universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Strategien zum erfolgreichen Lösen von Teil 2-Aufgaben der standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung in Mathematik“

verfasst von / submitted by

Valerie Schroll

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 456
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geographie und Wirtschaftskunde
Betreut von / Supervisor:	Dr. Christoph Ableitinger

Danksagung

Allen voran möchte hier Christoph Ableitinger danken: für seine kompetente Betreuung, für seine vielen, hilfreichen Inputs und vor allem für seine eiserne Geduld. Wiederholt half er mir den Fokus wiederzufinden, wenn ich mich im Forschungsprozess verlaufen hatte, sodass ich schließlich diese Diplomarbeit stolz einreichen kann.

Großer Dank gilt auch allen Schülerinnen und Schülern und ihren Lehrpersonen, die meine empirische Forschungsarbeit überhaupt erst möglich gemacht haben.

Besonders dankbar bin ich meiner Familie für ihren immerwährenden Rückhalt. Meine Eltern haben mich im Laufe meines Studiums nicht nur finanziell und organisatorisch unterstützt, sondern vorwiegend auch emotional. Sie waren sowohl in sonnigen als auch in stürmischen Zeiten immer für mich da. Auch meine Geschwister, Philip und Sophie, hatten immer ein offenes Ohr für mich und meine universitären Sorgen, auch wenn sie die Inhalte meines Studiums nicht immer brennend interessierten.

Für inhaltliche Angelegenheiten waren eher meine StudienkollegInnen zuständig, mit denen ich Höhen und Tiefen meines Studiums gemeinsam bewältigen durfte. An dieser Stelle denke ich an meine Mathemädls: Anna, Andrea, Elisabeth, Julia, Katja und Sophie: Danke für die vielen gemeinsamen Lernsessions, Mittagspausen und Mädlsabende. Ebenso danke ich Elizabeth für ihren herrlichen Humor, der mich immer wieder aufs Neue aufgebaut hat. Auch Verena soll nicht unerwähnt bleiben: Unsere wöchentlichen Lagebesprechungen über einer Tasse Kaffee wurden zu einem wichtigen Fixpunkt in meinem oft viel zu stressigen Alltag.

Ich möchte auch allen FreundInnen danken, die mir immer wieder neue Kraft und Motivation zum Weitermachen spendeten. Dazu zählen unter anderem Doris, Lisa, Laura und Louise, die mir halfen einen klaren Kopf zu bewahren und in den richtigen Momenten Ablenkung und Auszeit boten – oft in Form von unvergesslichen Reisen. Im letzten Jahr wurden auch Agnes und Annette sehr wichtig in meinem Leben. Für mich sind sie viel mehr als nur Arbeitskolleginnen, sondern auch neu gewonnene Freundinnen, die mir in den stressigsten Phasen Schultern zum Anlehnen bieten.

Schließlich möchte ich noch Michael Sollböck erwähnen, der meine Begeisterung für Mathematik früh erkannt und stets gefördert hat. Und obwohl wir in meiner Schulzeit nicht immer einer Meinung waren, hat er nie aufgehört, mir ein Vorbild zu sein.

Abstract

This diploma thesis focuses on Part 2 Tasks of the Standardized Competence-Oriented Written School-Leaving Examination in Mathematics for AHS. Different student strategies for solving these tasks are analyzed for efficiency. Additionally, difficulties in the process of solving and their causes are examined.

A detailed outline of the concept of the Austrian School-Leaving Examination with a special emphasis on the written exam in Mathematics is followed by literature research on current developments in the culture of math problems. There, the focus is on context-oriented math problems, linking core competences and various strategies for problem-solving. Afterwards, possible implementation techniques of these strategies in school are discussed.

The application of different strategies for solving Part 2 Tasks was examined in a qualitative research, where the solving processes of students were analyzed on strategies and difficulties. In additional quantitative research, students were tested on their cognitive flexibility.

Based on this research, it appears that Austrian students have problems in understanding the tasks wholly and consequently in working out a plan. These difficulties are mainly results of deficiencies in the use of the language of Mathematics among others.

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit setzt sich mit Teil 2-Aufgaben der Klausurarbeit der standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung in Mathematik auseinander. Diverse Lösungsstrategien von Schülerinnen und Schülern werden hinsichtlich ihrer Einsatzmöglichkeit und ihrer Effektivität analysiert. Im Zuge dessen wird untersucht, welche Schwierigkeiten bei der Aufgabenbearbeitung auftreten und wodurch diese entstehen.

Nach einer Erläuterung des Konzepts der standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung mit Hauptaugenmerk auf die Klausurarbeit in Mathematik werden die momentanen Entwicklungen in der mathematischen Aufgabenkultur mithilfe ausgewählter Literatur recherchiert. Dabei liegt der Fokus auf vernetzenden Mathematikunterricht, kontextorientierte, realitätsbezogene Aufgaben und unterschiedliche Problemlösungsstrategien. Anschließend wird diskutiert, wie diese Problemlösetechniken im Mathematikunterricht nachhaltig implementiert werden können.

Die Anwendung unterschiedlicher Lösungsstrategien wurde im Rahmen einer qualitativen Untersuchung genauer betrachtet. Die Lösungsprozesse von Schülerinnen und Schülern beim Bearbeiten von Teil 2-Aufgaben der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik wurden hinsichtlich ihrer Lösungsstrategien und der damit verbundenen Schwierigkeiten untersucht.

In Hinblick auf die bei Teil 2-Aufgaben auftretenden Schwierigkeiten wurde zusätzlich noch eine quantitative Untersuchung durchgeführt, in welcher die geistige Beweglichkeit von Schülerinnen und Schülern getestet wurde.

Aus den empirischen Untersuchungen geht hervor, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer oft Schwierigkeiten haben, die Aufgabenstellungen zu verstehen und daraus einen Plan zu entwickeln. Diese sind oft auf Defizite im flexiblen Umgang mit der Sprache der Mathematik wie auch auf unvollständige Vernetzungen der Grundkompetenzen zurückzuführen.

Inhaltsverzeichnis

I. Einführung

Eine Veränderung der Aufgabenkultur über die Jahre hinweg verlangte schließlich eine Erneuerung des österreichischen Reifeprüfungskonzepts. Die standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung wurde im Schuljahr 2014/15 zum ersten Mal österreichweit an allen AHS durchgeführt. Besonders hohe mediale Aufmerksamkeit erhielt dabei die Klausurarbeit in Mathematik, bei welcher seit Einführung der neuen Reifeprüfung die meisten „Nicht genügend“ vergeben wurden. Worin die Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Klausuraufgaben liegen und wie diese nachhaltig vermieden werden können, blieb bisher jedoch weitgehend unerforscht.

Die vorliegende Diplomarbeit setzt sich mit den Aufgaben im zweiten Teil dieser Klausurarbeit auseinander. Diverse Lösungsstrategien von Schülerinnen und Schülern sollen hinsichtlich ihrer Einsatzmöglichkeit und ihrer Effektivität analysiert werden. Im Zuge dessen soll auch untersucht werden, welche Schwierigkeiten beim Bearbeiten von Teil 2-Aufgaben auftreten und wodurch diese entstehen. Infolgedessen sollen Überlegungen angestellt werden, wie diese Schwierigkeiten und Defizite nachhaltig vermieden werden können.

Zu Beginn wird das Konzept der standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung mit Hauptaugenmerk auf die Klausurarbeit in Mathematik erläutert. Dafür wird zuerst das Prüfungskonzept mit seinen bildungstheoretischen Grundlagen erläutert, bevor detailliert auf die beiden Teile der schriftlichen Reifeprüfung eingegangen wird. Dabei werden für den jeweiligen Klausurteil charakteristische Aufgabenstellungen vorgestellt und analysiert.

Im darauffolgenden Kapitel werden die momentanen Entwicklungen in der mathematischen Aufgabenkultur mithilfe ausgewählter Literatur recherchiert. Im Zuge dessen werden folgende Aspekte näher beleuchtet: Entsprechend dem Konzept des vernetzenden Mathematikunterrichts gewinnen kontextorientierte, realitätsbezogene Aufgaben an Bedeutung. Diese sollen bezüglich ihrer Eigenschaften, Potentiale und Schwierigkeitsgrade kategorisiert werden. Anschließend werden unterschiedliche Problemlösungsstrategien genauer beleuchtet, wobei auch die einzelnen Phasen des Lösungsprozesses analysiert werden sollen. Anschließend wird diskutiert, wie diese Problemlösetechniken im Mathematikunterricht nachhaltig implementiert werden können.

Die Anwendung unterschiedlicher Lösungsstrategien wurde schließlich im Rahmen einer qualitativen Untersuchung genauer betrachtet. Die Lösungsprozesse von Schülerinnen und Schülern beim Bearbeiten von Teil 2-Aufgaben der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik wurden hinsichtlich ihrer Lösungsstrategien und der damit zusammenhängenden Schwierigkeiten untersucht. Im empirischen Teil dieser Arbeit werden die Abläufe dieser Lösungsprozesse mit einem Hauptaugenmerk auf Strategien und Schwierigkeiten untersucht. Darauf folgt eine ausführliche Analyse und Interpretation der Ergebnisse, wodurch die Forschungsfrage beantwortet werden soll.

In Hinblick auf die bei Teil 2-Aufgaben auftretenden Schwierigkeiten wurde zusätzlich noch eine quantitative Untersuchung durchgeführt, in welcher die geistige Beweglichkeit von Schülerinnen und Schülern getestet werden soll. Nach einer Analyse und Interpretation dieser Resultate wird in einer Conclusio versucht, die Forschungsfragen zu beantworten und die wichtigsten Ergebnisse und Schlüsse zusammenfassen.

II. Die standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung an AHS

Seit dem Schuljahr 2014/15 wird an allen allgemeinbildenden höhen Schulen (AHS) in Österreich die standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung durchgeführt. Laut dem Bundesministerium für Bildung (2016) soll das neue Reifeprüfungsformat gleiche Bedingungen und einheitliche Grundkompetenzen für alle Maturantinnen und Maturanten schaffen. Durch standardisierte Aufgaben und einheitliche Beurteilungskriterien sollen Vergleichbarkeit und Transparenz von Schulleistungen und Schulabschlüssen hergestellt werden. So werde die Aussagekraft der Abschlussprüfungen erhöht und zusätzlich ein europäischer Vergleich ermöglicht. Dafür sind auch die Rahmenbedingungen für AHS und BHS gleich.

Im folgenden Teil werden zuerst der allgemeine Aufbau der Reifeprüfung an AHS und die dahinterstehenden bildungstheoretischen Grundlagen umrissen. Anschließend werden das Konzept der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik und die geforderten Kompetenzen erläutert. Im Zuge dessen werden die unterschiedlichen Aufgabenformate anhand von Beispielen vorgestellt und analysiert. Schließlich werden die Beurteilungskriterien der Klausurarbeiten erklärt.

1. Grundgerüst der Reifeprüfung

Die standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung besteht aus drei modularen Prüfungsgebieten: der vorwissenschaftlichen Arbeit, den Klausurarbeiten und den mündlichen Prüfungen. Modular bedeutet, dass eine Kandidatin oder ein Kandidat zur mündlichen Prüfung antreten darf, auch wenn vorher in einem anderen Prüfungsbereich negative Leistungen erbracht wurden. Dieses Modell der drei separaten Prüfungsteile wird „Drei Säulen Modell" genannt und wurde von einer Expertinnen- und Expertengruppe aus dem Bildungsministerium für Unterricht, Kunst und Kultur (dazumal BMUKK), dem ehemaligen Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) und den Landesschulräten entwickelt. Heute ist das Bundesministerium für Bildung (BMB) für die Erstellung und Koordination der Reifeprüfung zuständig. (vgl. BMB 2016a)

Als zweite Säule dienen die Klausurarbeiten, von denen die Klausuren in Deutsch, Mathematik und einer lebenden Fremdsprache verpflichtend sind. Neben anderen Fächern werden auch die Aufgabenstellungen der Klausurarbeiten in Mathematik zentral vom Bundesministerium für Bildung erstellt. Im Zuge von Feldtestungen werden alle Aufgabenstellungen geprüft, mit dem Ziel, einen einheitlichen Standard zu erzielen.

Korrigiert werden die Klausuren von den klassenführenden Lehrpersonen, die einen Korrektur- und Beurteilungsschlüssel zur Verfügung gestellt bekommen. Bevor die Noten kommissionell beschlossen werden, muss der oder die Vorsitzende die Ergebnisse kontrollieren und bestätigen. Im Falle einer negativen Beurteilung besteht die Möglichkeit einer mündlichen Kompensationsprüfung, deren Aufgabenstellungen vom Bundesministerium für Bildung erstellt werden. (vgl. BMB 2017a)

Auf das Prüfungskonzept der Klausurarbeit in Mathematik wird in Kapitel 3.4 im Detail eingegangen.

2. Bildungstheoretische Grundlagen der Reifeprüfung

Bereits der offizielle Name der neuen Reifeprüfung lässt darauf schließen, dass die Kompetenzorientierung ein wichtiger Teil des Gesamtkonzepts ist. In den letzten Jahrzehnten wurde der Begriff „Kompetenz“ im Bildungsbereich immer präsenter. Insbesondere seit den 1990er Jahren wächst die Diskussion um „Schlüsselkompetenzen“ und ihr Potenzial. (vgl. Klieme & Hartig 2007)

Weinert (2001) definiert Kompetenzen als

> *„die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.“*

In vereinfachter Form bedeutet das: Mit Kompetenzen kann man Probleme lösen. Hier ist zu beachten, dass Kompetenzen allgemein als kontextgebunden begriffen werden. Demnach beschreiben Klieme und Leutner (2006) den Begriff Kompetenz als „kontextspezifische kognitive Leistungsdisposition, die sich funktional auf Situationen und Anforderungen in einer bestimmten Domäne bezieht“. Die Schülerinnen und Schüler sollen also in ihrer Schulzeit das Wissen und Werkzeug, die Fähigkeiten und Fertigkeiten dazu bekommen, verschiedenartige Probleme zu lösen. Kompetenzen können demnach als Verbindung eines lebendigen und anwendungsbezogenen (Fach-)Wissens mit methodischem Können verstanden werden.

Im Zuge der Reifeprüfung werden Kompetenzen abgeprüft, nicht Inhalte. Kompetenzen können in kurzen Prozessen, wie bei der Bearbeitung konkreter Probleme, angeregt werden. Doch längerfristig benötigt es große Prozesszyklen, teilweise bis über die gesamte Schulzeit hinweg. Dafür muss der Unterricht Schritt für Schritt auf einen nachhaltigen Kompetenzerwerb ausgerichtet werden. (vgl. Nagy, Struger & Wintersteiner 2012)

Das BIFIE (2013a) charakterisiert kompetenzorientierten Unterricht mit folgenden Adjektiven:

- ergebnisorientiert: Es werden Lehr- und Lernziele formuliert, deren Grad der Erreichung kontinuierlich überprüft wird.
- nachhaltig: Inhalte werden immer wieder in wachsender Komplexität aufgegriffen.
- vernetzend: Lernprozesse werden durch variationsreiche Kontexte und vielfältiges Üben unterstützt.
- anwendungsorientiert: Die Lehr- und Lerninhalte haben einen authentischen Realitätsbezug.
- problemlösungsorientiert: Individuelle Lösungsstrategien werden gefördert.
- schülerzentriert: Selbstständiges, reflektierendes Arbeiten wird ermöglicht.
- differenzierend: Unterschiedliche Kompetenzniveaus werden berücksichtigt.
- transparent: Kontinuierliches, individuelles Feedback zu Leistungserwartungen und Leistungsstand wird gegeben.

Nachdem die standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung in ihren Aufgabenstellungen Fähigkeiten und Fertigkeiten wie Problemlösen und Argumentieren verlangt, erhofft sich das Bundesministerium für Bildung eine umfassendere Fokussierung auf Kompetenzerwerb im Klassenzimmer und dadurch einen Wandel hin zu einem kompetenzorientierten Unterricht. (vgl. BIFIE 2013a)

Dabei soll ein Gleichgewicht zwischen den grundlegenden Kompetenzen und darüberhinausgehenden Vernetzungen und Anwendungen gefunden werden. Während es inakzeptabel ist, die Grundkompetenzen außer Acht zu lassen, ist es ebenso verwerflich, sich ausschließlich auf diese zu beschränken und das Ziel einer ganzheitlichen Allgemeinbildung zu ignorieren. (vgl. Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik 2009)

3. Die schriftliche Reifeprüfung in Mathematik

Bei der Konzepterstellung für die Klausurarbeit in Mathematik wurde darauf geachtet, dass diese einerseits den Ansprüchen des aktuellen Lehrplans der AHS-Oberstufe gerecht wird, andererseits war auch die eben erläuterte Kompetenzorientierung ausschlaggebend.

In den folgenden Abschnitten wird erst das Prüfungskonzept mit seinen bildungstheoretischen Hintergründen thematisiert. Dann werden die für die Reifeprüfung in Mathematik vorausgesetzten Grundkompetenzen genauer erläutert, bevor die beiden Klausurteile und deren charakteristische Aufgabenformate vorgestellt werden. Dabei wird der zweite Teil aufgrund der Fragestellung dieser Arbeit detaillierter behandelt. Des Weiteren werden der Einsatz von technischen Hilfsmitteln und das Beurteilungssystem für die Klausurarbeit besprochen.

3.1. Prüfungskonzept

Nicht ein hochspezialisiertes Methoden- und Faktenwissen wird abgeprüft, sondern für das Fach grundlegende Fähigkeiten und Fertigkeiten, die nachhaltig abrufbar und gesellschaftlich bedeutsam sein sollen. Dafür muss der stetige Wandel berücksichtigt werden, in dem sich unsere heutige Gesellschaft befindet. Diesem müssen sich die Maturantinnen und Maturanten als mündige Bürgerinnen und Bürger anpassen können. (vgl. Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik 2009)

Fischer (1999) spricht in seinem Modell der „Höheren Allgemeinbildung“ von „höher gebildeten Laien“. Ihm zufolge sollen sie fähig sein, verschiedene Meinungen einzuholen, zu verstehen und zu vergleichen, Aussagen zu bewerten und schließlich ihre eigene Meinung zu bilden und preiszugeben. Ihre Fähigkeit, über mathematische Inhalte zu kommunizieren, soll ihnen selbst wie auch der Gesellschaft von Nutzen sein. Als eines der grundlegenden Ziele der Reifeprüfung könnte im weiteren Sinne eine Lebensvorbereitung verstanden werden. Das Österreichische Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik (2009) formuliert dies als „Befähigung zur Kommunikation mit Expert(inn)en und mit der Allgemeinheit“ mittels mathematischer Inhalte.

Dafür benötigen die „höher gebildeten Laien“ sowohl Grund- als auch Reflexionswissen. Unter Grundwissen versteht man hier die Kenntnis von fundamentalen Begriffen und Konzepten sowie Anwendungsgebieten und Darstellungsformen. Darüber hinaus müssen die einzelnen Bestandteile dieses

Grundwissens miteinander verknüpft werden und in passende Kontexte eingebettet werden. (vgl. Fischer 1999) Die Absolventinnen und Absolventen sollen in der Lage sein, mathematische Modelle hinsichtlich ihrer Wirkungsweise und Grenzen reflektierend zu hinterfragen. Ebendieses Grundwissen wird in der Klausurarbeit in Form von Grundkompetenzen und einer flexiblen Anwendung derselben überprüft. Im Fokus stehen dabei handlungsorientierte mathematische Tätigkeiten, wie Argumentieren, Interpretieren oder Problemlösen. (vgl. BIFIE 2015)

Um den Ansprüchen der bildungstheoretischen Grundlagen und des LehrPlans gerecht zu werden, wird die Klausurarbeit in zwei Teile mit voneinander unterschiedlichen Aufgabentypen gegliedert. Im ersten Teil sind Aufgaben zu finden, die sich auf jeweils eine Grundkompetenz beziehen. Zum erfolgreichen Lösen der Aufgaben ist kompetenzorientiertes Grundwissen notwendig. Doch im zweiten Teil müssen die Grundkompetenzen bei umfangreicheren innermathematischen oder auch kontextbezogenen Aufgabenstellungen angewendet und vernetzt werden. Hier sind Reflexionsfähigkeit und Eigenständigkeit erforderlich. Somit wird ein umfangreiches, reflektierendes Anwenden und Vernetzen von Grundkompetenzen verlangt. (vgl. BIFIE 2013a)

In Tabelle 1 wird das Prüfungskonzept der Mathematik-Klausur für AHS überblicksmäßig beschreiben:

Kompetenzen	Grundkompetenzen, Anwendung und Vernetzung von Grundkompetenzen
Teil 1-Aufgaben	Grundkompetenzen
Teil 2-Aufgaben	Anwendung und Vernetzung von Grundkompetenzen
Teil 1	120 Min, 18-25 Aufgaben
Teil 2	150 Min, 4-6 Aufgaben
Klausurdauer	270 Minuten
Hilfsmittel	Einsatz höherwertiger Technologie verpflichtend ab Haupttermin 2018

Tabelle 1 – Überblick Prüfungskonzept der Mathematik-Klausur für AHS

3.2. Grundkompetenzen der Reifeprüfung in Mathematik

Entsprechend dem oben definierten Kompetenzbegriff musste man sich auch im Fach Mathematik auf grundlegende Kompetenzen einigen, die alle Absolventinnen und Absolventen der Reifeprüfung beherrschen müssen. Diese fundamentalen Fähigkeiten und Fertigkeiten werden Grundkompetenzen genannt und sind in einem Kompetenzkatalog (vgl. BIFIE 2013b) aufgelistet. Geordnet werden die Kompetenzen nach vier Inhaltsbereichen, nämlich Algebra und Geometrie (AG), Funktionale Abhängigkeiten (FA), Analysis (AN) sowie Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS). Insgesamt werden 73 Grundkompetenzen für die Reifeprüfung vorausgesetzt.

Bei der Formulierung der Grundkompetenzen werden unterschiedliche Blickwinkel berücksichtigt. Neben den bildungstheoretischen, gesellschaftlichen und fachlichen Aspekten müssen sie auch dem aktuellen Lehrplan entsprechen. Im Mittelpunkt stehen wiederum die Reflexion und Kommunikation von und über Mathematik. Die Grundkompetenzen verlangen einen sicheren Umgang mit grundlegenden Vorstellungen und Begriffen, wie auch die Fähigkeit zur formalen und operativen Beschreibung von Verfahren und Zusammenhängen. Im Zuge dessen werden besonders handlungsorientierte mathematische Fertigkeiten gefordert. (vgl. BIFIE 2013a)

Zum Beispiel lautet eine Grundkompetenz im Inhaltsbereich Analysis unter dem Punkt „Änderungsmaße“ im Kompetenzkatalog (vgl. BIFIE 2013b):

„AN 1.3 den Differenzen- und Differenzialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differenzialquotienten beschreiben können“

Ein weiteres Beispiel aus dem Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten unter dem Punkt „Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften“ lautet:

„FA 1.7 Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können“

Auffällig ist das Verb „können“, welches in jeder Kompetenzformulierung vorkommt. Wie oben erwähnt, bilden Kompetenzen eine Verbindung zwischen Wissen und Können. Reine Reproduktion genügt nicht für die Reifeprüfung. Das Grundwissen muss verstanden und vielseitig angewendet werden können. Bei AN 1.3 wird dies verdeutlicht, indem verlangt wird, die mathematischen Inhalte und Begriffe in unterschiedlichen Kontexten auslegen zu können. Außerdem werden sowohl Anwendung in passenden Sachverhalten als auch Beschreibung dieser mathematischen Konzepte gefordert. Auch FA 1.7 verstärkt den Anspruch auf Verständnis und Reflexion. Das kritiklose Anwenden von Algorithmen und Rechenrezepten, wie es früher oft der Fall war, reicht für derartige Anforderungen nicht mehr. Auch deshalb ist heutzutage ein kompetenzorientierter Mathematikunterricht, der als Ziel einen umfassenden und nachhaltigen Aufbau von Grund- und Reflexionswissen verfolgt, essentiell.

3.3. Teil 1-Aufgaben

Im ersten Teil der Mathematikklausur werden ausschließlich Grundkompetenzen abgeprüft. Dabei fokussieren die Aufgaben je eine spezifische Kompetenz aus dem Kompetenzkatalog. Eigenständige Vernetzung ist dafür nicht erforderlich. Weil die Aufgaben nur als „gelöst“ oder „nicht gelöst“ bewertet werden, kann man bei einer Aufgabe jeweils nur einen oder keinen Punkt erzielen. Innerhalb des ersten Teiles werden die Aufgaben nach Inhaltsbereichen geordnet.

3.3.1. Mögliche Aufgabenformate

Im Teil 1 treten unterschiedliche Aufgabenformate auf, sowohl geschlossene als auch offene Antwortformate. Dafür wurden acht Formate ausgewählt, die in einem möglichst ausgeglichenen Verhältnis vorkommen sollen (vgl. BIFIE 2013c):

- offenes Antwortformat: Die Antwort zur Aufgabenstellung wird frei, in eigenen Worten formuliert.
- halboffenes Antwortformat: Die korrekte Antwort wird in eine vorgegebene Lücke eingesetzt.
- Konstruktionsformat: Geraden, Punkte, Vektoren, Kurven oder Ähnliches werden im Aufgabenheft ergänzt.
- Multiple-Choice-Aufgabenformat 2 aus 5: Die zwei richtigen Antworten werden aus fünf möglichen ausgewählt.
- Multiple-Choice-Aufgabenformat 1 aus 6: Nur eine von sechs Antworten ist korrekt.
- Multiple-Choice-Aufgabenformat x aus 5: Die Anzahl der richtigen Antworten von fünf möglichen ist nicht bekannt. Es können eine bis alle richtig sein.

- Zuordnungsformat: Informationen wie Tabellen, Graphen, oder Ähnliches sollen je einer gegenüberstehenden Antwortmöglichkeit zugeordnet werden. Nicht jede Antwort ist zuordenbar.
- Lückentext: Ein Satz mit zwei Lücken muss richtig ergänzt werden. Pro Lücke gibt es drei Antwortmöglichkeiten.

Exemplarisch werden nun zwei Teil 1-Aufgaben aus dem zweiten Nebentermin der Reifeprüfung für AHS des Schuljahres 2014/15 im Jänner 2016 vorgestellt. Beide Aufgaben waren auch Teil der quantitativen Untersuchung, die im Zuge dieser Arbeit durchgeführt wurde (siehe Kapitel V).

3.3.2. Aufgabenbeispiel: Augensumme

Zuerst wird die Aufgabe „Augensumme“ (Abbildung 1) aus dem Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik besprochen. Ein kurzer einleitender Text beinhaltet bereits einige wichtige Informationen für die Aufgabe. In der anschließenden Aufgabenstellung wird zunächst eine Behauptung aufgestellt, die dann als richtig oder falsch beurteilt werden muss. Zuletzt soll die Entscheidung auch begründet werden.

Augensumme

Zwei unterscheidbare, faire Spielwürfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 werden geworfen und die Augensumme wird ermittelt. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Aufgabenstellung:

Jemand behauptet, dass die Ereignisse „Augensumme 5“ und „Augensumme 9“ gleichwahrscheinlich sind. Geben Sie an, ob es sich hierbei um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Abbildung 1 - Teil 1-Aufgabe: Augensumme (BMBF 2016a)

Bei dieser Aufgabe handelt es sich somit um ein offenes Antwortformat. Das bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Lösung in eigenen Worten wiedergeben müssen. Die Aufgabe zielt primär auf die Grundkompetenz WS 2.3 aus dem Unterbereich „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ ab:

„WS 2.3 Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additions- und Multiplikationsregel anwenden können“

Jedoch werden hier nicht alle Aspekte dieser Grundkompetenz geprüft. Additions- und Multiplikationsregel sind nicht notwendig, um die Aufgabe zu bearbeiten. Neben dem verständigen Verwenden der Laplace-Wahrscheinlichkeit wird zusätzlich die Fähigkeit gefordert, schriftlich argumentieren und begründen zu können. Wie detailliert diese Begründung sein muss, wird der korrigierenden Lehrperson überlassen.

In Abbildung 2 wird die vom Bundesministerium für Bildung und Frauen (2016b) vorgeschlagene Lösung präsentiert. Dort werden die beiden Ereignismengen für die „Augensumme 5" und die „Augensumme 9" und deren Kardinalitäten bestimmt. Mit Hilfe der Laplace-Annahme wird gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ereignisse gleich groß sind. Es würde wohl auch reichen, nur die Kardinalitäten der Ereignisse zu vergleichen.

Lösungserwartung:

Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:

Augensumme 5: (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1) $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten

Augensumme 9: (3; 6), (4; 5), (5; 4), (6; 3) $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten

$P(\text{„Augensumme 5"}) = \frac{4}{36}$

$P(\text{„Augensumme 9"}) = \frac{4}{36}$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine richtige Beurteilung der Aussage und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

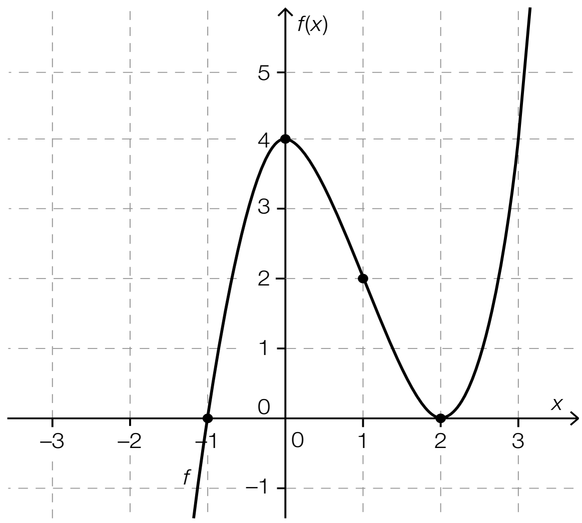
Abbildung 2 - Teil 1-Aufgabe: Augensumme - Lösungserwartung (BMBF 2016b)

Die Aufgabe „Augensumme" veranschaulicht die Intention des ersten Teils sehr deutlich: Ein stures, verständnisloses Auswendiglernen von mathematischem Wissen genügt nicht zum Lösen dieser Aufgabe. Die grundlegenden Begriffe „Ereignis" und „Wahrscheinlichkeit" müssen verstanden und verinnerlicht werden, um die Anforderungen der Aufgabe richtig umzusetzen.

3.3.3. Aufgabenbeispiel: Eigenschaften der Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion 3. Grades

Eigenschaften der Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion 3. Grades

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion *f* dritten Grades.
Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Ableitungsfunktion f' der Funktion f zu?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktionswerte der Funktion f' sind im Intervall (0; 2) negativ.	☐
Die Funktion f' ist im Intervall (–1; 0) streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 2$ eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.	☐

Abbildung 3 - Teil 1-Aufgabe: Eigenschaften der Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion 3. Grades (BMBF 2016a)

Lösungserwartung:

Die Funktionswerte der Funktion f' sind im Intervall (0; 2) negativ.	☒
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Abbildung 4 - Teil 1-Aufgabe: Eigenschaften der Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion 3. Grades - Lösungserwartung (BMBF 2016b)

Neben den offenen Antwortformaten, die auf eine Grundkompetenz abzielen, spielen auch die geschlossenen Formate eine wichtige Rolle im Teil 1. Als Beispiel wird hier die Aufgabe „Eigenschaften der Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion 3. Grades" (Abbildung 3) mit Antwortformat „Multiple Choice – x aus 5" behandelt.

