer auf die geodätischen Polarkoordinaten eingehen, die später bei der Untersuchung des Hyperboloid-Modells der hyperbolischen Ebene ein nützliches Werkzeug sein werden.

**Definition 3.5.1.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik  $g$ . Sei außerdem  $p \in S$  und  $\{X_1, X_2\}$  eine Orthonormalbasis von  $T_p S$ . Dann sind die Koordinaten  $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ , mit  $\tilde{F}(r, \varphi) = r(\sin(\varphi)X_1 + \cos(\varphi)X_2)$  Polarkoordinaten von  $T_p S$  und wir nennen

$$F(r, \varphi) = \exp_p(r(\sin(\varphi)X_1 + \cos(\varphi)X_2))$$

eine Parametrisierung von  $S$  in *geodätischen Polarkoordinaten*  $(r, \varphi)$  (um den Punkt  $p$ ).

Man beachte, dass der Punkt  $p$  selbst nicht im Bild einer solchen Parametrisierung in geodätischen Polarkoordinaten liegt.

Wir werden uns nun wieder mit dem Hyperboloid  $\mathbb{M}_{-1}^2$  aus Beispiel 2.2.10 beschäftigen, dabei wird vor allem der Fußpunkt des Hyperboloids interessant sein, deshalb machen wir zur Verkürzung der Schreibweise folgende

**Definition 3.5.2.** Wir benutzen im Folgenden die Bezeichnung  $\Omega = (0, 0, 1)^\top \in \mathbb{R}^3$ .

In Abbildung 3 sind die affine Tangentialebene  $T_\Omega \mathbb{M}_{-1}^2 + \Omega$  des Hyperboloids  $\mathbb{M}_{-1}^2$  aus Beispiel 2.2.10 und das Hyperboloid selbst dargestellt. Es sind außerdem einige Niveaulinien mit  $r = \text{const}$  und mit  $\varphi = \text{const}$  der Polarkoordinaten auf der affinen Tangentialebene eingezeichnet. Links ist  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit der ersten Fundamentalform und der dazugehörigen Parametrisierung in geodätischen Polarkoordinaten  $F_S$  (diese wird hier nicht explizit angeführt) dargestellt. Rechts ist  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit der Minkowski Metrik, die noch in Kapitel 4.1 eingeführt wird, mit der entsprechenden Parametrisierung in geodätischen Polarkoordinaten  $F_M$  dargestellt. Die Besprechung dieser riemannschen Metrik und der dazugehörigen geodätischen Polarkoordinaten wird dort fortgeführt. Geodätische in  $T_\Omega \mathbb{M}_{-1}^2$  durch den Ursprung sind natürlich parametrisierte Kurven  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $T_\Omega \mathbb{M}_{-1}^2$  der Form  $c(r) = r(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)^\top$  für ein festes  $\varphi$ . Ihre Bilder sind die Niveaulinien mit  $\varphi = \text{const}$ , die in Abbildung 3 schwarz dargestellt sind (affin).

Damit sind nach Definition der Exponentialabbildung die parametrisierten Kurven  $F_S \circ \tilde{c}$  bzw.  $F_M \circ \tilde{c}$  Geodätische auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit der dazugehörigen riemannschen Metrik, mit  $\tilde{c}(r) = (r, \varphi)$  für ein festes  $\varphi$ . Die Bilder dieser Geodätischen sind in Abbildung 3 schwarz dargestellt.

Man sieht, dass für beide Metriken die Bilder der Geodätischen durch  $\Omega$  auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$  die gleichen sind. Die Geodätischen sind allerdings sehr wohl verschieden, das sieht man daran, dass die Niveaulinien mit  $r = \text{const}$  (grau) unter  $F_S$  bzw.  $F_M$  unterschiedliche Bilder haben. Dies liegt an der Parametrisierung der Geodätischen, hier spiegelt sich Lemma 3.4.2 wider, also, dass Geodätische proportional zur Bogenlänge parametrisiert sein müssen (in Abbildung 3 sind sie sogar mit Bogenlänge parametrisiert). Die Niveaulinien mit  $r = \text{const}$  und deren Bilder unter den jeweiligen geodätischen Polarkoordinaten, die in Abbildung 3 grau dargestellt sind, haben natürlich keine Korrespondenz zu Geodätischen, weder auf  $T_\Omega \mathbb{M}_{-1}^2$  noch auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$ .

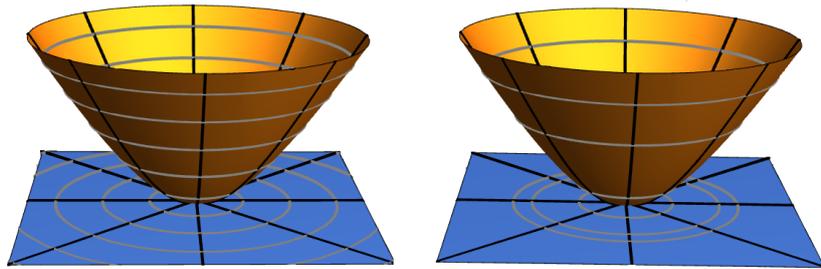


Abbildung 3: Geodätische Polarkoordinaten für das Hyperboloid mit erster Fundamentalform (links) und Minkowski Metrik (rechts). Alle Graphen sind im gleichen Wertebereich dargestellt.

Die riemannsche Metrik bezüglich einer Parametrisierung in geodätischen Polarkoordinaten hat dabei eine spezielle Form.

**Satz 3.5.3.** (Gauß Lemma) Sei  $(S, g)$  eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik. Sei außerdem  $p$  ein Punkt in  $S$  und sei  $(U, F, V)$  eine lokale Parametrisierung von  $S$ , wobei  $F$  eine Parametrisierung in geodätischen Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  ist. Dann hat bezüglich dieser lokalen Parametrisierung die riemannsche Metrik die Form

$$(g_{ij}(r, \varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(r, \varphi)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Wir verzichten hier auf einen Beweis, allerdings wird in Kapitel 4.1 die Form der Minkowski Metrik auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$  für  $F_M$  konkret berechnet.

Es gilt außerdem auch die Umkehrung, also, dass für die gegebenen Bedingungen und die spezielle Form (3.6) der riemannschen Metrik, die lokale Parametrisierung einer Parametrisierung in geodätischen Polarkoordinaten entspricht. Dies wollen wir nun direkt nachrechnen.

Man kann sofort sehen, dass die Christoffel-Symbole  $\Gamma_{11}^1$  und  $\Gamma_{11}^2$  Null sind, weil alle Terme der Form  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial r}$ , oder  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial \varphi}$  für  $(i, j) \neq (2, 2)$  verschwinden.

Betrachten wir nun eine parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die in  $S$  verläuft und die parametrisierte Kurve  $\tilde{c} = F^{-1} \circ c : I \rightarrow U$ . Wir machen folgende Bezeichnung:

$$\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} r_c(t) \\ \varphi_c(t) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{c}$ . Zur Verkürzung der Schreibweise sind die funktionalen Abhängigkeiten nicht angeschrieben. Es sind aber natürlich  $\dot{c}$ ,  $r_c$  und  $\varphi_c$  von  $t$  abhängig, sowie die Christoffel-Symbole von  $(r_c(t), \varphi_c(t))$ . Diese lautet

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c} \hat{=} \begin{pmatrix} \ddot{r}_c - \Gamma_{11}^1 \dot{r}_c^2 - 2\Gamma_{12}^1 \dot{r}_c \dot{\varphi}_c + \Gamma_{22}^1 \dot{\varphi}_c^2 \\ \ddot{\varphi}_c - \Gamma_{11}^2 \dot{r}_c^2 - 2\Gamma_{12}^2 \dot{r}_c \dot{\varphi}_c + \Gamma_{22}^2 \dot{\varphi}_c^2 \end{pmatrix}.$$

Dabei haben wir verwendet, dass die Komponentenfunktionen von  $\dot{c}$  gegeben sind durch  $\dot{r}_c$  und  $\dot{\varphi}_c$ .

Wir haben bereits gesehen, dass  $\Gamma_{11}^1$  und  $\Gamma_{11}^2$  Null sind, damit bleiben nur noch Terme mit  $\dot{\varphi}_c$  oder  $\ddot{\varphi}_c$  als Faktor und der Term  $\ddot{r}_c$  übrig. Betrachten wir nun eine parametrisierte Kurve  $c$ , deren „Urbild“ in  $T_p S$  eine Geodätische durch den Ursprung ist. Diese parametrisierte Kurve erfüllt bestimmt  $\varphi_c = \text{const}$  und  $r_c(t) = \lambda t$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Man sieht, dass für eine solche parametrisierte Kurve die Geodätengleichung  $\frac{\nabla}{dt} \dot{c} = 0$  automatisch erfüllt ist.

Wir haben also gezeigt, dass für eine riemannsche Metrik wie in (3.6) das „Bild“ einer Geodätischen in  $T_p S$  durch den Ursprung, eine Geodätische in  $S$  ist, womit die Fläche  $S$  in geodätischen Polarkoordinaten parametrisiert ist.

Die Gaußkrümmung einer regulären Fläche, die in geodätischen Polarkoordinaten parametrisiert ist, lässt sich dabei auf eine einfache Form bringen mit

**Lemma 3.5.4.** Für die Bezeichnungen wie in Satz 3.5.3 gilt für die Gaußkrümmung der Fläche  $S$  mit riemannscher Metrik  $g$

$$K(r, \varphi) = -\frac{1}{f(r, \varphi)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r, \varphi). \quad (3.7)$$

*Beweis.* Wir können direkt in die Formel (3.3), also

$$K = \frac{1}{2} \sum_{ijk} g^{jk} R_{ijk}^i$$

für die Gaußkrümmung bezüglich der lokalen Parametrisierung einsetzen. Dabei verschwinden alle Terme mit  $j \neq k$ , somit bleiben nur noch vier Terme der Summe übrig.

Die Christoffel-Symbole lassen sich durch direktes Einsetzen in (3.1) leicht berechnen mit

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \Gamma_{22}^1 &= -f \frac{\partial f}{\partial r} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Diese können wir nun einsetzen in (3.2) um die benötigten Komponenten des riemannschen Krümmungstensors zu berechnen. Dabei fallen die Terme weg, deren Christoffel-Symbole Null sind, diese werden nicht explizit angeschrieben. Damit sind

$$\begin{aligned} R_{111}^1 &= 0 \\ R_{122}^1 &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( f \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \\ R_{211}^2 &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \\ R_{222}^2 &= 0, \end{aligned}$$

wobei  $R_{222}^2$  offensichtlich verschwindet, weil sich alle Terme direkt wegekürzen. Es bleiben also nur noch zwei Terme der Summe übrig mit

$$K = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + f^{-2} \left( -\frac{\partial}{\partial r} \left( f \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \right) \right),$$

wobei die inverse Matrix der riemannschen Metrik  $g$  leicht zu berechnen ist mit

$$(g^{ij}(r, \varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(r, \varphi)^2} \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren die Gleichung für die Gaußkrümmung aus und benutzen die Kettenregel, dabei kürzen sich vier Terme der Form  $f^{-2} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2$  weg und es bleibt

$$K(r, \varphi) = -\frac{1}{f(r, \varphi)} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r, \varphi).$$

□

Gleichung (3.7) zeigt vor allem, dass die Gaußkrümmung im gegebenen Fall nur von der Funktion  $f$  abhängt. In Kapitel 4.1 wird uns vor allem die hyperbolische Ebene interessieren, deren Krümmung  $\kappa$  auf der gesamten Fläche den Wert  $-1$  hat. Für  $K(r, \varphi) = -1$  im gesamten Koordinatenbereich hat die gewöhnliche Differentialgleichung (3.7) die eindeutige Lösung

$$f(r, \varphi) = \lambda \sinh(r),$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## 4 Modelle der hyperbolischen Ebene

Wir haben nun das nötige Rüstzeug um mit dem Hauptteil dieser Arbeit zu beginnen. Beschäftigen wir uns zuerst kurz damit, was wir unter der hyperbolischen Ebene verstehen. Von einer Ebene sprechen wir, weil wir geometrische Untersuchungen in zwei Dimensionen durchführen werden.

Was ist nun aber mit „hyperbolisch“ gemeint? Dazu müssen wir ein wenig ausholen. Bereits seit etwa 300 v. Chr. gibt es dokumentierte Bemühungen, die Erkenntnisse der Geometrie (wie zum Beispiel die trigonometrischen Sätze) auf einer möglichst kleinen Menge an Grundannahmen, also Axiomen, aufzubauen. Wir wollen hier nicht näher auf diesen axiomatischen Zugang eingehen, eine ausführliche Darstellung findet sich in [4, Kap.1, S.1ff]. Der Aufbau der euklidischen Geometrie auf wenigen Axiomen verlangt dabei nach dem sogenannten *Parallelenaxiom*. Dieses sagt, grob gesprochen, dass für eine gegebene Gerade  $g_1$  und einen Punkt  $p$ , der nicht in  $g_1$  liegt, es genau eine andere Gerade  $g_2$  gibt, die durch  $p$  geht und  $g_1$  nicht schneidet. Es war lange Zeit unklar, ob dieses Axiom notwendig ist, oder ob es sich aus den anderen Axiomen herleiten lässt. Eine Möglichkeit zu zeigen, dass es sich nicht aus den anderen herleiten lässt, ist natürlich die, ein Beispiel einer mathematischen Struktur zu finden, die alle Axiome außer dem Parallelenaxiom erfüllt, das Parallelenaxiom selbst aber verletzt. Die hyperbolische Geometrie ist die Geometrie, die alle Axiome der euklidischen Geometrie erfüllt, nur das Parallelenaxiom verletzt. Die im Folgenden beschriebenen Modelle der hyperbolischen Ebene sind eben solche mathematische Strukturen, die genau die Axiome der hyperbolischen Geometrie erfüllen.

### 4.1 Das Hyperboloid-Modell

Wir beginnen damit, reguläre Flächen mit einer riemannschen Metrik zu konstruieren, deren Krümmung auf der gesamten Fläche den konstanten Wert  $\kappa$  hat. Dafür gibt es natürlich viele Möglichkeiten, wir betrachten vorerst eine spezielle Menge von regulären Flächen, die  $\mathbb{M}_\kappa^2$ . (Im Allgemeinen wird bei der Untersuchung von metrischen Räumen einer bestimmten Krümmung mit den Modellräumen  $\mathbb{M}_\kappa^n$  der Dimension  $n$  und mit konstanter Krümmung  $\kappa$  gearbeitet. Wir beschränken uns auf Flächen und damit die Modellräume  $\mathbb{M}_\kappa^2$ .)

Wir definieren vorerst die Flächen

$$\widehat{\mathbb{M}}_\kappa^2 := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid \kappa((x^1)^2 + (x^2)^2) + (x^3)^2 = 1\}.$$

Diese sind in Abbildung 4 für  $\kappa = 1$ ,  $\kappa = 0$  und  $\kappa = -1$  dargestellt. Dabei ist  $\widehat{\mathbb{M}}_1^2$  die in Abbildung 4 gelbe Fläche (Kugel),  $\widehat{\mathbb{M}}_0^2$  die blaue Fläche (doppelte Ebene) und  $\widehat{\mathbb{M}}_{-1}^2$  die grüne Fläche (doppelte Schale).

Man sieht, dass für  $\kappa \leq 0$  diese Flächen die Graphen der beiden Funktionen mit  $x^3 = \pm\sqrt{1 - \kappa((x^1)^2 + (x^2)^2)}$  sind. Im Folgenden wollen wir nur noch mit jeweils einem dieser Graphen arbeiten, darum definieren wir

$$\mathbb{M}_\kappa^2 := \begin{cases} \widehat{\mathbb{M}}_\kappa^2, & \text{für } \kappa > 0 \\ \{(x^1, x^2, x^3)^\top \in \widehat{\mathbb{M}}_\kappa^2 \mid x^3 > 0\}, & \text{für } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

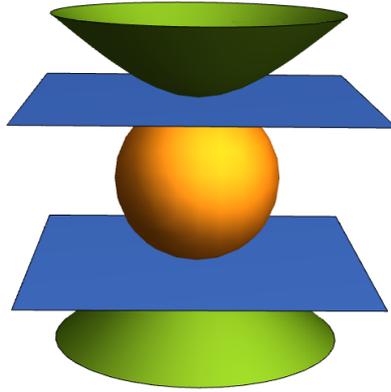


Abbildung 4: Die Flächen  $\widehat{M}_\kappa^2$

Die Einheitskugel  $M_1^2$  und die Ebene  $M_0^2$  haben wie bereits besprochen im Sinne der klassischen Flächentheorie eine konstante Krümmung entsprechend dem unteren Index  $\kappa$ .

Wir befassen uns im Folgenden nur noch mit  $M_{-1}^2$ .

Hier zeigt sich schon, dass mit dem Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^3$  die Krümmung von  $M_{-1}^2$  nicht den konstanten Wert  $-1$  hat, wie auch schon in Beispiel 2.2.10 gezeigt wurde. Es ist auch direkt ersichtlich, dass diese Fläche in der klassischen Flächentheorie keine negative Krümmung haben kann, weil sie an jedem Punkt "auf einer Seite" der Tangentialebene liegt. Um die gewünschten Eigenschaften zu erhalten, müssen wir die Fläche also noch mit einer passenden riemannschen Metrik ausstatten.

Wir definieren die symmetrische Bilinearform

$$\langle v, w \rangle_{-1} = v^1 w^1 + v^2 w^2 - v^3 w^3$$

auf  $\mathbb{R}^3$  für beliebige Vektoren  $v = (v^1, v^2, v^3)^\top$ ,  $w = (w^1, w^2, w^3)^\top \in \mathbb{R}^3$ .