Mit dieser Aufgabe wird die Grundkompetenz AN 3.3 aus dem Unterpunkt „Ableitungsfunktion/Stammfunktion" abgeprüft:

„AN 3.3 Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung"

Ergänzend ist bei der Bearbeitung dieser Aufgabe die Lesekompetenz von großer Bedeutung. Auf gar keinen Fall sollte überlesen werden, dass sich die Antwortmöglichkeiten auf die Eigenschaften der Ableitungsfunktion f' beziehen und nicht auf die der Funktion f. Damit wird die beschriebene Grundkompetenz AN 3.3 unter dem umgekehrten Aspekt eingesetzt, dass hier die Eigenschaften der Ableitungsfunktion f' mit Hilfe einer gegebenen Funktion f bestimmt werden sollen. Die Schülerinnen und Schüler dürfen sich dabei nicht von den vorliegenden Distraktoren beirren lassen. Dazu zählt zum Beispiel die zweite Antwortmöglichkeit, welche zwar für f stimmt, jedoch nicht für f'. Die richtigen Antworten sind in Abbildung 4 zu sehen.

Also ist auch hier ein sicherer und flexibler Umgang mit der verlangten Grundkompetenz notwendig. Reines Reproduzieren der Eigenschaften genügt nicht, um die richtigen Antworten ankreuzen zu können. Auch das Ausschlussverfahren wird nicht ausreichen, wenn man den Zusammenhang zwischen den Eigenschaften einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion nicht begriffen hat.

Wie in den vorangegangenen Aufgabenbeispielen gezeigt wird, verlangen auch die Aufgaben im Teil 1 bereits mehr als ein ausschließliches Grundwissen. Die Grundkompetenzen müssen umfassend und vielseitig beherrscht werden, um die Aufgaben zu meistern. Jedoch verlangen die Aufgaben kaum eine Vernetzung zwischen unterschiedlichen Kompetenzbereichen. Auch der Aspekt der realitätsbezogenen, anwendenden Mathematik wird im Teil 1 eher vernachlässigt. Diesen Ansprüchen widmet sich jedoch der zweite Teil der Klausurprüfung.

3.4. Teil 2-Aufgaben

Der Anspruch im Teil 2 liegt darin, die Grundkompetenzen fachkundig anzuwenden und miteinander zu vernetzen. Im Gegensatz zum Teil 1 sind hier umfangreichere Aufgaben vorzufinden, die eine selbstständige und reflektierende Anwendung von Wissen und Können verlangen.

3.4.1. Charakterisierung des Aufgabenformats

Die komplexeren Aufgabenstellungen im Teil 2 haben stets einen Kontext. Dieser kann außermathematisch-anwendungsorientiert oder auch innermathematisch sein. Am Anfang der Aufgabe steht ein einleitender, informativer Text, der in den jeweiligen Kontext einführt. Das BIFIE (2015) stellte dafür eine Sammlung von Kontexten zur Verfügung, welche bei der Reifeprüfung ohne weitere detaillierte Erläuterungen auftreten können. Natürlich können auch andere authentische Anwendungs- und Realitätsbezüge verwendet werden. Jedoch werden diese dann ausreichend genau im Einleitungstext erklärt. An dieser Stelle sei auch erwähnt, dass selbstverständlich auch Informationen vorkommen können, die für die Lösung der Aufgabe irrelevant sind. In diesem Fall spricht man von einer überbestimmten Aufgabenstellung.

Ein weiterer, grundlegender Unterschied zu den Aufgabenformaten im ersten Teil ist der Umfang der Aufgaben: Im Teil 2 werden nur vier bis sechs separate Aufgaben gestellt. Dafür bestehen diese aus mehreren, voneinander unabhängigen Teilaufgaben. Im Gegensatz zum Teil 1 kann hier eine Aufgabe auch teilweise gelöst werden. Bei jeder Teilaufgabe können bis zu zwei Punkte erzielt werden. Kann eine Schülerin oder ein Schüler eine Teilaufgabe nicht lösen, sollte sich dies aufgrund deren Unabhängigkeit nicht auf die Bearbeitung der weiteren Teilaufgaben auswirken. (vgl. BIFIE 2013a)

Innerhalb einer Aufgabe werden meist mehrere Grundkompetenzen gleichzeitig verlangt. Neben dem Operieren ist hier auch das Reflektieren und Vernetzen gefragt. Obwohl der Großteil der Aufgaben offen gestaltet ist, werden vereinzelt auch geschlossene Antwortformate eingesetzt. Außerdem gibt es bei jeder Klausur im Teil 2-Aufgaben, welche nur eine einzige Grundkompetenz abprüfen. Diese Aufgaben sind als „Ausgleichspunkte" gekennzeichnet, welche im Kapitel 3.6. erklärt werden. (vgl. BIFIE 2015)

Exemplarisch werden nun zwei Teil 2-Aufgaben aus dem zweiten Nebentermin der Reifeprüfung für AHS des Schuljahres 2014/15 im Jänner 2016 besprochen. Beide Aufgaben waren Teil der qualitativen Untersuchung, die im Zuge dieser Arbeit durchgeführt wurde (siehe Kapitel IV).

3.4.2. Aufgabenbeispiel: Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

Die Aufgabe „Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen" (siehe Abbildung 5) ist in einen rein innermathematischen Kontext eingebettet. Dementsprechend beschränkt sich die Einleitung hier auf eine relativ kurze Angabe. Danach wird die Aufgabenstellung in drei voneinander unabhängige Teilaufgaben gegliedert, die sich mit unterschiedlichen quadratischen Gleichungen und Funktionen beschäftigen. Die Ergebnisse der vorangegangenen Teilaufgaben sind somit zur weiteren Aufgabenbearbeitung nicht notwendig.

Insgesamt verlangt die Aufgabe verschiedene Kompetenzen, die sich von Algebra und Geometrie über Funktionale Abhängigkeiten in den Teilen (a) und (b) bis hin zu Elementen der Analysis in (c) erstreckt. Genauer handelt es sich um folgende Grundkompetenzen, die zur Aufgabenbearbeitung benötigt werden:

„AG 2.3 quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können"

„FA 4.1 typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen“

„FA 4.3 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können“

„AN 4.2 einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)\,dx$, $\int f(k \cdot x)\,dx$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können“

„AN 4.3 das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können“

Je nachdem, für welchen Lösungsweg sich die Schülerin oder der Schüler entscheidet, wird die jeweilige Kompetenz mehr oder weniger intensiv eingesetzt.

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

Gegeben sind eine (normierte) quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ und die zugehörige Polynomfunktion f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$.

Aufgabenstellung:

a) Lässt sich die Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ in der Form $(x - z) \cdot \left(x - \frac{1}{z}\right) = 0$ mit $z \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$ schreiben, dann spricht man von einer reziproken quadratischen Gleichung.

Geben Sie mithilfe von Gleichungen an, wie die Parameter p und q jeweils von z abhängen!

Bestimmen Sie die Werte für z, für die die reziproke quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzt. Geben Sie für jeden dieser Werte von z jeweils die lokalen Minimumstellen von f an!

b) Wählt man in der gegebenen Funktionsgleichung den Wert $q = -1$, dann erhält man eine Polynomfunktion zweiten Grades f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x - 1$.

$\boxed{\text{A}}$ Begründen Sie rechnerisch, warum die Gleichung $f(x) = 0$ genau zwei verschiedene Lösungen in $\mathbb{R}$ haben muss!

Begründen Sie, warum die Funktion f eine positive und eine negative Nullstelle haben muss!

c) Für $q = p - \frac{1}{3}$ erhält man eine Funktion f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x + p - \frac{1}{3}$.

Bestimmen Sie für diese Funktion f denjenigen Wert für p, für den $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -6$ gilt!

Geben Sie an, ob für dieses p die Gleichung $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ eine wahre Aussage ergibt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Abbildung 5 - Teil 2: Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen (BMBF 2016c)

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

a) Lösungserwartung:

$p = -\left(\frac{1}{z} + z\right)$

$q = \frac{1}{z} \cdot z = 1$, q ist somit unabhängig von z

Die reziproke quadratische Gleichung hat genau eine Lösung, wenn $z = 1$ oder $z = -1$ ist.
Minimumstelle für $z = 1$: bei $x = 1$
Minimumstelle für $z = -1$: bei $x = -1$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Parameter p und q in Abhängigkeit von z. Äquivalente Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte von z und der jeweils richtigen Minimumstelle.

b) Lösungserwartung:

$x^2 + p \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1}$

Da der Ausdruck $\frac{p^2}{4}$ für alle $p \in \mathbb{R}$ größer oder gleich null ist, ist der Ausdruck unter der Wurzel (die Diskriminante) positiv. Somit gibt es genau zwei Lösungen in $\mathbb{R}$.

Mögliche Begründungen:

Jeder mögliche Funktionsgraph von f verläuft durch den Punkt $(0|-1)$ und ist eine nach oben offene Parabel. Somit hat jede Funktion f genau eine positive und eine negative Nullstelle. Diese Werte entsprechen genau den Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$.

oder:

Es gilt: $\frac{p^2}{4} + 1 > \frac{p^2}{4}$ und somit auch $\sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} > \frac{p}{2}$.

Daraus folgt: $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} > 0$ und $-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} < 0 \Rightarrow$ Es gibt immer genau eine positive und eine negative Lösung in $\mathbb{R}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte rechnerische Begründung.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür, dass die Parabel genau eine positive und eine negative Nullstelle hat.

Abbildung 6 - Teil 2: Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen – Lösungserwartung (i) (BMBF 2016d)

c) Lösungserwartung:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2 + p \cdot x + p - \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{px^2}{2} + px - \frac{x}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = -6 \Rightarrow p = -3$$

Für $p = -3$ ergibt die gegebene Gleichung keine wahre Aussage, weil für eine solche Funktion der Graph der Funktion f achsensymmetrisch liegen müsste, damit die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, und das ist nur für $p = 0$ der Fall.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für den korrekten Wert von p.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die korrekte Angabe, ob die Aussage zutrifft, und eine korrekte Begründung.
  Andere korrekte Begründungen, zum Beispiel durch Rechnung, sind ebenfalls als richtig zu werten.

Abbildung 7 - Teil 2: Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen - Lösungserwartung (ii) (BMBF 2016d)

Teilaufgabe (a) wird mit einer Begriffsdefinition eingeleitet. Die meisten Kandidatinnen und Kandidaten haben in ihrer Schulzeit wahrscheinlich nicht von reziproken quadratischen Gleichungen gehört. Aufgrund ihres Grundwissens und ihres Vernetzungsvermögens sollen sie aber in der Lage sein, den neuen Begriff in ihr persönliches Konzept quadratischer Gleichungen einzuordnen.

Dann wird von ihnen verlangt, innermathematische Zusammenhänge formal beschreiben zu können. Ob dabei der Satz von Vièta aus der Formelsammlung (vgl. BMB, 2016b) oder sogar aus dem Gedächtnis angewendet wird oder ob die Linearfaktoren einfach ausmultipliziert werden und daraus die Parameter abgelesen werden, ist für die Korrektur irrelevant. In der Lösungserwartung (siehe Abbildung 6) wird nur die „korrekte Angabe beider Parameter p und q in Abhängigkeit von z" verlangt. Dabei sind äquivalente Gleichungen ebenso korrekt.

Auch beim zweiten Punkt von (a) bleibt die Wahl des Lösungsverfahren den Schülerinnen und Schülern überlassen. Vielseitiges Wissen über quadratische Gleichungen und ihre graphische Interpretation wird verlangt. Jedoch reicht es nicht, dieses nur reproduzieren zu können. Genau wie es das Prüfungskonzept verlangt, müssen die geforderten Grundkompetenzen hier angewendet und vernetzt werden. Damit hier die mechanischen Rechenoperationen keine mühsamen Barrieren darstellen und die Reflexionsfertigkeiten in den Vordergrund treten können, ist der Einsatz elektronischer Hilfsmittel vorteilhaft.

Für Teilaufgabe (b) wird eine neue Funktionsgleichung aufgestellt. Anschließend sind zwei Aussagen zu dieser Funktion zu begründen. Gefordert werden die Fähigkeiten, Zusammenhänge zu erkennen, zu verstehen und diese schließlich in einer mathematischen Sprache zu kommunizieren. Während die erste Behauptung rein rechnerisch gezeigt werden muss, ist der Argumentationsweg für die zweite Begründung nicht vorgeschrieben. Für eine „(sinngemäß) korrekte Begründung“ wird laut Lösungsschlüssel (siehe Abbildung 6) jeweils ein Punkt vergeben.

Während der zweite Punkt von (b) wieder eine Verbindung unterschiedlicher Kompetenzen verlangt, ist für die erste Begründung nur eine Fertigkeit gefragt (AG 2.3). Derartige Aufgabenstellungen im Teil 2, die sich nur auf eine einzelne Grundkompetenz beziehen, sind in der Klausur mit einem „A“ gekennzeichnet, welches für „Ausgleichspunkt“ steht. Ausschlaggebend werden diese Ausgleichspunkte bei der Benotung, welche im Kapitel 3.6 genauer erklärt wird.

Ein ganz anderer Inhalt wird in Teilaufgabe (c) thematisiert, nämlich die Berechnung und Deutung des bestimmten Integrals. Im ersten Punkt wird zu einem bestimmten Integral mit gegebenem Wert der passende Parameter gesucht. Dafür werden hauptsächlich operative Fertigkeiten benötigt, welche durch ein elektronisches Hilfsmittel leicht ersetzt werden können. Dann verlangt die Aufgabe nur noch das korrekte Eintippen in den Taschenrechner bzw. Computer. Im Falle eines falschen Ergebnisses wird trotzdem ein Punkt vergeben, wenn der Lösungsansatz richtig ist. (siehe Abbildung 7)

Aus mathematikdidaktischer Sicht ist der zweite Punkt interessanter: Eine Aussage soll auf ihren Wahrheitsgehalt überprüft werden und anschließend muss die Entscheidung begründet werden. Hier ist wieder schlüssiges, mathematisches Argumentieren gefragt. Unterschiedliche Zusammenhänge müssen miteinander verknüpft werden, damit nachvollziehbar begründet werden kann. Dazu wird fundiertes Grundwissen, beispielsweise über die Achsensymmetrie bei Polynomfunktionen oder durch die grafische Deutung des bestimmten Integrals, spezifisch für diese gegebene Funktion angewendet.

Allgemein lässt sich über diese Aufgabe sagen, dass sie ein breites Spektrum an Grundkompetenzen in Verbindung mit der Handlungskompetenz des mathematischen Argumentierens anspricht. Durch den rein innermathematischen Aufgabenkontext werden eher abstrakte Zusammenhänge und Konzepte behandelt, die teilweise aber auch operativ umgesetzt und angewendet werden.

3.4.3. Aufgabenbeispiel: Design-Center Linz

Im Gegensatz zur eben besprochenen Aufgabe ist die Aufgabe „Design-Center Linz" (siehe Abbildung 8 und Abbildung 9) in einen außermathematischen Kontext gebettet.

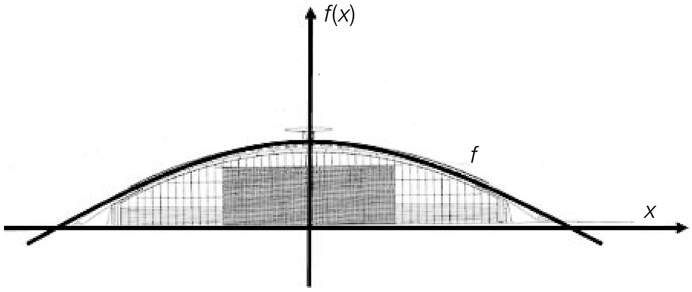
Design-Center Linz

Das Design-Center ist eines der modernen Wahrzeichen der Stadt Linz. Erbaut wurde es von Juli 1991 bis Ende Oktober 1993. Im Jänner 1994 wurde es als Veranstaltungs- und Messezentrum in Betrieb genommen.
Die Träger der Konstruktion lassen sich in guter Näherung durch Parabelbögen beschreiben. Die Spannweite der Bögen beträgt ungefähr 72 m, die maximale Höhe der Bögen liegt bei ca. 13 m. Die Grundfläche des Design-Centers ist ein Rechteck mit 200 m Länge und 72 m Breite.

Bildquelle: http://www.linz.at/images/dc_druck.jpg [09.09.2015]

Aufgabenstellung:

a) Zur Modellierung der parabelförmigen Träger wurde, wie in der folgenden Grafik dargestellt, ein Koordinatensystem durch die Frontansicht des Design-Centers gelegt:



$\boxed{A}$ Geben Sie eine Gleichung der Polynomfunktion zweiten Grades f an, welche diese Parabel beschreibt!

Geben Sie an, was durch $200 \cdot 2 \cdot \int_0^{36} f(x)\,\mathrm{d}x$ in Bezug auf das Design-Center berechnet wird!

b) Die Baukosten für das Design-Center betrugen zur Zeit der Baufertigstellung (1993) umgerechnet ca. € 66 Mio.
Der Baukostenindex ist ein Maß für die Entwicklung derjenigen Kosten, die Bauunternehmern bei der Ausführung von Bauleistungen durch Veränderungen der Kostengrundlagen (Material und Arbeit) entstehen. Er gibt z. B. an, wie stark die Kosten für Hochbauten pro Jahr steigen.
Berechnen Sie unter der Annahme, dass der Baukostenindex für Österreich 3,5 % pro Jahr beträgt, die Höhe der Baukosten für das Design-Center, wenn es erst 10 Jahre später gebaut worden wäre!

Abbildung 8 - Teil 2: Design-Center Linz (i) (BMBF 2016c)

Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über die Entwicklung des Baukostenindex der Gesamtbaukosten für den Wohnhaus- und Siedlungsbau im Zeitraum von fünf aufeinanderfolgenden Jahren.

Jahr	Baukostenindex
2010	+3,2 %
2011	+2,3 %
2012	+2,1 %
2013	+1,9 %
2014	+1,1 %

Quelle: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/wirtschaft/preise/baukostenindex/index.html [30.10.2015]

Jemand interessiert sich für den durchschnittlichen Baukostenindex in diesen fünf Jahren. Zur Abschätzung führt er die folgende Rechnung aus:

$$\frac{3{,}2 + 2{,}3 + 2{,}1 + 1{,}9 + 1{,}1}{5} = 2{,}12$$

Die Vorgehensweise ist für die Berechnung des durchschnittlichen Baukostenindex allerdings nicht ganz korrekt. Geben Sie an, wie diese Berechnung korrekt zu erfolgen hätte!

Abbildung 9 - Teil 2: Design-Center Linz (ii) (BMBF 2016c)

Obwohl die Aufgabe aus nur zwei Teilaufgaben besteht, werden mehr und vielseitigere Grundkompetenzen gefordert als bei der vorangegangenen Aufgabe. Dabei unterscheiden sich die angewendeten Kompetenzen wieder individuell je nach dem gewählten Lösungsverfahren.

„AG 2.3 quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können“

„FA 4.3 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumente ermitteln können“

„FA 5.1 verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können“

„FA 5.2 aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können“

„FA 5.6 die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können“

„AN 4.3 das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können“

„WS 1.1 Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können“

„WS 1.3 statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können“

„WS 1.4 Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können“

Kennzeichnend für kontextbezogene Aufgaben ist der einführende Absatz, hier über das Design-Center in Linz, dessen Baugeschichte und die Form der Konstruktion. Neben den wichtigsten Eckdaten ist auch ein Foto des Design-Centers abgebildet, um die besondere Form der Konstruktion zu veranschaulichen. Ebenso charakteristisch ist die Überbestimmtheit der Angaben.

Für Teilaufgabe (a) müssen deshalb die relevanten Daten aus dem Text erst ermittelt werden, damit eine passende Funktionsgleichung gefunden wird. Neben einem Verständnis grundlegender mathematischer Zusammenhänge, wie zum Beispiel die Auswirkungen von Parametern auf den Graphen einer quadratischen Funktion, ist hier besonders auch die Lesekompetenz gefragt. So müssen für die Aufgabenbearbeitung relevante Informationen erst aus dem Text, dem Bild und der abgebildeten Skizze ermittelt werden. Nachdem das Aufstellen der Funktionsgleichung einer Parabel als wesentliche Grundkompetenz (AG 2.3) gilt, ist diese Aufgabenstellung als „Ausgleichspunkt“ gekennzeichnet.

Der zweite Punkt des Aufgabenpakets (a) fokussiert auf die Fähigkeit, ein bestimmtes Integral in einem gegebenen Kontext deuten zu können. Auch hier müssen die

Schülerinnen und Schüler den einleitenden Text, das Bild und die Skizze für ihre Antwort berücksichtigen. Außerdem wird auch die Volumsformel für gerade Prismen vorausgesetzt, die jedoch in der Formelsammlung (vgl. BMB 2016b) nachgeschlagen werden kann. Eine Berechnung des Werts ist für die Bewertung (siehe Abbildung 10) nicht notwendig.

Design-Center Linz

a) Lösungserwartung:

$$f(x) = -\frac{13}{1\,296} \cdot x^2 + 13$$

oder:

$$f(x) \approx -0{,}01 \cdot x^2 + 13$$

Durch den angegebenen Term wird das (umbaute) Volumen des Design-Centers berechnet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für das Aufstellen einer korrekten Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung.

b) Lösungserwartung:

2003 würden die Baukosten für das Design-Center ca. € 93,1 Mio. betragen.

Korrekte Vorgehensweise:
$K \cdot 1{,}032 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}019 \cdot 1{,}011 = K \cdot a^5 \Rightarrow$
$a = \sqrt[5]{1{,}032 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}019 \cdot 1{,}011} \Rightarrow a \approx 1{,}02118$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung.
  Toleranzintervall: [€ 93 Mio.; € 94 Mio.]
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Vorgehensweise. Die numerische Berechnung des Wertes muss dabei nicht erfolgen.

Abbildung 10 - Teil 2: Design-Center Linz - Lösungserwartung (BMBF 2016d)

Mit einem weiteren kurzen kontextbezogenen Absatz wird Teilaufgabe (b) eingeleitet. Wegen des etwas unübersichtlichen Layouts in diesem Abschnitt besteht die Gefahr, den Übergang von Angabe zu Aufgabenstellung zu übersehen. So kann es leicht passieren, dass die erste Aufgabenstellung „Berechnen Sie...“ (siehe Abbildung 8) überlesen wird und gleich zur nächsten übergegangen wird, wenn jemand den Text nur überfliegt.

Doch um den durchschnittlichen Baukostenindex für den zweiten Punkt richtig ermitteln zu können, sollte man sich schon zuvor im ersten Unterpunkt für ein exponentielles Modell entschieden haben. Ansonsten wird es schwierig, die Unangemessenheit des arithmetischen Mittels nachvollziehen zu können. Generell ist die Anforderung, hier ein geometrisches Mittel herzuleiten, auch wenn es nicht beim Namen genannt werden muss, eher komplex und geht eindeutig über die wesentlichen Bereiche der Grundkompetenzen hinaus. Nachdem der Teil 2 aber die vertiefende Anwendung und Vernetzung von Grund- und Reflexionswissen fordert, kann diese Aufgabenstellung dennoch gerechtfertigt werden.

Insgesamt kann die Aufgabe „Design-Center Linz“ als charakteristische Teil 2-Aufgabe bezeichnet werden. Erwähnenswert ist das Vorkommen aller vier Inhaltsbereiche und deren Verknüpfung mit einem realitätsbezogenen Kontext, welcher auf vielerlei Art bearbeitet wird. Die Aufgabe prüft sowohl grundlegende Kompetenzen als auch darüberhinausgehende Fähigkeiten und Fertigkeiten.

3.4.4. Anmerkungen zum Teil 2

Erfreulicherweise entsprechen die Aufgaben im Teil 2 größtenteils den Anforderungen der neuen Aufgabenkultur (siehe Kapitel III): Sie verlangen ein ganzheitliches, vernetzendes Denken, sind anwendungsorientiert und stellen oft auch einen Realitätsbezug her. Bis zu einem gewissen Grad fordern sie sogar Modellierungs- und Problemlösekompetenzen.

Leider bedingen derartige Aufgabenformate häufig einige Schwierigkeiten für Schülerinnen und Schüler, welche im Kapitel III thematisiert werden. Kandidatinnen und Kandidaten mit einer größeren Allgemeinbildung und einer höheren Lesekompetenz sind beim Arbeiten mit Kontexten klar im Vorteil. So bilden lange, einleitende Texte oft eine Hürde für Schülerinnen und Schüler mit schwächeren Deutschkompetenzen. (vgl. BIFIE 2013c)

3.5. Technische Hilfsmittel

Ab dem Haupttermin 2017/18 ist der Einsatz höherer technischer Hilfsmittel bei der Reifeprüfung in Mathematik verpflichtend. Die Mindestanforderungen an die elektronischen Hilfsmittel sind dabei grundlegende Funktionen zum Lösen von

Gleichungen und Gleichungssystemen, zur grafischen Darstellung von Funktionen, zur Integration, zur Ermittlung von Ableitungs- und Stammfunktionen und zur Unterstützung bei stochastischen Verfahren. (vgl. Prüfungsordnung AHS i.d.g.F.)

Der Einsatz technischer Hilfsmittel unterstützt das Konzept der Reifeprüfung mit dem Ziel, Reflexionswissen zu fördern. In der heutigen Gesellschaft mit dem aktuellen Stand der Technik ist es nicht mehr notwendig, aufwändige Rechenoperationen mechanisch durchzuführen. Wie im Kapitel 3.1 erläutert wird, steht mittlerweile das Verstehen und Kommunizieren im Mittelpunkt. Die Technik übernimmt langwierige, oft fehleranfällige Lösungsprozesse und ermöglicht einen Fokus auf die wesentlichen Aspekte der Aufgabenstellungen, bei denen häufig argumentiert und interpretiert werden muss. (vgl. BIFIE 2013a)

3.6. Beurteilung der Reifeprüfung in Mathematik

Das Beurteilungsschema der Mathematikklausur basiert auf den Beurteilungsstufen der geltenden Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO §14 i.d.g.F.) und wurde an die Gegebenheiten der Reifeprüfung angepasst. So sind unter den Teil 1-Aufgaben, welche ausschließlich Grundkompetenzen überprüfen, die „wesentliche Bereiche“ des Erforderten zu verstehen. Auch die Aufgaben im Teil 2, die nur eine einzelne Grundkompetenz behandeln, gehören zu diesem grundlegenden Bereich und werden Ausgleichspunkte genannt. Dahingegen wird mit der Anwendung und Vernetzung von Grundkompetenzen im Teil 2 das „weit über das Wesentliche Hinausgehende“ geprüft. (vgl. BIFIE 2013a)

Um mit einem „Genügend“ benotet zu werden, müssen laut LBVO die Anforderungen der Aufgaben „in den wesentlichen Bereichen überwiegend erfüllt“ werden. Demnach müssen die Kandidatinnen und Kandidaten den überwiegenden Anteil der Aufgaben im Teil 1 beziehungsweise der Ausgleichspunkte richtig lösen, um die Reifeprüfung zu bestehen.

Für ein „Befriedigend“ müssen die „wesentlichen Bereiche zur Gänze erfüllt“ sein. Also sollten alle Aufgaben im Teil 1 richtig gelöst werden. Fehlende Punkte können durch die ausgewiesenen Ausgleichspunkte aus dem Teil 2 ergänzt werden.

Ein „Gut“ kann nur erreicht werden, wenn ein darüber „hinausgehendes Ausmaß“ der Aufgaben aus Teil 1 und Teil 2 gelöst werden konnte.

Nur wenn über die Anforderungen „weit hinausgehende“ Leistungen erbracht werden, also fast alle Aufgaben richtig gelöst werden, wird die Klausurarbeit mit einem „Sehr gut“ benotet. (vgl. BIFIE 2015)

In *Abbildung 11* wird das Bewertungsmodell der Reifeprüfung in Mathematik veranschaulicht.

Schließlich soll auch noch Kritik an diesem Beurteilungsschema ausgesprochen werden: Durch dieses System verlieren für viele Kandidatinnen und Kandidaten die Teil 2-Aufgaben an Bedeutung. Denn theoretisch kann sogar ein „Befriedigend“ erreicht werden, ohne eine einzige Teil 2-Aufgabe gelöst zu haben. Umgekehrt kann auch die volle Punktezahl im Teil 2 kein „Nicht Genügend“ verhindern, wenn im Teil 1 nicht ausreichend Punkte erzielt wurden. Die Gewichtung der einzelnen Aufgabenstellungen und die Auswahl der Ausgleichspunkte ist für viele Schülerinnen und Schüler schwer nachvollziehbar und wird besonders in den Medien stark kritisiert. (z.B. Neuhauser 2017)

		Typ-1-Aufgaben		Typ-2-Aufgaben		
Stufen – verbale Beschreibung		„Schülerinnen und Schüler verfügen über ein mathematisches Grundwissen, welches durch einen Katalog von Grundkompetenzen festgelegt ist, und das sie in einer elementaren, für jeweils eine bestimmte Grundkompetenz (proto-)typischen Anwendungs- bzw. Kommunikationssituation (direkt) einsetzen können. Besondere Eigenständigkeit in der Anwendung, Reflexion und Vernetzung dieses Grundwissens ist dabei nicht erforderlich."		Einzelne Komponenten aus Typ-2-Aufgaben werden zusätzlich zur Überprüfung der Grundkompetenzen herangezogen.	„Schülerinnen und Schüler können ihr mathematisches Grundwissen in komplexeren und für sie ungewohnten (neuartigen) Anwendungs- und Kommunikationssituationen eigenständig und reflektiert einsetzen, wobei auch die Vernetzung mehrerer Grundkompetenzen oder die Reflexion über (die) Grundkompetenz(en) erforderlich sein kann."	
graduelle Abstufungen		wesentliche Bereiche		über das Wesentliche		
		„überwiegend erfüllt"	„zur Gänze erfüllt"	„hinausgehend"		„weit hinausgehend"
Genügend *	entw.					
	oder	Defizit				
Befriedigend *	entw.					
	oder	Defizit			„hinausgehend"	
Gut *	entw.				„hinausgehend"	
	oder	Defizit			„hinausgehend"	
Sehr gut *	entw.				„hinausgehend"	„weit hinausgehend"
	oder	Defizit			„hinausgehend"	„weit hinausgehend"

* Es werden die jeweiligen Minimalvarianten dargestellt.

Abbildung 11 - Beurteilungsschema (BIFIE 2015)

Hinsichtlich der Formulierung ist hervorzuheben, dass eine enge Abstimmung zwischen Vertreterinnen und Vertretern des Bundesinstituts für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) und des zuständigen Bundesministeriums (bmbf) stattgefunden hat. In der vorliegenden Formulierung wurde das zuvor ausgeführte Konzept als Grundlage vollständig berücksichtigt. Anhand der entsprechenden Formulierungen ist deutlich erkennbar, welches mathematische (Grund-)Wissen bzw. welches Vernetzungs- oder Reflexionswissen über mathematisches (Grund-)Wissen bei Schülerinnen und Schülern ausgebildet ist.

III. Eine neue Aufgabenkultur

In den vergangenen Jahren rückte der Mathematikunterricht und dessen (Miss-) Erfolge in Österreich wieder stärker in den Fokus der Öffentlichkeit (z.B. Neuhauser 2017). Ausgelöst wurde diese neue Aufmerksamkeit nicht nur durch das mäßige Abschneiden deutschsprachiger Schülerinnen und Schüler bei internationalen Vergleichsstudien wie PISA und TIMSS, sondern auch durch die teilweise ernüchternden Ergebnisse der österreichischen Bildungsstandards und der standardisierten, kompetenzorientierten Reifeprüfung.

Beispielsweise sind seit Einführung der neuen Reifeprüfung die meisten „Nicht genügend“ auf die Klausurarbeiten in Mathematik vergeben worden. Beim Haupttermin 2016/17 in AHS wurden 11,8% aller Klausurarbeiten negativ beurteilt. Im Vergleich dazu waren es in Englisch 7,4% und in Deutsch nur 4,6%. Obwohl diese Werte bereits niedriger sind als jene aus den Vorjahren, sind sie noch nicht zufriedenstellend. (vgl. BMB 2017b)

Im Zuge dieser Unzufriedenheit wächst das Interesse der Öffentlichkeit an einem Wandel des Mathematikunterrichts. Mathematikdidaktiker liefern dafür vielfältige Vorschläge, wie erfolgreicher Unterricht aussehen kann. Im Fokus solcher fachdidaktischen und bildungstheoretischen Anregungen stehen meist die Begriffe „Kompetenzorientierung“, Anwendungsorientierung“, „Vernetzung“ und „Problemlösen“.