Diese Bilinearform ist offensichtlich nicht positiv definit, weil z.B. für  $v = (0, 0, 1)^\top$  die Ungleichung  $\langle v, v \rangle_{-1} < 0$  gilt. Man nennt diese Bilinearform auch die Minkowski Metrik.

*Bemerkung 4.1.1.* Wenn im Folgenden von Eigenschaften wie Länge oder Orthogonalität gesprochen wird, dann bezieht sich das auf diese Bilinearform. Dies gilt auch für den Winkel zwischen zwei Vektoren in der Tangentialebene, wobei dieser wie üblich durch die Gleichung  $\cos(\alpha) = \langle u, v \rangle_{-1}$  für zwei Einheitsvektoren  $u, v \in T_p S$  definiert ist. Dieser Winkel unterscheidet sich natürlich im Allgemeinen von dem Winkel, der durch das Standardskalarprodukt definiert wird, außer im Punkt  $\Omega$ .

Die Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$  ist zwar nicht positiv definit für Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ , eingeschränkt auf die Tangentialebenen der Fläche  $M_{-1}^2$  allerdings schon. Mit anderen Worten ist die Bilinearform, die  $M_{-1}^2$  von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$  des  $\mathbb{R}^3$  erbt, positiv definit und damit eine riemannsche Metrik. Dies wollen wir jetzt zeigen.

Wir legen zunächst eine lokale Parametrisierung  $(U, F_M, V)$  für  $\mathbb{M}_{-1}^2$  fest, wobei  $U = (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ ,  $V = \mathbb{R}^3$  und

$$F_M(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \sinh(r) \cos(\varphi) \\ \sinh(r) \sin(\varphi) \\ \cosh(r) \end{pmatrix}.$$

Für einen Punkt  $p = F_M(r_p, \varphi_p) = F_M(u) \in \mathbb{M}_{-1}^2$  ergibt sich damit die zu  $(U, F_M, V)$  zugehörige Basis  $\left\{ \frac{\partial F_M}{\partial r}(u), \frac{\partial F_M}{\partial \varphi}(u) \right\}$  der Tangentialebene  $T_p \mathbb{M}_{-1}^2$  mit

$$\frac{\partial F_M}{\partial r}(u) = \begin{pmatrix} \cosh(r_p) \cos(\varphi_p) \\ \cosh(r_p) \sin(\varphi_p) \\ \sinh(r_p) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F_M}{\partial \varphi}(u) = \begin{pmatrix} -\sinh(r_p) \sin(\varphi_p) \\ \sinh(r_p) \cos(\varphi_p) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass außerdem  $\left\{ \frac{\partial F_M}{\partial r}(u), \frac{1}{\sinh(r_p)} \frac{\partial F_M}{\partial \varphi}(u) \right\}$  eine Orthonormalbasis der Tangentialebene ist. Der Begriff Orthonormalbasis bezieht sich natürlich nun auf die riemannsche Metrik.

Damit ist für alle Punkte  $p \in \mathbb{M}_{-1}^2$  außer  $\Omega$  eine lokale Parametrisierung gegeben. Für diesen Punkt lässt sich natürlich auch eine lokale Parametrisierung finden, vor allem aber ist in diesem Punkt die Tangentialebene offensichtlich die  $x^1, x^2$ -Ebene. Da sich die Minkowski Metrik nur in der dritten Komponente vom Standardskalarprodukt unterscheidet, ist die Einschränkung auf die Tangentialebene  $T_\Omega \mathbb{M}_{-1}^2$  einfach das Standardskalarprodukt in der Tangentialebene und damit auch positiv definit.

Wir berechnen nun die Funktionen  $g_{ij}(u)$  der geerbten Bilinearform, wobei wieder  $p = F_M(r_p, \varphi_p) = F_M(u)$  gilt mit

$$\begin{aligned} g_{11}(u) &= \left\langle \frac{\partial F_M}{\partial r}(u), \frac{\partial F_M}{\partial r}(u) \right\rangle_{-1} = \cosh(r_p)^2 (\cos(\varphi_p)^2 + \sin(\varphi_p)^2) - \sinh(r_p)^2 \\ &= \cosh(r_p)^2 - \sinh(r_p)^2 = 1, \\ g_{12}(u) &= \left\langle \frac{\partial F_M}{\partial r}(u), \frac{\partial F_M}{\partial \varphi}(u) \right\rangle_{-1} = g_{21}(u) \\ &= -\sinh(r_p) \cosh(r_p) \sin(\varphi_p) \cos(\varphi_p) + \sinh(r_p) \cosh(r_p) \sin(\varphi_p) \cos(\varphi_p) \\ &= 0, \\ g_{22}(u) &= \left\langle \frac{\partial F_M}{\partial \varphi}(u), \frac{\partial F_M}{\partial \varphi}(u) \right\rangle_{-1} = \sinh(r_p)^2 (\sin(\varphi_p)^2 + \cos(\varphi_p)^2) = \sinh(r_p)^2. \end{aligned}$$

Damit hat die Minkowski Metrik, eingeschränkt auf die Tangentialebenen  $T_p \mathbb{M}_{-1}^2$  die Matrixdarstellung

$$(g_{ij}(r, \varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh(r)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Man sieht direkt, dass diese Matrix positiv definit ist und somit ist die Minkowski Metrik, eingeschränkt auf die Tangentialebenen von  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , eine riemannsche Metrik. Das Hyperboloid  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit dieser riemannschen Metrik nennen wir das Hyperboloid-Modell der hyperbolischen Ebene. Dieses wollen wir nun genauer untersuchen.

Wie in Kapitel 3.5 besprochen, sieht man durch die spezielle Form der riemannschen Metrik, die wir in Gleichung (4.1) berechnet haben, dass  $F_M$  eine lokale Parametrisierung von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  in geodätischen Polarkoordinaten ist. Dort wurde außerdem bereits gezeigt, dass damit die Krümmung von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit der geerbten Minkowski Metrik tatsächlich und wie gewünscht den konstanten Wert  $-1$  hat.

Insbesondere sind Kurven  $F_M \circ \tilde{c}$  mit  $\tilde{c}(t) = (\lambda t, \varphi_c)^\top$  und  $\lambda, \varphi_c \in \mathbb{R}$  konstant, Geodätische in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  (diese sind in Abbildung 3 rechts schwarz dargestellt). Das Bild von  $F_M \circ \tilde{c}$  ist die Projektion der entsprechenden Kurve in  $T_\Omega \mathbb{M}_{-1}^2$  entlang der  $x^3$ -Achse. Man kann auch sagen, dass die Bilder dieser Geodätischen der Schnitt von Ebenen durch den Ursprung (zweidimensionalen Unterräumen des  $\mathbb{R}^3$ ) und  $\Omega$  mit  $\mathbb{M}_{-1}^2$  sind. Diese Anschauung wird im Folgenden die nützlichste sein.

Bestimmen wir nun die Tangentialebenen. Wir betrachten eine parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  verläuft und einen Punkt  $p$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , für die  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = v$ ,  $v \in \mathbb{R}^3$  gilt. Da  $c$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  liegt, muss  $\langle c(t), c(t) \rangle_{-1} = -1$  für alle  $t$  in  $I$  gelten. Leiten wir diese Gleichung nach  $t$  ab, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle c(t), c(t) \rangle_{-1} &= 0 \\ \langle c(t), \dot{c}(t) \rangle_{-1} + \langle \dot{c}(t), c(t) \rangle_{-1} &= 0 \\ 2 \langle c(t), \dot{c}(t) \rangle_{-1} &= 0, \end{aligned}$$

damit gilt für  $t = 0$

$$\langle p, v \rangle_{-1} = 0.$$

Die Tangentialebene ist als die Menge der Vektoren definiert, die die Geschwindigkeitsvektoren von parametrisierten Kurven in der Fläche durch den jeweiligen Punkt sind und damit ist

$$T_p \mathbb{M}_{-1}^2 = p^\perp := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v \rangle_{-1} = 0\}.$$

Anders ausgedrückt haben Punkte in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$  einen konstanten Abstand vom Ursprung, damit müssen die Geschwindigkeitsvektoren von parametrisierten Kurven in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  orthogonal zu den Punkten der parametrisierten Kurven stehen.

Bei der Untersuchung von Geometrien spielen Isometrien eine entscheidende Rolle, dies wird sich vor allem in Kapitel 4.5 zeigen. Der bisher erarbeitete theoretische Unterbau macht es uns relativ einfach, die Menge aller Isometrien der hyperbolischen Ebene im Hyperboloid-Modell  $\mathbb{M}_{-1}^2$  zu finden.

Wir betrachten zuerst nur lineare Isometrien von  $\mathbb{M}_{-1}^2$ . Dass diese tatsächlich alle Isometrien von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  sind, erhalten wir später als Nebenprodukt von Satz 4.1.7.

Nennen wir diese Isometrien  $L : \mathbb{M}_{-1}^2 \rightarrow \mathbb{M}_{-1}^2$ , wobei  $L \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Für das Differential  $d_p L : T_p \mathbb{M}_{-1}^2 \rightarrow T_{L(p)} \mathbb{M}_{-1}^2$  dieser Abbildung gilt dann  $d_p L = L|_{T_p \mathbb{M}_{-1}^2}$ .

Als erstes wollen wir, dass durch  $L$  das Hyperboloid  $\mathbb{M}_{-1}^2$  auf sich selbst abgebildet wird. Wir können die Definition von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  auch anschreiben als

$$\mathbb{M}_{-1}^2 = \{p = (p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, p \rangle_{-1} = -1, p^3 > 0\}.$$

Damit wird  $\mathbb{M}_{-1}^2$  auf sich selbst abgebildet, wenn

$$\langle Lp, Lp \rangle_{-1} = \langle p, p \rangle_{-1} \quad \forall p \in \mathbb{M}_{-1}^2$$

gilt und die dritte Komponente von  $Lp$  positiv ist.

Um  $L$  damit genauer zu beschreiben, schreiben wir die Minkowski Metrik in Matrixschreibweise an mit der Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei dann  $\langle v, w \rangle_{-1} = v^\top J w$  für Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^3$  ist.

Wenn  $L$  also  $\mathbb{M}_{-1}^2$  auf sich selbst abbilden soll, dann muss  $(Lp)^\top J L p = p^\top J p$ , also  $p^\top L^\top J L p = p^\top J p$  gelten, das heißt  $L^\top J L = J$ . Damit erhalten die linearen Abbildungen  $L$  auch die Minkowski Metrik im  $\mathbb{R}^3$  und da  $d_p L = L|_{T_p \mathbb{M}_{-1}^2}$  gilt, ist  $L$  automatisch eine Isometrie.

Es muss außerdem für  $p \in \mathbb{M}_{-1}^2$  die dritte Komponente von  $Lp$  positiv sein. Dies stellt sicher, dass  $L$  nicht eine solche Abbildung ist, die die beiden Schalen von  $\widehat{\mathbb{M}}_{-1}^2$  vertauscht. Weil  $L$  aber als lineare Abbildung stetig ist, reicht es für einen einzigen Punkt zu zeigen, dass er in der gleichen Schale bleibt, dafür bietet sich wieder  $\Omega$  an. Die dritte Komponente von  $L\Omega$  ist  $L_{3,3}$ , damit müssen wir noch verlangen, dass  $L_{3,3} > 0$  ist.

Wir haben also die Menge aller Isometrien von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  gefunden und bezeichnen sie mit

$$G_{-1} := \{L \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid L^\top J L = J, \text{ und } L_{3,3} > 0\},$$

diese sind offensichtlich invertierbar.

Zwei Arten dieser Isometrien sind dabei besonders interessant.

Zum einen sind Drehungen um die  $x^3$ -Achse der Form

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in  $G_{-1}$ . Mit diesen können wir also jeden Punkt  $p \in \mathbb{M}_{-1}^2$  in die  $x^1, x^3$ -Ebene bewegen, ohne  $\Omega$  dabei zu bewegen. Dieser Punkt hat dann die Form  $(\sinh(r_p), 0, \cosh(r_p))^\top$  für ein  $r_p \in \mathbb{R}$ .

Zum anderen können wir jeden Punkt  $p = F_M(r_p, \varphi_p) \in \mathbb{M}_{-1}^2$  in der  $x^1, x^3$ -Ebene mit einer Isometrie der Form

$$\begin{pmatrix} -\cosh(r_p) & 0 & \sinh(r_p) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(r_p) & 0 & \cosh(r_p) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

mit  $\Omega$  vertauschen. Dass Matrizen dieser Form in  $G_{-1}$  sind lässt sich leicht überprüfen, mit der Gleichung

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1 \quad (4.3)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Geodätische werden von Isometrien wieder auf Geodätische abgebildet. Ist also eine parametrisierte Kurve  $c$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  eine Geodätische und  $L \in G_{-1}$  eine Isometrie von  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , dann ist auch  $L \circ c$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  eine Geodätische.

Damit, und mit den bereits besprochenen Isometrien wissen wir nun, wie wir Geodätische zwischen zwei Punkten  $p, q \in \mathbb{M}_{-1}^2$  finden können. Man bewegt zuerst o.B.d.A. den Punkt  $p$  mit einer Drehung  $L_{d1} \in G_{-1}$  und einer Vertauschung  $L_v \in G_{-1}$  nach  $\Omega$  und danach den Punkt  $q$  durch eine Drehung  $L_{d2}$  in die  $x^1, x^3$ -Ebene. Wir schreiben  $L = L_{d2} \circ L_v \circ L_{d1} \in G_{-1}$  für die gesamte Bewegung der Punkte. Damit hat man eine Geodätische  $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , die durch  $Lp$  und  $Lq$  geht mit  $\dot{\tilde{c}}(t) = (\sinh(t), 0, \cosh(t))^T$ . Um zu sehen, dass diese tatsächlich eine Geodätische ist, braucht man zwei einfache Beobachtungen. Zum einen liegt ihr Bild im Bild einer Geodätischen, weil sie in der  $x^1, x^3$ -Ebene liegt. Zum anderen ist sie mit Bogenlänge parametrisiert, denn  $\sinh$  und  $\cosh$  sind jeweils ihre gegenseitigen Ableitungen, damit gilt

$$\langle \dot{\tilde{c}}(t), \dot{\tilde{c}}(t) \rangle_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ 0 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ 0 \\ \sinh(t) \end{pmatrix} \right\rangle_{-1} = 1$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  nach Gleichung (4.3). Damit haben wir aber auch eine Geodätische  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , die durch  $p$  und  $q$  geht, gefunden mit

$$c = L^{-1} \circ \tilde{c}.$$

Daraus ergibt sich:

1. Wir haben bereits gesehen, dass sich jeder Punkt  $p \in \mathbb{M}_{-1}^2$  durch eine Isometrie auf  $\Omega$  abbilden lässt (Man sagt auch die Isometriegruppe *operiert transitiv* auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$ . Dieser Begriff begegnet uns in Kapitel 4.5 wieder. Dort wird etwas näher darauf eingegangen.) Wenn also eine Geodätische einen Punkt  $p$  enthält, können wir diesen durch eine Isometrie  $L$  auf  $\Omega$  abbilden. Das Bild dieser Geodätischen ist damit, wie oben erwähnt, der Schnitt einer Ebene durch den Ursprung und  $\Omega$  mit  $\mathbb{M}_{-1}^2$ . Da aber  $L$  und damit auch  $L^{-1}$  lineare Transformationen des  $\mathbb{R}^3$  sind, muss die ursprüngliche Geodätische auch in einem zweidimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  liegen, also in der Schnittmenge einer Ebene durch den Ursprung und  $\mathbb{M}_{-1}^2$ . Eine solche Geodätische ist in Abbildung 5 dargestellt.

2. Wir können für zwei beliebige Punkte  $p$  und  $q$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  eine Geodätische finden, die durch  $p$  und  $q$  geht. Folgende Definition ist damit sinnvoll:

**Definition 4.1.2.** Seien  $p$  und  $q$  zwei Punkte in  $\mathbb{M}_{-1}^2$ . Sei außerdem  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  eine Geodätische durch  $p$  und  $q$  mit  $c(a) = p$  und  $c(b) = q$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$d(p, q) := \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_{-1}} dt$$

*hyperbolischer Abstand* bzw. *hyperbolische Distanz* zwischen  $p$  und  $q$ .

Eine parametrisierte Kurve der Form  $\tilde{c}(r) = (r, 0)^T$  in  $U$  wird unter  $F_M$  auf eine Geodätische abgebildet, die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Man prüft leicht  $\langle (F_M \circ \tilde{c})(t), (F_M \circ \tilde{c})(t) \rangle_{-1} = \cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$ . Wenn man also, wie oben, zwei Punkte  $p$  und  $q$  via Isometrien in die Form  $\Omega$  und  $(\sinh(a), 0, \cosh(a))^T$  gebracht hat, dann gilt  $d(p, q) = a$ .

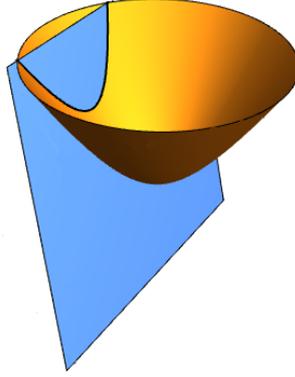


Abbildung 5: Geodätische in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  liegen im Schnitt zwischen einem zweidimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  und dem Hyperboloid.

Eine Isometrie verändert den hyperbolischen Abstand zwischen zwei Punkten offensichtlich nicht. Als nützliches Werkzeug für weitere Untersuchungen geben wir folgende

**Definition 4.1.3.** Seien  $p$  und  $q$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$ . Die Menge

$$S(p, q) := \{r \in \mathbb{M}_{-1}^2 \mid d(r, p) = d(r, q)\}$$

heißt *hyperbolische Streckensymmetrale* von  $p$  und  $q$ .