Ableitinger (2011) schreibt beispielsweise:

> *„Ein Ziel des Mathematikunterrichts muss aber das Erlangen der Fähigkeit sein, mit den gelernten Inhalten flexibel umzugehen, passende Lösungsstrategien zu unterschiedlichen Aufgabentypen auszuwählen und Zusammenhänge zwischen Themengebieten zu erkennen und zu nutzen.“*

Wie bereits im Kapitel II.2 „Bildungstheoretische Grundlagen der Reifeprüfung“ thematisiert, wird bei der neuen Reifeprüfung kein reines Grundwissen abgeprüft. Die Reifeprüfung setzt viel eher die Fähigkeit voraus, fundamentale Kompetenzen in verschiedenartigen Kontexten anzuwenden und zu vernetzen. Dafür bedarf es aber neuer Aufgabenformate, die derartige Fertigkeiten fordern und fördern.

Auf den folgenden Seiten wird zuerst das Konzept des vernetzenden Mathematikunterrichts näher erläutert. Anschließend soll das Konzept realitätsbezogener Aufgaben näher beleuchtet werden, zu denen auch die Teil 2-Aufgaben der Klausurarbeit in Mathematik zählen, welche ebendieses Vernetzen und Anwenden von Grundkompetenzen verlangen. Im Zuge dessen werden neben Lösungsstrategien auch Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung solcher Aufgabenstellungen diskutiert. Schließlich werden Ideen zur Förderung dieser Fertigkeiten im Unterricht behandelt.

1. Vernetzender Mathematikunterricht

In seinen „Studien zur Bildungstheorie und Didaktik" hebt Klafki (1985) vier fundamentale Einstellungen und Fähigkeiten hervor, die für eine zeitgemäße, umfassende Allgemeinbildung notwendig sind: Kritikbereitschaft und -fähigkeit, Argumentationsbereitschaft und -fähigkeit, Empathie und vernetzendes Denken.

Letzteres erachtet Klafki (1985) in der heutigen vielfältigen Gesellschaft mit ihren dynamischen Wirkungszusammenhängen als besonders wichtig. Alles sei mit allem verknüpft. Das erfordere ein Verständnis der häufig weitreichenden Auswirkungen einzelner Entscheidungen. Deshalb seien die Unterrichtsweisen, in denen jegliche Themengebiete separat voneinander behandelt werden, veraltet und überholt. Aber diese vier Fähigkeiten können nicht isoliert gelehrt werden, sondern müssen in Verbindung mit fachlichen Inhalten vermittelt werden. Schülerinnen und Schülern solle damit ermöglicht werden, die einzelnen Wissensbausteine miteinander verknüpfen und hinterfragen zu können.

Wenn von „Vernetzung" gesprochen wird, muss die Zweideutigkeit dieses Begriffs berücksichtigt werden. Einerseits kann es sich um den Prozess des Vernetzens, andererseits um das resultierende Produkt handeln. Während das Produkt einen Zustand beschreibt, bei dem Verbindungen zwischen Themen, Ideen und Begriffen, aber auch Beispielen und Kontexten hergestellt wurden, stellt der Prozess das Erkennen, Entdecken und Konstruieren dieser Zusammenhänge dar. (vgl. Hirscher 2010)

Ein „schüleraktives Zusammenhangsdenken" kann im logischen, wie auch im emotionalen Kontext stattfinden. Folglich kommt es zu vielen, individuellen Verbindungen von Kenntnissen und Fähigkeiten in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler. Dabei werden ihre Netze ständig erweitert und ausgebaut. Wird individuelle

Vernetzung in beiderlei Sinne als Unterrichtsziel verfolgt, kann von „vernetzendem Unterricht“ gesprochen werden. (vgl. Hirscher 2010)

Gerade im Mathematikunterricht sind Vernetzungen essenziell, da die Mathematik allein schon ein in sich vernetztes System darstellt. Schritt für Schritt baut sie sich auf einem Satz von Axiomen auf und jeder weitere Satz muss mit Hilfe von bereits Bekanntem bewiesen werden. In diese „deduktiv geordnete Welt“ müssen die Jugendlichen erst hineinwachsen. Dabei ist es förderlich, wenn sie nicht vor vollendete Tatsachen gestellt werden, sondern selbst die Zusammenhänge entdecken und begreifen dürfen. (vgl. Ableitinger 2011)

Dafür braucht es eine Lehrperson, die den Schülerinnen und Schülern eine geeignete Lernumgebung bietet. Der Unterricht benötigt einen roten Faden und klare Ziele. Bei größeren Unterrichtszielen helfen kleinere, schneller erreichbare Meilensteine, um den Fokus nicht zu verlieren. Während des Prozesses hilft es, die Vernetzungen erst in kleineren Welten aufzubauen und erst in der Reflexionsphase weiterreichende Verbindungen herzustellen. Ziel ist es auch, die Vernetzungen möglichst dicht aufzubauen. Ein Begriff sollte also auf vielfältige Art und Weise mit anderen Inhalten und Kontexten verknüpft werden. So kann ein stabiles, mathematisches Netzwerk aufgebaut werden. (vgl. Hirscher 2010)

Im Mathematikunterricht können unterschiedliche Arten des Vernetzens beobachtet werden. Grob kann man zwischen innermathematischen Zusammenhängen und Verknüpfungen von innermathematischen mit außermathematischen Inhalten unterscheiden. (vgl. Brinkmann et al. 2011)

Brinkmann (2007) unterteilt die innermathematische Vernetzung noch einmal in eine fachsystematische und eine anwendungsbezogene. Unter ersterer versteht man die Strukturierung und Kategorisierung mathematischer Inhalte. Gemeint ist zum Beispiel die Verbindung: „Das Addieren ist eine Operation aus dem Bereich der Arithmetik.“ Es werden also Ordnungsrelationen zwischen mathematischen Inhalten hergestellt, wie sie unter anderem auch im Inhaltsverzeichnis von Schulbüchern zu finden sind.

Dagegen handelt es sich bei der anwendungsbezogenen Vernetzung um die Anwendung mathematischer Inhalte zur Bearbeitung von Aufgaben. Dabei werden beispielsweise Modelle, Theoreme oder Abläufe miteinander verknüpft, um der Lösung eines Problems näherzukommen. (vgl. Brinkmann et al. 2011)

Das Vernetzen von innermathematischen mit nichtmathematischen Objekten kann in vielerlei Hinsicht erfolgen. Allen voran geht hier die realitätsbezogene Anwendung von mathematischen Inhalten. Dabei werden Probleme aus der Realität in mathematische Modelle übersetzt, damit sie gelöst werden können. Anschließend wird mit innermathematischen Zusammenhängen gearbeitet, bis ein Ergebnis auf der Modellebene vorliegt. Durch das Validieren und Interpretieren dieses Resultats wird es wieder in einen außermathematischen Kontext übersetzt. (vgl. Blum 1985)

Des Weiteren können Verknüpfungen von inner- mit außermathematischen Objekten für lernpsychologische Prozesse genutzt werden. Bei der sogenannten „mnemotechnischen Vernetzung" werden mathematische Inhalte mit Merkhilfen wie zum Beispiel Eselsbrücken oder Merksätzen verbunden. Lerninhalte werden mit Kontexten und Emotionen verknüpft und beeinflussen damit das Speichern dieser Materie. Beim Erlernen neuer Informationen werden diese in das bestehende Netz eingeordnet. Altes, ähnliches Wissen wird erweitert, abgeändert oder sogar ersetzt. In diesem Zusammenhang spricht man von „vertikaler Vernetzung". (vgl. Brinkmann 2002)

In den vergangenen Jahren ist das Ansehen des vernetzenden Mathematikunterrichts gewachsen. Auch in Schulbüchern sind mittlerweile vermehrt vernetzende Elemente vorzufinden, wie zum Beispiel alltagsbezogene Einleitungen, Zusammenfassungen am Kapitelende, kapitelübergreifende Aufgaben oder anwendungsbezogene Aufgaben, die unterschiedliche Kompetenzen verlangen. (vgl. Brinkmann et al. 2008)

2. Realitätsbezogene Aufgaben

Seit über viertausend Jahren beschäftigen sich Mathematikerinnen und Mathematiker mit realitätsbezogenen Aufgaben. Dass diese mit so unterschiedlichen Namen wie Textaufgaben, Sachaufgaben, Problemaufgaben oder Denkaufgaben bezeichnet werden, deutet bereits auf ihre Diversität hin. Dementsprechend vielfältig sind die Definitionen und Auslegungen dieses Aufgabentyps:

Lave (1992) beschreibt sie zum Beispiel als Fragen zu einer Realsituation, die von der Problemlöserin oder dem Problemlöser mittels mathematischer Operationen unter Einsatz numerischer Informationen beantwortet werden müssen. Währenddessen charakterisiert sie Vorhölter (2009) als offene, aber lösbare authentische Aufgabenstellungen, die einen bestimmten Teil der Realität beleuchten.

Obwohl sie im alltäglichen Mathematikunterricht und bei standardisierten Tests sehr präsent sind, bereiten diese Aufgaben vielen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten: Im Vergleich zu rein numerischen Aufgaben werden verwandte Textaufgaben um bis zu dreißig Prozent weniger wahrscheinlich gelöst. (vgl. Carpenter et. al, 1980) Dies könnte unter anderem an dem großen Umfang an Fähigkeiten liegen, die zur erfolgreichen Aufgabenbearbeitung notwendig sind. Dazu zählen nach Lorenz (1998) neben einem ausgebildeten Zahlenverständnis und dem Beherrschen von Rechenoperationen, ein flexibler Umgang mit Größen und Maßen und das Erfassen von Zahlenbeziehungen wie auch eine gewisse Abstraktionsbereitschaft und ein reflektierendes Anwenden von Allgemeinbildung. Zusätzlich ist auch eine ausgeprägte Lesekompetenz unverzichtbar, um Textaufgaben erfolgreich lösen zu können.

Weil es sich eben um einen so vielseitigen und umfangreichen Aufgabentyp handelt, setzt sich die Mathematikdidaktik auch heute noch intensiv mit derartigen Aufgaben auseinander. In den folgenden Teilen wird versucht, realitätsbezogene Aufgaben zu kategorisieren und ihr Potential zu diskutieren. Anschließend werden mögliche Schwierigkeiten beleuchtet, die bei der Aufgabenbearbeitung auftreten können.

2.1. Kategorisierung realitätsbezogener Aufgaben

In der Literatur wird weitgehend zwischen drei grundlegenden Typen realitätsbezogener Aufgaben unterschieden: eingekleidete Aufgaben, Textaufgaben und Sachaufgaben. (vgl. Greefrath et al. 2013, Schneeberger 2009, Jordan 2011) Für die Kategorisierung wird die Rolle des Sachkontextes zur Lösung der Aufgabe in Betracht gezogen:

Eingekleidete Aufgaben haben keinen wirklichen Realitätsbezug. Ihr Sachkontext ist an sich belanglos und beliebig austauschbar. Im Fokus dieser Aufgaben steht das Anwenden und Festigen mathematischer Verfahren und Begriffe. Dabei signalisieren Schlüsselwörter das erforderte Rechenverfahren, ohne dass über den Kontext nachgedacht werden muss. Beispielsweise erfordert das Wort „weniger" meistens eine Subtraktion. Demnach geht es nicht um das Lösen eines realen Problems, sondern um das Stabilisieren formaler Mathematik anhand konkret fassbarer Beispiele. (vgl. Schneeberger 2009)

Obwohl bei Textaufgaben der sachliche Kontext wichtiger ist als bei eingekleideten Aufgaben, wirken die Realbezüge oft noch immer künstlich. Das liegt daran, dass die Realität häufig stark vereinfacht wird, damit eindeutige Angaben mit eindeutigen

Lösungen konstruiert werden können. Beim Bearbeiten der Aufgabe wird verlangt, die Informationen aus dem Text in mathematische Formulierungen zu übersetzen. Zum Abschluss sollen die mathematischen Ergebnisse für den jeweiligen Sachkontext interpretiert und die ursprüngliche Fragestellung beantwortet werden. Im Vordergrund steht die Förderung mathematischer Fähigkeiten und kein reflektierendes Nachdenken über die Realsituation. (vgl. Greefrath 2009)

Während bei Textaufgaben der Sachkontext zum Veranschaulichen mathematischer Inhalte verwendet wird, steht die Auseinandersetzung mit Realsituationen bei Sachaufgaben im Vordergrund. Hier werden Situationen des täglichen Lebens oder aus der weiteren Umwelt bearbeitet, genauso wie fächerübergreifende und auch rein mathematische Themen. In der Aufgabe werden authentische Fragen zu realen Daten gestellt. Häufig sind die Angaben unter- oder überbestimmt. Es müssen also erst die relevanten Informationen eingeholt werden, bevor weiter vorgegangen wird. Die oft offenen Aufgabenstellungen der Sachaufgaben ermöglichen verschiedene Rechenwege und individuelle Lösungen für komplexe Probleme. Neben der Umwelterschließung durch mathematische Verfahren ist auch der Erwerb einer mathematischen Modellierungskompetenz Ziel solcher Aufgaben. (vgl. Jordan 2011)

Tabelle 2 fasst die Charakteristika dieser drei Aufgabentypen nochmals zusammen:

	Eingekleidete Aufgabe	**Textaufgabe**	**Sachaufgabe**
Schwerpunkt	rechnerisch	mathematisch	sachbezogen
Ziel (siehe 2.2.)	Anwendung und Übung von Rechenfertigkeiten	Förderung mathematischer Fähigkeiten	Umwelterschließung mit Hilfe von Mathematik
Darstellung	in einfache Sachsituationen eingekleidet	in (komplexere) Sachsituationen eingekleidet	reale Daten und Fakten bzw. offene Angaben
Kontext	kein wirklicher Realitätsbezug	kein wirklicher Realitätsbezug	echter Realitätsbezug
Tätigkeiten	Rechnen	Übersetzen, Rechnen, Interpretieren	Recherchieren, Vereinfachen, Mathematisieren, Rechnen, Interpretieren, Validieren

Tabelle 2 - Aufgabentypen (vgl. Greefrath et al. 2013)

Außerdem können Aufgaben auch nach ihrem Schwierigkeitsgrad kategorisiert werden. Ob es sich um eine „leichte“ oder eine „schwierige“ Aufgabe handelt, kann dabei aber nicht allgemein abgegrenzt werden. Der Schwierigkeitsgrad ist von vielen verschiedenen Merkmalen und besonders auch individuell von den Lernenden und dem vorangegangenen Unterricht abhängig. Demnach sollte beim Stellen einer Aufgabe stets die Ausgangslage der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt werden. Sonst kann eine Aufgabe schnell unter- oder überfordernd sein. (vgl. BIFIE 2013c)

Bruder und Collet (2011) teilen unterschiedliche Merkmale des Anforderungsniveaus einer Aufgabe vier Parametern zu: Formalisierungsgrad, Komplexitätsgrad, Bekanntheitsgrad und Ausführungsgrad. Mit dem Formalisierungsgrad wird der Aufwand erfasst, die Aufgabenstellung zu verstehen und gegebenenfalls in die mathematische Sprache zu übersetzen. Der Komplexitätsgrad berücksichtigt die kognitiven Anforderungen für die Lösung der Aufgabe. Beispielsweise wird abgeschätzt, ob und wie sehr vernetzt werden muss oder wie viele Schritte zur Lösung notwendig sind. Der Bekanntheitsgrad ist abhängig von der Aufgabenbearbeiterin bzw. dem Aufgabenbearbeiter und dem vorangegangenen Unterricht. Wurden vorher bereits ähnliche Aufgaben gelöst, können auch sehr komplexe Probleme routinemäßig gelöst werden. Auch die Intensivität, mit der die erforderlichen Kompetenzen eingeübt wurden und wie lange das letzte Üben zurückliegt, spielen hier eine wichtige Rolle. Schließlich bezieht sich der Ausführungsaufwand auf den Rechenaufwand und damit auch auf das Fehlerpotential einer Aufgabe. Letzteres wird mittlerweile stark durch die aktuelle Technologie verringert.

Betrachtet man den Teil 2 der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik, so kann man die darin gestellten Aufgaben größtenteils als Textaufgaben beschreiben. Sie werden häufig in komplexere Kontexte gesteckt und haben hauptsächlich das Übersetzen, Berechnen und Interpretieren zum Ziel. Zusätzlich wird auch regelmäßig die Fähigkeit des Begründens und mathematischen Argumentierens verlangt. Die Aufgaben lassen sich ebenfalls nach diesen vier Parametern charakterisieren. Hier sei jedoch vorangestellt, dass die Aufgaben sehr unterschiedlich aufgebaut sind und sich keine allgemeingültige Kategorisierung aufstellen lässt.

In Hinblick auf den Formalisierungsgrad kann beobachtet werden, dass die meisten Aufgaben einen kontextbezogenen Einleitungstext haben. Oft handelt es sich um überbestimmte Aufgaben, bei denen erst die relevanten Informationen erkannt werden müssen. Der Mathematisierungsaufwand variiert dabei von Aufgabe zu Aufgabe. Betrachtet man die bereits vorgestellten Teil 2-Aufgaben (siehe II.3.4.2 und II.3.4.3), so lassen sich die starken Unterschiede in dieser Hinsicht gut erkennen. Während die Aufgabe II.3.4.2 „Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen“ rein innermathematischen Kontext hat und die Angabe größtenteils bereits in die mathematische Sprache übersetzt wurde, müssen aus der Aufgabe II.3.4.3 „Design-Center Linz“ erst die wichtigen Informationen aus dem Text herausgefiltert und die mathematischen Zusammenhänge gefunden werden. Hier muss zum Beispiel bei der Teilaufgabe II.3.4.3(b) erst das passende Modell ausgewählt werden, um überhaupt eine Formel aufstellen zu können.

Der Komplexitätsgrad von Teil 2-Aufgaben hat eine noch viel größere Spannweite. Während bei Ausgleichspunkten nur eine einzelne Kompetenz abgeprüft wird, müssen die Kandidatinnen und Kandidaten für andere Punkte vernetzendes Reflexionswissen anwenden. Auch die Anzahl der auszuführenden Schritte im Lösungsprozess ist sehr unterschiedlich, obwohl jede Teilaufgabe nur je zwei Punkte wert ist. So sind beispielsweise bei Teilaufgabe II.3.4.2(a) mehrere Teilschritte notwendig, um zur Lösung zu kommen. Dahingegen ist Teilaufgabe II.3.4.2(c) mit Technologie relativ rasch lösbar. Bei dieser Aufgabe ist generell ein ganzheitlich vernetzendes Denken grundlegend, womit viele, teils umständliche Rechenschritte erspart werden können. Währenddessen sind bei den Teilaufgaben von II.3.4.3 hauptsächlich einzelne Grundkompetenzen gefragt, die in wenigen Schritten angewendet werden können.

Wie bereits erwähnt, hängt der Bekanntheitsgrad stark von den Kompetenzen, Aufgaben und Kontexten, die im Unterricht behandelt wurden, ab. Besonders vorteilhaft ist hier ein umfangreiches Allgemeinwissen, womit die Aufgabenkontexte nachvollziehbarer werden. Demnach könnte sich eine Kandidatin beziehungsweise ein Kandidat, die oder der das Design-Center Linz bereits kennt, bei Aufgabe II.3.4.3 möglicherweise mehr unter der speziellen Gebäudeform vorstellen. Das Foto in der Angabe sollte diesen Vorteil aber relativieren. Auch die eher spezifische reziproke quadratische Gleichung in Teilaufgabe II.3.4.2.(a) könnte vielen unbekannt sein. Doch auch hier wird kein weiteres Detailwissen vorausgesetzt, um die Aufgabe erfolgreich zu bearbeiten. Neben den Kontexten der Aufgaben, deren Bekanntheitsgrad stark variieren kann, trägt auch die Vertrautheit und das routinierte Arbeiten mit den gefragten Kompetenzen beachtlich zum Lösungserfolg bei. Obwohl der Bekanntheitsgrad individuell stark abweicht, kann vorausgesetzt werden, dass die bei den beiden besprochenen Aufgaben verlangten Kompetenzen im Laufe des Oberstufenunterrichts relativ gut gefestigt werden. Zum Beispiel sollten quadratische Gleichungen und Funktionen bereits ab der fünften Klasse immer wieder thematisiert werden. Für Aufgabe II.3.4.2 ist es besonders vorteilhaft, wenn im Unterricht das mathematische Argumentieren und Begründen regelmäßig trainiert wurde, da drei von sechs Punkten für korrekte Begründungen gegeben werden. Eine Ausnahme bezüglich Bekanntheitsgrad bildet der zweite Punkt von Teilaufgabe II.3.4.3(b), bei dem das geometrische Mittel gesucht wird. Nachdem dieses weder dezidiert im Lehrplan steht, noch in der Formelsammlung (vgl. BMB 2016b) zu finden ist, kann davon ausgegangen werden, dass eher wenig Schülerinnen und Schüler mit diesem Mittelwert vertraut sind. Darum ist zu erwarten, dass dieser Punkt nicht so leicht erreicht wird wie andere Punkte.

Dadurch, dass bei der Reifeprüfung verstärkt auf Technologieeinsatz gesetzt wird, nimmt der Ausführungsaufwand erheblich ab. Schließlich soll die Reifeprüfung keine unreflektierten Algorithmen abprüfen, sondern vernetzte und angewandte Kompetenzen. So ist auch bei den beiden diskutierten Aufgaben der Ausführungsgrad durchwegs geringer, wenn die Technologie gekonnt eingesetzt wird. Beispielsweise vermeidet man dadurch bei Teilaufgabe II.3.4.2(c) das fehleranfällige Berechnen eines bestimmten Integrals. Doch die technischen Hilfsmittel ersparen den Kandidatinnen und Kandidaten nicht alle Ausführungsschritte. Insbesondere Aufgabe II.3.4.2 kann sehr arbeitsaufwändig sein, wenn nicht gekonnt vernetzt wird.

Im Allgemeinen lässt sich demnach beobachten, dass Teil 2-Aufgaben ausgesprochen heterogen bezüglich ihres Anforderungsniveaus sind. Die einzelnen Punkte sind dabei unterschiedlich aufwändig zu erreichen.

2.2. Potentiale realitätsbezogener Aufgaben

Die Funktionen und Ziele realitätsbezogener Aufgaben variieren entsprechend ihrer Komplexität. Je nachdem wie authentisch und anwendungsbezogen die Aufgabe ist, werden bestehende Wissensstrukturen aktiviert, umstrukturiert und erweitert. Durch das Ausführen und Anwenden von Mathematik entstehen entdeckende und vernetzende Lernprozesse. (vgl. Siller 2013) Mittels des Realitätsbezuges kann an Erfahrungen der Lernenden angeknüpft werden. Die Aufgaben veranschaulichen und verdeutlichen mathematische Prozesse und Zusammenhänge. Dadurch kann ein umfassendes und langfristiges Verständnis erzielt werden. (vgl. Vorhölter 2009)

Dabei wird nicht nur Fachwissen angestrebt, sondern auch Allgemeinbildung und damit auch Emanzipation. Denn erst durch Anwendung und kritische Reflexion ihres Wissens können die Schülerinnen und Schüler als mündige Bürgerinnen und Bürger handeln. Die Aufgaben sollen zum Verstehen ihrer Umwelt befähigen. (vgl. Schneeberger 2009)

Gleichzeitig werden die Jugendlichen durch derartige Aufgaben im Problemlösen trainiert. Die hier erworbenen Fertigkeiten helfen ihnen jedoch nicht nur beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben, sondern auch im Alltag. Sie lernen, Problemen strukturiert und systematisch zu begegnen. Es wird trainiert, die Realität zu beobachten und kritisch zu hinterfragen. (vgl. Greefrath et al. 2013)

Ein weiteres Potential der realitätsbezogenen Anwendung von mathematischem Wissen ist die Möglichkeit, dem Mathematikunterricht Sinn zu geben. Bei angemessenem Einsatz der Aufgaben erkennen Schülerinnen und Schüler, dass Mathematik auch außerhalb der Schule nützlich sein kann. So kann eine intrinsische Motivation zum mathematischen Denken und Handeln angeregt werden. (vgl. Verschaffel 2000)

Jedoch erfüllen realitätsbezogene Aufgaben nicht automatisch all diese Funktionen. Handelt es sich beispielsweise nur um eingekleidete Aufgaben, findet im Allgemeinen kaum eine bis gar keine Reflexion statt. Die Lernenden konzentrieren sich auf Signalwörter im Text, die gewisse Algorithmen auslösen. Dabei werden kritisches Denken und ProblemLösungsstrategienn nahezu gänzlich ignoriert. Versucht man aber die Aufgaben sehr nahe an der Realität zu gestalten, sind sie schnell zu komplex und für viele Schülerinnen und Schüler demotivierend. (vgl. Schneeberger 2009)

Daher ist es wichtig, eine Balance zu finden, die an die Kompetenzen der Lernenden angepasst ist. In dieser Hinsicht können differenzierende Aufgabenstellungen förderlich sein: Einerseits braucht es simplere Aufgaben zum Üben und Festigen des Gelernten und andererseits komplexere Probleme, die zum Hinterfragen und Reflektieren anregen sollen. (vgl. Humenberger 2013)

2.3. Schwierigkeiten bei der Aufgabenbearbeitung

Die Schwierigkeiten, denen Schülerinnen und Schüler beim Arbeiten mit realitätsbezogenen Aufgaben begegnen, sind vielseitig. In Bezug auf diese Aufgabenart beschreiben Newell und Simon (1972) Schwierigkeiten als Hürden, welche die Lösungsfindung erschweren. Diese Barrieren können in jeder Phase des Lösungsprozesses angetroffen werden.

Bereits am Anfang treten häufig Schwierigkeiten auf, nämlich in Verbindung mit der Lesekompetenz. Um überhaupt die Aufgabenstellung verstehen zu können, muss erst einmal der Text begriffen werden. Dies stellt für viele Jugendliche ein Problem dar. Aufgrund von Sprachbarrieren, aber auch wegen der Komplexität und der Länge mancher Einleitungen können sie aus dem Text nicht die relevanten Informationen und Zusammenhänge erfassen. (vgl. Jordan 2011)

Auch in den nächsten Schritten, dem Übersetzen der Angabe in mathematische Begriffe und Beziehungen und dem Auswählen eines Lösungsweges, kommt es zu Problemen. Häufig achten die Schülerinnen und Schüler beim Mathematisieren nur auf Schlüssel- und Signalwörter, die ein bestimmtes Rechenverfahren verlangen, und arbeiten schließlich auf einer hauptsächlich syntaktischen Ebene. Dabei wird Angemessenheit des verwendeten Rechenschemas kaum hinterfragt. Im Zuge eines traditionellen Mathematikunterrichts wurde vielen Jugendlichen eingeprägt, dass es immer nur einen einzigen „richtigen“ Lösungsweg und nur eine einzige „richtige“ Lösung gibt. Diese Haltung lässt kritisches und reflektierendes Nachdenken überflüssig erscheinen. (vgl. Schneeberger 2009)

Bei technischen Probleme mit der ausgewählten Mathematik handelt es sich um kognitive Schwierigkeiten, die auch bei anderen, rein mathematischen, Aufgaben zu beobachten sind. Jedoch treten diese Probleme bei kontextbezogenen Aufgaben häufiger auf. Schukajlow (2011) stellt die Vermutung auf, dass, während der Fokus bei rein innermathematischen Aufgaben ausschließlich auf dem richtigen Ausführen von Rechenoperationen liegt, die Schülerinnen und Schüler bei realitätsbezogenen Aufgaben viele kognitive und metakognitive Kompetenzen gleichzeitig abrufen müssen. Dadurch werden sie von den Rechenverfahren abgelenkt und machen etwaige Fehler, die bei einem stärkeren Fokus nicht passiert wären.

Schließlich bereiten am Ende des Lösungsprozesses die Validierung und besonders Interpretation des mathematischen Ergebnisses vielen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten. Die Angemessenheit der Lösung wird selten hinterfragt. Den meisten genügt es, dass sie irgendein Ergebnis am Ende stehen haben. Der wichtige Schritt, das mathematische Ergebnis wieder zurück in die Realität zu übersetzen, wird oft ausgelassen. Damit verlieren die Aufgaben aber ihren ursprünglichen Sinn, ein Problem aus der Realität zu lösen. (vgl. Bruder & Collet 2011)

Die konkret bei Teil 2-Aufgaben auftretenden Schwierigkeiten werden in Kapitel IV „Qualitative Untersuchung“ beschrieben und analysiert.

3. Strategien zum Problemlösen

Im Mathematikunterricht wird ein Problem als eine subjektiv schwierige Anforderungssituation gesehen. Weil diese ungewohnt und nicht spontan bewältigbar scheint, müssen die Lernenden erst einen für sie neuen Lösungsweg finden. (vgl. Bruder & Collet 2011) Der Lösungsprozess bedarf unterschiedlicher Methoden und Techniken, die von den Schülerinnen und Schülern erst trainiert werden müssen. Der Weg vom Anfangs- zum Endzustand kann dafür in einzelne Teilprozesse gegliedert werden. Um einen langfristigen und bewussten Umgang mit diesen kognitiven und metakognitiven Kompetenzen zu erreichen, sollten die Schritte im Mathematikunterricht auch separat voneinander gezielt trainiert werden. (vgl. Greefrath 2013) Ein allgemeines Modell des Problemlöseprozesses hat Pólya (1949) aufgestellt. Die vier Phasen, die nach ihm während der Aufgabenbearbeitung durchlaufen werden müssen, werden im Abschnitt 3.1 erläutert.

Zum erfolgreichen Lösen realitätsbezogener Aufgaben ist rein fachspezifisches Wissen nicht ausreichend. Selbstverständlich müssen die Lernenden über einen facettenreichen, vernetzten Wissensgrundstock verfügen, um die Aufgabe zu verstehen und die Anforderungen zu strukturieren. Gleichzeitig brauchen sie aber auch möglichst vielfältige Strategien, um dem Ergebnis näherzukommen. (vgl. Heinze & Ufer 2013)

Im Bereich des Problemlösens unterscheidet man meist zwischen zwei verschiedenen Strategiearten. Zum einen helfen Algorithmen, die bei einfachen Aufgaben immer zu einer Lösung führen, wenn die klar definierten Rechenvorgänge richtig ausgeführt werden. Zum anderen sind häufig Heuristiken notwendig, wenn es für die Aufgabe keinen eindeutigen Algorithmus gibt. Dabei handelt es sich um Faustregeln, die vielseitig anwendbar sind, dafür aber nicht immer zu einem Erfolg führen. (vgl. Schukajlow 2011) Im Abschnitt 3.2 wird das Konzept der Heuristik vorgestellt.

3.1. Vier-Phasen-Modell nach Pólya

Das Lösen mathematischer Probleme wurde bereits von vielen Mathematikdidaktikern und -didaktikerinnen untersucht und modelliert (u.a. von Dewey 2001, Reusser 1988, Bruder & Collet 2011). Eine Grundlage vieler didaktischen Überlegungen bildet das Werk „Schule des Denkens“ (Pólya 1949). Pólya teilt den Problemlöseprozess in vier grundlegende Phasen ein, die bei jeder Problemlösung durchlaufen werden sollen:

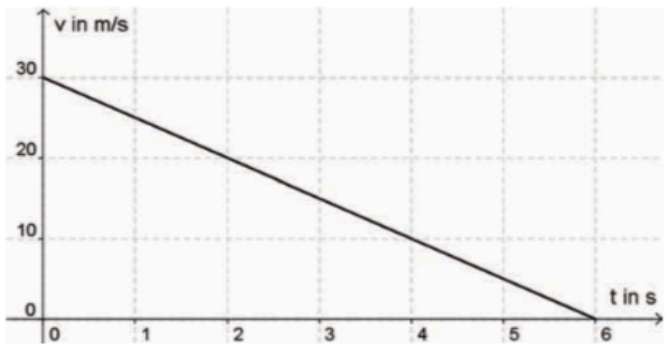
1. Verstehen der Aufgabe:
   Die Schülerinnen und Schüler sollen mit der Aufgabe vertraut werden. Sie sollen erkennen, was gegeben und was gesucht ist. Oft kann eine Veranschaulichung der Bedingungen wie zum Beispiel in einer Skizze behilflich sein.
2. Ausdenken eines Plans:
   In diesem Schritt wird eine nützliche Idee benötigt. Zusammenhänge zwischen Bekanntem und Unbekanntem werden gesucht. Es kann helfen, auf bereits bekannte Strategien zurückzugreifen und sich an bereits gelöste ähnliche Aufgaben zu erinnern. Die Strategien, die dort zielführend waren, können auch hier nützen. Beim Konkretisieren des Plans können einzelne Meilensteine gesetzt werden, welche die Aufgabenbearbeitung übersichtlicher gestalten.
3. Ausführen des Plans:
   Anschließend wird der Plan durchgeführt. Wichtig ist dabei, dass schon während des Ausführens jeder Schritt kontrolliert und reflektiert wird. So können Fehler frühzeitig erkannt und vermieden werden.
4. Rückschau:
   Schließlich muss das Endergebnis kontrolliert und interpretiert werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen zusätzlich auch ihren Lösungsweg reflektieren und zielführende Strategien auch in Zukunft wieder einsetzen.

Für diese einzelnen Phasen skizziert Pólya mögliche Fragen und Anregungen, mit denen die Lehrperson die Jugendlichen während des Prozesses fördern kann. Weil diese nicht manipulierend, sondern unterstützend wirken sollen, sind sie sehr allgemein formuliert. Zum Beispiel: „Was ist bekannt?“, „Was ist gesucht?“ Durch regelmäßiges Bearbeiten und Diskutieren solcher Aufgaben können unterschiedliche Problemlösetechniken kennengelernt und reflektiert werden. So soll selbstständiges Denken der Lernenden gefördert werden.

Deshalb thematisieren das Bundesministerium für Bildung und das BIFIE Pólyas Vier-Phasen-Modell in Hinblick auf die schriftliche Reifeprüfung. Lehrpersonen werden dazu angehalten, verschiedene Methoden und Techniken beim Bearbeiten von Problemaufgaben im Unterricht vorzustellen und zu trainieren, mit dem Ziel, dass die Lernenden diese spätestens bei der Reifeprüfung intuitiv einsetzen. Die Lehrkraft soll mit den Schülerinnen und Schülern die Phasen bewusst durchlaufen und reflektieren. Durch gezieltes Fragen sollen die ausführbaren Strategien bewusstgemacht werden. Zur Veranschaulichung skizziert das BIFIE (2013c) mögliche Fragestellungen zu einer Teil 2-Aufgabe im unten abgebildeten Beispiel „Bremsvorgang“. (siehe Abbildung 12 und Abbildung 13)

Bremsvorgang

Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von $v = 30$ m/s und bremst wegen eines auf der Fahrbahn liegenden Hindernisses ab. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Bremsvorgang. Die Abbildung zeigt modellhaft das t-v-Diagramm für einen Bremsvorgang.



- Was ist gegeben?
- Ist mir der Kontext bereits bekannt?
- Was kann ich aus der Grafik ablesen?

a) Bestimmen Sie $v'(t)$ und deuten Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit dem Bremsvorgang.

- Welche grundlegende Fähigkeiten und Fertigkeiten sind erforderlich? Wie muss ich sie vernetzen?
- Wie finde ich aus dem mathematischen Ergebnis eine Lösung für die gestellte Aufgabe?
- Welche Einheiten muss ich verwenden?

b) Ermitteln Sie die absolute und die relative Abnahme der Geschwindigkeit des PKW während der ersten beiden Sekunden des Bremsvorgangs.

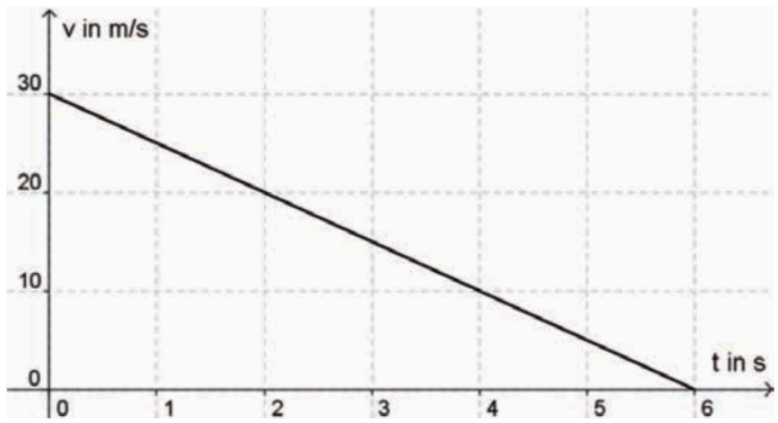
- Von welcher Art sind die Zusammenhänge, die mathematisch beschrieben werden sollen?
- Welche Rechenschritte benötige ich, um die Aufgabe zu lösen?
- Mit welcher Genauigkeit soll ich rechnen?

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ für den Zeitraum des Bremsvorgangs. Begründen Sie, wie sich eine Änderung der Anfangsgeschwindigkeit auf den Verlauf des Graphen von $v(t)$ auswirkt, und interpretieren Sie deren Bedeutung für den Bremsvorgang.

Abbildung 12 - Fragestellungen zu Teil 2-Aufgaben: Bremsvorgang (i) (BIFIE 2013c)

- In welche Teilschritte kann ich die Aufgabe zerlegen?
- Müssen bestimmte Bedingungen erfüllt werden und kann ich diese mathematisch formulieren?
- Ist die Angabe eindeutig?
- Welche Konsequenzen ergeben sich aus meiner Antwort im Hinblick auf den Kontext?

d) Interpretieren Sie $\int_0^4 v(t)dt$ im vorgegebenen Kontext. Stellen Sie das Ergebnis dieses Ausdrucks in der folgenden Abbildung dar.



- Habe ich eine plausible passende Antwort für die gestellte Aufgabe gefunden?

Abbildung 13 - Fragestellungen zu Teil 2-Aufgaben: Bremsvorgang (ii) (BIFIE 2013c)

Dabei treten jedoch einige Problematiken auf, weil Pólya diese Phasen für ganz andere Aufgabentypen entworfen hat. Denn Teil 2-Aufgaben stellen in vielerlei Hinsicht nicht charakteristische Problemaufgaben dar. So sind diese – anders als typische „Pólya-Aufgaben" – bereits durch die Teilaufgaben vorstrukturiert. Wegen des Punktesystems können die Aufgaben auch gar nicht so umfangreich sein, wie realitätsbezogene Probleme es meistens sind. Im Grunde genommen handelt es sich oft sogar nur um aneinandergereihte Teil 1-Aufgaben, wo jeweils eine Grundkompetenz abgerufen werden muss. Dies ist auch im Beispiel „Bremsvorgang" der Fall.

Einen weiteren großen Unterschied bildet die Lösbarkeit der Aufgaben. Während klassische „Pólya-Aufgaben" sehr offen gestaltet sind und viele Bedingungen erst selbst aufgestellt werden müssen, sind Teil 2-Aufgaben aufgrund ihres Prüfungscharakters stets eindeutig lösbar. In ihren Angaben sind alle notwendigen Informationen gegeben, gelegentlich sogar mehr als nötig. Dagegen muss für typische Problemaufgaben oft erst eigenständig recherchiert oder experimentiert werden, um die benötigten Informationen und Bedingungen zu beschaffen. Deshalb gestalten sich auch die erforderlichen Arbeitsschritte in den einzelnen Phasen etwas anders als bei Pólya beschrieben:

1. Verstehen der Aufgabe:
   Durch Strukturieren der vorhandenen Informationen sollen Zusammenhänge und Bedingungen erkannt werden. Bereits gegebene Tabellen, Graphen und Abbildungen unterstützen diese Phase meist erheblich. Eventuell kann eine zusätzliche, selbst gezeichnete Skizze hilfreich sein.
2. Ausdenken eines Plans:
   Die Schülerinnen und Schüler sollen nun die einzelnen Schritte vorbereiten, die zur Lösung führen sollen. Nachdem die klar getrennten Teilaufgaben nicht besonders umfangreich sind, sind weitere Meilensteine meist überflüssig. Viel wichtiger ist es, die benötigten Grundkompetenzen abzurufen und zu vernetzen wie auch geeignete Strategien und Hilfsmittel auszuwählen.
3. Ausführen des Plans:
   Genauigkeit ist hier genauso von Bedeutung wie gekonnter Einsatz der technischen Hilfsmittel. Teilschritte sollten stets kontrolliert werden, auch wenn minimale Folgefehler bei der Reifeprüfung nicht gezählt werden.
4. Rückschau:
   Schließlich muss zu dem mathematischen Ergebnis noch die passende Antwort auf die ursprüngliche Aufgabenstellung gefunden werden. Oft muss das Ergebnis noch interpretiert werden. Immer wieder muss auch eine Begründung formuliert werden. Zusätzlich sollte das Ergebnis kontrolliert und validiert werden.

Das BIFIE (2013c) definiert die abschließende Phase eher für Übungszwecke. Angewendete Strategien und Kompetenzen sollen reflektiert und modifiziert werden, sodass sie bei künftigen ähnlichen Aufgaben wieder eingesetzt werden können. Darum sollte auch diskutiert werden, ob andere Wege eventuell effizienter gewesen wären.

Bei diesem Modell muss berücksichtigt werden, dass diese vier Phasen innerhalb einer Teil 2-Aufgabe meist mehrmals durchlaufen werden, weil die Teilaufgaben als voneinander unabhängige Aufgaben bearbeitet werden.

Ein regelmäßiges Üben und Besprechen solcher Arbeitsschritte soll den Lernenden ein strukturiertes Denken und Arbeiten näherbringen. Dieses ist nicht nur bei der schriftlichen Reifeprüfung, sondern auch im generellen Alltag von großer Bedeutung. Damit diese Problemlösekompetenzen verinnerlicht werden, muss genügend Zeit eingeplant werden.

3.2. Heurismen

Die Heuristik untersucht Vorgänge beim Entdecken und Erfinden. In der Mathematikdidaktik wird hier besonders auf die Denkoperationen beim Lösen von Aufgaben geachtet. Heuristische Methoden und Techniken werden kurz Heurismen genannt. (Polya 1949) Diese dienen den Problemlösenden als Werkzeuge und Wegweiser. Man unterscheidet zwischen heuristischen Hilfsmitteln, die helfen sollen, eine Aufgabe zu verstehen und zu strukturieren, und heuristischen Strategien, die als Orientierung auf dem Lösungsweg behilflich sein sollen. (vgl. Bruder & Collet 2011)

Zu den heuristischen Hilfsmitteln zählen Tabellen, Gleichungen, informative Figuren und Wissensspeicher. Sie sollen die Problemstellung visualisieren und reduzieren. Sie können wesentliche Zusammenhänge und Abhängigkeiten hervorheben und verschaffen einen allgemeinen Überblick. (vgl. BIFIE 2013c)

Sobald die Aufgabenstellung verstanden und strukturiert wurde, muss ein geeigneter Lösungsplan gefunden werden. Allgemeine Vorgehensweisen beim Problemlösen werden heuristische Strategien genannt, die für unterschiedliche Aufgaben eingesetzt werden können. Im Folgenden werden fünf heuristische Strategien beschrieben, die auch bei Teil 2-Aufgaben anwendbar sind. Die ausgewählten Beispiele stammen aus dem Aufgabenpool zur standardisierten Reifeprüfung für AHS des BMB (2017c).

3.2.1. Systematisches Probieren

Durch Versuch und Irrtum wird im Alltag regelmäßig ein Problem gelöst und etwas Neues gelernt. Es ist wohl die grundlegendste heuristische Strategie, die von Schülerinnen und Schülern meist intuitiv eingesetzt wird. Um dabei zielstrebig voranzuschreiten, muss das Problem strukturiert werden. Das können verschiedene Fälle, Teilschritte oder einfach Anfangs- und Endsituation sein. Wichtig ist dabei, dass alle Möglichkeiten berücksichtigt werden. Anschließend wird ausprobiert und nachgeprüft. (vgl. Bruder und Collet 2011)

Bei der schriftlichen Reifeprüfung kann diese Strategie bei vielen verschiedenen Aufgaben eingesetzt werden, wenn man gerade keine andere passende Strategie kennt. So könnte beispielsweise der Funktionsterm der Polynomfunktion zweiten

Grades bei Teilaufgabe (a) der Aufgabe II.3.4.3 „Design-Center Linz“ auch durch systematisches Probieren aufgestellt werden, wenn ein Kandidat oder eine Kandidatin nicht weiß, wie die Parameter eine quadratische Funktion beeinflussen.

Auch bei der unten abgebildeten Aufgabe „Höhe einer Schneedecke“ können die Auswirkungen des Parameters *a* auf die Funktion durch systematisches Probieren auf einem technischen Hilfsmittel beobachtet werden.

Die Höhe $H(t)$ einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit t ab. Zuerst ist die Abnahme gering, mit der Zeit wird sie aber immer stärker. Daher kann die Höhe der Schneedecke durch folgende quadratische Funktion $H(t)$ beschrieben werden:

$$H(t) = H_0 - a \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad a > 0, t \geq 0$$

(H wird in cm und t in Tagen gemessen, H_0 beschreibt die Schneehöhe zu Beginn der Messung)

Das beschriebene Modell gilt in guter Näherung bei einer Witterung mit gleichbleibender Temperatur bis zur vollständigen Schneeschmelze. Dabei wird vorausgesetzt, dass bis zur vollständigen Schneeschmelze kein weiterer Schnee hinzukommt.

Aufgabenstellung:

a) Eine 20 cm dicke Schneedecke reduziert sich innerhalb von 12 Stunden auf 18 cm. Nach wie vielen Tagen (von Anfang an) ist der Schnee gänzlich geschmolzen? Geben Sie die Lösung auf zwei Dezimalstellen genau an!

Wie wirkt sich eine Erhöhung des Parameters a auf $H(t)$ aus? Begründen Sie Ihre Antwort!

Abbildung 14 - Teil 2: Höhe der Schneedecke (BMB 2017c)

3.2.2. Vorwärtsarbeiten

Hier handelt es sich um ein Probieren mit Richtung. Die Problemlösenden betrachten die Startsituation und versuchen mit den gegebenen Informationen ein bestimmtes Ziel zu erreichen. Dabei können auch Meilensteine gesetzt werden, um dem gesuchten Ergebnis schrittweise näherzukommen. Im Alltag arbeitet man ständig vorwärts, zum Beispiel wenn man die kommende Woche plant. (vgl. Bruder und Collet 2011)

Diese Strategie ist bei der Klausurarbeit in Mathematik oft hilfreich, weil viele Teil 2-Aufgaben durch schrittweises Arbeiten gelöst werden können. Ein Beispiel dafür ist die Aufgabe „Baumwachstum“ (

Abbildung 15 und Abbildung 16)

An einem gefällten Baum kann anhand der Jahresringe der jeweilige Umfang des Baumstamms zu einem bestimmten Baumalter ermittelt werden. Die Untersuchung eines Baumes ergab folgende Zusammenhänge zwischen Alter und Umfang:

Alter t (in Jahren)	25	50	75	100	125	150	175	200
Umfang u (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370	3,761	3,895	3,934	3,950

Der Zusammenhang zwischen Alter und Umfang kann durch eine Wachstumsfunktion u beschrieben werden, wobei der Wert $u(t)$ den Umfang zum Zeitpunkt t angibt.

In der nachstehenden Graphik sind die gemessenen Werte und der Graph der Wachstumsfunktion u veranschaulicht.

Abbildung 15 - Teil 2: Baumwachstum (i) (BMB 2017c)

Aufgabenstellung:

a) Innerhalb der ersten 50 Jahre wird eine exponentielle Zunahme des Umfangs angenommen. Ermitteln Sie aus den Werten der Tabelle für 25 und 50 Jahre eine Wachstumsfunktion für diesen Zeitraum!

Abbildung 16 - Teil 2: Baumwachstum (ii) (BMB 2017c)

Nachdem das exponentielle Modell bereits vorgegeben wurde, müssen die Werte aus der Tabelle nur noch in die passende Funktionsgleichung eingesetzt werden. Nachdem der Parameter q durch Äquivalenzumformungen ermittelt wurde, kann der Parameter a ebenfalls berechnet werden. Erst dann kann die Funktionsgleichung aufgestellt werden. (siehe Abbildung 17)

a) $f(t) = a \cdot q^t$

$\rightarrow 1{,}256 = a \cdot q^{50}$ bzw. $0{,}462 = a \cdot q^{25}$

$\rightarrow$ (Division) $2{,}71861 = q^{25}$

$\rightarrow q \approx 1{,}0408$

$\rightarrow a = \dfrac{0{,}462}{q^{25}} \rightarrow a \approx 0{,}17$

$\rightarrow$ (näherungsweise) $f(t) = 0{,}17 \cdot 1{,}0408^t$ bzw. $f(t) = 0{,}17 \cdot e^{0{,}04 \cdot t}$ da $\ln(1{,}0408) \approx 0{,}04$

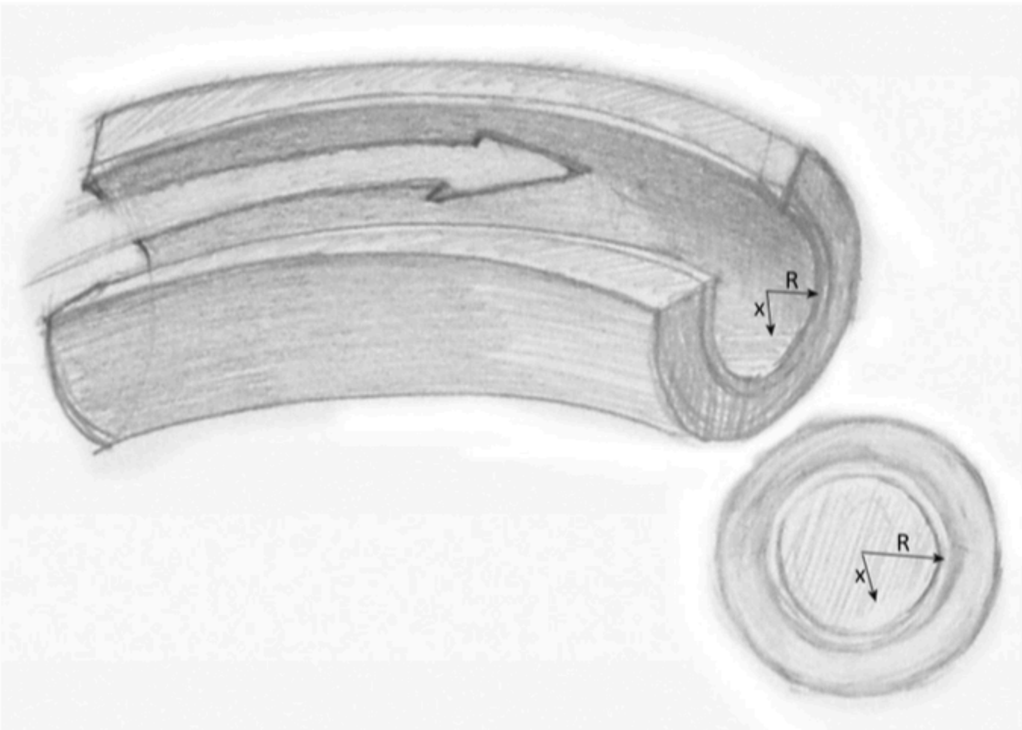
Abbildung 17 - Teil 2: Baumwachstum – Lösungserwartung (BMB 2017c)

3.2.3. Rückwärtsarbeiten

Im Gegensatz dazu wird beim Rückwärtsarbeiten vom Gesuchten ausgegangen. Schrittweise werden Sachverhalte ermittelt, die auf das Ergebnis schließen lassen, bis man auf etwas Gegebenes stößt. Diese Strategie erfordert flexibleres Denken als die beiden vorangegangenen. Ein Alltagsbeispiel wäre hier das Suchen nach einem verlegten Schlüssel. Häufig wird beim Lösen mathematischer Probleme eine Kombination von Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten angewendet. (vgl. Bruder und Collet 2011)

Auch bei manchen Teil 2-Aufgaben kann das Rückwärtsarbeiten von Vorteil sein. So auch bei der Aufgabe „Blutgefäß" (siehe Abbildung 18 und Abbildung 19), wo das Ergebnis eigentlich schon bekannt ist und es nun gezeigt werden soll. Hier gibt es zwei verschiedene Lösungsvarianten (siehe Abbildung 20), wobei das Rückwärtsarbeiten hier spürbar weniger Rechenaufwand verlangt als das Vorwärtsarbeiten.

In einem Blutgefäß hängt die Geschwindigkeit *v* des Blutes davon ab, wie groß der Abstand *x* zum Mittelpunkt ist. Ein gültiger Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit *v* und dem Abstand *x* kann mittels einer Formel $v(x) = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)$ modelliert werden.



(Bild aus http://www.gefaesschirurgie-klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php, ergänzt durch Pfeile und Beschriftung)

Die in der Formel auftretenden Größen sind im Folgenden beschrieben:

R ... Innenradius des Blutgefäßes in mm
v_m ... maximale Geschwindigkeit des Blutes im Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s
x ... Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in mm
$v(x)$ ... Geschwindigkeit des Blutes bei Abstand x vom Mittelpunkt des Blutgefäßes in cm/s

Abbildung 18 - Teil 2: Blutgefäß (i) (BMB 2017c)

b) In einem Lehrbuch der Medizin wird behauptet, dass beim Abstand $x = \frac{R}{2}$ die Geschwindigkeit des Blutes 75 % vom maximalen Wert beträgt. Um die Aussage mathematisch zu beweisen, wird der Ansatz $v(x) = \frac{3}{4} v_m$ gemacht, und damit wird die Stelle x berechnet.

Führen Sie die Berechnung von der Stelle x aus und zeigen Sie, dass man mit der Berechnung des Funktionswerts $v\left(\frac{R}{2}\right)$ zum gleichen Ergebnis kommt!

Abbildung 19 - Teil 2: Blutgefäß (ii) (BMB 2017c)

Lösungsweg 1:
Umformen: $\frac{3}{4} v_m = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - \frac{x^2}{R^2} \Rightarrow \frac{x^2}{R^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{R}{2}$

Lösungsweg 2:
$v\left(\frac{R}{2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{R^2}{4 \cdot R^2}\right) = v_m \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = v_m \cdot \frac{3}{4}$

An der genannten Stelle ist der Funktionswert wieder 75 % von v_m.

Abbildung 20 - Teil 2: Blutgefäß – Lösungserwartung (BMB 2017c)

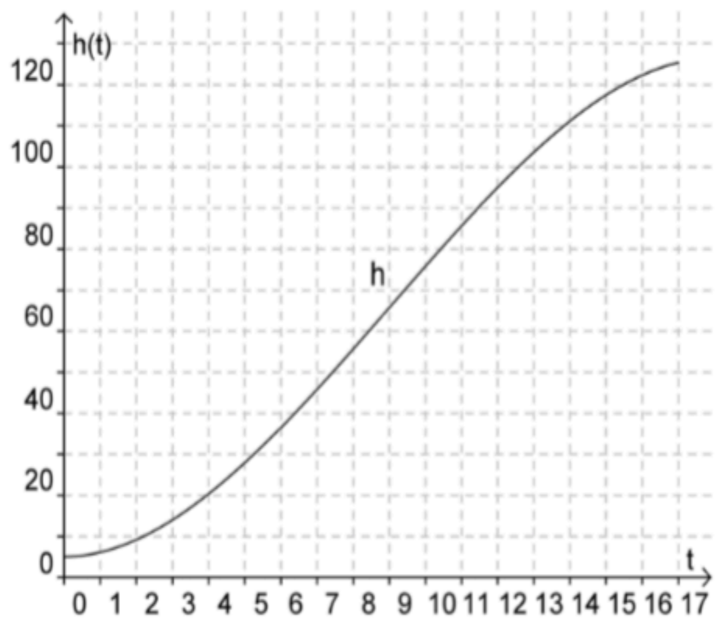
3.2.4. Analogieschluss

Wird eine Ähnlichkeit zu bereits gelösten Aufgaben erkannt, kann man sich auf bekannte Vorgehensweisen stützen. Dabei kann es sich zum Beispiel um einen sachlich oder strukturell vergleichbaren Kontext handeln, eine ähnliche Lösungsstruktur oder eine ähnliche Fragestellung. Manchmal ist es möglich, zumindest Parallelen zwischen Teilproblemen zu entdecken und diese mit bekannten Verfahren zu lösen. (vgl. Bruder und Collet 2011)

Eine Möglichkeit für Analogieschlüsse bietet zum Beispiel die Aufgabenstellung von „Wachstum einer Pflanze“ (siehe Abbildung 21), bei der Differenzenquotient und Differentialquotient berechnet werden sollen. Diese Terme haben im Normalfall hohen Wiedererkennungswert und lassen sich wie bei bereits gelösten Aufgaben berechnen. Auch die Deutung dieser Änderungsmaße sollte für die Schülerinnen und Schüler kein allzu großes Problem darstellen, wenn sie eine Analogie zu anderen Aufgaben herstellen können.

Manche einjährige Nutz- und Zierpflanzen wachsen in den ersten Wochen nach der Pflanzung sehr rasch. Im Folgenden wird nun eine spezielle Sorte betrachtet. Die endgültige Größe einer Pflanze der betrachteten Sorte hängt auch von ihrem Standort ab und kann im Allgemeinen zwischen 1,0 m und 3,5 m liegen. Pflanzen dieser Sorte, die im Innenbereich gezüchtet werden, erreichen Größen von 1,0 m bis 1,8 m.

In einem Experiment wurde der Wachstumsverlauf dieser Pflanze im Innenbereich über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe dokumentiert. Im Anschluss wurde die Höhe h dieser Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion h mit $h(t) = \frac{1}{24} \cdot (-t^3 + 27t^2 + 120)$ modelliert. Dabei bezeichnet t die Anzahl der Wochen seit der Pflanzung und $h(t)$ die Höhe zum Zeitpunkt t in Zentimetern. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h im Beobachtungszeitraum [0; 17].



Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie den Wert des Quotienten $\frac{h(13) - h(9)}{4}$ und den Wert von $h'(9)$! Geben Sie an, welche Bedeutung die beiden berechneten Ergebnisse im gegebenen Kontext haben!

Abbildung 21 - Teil 2: Wachstum einer Pflanze (BMB 2017c)

3.2.5. Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes

Um Analogieschlüsse überhaupt zu ermöglichen, müssen Aufgaben oft erst umstrukturiert, reduziert oder verallgemeinert werden. Danach lassen sich Parallelen leichter erkennen und man kann das Problem einer bereits bearbeiteten Aufgabe zuordnen. In der Mathematik wird immer wieder versucht auf etwas bereits Verstandenem weiter aufzubauen. (vgl. Bruder und Collet 2011)

Diese Strategie kann unter anderem bei Teilaufgabe (a) von Aufgabe II.3.4.2 „Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen“ (siehe Abbildung 22) angewendet werden. Dort ist von reziproken quadratischen Gleichungen die Rede, deren Eigenschaften, geschweige denn Existenz, manchen Kandidatinnen und Kandidaten möglicherweise nicht dezidiert bekannt sind. Wenn man die Aufgabenstellung jedoch auf allgemeine quadratische Gleichungen erweitert, dann kann die Aufgabe wie jede andere Aufgabe zu diesem Thema bearbeitet werden.

Gegeben sind eine (normierte) quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ und die zugehörige Polynomfunktion f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$.

Aufgabenstellung:

a) Lässt sich die Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ in der Form $(x - z) \cdot \left(x - \frac{1}{z}\right) = 0$ mit $z \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$ schreiben, dann spricht man von einer reziproken quadratischen Gleichung.

Geben Sie mithilfe von Gleichungen an, wie die Parameter p und q jeweils von z abhängen!

Bestimmen Sie die Werte für z, für die die reziproke quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzt. Geben Sie für jeden dieser Werte von z jeweils die lokalen Minimumstellen von f an!

Abbildung 22 - Teil 2: Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen (BMBF 2016c)

3.2.6. Arbeiten mit Heurismen üben

Heurismen können gelernt und trainiert werden, bis sie schließlich ins Unterbewusste abgesenkt sind und bei unterschiedlichen Aufgaben flexibel angewendet werden können. Um einen langfristigen Erwerb von heuristischen Kompetenzen zu ermöglichen, müssen mehrere, aufeinander aufbauende Phasen durchlaufen werden. (vgl. Bruder & Collet 2011)

Anfangs müssen sich die Schülerinnen und Schüler erst an das Verwenden von Heurismen gewöhnen. Die Lehrperson kann diesen Prozess durch gezielte strukturierende und reflektierende Fragen und Anregungen unterstützen. Danach sollen die angewendeten Strategien und deren Nützlichkeit bewusstgemacht werden. Dazu erweisen sich Musterbeispiele, die mit einer bestimmten Vorgehensweise assoziiert werden, als hilfreich. Anschließend werden die Heurismen eingeübt. Die Schülerinnen und Schüler sollen danach in der Lage sein, ihre Lösungsprozesse zu verbalisieren und sich bei anderen Aufgaben daran zu erinnern. Schrittweise wird der Anwendungsbereich der Strategien erweitert und auf neuartige Probleme ausgeweitet, bis die Schemata zunehmend unterbewusst genutzt werden. Schließlich sollen die

Lernenden ihre diversen Handlungsmöglichkeiten kennen und reflektieren können. (vgl. Kratz 2011)

4. Nachhaltiger Mathematikunterricht

Um die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Fähigkeiten und Fertigkeiten langfristig zu erwerben, muss der Mathematikunterricht nachhaltig gestaltet werden. Nachdem neue Konzepte konstruiert wurden, müssen diese kategorisiert und mit bestehenden Kompetenzen vernetzt werden. Neben aktuellen Bezügen soll auch auf individuelle Erfahrungen Bezug genommen werden, um ein vertrautes Umfeld für die Jugendlichen zu schaffen. In einem solchen lassen sich die Schülerinnen und Schüler leichter auf Unbekanntes ein und können es schneller mit Bekanntem verknüpfen. (vgl. Tall 2013)

Die Verbindung früher vermittelter Lerninhalte mit späteren wird „vertikale Vernetzung“ genannt. Dabei wird altes Wissen mit neuen Informationen ergänzt, abgeändert oder sogar ersetzt. Ältere Lerninhalte werden mit neuen innermathematischen Inhalten verbunden, aber auch in neuen außermathematischen Anwendungskontexten aus einem anderen Blickwinkel betrachtet. Somit werden bereits erworbene Kompetenzen gefestigt und gegebenenfalls erweitert. (vgl. Brinkmann & Siller 2012)

Werden gewisse Lösungsstrategien regelmäßig innerhalb verschiedener Kontexte eingesetzt, sollte die Lehrperson die immer wiederkehrenden Elemente bewusstmachen. Parallelen zu ähnlichen Aufgaben gehören aufgezeigt und reflektiert. So entsteht eine spiralförmige Vernetzung aller Fertigkeiten und Fähigkeiten. In der Literatur ist hier von einem sogenannten „Spiralcurriculum“ die Rede, welches ebendiesen kumulativen Kompetenzerwerb beschreibt. (vgl. Kratz 2011)

Im Zuge dessen nimmt die Lehrperson die Rolle eines Inputgebers ein, der die Lernenden zum mathematischen Fragen motivieren und befähigen soll. Dabei steht individuelles Fördern und Fordern an erster Stelle. Die Ausgangslage und Bedürfnisse einzelner Schülerinnen und Schüler müssen berücksichtigt werden. Eine Ausgeglichenheit zwischen selbstständiger Arbeit und Frontalunterricht hilft dabei, die unterschiedlichen Aspekte des langfristigen Kompetenzerwerbs abzudecken. (vgl. Goldberg 2013)

Damit die Kandidatinnen und Kandidaten ausreichend auf die Reifeprüfung vorbereitet sind, müssen die oben beschriebenen Elemente in einem angemessenen Ausmaß berücksichtigt werden. Mit dieser neuen Aufgabenkultur geht auch eine neue Unterrichtskultur einher. Je früher die Schülerinnen und Schüler an ein mathematisches Denken und Hinterfragen gewöhnt werden, desto selbstsicherer handeln sie beim Problemlösen und damit auch bei der Reifeprüfung.