**Satz 4.1.4.** Seien  $p$  und  $q$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$ . Die hyperbolische Streckensymmetrale  $S(p, q)$  ist das Bild einer Geodätischen in  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , wobei

$$S(p, q) = (p - q)^\perp \cap \mathbb{M}_{-1}^2.$$

*Beweis.* Wir bewegen wieder, wie oben, den Punkt  $p$  nach  $\Omega$  und  $q$  in die  $x^1, x^3$ -Ebene mit einer Isometrie der Form  $\tilde{L} = L_{d2} \circ L_{v1} \circ L_{d1} \in G_{-1}$ , wobei

$$\tilde{L}q = \begin{pmatrix} \sinh(d(p, q)) \\ 0 \\ \cosh(d(p, q)) \end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir eine Isometrie  $L$  finden, die  $\tilde{L}p$  und  $\tilde{L}q$  zusätzlich so in der  $x^1, x^3$ -Ebene verschiebt, dass  $\Omega$  der "Mittelpunkt" der beiden wird, also  $d(\Omega, Lp) = d(\Omega, Lq)$ . Dies ist möglich mit

$$L_{v2} = \begin{pmatrix} -\cosh(d(p, q)/2) & 0 & \sinh(d(p, q)/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(d(p, q)/2) & 0 & \cosh(d(p, q)/2) \end{pmatrix},$$

diese vertauscht den Mittelpunkt mit  $\Omega$ . Wir schreiben  $L = L_{v2} \circ L_{d2} \circ L_{v1} \circ L_{d1}$  und man sieht direkt, dass  $Lp$  und  $Lq$  in der  $x^1, x^3$ -Ebene bleiben.

Damit gilt  $d(\Omega, Lp) = d(\Omega, Lq) = d(p, q)/2$  und somit ist schon ein Punkt, nämlich  $L^{-1}\Omega$ , aus  $S(p, q)$  gefunden.

Aufgrund der Symmetrie dieser Anordnung der Punkte lässt sich schon vermuten, dass die Streckensymmetrale  $S(Lp, Lq)$  der Durchschnitt der  $x^2, x^3$ -Ebene mit  $\mathbb{M}_{-1}^2$  ist. Der Vollständigkeit halber rechnen wir dies hier konkret durch:

Sei  $s = (\sinh(r_s) \cos(\varphi_s), \sinh(r_s) \sin(\varphi_s), \cosh(r_s))^\top$  ein beliebiger Punkt in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  ohne  $\Omega$ . Wir bewegen die beiden Punkte  $Lp$  und  $Lq$  jeweils nach  $\Omega$  und beobachten dabei wie sich  $s$  verhält. Nach der obigen Konstruktion von  $L$  bewegen wir  $Lp$  nach  $\Omega$  mit  $L_{v2}$ , dabei bewegt sich  $s$  nach

$$L_{v2} \cdot s = \begin{pmatrix} \cosh(r_s) \sinh(d(p, q)/2) - \cos(\varphi_s) \cosh(d(p, q)/2) \sinh(r_s) \\ \sin(\varphi_s) \sinh(r_s) \\ \cosh(r_s) \cosh(d(p, q)/2) - \cos(\varphi_s) \sinh(d(p, q)/2) \sinh(r_s) \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $Lq = (-\sinh(d(p, q)/2), 0, \cosh(d(p, q)/2))^\top$ . Damit können wir  $Lq$  nach  $\Omega$  bewegen indem wir zuerst eine Spiegelung an der  $x^2, x^3$ -Ebene

$$S_{x^2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die offensichtlich in  $G_{-1}$  ist, und danach wieder  $L_{v2}$  anwenden, dabei bewegt sich  $s$  nach

$$L_{v2} \cdot S_{x^2} \cdot s = \begin{pmatrix} \cosh(r_s) \sinh(d(p, q)/2) + \cos(\varphi_s) \cosh(d(p, q)/2) \sinh(r_s) \\ \sin(\varphi_s) \sinh(r_s) \\ \cosh(r_s) \cosh(d(p, q)/2) + \cos(\varphi_s) \sinh(d(p, q)/2) \sinh(r_s) \end{pmatrix}.$$

Die Abstände  $d(\Omega, L_{v2}s)$  und  $d(\Omega, L_{v2}S_{x^2}s)$  sind streng monoton wachsende Funktionen der dritten Komponenten von  $L_{v2}s$  und  $L_{v2}S_{x^2}s$ . Es gilt somit für die Abstände  $d(\Omega, L_{v2}s) = d(\Omega, L_{v2}S_{x^2}s)$  und damit auch  $d(p, L^{-1}s) = d(q, L^{-1}s)$ , genau dann, wenn

$$\cos(\varphi_s) \sinh(d(p, q)/2) \sinh(r_s) = 0,$$

also  $\varphi_s = \frac{\pi}{2}$ , oder  $\varphi_s = \frac{3\pi}{2}$ . Damit ist die hyperbolische Streckensymmetrale  $S(p, q)$  genau das Bild von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  geschnitten mit der  $x^2, x^3$ -Ebene unter  $L^{-1}$ .

Es ist nun auch leicht zu sehen, dass  $S(p, q) = (p - q)^\perp \cap \mathbb{M}_{-1}^2$  gilt. Da  $L$  die Minkowski Metrik erhält, können wir die zu untersuchende Gleichung  $\langle p - q, L^{-1}s \rangle_{-1} = 0$  umschreiben auf  $\langle Lp - Lq, s \rangle_{-1} = 0$ . Es gilt

$$Lp - Lq = \begin{pmatrix} 2 \sinh(d(p, q)/2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn  $L^{-1}s$  in  $S(p, q)$  liegt, verschwindet die erste Komponente von  $s$  und die Gleichung ist erfüllt. □

Mit der hyperbolischen Streckensymmetrale als Werkzeug können wir nun eine wichtige Eigenschaft von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  zeigen. Dabei werden wir auch eine sehr allgemeine Methode zur Konstruktion von Isometrien finden.

*Bemerkung 4.1.5.* Wenn wir im Folgenden von einer Spiegelung an einer Geodätischen  $c$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  sprechen, meinen wir eine Isometrie  $S_c = \tilde{S}_c^{-1} S_{x^2} \tilde{S}_c$ , die die Geodätische zuerst durch  $\tilde{S}_c$  in die  $x^2, x^3$ -Ebene bewegt, dann  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit  $S_{x^2}$  spiegelt, und dann die Geodätische wieder durch  $\tilde{S}_c^{-1}$  in ihre ursprüngliche Lage bringt. Die Geodätische  $c$  an der gespiegelt wird, ist offensichtlich die hyperbolische Streckensymmetrale aller Punktepaare  $p_d, q_d \in \mathbb{M}_{-1}^2$ ,  $d \in \mathbb{R}^+$ , für die gilt  $\tilde{S}_c p_d = (\sinh(d), 0, \cosh(d))^\top$ , und  $\tilde{S}_c q_d = (-\sinh(d), 0, \cosh(d))^\top$ . Man kann leicht zeigen, dass auch für jeden anderen Punkt, der nicht in  $c$  liegt, sein „Spiegelbild“ so liegt, sodass  $c$  die hyperbolische Streckensymmetrale der beiden ist.

**Satz 4.1.6.** *Gegeben sei eine natürliche Zahl  $k$  und eine Menge von  $2k$  Punkten  $A_1, \dots, A_k$  und  $B_1, \dots, B_k$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , sodass  $d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$  für alle  $i, j$  in  $\{1, \dots, k\}$ . Dann gibt es eine Isometrie  $L \in G_{-1}$ , die  $A_i$  auf  $B_i$  abbildet, für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Man kann diese Isometrie außerdem durch eine Verkettung von  $k$  oder weniger Spiegelungen an Geodätischen erzeugen.*

*Beweis.* Wir beweisen über vollständige Induktion.

Der Induktionsanfang  $k = 1$  läuft analog zum Vorgehen im Beweis von Satz 4.1.4. Wir haben einen Punkt  $A_1$  und einen Punkt  $B_1$ , die wir durch eine Isometrie  $L_1$  in die  $x^1, x^3$ -Ebene bewegen mit dem hyperbolischen Mittelpunkt der beiden in  $\Omega$ . Nun können wir wieder eine Spiegelung  $S_{x^2}$  anwenden und somit  $L_1 A_1$  und  $L_1 B_1$  vertauschen. Nach Anwendung von  $L_1^{-1}$  haben wir damit erfolgreich  $A_1$  auf  $B_1$  abgebildet mit der Isometrie  $L_1^{-1} S_{x^2} L_1$ .

Wir können nun annehmen, dass wir bereits eine Isometrie  $L_{k-1}$  gefunden haben, die die Punkte  $A_1, \dots, A_{k-1}$  auf die Punkte  $B_1, \dots, B_{k-1}$  abbildet und als Verkettung von  $k - 1$  oder weniger Spiegelungen an Geodätischen geschrieben werden kann. Wenn nun  $L_{k-1} A_k = B_k$  gilt, sind wir fertig. Wenn dies nicht gilt benutzen wir die Spiegelung an der hyperbolischen Streckensymmetrale  $S(L_{k-1} A_k, B_k)$  von  $L_{k-1} A_k$  und  $B_k$ , nämlich  $S_{S(L_{k-1} A_k, B_k)}$ . Damit bildet  $L_k := S_{S(L_{k-1} A_k, B_k)} L_{k-1}$   $A_k$  auf  $B_k$  ab. Dabei gilt aber  $B_i \in S(L_{k-1} A_k, B_k)$  für alle  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ , denn  $d(B_i, L_{k-1} A_k) = d(L_{k-1} A_i, L_{k-1} A_k) = d(A_i, A_k) = d(B_i, B_k)$ . Also werden die  $B_i$  von  $S_{S(L_{k-1} A_k, B_k)}$  auf sich selbst abgebildet und somit bildet  $L_k$  alle  $A_i$  auf  $B_i$  ab für  $i \in \{1, \dots, k\}$  und besteht aus  $k$  oder weniger Spiegelungen an Geodätischen. □

Bei diesem Beweis scheint eines etwas merkwürdig: Die Menge an Punkten  $A_1, \dots, A_k$  und  $B_1, \dots, B_k$  ist bis auf ihre Abstände beliebig gewählt. Dennoch zeigt sich im Induktionsschritt, dass die Punkte  $B_1, \dots, B_{k-1}$  in  $S(L_{k-1} A_k, B_k)$ , also insbesondere in einer Geodätischen, liegen. Wir hatten aber in der Annahme nicht verlangt, dass  $B_1, \dots, B_{k-1}$  in einer Geodätischen liegen. Der Beweis garantiert dennoch, auch wenn  $B_1, \dots, B_{k-1}$  nicht in einer Geodätischen liegen, dass wir jede Menge von Punkten gewisser Abstände auf eine andere Menge mit den gleichen Abständen abbilden können. Die  $B_1, \dots, B_{k-1}$  müssen dabei im Allgemeinen nicht in einer Geodätischen liegen, weil man den Induktionsschritt oft nicht in dieser Form durchführen muss, bzw. weil er bei „Wenn nun  $L_{k-1} A_k = B_k$  gilt, sind wir fertig“ endet. Dazu eine intuitive Begründung:

Zuerst etwas Vorarbeit. Wir betrachten einen Punkt  $p \in \mathbb{M}_{-1}^2$  und die Menge aller Punkte in  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , die den gleichen hyperbolischen Abstand  $d$  zum Punkt  $p$  haben. Wieder bilden wir den Punkt  $p$  durch eine Isometrie  $L$  auf  $\Omega$  ab. Dann wird die Menge offensichtlich auf einen Kreis in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  um  $\Omega$  abgebildet, also auf das Bild der geschlossenen parametrisierten Kurve  $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit

$$c(t) = \begin{pmatrix} \sinh(d) \cos(t) \\ \sinh(d) \sin(t) \\ \cosh(d) \end{pmatrix}.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass nach Rücktransformation durch  $L^{-1}$  diese Kurve die Form

$$L^{-1}c(t) = M(p, d) + \cos(t)v(p, d) + \sin(t)w(p, d)$$

annimmt, mit  $M(p, d), v(p, d), w(p, d) \in \mathbb{R}^3$ , wobei im Allgemeinen  $\langle v, v \rangle \neq \langle w, w \rangle$ , und somit bildet die Menge von Punkten vom hyperbolischen Abstand  $d$  um einen Punkt  $p$  eine euklidische Ellipse. (Diese Mengen werden in Kapitel 4.5 noch interessant).

Betrachten wir nun zwei Dreiecke, definiert durch die Menge an Punkten  $A_1, A_2, A_3$  und  $B_1, B_2, B_3$ , wobei die Punkte untereinander den gleichen Abstand haben, analog zu Satz 4.1.6. Wir machen die Bezeichnungen  $d(A_1, A_3) = d(B_1, B_3) = d_1$  und  $d(A_2, A_3) = d(B_2, B_3) = d_2$ . Nun liegt  $B_3$  bestimmt in der Menge aller Punkte, die den hyperbolischen Abstand  $d_1$  von  $B_1$  haben und in der Menge der Punkte, die den hyperbolischen Abstand  $d_2$  von  $B_2$  haben. Beide Mengen sind Ellipsen und solange  $B_1 \neq B_2$  ist, haben diese einen oder zwei Schnittpunkte. Wir können nun  $A_1$  und  $A_2$  durch eine Isometrie  $L_2$  auf  $B_1$  und  $B_2$  abbilden. Danach liegt der Punkt  $L_2A_3$  ebenfalls in der Schnittmenge der beiden betrachteten Ellipsen. Wenn die beiden Ellipsen nur einen Schnittpunkt haben gilt sofort  $L_2A_3 = B_3$ , wenn sie zwei Schnittpunkte haben, könnte  $L_2A_3$  in dem einen Schnittpunkt liegen und  $B_3$  in dem anderen. In Beweis 4.1.6 haben wir gezeigt, dass dann eine Spiegelung an der Geodätischen durch  $B_1$  und  $B_2$  das gewünschte Ergebnis liefert.

Wenn nun die Mengen  $A_1, \dots, A_k$  und  $B_1, \dots, B_k$  hyperbolische  $k$ -Ecke mit  $k > 3$  sind, brauchen wir nur  $A_1, A_2, A_3$  auf  $B_1, B_2, B_3$  abbilden. Alle anderen Punkte sind dann automatisch richtig abgebildet, weil drei oder mehr verschiedene Ellipsen höchstens einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Wir können also eine Isometrie finden, die eine Menge an Punkten auf eine beliebige Menge an Punkten abbildet, indem wir fortschreitend an den hyperbolischen Streckensymmetralen spiegeln. Dass die Punkte untereinander den gleichen hyperbolischen Abstand haben stellt dabei keine Einschränkung dar, da Isometrien ohnehin den hyperbolischen Abstand erhalten.

Mit diesen Voraussetzungen können wir noch ein paar interessante Eigenschaften von Isometrien auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$  zeigen.

**Satz 4.1.7.** *Sei  $L$  eine Isometrie auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , dann gilt:*

1. *Wenn  $L$  nicht die Identität ist, ist die Menge an Punkten die durch  $L$  auf sich selbst abgebildet werden in einer Geodätischen enthalten.*
2. *Wenn  $L$  alle Punkte einer Geodätischen auf sich selbst abbildet, ist  $L$  entweder die Identität oder die Spiegelung an dieser Geodätischen.*
3.  *$L$  kann als eine Verkettung von 3 oder weniger Spiegelungen an Geodätischen geschrieben werden.*

*Beweis.*

1. Wenn  $L$  nicht die Identität ist, gibt es einen Punkt  $A \in \mathbb{M}_{-1}^2$  mit  $LA \neq A$ . Wenn  $L$  einen Punkt  $B \in \mathbb{M}_{-1}^2$  auf sich selbst abbildet, dann ist  $d(A, B) = d(LA, B)$  und damit ist  $B$  in  $S(A, LA)$ . Dies gilt aber für alle Punkte, die von  $L$  auf sich selbst abgebildet werden, damit liegen diese in einer Geodätischen.

2. Wir nehmen an, dass  $L$  alle Punkte einer Geodätischen fixiert. Wenn  $L$  die Identität ist, sind wir fertig. Wenn  $L$  nicht die Identität ist, gibt es einen Punkt  $A \in \mathbb{M}_{-1}^2$  mit  $LA \neq A$ . Dann muss aber nach dem vorigen Argument die Geodätische, die auf sich selbst abgebildet wird in  $S(A, LA)$  enthalten sein. Dies gilt aber für alle  $A$ , die nicht in der Geodätischen liegen, die auf sich selbst abgebildet wird, und somit ist  $L$  die Spiegelung an dieser Geodätischen.

3. Wir betrachten eine Menge von Punkten  $A_1, A_2, A_3$ , die nicht in einer Geodätischen liegen. Es seien  $B_1 = LA_1, B_2 = LA_2$  und  $B_3 = LA_3$ . Laut Satz 4.1.6 gibt es eine Isometrie  $\tilde{L}$ , die  $B_i$  auf  $A_i$  Abbildet für  $i \in \{1, 2, 3\}$  und die aus 3 oder weniger Spiegelungen an Geodätischen geschrieben werden kann. Die Isometrie  $\tilde{L}^{-1}L$  fixiert damit die Punkte  $A_i$ . Nach Punkt 1. muss sie aber damit die Identität sein, und somit gilt  $\tilde{L} = L$ .