IV. Qualitative Untersuchung

Wie in den vorangegangenen Kapiteln erläutert wurde, spielt bei einem kompetenten Begleiten des Lernprozesses ein grundlegendes Verständnis, welche potenziellen Schwierigkeiten die Schülerinnen und Schüler bei der Aufgabenbearbeitung haben können, eine bedeutende Rolle. Ebenso müssen diverse Lösungsstrategien von Schülerinnen und Schülern nachvollzogen werden, um die Unterrichtskultur positiv weiterentwickeln zu können. All dies dient dem Zweck, die Schülerinnen und Schüler bestmöglich auf die Reifeprüfung vorzubereiten.

1. Forschungsfrage

Die im Rahmen dieser Diplomarbeit durchgeführte empirische Untersuchung hat eine umfangreiche Analyse von Lösungsprozessen von Schülerinnen und Schülern zum Ziel. Dadurch ergibt sich folgende zentrale Forschungsfrage:

Welche Strategien wenden Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Teil 2-Aufgaben an und welche Schwierigkeiten treten dabei auf?

Im Zuge dieser Untersuchung werden Lösungsprozesse von Schülerinnen und Schülern dahingehend analysiert, welche Strategien sie zum Lösen einsetzen und wie effektiv sich diese erweisen (siehe III.3.2). Außerdem soll der Bearbeitungsprozess nach dem Vier-Phasen-Modell von Pólya untersucht werden (siehe III.3.1).

Des Weiteren stellt sich die Frage, welche Arten von Schwierigkeiten im Laufe der Aufgabenbearbeitung auftreten und wodurch diese entstehen. (vgl. III.2.3) Daraus sollen didaktische Konsequenzen für einen nachhaltigen Unterricht gezogen werden (vgl. III.4).

2. Forschungsmethode

Weil quantitative Testungen hier keine differenzierten Einblicke in die kognitiven Denkprozesse der Jugendlichen während der Lösungskonstruktion ermöglichen würden, wird eine qualitative Fallanalyse durchgeführt, welche sich mit Lösungsprozessen von Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung der in der Untersuchung eingesetzten Teil 2-Aufgaben befasst.

Dafür wird die Methode des „Lauten Denkens“ nach Duncker (1935) eingesetzt. Bei dieser sollen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer sämtliche Gedanken, die ihnen während des Lösungsprozesses durch den Kopf gehen, aussprechen. Anders als bei der Methode der Selbstbeobachtung, bei welcher das eigene Denken als Objekt der Beobachtung dient, bleibt beim „Lauten Denken" der direkte Bezug zur Aufgabe erhalten.

Diese verbalisierten Lösungsprozesse von Schülerinnen und Schülern werden als Audiodateien aufgenommen und im Anschluss protokolliert. (siehe Appendix) Jedoch ist ein solches Protokoll nach Duncker (1935) zwangsläufig lückenhaft, weil nicht alle Aspekte des Lösungsprozesses aufgezeichnet werden können. So werden stets Lösungsphasen fehlen, deren Inhalte nicht kommuniziert werden beziehungsweise werden können.

Um die bewussten Denkprozesse leichter zu verbalisieren, werden zwei Schülerinnen gebeten, die Aufgaben gemeinsam zu bearbeiten. Durch den Dialog während der Aufgabenbearbeitung wird ein tieferer Einblick in die Denkprozesse gewährt. (vgl. Schukajlow 2011) Doch wegen der Schwierigkeit, das individuelle Lösungsverhalten von der gemeinsamen Lösungskonstruktion zu differenzieren, werden die restlichen Schülerinnen und Schüler einzeln interviewt. In Anbetracht der Tatsache, dass die Aufgaben bei der Reifeprüfung ebenfalls in Einzelarbeit gelöst werden müssen, kann dadurch ein der Realität näherkommender Rahmen hergestellt werden.

Anschließend werden die protokollierten Lösungsprozesse kommentiert und analysiert. Zuerst sollen allgemeine Beobachtungen zu den Aufgabenbearbeitungen der jeweiligen Teilnehmerinnen und Teilnehmer beschrieben werden. Danach werden die Lösungsprozesse in Hinblick auf eingesetzte Lösungsstrategien und auftretende Schwierigkeiten analysiert. Dabei werden die in Kapitel III.3 und III.2.3 beschriebenen Strategien und Schwierigkeiten berücksichtigt. Nach einer ausgiebigen Analyse der einzelnen Fallskizzen werden die Beobachtungen zusammengefasst und verglichen. Im Zuge dessen sollen Besonderheiten und Trends hervorgehoben werden.

3. Rahmenbedingungen

Für die Untersuchung werden fünf Schülerinnen und zwei Schüler aus der 12. Schulstufe einer AHS in Niederösterreich ausgewählt. Sie alle stehen zum Zeitpunkt der Untersuchung kurz vor der schriftlichen Reifeprüfung, werden jedoch von verschiedenen Lehrpersonen betreut. Demnach ist davon auszugehen, dass sie alle auf unterschiedliche Weisen vorbereitet sind. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer weisen ein breites Fähigkeitsspektrum auf. Dadurch kann sichergestellt werden, dass die Lösungsstrategien diverser Leistungsniveaus sichtbar werden.

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer müssen eine Einverständniserklärung unterzeichnen, um an der Untersuchung teilnehmen zu können (siehe Appendix 1).

Die beiden in der Untersuchung eingesetzten Teil 2-Aufgaben sind Klausuraufgaben aus dem Jännertermin 2016 (vgl. BMBF 2016b). Diese sind zum Zeitpunkt der Interviews noch relativ neu und deshalb den Teilnehmerinnen und Teilnehmern noch nicht bekannt. Es handelt sich um zwei sehr unterschiedliche Aufgaben, die vielfältige Kompetenzen verlangen. Dabei hat die eine Aufgabe einen rein innermathematischen und die andere einen außermathematischen Kontext. Es handelt sich um die beiden im Kapitel II besprochenen Aufgaben „Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen" (siehe II.3.4.2) und „Design-Center Linz" (siehe II.3.4.3).

Für die Aufgabenbearbeitung werden den Schülerinnen und Schülern keine zeitlichen Grenzen gesetzt. Außerdem ist es ihnen erlaubt, die aus dem Unterricht gewohnten technischen Hilfsmittel und ihre Formelsammlung zu verwenden. Niemand der ausgewählten Schülerinnen und Schüler verwendet Geogebra. Stattdessen benutzen sie grafikfähige Taschenrechner, wie den TI-Nspire oder den TI 82 STATS, wobei letzterer über keine CAS-Funktion verfügt.

Die durchgeführte Untersuchung stößt natürlich an gewisse Grenzen: Weil im Rahmen der Interviews keine authentische Klausursituation simuliert werden kann, bearbeiten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Aufgaben ohne jeglichen Zeit- oder Leistungsdruck. Der Lösungsprozess der beiden Schülerinnen, die die Aufgaben im Dialog bearbeiten, weichen dabei umso stärker von den realen Umständen ab.

Diese Faktoren werden in dieser qualitativen Untersuchung jedoch vernachlässigt, weil die Priorität im Verbalisieren der Denkprozesse liegt. Bei der Auswahl der Aufgaben und teilnehmenden Personen handelt es sich nur um Stichproben, die keinerlei Anspruch auf Repräsentativität erheben. Miles & Huberman (1994) schreiben in Bezug darauf: "Choices of informants, episodes, and interactions are being driven by a conceptual question, not a concern for representativeness."

Zusätzlich muss berücksichtigt werden, dass die Protokolle der Lösungsprozesse gewissermaßen unvollständig und verzerrt sind. Dabei kommt unter anderem der Aspekt der „sozialen Erwünschtheit" beim „Lauten Denken" zu tragen. Demzufolge beschönigen die teilnehmenden Personen ihre Kommentare je nachdem, was ihr Gegenüber von ihnen vermeintlicherweise hören will. (vgl. Duncker 1935) Doch auch dieser Gesichtspunkt wird als nicht allzu schwerwiegend gesehen, weil es beim unmittelbaren Kommentieren eines Denkprozesses relativ schwierig ist, seine Gedanken gleichzeitig zu filtern und an die „soziale Erwünschtheit“ anzupassen.

4. Durchführung der Studie

Die Interviews wurden im Mai 2016 durchgeführt. Dabei wurden die Gespräche als Audiodateien aufgenommen, um die Handlungen im Nachhinein besser nachvollziehen zu können. Zusätzlich wurden verbale und nonverbale Aktivitäten notiert. Videoaufnahmen dieser Lösungsprozesse wurden bewusst ausgeschlossen, um die Teilnehmerinnen und Teilnehmer möglichst wenig in ihrer Aufgabenbearbeitung zu irritieren. Dadurch sollte der Aspekt der „sozialen Erwünschtheit“ (vgl. Duncker 1935) minimiert werden. Außerdem reichten die Audiodateien und Notizen aus, um die Lösungsprozesse detailliert zu protokollieren. Videoaufnahmen waren demnach nicht notwendig. Diese Protokolle sind im Appendix (2) nachzulesen.

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bekamen zuerst die Aufgabe „Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen“ zur Bearbeitung und danach die Aufgabe „Design-Center Linz“. Sie bekamen die Anweisung, die Aufgaben so zu bearbeiten, als seien es Klausuraufgaben. Währenddessen sollten sie ihre Schritte verbalisieren und ihren Lösungsprozess kommentieren. Bei einzelnen Teilnehmerinnen und Teilnehmern musste gelegentlich genauer nachgefragt werden, um einen detaillierteren Einblick in ihre Denkprozesse zu bekommen und die Schritte besser nachvollziehen zu können.

Beim Schülerinnenpaar wurde das Nachvollziehen ihrer Denkprozesse durch die Kommunikation zwischen den beiden wie erwartet erheblich erleichtert. Jedoch war es nahezu unmöglich, hier einen individuellen Lösungsweg herauszufiltern. Die beiden Schülerinnen beeinflussten sich ständig gegenseitig, weshalb ihr Lösungserfolg vermutlich nicht jenem in einer realen Prüfungssituation entspricht.

Nachdem die Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit der Aufgabenbearbeitung fertig waren, fand ein Reflexionsgespräch statt. Die Aufgaben und deren Lösungen wurden mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern besprochen, sie bekamen auch Feedback zu ihrem Lösungsverhalten. Danach durften auch die Schülerinnen und Schüler reflektieren und rückmelden. Als Impulsfragen dienten dabei:

- Wie erging es dir beim Lösen der jeweiligen Aufgabe?
- Wo hattest du Schwierigkeiten?

- Woran könnten diese Schwierigkeiten liegen?
- Was fiel dir leicht?
- Was gefällt dir an den Aufgaben (nicht)? Warum?

Die Reflexionen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer sind den Protokollen im Appendix beigefügt (siehe Appendix 2).

In den folgenden Teilen werden die Lösungsprozesse für die beiden Aufgaben analysiert. Dafür wird zuerst jeweils das Lösungsverhalten der einzelnen Teilnehmerinnen und Teilnehmer skizziert, um dann individuelle Lösungsstrategien und Schwierigkeiten beim Bearbeiten zu untersuchen. Die Reihenfolge der Fallskizzen wurde hier zufällig gewählt.

Anschließend werden diverse Lösungsstrategien zusammengefasst und diskutiert. Es wird dabei zwischen kognitiven und metakognitiven Strategien unterschieden. Danach werden Schwierigkeiten, die im Laufe der Aufgabenbearbeitung auftreten, genauer beleuchtet. Dafür werden die Schwierigkeiten den vier adaptierten Phasen nach Pólya zugeordnet.

Zum Abschluss werden die Lösungserfolge der jeweiligen Aufgabe besprochen und hinterfragt. Ein besonderes Augenmerk liegt hier darauf, bei welchen Aufgabenstellungen die meisten beziehungsweise die wenigsten Schwierigkeiten auftraten und woran diese Trends liegen könnten.

5. Analyse von eingesetzten Strategien und Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe „Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen“

5.1. Fallskizze Dietmar

Der Schüler Dietmar verwendet beim Bearbeiten der Aufgaben den grafikfähigen Taschenrechner TI-Nspire mit CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Zuallererst überfliegt Dietmar die gesamte Aufgabe, um sich einen Überblick zu verschaffen. Dann liest er sich die einzelnen Aufgabenstellungen genauer durch. Den ganzen Lösungsprozess hindurch verhält er sich eher ruhig. In der anschließenden Reflexion meint er, dass er in diesen stillen Phasen nachdenkt und seine weiteren Schritte plant. Es falle ihm schwer, jeden Gedanken zu äußern.

Nachdem er einige Minuten intensiv über Teilaufgabe (a) nachgedacht und nichts notiert hat, beschließt er, zur nächsten Teilaufgabe (b) zu wechseln. Dafür nimmt er unverzüglich die Formelsammlung zur Hand und schlägt die Lösungsformel für quadratische Gleichungen nach. Dietmar weiß nämlich, dass die verschiedenen Lösungsfälle mit der Diskriminante zusammenhängen. Dann ist er aber unsicher, was eigentlich von ihm verlangt wird. Nach einer weiteren längeren Nachdenkphase, formuliert er in einem Atemzug seine Begründung:

> *„Das hat natürlich zwei verschiedene Lösungen, weil da nur eine positive Lösung rauskommen kann. Weil, auch wenn man ein Quadrat von einer negativen Zahl einsetzt, hier trotzdem eine positive Zahl rauskommt. Sprich, die Diskriminante ist immer positiv und für eine positive Diskriminante gibt es immer genau zwei verschiedene Lösungen, weil vor der Wurzel plus/minus steht. Also eine Lösung mit ‚plus der Wurzel' und einmal mit ‚minus der Wurzel'."*

Um den zweiten Punkt der Aufgabe zu zeigen, zeichnet Dietmar zuerst einmal passende Graphen auf seinem Taschenrechner. Er setzt dafür verschiedene Werte für p ein und erkennt dabei, dass die Aussage stimmt. Danach sucht er wieder in Stille nach einer passenden Begründung. Schließlich argumentiert er mithilfe von Algebra und löst die Aufgabe.

Bei Teilaufgabe (c) ist ihm sofort klar, was zu tun ist. Er erklärt seinen Plan, die Gleichung mit dem Solve-Befehl am Taschenrechner zu lösen, führt ihn aus und schreibt die Lösung auf. Auch den zweiten Punkt bearbeitet er schnell, indem er die Funktion am Taschenrechner zeichnet und die verschiedenen Werte mit der Asymmetrie der Parabel begründet.

Kurz blickt er nochmal zu (a), meint dann aber, dass ihm diese Aufgabenstellung zu „kompliziert" und „anstrengend" sei. Er belässt es also dabei.

Nach den Beurteilungskriterien der Reifeprüfung hätte Dietmar bei dieser Aufgabe vier von sechs Punkten erreicht.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Dietmar sucht beim Bearbeiten der Aufgabe nach Parallelen zu bereits bekannten Aufgaben. Aus dem Unterricht weiß er, dass die Lösungsfälle von quadratischen Gleichungen mit der Diskriminante zusammenhängen. Diese Eigenschaften legt er dann auf die in Teilaufgabe (b) gegebene quadratische Gleichung um. Dabei arbeitet er schrittweise rückwärts vom allgemeinen hin zum spezifischen Fall. Er geht von der Lösungsformel weiter zur Diskriminante, die positiv sein muss. Indem er dann erst die gegebenen Bedingungen in die Diskriminante einsetzt und zeigt, dass dies positiv sein muss, begründet er seine Lösung.

Außerdem nimmt er immer wieder den Taschenrechner zur Hand und zeichnet den Graphen einer passenden Funktion. Er probiert dafür verschiedene Werte für die Parameter aus, um deren Auswirkungen auf den Graphen zu erkennen. Durch das Visualisieren der Angabe fällt ihm das Begreifen der Zusammenhänge und der Aufgabenstellung sichtlich leichter.

Neben dem Taschenrechner verwendet er auch die Formelsammlung als Hilfsmittel, dort schlägt er die Lösungsformel quadratischer Gleichungen nach. Neben dieser Formel würde er dort auch andere Eigenschaften ebendieser finden, wie zum Beispiel den Satz von Vieta, der ihm eventuell bei Teilaufgabe (a) helfen würde. Dies führt bereits weiter zu Dietmars Schwierigkeiten während der Aufgabenbearbeitung.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Bei Teilaufgabe (a) hat Dietmar Schwierigkeiten dabei, zu verstehen, was genau zu tun ist. Er meint, es sei ihm „zu kompliziert formuliert“ und er sehe keinen Zusammenhang zwischen den beiden gegebenen Gleichungen. Es kommt also gar nicht erst zur Phase des Planens, weil er die Aufgabenstellung nicht mathematisieren kann. Auch wenn er nachher in der Formelsammlung einige potentielle Denkanstöße sieht, erkennt er diese nicht als solche, weil ihm hier die Verknüpfung zur Aufgabenstellung nicht gelingt.

Dabei ist jedoch auch in Frage zu stellen, inwieweit Dietmar seine Arbeitsschritte überhaupt plant. So fragte er zum Beispiel bei Teilaufgabe (b) mitten in der Durchführungsphase „Was soll ich eigentlich machen?“, nachdem er bereits die Diskriminante berechnet hatte. Dieses Zögern könnte eventuell auf Verständnisprobleme hinweisen. Andererseits kann es auch damit begründet werden, dass er gerade konzentriert an etwas Konkretem gearbeitet hat und kurz den Überblick verloren hat. Immerhin findet er schnell wieder den roten Faden, indem er die Aufgabenstellung nochmals laut vorliest.

Allgemein ist zu beobachten, dass Dietmar sehr wenig bis gar keine Zeit in die Planungsphasen investiert. Dies wirkt sich auf seinen Lösungsprozess dahingehend aus, dass er während den Durchführungsphasen häufiger innehalten und sich neu orientieren muss. Dies kostet ihn insgesamt mehr Zeit, als wenn er seine Lösungsschritte anfangs umfassender planen würde.

5.2. Fallskizze Thomas

Der Schüler Thomas verwendet beim Bearbeiten der Aufgaben den grafikfähigen Taschenrechner TI-Nspire mit CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Ohne sich einen Überblick über die Aufgabe zu verschaffen, beginnt Thomas sofort mit Teilaufgabe (a). Um sich unter den Gleichungen mehr vorstellen zu können, zeichnet Thomas eine reziproke quadratische Funktion am Taschenrechner mit selbst gewählten Werten für z. Dann erst überlegt er, was eigentlich von ihm gefragt ist und welche Handlungsoptionen er hat. Er denkt eine Weile nach, ohne zu einem Schluss zu kommen, und geht schließlich weiter zu Teilaufgabe (b).

Wie vorher setzt Thomas gleich wieder Werte für p ein und zeichnet eine Funktion am Taschenrechner. Obwohl er sofort sieht, dass die zu begründende Aussage stimmen muss, kann er es nicht ausreichend begründen. Seine Denkansätze gehen zwar in die richtige Richtung, er kann seine Argumentationen aber nicht zu Ende bringen:

> *„Wir haben ja q = –1 und es ist eine quadratische Funktion. Und bei einer quadratischen Funktion muss es eigentlich sein, dass eine Nullstelle von den x-Werten her im positiven und die andere im negativen Bereich liegen muss. Wegen diesen Bedingungen. Ja, das ist eh schon das, was beim zweiten gefragt ist."*

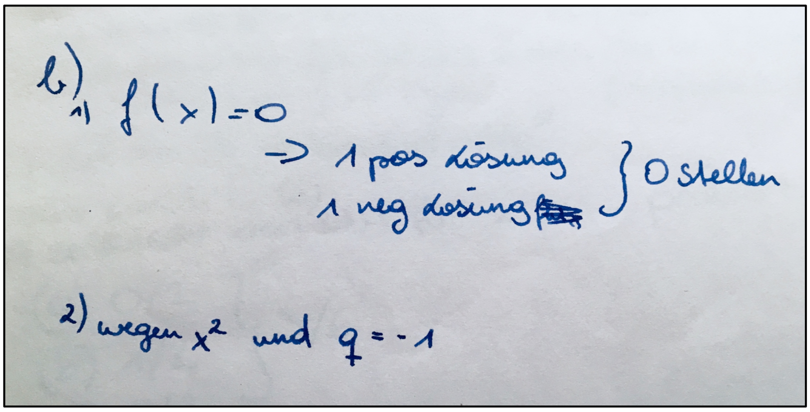


Abbildung 23 – Notizen von Thomas (private Quelle)

Thomas verschriftlicht seine sporadischen Argumentationen (siehe Abbildung 23). Dabei übersieht er jedoch, dass die erste Teilaufgabe ausdrücklich rechnerisch begründet werden muss. Auch für den zweiten Punkt ist seine Antwort nicht ausreichend. Weil er keine Skizze zeichnet, sollte er zumindest die positive Krümmung erwähnen. Generell ist seine Antwort sehr kurz und kann nicht als mathematisch schlüssige Begründung gewertet werden.

Teilaufgabe (c) löst er sehr schnell am Taschenrechner mit dem Solve-Befehl. Zusätzlich kontrolliert Thomas sein Ergebnis noch, indem er den Funktionsgraphen zeichnet und das Integral berechnet. Auch den zweiten Punkt löst er schnell, indem er die beiden Integrale berechnet und feststellt, dass diese nicht gleich sind.

Anschließend schaut Thomas noch einmal zurück zu Teilaufgabe (a). Nachdem er eine Weile über den ersten Punkt nachgedacht hat, meint er, dass er hier keinen Zusammenhang zwischen p, q und z sehe. Deshalb lässt er diesen Punkt aus und geht weiter zum zweiten. Wie zu Beginn zeichnet er den Funktionsgraphen einer reziproken quadratischen Funktion mit eigenen selbstgewählten Werten und probiert, was z sein muss, damit die Gleichung nur eine Lösung hat. Dabei scheint es für Thomas selbstverständlich zu sein, dass die Lösungen einer quadratischen Gleichung die Nullstellen der zugehörigen Funktion sind. Nach etwas Probieren bemerkt er, dass die Funktion bei $z = 1$ genau eine Nullstelle hat. Daraus schließt er, dass die Minimumstelle bei $x = 1$ liegen muss und schreibt dies auf. Dass diese Eigenschaft auch noch für weitere z gelten könnte, kommt ihm gar nicht in den Sinn.

Stattdessen überlegt Thomas nochmal, ob er für Teilaufgabe (b) noch eine bessere Begründung findet. Er erwähnt schließlich die positive Krümmung dieser quadratischen Funktion und skizziert eine nach oben offene Parabel, die durch $(0|-1)$ geht. Damit gibt er sich zufrieden.

Thomas hätte bei dieser Aufgabe drei von sechs Punkten erreicht.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Immer wieder nimmt Thomas seinen Taschenrechner zur Hand und zeichnet eine passende Funktion. Er erklärt dies zu machen, um sich etwas unter der Aufgabenstellung vorstellen zu können.

Durch Probieren und Einsetzen versucht er dann, die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Parametern und Bedingungen zu erkennen. Besonders bei

Teilaufgabe (a) setzt er so lange Werte für z ein, bis die Funktion die gegebenen Bedingungen erfüllt. Dabei beschränkt er aber die Allgemeinheit und übersieht, dass auch andere Werte passen könnten.

Doch diese Visualisierung verwendet Thomas nicht nur für das Verständnis der Angabe, sondern auch zur Kontrolle seiner Lösungen. So validiert er zum Beispiel bei Teilaufgabe (c) sein Ergebnis, indem er den Graphen nochmals zeichnet.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Während der Aufgabenbearbeitung ist zu beobachten, dass es Thomas schwerfällt, mit der mathematischen Sprache umzugehen. Er lässt sich von Begriffen wie „reziprok" irritieren und kann die gegebenen mathematischen Strukturen nicht in sein Grundwissen einbetten. Auch beim mathematischen Argumentiren hat er dadurch Schwierigkeiten: Seine Behauptungen stützen sich meist auf Skizzen, die er am Taschenrechner gezeichnet hat. Diese sind aber mit konkreten Werten definiert und beschränken somit die Allgemeinheit. Scheinbar ist er sich dessen nicht bewusst, dass er auf diese Weise keine allgemeingültigen Aussagen aufstellen kann.

Neben der Sprache der Mathematik weist Thomas auch Schwächen in der Lesekompetenz auf. So überliest er beispielsweise, dass die erste Aussage in Teilaufgabe (b) rechnerisch begründet werden soll. Er argumentiert stattdessen grafisch. Beim zweiten Punkt von Teilaufgabe (a) erkennt er nicht, dass z mehrere Werte haben kann, obwohl der Text eindeutig darauf hinweist.

Schließlich sind bei Thomas auch generelle kognitive Lücken bezüglich der Grundkompetenzen zu erkennen. Eindeutige Schlüsselwörter wie „zwei verschiedene Lösungen" im Kontext von quadratischen Gleichungen sollten im Idealfall sofort signalisieren, dass die Diskriminante untersucht werden muss. Kein einziges Mal stellt er diese direkte Verknüpfung zwischen algebraischen quadratischen Gleichungen und quadratischen Funktionen her.

Nachdem er die Grundkompetenzen offenbar nicht so sicher beherrscht, kann Thomas auf nur wenig zielführende Lösungsstrategien zurückgreifen. Die meisten Punkte bearbeitet er durch Probieren: „Bei der Aufgabe muss man mehr herumprobieren, bis man auf was kommt." Dies kostet ihn viel Zeit und bringt ihn nicht immer zu einem sicheren Ergebnis.

5.3. Fallskizze Amelie

Die Schülerin Amelie verwendet beim Bearbeiten der Aufgaben den grafikfähigen Taschenrechner TI 82 STATS ohne CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Ohne sich einen Überblick über die restlichen Aufgabenstellungen zu verschaffen, beginnt Amelie gleich mit Teilaufgabe (a) und erkennt rasch, dass die beiden Gleichungen denselben Zusammenhang darstellen. Sie multipliziert die Klammern aus und kennzeichnet die Teile des Terms, die p und q beschreiben. Jedoch begreift sie nicht, dass dies bereits die Lösung wäre, und schreibt die daraus folgenden Gleichungen nicht auf. Stattdessen liest sich Amelie den zweiten Punkt durch und überlegt eine Weile, bis sie meint: „Das kann ich so nicht“. Sie lässt den Punkt aus.

Bei Teilaufgabe (b) erkennt sie sofort, dass sie die Lösungsformel benötigt, welche sie sicherheitshalber in der Formelsammlung nachschlägt. Den ersten Punkt begründet Amelie algebraisch und geht gleich über zum zweiten Punkt, welchen sie grafisch erklären möchte. Dabei deutet sie die Wirkung der Parameter nicht ganz korrekt:

> *„Die Funktion muss eine positive und eine negative Nullstelle haben, weil sie eine normale quadratische Funktion ist, die nur nach unten verschoben ist. Und sie ist symmetrisch zur y-Achse. Also schneidet sie die x-Achse einmal links und einmal rechts der y-Achse.“*

Sie zeichnet dafür keine Skizze, auch nicht am Taschenrechner. So fällt Amelie ihr Fehler nicht auf und sie macht mit Teilaufgabe (c) weiter.

Hier berechnet sie das unbestimmte Integral händisch und löst die Gleichung auch ohne Taschenrechner richtig. Den berechneten Parameter p setzt sie in die Funktionsgleichung ein und zeichnet den Graphen am Taschenrechner. Richtigerweise erkennt sie, dass die Flächenstücke von –1 bis 0 und von 0 bis 1 nicht gleich groß sind, und schließt daraus, dass die Integrale verschieden sein müssen.

Danach widmet sie sich nochmals dem zweiten Punkt der Teilaufgabe (a). Sie erkennt anhand der Linearfaktoren, dass z und $^1/_z$ die Lösungen der reziproken quadratischen Gleichung sein müssen. Daraus schließt sie, dass 1 eine Lösung sein könnte. Mit dieser Erkenntnis weiß sie aber nicht viel anzufangen. Sie setzt z noch in die Gleichung ein, weiß dann aber nicht mehr weiter und gibt schließlich auf.

Amelie hätte bei dieser Aufgabe drei von sechs Punkten erreicht.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Amelie lässt sich von der ihr unbekannten reziproken quadratischen Gleichung nicht irritieren. Sie erkennt, dass es eigentlich eine gewöhnliche quadratische Gleichung ist und multipliziert die Klammern aus, sodass sie zu der ihr gewohnten Schreibweise gelangt. Danach behandelt sie die Gleichung wie jede andere quadratische Gleichung.

Eine weitere Strategie, die Amelie anwendet, ist das Suchen nach Analogieschlüssen. Immer wieder überlegt sie, ob sie bereits eine ähnliche Aufgabenstellung bearbeitet hat. Bereits während des Bearbeitens der Aufgabe meint sie: „Das ist schwierig, wenn man das noch nie gesehen hat." Damit weist sie darauf hin, dass sie gern nach bekannten Strukturen sucht, die sie dann auf die vorliegende Aufgabenstellung umlegen kann, wie sie es bei Teilaufgabe (a) gemacht hat.

Beim Begründen in Teilaufgabe (b) argumentiert sie Schritt für Schritt mithilfe von Kausalsätzen, die auf ein Vorwärtsarbeiten hinweisen:

> *„<u>Wenn</u> ich für q –1 einsetze, <u>dann</u> habe ich hier +1. <u>Dadurch</u> ist der Ausdruck unter der Wurzel immer positiv. Und <u>dann</u> gibt es immer plus-minus der Wurzel, <u>also</u> gibt es immer zwei Lösungsfälle. ..."*

Auch bei Teilaufgabe (c) berechnet Amelie zuerst das unbestimmte Integral, setzt anschließend die Grenzen ein und setzt dann erst den Term gleich –6, um ihn schlussendlich nach p zu lösen. Hier erkennt man wiederum durchgeplantes, schrittweises Vorwärtsarbeiten.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Bei Teilaufgabe (a) ist Amelie bei beiden Punkten am richtigen Weg, gibt aber beide Male kurz vor der Lösung auf. Ihr fehlt die letzte zündende Idee und das kognitive Werkzeug, um die Anforderungen der Aufgabe erfüllen zu können. Ansatzweise hat sie zwar einen Plan, der ist jedoch nicht bis zum Schluss fertiggedacht. Durch das Vorwärtsarbeiten verlässt sie sich vielleicht zu sehr darauf, am Weg noch die rettende Idee zu haben.

Eine weitere Schwierigkeit erzeugt sich Amelie selbst, weil sie kaum ihren Taschenrechner verwendet. Sie könnte etwa die Graphen mit selbstgewählten Werten am Taschenrechner skizzieren und sich so eine bessere Vorstellung der Gegebenheiten verschaffen. Dann würde ihr eventuell auch nicht der Denkfehler bei Teilaufgabe (b) passieren.

5.4. Fallskizze Josephine

Die Schülerin Josephine verwendet beim Bearbeiten der Aufgaben den grafikfähigen Taschenrechner TI-Nspire mit CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Zu Beginn verschafft sich Josephine einen Überblick und lässt die gesamte Teilaufgabe (a) gleich aus. Sie meint nämlich, nicht zu wissen, „was das ‚z' da soll“. Darum widmet sie sich Teilaufgabe (b) und erkennt wegen des Signalwortes „Lösungen“ sofort, dass sie die Diskriminante berechnen muss. Doch die Tatsache, dass sie für p keinen fixen Wert hat, irritiert sie:

> *„Aber ich weiß ja das p nicht. Aber wenn ich die Diskriminante berechne, dann komme ich normalerweise auf irgendwas drauf. Nur was, ist die Frage...“*

Weil Josephine nicht weiterweiß, probiert sie einen anderen Weg: Sie tippt die gegebene Gleichung in den Taschenrechner ein und löst sie mit dem Solve-Befehl. Dadurch erhält sie zwei eher komplizierte Terme als Lösungen für x, mit denen sie nichts anzufangen weiß: $x_1 = \frac{-\sqrt{p^2+4}+p}{2}$ und $x_2 = \frac{-\sqrt{p^2+4}-p}{2}$. Nachdem dies bereits zwei unterschiedliche Lösungen sind, überlegt sie, ob dies als Begründung ausreichend sein könnte. Mithilfe einer händischen Skizze versucht Josephine die Aufgabenstellung besser zu verstehen. Dabei erkennt sie, dass die Aussage stimmen muss. Trotzdem ist sie sich unsicher, wie sie diese Tatsache rechnerisch begründen kann. Schließlich belässt sie es dabei, dass die beiden berechneten Lösungen aufgrund der Vorzeichen verschieden sein müssen.

Für den zweiten Punkt von Teilaufgabe (b) zeichnet sie mögliche Funktionen am Taschenrechner und erkennt, dass alle positiv gekrümmt und nach unten verschoben sind. Mithilfe einer Skizze verdeutlicht sie diesen Zusammenhang und begründet damit, warum die Aussage stimmen muss.

Um Teilaufgabe (c) zu lösen, will Josephine die Gleichung „F(–1) – F(1) = –6“ am Taschenrechner lösen. Jedoch vergisst sie, dass sie in die Stammfunktion F(x) einsetzen muss und nicht in die gegebene Funktion f(x). Zufälligerweise erhält sie bei dieser Rechnung dennoch den richtigen Wert für p. Dennoch wäre diese Antwort bei der Reifeprüfung als inkorrekt zu werten, weil der Rechenweg falsch ist.

Den zweiten Punkt von Teilaufgabe (c) kann sie aber ohne Probleme lösen. Sie berechnet am Taschenrechner die beiden bestimmten Integrale und stellt fest, dass sie nicht gleich sind.

Schließlich widmet Josephine sich Teilaufgabe (a), wo sie erkennt, dass die beiden Gleichungen gleichgesetzt werden können, weil sie beide den Wert Null haben. Weil sie keine anderen Ideen hat, lässt sie diese Gleichung am Taschenrechner nach x lösen. Die Lösung am Display ergibt für sie keinen Sinn, weshalb sie es schlussendlich sein lässt.

Josephine hätte bei dieser Aufgabe drei von sechs Punkten erreicht.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Im Laufe der Aufgabenbearbeitung versucht Josephine immer wieder Schritt für Schritt vorwärts zu arbeiten. Sie verschafft sich regelmäßig einen Überblick darüber, welche Informationen sie hat und was sie damit machen könnte. Dabei handelt es sich stets nur um kurzfristige Pläne. Wenn sie einen kleinen Meilenstein erreicht hat, überlegt sie aufs Neue, was sie als Nächstes machen könnte. Ihr letzter Ausweg scheint dabei fortwährend der Solve-Befehl am Taschenrechner zu sein, mit dessen Ergebnissen sie aber selten etwas anfangen kann.

Außerdem findet sie auch Analogien zu bereits erfolgreich gelösten Aufgaben. Zum Beispiel erinnert sie sich sofort, dass die Diskriminante untersucht werden muss, wenn es um Lösungsfälle einer quadratischen Gleichung geht. Jedoch ist das schon wieder alles, was sie dazu zu wissen scheint. Schließlich verwendet sie dieses Wissen überhaupt nicht in ihrer Argumentation.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Wie oben schon erwähnt, fehlt es Josephine beim Bearbeiten der Aufgaben immer wieder an alternativen Lösungsstrategien. Sie hat Schwierigkeiten dabei, die verschiedenen Grundkompetenzen miteinander zu verknüpfen. So kann sie zum Beispiel die Auswirkungen der Diskriminante nicht mit der Lösungsmenge verbinden. Dadurch findet sie in vielen Aufgaben kaum Alternativen zum Probieren mit dem Solve-Befehl am Taschenrechner. Dabei ist zu beobachten, dass sie die Ergebnisse, die ihr am Taschenrechner angezeigt werden, nicht interpretieren kann. Scheinbar versteht sie nicht wirklich, was sie berechnet hat, beziehungsweise überhaupt berechnen soll.

Zusätzlich zu diesen grundlegenden Schwierigkeiten passiert ihr in Teilaufgabe (c) ein Fehler, der sie bei der Reifeprüfung um einen weiteren Punkt bringen würde. Denn sie spricht davon, das Integral berechnen zu müssen, und schlägt die Berechnung eines bestimmten Integrals sogar in der Formelsammlung nach. Dann berechnet sie aber die Differenz zwischen den beiden Funktionswerten. Vermutlich handelt es sich hier nur um einen Flüchtigkeitsfehler aufgrund der fortgeschrittenen Zeit, der jedoch trotzdem vermeidbar ist.

5.5. Fallskizze Helena

Die Schülerin Helena verwendet beim Bearbeiten der Aufgaben den grafikfähigen Taschenrechner TI 82 STATS ohne CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Helena beginnt mit Teilaufgabe (a) und liest sich die Angabe genau durch. Nachdem sie eine Weile nachgedacht hat, meint sie, dass sie die Aufgabenstellung nicht wirklich versteht. Kurz überlegt sie, ob die gegebenen Linearfaktoren $(x - z) \cdot (x - \frac{1}{z})$ vielleicht mit den binomischen Formeln verwandt sind. Diesen Gedanken verwirft sie aber wieder schnell, weil sie keinen Zusammenhang findet.

Dann widmet sie sich dem zweiten Punkt in der Hoffnung, dass dieser ohne die Parameter p und q lösbar ist. Sie setzt die linken Seiten der beiden Gleichungen gleich, multipliziert die Klammern aus und vereinfacht die Gleichung händisch:

> *„Aber das Problem ist dann, dass da p und q drinnen sind. Das sind ja eigentlich Zahlen, aber jetzt nur Variablen. Und die kann ich ja nicht einfach wegkürzen. Und wie sollte ich x wegbekommen? Also hätte ich dann nur eine Gleichung und drei Unbekannte. Ich probiere einfach mal, was rauskommt.“*

Beim Vereinfachen der Gleichung passieren Helena mehrere schwere Fehler, die ihr Ergebnis völlig verfälschen. Sie fasst Terme zusammen, die nicht zusammenpassen, verwendet den Produkt-Null-Satz bei Summen und setzt Werte für Variablen ein, die keinen Zusammenhang haben (siehe Abbildung 24). Mittlerweile hat sie selbst den Überblick verloren und meint: „Aber ich weiß jetzt eigentlich nicht mehr, was ich suche.“ Aufgrund der fortgeschrittenen Zeit geht sie weiter zu Teilaufgabe (b).

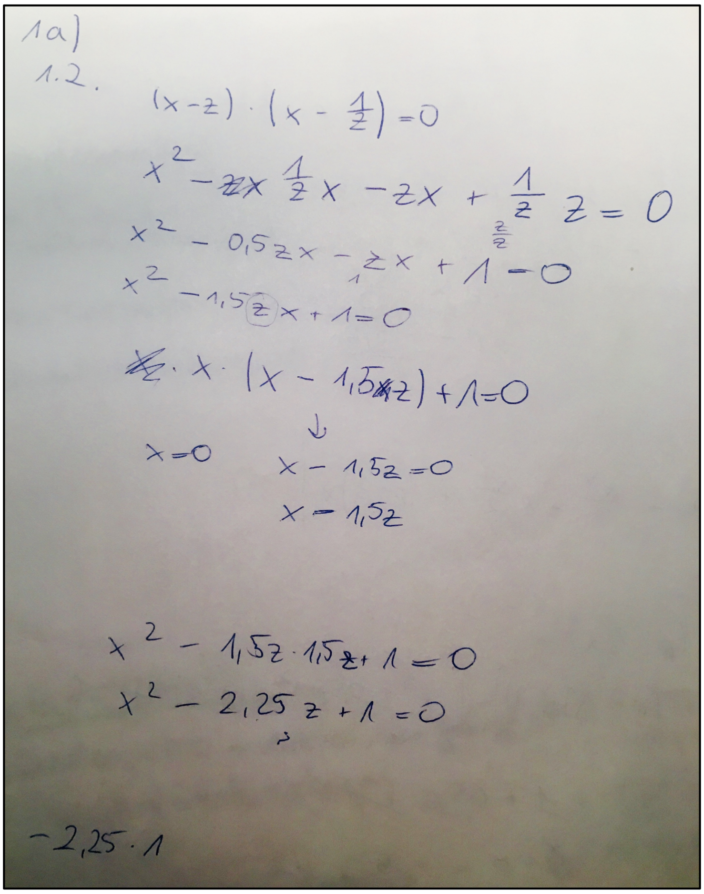


Abbildung 24 - Notizen von Helena (1) (private Quelle)

Um sich die Funktion besser vorstellen zu können, zeichnet Helena am Taschenrechner einen passenden Funktionsgraphen mit selbst gewählten Werten. Anhand des Graphen erkennt sie, dass die Aussage stimmen muss. Damit argumentiert sie auch und lässt die Aufgabenstellung, „rechnerisch“ begründen zu müssen, außer Acht. Dafür hat sie die Argumente für den zweiten Punkt schon formuliert. Hier zeichnet sie nur noch eine Skizze und markiert den Schnittpunkt (0|–1) der Parabel mit der y-Achse. Zwar schreibt sie nicht ausdrücklich auf, dass die Funktion positiv gekrümmt sein muss, es ist aber aus der Skizze erkenntlich.

Bei Teilaufgabe (c) begreift Helena schnell, dass sie für x die Werte –1 und 1 einsetzen muss. Jedoch setzt sie in folgende in vielerlei Hinsicht falsche Gleichung ein: „f(–1) + f(1) = –6“. Kurz überlegt sie noch, ob sie vielleicht doch lieber integrieren sollte, meint aber, dass ihr das zu kompliziert wäre. Beim händischen Lösen der Gleichung passieren ihr wieder viele Fehler. Als Ergebnis erhält sie p = –3,6. Zur Kontrolle zeichnet sie die Funktion mit diesem Wert am Taschenrechner und berechnet mit dem bestimmten Integral die Fläche unter dem Graphen. Weil dies nicht –6 ergibt, entscheidet sie sich doch fürs Integrieren.

Doch Helena berechnet es noch immer falsch: „F(–1) + F(1) = –6“. Und wieder macht sie einige Fehler beim Umformen. Immer wieder erhält sie falsche Werte für p, doch erkennt diese Fehler beim grafischen Kontrollieren. Schließlich probiert sie nur noch verschiedene Werte für p und erhält schlussendlich den richtigen Wert. Weil sie aber die irreführenden Rechenwege in ihren Notizen stehen lässt (siehe Abbildung 25) und die richtige Lösung nicht eindeutig als ihre Antwort markiert, würde sie bei der Reifeprüfung dafür vermutlich keinen Punkt bekommen.

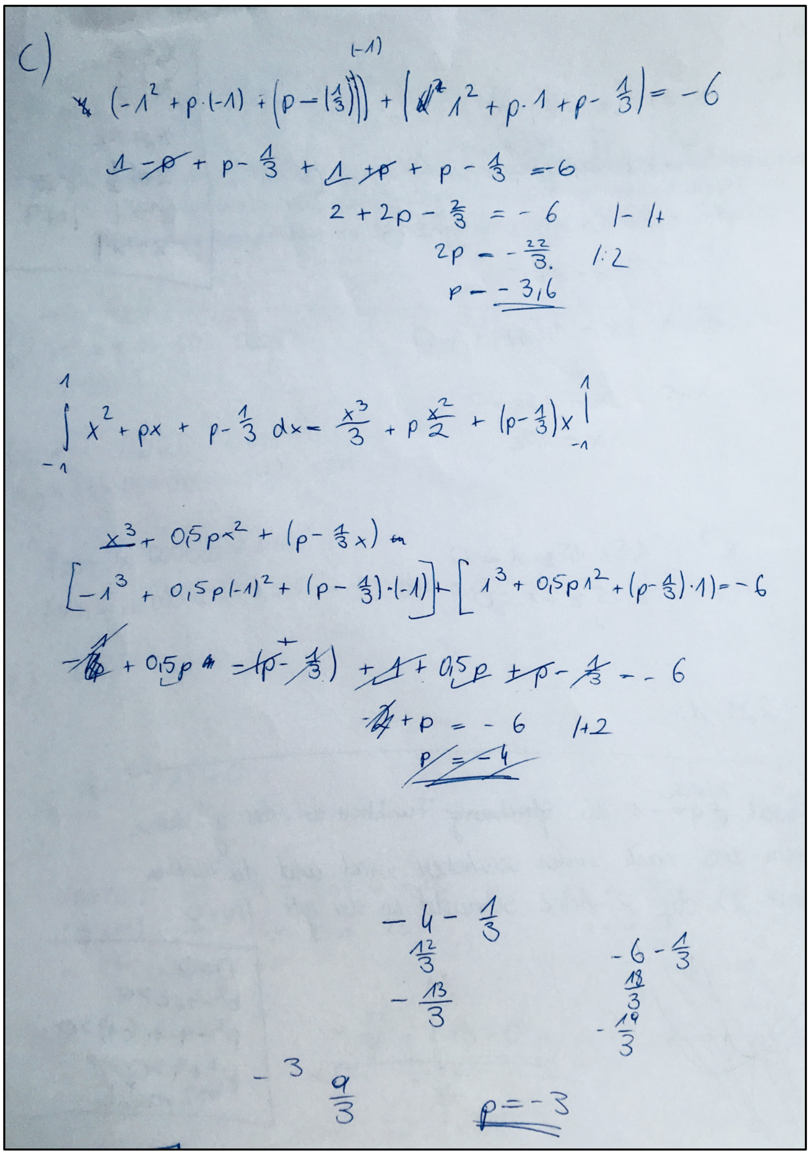


Abbildung 25 – Notizen von Helena (2) (private Quelle)

Nachdem Helena nun aber den richtigen Wert für p hat, kann sie den Funktionsgraphen zeichnen und die beiden Flächenstücke zwischen den gegebenen Grenzen vergleichen. Sie begründet mithilfe der Asymmetrie des Graphen, dass die beiden bestimmten Integrale nicht gleich sein können. Die oberen Aufgaben schaut sie sich nicht nochmal an, weil sie nicht denkt, dass sie diese noch lösen könnte.

Helena hätte bei dieser Aufgabe zwei von sechs Punkten erreicht.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Helena versucht immer wieder, vom Gegebenen aus weiterzuarbeiten. Sie nimmt die gegebenen Informationen und schaut, was sie damit machen kann, ohne dabei einen langfristigen Plan zu verfolgen. Man könnte meinen, sie arbeitet vorwärts, jedoch ohne dabei ihr Ziel zu kennen: „Ich probiere einfach mal, was rauskommt." Sie selbst beschreibt ihre Lösungsstrategie als Rätselraten:

> *„Dann denke ich mir bei den Aufgabenstellungen auch immer sofort: ‚Was wollen die jetzt von mir hören?' Ich möchte also keine Lösung auf das Problem finden, sondern den Punkt bekommen. Das geht oft durch Probieren schneller als mit komischem Rechnen. Das kommt mir halt oft vor wie Rätselraten. Das macht es extrem schwierig für mich. Aber ich gebe prinzipiell nicht auf. Mehr als falsch kann mein Ergebnis nicht sein. Irgendetwas schreibe ich immer hin."*

Außerdem probiert Helena manchmal aus, verschiedene Werte in die Funktionsgleichungen einzusetzen, und überprüft deren Auswirkungen mit dem Taschenrechner. Auf diese Weise findet sie zum Beispiel bei Teilaufgabe (c) den richtigen Wert des Parameters p. Generell hilft ihr das Visualisieren der Funktionsgraphen am Taschenrechner dabei, die Aufgabenstellung besser zu verstehen. Durch diese Arbeitsweise entdeckt sie auch ihren Fehler bei Teilaufgabe (c) und kann ihren Lösungsweg nochmals kontrollieren.

Zusätzlich sucht Helena auch immer wieder nach Analogien zu bereits bekannten Aufgaben. Dies wird bei Teilaufgabe (b) deutlich, als sie sagt: „Den zweiten Punkt habe ich so noch nie gehört." Wenn ihr eine Aufgabenstellung bekannt vorkommt, arbeitet sie zielsicherer. Zum Beispiel weiß sie bei Teilaufgabe (c), dass das bestimmte Integral der Fläche entspricht, weil sie diesen Zusammenhang vermutlich bereits aus vielen anderen Aufgaben kennt.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Im Allgemeinen scheint Helena Schwierigkeiten dabei zu haben, die Aufgabenstellungen zu verstehen. Ihr Lösungsprozess erweckt den Eindruck, dass ihr einige Grundkompetenzen und demzufolge auch wichtige Verknüpfungen für das erfolgreiche Lösen dieser Aufgabenstellungen fehlen. Wie oben beschrieben, bezeichnet sie selbst ihr Lösungsverfahren als „Rätselraten“. Diese Einstellung ist durch die gesamte Aufgabe hinweg immer wieder zu erkennen. Besonders bei Teilaufgabe (a) ist ihr orientierungsloses „Drauf-Los-Rechnen“ zu beobachten, wobei ihr zusätzlich dazu auch viele technische und kognitive Fehler passieren.

Diese Defizite zeigen sich auch in Helenas Umgang mit der Sprache der Mathematik. Viele Ausdrücke verwendet sie im falschen Kontext und auch umgekehrt kann sie aus den mathematisch formulierten Angaben nicht erschließen, was genau gefragt ist. Auch beim mathematischen Argumentieren ist sie unsicher und schafft es nicht, ihre Gedanken auf den Punkt zu bringen. All diese Mängel deuten darauf hin, dass sie die für die Reifeprüfung relevanten Grundkompetenzen nicht ausreichend beherrscht.

5.6. Fallskizze Marie und Nora

Die Schülerinnen Marie und Nora verwendeten beim Bearbeiten der Aufgaben beide den grafikfähigen Taschenrechner TI 82 STATS ohne CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Die beiden Schülerinnen lesen sich zuerst die Angabe der Teilaufgabe (a) durch. Nora ist etwas verwirrt wegen des Ausdrucks „reziprok“. Doch Marie erkennt sofort, dass es sich dabei nur um eine „besondere“ quadratische Gleichung handelt, und stellt einen Zusammenhang mit der kleinen Lösungsformel her. Diese schlägt sie in der Formelsammlung nach, wo sie den Satz von Vieta entdeckt. Sie setzt die gegebenen Werte ein und vereinfacht die Ausdrücke. Nachdem sie ihren Gedankengang nochmal für Nora erklärt hat, weist diese sie auf einen Vorzeichenfehler hin. Sie korrigieren die Ausdrücke und erhalten schließlich zwei richtige Formeln für die Parameter p und q.

Beim zweiten Punkt weiß Marie, dass die Diskriminante Null sein muss, um genau eine Lösung zu erhalten. Um sicherzugehen, schlägt sie noch einmal die kleine Lösungsformel in der Formelsammlung nach, bevor sie die Werte für p und q einsetzt. Anschließend will sie die Gleichung $\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2 = 1$ händisch vereinfachen. Dabei unterlaufen ihr aber ein paar kleine Rechenfehler (siehe Abbildung 26). Während Marie rechnet, sitzt Nora ratlos daneben, weil sie Maries Schritte nicht nachvollziehen kann.

Weil Marie bei der Gleichung nicht weiterkommt, lassen sie es beide bleiben und gehen weiter zu Teilaufgabe (b).

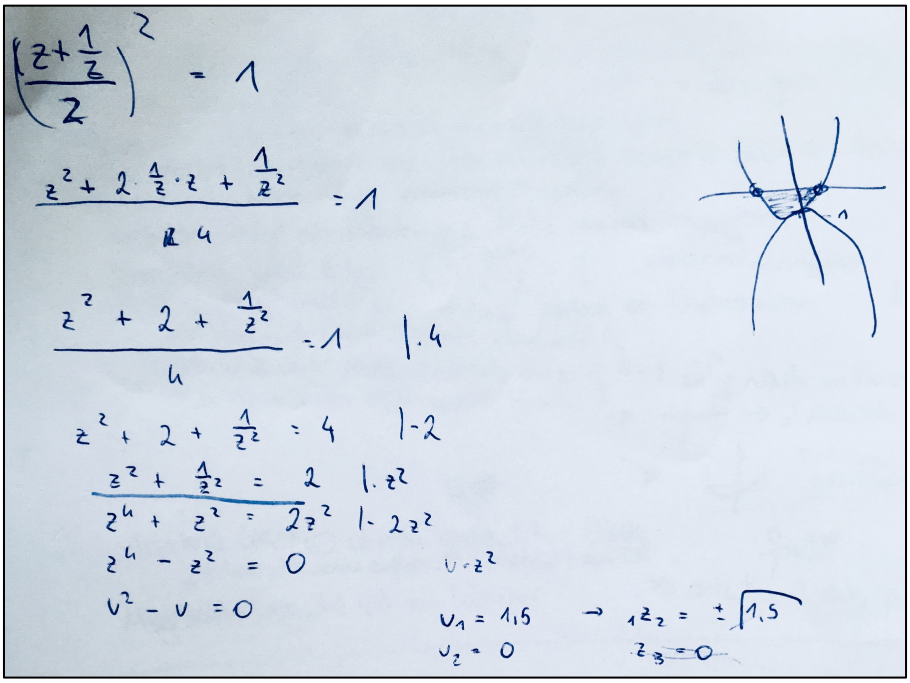


Abbildung 26 - Notizen von Marie (private Quelle)

Zum leichteren Verständnis der Angabe zeichnet Nora auf ihrem Taschenrechner verschiedene, passende Funktionsgraphen. Dabei fällt ihr auf, dass es immer eine positive und eine negative Nullstelle gibt. Jedoch weiß sie nicht so recht, wie sie diese Tatsache begründen könnte. Nach etwas Nachdenken meint Marie, dass die Diskriminante positiv sein muss. Für einen kurzen Moment meint Nora, dass das keinen Sinn ergebe. Doch dann hat sie die zündende Idee:

> *„Ich habe gerade vergessen, dass das Quadrat das p sowieso wieder positiv macht, egal welches Vorzeichen es hat. Und das q bringt das Minus schon mit und macht es also auch automatisch positiv. Also ist es immer positiv. Und die positive Diskriminante bringt automatisch zwei Lösungen."*

Aber Marie ist noch nicht ganz davon überzeugt, weil sie denkt, dass q und p fixe Werte haben müssen. Da erklärt ihr Nora noch einmal, warum der Wert von p egal ist. Nun ist auch Marie überzeugt und sie schreiben ihre Argumente auf. Den nächsten Punkt lösen sie gemeinsam sehr schnell, nachdem sie schon davor den Graphen skizziert haben. Sie argumentieren grafisch mit der positiven Krümmung und dem Schnittpunkt mit der y-Achse bei (0|–1).

Die Aufgabenstellung bei Teilaufgabe (c) irritiert beide Schülerinnen. Sie verstehen zwar, dass sie einen Wert für p brauchen, wissen aber nicht, wie sie diesen ermitteln können. Um sich mehr darunter vorstellen zu können, wählt Nora einen beliebigen Wert für p, nämlich p = 3, und zeichnet den Funktionsgraphen am Taschenrechner. Anschließend berechnet sie davon das Integral von –1 bis 1 und erhält 6. Weil das Integral –6 sein soll, probiert sie intuitiv p = –3 und nimmt dadurch zufälligerweise den richtigen Wert. Weil keine irreführende Rechnung in ihren Notizen steht, würden sie bei der Reifeprüfung dafür einen Punkt bekommen. Die beiden freuen sich über diesen glücklichen Zufall und gehen weiter zum letzten Punkt.

Weil sie schon die Funktionsgleichung berechnet haben, ermitteln die beiden Schülerinnen die zwei bestimmten Integrale am Taschenrechner und stellen fest, dass diese ungleich sind. Dann wissen sie aber nicht, wie sie das begründen sollen. Nora erkennt, dass die Flächen nicht gleich groß sind, aber das reicht Marie nicht als Begründung. Sie schreiben folglich gar nichts auf und hören auf, obwohl die Argumentation mit den ungleichen Flächenstücken stimmen würde.

Marie und Nora hätten bei dieser Aufgabe vier von sechs Punkten erreicht, wobei zu hinterfragen ist, wie viel sie davon jeweils alleine geschafft hätten.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Gemeinsam setzen die beiden Schülerinnen eine große Varietät an Strategien ein. Dabei greifen sie auch immer wieder auf ihre Formelsammlung und ihren Taschenrechner zurück, um auf weitere Ideen zu kommen. Mit dem Taschenrechner skizzieren sie auch die Angaben und probieren verschiedene Werte aus, um die Zusammenhänge zu visualisieren. Durch systematisches Probieren am Taschenrechner kommt Nora auch zur richtigen Lösung bei Teilaufgabe (c).

Außerdem suchen beide immer wieder nach Analogien zu bereits gelösten Aufgaben. Marie erkennt zum Beispiel bei Teilaufgabe (a) in der Formelsammlung den Satz des Vieta wieder und kann diesen auf die vorliegende Aufgabenstellung umlegen. Von dem Begriff „reziprok“ lässt sie sich nicht weiter irritieren und arbeitet mit der ihr bekannten Struktur von quadratischen Gleichungen weiter. Dabei arbeitet sie schrittweise vorwärts: Sie sucht den Satz von Vieta, setzt ein, vereinfacht und bekommt dadurch die gesuchte Lösung.

Bei Teilaufgabe (b) arbeiten die beiden in die andere Richtung: Marie erkennt die Struktur der Lösungsfälle von quadratischen Gleichungen wieder und weiß damit sofort, dass sie die Diskriminante untersuchen müssen. Nora überlegt, welche Bedingungen die Parameter erfüllen müssen, um positiv zu sein, und kommt so zum Schluss, dass dies bereits der Fall ist. Dabei haben sie sich also vom gesuchten Ergebnis zurück zu den gegebenen Bedingungen gearbeitet.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Obwohl Marie bei Teilaufgabe (a) bereits den Zusammenhang mit dem Satz von Vieta entdeckt hat, wählt sie beim zweiten Punkt dieser Aufgabe einen eher umständlichen, fehleranfälligen Weg. Die Tatsache, dass ihr Taschenrechner keine CAS-Funktion hat, erschwert den Lösungsprozess umso mehr. Trotz richtigem Ansatz kommt sie also zu keiner Lösung.

Nora würde bei dieser Aufgabe schon viel früher aufgeben, weil für sie die Aufgabenstellung nicht verständlich ist. Im anschließenden Reflexionsgespräch meint sie:

> *„Ich mag das nicht, wenn da kein Kontext ist. Und keine fixen Zahlen. Das ist mir zu theoretisch und abstrakt. Ich möchte nicht so rein hypothetische Sachen begründen. Das verstehe ich nicht sofort und dann blockiere ich schnell.“*

Bei Teilaufgabe (c) haben beide Schülerinnen große Schwierigkeiten mit dem Verstehen der ersten Aufgabenstellung. Sie finden keinen passenden Plan, um den gesuchten Wert zu ermitteln. Teilweise liegt das daran, dass sie die Verknüpfung zwischen der gegebenen Funktion und dem bestimmten Integral nicht sehen. Die Tatsache, dass für p kein Wert gegeben ist, scheint sie dermaßen zu irritieren, dass sie nicht auf die Idee kommen, die Funktion als solches mit der Unbekannten zu integrieren.

Eine weitere Unsicherheit zeigen Marie und Nora beim Begründen mathematischer Aussagen. Offenbar ist ihnen nicht klar, welche Argumente als Begründung reichen. Insbesondere beim zweiten Punkt der Teilaufgabe (c) wird dies zum Stolperstein. Obwohl Nora schon die Begründung genannt hat, geben sie sich damit nicht zufrieden. Wahrscheinlich suchen sie nach einer allgemeingültigen Aussage. Für eine eindeutig definierte Funktion ist dies aber nicht notwendig. Letztendlich schreiben sie gar nichts und bekommen deshalb auch keinen Punkt.

5.7. Zusammenfassung der Lösungsstrategien

In den Lösungsprozessen der Aufgabe „Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen“ ist ein breites Spektrum an Lösungsstrategien zu beobachten. Dabei kann zwischen kognitiven und metakognitiven Strategien unterschieden werden.

Metakognitive Strategien beschreiben Handlungsschritte, die dabei helfen sollen, die Aufgabenstellung so zu strukturieren und zu ordnen, dass ein Plan gefunden werden kann. (vgl. Schukajlow 2011) Dazu zählen unter anderem das Visualisieren am Taschenrechner oder das Nachschlagen in der Formelsammlung. Auch informative Skizzen oder die Kontrolle der Ergebnisse zählen dazu.

Mit kognitiven Strategien sind hier heuristische Strategien gemeint (siehe III.3.2), wie zum Beispiel systematisches Probieren, Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten, Analogieschlüsse oder Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes. Hier handelt es sich um Bearbeitungsstrategien, welche die Durchführung des Plans ermöglichen sollen.

In untenstehender Tabelle 3 wird gekennzeichnet, welche Strategien im Lösungsprozess der jeweiligen Teilnehmerin beziehungsweise des jeweiligen Teilnehmers zu erkennen sind.

	Dietmar	**Thomas**	**Amelie**	**Josephine**	**Helena**	**Marie und Nora**
Visualisieren am Taschenrechner	x	x		x	x	x
Formelsammlung	x		x	x		x
(Systematisches) Probieren	x	x			x	x
Vorwärtsarbeiten			x	x	x	x
Rückwärtsarbeiten	x					x
Analogieschluss	x		x	x	x	x
Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes			x			x

Tabelle 3 - Eingesetzte Strategien bei "Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen"

In der Tabelle kann man sehen, dass bis auf eine alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer zumindest einmal die Funktionsgraphen am Taschenrechner zeichnen, um sich mehr unter der Angabe vorstellen zu können. Sie überprüfen zum Beispiel, ob die Aussagen in den Aufgabenstellungen grafisch überhaupt stimmen können. Zusätzlich benutzen manche die Grafikfunktion ihres Taschenrechners zur Kontrolle ihrer Ergebnisse. Diese metakognitive Strategie hilft einigen am Weg zu ihrer Lösung.

Auch die Formelsammlung wird von einigen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Hand genommen. In der Planungsphase schlagen sie die kleine Lösungsformel nach, und manche finden darin auch den Satz von Vieta. Die Formelsammlung hilft ihnen, sich einen Überblick über die gegebenen Bedingungen zu verschaffen. Anschließend können sie mit den gewonnenen Informationen einen Plan aufstellen.

Als kognitive Strategie wird das systematische Probieren vom Großteil der Teilnehmerinnen und Teilnehmer angewendet, wobei das Probieren bei manchen weniger systematisch ist als bei anderen. Meistens setzen sie diese Strategie ein, wenn sie die Auswirkungen von Parametern auf eine Parabel beobachten wollen. Dafür setzen sie verschiedene selbst gewählte Werte in die Funktionsgleichung ein und zeichnen die Graphen am Taschenrechner. Andere greifen auch auf diese Strategie zurück, wenn ein bestimmter Wert gefragt ist und sie keine alternativen Wege kennen. So stoßen zum Beispiel Marie und Nora auf den richtigen Wert bei Teilaufgabe (c), ohne die Aufgabenstellung wirklich verstanden zu haben.