□

Insbesondere zeigt Punkt 3, dass  $G_{-1}$  wirklich alle Isometrien von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  enthält, denn jede Isometrie von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  kann als Verkettung von drei oder weniger Spiegelungen an Geodätischen geschrieben werden und jede Spiegelung an einer Geodätischen ist in  $G_{-1}$ .

Man kann auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , so wie auf der Ebene Trigonometrie betreiben. Dabei findet man als Lehrsätze der Trigonometrie auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$  einen Sinussatz und zwei Kosinussätze.

Wir betrachten ein geodätisches Dreieck, also drei Punkte  $A, B, C \in \mathbb{M}_{-1}^2$ , die durch Geodätische verbunden sind. Die restlichen Bezeichnungen lauten wie üblich. Der Winkel zwischen den Geodätischen von  $A$  nach  $B$  und von  $A$  nach  $C$  heißt  $\alpha$  usw. Die Länge der Geodätischen zwischen  $B$  und  $C$  heißt  $a$  usw., siehe Abbildung 6. Es soll außerdem vorausgesetzt sein, dass alle Längen größer Null sind.

Wir wollen Beziehungen zwischen Winkeln und Längen in hyperbolischen Dreiecken finden. Dazu benutzen wir vor allem die Isometrien auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$ . Wir wissen, dass wir o.B.d.A. den Punkt  $A$  durch eine Isometrie auf  $\Omega$  abbilden können und danach den

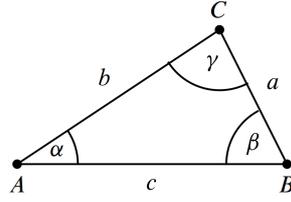


Abbildung 6: Bezeichnungen im Dreieck [4, Kap.4.9, S.224]

Punkt  $B$  in die  $x^1, x^3$ -Ebene in der Form  $B = F_M(c, 0)$  und damit ist  $C = F_M(b, \alpha)$ . Isometrien ändern weder Winkel noch Längen, deshalb können wir uns auf die Untersuchung solcher Dreiecke beschränken.

Benutzen wir nun die Isometrie, die  $B$  mit  $A$  vertauscht. Damit ist  $LB = \Omega$  und  $LA = F_M(c, 0)$ . Somit muss aber auch  $LC = F_M(a, \pm\beta)$  gelten, da  $d(LB, LC) = a$  gelten muss und der Winkel zwischen den Geodätischen von  $LB$  nach  $LA$  und von  $LB$  nach  $LC$  gleich  $\beta$  sein muss. Eine Vertauschungsisometrie wie in (4.2) ändert außerdem das Vorzeichen des zweiten Eintrages von  $C$  nicht, damit bleibt  $C$  "auf der gleichen Seite" der  $x^1, x^3$ -Ebene und es gilt  $LC = F_M(a, \beta)$ .

Wir schreiben nun die Gleichung  $F_M(a, \beta) = LF_M(b, \alpha) = LC$  aus:

$$\begin{pmatrix} \sinh(a) \cos(\beta) \\ \sinh(a) \sin(\beta) \\ \cosh(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cosh(c) & 0 & \sinh(c) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(c) & 0 & \cosh(c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sinh(b) \cos(\alpha) \\ \sinh(b) \sin(\alpha) \\ \cosh(b) \end{pmatrix},$$

und erhalten damit das Gleichungssystem

$$\sinh(a) \cos(\beta) = -\cosh(c) \sinh(b) \cos(\alpha) + \sinh(c) \cosh(b) \quad (4.4)$$

$$\sinh(a) \sin(\beta) = \sinh(b) \sin(\alpha) \quad (4.5)$$

$$\cosh(a) = -\sinh(c) \sinh(b) \cos(\alpha) + \cosh(c) \cosh(b). \quad (4.6)$$

Dies sind bereits alle Gleichungen, die wir brauchen um die trigonometrischen Lehrsätze aufzuschreiben.

Gleichung (4.5) ist bereits der Sinussatz für Dreiecke in der hyperbolischen Ebene und Gleichung (4.6) der sogenannte *Seitenkosinussatz*.

Für den letzten trigonometrischen Lehrsatz ist noch ein wenig Arbeit nötig. Als erstes können wir die gleiche Herleitung wie oben durchführen, nur dass wir diesmal  $A$  und  $C$  in die  $x^1, x^3$ -Ebene bewegen und dann vertauschen, dann ergibt sich analog zu Gleichung (4.4) die Gleichung

$$\sinh(a) \cos(\gamma) = -\cosh(b) \sinh(c) \cos(\alpha) + \sinh(b) \cosh(c). \quad (4.7)$$

Wir multiplizieren Gleichung (4.4) mit  $\cos(\alpha)$  und Gleichung (4.5) mit  $\sin(\alpha)$  und subtrahieren die beiden, damit bekommen wir

$$\begin{aligned} & \sinh(a) \cos(\beta) \cos(\alpha) - \sinh(a) \sin(\beta) \sin(\alpha) \\ &= -\cosh(c) \sinh(b) \cos(\alpha)^2 + \sinh(c) \cosh(b) \cos(\alpha) - \sinh(b) \sin(\alpha)^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wir setzen (4.7) in (4.8) ein und erhalten

$$\begin{aligned} & \sinh(a) \cos(\beta) \cos(\alpha) - \sinh(a) \sin(\beta) \sin(\alpha) \\ &= -\cosh(c) \sinh(b) \cos(\alpha)^2 - \sinh(a) \cos(\gamma) \\ & \quad + \sinh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sin(\alpha)^2, \end{aligned}$$

mit  $\cos(\alpha)^2 = 1 - \sin(\alpha)^2$  erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sinh(a)(\cos(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\beta) \sin(\alpha)) \\ &= \cosh(c) \sinh(b) \sin(\alpha)^2 - \sinh(a) \cos(\gamma) - \sinh(b) \sin(\alpha)^2. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir noch den Sinussatz (4.5) und erhalten

$$\begin{aligned} & \sinh(a)(\cos(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\beta) \sin(\alpha)) \\ &= \cosh(c) \sinh(a) \sin(\beta) \sin(\alpha) - \sinh(a) \cos(\gamma) - \sinh(a) \sin(\beta) \sin(\alpha), \end{aligned}$$

dann dividieren wir noch durch  $\sinh(a)$  und addieren  $\sin(\beta) \sin(\alpha)$  und erhalten

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \cosh(c) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\gamma).$$

Dies ist der sogenannte *Winkelkosinussatz*. Wir fassen nun noch einmal alle trigonometrischen Lehrsätze der hyperbolischen Ebene zusammen in

**Satz 4.1.8.** *Für ein geodätisches Dreieck in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit den Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  und gegenüberliegenden Innenwinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  gelten die trigonometrischen Lehrsätze:*

1. *Sinussatz:*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$$

2. *Seitenkosinussatz:*

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha) \\ \cosh(b) &= \cosh(a) \cosh(c) - \sinh(a) \sinh(c) \cos(\beta) \\ \cosh(c) &= \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma) \end{aligned}$$

3. *Winkelkosinussatz:*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cosh(a) \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cos(\gamma) \\ \cos(\beta) &= \cosh(b) \sin(\alpha) \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cos(\gamma) \\ \cos(\gamma) &= \cosh(c) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cos(\beta). \end{aligned}$$

Die verschiedenen Formulierungen ergeben sich durch Umbenennung.

Wir wollen nun kurz die Form von hyperbolischen Dreiecken ein wenig genauer spezifizieren. Nehmen wir an, dass die Innenwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  kleiner als  $\pi$  und größer als 0 sind und betrachten den Winkelkosinussatz. Nach Voraussetzung ist  $\sin(\alpha) \sin(\beta) > 0$

und da  $\cosh(c) > 1$  für alle  $c > 0 \in \mathbb{R}$  gilt, können wir dem Winkelkosinussatz die Ungleichung

$$\cos(\gamma) > \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cos(\beta)$$

entnehmen. Wegen  $\sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cos(\beta) = -\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \alpha - \beta)$  sehen wir, dass

$$\cos(\gamma) > \cos(\pi - \alpha - \beta),$$

und da der Kosinus in  $[0, \pi]$  monoton fallend ist, gilt

$$\pi > \alpha + \beta + \gamma.$$

Die Winkelsumme von hyperbolischen Dreiecken ist also kleiner als die von Dreiecken in der euklidischen Ebene, sie erscheinen daher "dünner", wie in Abbildung 7 dargestellt.

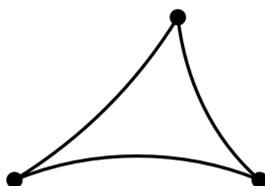


Abbildung 7: Illustration der Form eines Dreiecks der hyperbolischen Ebene. [4, Kap.4.9, S.227]

Das Gebiet der Differentialgeometrie von metrischen Räumen mit nichtpositiver Krümmung beschäftigt sich hauptsächlich mit den sogenannten  $CAT(\kappa)$  Räumen. Diese werden tatsächlich so definiert, dass Dreiecke in einem solchen Raum, salopp gesagt, "dünner" sind als sogenannte Vergleichsdreiecke im Modellraum  $\mathbb{M}_\kappa^n$ . Man sieht also, dass die "Dünnheit" von Dreiecken ein gutes Maß für die Krümmung des Raumes ist, in dem sie sich befinden (vgl. [6, Kap.II.1, S.158f]).

Geodätische durch zwei Punkte in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  haben wir durch das Abbilden der Punkte in die  $x^1, x^3$ -Ebene untersucht. Man kann aber die Geodätischen auch direkt finden wie wir im Folgenden zeigen werden.

Betrachten wir zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{M}_{-1}^2$ . Wir bilden wieder die zwei Punkte in die  $x^1, x^3$ -Ebene ab, schreiben dort die Geodätische explizit auf und bilden diese auf ihre ursprüngliche Form ab.

Wir verwenden wie bisher eine Isometrie der Form  $L = L_{d2}L_{v1}L_{d1}$ , sodass  $Lp = \Omega$  und  $Lq = (\sinh(d(p, q)), 0, \cosh(d(p, q)))^\top$  gilt. Nach Anwendung der Isometrie ist die Geodätische  $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  durch  $Lp$  und  $Lq$  bis auf Umparametrisierung gegeben durch

$$\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ 0 \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Um die allgemeine Form für Geodätische zwischen zwei Punkten später schöner formulieren zu können, versuchen wir nun  $\tilde{c}$  durch die uns bekannten Punkte anzuschreiben, mit

$$\tilde{c}(t) = \cosh(t)Lp + \sinh(t)(1, 0, 0)^\top.$$

Den Vektor  $(1, 0, 0)^\top$  aus der Tangentialebene  $T_{Lp}\mathbb{M}_{-1}^2$  können wir nun, etwas synthetisch erzeugt, ebenfalls durch die uns bekannten Punkte ausdrücken, mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sinh(d(p, q))} \begin{pmatrix} \sinh(d(p, q)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sinh(d(p, q))} \left( \begin{pmatrix} \sinh(d(p, q)) \\ 0 \\ \cosh(d(p, q)) \end{pmatrix} + (-\cosh(d(p, q))) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

und somit können wir schreiben

$$(1, 0, 0)^\top = \frac{1}{\sinh(d(p, q))} (Lq + \langle Lp, Lq \rangle_{-1} Lp).$$

Wir haben  $\tilde{c}$  auf die Form

$$\tilde{c}(t) = \cosh(t)Lp + \sinh(t) \frac{1}{\sinh(d(p, q))} (Lq + \langle Lp, Lq \rangle_{-1} Lp)$$

gebracht. Durch die Isometrie  $L^{-1}$  bilden wir  $Lp$  wieder auf  $p$  und  $Lq$  wieder auf  $q$  ab. Außerdem bilden Isometrien Geodätische wieder auf Geodätische ab, somit muss  $c = L^{-1}\tilde{c}$  die Geodätische durch  $p$  und  $q$  sein. Wir wenden  $L^{-1}$  auf  $\tilde{c}$  an und erhalten

$$c(t) = \cosh(t)p + \sinh(t) \frac{1}{\sinh(d(p, q))} (q + \langle p, q \rangle_{-1} p),$$

wobei wir  $\langle Lp, Lq \rangle_{-1} = \langle p, q \rangle_{-1}$  verwendet haben. Um die Schreibweise noch etwas zu verfeinern machen wir die Bezeichnung

$$u = \frac{1}{\sinh(d(p, q))} (q + \langle p, q \rangle_{-1} p),$$

womit  $u$  ein Einheitsvektor in der Tangentialebene  $T_p\mathbb{M}_{-1}^2$  in Richtung  $(q + \langle p, q \rangle_{-1} p)$  ist.

Wir kennen also nun die gesuchte Geodätische und fassen zusammen:

**Satz 4.1.9.** *Gegeben seien zwei Punkte  $p$  und  $q$  aus  $\mathbb{M}_{-1}^2$ . Die mit Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , die durch  $p$  und  $q$  geht, mit  $c(0) = p$  und  $c(d(p, q)) = q$  ist gegeben durch*

$$c(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)u,$$

wobei  $u$  ein Einheitsvektor der Tangentialebene  $T_p\mathbb{M}_{-1}^2$  in Richtung  $(q + \langle p, q \rangle_{-1} p)$  ist.

## 4.2 Das Beltrami-Klein-Modell

Im Folgenden werden „Karten“ der hyperbolischen Ebene untersucht. Mit Karten meinen wir hier Abbildungen, die die Punkte der hyperbolischen Ebene auf eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  abbilden. Brauchbare Karten erfüllen dabei auch die nötigen Eigenschaften, damit ihre Umkehrabbildung einer lokale Parametrisierung der betrachteten Fläche entspricht. Die Aufgabe, gute Karten der Erde (Kugel) zu erstellen, war eine treibende Kraft in der Entstehung der Differentialgeometrie. Aber auch die Untersuchung von Karten der hyperbolischen Ebene liefert interessante Ergebnisse. Dabei ist vor allem die Eigenschaft der Konformität interessant.

**Definition 4.2.1.** Sei  $S$  eine reguläre Fläche. Eine lokale Parametrisierung  $(U, F, V)$  von  $S$  mit der riemannschen Metrik  $g$  heißt *konform* oder *winkeltreu*, falls es eine Funktion  $k : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k > 0$  gibt, sodass

$$(g_{ij}(u)) = k(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle  $u \in U$ .

Diese Definition ist so zu interpretieren: Sei  $F(u) = p$  in  $S$ . Der Winkel  $\alpha_g$  zwischen zwei Vektoren  $v = D_u F(\tilde{v})$  und  $w = D_u F(\tilde{w})$  in  $T_p S$  bezüglich der riemannschen Metrik  $g$  sei wie gewohnt gegeben durch

$$\cos(\alpha_g) = \frac{g_p(v, w)}{\sqrt{g_p(v, v)} \sqrt{g_p(w, w)}}.$$

Wir betrachten nun die zurückgezogene Metrik  $F^*g$  aus Definition 3.1.3 mit analogen Bezeichnungen auf  $\tilde{U}$ . Die Vektoren  $\tilde{v}$  und  $\tilde{w}$  in  $\mathbb{R}^2$  sollen dabei bezüglich des Standardskalarproduktes einen Winkel  $\alpha$  einschließen.

Da der Arkuskosinus auf seinem Definitionsbereich eine surjektive Funktion ist, sind die Winkel  $\alpha_g$  und  $\alpha$  gleich, genau dann, wenn

$$\frac{g_p(v, w)}{\sqrt{g_p(v, v)} \sqrt{g_p(w, w)}} = \frac{(F^*g)_{\tilde{u}}(\tilde{v}, \tilde{w})}{\sqrt{(F^*g)_{\tilde{u}}(\tilde{v}, \tilde{v})} \sqrt{(F^*g)_{\tilde{u}}(\tilde{w}, \tilde{w})}} = \frac{\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle} \sqrt{\langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle}}$$

ist. Dies ist offensichtlich erfüllt für  $g_p(v, w) = k \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle$ , mit  $k > 0$ , da sich die Zahl  $k$  herausheben und kürzen lässt.

Betrachten wir also im Speziellen das Hyperboloid-Modell. Sei  $(U, F, V)$  eine lokale Parametrisierung von  $\mathbb{M}_{-1}^2$ . Die Abbildung  $F^{-1} : \mathbb{M}_{-1}^2 \rightarrow U$  ist dann unsere Karte. Seien nun zwei parametrisierte Kurven  $c_v$  und  $c_w$  in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  gegeben mit  $c_v(0) = c_w(0) = p$  mit  $p \in \mathbb{M}_{-1}^2$  und  $\dot{c}_v(0) = v$ ,  $\dot{c}_w(0) = w \in T_p \mathbb{M}_{-1}^2$ . Es sei außerdem  $F(u) = p$  und  $(F^{-1} \circ c_v)(0) = \tilde{v}$  und  $(F^{-1} \circ c_w)(0) = \tilde{w}$ . Wir bilden die beiden parametrisierten Kurven durch unsere Karte auf die Ebene ab. Am Schnittpunkt  $u$  messen wir den Winkel zwischen  $\tilde{v}$  und  $\tilde{w}$ , also zwischen den tangentialen Linien an die Kurven im Schnittpunkt (zum Beispiel mit einem Geodreieck, dies entspricht dem Winkel bezüglich des Standardskalarproduktes).

Wenn  $F$  konform ist, entspricht dieser Winkel genau dem Winkel, den die beiden

parametrisierten Kurven  $c_v$  und  $c_w$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$  am Schnittpunkt einschließen. Wir können also den Winkel

$$\alpha_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}} = \arccos \left( \frac{\langle v, w \rangle_{-1}}{\sqrt{\langle v, v \rangle_{-1}} \sqrt{\langle w, w \rangle_{-1}}} \right)$$

direkt von so einer Karte ablesen.