Einen detaillierteren Plan brauchen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer, wenn sie vorwärts beziehungsweise rückwärts arbeiten. Für diese Bearbeitungsstrategien müssen sie genau wissen, was sie haben, wohin sie wollen und wie sie ihr Ziel erreichen können. Dafür ist es notwendig, die Grundkompetenzen nicht nur anzuwenden, sondern diese auch miteinander verknüpfen zu können. Kennt man gewisse Zusammenhänge und Abhängigkeiten, können die Handlungsabfolgen genauer geplant werden. Diese Strategie erweist sich meistens als zielführend.

Um einen passenden Plan zu finden, versuchen die meisten Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Analogieschluss zu ziehen. Das heißt, dass sie in ihrem Gedächtnis nach ähnlichen bereits gelösten Aufgabenstellungen suchen, in der Hoffnung, die damals eingesetzten Handlungsstrategien auch bei dieser Aufgabe anwenden zu können. Nicht alle stoßen dabei auf die zündende Idee. Doch viele erkennen zum Beispiel, dass die Lösungsfälle einer quadratischen Gleichung mit ihrer Diskriminante zusammenhängen, und untersuchen dann ebendiese, weil sie das schon oft bei anderen Aufgaben gemacht haben.

Manche Aufgabenstellungen haben die Teilnehmerinnen und Teilnehmer in der gegebenen Form aber noch nie gesehen. Besonders der Begriff „reziproke quadratische Gleichung“ scheint einige zu irritieren. Nur zwei Teilnehmerinnen schaffen es, sich von diesem Ausdruck nicht ablenken zu lassen. Denn sie begreifen, dass es sich dabei nur um eine quadratische Gleichung handelt, und arbeiten mit der ihnen bekannten Struktur weiter. Sie führen also Unbekanntes auf Bekanntes zurück.

5.8. Zusammenfassung der Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe

Die Schwierigkeiten, die im Zuge der Aufgabenbearbeitungen auftreten, können den einzelnen Phasen des adaptierten Vier-Phasen-Modell Pólyas zugeordnet werden (siehe III.3.1): Verstehen, Planen, Ausführen des Plans und Rückschau.

In der ersten Phase muss die Aufgabenstellung erst einmal verstanden werden. Dies kann grob gefasst an zwei Dingen scheitern: Einerseits können Probleme bei der Lesekompetenz auftreten, andererseits kann die Schwierigkeit im Umgang mit der Sprache der Mathematik liegen.

Defizite in der Lesekompetenz werden hier sichtbar, wenn die Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Teil der Aufgabenstellung überlesen oder falsch deuten. Beispielsweise überliest Helena, dass sie den ersten Punkt bei Teilaufgabe (b) rechnerisch begründen soll, und argumentiert rein grafisch. Auch Thomas liest sich die Angabe manchmal nicht ganz genau durch und erfüllt infolgedessen nicht die gesamte Aufgabenstellung. Lesekompetenz wird bei der Reifeprüfung in sämtlichen Fächern vorausgesetzt. Derartige Fehler sollten bei der Klausur nicht mehr passieren, weil sie die eigentliche mathematische Leistung der Kandidatinnen und Kandidaten verzerren.

Die noch viel größere Hürde beim Verstehen der Aufgabe ist das Begreifen der mathematischen Angaben. Immer wieder ist zu beobachten, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die gegebenen mathematischen Strukturen nicht interpretieren können. Dadurch können die Jugendlichen gar nicht erst erfassen, was von ihnen verlangt wird. Dieses Übersetzen zwischen Alltagssprache und mathematischen Ausdrücken wird in beiderlei Richtung verlangt. Darum ist ein flexibler Umgang mit der Sprache der Mathematik von wesentlicher Bedeutung, bei welchem in dieser Untersuchung vermehrt Mängel beobachtbar sind.

Erst wenn die Aufgabenstellung zur Gänze verstanden ist, sollte man sich dem Planen widmen. Nachdem aber bereits beim Verstehen viele Probleme auftreten, ist es für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer umso schwieriger, einen zielführenden Plan aufzustellen.

Es fällt auf, dass ihnen wenig Strategien zur Verfügung stehen. Wie oben bereits erwähnt, entscheiden sich viele für das Probieren, wenn sie keine Alternativen kennen. Neben der Beschränkung der Allgemeinheit ist auch ein weiteres Problem beim Probieren, dass es oft nicht systematisch erfolgt und die Jugendlichen dadurch oft ziellos zu arbeiten scheinen.

Generell lässt sich beobachten, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer mitten während der Durchführungsphase nicht genau wissen, warum sie das eigentlich machen, was sie gerade machen. Immer wieder fragen sie sich, was eigentlich gefragt ist, obwohl sie schon lange an der Aufgabe arbeiten. Diese Orientierungslosigkeit kann sowohl mit dem Fehlen eines durchdachten Plans als auch einem lückenhaften Verständnis der Aufgabenstellung in Verbindung gesetzt werden. Es ist anzunehmen, dass die Aufgabenbearbeitung erfolgreicher wäre, würde man anfangs mehr Zeit in einen Plan investieren.

Während der Durchführungsphase treten technische wie auch kognitive Schwierigkeiten auf. Unter technischen Schwierigkeiten versteht man Fehler im Rechenprozess. Dazu zählen unter anderem Flüchtigkeitsfehler wie die von Marie und Nora, als sie ein Vorzeichen vertauschen. Genauso gehören auch Helenas Ausführungsfehler dazu, als sie die Gleichungen falsch umformt. Viele dieser technischen Hürden können heutzutage durch den verstärkten Einsatz von Technologie vermieden werden. Insbesondere Kandidatinnen und Kandidaten, die den TI-Nspire verwenden, hatten kaum bis gar keine technischen Probleme.

Viel gravierender sind kognitive Schwierigkeiten in der Durchführungsphase, da diese nicht mit technischen Hilfsmitteln umgangen werden können. Grund dafür sind grundlegende Fehlkonzepte von mathematischen Zusammenhängen. Während einige Teilnehmerinnen und Teilnehmer Probleme mit der Vernetzung gewisser Grundkompetenzen haben, scheitern andere schon an einem verständigen Einsatz der für die Reifeprüfung benötigten Grundkompetenzen.

Auch in der abschließenden Phase kommt es noch zu Stolpersteinen. Hier fällt es den Teilnehmerinnen und Teilnehmern oft schwer, ihr Ergebnis mathematisch zu begründen. Scheinbar wissen einige nicht genau, was eine mathematische Argumentation beinhalten muss. Beispielsweise hätten Marie und Nora schon eine ausreichende Begründung gefunden, sind mit dieser aber nicht zufrieden und geben frühzeitig auf. Währenddessen denken Thomas und Helena fälschlicherweise, eine Aussage ausreichend begründet zu haben, obwohl ihre Argumentationen nicht detailliert genug sind. Bei diesen Aspekten ist wieder ein flexibler Umgang mit der Sprache der Mathematik von großer Bedeutung. Die Unsicherheiten in diesem Bereich wirken sich negativ auf den Lösungserfolg aus.

Obwohl bei dieser Aufgabe ein dezidiertes Interpretieren der Ergebnisse nicht notwendig ist, sollten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer trotzdem verstehen, was sie berechnet haben. Die kognitiven Lücken sind bei Thomas und Helena jedoch derartig groß, dass sie ihre Zwischenergebnisse teilweise inkorrekt deuten und deshalb ihren Lösungsweg in eine falsche Richtung fortsetzen.

Zum Überblick werden die bei dieser Aufgabe auftretenden Schwierigkeiten je nach Teilnehmerin beziehungsweise Teilnehmer in der untenstehenden Tabelle 4 gekennzeichnet.

	Dietmar	**Thomas**	**Amelie**	**Josephine**	**Helena**	**Marie und Nora**
Lesekompetenz		x		x	x	
Sprache der Mathematik	x	x	x	x	x	x
Plan finden	x	x	x	x	x	x
Plan durchführen (technisch)					x	x
Plan durchführen (kognitiv)		x	x	x	x	
Interpretation		x			x	
Argumentation		x		x	x	x

Tabelle 4 - Auftretende Schwierigkeiten bei "Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen"

Anhand der Tabelle lässt sich erkennen, dass die meisten Probleme bereits beim Verstehen der Aufgabenstellung auftreten. Infolgedessen kommt es auch beim

Beschließen eines Plans zu großen Schwierigkeiten. All diese Punkte stehen in direkter Verbindung mit den beobachteten Mängeln im Umgang mit der Sprache der Mathematik und den unvollständigen Vernetzungen zwischen einzelnen Grundkompetenzen.

5.9. Zusammenfassung der Lösungserfolge

In Tabelle 5 werden die erreichten Punkte der einzelnen Teilnehmerinnen und Teilnehmer dargestellt, wenn die Antworten nach dem Prinzip der Reifeprüfung beurteilt würden. Die Punktevergabe wurde dabei an die Lösungserwartung des BMB (2016d) angepasst. Maximal können sechs Punkte erreicht werden.

	(a)1	(a)2	(b)1	(b)2	(c)1	(c)2	Gesamt
Dietmar	0	0	1	1	1	1	**4**
Thomas	0	0	0	1	1	1	**3**
Amelie	0	0	1	0	1	0	**3**
Josephine	0	0	1	1	0	1	**3**
Helena	0	0	0	1	0	1	**2**
Marie und Nora	1	0	1	1	1	0	**4**

Tabelle 5 - Punktevergabe bei "Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen"

Es fällt auf, dass niemand mehr als vier von sechs Punkten erreicht. Es gibt keine Aufgabenstellung, die alle lösen können. Einen Punkt kann sogar niemand lösen. Durchschnittlich erreichen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer nur rund 53% der möglichen Punkte. Dieses Ergebnis ist eher niedrig und weist auf grobe Probleme im Lösungsprozess hin. Die Schwierigkeiten, die im Laufe der Aufgabenbearbeitung auftreten, wurden im Kapitel 5.8 näher erläutert.

Besonders mager sind die Ergebnisse bei Teilaufgabe (a), wo nur das Schülerinnenpaar zumindest einen der beiden Punkte erzielen kann. Das kann darauf zurückgeführt werden, dass die Aufgabenstellung mit sehr vielen mathematischen Ausdrücken formuliert ist, von denen manche für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer neu sind, wie zum Beispiel der Begriff „reziprok“ im Kontext quadratischer Gleichungen. Nachdem die mathematische Sprache für viele Jugendliche eine Hürde darstellt, kommen sie nicht über die Phase des Verstehens hinaus. Hinzu kommt, dass die Aufgabenstellung hier mehrere Verknüpfungen von Grundkompetenzen verlangt, die bei manchen Teilnehmerinnen und Teilnehmern scheinbar nicht fest verankert sind. Außerdem muss die Aufgabe in mehreren Schritten bearbeitet werden, um zu einer Lösung zu kommen. Jedoch verfügen einige Jugendliche nicht über ausreichende Lösungsstrategien, um einen zielführenden Plan zu finden.

Die beiden höchsten Lösungsquoten werden jeweils bei den zweiten Punkten der Teilaufgaben (b) und (c) erreicht. Die Aufgaben haben gemeinsam, dass bei ihnen Aussagen über Funktionsgraphen begründet werden müssen. Dabei ist der Argumentationsweg den Teilnehmerinnen und Teilnehmern überlassen. Die meisten Jugendlichen entscheiden sich bei diesen Aufgaben für eine grafische Argumentation. Mithilfe ihres grafikfähigen Taschenrechners können sie die Aufgabe visualisieren und infolgedessen besser verstehen. Zusätzlich hilft es ihnen, dass beide Aufgaben durch Einsetzen und Probieren gelöst werden können. So können auch Jugendliche, die weniger Strategien beherrschen, Punkte erzielen.

Nichtsdestotrotz sind große Defizite beim mathematischen Arbeiten und Argumentieren zu erkennen, mit welchen dieses Ergebnis begründet werden kann.

6. Analyse von eingesetzten Strategien und Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe „Design-Center Linz“

6.1. Fallskizze Dietmar

Der Schüler Dietmar verwendet beim Bearbeiten der Aufgaben den grafikfähigen Taschenrechner TI-Nspire mit CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Nachdem Dietmar den einleitenden Kontext überflogen hat, liest er sich die Aufgabenstellung der Teilaufgabe (a) genauer durch. Als Erstes will er die Skizze mit den Werten aus dem Kontext beschriften. Jedoch hat er anfängliche Schwierigkeiten damit, den Begriff „Spannweite der Bögen“ den Maßen auf der Skizze richtig zuzuordnen. Er muss sich die Angabe nochmals durchlesen und betrachtet die Abbildung des Design-Centers genauer, bis er den Wert richtig deuten kann. Schließlich kennzeichnet er den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse mit 13 und die Nullstellen mit –36 und 36.

Weil Dietmar dann aber nicht weiterweiß, geht er zum zweiten Punkt von Teilaufgabe (a) weiter. Das Integral deutet er sofort als Fläche und erkennt schnell, dass es sich bei dem gesamten Term um das Volumen des Design-Centers handelt.

Genauso schnell wie diese Aufgabe löst Dietmar auch den ersten Punkt von Teilaufgabe (b). Die Prozentrechnung signalisiert für Dietmar automatisch, dass ein exponentielles Wachstum vorliegt. Er stellt einen exponentiellen Term auf und berechnet das Ergebnis mit dem Taschenrechner.

Anschließend denkt Dietmar ein paar Minuten über den zweiten Punkt nach. Ihm ist klar, dass das arithmetische Mittel nicht stimmen kann, weil sich die Prozentwerte immer aufs Vorjahr beziehen. Doch er kennt keine alternative Berechnungsart für den Durchschnitt. Deshalb schlägt er die Formelsammlung auf. Zuerst sucht er im Kapitel zur Exponentialfunktion nach einer zündenden Idee. Nachdem er diese dort nicht findet, blättert er weiter zu den Änderungsmaßen und schließlich zur Statistik. Dort betrachtet er länger die verschiedenen Zentralmaße, die dort aufgelistet sind:

> *„Ich suche nach irgendeiner Formel, die mir vielleicht helfen kann. Ich weiß jetzt schon, dass das das arithmetische Mittel ist und dass das aber hier nicht so ganz passt. Ich weiß auch warum. Aber jetzt such ich nach einem anderen Weg, das zu berechnen."*

Jedoch findet er nichts, was ihm hilfreich erscheint. Darum lässt er den Punkt aus und widmet sich nochmal Teilaufgabe (a).

Dafür nimmt Dietmar jetzt den Taschenrechner zur Hand und zeichnet die Graphen verschiedener quadratischer Funktionen. Dabei untersucht er die Auswirkungen der Parameter a, b und c auf den Graphen der Funktion. Während er sehr schnell begreift, dass $c = 13$ sein muss, dauert es eher länger, bis er auf $b = 0$ kommt. An den Wert von a muss er sich länger herantasten, bis dieser endlich klein genug ist. Die fertige Funktionsgleichung überprüft er zum Abschluss noch mit einer Wertetabelle am Taschenrechner.

Für einen kurzen Moment überlegt Dietmar, ob er noch einmal über den zweiten Punkt der Teilaufgabe (b) nachdenken soll, lässt es schließlich aber sein.

Dietmar hätte bei dieser Aufgabe drei von vier Punkten erreicht.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Im Zuge der Aufgabenbearbeitung schafft es Dietmar, einige Analogien zu bereits bekannten Aufgaben zu finden. Zum Beispiel weiß er sofort, dass er das bestimmte Integral als Fläche deuten kann, weil er ein Integral schon oft als solches interpretiert hat. Auch das Steigen des Baukostenindex erkennt er schnell als exponentielles Wachstum wieder, weil er die prozentuelle Änderung mit dem Exponentialmodell verknüpfen kann.

Neben der Formelsammlung, in der er vergeblich nach einer Idee zum Berechnen des Durchschnittes sucht, verwendet er auch den Taschenrechner als Hilfsmittel. Auf diesem visualisiert er die Zusammenhänge zwischen Parameter und Funktionsgraphen. So testet er verschiedene Werte aus, bis er die korrekte Funktion gefunden hat.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Gleich zu Beginn hat Dietmar ein kleines Problem mit dem Ausdruck „Spannweite der Bögen“. Weil er diesen Wert nicht gleich auf der Skizze einordnen kann, scheint er etwas irritiert zu sein. Nachdem er keinen zufriedenstellenden Plan für den ersten Punkt der Teilaufgabe (a) findet, überspringt er die Aufgabe vorerst. Auch beim zweiten Anlauf braucht er eher länger, bis er eine Lösungsstrategie für sich findet. Im Reflexionsgespräch meint er dazu:

> *„Ich glaub, was ein bisschen schwierig für viele ist, ist von einem Kontext auf eine Funktion schließen. Also da auch die Parameter rauszufinden. Wir haben das viel öfter umgekehrt gemacht, wo wir eine gegebene Funktion interpretieren mussten. In die Richtung ist es schwieriger.“*

Bei der Aufgabe zum durchschnittlichen Baukostenindex begreift Dietmar zwar, warum die Rechnung nicht stimmen kann, findet aber keine alternativen Berechnungswege. Die Problematik scheint neu für ihn zu sein und er kann sich keine andere Berechnungsart herleiten. Selbst als er das geometrische Mittel in der Formelsammlung liest, erkennt er nicht, dass dies die notwendige Formel wäre. Das kann daran liegen, dass die Formel neu für ihn ist und er sie mit nichts in Verbindung setzen kann.

6.2. Fallskizze Thomas

Der Schüler Thomas verwendet beim Bearbeiten der Aufgaben den grafikfähigen Taschenrechner TI-Nspire mit CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Zu Beginn liest sich Thomas den Kontext durch und zeichnet die darin genannten Werte gleich in die Abbildung ein. Danach geht Thomas zum zweiten Punkt der Teilaufgabe (a) und deutet den Term ohne Probleme als das Volumen des Design-Centers.

Dann widmet er sich dem Ausgleichspunkt. Da weiß er gleich, dass der Funktionsgraph die y-Achse beim Wert 13 schneidet, also schreibt er „d = 13“. Um die restlichen Parameter zu bestimmen, zeichnet er am Taschenrechner verschiedene Parabeln mit variierenden Parametern und probiert, welche Werte passen könnten. Nach einer Weile hat er alle benötigten Werte gefunden, wobei der Wert für a nur gerundet ist. Danach erinnert sich Thomas, dass die Werte auch berechnet werden können, wenn man in eine Gleichung einsetzt. Er ist sich aber nicht sicher, welche Gleichung das sein muss. Und weil er schon eine Funktionsgleichung hat, erspart er sich diese Arbeit.

Nachdem er sich die Aufgabenstellung der Teilaufgabe (b) durchgelesen hat, denkt Thomas darüber nach, wie er die Baukosten berechnen kann. Er weiß, wie er die Baukosten vom Folgejahr ermitteln kann. Dann überlegt er: Wenn er diese wieder mit 1,035 multipliziert, erhält er wieder das darauffolgende Jahr. Auf diese Weise berechnet er sich schließlich die einzelnen Ergebnisse, bis er das Jahr 2003 erreicht.

Beim letzten Punkt denkt Thomas lange nach. Obwohl er erkennt, dass Prozentsätze nicht einfach summiert werden dürfen, weil sie sich immer auf einen Wert beziehen, findet er keine alternative Berechnungsart für den Durchschnitt.

Thomas hätte bei dieser Aufgabe drei von vier Punkten erreicht.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Auch bei dieser Aufgabe versucht Thomas die Aufgabenstellung besser zu verstehen, indem er den Funktionsgraphen am Taschenrechner zeichnet. Durch das systematische Probieren verschiedener Werte der Parameter gelangt er schließlich zur gesuchten Funktionsgleichung.

Eine weitere Strategie, die in Thomas’ Lösungsprozess gut sichtbar wird, ist das Vorwärtsarbeiten. Bei Teilaufgabe (b) nimmt er die gegebenen Baukosten und berechnet, auf welchen Wert sie im Folgejahr steigen. Danach nimmt er diesen Wert und verändert ihn wieder um denselben Prozentsatz. Diesen Schritt wiederholt er insgesamt neunmal bis er zum Endergebnis gelangt. Diesen etwas langwierigeren Weg muss er wählen, weil er nicht die Parallelen zu einem exponentiellen Wachstumsmodell erkennt.

Bei der Interpretationsaufgabe erkennt Thomas aber problemlos die Analogie zu bekannten Aufgabenstellungen und weiß sofort, dass das bestimmte Integral als Fläche gedeutet werden kann. Auch beim Aufstellen der Funktionsgleichung erinnert er sich an ähnliche Aufgaben, bleibt jedoch bei der Strategie des systematischen Probierens, weil ihm diese bereits die notwendigen Ergebnisse geliefert hat.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Bei der letzten Aufgabenstellung hat Thomas Schwierigkeiten, eine andere Berechnungsweise zu finden. Er versteht ansatzweise, dass die Berechnung mit dem arithmetischen Mittel nicht stimmen kann. Eine Alternative dazu kennt er aber nicht. Dabei kommt er auch nicht auf die Idee in der Formelsammlung zu suchen und schränkt damit das Wissen, auf welches er zurückgreifen könnte, erheblich ein.

6.3. Fallskizze Amelie

Die Schülerin Amelie verwendet beim Bearbeiten der Aufgaben den grafikfähigen Taschenrechner TI 82 STATS ohne CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Den einleitenden Kontext liest Amelie nur flüchtig, bevor sie mit Teilaufgabe (a) beginnt. Nach kurzer Nachdenkzeit stellt sie gleich einen Plan auf und führt eine umgekehrte Kurvendiskussion durch. Dafür formuliert passende ihre Bedingungen und löst das dadurch aufgestellte Gleichungssystem. Dabei unterläuft ihr aber ein Fehler: Anstatt (0|13) schreibt sie (13|0), sodass die errechnete Funktionsgleichung folglich nicht stimmt. Außerdem schreibt sie ihr Ergebnis nicht als Funktionsgleichung an, sondern inkorrekter Weise nur als Gleichung (siehe Abbildung 27).

Obwohl sie zur Kontrolle die erhaltene Funktion am Taschenrechner zeichnet und bemerkt, dass der Graph „komisch“ aussieht, geht sie weiter zum nächsten Punkt.

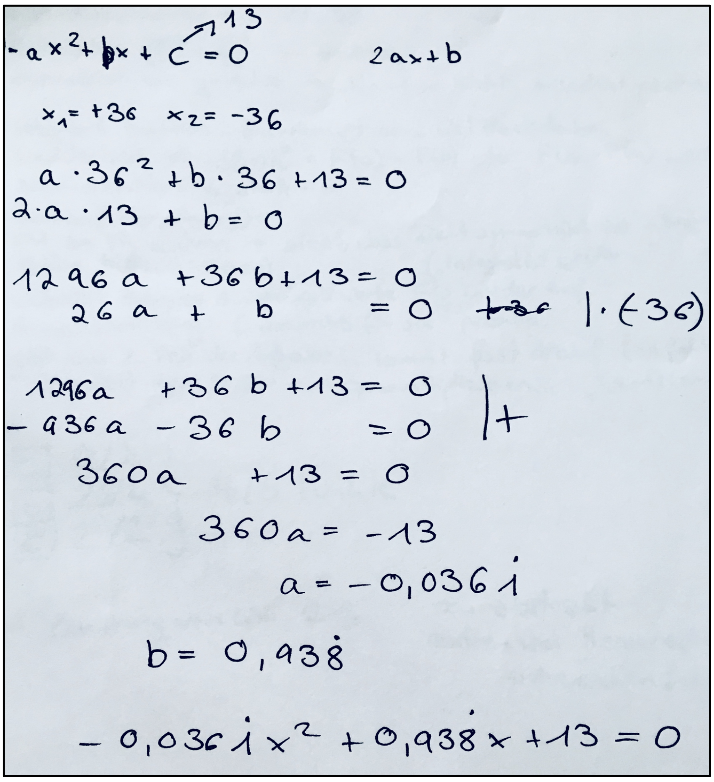


Abbildung 27 – Notizen von Amelie (private Quelle)

Den gegebenen Term beim zweiten Punkt der Teilaufgabe (a) interpretiert Amelie schrittweise: Als Erstes erkennt sie, dass es sich beim bestimmten Integral um die rechte Hälfte der Frontfläche handelt, beim Doppelten demnach um die gesamte Fläche. Dann überlegt sie eine Weile und kommt zu dem Schluss, dass Fläche mal Länge das Volumen ergeben muss. Obwohl sie kurz an ihrer Interpretation zweifelt, nennt sie das Volumen als Antwort.

Für den ersten Punkt der Teilaufgabe (b) stellt Amelie wieder sofort einen Plan auf. Sie erkennt, dass es sich um ein exponentielles Wachstum handelt. Darum nimmt sie den Grundwert und die prozentuelle Änderung und berechnet sich damit die Baukosten nach zehn Jahren.

Als Nächstes überlegt sie, wie man den durchschnittlichen Index anders berechnen könnte. Dafür nimmt sie die Formelsammlung zur Hand und sucht unter Änderungsmaßen nach Ideen. Für einen Moment zieht sie den Differenzenquotienten als Lösung in Erwägung, entscheidet sich schließlich aber dagegen und lässt die Aufgabe ungelöst.

Stattdessen kontrolliert Amelie nochmals ihre Interpretation in Teilaufgabe (a). Um sich mehr unter dem Term vorstellen zu können, möchte sie den Wert des Terms berechnen. Dann will sie anhand des Wertes einschätzen, ob es sich dabei tatsächlich um das Volumen handeln kann: „Aber ich gebe es lieber noch in den Taschenrechner ein und schaue, ob der Wert, der da herauskommt, realistisch klingt.“ Weil sie hier aber mit einer inkorrekten Funktionsgleichung arbeitet, erhält sie einen für sie ungewöhnlichen Wert. Aus Mangel an Zeit und Motivation hinterfragt sie dieses Ergebnis nicht weiter und lässt ihre Interpretation unverändert.

Amelie hätte bei dieser Aufgabe zwei von vier Punkten erreicht.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Beim Bearbeiten der Aufgabe verwendet Amelie sowohl die Formelsammlung als auch den Taschenrechner, um einen Überblick über die Aufgabe zu erlangen. In der Formelsammlung sucht sie nach zielführenden Ideen und am Taschenrechner kontrolliert sie das Ergebnis ihrer umgekehrten Kurvendiskussion. Dass dieses Ergebnis offenbar nicht stimmen kann, lässt sie dann aber unbeachtet.

Um bei Teilaufgabe (a) zur gesuchten Funktionsgleichung zu gelangen, arbeitet Amelie rückwärts von den besonderen Eigenschaften zur Funktionsgleichung. Die umgekehrte Kurvendiskussion setzt sie gekonnt ein, auch wenn ihr bei der Durchführung ein paar Flüchtigkeitsfehler passieren.

Dass ein bestimmtes Integral als Fläche interpretiert werden kann, ist bei Amelie ebenso fest verankert wie die Tatsache, dass eine prozentuelle Änderung auf ein exponentielles Wachstum hinweist. Auf diese grundlegenden Verknüpfungen greift sie durch Analogieschlüsse zurück und löst damit die Aufgabenstellungen durch schrittweises Vorwärtsarbeiten.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Neben den technischen Fehlern, die ihr bei der umgekehrten Kurvendiskussion unterlaufen, stößt Amelie auf wenig Schwierigkeiten während ihrer Aufgabenbearbeitung. Neben einem Flüchtigkeitsfehler bei Teilaufgabe (a) und der Tatsache, dass sie keine alternative Berechnungsmethode für den Durchschnitt findet, zeigt sie außerdem ein kleines Defizit in ihrer mathematischen Ausdrucksweise, als sie bei Teilaufgabe (a) die Funktionsgleichung falsch anschreibt.

6.4. Fallskizze Josephine

Die Schülerin Josephine verwendet beim Bearbeiten der Aufgaben den grafikfähigen Taschenrechner TI-Nspire mit CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Nach einem kurzen Überfliegen des Kontextes nimmt Josephine die Maße aus der Angabe und versucht damit eine Funktionsgleichung für Teilaufgabe (a) aufzustellen. Wegen der Skizze weiß sie, dass $a < 0$ und $c = 13$ gelten muss. Dann nimmt sie Punkte, die sicher auf dem Funktionsgraphen liegen und setzt diese in ihre Funktionsgleichung ein. Indem sie am Taschenrechner das Gleichungssystem löst erhält sie die gesuchten Werte und kann die Funktionsgleichung aufstellen.

Als Nächstes widmet sie sich der Interpretationsaufgabe. Hier begreift sie schnell, dass das doppelte Integral die Frontfläche des Design-Centers beschreibt. Doch es dauert eine Weile, bis sie verstanden hat, weshalb diese Fläche mit der Länge multipliziert wird. Dann beschließt sie, dass es sich hierbei nur um das Volumen handeln kann.

Für den ersten Punkt der Teilaufgabe (b) stellt sie sofort eine Exponentialgleichung auf und berechnet den gesuchten Wert am Taschenrechner. Aber beim zweiten Punkt hat sie Schwierigkeiten. Sie erkennt, dass Prozentsätze nicht einfach summiert werden dürfen. Wegen einer ähnlichen im Unterricht gerechneten Aufgabe vermutet sie, dass die Werte multipliziert werden sollten. Weil sie sich aber nicht sicher ist, schlägt sie in der Formelsammlung nach und findet dort das geometrische Mittel. Dann berechnet sie $\sqrt[5]{3{,}2 \cdot 2{,}3 \cdot 2{,}1 \cdot 1{,}9 \cdot 1{,}1} \approx 2{,}00377$. Obwohl dieser Ansatz stimmt, macht sie den schweren Fehler, mit den Prozentpunkten zu rechnen anstatt mit den Änderungsfaktoren. Sie müsste also zum Beispiel mit 1,032 rechnen statt mit 3,2. Dadurch ist das Ergebnis trotz korrekter Idee falsch.

Josephine hätte bei dieser Aufgabe drei von vier Punkten erreicht.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Im Laufe des Lösungsprozesses zeigt Josephine ein organisiertes und durchgeplantes Arbeiten. In der ersten Aufgabe setzt sie die Strategie des Rückwärtsarbeitens in Form einer umgekehrten Kurvendiskussion routiniert ein. Zwei Punkte danach arbeitet sie gekonnt vorwärts, indem sie schrittweise zuerst ein exponentielles Wachstumsmodell aufstellt, dann in die Formel einsetzt und schließlich das Ergebnis berechnet.

Dabei sucht sie immer wieder nach Analogien zu bereits bekannten Aufgaben. Dies bringt sie schließlich auf die Idee, das geometrische Mittel einzusetzen. Die Formel dafür findet sie in ihrer Formelsammlung, die sie als externen Wissensspeicher einsetzt.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Der einzigen großen Schwierigkeit begegnet Josephine beim Berechnen des geometrischen Mittels. Hier rechnet sie fälschlicherweise mit den Prozentpunkten und erhält dadurch ein falsches Ergebnis. Nachdem sie beim ersten Punkt der Teilaufgabe (b) die prozentuelle Änderung jedoch richtig eingesetzt hat, muss nicht unbedingt von einem Verständnisfehler ausgegangen werden. Viel eher könnte es sich hier um einen Flüchtigkeitsfehler handeln, der mit der bereits fortgeschrittenen Zeit begründet werden kann.

6.5. Fallskizze Helena

Die Schülerin Helena verwendet beim Bearbeiten der Aufgaben den grafikfähigen Taschenrechner TI 82 STATS ohne CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Helena liest sich den Kontext nicht durch und geht gleich zu Teilaufgabe (a). Um eine passende Funktionsgleichung aufzustellen, zeichnet sie verschiedene quadratische Funktionen am Taschenrechner und variiert dabei die Werte der Parameter. Nach einigen Versuchen notiert sie $0 = -x^2 + 5$. Abgesehen davon, dass es sich hier um keine korrekt angeschriebene Funktionsgleichung handelt, beschreibt dieser Funktionsterm nicht die gesuchte Parabel. Offenbar begreift Helena nicht, dass die abgebildete Funktion im Zusammenhang mit dem Kontext steht, den sie sich nicht durchgelesen hat.