Die erste Karte, die wir betrachten, ist das sogenannte *Beltrami-Klein-Modell* (auch bekannt als *projektives Modell*, *Klein'sches Modell*, oder *Cayley-Klein-Modell*). Dieses erhalten wir durch eine „Projektion“ des Hyperboloid-Modells auf die affine Tangentialebene  $T_\Omega \mathbb{M}_{-1}^2 + \Omega$ . Eine Illustration der zu dieser Karte zugehörigen lokalen Parametrisierung von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  findet sich in Abbildung 8.

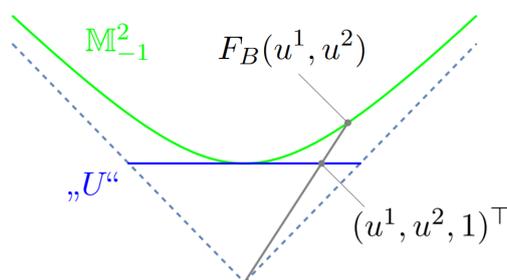


Abbildung 8: Illustration der Herstellung des Beltrami-Klein-Modells. Die Abbildung stellt einen Schnitt durch  $\mathbb{M}_{-1}^2$  in der Ebene durch den Ursprung,  $\Omega$  und  $(u^1, u^2, 1)^\top$  dar.

Wir bestimmen zuerst die Menge der Koordinaten  $U$ . Wie in Abbildung 8 durch die strichlierten Linien angedeutet ist, schmiegt sich das Hyperboloid „von innen“ an einen Kegel mit Steigung 1 an. Dies ist leicht zu sehen, da ganz offensichtlich  $x^1 < \sqrt{1 + (x^1)^2}$  für alle  $x^1 \in \mathbb{R}$  ist,  $\lim_{x^1 \rightarrow \infty} \sqrt{1 + (x^1)^2} = x^1$  ist und das Hyperboloid drehsymmetrisch um die  $x^3$ -Achse ist. Ausgehend davon kann man mit Abbildung 8 leicht erkennen, dass die Schnittmenge von  $T_\Omega \mathbb{M}_{-1}^2 + \Omega$  mit diesem Kegel (ohne Rand), also  $U = \{(u^1, u^2)^\top \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$ , ausreichend und notwendig ist, um das gesamte Hyperboloid zu parametrisieren.

Für  $V$  können wir einfach  $\mathbb{R}^3$  festlegen, somit müssen wir nur noch die Funktion  $F_B : U \rightarrow \mathbb{M}_{-1}^2$  finden, die eine „Projektion“ wie in Abbildung 8 beschreibt. Wir wollen einen gegebenen Vektor  $(u^1, u^2, 1)^\top$  um einen Faktor verlängern, sodass wir einen Punkt auf  $\mathbb{M}_{-1}^2$  erreichen. Damit brauchen wir also die Lösung der Gleichung  $\lambda(u^1, u^2, 1)^\top = (x^1, x^2, \sqrt{1 + (x^1)^2 + (x^2)^2})^\top$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Diese ist leicht zu finden und so erhalten wir

$$F_B(u^1, u^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für ein  $(u^1, u^2)^\top \in U$ .

Damit können wir die Matrixdarstellung der Metrik von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  bezüglich dieser lokalen Parametrisierung einfach berechnen mit den Basisvektoren der Tangentialebenen

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_B}{\partial u^1}(u) &= (1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} 1 - (u^2)^2 \\ u^1 u^2 \\ u^1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial F_B}{\partial u^2}(u) &= (1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} u^1 u^2 \\ 1 - (u^1)^2 \\ u^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Bezeichnung  $u = (u^1, u^2)^\top$  gemacht haben.

Die Komponenten der Matrixdarstellung der Metrik lassen sich somit leicht bestimmen. Diese hat eine grässliche Form, deshalb schreiben wir sie nicht explizit auf. Wir berechnen lediglich

$$\begin{aligned}g_{12}(u) &= \left\langle \frac{\partial F_B}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F_B}{\partial u^2}(u) \right\rangle_{-1} \\ &= (1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^{-3} (u^1 u^2 - u^1 (u^2)^3 - u^2 (u^1)^3) \\ &\neq 0,\end{aligned}$$

damit ist die Matrixdarstellung der Metrik nicht proportional zur Einheitsmatrix und somit das Beltrami-Klein-Modell nicht konform. Das Modell ist dennoch interessant, weil darin die Geodätischen in  $\mathbb{M}_{-1}^2$  auf Geradenstücke in  $U$  abgebildet werden. Dies ist offensichtlich, da wir schon festgestellt haben, dass Geodätische in der Schnittmenge von Ebenen durch den Ursprung mit dem Hyperboloid sind. Somit sind die Projektionen der Geodätischen nach Abbildung 8 ebenfalls Schnitte von Ebenen durch den Ursprung mit der Kreisscheibe in  $T_\Omega \mathbb{M}_{-1}^2 + \Omega$ , also Geradenstücke.

Man kann das Beltrami-Klein-Modell schön veranschaulichen, indem man die hyperbolische Ebene  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit einer regelmäßigen Struktur auslegt, und diese regelmäßige Struktur auf die Kreisscheibe projiziert. Wir nennen so eine regelmäßige Struktur auch „Parkettierung“. Es gibt eine große Vielfalt von Möglichkeiten die hyperbolische Ebene zu „parkettieren“, dabei entstehen besonders interessante Bilder, die vor allem durch den Künstler M.C. Escher bekannt wurden (sein berühmtes „Circle Limit I“ findet sich in Abbildung 12). Wir wollen hier nicht näher auf die Möglichkeiten der Parkettierung eingehen. So viel sei gesagt: Die euklidische Ebene kann man zum Beispiel mit gleichgroßen Quadraten vollständig auslegen. Wenn man dann die Quadrate abwechselnd in Schwarz und weiß färbt, erhält man ein Schachbrettmuster. Analog kann man viele verschiedene regelmäßige Strukturen finden um auch die hyperbolische Ebene auszulegen. In Abbildung 12 sind es zum Beispiel Fische (oder Vögel, wie man es sehen möchte) mit immer gleichen hyperbolischen Abmessungen, wobei die Begrenzungslinien Geodätische darstellen. Analog zu Escher's Circle Limit I kann man die Parkettierung mit Fischen der hyperbolischen Ebene gemäß des Beltrami-Klein-Modells auf die Kreisscheibe projizieren, damit ergibt sich Abbildung 9.

Man sieht auch hier, dass die Geodätischen auf Geradenstücke abgebildet werden. Damit lässt sich eine wichtige Eigenschaft der hyperbolischen Geometrie sehr anschaulich zeigen. Wie in der Einleitung zum Kapitel 4 besprochen, bereitete bei der



Abbildung 9: Illustration des Beltrami-Klein-Modells analog zum Circle Limit I von M.C.Escher. [4, Kap.4.11, S.239]

axiomatischen Untersuchung der Geometrie vor allem das Parallelenaxiom Probleme. Das Parallelenaxiom sagt, grob gesprochen, dass es durch einen Punkt außerhalb einer Geraden (Geodätischen) nur eine Gerade (Geodätische) gibt, die diese nicht schneidet. Abbildung 10 zeigt eindeutig (im Beltrami-Klein-Modell), dass es in der hyperbolischen Ebene unendlich viele verschiedene Geodätische durch den Punkt  $p$  gibt, die die Geodätische  $g$  nie schneiden.

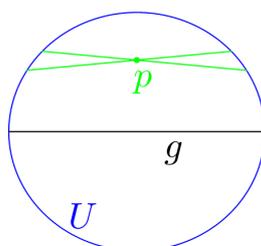


Abbildung 10: Illustration der Verletzung des Parallelenaxioms in der ebenen hyperbolischen Geometrie. Die Geradenstücke stellen die Bilder von Geodätischen im Beltrami-Klein-Modell dar.

Die hyperbolische Ebene erfüllt aber alle anderen Axiome der euklidischen Geometrie, damit beweist die hyperbolische Ebene, dass das Parallelenaxiom nicht aus den anderen Axiomen folgt.

### 4.3 Das Poincaré'sche Scheibenmodell

Nun betrachten wir das sogenannte Poincaré'sche Scheibenmodell. Dieses Modell entsteht durch eine leichte Veränderung der Projektion, die wir beim Beltrami-Klein-Modell benutzt haben. Es ergeben sich dennoch große Unterschiede in den Eigenschaften der Karte. In diesem Modell wird, wie in Abbildung 11 dargestellt, vom Punkt  $(0, 0, -1)^\top$  aus auf die  $x^1, x^2$ -Ebene projiziert.

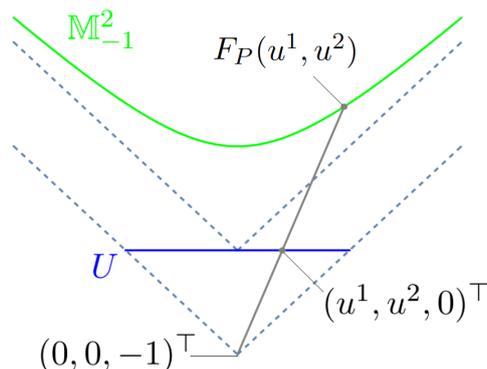


Abbildung 11: Illustration der Herstellung des Poincaré'schen Scheibenmodells. Die Abbildung stellt einen Schnitt durch  $\mathbb{M}_{-1}^2$  in der Ebene durch den Ursprung,  $\Omega$  und  $(u^1, u^2, 0)^\top$  dar.

Die Menge der Koordinaten ist dabei wieder die Einheitskreisscheibe ohne Rand. Dies ist zwar auf den ersten Blick etwas überraschend, da wir den „Projektionskegel“ nach unten verschoben haben, man kann sich allerdings leicht überlegen, dass jeder Strahl, entlang dem projiziert wird, und der eine Steigung größer als 1 hat, den einhüllenden Kegel und damit das Hyperboloid irgendwann treffen wird.

Wir können wieder für  $V$  einfach  $\mathbb{R}^3$  festlegen. Die Funktion  $F_P : U \rightarrow \mathbb{M}_{-1}^2$ , die eine Projektion entsprechend Abbildung 11 beschreibt hat dabei die Form

$$F_P(u) = \frac{1}{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \begin{pmatrix} 2u^1 \\ 2u^2 \\ 1 + (u^1)^2 + (u^2)^2 \end{pmatrix},$$

wobei wir wieder die Bezeichnung  $u = (u^1, u^2)^\top$  benutzt haben.

Wir können wieder die Basisvektoren der Tangentialebenen berechnen mit

$$\frac{\partial F_P}{\partial u^1}(u) = \frac{1}{(1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2} \begin{pmatrix} 2(1 + (u^1)^2 - (u^2)^2) \\ 4u^1u^2 \\ 4u^1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F_P}{\partial u^2}(u) = \frac{1}{(1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2} \begin{pmatrix} 4u^1u^2 \\ 2(1 - (u^1)^2 + (u^2)^2) \\ 4u^2 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir auch die Matrixdarstellung der Metrik bezüglich dieser Parametrisierung  $(U, F_P, V)$  berechnen. Diesmal hat diese eine schönere Form als im

Beltrami-Klein-Modell, sodass es auch Sinn macht sie explizit hinzuschreiben. Wir berechnen

$$\begin{aligned} g_{11}(u) &= \left\langle \frac{\partial F_P}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F_P}{\partial u^1}(u) \right\rangle_{-1} \\ &= \frac{1}{(1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^4} (4(1 + (u^1)^2 - (u^2)^2)^2 + 16(u^1)^2(u^2)^2 - 16(u^1)^2) \\ &= \frac{4}{(1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2}, \end{aligned}$$

und analog ergibt sich auch

$$g_{22}(u) = \frac{4}{(1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2}$$

und außerdem

$$\begin{aligned} g_{12}(u) &= \left\langle \frac{\partial F_P}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F_P}{\partial u^2}(u) \right\rangle_{-1} = g_{21}(u) \\ &= \frac{8u^1u^2((1 + (u^1)^2 - (u^2)^2) + (1 - (u^1)^2 + (u^2)^2)) - 16u^1u^2}{(1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Matrixdarstellung der Metrik ist damit

$$(g_{ij}(u)) = \frac{4}{(1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass die Metrik die Form aus Definition 4.2.1 annimmt, und damit ist das Poincaré'sche Scheibenmodell konform. Wir können also die Winkel zwischen Geodätischen in der hyperbolischen Ebene direkt am Poincaré'schen Scheibenmodell ablesen. Aus der Karte, die dem Poincaré'schen Scheibenmodell entspricht, ergaben sich, wie bereits besprochen, die berühmten Escher Circle Limits. Der Escher Circle Limit I ist in Abbildung 12 dargestellt.

Man kann erkennen, dass Geodätische im Allgemeinen nicht mehr auf Geradenstücke abgebildet werden. Tatsächlich werden Geodätische auf euklidische Kreisbögen abgebildet, die den Rand der Kreisscheibe im rechten Winkel schneiden, worauf wir noch näher eingehen werden.

Dies ist außerdem nicht das erste Mal, dass wir mit diesem Modell der hyperbolischen Ebene in Berührung kommen. Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, dass die Metrik die gleiche Form hat, wie in Beispiel 3.3.3. Das Beispiel unterscheidet sich dennoch leicht von unserem, da dort  $U = \mathbb{R}^2$  und die betrachtete Fläche  $S$  die Kreisscheibe darstellen. Wir können aber auch das Poincaré'sche Scheibenmodell als reguläre Fläche  $S_P := \{(x^1, x^2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} < 1\}$  mit riemannscher Metrik betrachten, wobei die riemannsche Metrik die zurückgezogene Metrik  $F_P^*g$  ist. Das Beispiel 3.3.3 beschreibt also das Poincaré'sche Scheibenmodell als reguläre Fläche. Dort wurde ebenfalls gezeigt, dass  $S_P$  eine konstante Krümmung von  $-1$  hat, was wir uns für ein Modell der hyperbolischen Ebene wünschen. ( $F_P$  ist automatisch eine Isometrie zwischen  $(\mathbb{M}_{-1}^2, g)$  und  $(S_P, F_P^*g)$ .)



Abbildung 12: Illustration des Poincaré'schen Scheibenmodells durch den Circle Limit I von M.C.Escher [4, Kap.4.11, S.238].

Um eine Intuition zu dem Modell zu bekommen kann eines hilfreich sein: Wir wollen die Längen in der Scheibe untersuchen. Betrachten wir eine parametrisierte Kurve  $c$  in  $S_P$ . Die Metrik auf  $S_P$  ist die zurückgezogene Metrik  $F_P^*g$ . Wir wissen, wie wir die Länge eines Teiles von  $c$  berechnen. Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $S_P$  und seien  $a, b \in I$ . Dann ist die Länge von  $c$  zwischen  $c(a)$  und  $c(b)$  gegeben durch

$$L = \int_a^b \sqrt{(F_P^*g)_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt.$$

Sei für  $S_P$  die lokale Parametrisierung aus Beispiel 3.3.3 gegeben. Dann ist die Koordinatenform von  $c$  gewissermaßen gleich  $c$ , denn  $F(\tilde{c}^1, \tilde{c}^2) = (c^1, c^2, 0)^\top$ , wir können also die Funktionen  $c^i$  und  $\tilde{c}^i$  äquivalent verwenden. Betrachten wir nun das Argument des Integrals, also

$$\begin{aligned} (F_P^*g)_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) &= (\dot{\tilde{c}}^1(t), \dot{\tilde{c}}^2(t)) \frac{4}{(1 - (\tilde{c}^1(t))^2 - (\tilde{c}^2(t))^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{c}}^1(t) \\ \dot{\tilde{c}}^2(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{(1 - \langle c(t), c(t) \rangle)^2} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle, \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei offensichtlich  $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = (\dot{\tilde{c}}^1)^2 + (\dot{\tilde{c}}^2)^2$  gilt, wenn  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^3$  ist. Wir machen außerdem die Bezeichnung  $r^2(t) = \langle c(t), c(t) \rangle$ . Damit beschreibt  $r(t)$  den euklidischen Abstand der Kurve vom Ursprung zum Zeitpunkt  $t$ . Wir können damit das Integral in die Form

$$L = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle} \frac{2dt}{1 - r^2(t)}$$

bringen. Dieses Integral hat eine sehr ähnliche Form zu dem, das die Länge der Kurve in der euklidischen Metrik beschreibt. Der einzige Unterschied liegt darin, dass das Längenelement  $dt$  um einen Faktor  $\frac{2}{1-r^2(t)}$  verändert wurde. Betrachten wir also eine

Kurve in  $S_P$ , dann wird ihre Länge immer stärker „gewichtet“, je näher man sich zum Rand der Kreisscheibe bewegt.

Stellen wir uns also vor wir beobachten eine Weltraumameise, wobei ihr Weltraum das Poincaré'sche Scheibenmodell ist. Sagen wir die Ameise ruht im Ursprung der Scheibe. Nun wirft sie einen Golfball in die  $u^1$ -Richtung. Da es sich um den Weltraum handelt, wird sich der Ameisengolfball in alle Ewigkeit mit konstanter Geschwindigkeit in dieser Richtung bewegen. Wir als äußere Beobachter würden allerdings beobachten, dass der Ball immer langsamer wird, je mehr er sich dem Rand der Kreisscheibe nähert. Den Rand selbst wird er nie erreichen. Gleiches gilt natürlich für die Weltraumameise, die sich nach dem Wurf in die Gegenrichtung bewegt.

Es zeigt sich, dass man alle Untersuchungen der ebenen hyperbolischen Geometrie auch in diesem Modell durchführen kann, worauf wir im Kapitel 4.5 näher eingehen werden.

#### 4.4 Das Halbebenenmodell

Das letzte Modell der hyperbolischen Ebene, das wir besprechen, ist das Halbebenenmodell. Auch auf dieses werden wir im Kapitel 4.5 noch näher eingehen.

Diesmal ist die Konstruktion der lokalen Parametrisierung und damit der Karte etwas komplizierter. Wir werden in mehreren Schritten eine Funktion  $F_H$  finden, mit der wir  $\mathbb{M}_{-1}^2$ , mit Punkten der oberen Halbebene  $S_H := \{(x^1, 0, x^3) \in \mathbb{R}^3 | x^3 > 0\}$  als Koordinaten (also genauer  $U = \{(u^1, u^2)^\top | (u^1, 0, u^2)^\top \in S_H\}$ ), parametrisieren können. Um direkt einen Überblick zu liefern: Wir werden die obere Halbebene auf die obere Einheitshalbkugel projizieren, dann die obere Halbkugel auf die Einheitskreisscheibe und schließlich die Kreisscheibe auf das Hyperboloid.

Im ersten Schritt betrachten wir eine Projektion zwischen der oberen Halbkugel und der oberen Halbebene gemäß Abbildung 13.

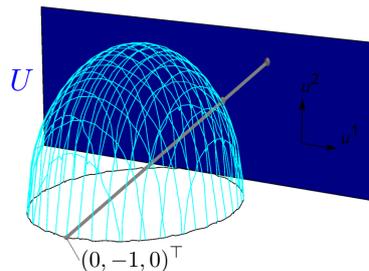


Abbildung 13: Illustration vom ersten Schritt der Herstellung des Halbebenenmodells.

Wie in Abbildung 13 angedeutet, wird vom Punkt  $(0, -1, 0)^\top$  aus, zwischen oberer Halbkugel und oberer Halbebene projiziert. Dabei wird jeder Punkt der oberen Halbebene getroffen, man beachte aber, dass die Halbebene, so wie wir sie definiert haben, ihren unteren Rand nicht enthält.

Im zweiten Schritt der Erstellung des Halbebenenmodells betrachten wir nun eine Projektion zwischen Einheitskreisscheibe und oberer Halbkugel, wie in Abbildung 14,

entlang der  $x^3$ -Achse. Wir bezeichnen hier die Kreisscheibe als  $\tilde{U}$  und die Koordinaten auf der Kreisscheibe als  $\tilde{u}^1$  und  $\tilde{u}^2$ , aus Gründen, die später klar werden.

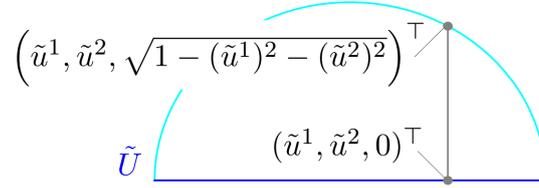


Abbildung 14: Illustration von Schritt zwei der Herstellung des Halbebenenmodells. Die Abbildung stellt einen Schnitt in der Ebene durch den Ursprung,  $\Omega$  und  $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, 0)^\top$  dar.

Versuchen wir nun erst einmal eine Funktion zu finden, die diese beiden Projektionen durchführt. Dazu schreiben wir die Geradengleichung der Geraden an, entlang derer die erste Projektion durchgeführt wird, und setzen diese mit dem Punkt gleich, an dem sie die Halbebene trifft. Dabei erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 + 1 \\ \sqrt{1 - (\tilde{u}^1)^2 - (\tilde{u}^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ 1 \\ u^2 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung können wir nach  $\tilde{u}^1$  und  $\tilde{u}^2$  auflösen und erhalten dabei

$$\tilde{F}(u) := \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2} \begin{pmatrix} 4u^1 \\ 4 - (u^1)^2 - (u^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also die Halbkugel übersprungen und direkt die gewünschte Abbildung zwischen oberer Halbebene und Kreisscheibe gefunden, diese nennen wir  $\tilde{F}$ .

Als letzten Schritt benutzen wir wieder die Projektion des Beltrami-Klein-Modells. Dort wurden Punkte der Einheitskreisscheibe mit der Funktion  $F_B$  auf das Hyperboloid abgebildet. Wir bilden also insgesamt die obere Halbebene auf die gewünschte Weise auf das Hyperboloid ab mit der Funktion

$$F_H := F_B \circ \tilde{F} = \frac{1}{4u^2} \begin{pmatrix} 4u^1 \\ 4 - (u^1)^2 - (u^2)^2 \\ 4 + (u^1)^2 - (u^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Diese Funktion liefert uns eine lokale Parametrisierung von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit  $(U, F_H, V)$ , wobei wir wieder  $V = \mathbb{R}^3$  setzen können. Nun betrachten wir wieder die zu dieser lokalen Parametrisierung zugehörige Matrixdarstellung der riemannschen Metrik. Die Basisvektoren der Tangentialebenen berechnen sich zu

$$\frac{\partial F_H}{\partial u^1}(u) = \frac{1}{2u^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -u^1 \\ u^1 \end{pmatrix},$$

und

$$\frac{\partial F_H}{\partial u^2}(u) = -\frac{1}{4(u^2)^2} \begin{pmatrix} 4u^1 \\ 4 - (u^1)^2 + (u^2)^2 \\ 4 + (u^1)^2 - (u^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen können wir wieder die zur lokalen Parametrisierung zugehörige Matrixdarstellung der Metrik berechnen und wir erhalten

$$(g_{ij}(u)) = \frac{1}{(u^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Das Halbebenenmodell ist also ebenfalls konform. Dieses werden wir auch im Kapitel 4.5 genauer untersuchen.

Wir betrachten das Halbebenenmodell  $S_H$  wieder als reguläre Fläche mit der zurückgezogenen Metrik  $F_H^*g$ .

Auch für das Halbebenenmodell kann man eine Grafik analog zum Circle Limit I herstellen, diese ist in Abbildung 15 dargestellt.



Abbildung 15: Illustration des Halbebenenmodells analog zum Circle Limit I von M.C. Escher. [4, Kap.4.11, S.241]

Genauso wie im Poincaré'schen Scheibenmodell, werden auch im Halbebenenmodell die Geodätischen auf Kreisbögen abgebildet. Darauf werden wir am Ende von Kapitel 4.5 näher eingehen.

Auch im Halbebenenmodell können wir für ein besseres intuitives Verständnis die „Gewichtung“ der Längen untersuchen. Wenn wir uns Gleichung (4.9) genauer ansehen, erkennen wir, dass für konforme Karten nur der Vorfaktor der Einheitsmatrix das Längenelement verändert. Wir können uns also eine erneute Rechnung sparen und direkt sehen, dass das Längenelement des Halbebenenmodells die Form

$$\frac{dt}{u^2}$$

hat. Die Länge wird also immer stärker gewichtet, je mehr man sich dem unteren Rand von  $S_H$  nähert.

Damit kann man sich auch zu einem gewissen Grad intuitiv die Form der Geodätischen erklären. Nehmen wir an wir wären zum Beispiel eine zweidimensionale Ameise im Halbebenenmodell am Punkt  $(1/2, 0, \sqrt{3}/4)^\top$  und wir wollten unseren Ameisenfreund am Punkt  $(0, 0, 1)^\top$  besuchen. Viele unserer Ameisenfreunde sind den Weg

schon gegangen, darum können wir durch das zurückgelassene Sekret den kürzesten Weg erreichen (vgl. [8]). Wenn uns nun jemand aus dem dreidimensionalen euklidischen Raum, in den unsere Welt eingebettet ist, beobachtet, wird er sehen, dass wir uns am kürzesten Weg nicht entlang der euklidischen Geraden bewegen. Wir bewegen uns zuerst eher vom unteren Rand der Halbebene weg, denn dort sind die Wege für Halbebenenmodellbewohner länger. Erst mit der Zeit gehen wir immer mehr auch in die Richtung parallel zum unteren Rand. Im Speziellen wird der äußere Beobachter sehen, dass unser Weg ein Kreisbogen war.

#### 4.5 Ein anderer Zugang

Wie schon beim Poincaré'schen Scheibenmodell erwähnt, kann man die Untersuchungen der hyperbolischen Ebene, die sich in dieser Arbeit finden, auch in den anderen Modellen durchführen (Konformität vorausgesetzt). Man benötigt dazu die Differentialgeometrie nicht. Eine solche Untersuchung findet sich zum Beispiel in [3].

Dort wird die hyperbolische Ebene  $\mathbb{H}$  als Teilmenge der komplexen Ebene mit Unendlich  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  aufgefasst, wobei  $\mathbb{H} = \{x \in \bar{\mathbb{C}} \mid \text{Im}(x) > 0\}$ . Die „hyperbolischen Linien“ werden dann *definiert* als der Durchschnitt von  $\mathbb{H}$  mit entweder euklidischen Kreisen, deren Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt, oder euklidischen Strahlen parallel zur Imaginären Achse. (In  $\bar{\mathbb{C}}$  werden Kreise so definiert, dass auch die Strahle als Kreise aufgefasst werden können, wobei Mittelpunkt und Radius gegen Unendlich gehen.)

Dieses Modell entspricht somit dem Halbebenenmodell, wenn man die komplexe Ebene als  $\mathbb{R}^2$  auffasst. Aber auch das Poincaré'sche Scheibenmodell kann auf eine analoge Weise untersucht werden (also mit Kreisen, die rechtwinkelig auf den Rand der Kreisscheibe stehen und euklidischen Geraden, die durch den Mittelpunkt der Kreisscheibe gehen). Es gibt dabei auch eine Abbildung  $m$  zwischen dem Halbebenenmodell, aufgefasst als  $\mathbb{H} \subset \bar{\mathbb{C}}$ , und dem Poincaré'schen Scheibenmodell, aufgefasst als  $\mathbb{D} \subset \bar{\mathbb{C}}$ , sodass jede Isometrie  $p$  von  $\mathbb{H}$  in der Form  $m^{-1} \circ p \circ m$  wieder eine Isometrie von  $\mathbb{D}$  ist. Wir verzichten darauf, diese explizit aufzuschreiben.

Ferner kann man zeigen, dass man auf diese Weise die ebene hyperbolische Geometrie auf einer recht allgemeinen Menge von Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  (bzw.  $\bar{\mathbb{C}}$ ) betreiben kann. Dies ist ein Ergebnis des sogenannten klassischen Uniformisierungssatzes (vgl. [3, Kap.4, S.110]). Ein Beispiel für so eine Fläche ist in Abbildung 16 dargestellt.

Im Anschluss wird einiger Aufwand betrieben um Transformationen von  $\mathbb{H}$  zu finden, die hyperbolische Linien auf hyperbolische Linien abbilden.

Es zeigt sich, dass Transformationen, die euklidische Kreise auf euklidische Kreise abbilden geschrieben werden können als Verknüpfungen von Abbildungen der Form

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

mit  $a, b, c, d, \in \mathbb{C}$  und  $ad - bc \neq 0$ , und Abbildungen der Form

$$C(z) = \bar{z},$$

wobei  $\bar{z}$  die komplexe Konjugation ist. Man nennt diese *Möbius Transformationen*. Wir müssen noch die Einschränkung machen, dass  $\mathbb{H}$  auf sich selbst abgebildet wird.



Abbildung 16: Illustration der ebenen hyperbolischen Geometrie in einem allgemeinen Modell analog zum Circle Limit I von M.C.Escher. [7, Fig.14]

Damit reduzieren sich die Abbildungen auf solche der Form

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

mit  $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$  und  $ad - bc = 1$ , oder

$$n(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

wobei  $a, b, c, d$  rein imaginär sind und  $ad - bc = 1$ .

Das sind dann genau die Isometrien von  $\mathbb{H}$ . Diese kamen im Hyperboloid-Modell recht einfach zum Vorschein.

Wir wollen nun versuchen, eine uns bekannte Isometrie von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit einer Isometrie von  $\mathbb{H}$ , wie sie hier charakterisiert ist, zu vergleichen. Betrachten wir dazu ein möglichst einfaches Beispiel, nämlich die Isometrie, die einer Drehung von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  um  $\frac{\pi}{2}$  um die  $x^3$ -Achse entspricht. Drehungen um die  $x^3$ -Achse von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  kennen wir bereits, insbesondere wissen wir, dass jede solche Drehung eine Isometrie ist. Denken wir nun an die Konstruktion des Halbebenenmodells. Die Geodätische, die der Schnitt von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit der  $x^2, x^3$ -Ebene ist, wird dort auf die Entsprechung der positiven imaginären Achse projiziert, wie in Abbildung 17 links dargestellt. Drehen wir nun  $\mathbb{M}_{-1}^2$  um  $\frac{\pi}{2}$ , so entspricht diese Geodätische dem Schnitt von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  mit der  $x^1, x^3$ -Ebene. Diese wird zuerst auf den Schnitt der oberen Halbkugel mit der  $x^1, x^3$ -Ebene projiziert, und dann auf den Halbkreis um den Ursprung mit Radius 2 in „ $\mathbb{H}$ “ wie in Abbildung 17 rechts dargestellt.

Wir drehen in der mathematisch positiven Richtung, es wird also zum Beispiel auf der oberen Halbkugel etwa der Punkt  $(0, 1, 0)^\top$  auf den Punkt  $(-1, 0, 0)^\top$  abgebildet. Dies entspricht in  $\mathbb{H}$  einer Abbildung des Punktes 0 auf den Punkt  $-2$ .

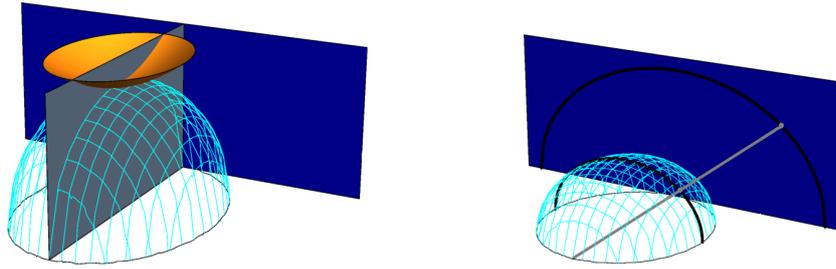


Abbildung 17: Illustration der betrachteten Geodätischen vor (links) und nach (rechts) der Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  um die  $x^3$ -Achse.

Der Punkt  $(0, 0, 1)^\top$  auf der Halbkugel bleibt fixiert, somit bleibt er auch in  $\mathbb{H}$  fixiert und zwar an der Stelle  $2i$ . Der Punkt  $(0, -1, 0)^\top$  der oberen Halbkugel wird auf  $(1, 0, 0)^\top$  abgebildet.  $(1, 0, 0)^\top$  entspricht dabei dem Punkt 2 in  $\mathbb{H}$ . Es wird vom Punkt  $(0, -1, 0)^\top$  aus projiziert, somit wird dieser laut der Projektion nicht auf „ $\mathbb{H}$ “ projiziert, wir können uns allerdings helfen. Je näher an  $(0, -1, 0)^\top$  ein Punkt auf der Halbkugel liegt, desto weiter liegt seine Projektion in  $\mathbb{H}$  vom Ursprung entfernt. Es macht also Sinn zusätzlich zu der Projektion, den Punkt  $(0, -1, 0)^\top$  auf  $\infty \in \mathbb{H}$  abzubilden.

Insgesamt wollen wir also das Tripel  $(0, 2i, \infty) \in \mathbb{H}$  auf das Tripel  $(2, 2i, -2) \in \mathbb{H}$  abbilden. Man kann dabei zeigen, dass für zwei verschiedene Tripel von Punkten in  $\mathbb{H}$ , genau eine Isometrie, wie sie in diesem Kapitel vorgestellt wurden, existiert, die das eine Tripel auf das andere abbildet [3, Kap.2.2, S.25ff]. Man sagt auch, die Isometrien operieren eindeutig transitiv auf Tripeln von Punkten in  $\mathbb{H}$  (vgl. Satz 4.1.7). Wir sollten also in der Lage sein eine Isometrie von  $\mathbb{H}$  zu finden, die der Drehung von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  entspricht.

Nehmen wir zunächst an, die gewünschte Transformation von  $\mathbb{H}$  hätte die Form

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

mit  $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$  und  $ad - bc = 1$ . Wir haben also vier freie Parameter  $a, b, c, d$ . Wir wollen dabei, dass

$$\frac{a2i + b}{c2i + d} = 2i$$

gilt, also dass  $2i$  auf  $2i$  abgebildet wird. Wir wollen außerdem, dass 0 auf 2 abgebildet wird, also

$$\frac{b}{d} = 2.$$

Nun wollen wir noch  $\infty$  auf  $-2$  abbilden. Wir können zwar  $\infty$  nicht direkt in die Transformation einsetzen, wir können allerdings den Limes bilden und verlangen, dass dieser  $-2$  wird mit

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} = -2.$$

Zusammen mit der Voraussetzung  $ad - bc = 1$  haben wir also vier Gleichungen und vier freie Parameter der Transformation. Die Parameter lassen sich also leicht

bestimmen und wir erhalten, dass eine Drehung von  $\mathbb{M}_{-1}^2$  um  $\frac{\pi}{2}$  um die  $x^3$ -Achse einer Transformation

$$m(z) = \frac{\frac{z}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}}{-\frac{z}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

von  $\mathbb{H}$  entspricht. (Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, dass 2 und  $-2$  nicht in  $\mathbb{H}$  liegen. Dennoch ist die Vorgehensweise in Ordnung, da die vorgestellten Transformationen stetig auf  $\bar{\mathbb{C}}$  sind.)

Mit diesen Isometrien „im Gepäck“ lassen sich dann alle bisherigen Untersuchungen der hyperbolischen Geometrie durchführen. Das Längenelement lässt sich zum Beispiel finden (mit einem beträchtlichen Aufwand), indem man verlangt, dass zwei Punkte vor und nach der Anwendung einer Isometrie den gleichen hyperbolischen Abstand haben.

Dieses Ergebnis hängt dann sehr eng mit der Krümmung der Fläche im Sinn der Differentialgeometrie zusammen, denn wir haben gesehen, dass für konforme Modelle das Längenelement die Form  $\sqrt{k(u)}dt$  annimmt, wobei die Matrixdarstellung der riemannschen Metrik wieder die Form

$$(g_{ij}(u)) = k(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

haben soll. Wir können außerdem analog zu Beispiel 3.3.3 für eine Fläche mit einer riemannschen Metrik dieser Form allgemein die Gauß-Krümmung berechnen und erhalten nach konsequentem Durchrechnen

$$K(u) = \frac{1}{2k(u)^2} \left[ \frac{1}{k(u)} \left( \left( \frac{\partial k(u)}{\partial u^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial k(u)}{\partial u^2} \right)^2 \right) - \frac{\partial^2 k(u)}{(\partial u^1)^2} - \frac{\partial^2 k(u)}{(\partial u^2)^2} \right]. \quad (4.11)$$

Insbesondere ist die Krümmung in konformen Modellen nur von der Funktion  $k(u)$  abhängig, diese lässt sich wiederum aus dem Längenelement berechnen und somit kennt man mit dem Längenelement auch die Krümmung. Beide Funktionen der Metrik, sowohl im Poincaré'schen Scheibenmodell, als auch im Halbebenenmodell, ergeben nach dieser Formel natürlich eine konstante Krümmung von  $K = -1$ .

Des Weiteren lassen sich durch genauere Betrachtungen auch die trigonometrischen Formeln für die hyperbolische Ebene herleiten.

Nun wollen wir noch einige interessante Eigenschaften der ebenen hyperbolischen Geometrie besprechen, die sich auf diesen Karten besser beobachten lassen.

Zum einen ist der Begriff der Parallelität in der hyperbolischen Geometrie etwas weniger exakt als in der euklidischen. Aus diesem Grund definiert man in der hyperbolischen Geometrie zwei verschiedene Arten der Parallelität, nämlich *Holoparallel* und *Ultraparallel*.

Holoparallel sind zwei Geodätische  $c_1(t)$  und  $c_2(t)$  (als parametrisierte Kurven im Halbebenenmodell oder im Poincaré'schen Scheibenmodell), wenn entweder

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = \lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} c_2(\tilde{t})$$

gilt, oder wenn diese Gleichung durch Parametertransformationen der Form  $t \rightarrow -t$  erfüllt werden kann. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 18 links dargestellt. Man sagt auch *sie treffen sich in Unendlich*.

Ultraparallel sind zwei Geodätische, die sich nie schneiden, und die die Voraussetzung für Holoparallelität nicht erfüllen. Ein Beispiel für diesen Fall ist in Abbildung 18 rechts dargestellt.

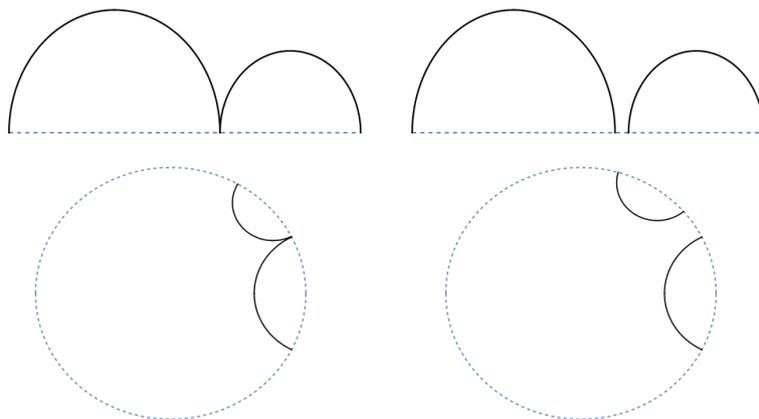


Abbildung 18: Die schwarzen Geodätischen links sind holoparallel. Diejenigen rechts sind ultraparallel. Die oberen Abbildungen stellen jeweils  $\mathbb{H}$ , die unteren  $\mathbb{D}$  dar.

Ein weiterer interessanter Punkt ist, dass die Menge der Punkte, die den gleichen Abstand von einem Punkt  $p$  haben, ein euklidischer Kreis ist. Der Unterschied zur euklidischen Geometrie besteht darin, dass der Punkt  $p$  im Allgemeinen nicht mit dem Mittelpunkt dieses euklidischen Kreises zusammenfällt.

In [3, Kap.2, S.19ff] wurde von Transformationen ausgegangen, die euklidische Kreise auf euklidische Kreise abbilden und später gezeigt, dass eine Teilmenge davon gleich der Menge aller Isometrien von  $\mathbb{H}$  bzw.  $\mathbb{D}$  ist. In  $\mathbb{M}_{-1}^2$  ist die Menge der Punkte gleichen Abstandes von  $\Omega$  ein Kreis parallel zur  $x^1, x^2$ -Ebene. Denkt man an die Konstruktion des Poincaré'schen Scheibenmodells, ist damit klar, dass zumindest diese Menge in  $\mathbb{D}$  ein Kreis ist. Wir können aber über Isometrien jeden Punkt nach  $\Omega$  verschieben, diese Isometrie bildet aber nach [3, Kap.2.1, S.19] den Kreis wieder auf einen Kreis ab. Auch die Isometrie zwischen dem Poincaré'schen Scheibenmodell und dem Halbebenenmodell ist eine Abbildung, die euklidische Kreise auf euklidische Kreise abbildet, somit sind die betrachteten Mengen auch in  $\mathbb{H}$  euklidische Kreise. Eine solche Menge mit einem „hyperbolischen Mittelpunkt“, der vom euklidischen Mittelpunkt abweicht ist in Abbildung 19 dargestellt.

Wir haben im Kapitel zum Hyperboloid-Modell bereits die trigonometrischen Formeln für die ebene hyperbolische Geometrie hergeleitet. Nun können wir in den uns bekannten konformen Modellen die dort betrachteten Dreiecke schön sehen. Vor allem macht es in der ebenen hyperbolischen Geometrie Sinn, eine Eigenschaft festzulegen, die es in der euklidischen Geometrie nicht gibt, nämlich die Eigenschaft *ideal* zu sein. Genauer ist ein Eckpunkt eines Dreiecks ideal, wenn sich die beiden Seiten, die sich in diesem Eckpunkt treffen, in Unendlich treffen. Wenn ein Dreieck nur ideale Eckpunkte hat, nennen wir es ideal. Einige Beispiele sind in Abbildung 20 dargestellt.

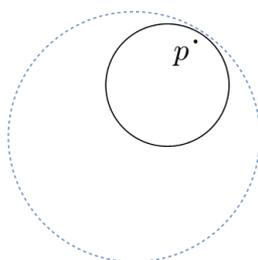


Abbildung 19: Die Abbildung zeigt die Menge der Punkte gleichen hyperbolischen Abstandes von einem Punkt  $p$  in  $\mathbb{D}$ .

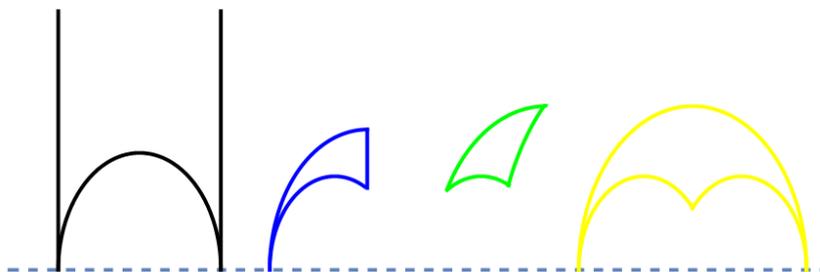


Abbildung 20: Dreiecke mit verschiedenen Anzahlen an idealen Eckpunkten in  $\mathbb{H}$  (Schwarz:3, Gelb:2, Blau:1, Grün:0). Das schwarze Dreieck ist ideal.

Als letzten Punkt betrachten wir noch die Flächen von hyperbolischen Dreiecken, die eine besonders schöne Eigenschaft der hyperbolischen Geometrie liefern. Man kann zeigen, dass die Fläche eines Dreiecks in der hyperbolischen Ebene nur von den Innenwinkeln des Dreiecks abhängig ist. Der Zusammenhang zwischen Fläche und den Innenwinkeln ist auch als Gauß-Bonnet-Formel bekannt. Für ein hyperbolisches Dreieck  $D$  mit den Innenwinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  ist die hyperbolische Fläche gegeben durch

$$A_{\mathbb{H}}(D) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Insbesondere ist die Fläche jedes idealen Dreiecks gleich  $\pi$ .

Wie versprochen beschäftigen wir uns zum Schluss nun noch mit der Form von Geodätischen in den betrachteten Karten. Wir haben bereits besprochen, dass die Geodätischen im Poincaré'schen Scheibenmodell und im Halbebenenmodell Kreisbögen respektive Geradenstücke sind. Wir sehen aber auch in Abbildung 16, dass die Geodätischen zumindest scheinbar Kreisbögen und Geradenstücken entsprechen. Es wurden eine Vielzahl von solchen Karten erstellt, zum Beispiel in [7], wobei in allen diesen Karten (Modellen) die Geodätischen scheinbar auf Kreisbögen und Geradenstücke abgebildet werden.

Wir betrachten eine Karte (also genauer ein Modell, das einer Teilmenge der Menge  $\{p = (p^1, p^2, 0)^\top | (p^1, p^2, 0)^\top \in \mathbb{R}^3\}$  entspricht) der hyperbolischen Ebene mit der (zurückgezogenen) riemannschen Metrik

$$(g_{ij}(u)) = k(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich einer lokalen Parametrisierung  $(U, F, V)$ . Damit können wir die Christoffel-Symbole berechnen mit

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left( \frac{\partial g_{1m}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1m}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^m} \right) g^{m1} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial k}{\partial u^1} + \frac{\partial k}{\partial u^1} - \frac{\partial k}{\partial u^1} \right) \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial u^1}, \end{aligned}$$

wobei wir die funktionalen Abhängigkeiten zur besseren Übersicht weggelassen haben. Analog finden wir

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial u^2} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial u^1}. \end{aligned}$$

Damit können wir die Geodätengleichung anschreiben. Bevor wir dies tun, wollen wir aber noch eine Besonderheit dieser Modelle betrachten. Diese Modelle sind in den  $\mathbb{R}^2$  eingebettet. Wir können sie also durch lokale Parametrisierungen beschreiben, deren Abbildung  $F$  die Identität ist, also die Abbildung, die ein  $(u^1, u^2)^\top \in U$  auf  $(u^1, u^2, 0)^\top \in \mathbb{R}^3$  abbildet. Wenn wir nun eine parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  betrachten, die in einem solchen Modell verläuft, hat diese die Form

$$c(t) = \begin{pmatrix} c^1(t) \\ c^2(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die parametrisierte Kurve  $\tilde{c} = F^{-1} \circ c$ , die  $c$  in Koordinatenform angibt, ist dann für so eine lokale Parametrisierung gegeben durch

$$\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{c}^1(t) \\ \tilde{c}^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1(t) \\ c^2(t) \end{pmatrix}.$$

Eine solche parametrisierte Kurve und ihre Koordinatenform sind also quasi gleich. Die Geodätengleichung für eine parametrisierte Kurve in einer konformen Karte der hyperbolischen Ebene mit einer solchen lokalen Parametrisierung reduziert sich damit auf

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{c}^1 \\ \ddot{c}^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2k} \begin{pmatrix} \frac{\partial k}{\partial u^1} (\dot{c}^1)^2 + 2 \frac{\partial k}{\partial u^2} \dot{c}^1 \dot{c}^2 - \frac{\partial k}{\partial u^1} (\dot{c}^2)^2 \\ -\frac{\partial k}{\partial u^2} (\dot{c}^1)^2 + 2 \frac{\partial k}{\partial u^1} \dot{c}^1 \dot{c}^2 + \frac{\partial k}{\partial u^2} (\dot{c}^2)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

wobei wir zur besseren Übersicht wieder die funktionalen Abhängigkeiten weggelassen haben.

Aus Gleichung (4.11) wissen wir außerdem, dass

$$-1 = \frac{1}{2k^2} \left[ \frac{1}{k} \left( \left( \frac{\partial k}{\partial u^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial k}{\partial u^2} \right)^2 \right) - \frac{\partial^2 k}{(\partial u^1)^2} - \frac{\partial^2 k}{(\partial u^2)^2} \right] \quad (4.13)$$

am gesamten Koordinatenbereich gelten muss. Die Vermutung liegt also nahe, dass für eine große Menge an Funktion  $k$ , die Gleichung (4.13) erfüllen, die Geodätengleichung (4.12) Lösungen

$$\begin{pmatrix} c^1(t) \\ c^2(t) \end{pmatrix}$$

hat, deren Bilder entweder in Kreisen oder Geraden im Sinn der ebenen euklidischen Geometrie liegen. Wir lösen dieses allgemeine Problem nicht, sondern nur den Spezialfall des Halbebenenmodells in

**Satz 4.5.1.** *Das Bild einer Geodätischen im Halbebenenmodell ist entweder ein euklidischer Halbkreis mit Mittelpunkt im unteren Rand der Halbebene oder ein Strahl rechtwinkelig auf den unteren Rand der Halbebene.*

*Beweis.* Wir parametrisieren die Halbebene  $S_H$  wie oben durch eine lokale Parametrisierung  $(U, F, V)$  mit  $U = \{(u^1, u^2)^\top | (u^1, 0, u^2)^\top \in S_H\}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$  und der Funktion  $F$ , die durch

$$F(u) = \begin{pmatrix} u^1 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

definiert ist für  $u = (u^1, u^2)^\top \in U$ . Wir wissen damit aus Gleichung (4.10), dass die Matrixdarstellung der Metrik auf  $S_H$  in dieser lokalen Parametrisierung gegeben ist durch

$$(g_{ij}(u)) = k(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$k(u) = \frac{1}{(u^2)^2}$$

gilt. Damit reduziert sich die oben berechnete Geodätengleichung (4.12) auf

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{c}^1 \\ \ddot{c}^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 2\dot{c}^1\dot{c}^2 \\ (\dot{c}^2)^2 - (\dot{c}^1)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

weil  $\partial k / \partial u^1 = 0$ . Die Koordinatenfunktionen  $c^1$  und  $c^2$  sind dabei so zu verstehen wie in der Herleitung von Gleichung (4.12) angegeben.

Als erstes wollen wir zeigen, dass parametrisierte Kurven, deren Bild ein Halbkreis mit Mittelpunkt im unteren Rand der Halbebene ist, diese Gleichung erfüllen. Wir betrachten also eine parametrisierte Kurve der Form

$$c(t) = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix},$$

wobei  $m \in \mathbb{R}$  den Ort des Kreismittelpunktes auf dem unteren Rand der Halbebene angibt, und  $r \in \mathbb{R}^+$  den Radius des Kreises angibt. Die reelle Funktion  $\phi(t)$  stellt eine Parametertransformation des Halbkreises dar, über die wir noch nicht viel wissen.

Wir machen uns noch die Tatsache zunutze, dass Geodätische immer proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, also dass

$$g_c(\dot{c}, \dot{c}) = \text{const}$$

gilt, falls  $c$  einer Geodätischen entspricht. Wir leiten  $c$  ab und erhalten

$$\dot{c}(t) = r \cdot \dot{\phi}(t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \frac{1}{c^2(t)^2} \cdot r^2 \cdot \dot{\phi}(t)^2 = \text{const} =: \alpha^2,$$

für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dabei ist  $c^2(t) = r \sin(t)$  und o.b.d.A. soll  $\dot{\phi}(t) > 0$  gelten für alle  $t$  im Definitionsbereich und somit können wir an  $\phi$  die Bedingung

$$\alpha \cdot \sin \phi = \dot{\phi} \tag{4.15}$$

stellen.

Wir nehmen also als Ansatz für die Lösung der Geodätengleichung (4.14) eine parametrisierte Kurve der Form von  $c$  mit der Bedingung der Gleichung (4.15) an  $\phi$ . Zum Einsetzen des Ansatz in die Geodätengleichung brauchen wir noch die zweite Ableitung von  $c$  mit

$$\ddot{c}(t) = r \cdot \ddot{\phi}(t) \begin{pmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{pmatrix} - r \cdot \dot{\phi}(t)^2 \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix},$$

und die zweite Ableitung der Parametertransformation  $\phi$ , die wir aus Gleichung (4.15) berechnen können mit

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \alpha \cos \phi \cdot \dot{\phi} \\ &= \alpha^2 \cos \phi \cdot \sin \phi. \end{aligned}$$

Wir setzen in die Geodätengleichung (4.14) ein und erhalten

$$r \cdot \ddot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} - r \cdot \dot{\phi}^2 \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} - \frac{1}{r \sin \phi} r^2 \dot{\phi}^2 \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \\ \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \end{pmatrix}$$

und das ist weiter gleich

$$\alpha^2 \cos \phi \cdot \sin \phi \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} - \alpha^2 \sin^2 \phi \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} - \frac{\alpha^2 \sin^2 \phi}{\sin \phi} \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \\ \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass sich die  $\alpha^2$  wegekürzen, und fassen zusammen zu

$$\begin{pmatrix} -\sin^2 \phi \cdot \cos \phi - \sin^2 \phi \cdot \cos \phi + 2 \cdot \sin^2 \phi \cdot \cos \phi \\ \sin \phi \cdot \cos^2 \phi - \sin^3 \phi - \sin \phi \cdot \cos^2 \phi + \sin^3 \phi \end{pmatrix}.$$

Damit kürzen sich alle Terme weg, das heißt  $c$  mit der Bedingung aus Gleichung (4.15) erfüllt die Geodätengleichung.

Sei nun eine beliebige Geodätische  $c_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $S_H$  eindeutig gegeben durch die Startbedingungen  $c_1(0)$  und  $\dot{c}_1(0)$  (also durch einen Punkt und einen Geschwindigkeitsvektor in der Halbebene), dann können wir einen Halbkreis der Form  $(c^1, 0, c^2)^\top$  finden, der durch  $c_1(0)$  geht und an den Vektor  $\dot{c}_1(0)$  in  $c_1(0)$  tangential liegt, solange  $\dot{c}_1(0)$  nicht in die Richtung rechtwinkelig auf den unteren Rand zeigt. So können wir also  $m$  und  $r$  bestimmen. Die parametrisierte Kurve der Form  $(c^1, 0, c^2)^\top$  entspricht dann der gesuchten Geodätischen mit diesen Randbedingungen, wenn man  $\alpha$  so wählt, dass die Länge des Geschwindigkeitsvektors die Startbedingung erfüllt. Somit ist das Bild jeder Geodätischen im Halbebene-Modell ein euklidischer Halbkreis, solange die Geodätische nie einen Geschwindigkeitsvektor rechtwinkelig zum unteren Rand der Halbebene hat. Man müsste streng genommen auch noch zeigen, dass  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$  geht, dass also eine Lösung auf dem gesamten Halbkreis existiert. Dies werden wir zur besseren Übersicht nach dem Beweisende anhängen.

Nun zeigen wir noch, dass falls eine Geodätische durch Startbedingungen mit einem Geschwindigkeitsvektor rechtwinkelig auf den unteren Rand der Halbebene gegeben ist, das Bild dieser Geodätischen ein euklidischer Strahl ist.

Wir benutzen wie oben einen Ansatz zur Lösung der Geodätengleichung (4.14). Dazu betrachten wir eine parametrisierte Kurve der Form

$$c_G(t) = \begin{pmatrix} c_G^1 \\ \phi_G(t) \end{pmatrix},$$

wobei  $c_G^1 \in \mathbb{R}$  konstant ist und  $\phi_G$  wieder eine Parametertransformation darstellt. Damit können wir die Ableitungen einfach berechnen mit

$$\dot{c}_G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_G(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\ddot{c}_G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\phi}_G(t) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten wieder die Geschwindigkeit

$$g_{c_G(t)}(\dot{c}_G(t), \dot{c}_G(t)) = \frac{\dot{\phi}_G(t)^2}{\phi_G(t)^2} = \text{const} =: \beta^2,$$

mit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Eine Bedingung an  $\phi_G$  ist also

$$\dot{\phi}_G = \beta \phi_G,$$

wobei wieder o.b.d.A.  $\dot{\phi}_G > 0$  gelten soll. In der Geodätengleichung (4.14) verschwindet damit die erste Zeile sofort und es bleibt nur noch die zweite Zeile mit

$$\ddot{\phi}_G(t) - \frac{\dot{\phi}_G(t)^2}{\phi_G(t)} = 0.$$

Wir setzen die Bedingung ein und erhalten

$$\beta \dot{\phi}_G - \beta^2 \phi_G = \beta^2 \phi_G - \beta^2 \phi_G = 0.$$

Eine parametrisierte Kurve, deren Bild ein Strahl senkrecht auf den unteren Rand der Halbebene ist, ist also eine Geodätische, wenn die Parametertransformation diese Bedingung erfüllt. Für jede gegebene Startbedingung mit einem Geschwindigkeitsvektor senkrecht zum unteren Rand der Halbebene können wir dann die Konstanten  $c_G^1$  und  $\beta$  so anpassen, dass  $c_G$  die Geodätengleichung löst.

Wir können also für alle möglichen Startbedingungen die eindeutige Lösung der Geodätengleichung (4.14) finden. Jede dieser Lösungen wird dabei einer parametrisierten Kurve entsprechen, deren Bild entweder ein euklidischer Halbkreis oder ein euklidischer Strahl ist.

□

Es sei noch bemerkt, dass die Aussage von Satz 4.5.1 üblicherweise anders gezeigt wird. Sie lässt sich nämlich alternativ auch im Rahmen der Konstruktion des Halbebenenmodells zeigen. Wenn wir gemäß unserer Konstruktion des Halbebenenmodells aus dem Hyperboloid-Modell eine Geodätische aus  $\mathbb{M}_{-1}^2$  auf die Halbebene abbilden wollen, durchlaufen wir drei Schritte. Als erstes bilden wir die Geodätische ins Beltrami-Klein-Modell ab, wo das Bild der Geodätischen einem Geradenstück entspricht, also einer Kreissehne. Danach bilden wir diese Kreissehne entlang der  $x^3$ -Achse auf die obere Halbkugel ab. Das Bild der Geodätischen auf der Halbkugel entspricht dann einem Halbkreis. Diesen Halbkreis bilden wir dann gemäß Abbildung 13 auf die Halbebene ab. Eine Projektion gemäß Abbildung 13 wird auch stereographische Projektion genannt. Über diese stereographische Projektion kann man zeigen, dass sie Kreise auf der Kugel immer auf Kreise oder Geraden in der Ebene abbildet [5, Kap.2, S.15]. Mit dem hier gebrachten Beweis von Satz 4.5.1 lässt sich allerdings auch der zeitliche Verlauf der Geodätischen untersuchen, dies werden wir zuletzt noch tun.

Wir wollen die Parametertransformationen der Halbkreise untersuchen, die durch die Bedingung

$$\alpha \cdot \sin \phi = \dot{\phi}$$

gegeben sind. Diese gewöhnliche, nichtlineare, Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich analytisch lösen, was wir nun tun.

Zuerst stellen wir fest, dass der Definitionsbereich von  $\phi$  dem gesamten Definitionsintervall einer Geodätischen in der hyperbolischen Ebene entsprechen sollte. Diese Geodätischen haben als Definitionsintervall ganz  $\mathbb{R}$ , somit erwarten wir, dass die Lösungen unserer Differentialgleichung bei beliebigen Startbedingungen auf ganz  $\mathbb{R}$  existieren.

Wir können diese Gleichung lösen mit (vgl. [13, Kap.1.3, S.9])

$$\int_{t_0}^t \alpha d\tilde{t} = \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} \frac{1}{\sin \psi} d\psi,$$

wobei wir die Identität

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

für alle  $\frac{x}{2}$  im Definitionsbereich des Tangens, nutzen können, womit wir

$$\int_{t_0}^t \alpha d\tilde{t} = \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} \frac{1}{(1 + \cos \psi) \tan \frac{\psi}{2}} d\psi$$

erhalten. Wir substituieren durch

$$\eta(\psi) = \tan \frac{\psi}{2},$$

wobei

$$\frac{d}{dx} \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

gilt für alle  $\frac{x}{2}$  im Definitionsbereich des Tangens, damit erhalten wir

$$\int_{t_0}^t \alpha d\tilde{t} = \int_{\eta(\phi(t_0))}^{\eta(\phi(t))} \frac{1}{\tilde{\eta}} d\tilde{\eta}.$$

Nun können wir beide Integrale leicht lösen und erhalten

$$\alpha(t - t_0) = \ln \left( \tan \frac{\phi(t)}{2} \right) - \ln \left( \tan \frac{\phi(t_0)}{2} \right).$$

Wir erhalten weiter

$$\phi(t) = 2 \arctan \left( \tan \frac{\phi(t_0)}{2} \cdot e^{\alpha(t-t_0)} \right).$$

Die Startbedingung  $\phi(t_0)$  hat dabei keine besondere Bedeutung, sie entspricht lediglich einer Verschiebung des Parameters  $t \rightarrow t + t_0$ . Zur besseren Übersicht wollen wir sie nicht weiter mitschleppen. Eine Möglichkeit diese Startbedingung zu eliminieren ist es, zu verlangen, dass die Geodätische am obersten Punkt des Halbkreises, also in  $(m, 0, r)^\top$  den Parameterwert  $t = 0$  hat, also  $t_0 = 0$  und  $\phi(t_0) = \frac{\pi}{2}$ , damit erhalten wir

$$\phi(t) = 2 \arctan (e^{\alpha t}).$$

Diese Lösungen existieren auf ganz  $\mathbb{R}$  und ihr Bild ist  $(0, \pi)$ , damit ist die zugehörige Geodätische tatsächlich ein Halbkreis. Wir berechnen auch die erste Ableitung mit

$$\dot{\phi}(t) = 2 \frac{e^{\alpha t}}{e^{2\alpha t} + 1} \alpha.$$

Betrachten wir nun den Spezialfall der Geodätischen, deren Bild im Einheitskreis um den Ursprung liegt. Diese erfüllt offensichtlich  $r = 1$  und  $m = 0$ . Wir verlangen zusätzlich, dass sie mit Bogenlänge parametrisiert ist. Nennen wir diese spezielle Geodätische wieder  $c$ , dann bedeutet dies für  $t = 0$  also (pedantisch ausgeschrieben)

$$g_{c(0)}(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) = \frac{1}{1^2} 1^2 \dot{\phi}(0)^2 \stackrel{!}{=} 1.$$

Die Forderung, dass  $c$  mit Bogenlänge parametrisiert sein soll gibt damit die Gleichung

$$\dot{\phi}(0) = \alpha = 1$$

und bestimmt somit  $\alpha$ .

Diese spezielle Geodätische ist dann gegeben durch

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ 0 \\ \sin \phi(t) \end{pmatrix},$$

mit

$$\phi(t) = 2 \arctan(e^t).$$

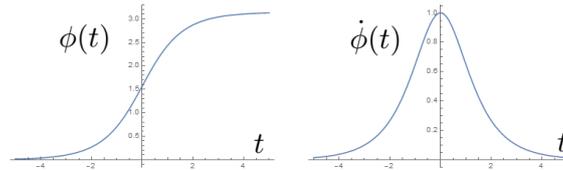


Abbildung 21: Parametertransformation  $\phi$  des Halbkreises im Einheitskreis um den Ursprung und ihre Ableitung.

In Abbildung 21 sind sowohl die Parametertransformation  $\phi$  als auch ihre Ableitung  $\dot{\phi}$  im Bereich  $t \in [-5, 5]$  dargestellt. Die Länge der Geschwindigkeit unserer Geodätischen  $c$  ist im euklidischen Sinn gleich der Ableitung von  $\phi$ , also

$$\sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle} = \dot{\phi}(t).$$

Beobachten wir also wieder eine zweidimensionale Ameise im Halbebenenmodell, die eine Bahn verfolgt, die unserer Geodätischen  $c$  entspricht. Sagen wir sie geht bei  $t = 0$  in die positive  $t$  Richtung. Dann würde sich die Geschwindigkeit der Ameise, die wir von außen beobachten, gemäß Abbildung 21 verhalten. Die Ameise würde also zuerst eher schnell losgehen, und immer langsamer erscheinen, wobei sie den unteren Rand der Halbebene nie erreicht. Qualitativ macht der Verlauf von  $\dot{\phi}$  also durchaus Sinn, denn die Ameise bewegt sich im hyperbolischen Sinn mit konstanter Geschwindigkeit, nur werden zum unteren Rand hin die hyperbolischen Distanzen immer länger im Vergleich zu den euklidischen Distanzen.

Betrachten wir nun noch Lösungen der Geodätengleichung für Startgeschwindigkeiten, die rechtwinklig auf den unteren Rand der Halbebene stehen. Diese sind charakterisiert durch ihre Parametertransformationen  $\phi_G$ . Dabei können wir für die Gleichung

$$\dot{\phi}_G = \beta \phi_G$$

leicht eine Lösung finden mit

$$\phi_G(t) = \phi_G(t_0) \cdot e^{\beta(t-t_0)}$$

für  $\beta, t_0$  konstant in  $\mathbb{R}$ . Wir setzen wieder  $t_0 = 0$ .

Somit erhalten wir eine Parametertransformation

$$\phi_G(t) = \phi_G(0)e^{\beta t},$$

wobei  $\phi_G(0)$  und  $\beta$  wieder durch die Startbedingungen bestimmt werden. Betrachten wir nun die spezielle Geodätische  $c_G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $S_H$ , die die Startbedingungen  $c_G(0) = (0, 0, 1)^\top$  und  $\dot{c}_G(0) = (0, 0, 1)^\top$  erfüllt. Damit ergibt sich  $\phi_G(0) = 1$  und  $\beta = 1$ , sowie  $c_G^1 = 0$ , also ist die Geodätische gegeben durch

$$c_G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Man kann sich also leicht vorstellen, dass sich die beobachtete Ameise in diesem Fall wieder langsamer bewegt, je näher sie am unteren Rand der Halbebene ist, und nach oben hin immer schneller erscheinen wird.



## Literaturverzeichnis

- [1] H. Amann, J. Escher. Analysis I. Birkhäuser, Basel, 3. Auflage 2006.
- [2] H. Amann, J. Escher. Analysis II. Birkhäuser, Basel, 2. Auflage 2006.
- [3] J. W. Anderson. Hyperbolic Geometry. Springer, London, 1. Auflage 1999.
- [4] C. Bär. Elementare Differentialgeometrie. Walter De Gruyter, Berlin, 2. Auflage, 2010.
- [5] H. Behnke, F. Sommer. Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer, Berlin, 1. Auflage 1955.
- [6] M. R. Bridson, A. Haefliger. Metric Spaces of Non-Positive Curvature. Springer, Berlin, 1. Auflage 1999.
- [7] V. Bulatov. Bending Circle Limits. Bridges Enschede, 167 - 174, 2013; online unter <http://archive.bridgesmathart.org/2013/bridges2013-167.html>
- [8] M. Dorigo, L. M. Gambardella. Ant colonies for the travelling salesman problem. BioSystems, 43, 73 – 81, 1997.
- [9] M. C. Escher. The Graphic Work of M.C.Escher. Ballantine Books, New York, New, Revised and Expanded Edition 1967.
- [10] G. Fischer. Lineare Algebra. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 17. Auflage, 2010.
- [11] T. Fließbach. Mechanik. Springer Spektrum, Heidelberg, 4. Auflage 2003.
- [12] J.M. Lee. Riemannian Manifolds - An Introduction to Curvature. Springer, New York, 1. Auflage 1997.
- [13] G. Teschl. Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. American Mathematical Society, Rhode Island, 1. Auflage 2011.



## Zusammenfassung

Im Zentrum dieser Arbeit steht die Untersuchung der ebenen hyperbolischen Geometrie. Die hyperbolische Geometrie baut auf wenigen Axiomen auf, die sich im sogenannten Parallelenaxiom von denen der herkömmlichen euklidischen Geometrie unterscheiden. Man kann dabei verschiedene Modelle der hyperbolischen Geometrie erzeugen, also mathematische Strukturen, die die Axiome der hyperbolischen Geometrie erfüllen.

Eine besonders fruchtbare Quelle solcher Modelle der hyperbolischen Geometrie ist die Differentialgeometrie. Deshalb wird in dieser Arbeit zuerst ein grober Überblick über die wichtigsten Begriffe und Zusammenhänge der Differentialgeometrie von Flächen gegeben. So soll ein anschauliches Verständnis für die Methoden geschaffen werden, die später die Untersuchungen der ebenen hyperbolischen Geometrie wesentlich prägen.

Anschließend werden vier Modelle der hyperbolischen Geometrie vorgestellt, wobei der Großteil der Untersuchungen im sogenannten Hyperboloid-Modell gemacht wird. Da sich die Modelle einfach ineinander überführen lassen, gelten die Ergebnisse der Untersuchungen in entsprechender Form für alle Modelle. Zum Schluss wird noch skizziert wie zwei dieser Modelle auch ohne die Differentialgeometrie konstruiert werden können.

## Abstract

The main focus of this thesis is to investigate and portray the two dimensional hyperbolic geometry. The hyperbolic geometry is based on a small set of axioms, that differ from the usual euclidean geometry in the so called *parallel axiom*. One can construct different models of the hyperbolic geometry, i.e. mathematical structures, that satisfy the axioms of the hyperbolic geometry.

Differential geometry is a particularly fruitful source of such models of the hyperbolic geometry. Therefore, in the first two chapters of this thesis, the basics of differential geometry will be introduced. The methods of investigating the hyperbolic geometry will then strongly rely on these basics.

The last chapter introduces four different models of the hyperbolic geometry. The bulk part of the findings about the hyperbolic geometry will be made in the so called hyperboloid model. These findings hold analogously for all the other models. Finally, a way to construct models of the hyperbolic geometry, without differential geometry, will be sketched.



## Danksagung

Ich möchte meinem Betreuer Michael Kunzinger für seine stets bemühte und hilfreiche Unterstützung beim Verfassen dieser Arbeit danken. Ich bedanke mich außerdem bei allen Professoren und Angestellten der Universität Wien, die es ermöglicht haben, dass ich auf ein lehrreiches und schönes Studium zurückblicken kann.

Vor allem danke ich meinen Eltern, Cezary Slowiak und Hildegard Stangl, für ihre Unterstützung in jeder Hinsicht.

Ich danke meinen Studienkollegen für die anregende Zusammenarbeit, für die gegenseitige Unterstützung und die schöne Zeit, die wir miteinander verbringen konnten. Und ich danke meinen Freunden dafür, dass auch die Zeit außerhalb des Studiums eine gute war.