Beim zweiten Punkt der Teilaufgabe (a) erkennt Helena, dass das bestimmte Integral die Hälfte der Fläche beschreibt. Dann meint sie jedoch, dass die Fläche mit 400 multipliziert wird, oder als Alternative, dass der gesamte Querschnitt um 200 vergrößert wird. Auf die Frage hin, ob sie den Wert 200 auch noch im Kontext deuten könne, meint sie:

> *„Das hat sich irgendwer einfach nur ausgedacht. Ich glaube nicht, dass das einen tieferen Sinn hat. Aber es ist ein Integral, also ist es sicher eine Fläche. Vielleicht hat es noch irgendwas mit Prozenten zu tun,*

aber das weiß ich nicht genau. Da will mir einfach irgendwer das Leben schwermachen."

Helena gibt sich also mit ihrer Interpretation zufrieden und geht weiter zu Teilaufgabe (b). Um die Baukosten zu berechnen, leitet sie schrittweise ein exponentielles Wachstumsmodell her, ohne dieses beim Namen zu nennen. Als Erstes multipliziert sie den Grundwert mit 1,035. Als sie dann bemerkt, dass sie das für jedes Jahr wiederholen kann, schreibt sie auf: $66\,000\,000 \cdot 1{,}035^x$. Dann setzt sie x = 10 und berechnet das Ergebnis.

Für den letzten Punkt überlegt Helena sehr lange. Scheinbar sieht sie nicht, was an der Rechnung falsch sein könnte. Darum überprüft sie zuerst einmal, ob vielleicht ein Rechenfehler passiert ist oder ob falsche Werte verwendet wurden. Nachdem das keinen Erfolg bringt, versucht sie die Jahreswerte wie eine arithmetische Reihe aufzusummieren mit der Begründung, dass sich die Werte auf das Vorjahr beziehen müssen. Nach mehreren erfolglosen Versuchen, den Durchschnitt zu berechnen, gibt sie auf.

Zur Kontrolle schaut Helena noch einmal zurück zu Teilaufgabe (a). Da fällt ihr auf, dass die Parabel das Design-Center beschreiben muss. Nochmals variiert sie die Werte und stellt schließlich die Gleichung $f(x) = -ax^2 + 13$ auf. Um den Wert des Parameters a ermitteln zu können, setzt sie den Punkt (36|0) in die Gleichung ein. Dabei passiert ihr ein Rechenfehler, der in der Beurteilung der Reifeprüfung womöglich vernachlässigt werden kann (siehe Abbildung 28). Mit diesem Endergebnis gibt sie sich zufrieden und beendet ihre Aufgabenbearbeitung.

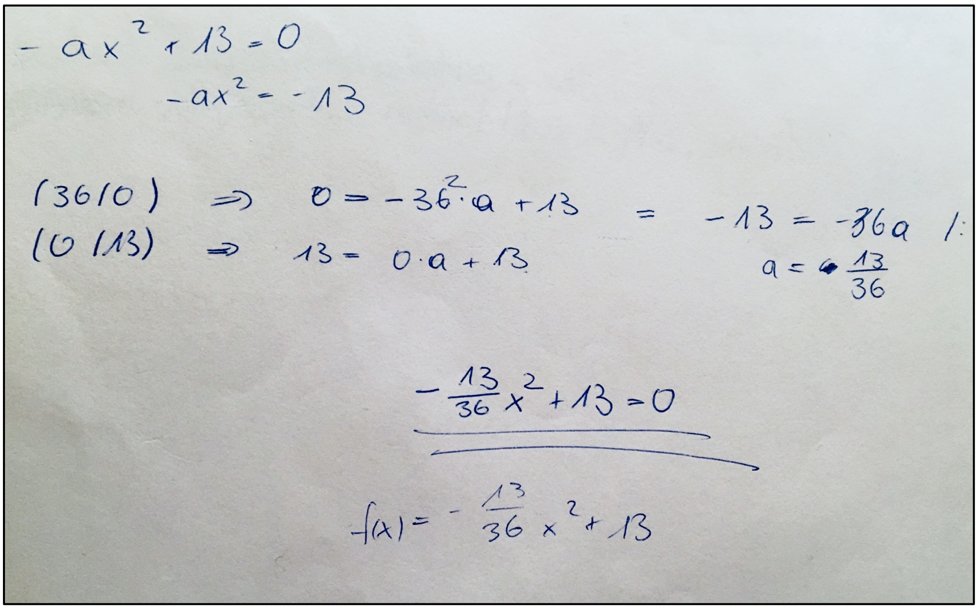


Abbildung 28 – Notizen von Helena (3) (private Quelle)

Helena hätte bei dieser Aufgabe zwei von vier Punkten erreicht.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Um eine passende Funktionsgleichung für Teilaufgabe (a) zu finden, probiert Helena verschiedene Werte am Taschenrechner aus. Durch das Visualisieren der Zusammenhänge zwischen Parameter und Funktionsgraph kann sie diese leichter erfassen. Erst beim zweiten Anlauf versteht sie, dass die Funktion zum Kontext passen muss. Dann arbeitet sie rückwärts von den spezifischen Eigenschaften der Funktion zur Funktionsgleichung mithilfe einer komprimierten umgekehrten Kurvendiskussion.

Während sie beim bestimmten Integral schnell erkennt, dass dieses auch als Fläche interpretiert werden kann, findet sie beim Wachstumsmodell der Baukosten keinen solchen Analogieschluss zu ähnlichen bereits bewältigten Aufgabenstellungen, mit dem sie schnell ein Modell aufstellen könnte. Deshalb leitet sie sich selbst das exponentielle Wachstum her. Dabei arbeitet sie Schritt für Schritt vorwärts, bis sie eine passende Formel zur Berechnung aufgestellt hat und nur noch in diese einsetzen muss.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Gleich zu Beginn scheitert Helena beinahe an ihrer Lesekompetenz, als sie nicht begreift, dass die gesuchte Funktionsgleichung mit dem gegebenen Kontext zusammenhängt. Im Reflexionsgespräch thematisiert sie diesen Fehler:

> *„Bei [dieser] Aufgabe [...] ist es so, dass ich den Kontext gar nicht gelesen habe. Darum habe ich das auch anfangs falsch gehabt. Ich habe das einfach schon so oft erlebt, dass der Kontext nur verwirrt und nicht wirklich brauchbar ist. Das kostet viel zu viel Zeit. Deshalb überspringe ich den meistens gleich. Ich schau mir immer zuerst an, was von mir gefragt ist, und dann suche ich erst das aus dem Kontext, was ich brauchen kann."*

Allgemein handelt es sich hier um eine Taktik, die einige der Teilnehmerinnen und Teilnehmer bei der Aufgabenbearbeitung anwenden: Sie überfliegen den einleitenden Kontext nur und lesen sich zuerst die Aufgabenstellung durch. Anschließend suchen sie sich die notwendigen Angaben aus dem Kontext heraus. Dadurch erhoffen sich die Jugendlichen eine gewisse Zeitersparnis. Die Effektivität dieser Strategie kann im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht untersucht werden. Anhand Helenas Fehler wird jedoch verdeutlicht, dass der Kontext zumindest überflogen werden sollte, um die Zusammenhänge der jeweiligen Aufgabenstellung besser zu begreifen.

Dem nächsten Stolperstein begegnet Helena beim Interpretieren. Obwohl sie sofort erkennt, dass das bestimmte Integral die Fläche beschreibt, kann sie die restlichen Teile des Terms nicht richtig zuordnen. Selbst als sie nach einer Deutung des Wertes 200 gefragt wird, stellt sie keine Verbindung zum Kontext her. Möglicherweise liegt dies auch daran, dass sie den Kontext nicht gelesen hat. Interessant ist jedoch, dass sie erkennt, dass die Grenzen des Integrals, 0 und 36, die halbe Front des Design-Centers einschließen. Zu einem gewissen Grad scheint sie also doch die Eigenschaften der Parabel mit dem Kontext zu verknüpfen.

Auf kognitive Schwierigkeiten stößt Helena beim zweiten Punkt der Teilaufgabe (b). Nachdem sie nicht einmal erkennt, warum die vorgeschlagene Berechnungsweise nicht stimmen kann, findet sie auch keine alternativen Wege. Ihre Versuche, den Durchschnitt auf andere Weisen zu berechnen, wirken eher ziellos und ohne jegliche mathematisch fundierte Grundlagen. In der Formelsammlung nach weiteren Ideen zu suchen, zieht sie nicht in Erwägung und schränkt damit ihre Möglichkeiten erheblich ein.

Hinzu kommt noch der technische Fehler, der Helena bei einer Äquivalenzumformung in Teilaufgabe (a) unterläuft. Dieser ist jedoch nicht allzu schwerwiegend, weil zumindest ihr Ansatz stimmt. Es wirkt eher wie ein Flüchtigkeitsfehler, der ihr in den letzten Minuten der Aufgabenbearbeitung passiert.

6.6. Fallskizze Marie und Nora

Die Schülerinnen Marie und Nora verwendeten beim Bearbeiten der Aufgaben beide den grafikfähigen Taschenrechner TI 82 STATS ohne CAS-Funktion.

Beobachtungen zum Lösungsverhalten

Die beiden Teilnehmerinnen lesen zuerst die gesamte Aufgabe durch, bevor sie mit Teilaufgabe (a) anfangen. Um zur passenden Funktionsgleichung zu gelangen, probieren sie längere Zeit am Taschenrechner verschiedene Parameter aus. Es dauert fast eine Viertelstunde, bis sie zum richtigen Ergebnis gelangen.

Auch beim zweiten Punkt der Teilaufgabe (a) diskutieren sie eine Weile, bis sie den Term richtig interpretieren. Zwar ist ihnen schnell klar, dass das bestimmte Integral mit diesen Grenzen die halbe Frontfläche beschreibt, doch sie sind sich unsicher beim Deuten der restlichen Faktoren. Nora erinnert sich schließlich, dass bei einer Multiplikation einer Fläche mit einer Länge das Volumen berechnet wird. Marie ist aber skeptisch, weil sie glaubt, dass beim Volumen auch die Rückseite des Gebäudes miteingerechnet werden muss. Nachdem es ihr Nora noch einmal erklärt, sieht sie ihren Denkfehler und die beiden interpretieren den Term korrekt, nämlich als das Volumen des gesamten Design-Centers.

Während sie für die ersten zwei Punkte eher länger brauchen, erkennen Marie und Nora beide schnell, dass in Teilaufgabe (b) ein exponentielles Wachstum beschrieben wird. Mit diesem Wissen stellen sie die notwendige Formel auf und berechnen das Ergebnis mit dem Taschenrechner.

Doch beim nächsten Punkt wissen sie nicht weiter. Beide wirken etwas ratlos und beharren darauf, dass der Durchschnitt immer das arithmetische Mittel ist. Deshalb suchen sie in der Formelsammlung nach einer hilfreichen Idee. Im Kapitel Formelsammlung findet Marie verschiedene Zentralmaße, aber schließt diese dann nach und nach aus. Dabei fragt sie sogar, ob Nora wisse, worum es sich beim geometrischen Mittel handle. Diese meint darauf aber eher uninteressiert: „Keine Ahnung, davon habe ich noch nie gehört. Das brauchen wir nicht.“

Dann versucht Marie sich im Unterricht besprochene Inhalte ins Gedächtnis zu rufen. Sie erinnert sich, dass Ausreißer das arithmetische Mittel verfälschen können. Doch

Nora weist sie darauf hin, dass es bei dieser Angabe keine „richtigen“ Ausreißer gibt. Weil ihnen die Ideen ausgehen, beenden sie ihre Aufgabenbearbeitung.

Marie und Nora hätten bei dieser Aufgabe drei von vier Punkten erreicht, wobei zu hinterfragen ist, wie viel sie davon jeweils alleine geschafft hätten.

Analyse von Strategien im Lösungsprozess

Um die gesuchte Funktionsgleichung zu erlangen, entscheiden sich die beiden Teilnehmerinnen dafür, die Parameter durch Probieren am Taschenrechner zu ermitteln. Dieser Prozess dauert bei Marie und Nora jedoch relativ lange, weil sie dabei mit wenig System vorgehen. Zusätzlich irritieren sie sich gegenseitig immer wieder mit ihren Zwischenergebnissen und arbeiten aneinander vorbei. Dennoch kommen sie an ihr Ziel, wenn auch erst nach einer knappen Viertelstunde.

Als eine Strategie, auf die besonders Marie immer wieder aktiv zurückgreift, dienen ihnen Analogieschlüsse zu bekannten Inhalten aus dem Unterricht. Neben der Interpretation des bestimmten Integrals als Fläche und der Angemessenheit eines Exponentialmodells versucht sich Marie auch an Eigenschaften des arithmetischen Mittels zurückzuerinnern. Aber sie findet in dieser Aufgabenstellung keine Parallelen zu gelösten Aufgaben. Zusätzlich sucht sie auch in der Formelsammlung nach einer zielführenden Idee, doch auch hier bleibt sie erfolglos.

Analyse von Schwierigkeiten im Lösungsprozess

Marie und Nora haben Probleme dabei, den gegebenen Term in Teilaufgabe (a) als Volumen zu interpretieren. Grund dafür scheinen Fehlvorstellungen bezüglich der Berechnung von Volumina zu sein. Besonders bei Marie werden diese sichtbar. Dadurch fällt es ihnen schwer eine Verknüpfung zwischen dem Term und dem Volumen herzustellen.

Auf eine viel größere Hürde stoßen sie beim zweiten Punkt der Teilaufgabe (b). Auch hier können diese Schwierigkeiten mit einem unvollständigen Konzept des Durchschnitts in Verbindung gebracht werden. Beide sind fest davon überzeugt, dass der Durchschnitt ausschließlich durch das arithmetische Mittel beschrieben werden kann. Dadurch erkennen sie nicht einmal, warum die gegebene Berechnungsweise nicht stimmen kann.

6.7. Zusammenfassung der Lösungsstrategien

Zur Bearbeitung dieser Aufgabe wurde ein breites Spektrum an Strategien beobachtet, die wie in Kapitel 5.7 in kognitive und metakognitive Strategien unterteilt werden.

	Dietmar	Thomas	Amelie	Josephine	Helena	Marie und Nora
Visualisieren am Taschenrechner	x	x	x		x	x
Formelsammlung	x		x	x		x
(Systematisches) Probieren	x	x			x	x
Vorwärtsarbeiten	x	x	x	x	x	x
Rückwärtsarbeiten			x	x	x	
Analogieschluss	x	x	x	x	x	x
Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes						

Tabelle 6 - Eingesetzte Strategien bei "Design-Center Linz"

In obenstehender Tabelle 6 wird gekennzeichnet, welche Strategien im Lösungsprozess der jeweiligen Teilnehmerin beziehungsweise des jeweiligen Teilnehmers zu erkennen sind.

Genau die vier Jugendlichen, die bereits bei der vorherigen Aufgabe die Formelsammlung benutzt haben, suchen auch in diesem Lösungsprozess nach Ideen darin. Doch nur Josephine erkennt dabei die zielführende Formel und selbst dann setzt sie diese falsch ein.

Als weitere metakognitive Strategien werden häufig Funktionsgraphen am Taschenrechner gezeichnet. Besonders die vier Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die sich bei Teilaufgabe (a) dafür entscheiden, die Funktionsgleichung durch systematisches Probieren zu ermitteln, sind hier auf ihre grafikfähigen Taschenrechner angewiesen. Auch wenn sich diese Strategie teilweise als langwierig erweist, führt sie in diesem Fall jedes Mal zum richtigen Ergebnis.

Als Alternative zum systematischen Probieren verwenden drei Teilnehmerinnen in diesem speziellen Fall eine umgekehrte Kurvendiskussion, um die gesuchte

Funktionsgleichung zu berechnen. Dabei handelt es sich um ein algorithmisches Rückwärtsarbeiten, wie es in III.3.2.3 beschrieben wird: Sie gehen vom allgemeinen Funktionsterm aus, setzen besondere Punkte ein und kommen so zur spezifischen Funktionsgleichung. Dieses Arbeiten in eine bestimmte Richtung ermöglicht einen eher kontrollierten und transparenten Lösungsprozess.

Alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer setzen im Laufe der Aufgabenbearbeitung auch zumindest einmal die Strategie des Vorwärtsarbeitens ein. Dabei ersparen sich manche aber einige Zwischenschritte, weil sie Parallelen zu bereits gelösten Aufgaben erkennen. Je mehr Analogieschlüsse gezogen werden, desto mehr Zeit ersparen sie sich. Zum Beispiel muss Thomas die Baukosten jedes einzelnen Jahres berechnen. Währenddessen erkennt Dietmar beispielsweise sofort, dass es sich um ein Exponentialmodell handelt, setzt in die Formel ein und berechnet damit den gesuchten Wert.

Die letzte hier genannte Strategie der Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes wird bei dieser Aufgabe von niemandem eingesetzt. Zwar ist das letzte Problem als solches allen unbekannt, doch schafft es niemand, daran auf bekannte Strukturen zu schließen. Nur Josephine erkennt Parallelen zu einer bekannten Aufgabenstellung wieder und sucht in der Formelsammlung nach etwas Bekanntem. Dieses Handeln wird jedoch eher als Analogieschluss verstanden.

6.8. Zusammenfassung der Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Aufgabe

Wie bei der vorigen Aufgabe werden hier die auftretenden Schwierigkeiten den vier adaptierten Phasen nach Pólya zugeordnet (siehe III.3.1 und IV.5.8). In der untenstehenden Tabelle 7 sind die Schwierigkeiten der jeweiligen Teilnehmerinnen und Teilnehmer bei der Aufgabe „Design-Center Linz“ gekennzeichnet.

	Dietmar	**Thomas**	**Amelie**	**Josephine**	**Helena**	**Marie und Nora**
Lesekompetenz	x				x	
Sprache der Mathematik			x		x	
Plan finden	x					

Plan durchführen (technisch)			x	x	x	
Plan durchführen (kognitiv)	x	x	x		x	x
Interpretation				x	x	x
Argumentation						

Tabelle 7 - Auftretende Schwierigkeiten bei "Design-Center Linz"

Aus der Tabelle lässt sich schließen, dass beim Verstehen dieser Aufgabe und beim Finden eines Plans verhältnismäßig wenig Probleme auftreten. Obwohl die etwas längere Einleitung vereinzelt Hürden in Hinblick auf die Lesekompetenz stellt, scheint der außermathematische Kontext das Verständnis der Aufgabenstellung erheblich zu erleichtern. Durch die kontextorientierte Einleitung und die Abbildung des Design-Centers können sich die Teilnehmerinnen und Teilnehmer schneller etwas unter der Aufgabe vorstellen. Hinzu kommt, dass in der Angabe relativ wenig mathematischer Fachjargon verwendet wird. Somit fallen hier Defizite in diesem Bereich nicht so schwer ins Gewicht.

Die meisten Schwierigkeiten treten beim Durchführen der Pläne auf. Während die technischen Probleme größtenteils mit vernachlässigbaren Flüchtigkeitsfehlern zusammenhängen, handelt es sich bei den kognitiven Defiziten unter anderem um lückenhafte Konzepte des Begriffes „Durchschnitt“. Manche Teilnehmerinnen begreifen nicht einmal, warum die Berechnung mit dem arithmetischen Mittel nicht korrekt sein kann. Fälschlicherweise verwenden sie die beiden Begriffe „arithmetisches Mittel“ und „Durchschnitt“ synonym. Infolgedessen können sie keinen weiteren Mittelwert in dieses Konzept einbetten.

In der letzten Phase treten wiederum weniger Hürden auf. Das liegt jedoch auch daran, dass in der gesamten Aufgabe keine Begründung gefragt ist. Folglich kann es zu keinen Argumentationsfehlern kommen.

Doch das Interpretieren fällt nicht allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern leicht. Zwar deuten alle das bestimmte Integral ausnahmslos als Fläche, doch einige haben Probleme damit, die Multiplikation dieser Fläche mit einer Länge als Volumen zu interpretieren. Bei Josephine, Marie und Nora könnte dies eventuell daran liegen, dass die Berechnung von Volumina nicht fest genug in ihrem aktiven Wissensspeicher verankert ist. Nach einer Weile erinnern sie sich aber und können den Term deuten. Doch Helena kann nicht einmal den Wert 200 im gegebenen Kontext deuten und ist damit weit entfernt von einer passenden Interpretation.

6.9. Zusammenfassung der Lösungserfolge

In den Lösungsprozessen dieser Aufgabe treten weit weniger Schwierigkeiten auf als bei der Aufgabe „Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen“ (siehe 5.8). Dies kann unter anderem damit in Verbindung gebracht werden, dass diese Aufgabe nur aus zwei Teilaufgaben besteht, während die andere in drei Teile gegliedert ist. Doch auch, wenn die durchschnittlich erreichten Lösungsquoten verglichen werden, fällt die Aufgabe „Design-Center Linz“ besser aus. Durchschnittlich haben die Jugendlichen zwei Drittel der Punkte erreicht.

In Tabelle 8 werden die erreichten Punkte der einzelnen Teilnehmerinnen und Teilnehmer dargestellt, wenn die Antworten nach dem Prinzip der Reifeprüfung beurteilt werden würden. Die Punktevergabe wurde dabei wieder an die Lösungserwartung des BMB (2016d) angepasst. Maximal können vier Punkte erreicht werden.

	(a)1	(a)2	(b)1	(b)2	Gesamt
Dietmar	1	1	1	0	**3**
Thomas	1	1	1	0	**3**
Amelie	0	1	1	0	**2**
Josephine	1	1	1	0	**3**
Helena	1	0	1	0	**2**
Marie und Nora	1	1	1	0	**3**

Tabelle 8 - Punktevergabe bei "Design-Center Linz"

Das bessere Abschneiden der Teilnehmerinnen und Teilnehmer bei dieser Aufgabe kann auch mit dem außermathematischen Kontext in Zusammenhang gebracht werden. Durch die Anwendungsorientierung und die beigefügte Abbildung scheinen sich die Jugendlichen mehr unter der Angabe vorstellen zu können. Sie profitieren sichtlich davon, dass ein flexibler Umgang mit der mathematischen Sprache hier von geringerer Bedeutung ist als bei der vorherigen Aufgabe. Es werden viele alltägliche und kontextorientierte Begriffe verwendet und die Anzahl an mathematischen Fachausdrücken hält sich in Grenzen.

Zusätzlich werden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bei den ersten drei Punkten mit Aufgabenstellungen konfrontiert, bei denen sie Analogieschlüsse ziehen können. Scheinbar wurden sie im Unterricht schon oft mit ähnlichen Problemstellungen konfrontiert und können deshalb auf einige Lösungsstrategien zurückgreifen.

Das einzig große Problem, welches sich auch sehr gut in der oberen Tabelle 8 widerspiegelt, liegt im letzten Punkt der Aufgabe. Das geometrische Mittel ist fast niemandem ein Begriff. Vielen ist nicht einmal bewusst, dass es neben arithmetischem Mittel, Modus und Median auch noch andere Zentralwerte gibt. Die damit verbundenen Schwierigkeiten sind oben näher beschrieben.

7. Interpretation

In den Lösungsprozessen der beiden Aufgaben ist eine Vielzahl an Strategien zu beobachten. Dabei setzen vier der sechs Teilnehmerinnen vermehrt das systematische Probieren ein, meist in Verbindung mit der Grafikfunktion ihrer Taschenrechner. Diese Visualisierung hat den Vorteil, dass sich die Jugendlichen mehr unter der Angabe und der Aufgabenstellung vorstellen können.

Doch durch das oft eher wenig systematische Probieren ist zu hinterfragen, in welchem Ausmaß die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die mathematischen Zusammenhänge in ihrem Lösungsprozess tatsächlich begreifen. Zum Beispiel vernachlässigen viele, dass beim Probieren und Einsetzen bestimmter Werte die Allgemeinheit beschränkt wird. Diesen und andere Aspekte müssten sie beim Lösen der Aufgabe miteinbeziehen.

Hinzu kommt, dass diese Strategie häufig mehr Zeit in Anspruch nimmt als andere Lösungswege, wie zum Beispiel das Arbeiten in eine bestimmte Richtung. Dabei ist bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern mehr Orientierung und Kontrolle über den Lösungsprozess zu beobachten.

Eine besonders hohe Lösungsquote tritt auf, wenn eine Analogie zu bekannten Aufgabenstellungen gesehen wird. Naturgemäß fällt es leichter, ein Problem zu lösen, wenn bereits ein ähnliches bewältigt wurde. Schülerinnen und Schüler die aktiv nach solchen Parallelen zu gewohnten Lösungswegen suchen und bestenfalls entdecken, finden auch eher einen Plan für die weitere Aufgabenbearbeitung.

Eine zentrale Schwierigkeit in den Lösungsprozessen ist das Verstehen der Aufgabenstellungen. Immer wieder kommt es vor, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer nicht begreifen, was in der Aufgabe von ihnen verlangt wird. Dadurch wird es nahezu unmöglich, einen zielführenden Plan zu fassen. Diese schwerwiegenden Verständnisprobleme können in den meisten Fällen auf zwei Ursachen zurückgeführt werden: Einerseits weisen viele Jugendliche Defizite in der Sprache der Mathematik auf, andererseits sehen einige die Vernetzungen und Zusammenhänge nicht, die für eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung notwendig sind.

Ein flexibler Umgang mit mathematischen Fachausdrücken ist essentiell beim Bearbeiten von Klausuraufgaben. Denn die diversen Begriffe und Formulierungen müssen nicht nur verstanden, sondern auch verständig eingesetzt werden. Immer wieder sollen Aussagen und Ergebnisse begründet, argumentiert oder auch interpretiert werden. Deshalb sind die bestehenden Unsicherheiten der Schülerinnen und Schüler hier äußerst problematisch.

Auch die Schwierigkeiten beim Verknüpfen verschiedener Grundkompetenzen und Inhaltsbereiche bilden eine große Hürde bei der Bearbeitung von Teil 2-Aufgaben. Denn genau dieser Prozess des Vernetzens ist ein zentraler Gegenstand im Konzept des zweiten Teils der schriftlichen Reifeprüfung. Werden die nötigen Zusammenhänge nicht hergestellt, kann der zielführende Plan nicht gefunden werden. Ein umfassendes Beherrschen der Grundkompetenzen ist also ebenso notwendig wie eine geistige Beweglichkeit, um ebendiese Verbindungen herstellen zu können.

V. Quantitative Untersuchung

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der qualitativen Untersuchung (siehe IV) weisen wiederholt lückenhafte Vernetzungen zwischen einzelnen Grundkompetenzen auf. Das gleichzeitige Abrufen mehrerer Inhaltsbereiche scheint ein Problem zu sein. Mit dieser Schwierigkeit beschäftigt sich die im folgenden Teil vorgestellte Untersuchung.

1. Forschungsfrage

Die hier durchgeführte Untersuchung bezieht sich ebenfalls auf die zentrale Forschungsfrage dieser Diplomarbeit:

> *Welche Strategien wenden Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Teil 2-Aufgaben an und welche Schwierigkeiten treten dabei auf?*

Hier wird nun genauer untersucht, inwiefern die Vielseitigkeit der gefragten Inhaltsbereiche innerhalb einer Teil 2-Aufgabe den Lösungsprozess erschwert. Es soll festgestellt werden, ob Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit der durchmischten Reihenfolge der verlangten Grundkompetenzen haben. Dafür soll die geistige Beweglichkeit von Jugendlichen hinsichtlich ihrer Anwendung diverser Grundkompetenzen untersucht werden.

2. Forschungsmethode

Den flexiblen Umgang mit verschiedenartigen Inhaltsbereichen anhand von Teil 2-Aufgaben zu testen, gestaltet sich schwierig, weil die Kombination und Reihenfolge der dort geprüften Grundkompetenzen nicht variiert werden kann. Als naheliegende Grundlage bietet sich daher die Untersuchung der Reihenfolge von Teil 1-Aufgaben an.

Im Teil 1 der Klausurarbeit werden jeweils sechs Grundkompetenzen aus den vier großen Inhaltsbereichen Algebra und Geometrie, Funktionale Abhängigkeiten, Analysis sowie Wahrscheinlichkeit und Statistik geprüft. Die Aufgaben dazu werden aufsteigend nach dem Vorkommen der verlangten Grundkompetenzen im Kompetenzkatalog angeordnet (vgl. BIFIE 2013b). Wenn die Kandidatinnen und Kandidaten die Aufgaben der Reihe nach bearbeiten, müssen sie dadurch nicht so oft zwischen den verschiedenartigen Themengebieten und Inhaltsbereichen umdenken. Damit wird eine Erleichterung in der Bearbeitung angestrebt.

Ob eine solche geistige Beweglichkeit tatsächlich eine Schwierigkeit für Jugendliche darstellt, soll nun anhand einer quantitativen Untersuchung festgestellt werden. Dafür werden zwei Gruppen von Schülerinnen und Schülern gebeten, ein paar ausgewählte Teil 1-Aufgaben zu bearbeiten. Während die Versuchsgruppe die Aufgaben in einer durchmischten Reihenfolge vorgelegt bekommt, erhält die Kontrollgruppe die Aufgaben wie bei der Klausur nach Kompetenzen sortiert.

Anschließend werden die Antworten der Teilnehmerinnen und Teilnehmer nach dem Beurteilungssystem der schriftlichen Reifeprüfung ausgewertet. Die Ergebnisse der beiden Gruppen sollen dann auf Gemeinsamkeiten und Differenzen untersucht werden, wobei statistische Kennzahlen wie zum Beispiel das arithmetisches Mittel, der Median und die Standardabweichung als Vergleichswerte verwendet werden.

3. Rahmenbedingungen

An der Testung nehmen insgesamt 118 Schülerinnen und Schüler aus der 12. Schulstufe teil, die zum Zeitpunkt der Untersuchung kurz vor der schriftlichen Reifeprüfung stehen. Sie besuchen sieben unterschiedliche Mathematikgruppen aus zwei niederösterreichischen AHS, an denen es sowohl Gymnasium- als auch Realgymnasium-Klassen gibt. Die Unterrichtsgruppen werden von fünf verschiedenen Lehrpersonen betreut. Mit der dadurch gegebenen Heterogenität dieser Stichprobe wird eine annähernde Repräsentativität angestrebt.

Um zwei vergleichbare Untersuchungsgruppen zu erhalten, teilen die Lehrpersonen ihre Unterrichtsgruppen in zwei gleich große Gruppen, deren Leistungspotential nach ihrer Einschätzung einigermaßen gleich groß ist. Nach dieser Einteilung gibt es zwei vergleichbare, nahezu gleich große Gruppen: Gruppe A, die Versuchsgruppe, besteht aus 57 Personen und Gruppe B, die Kontrollgruppe, aus 61 Personen.

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer beziehungsweise deren Erziehungsberechtigte müssen eine Einverständniserklärung unterzeichnen, um an der Untersuchung teilnehmen zu dürfen (siehe Appendix 3). Zusätzlich müssen die Jugendlichen bei der Testung ein Formular ausfüllen, damit nach der Auswertung der Ergebnisse den Schülerinnen und Schülern durch ihre Lehrkräfte ein Feedback gegeben werden kann. Dieses Formular findet sich ebenfalls im Appendix (3).

Um einer Prüfungssituation so nahe wie möglich zu kommen, haben die Schülerinnen und Schüler 50 Minuten Zeit, um zwölf ausgewählte Teil 1-Aufgaben mit den gewohnten Hilfsmitteln in Einzelarbeit zu lösen. Dabei werden sie von einer Lehrperson beaufsichtigt.

Die zwölf in der Untersuchung eingesetzten Teil 1-Aufgaben sind Klausuraufgaben aus dem Jännertermin 2016 (vgl. BMBF 2016a). Diese werden ausgewählt, weil sie zum Zeitpunkt der Interviews noch relativ neu und damit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern noch nicht bekannt sind. Von den 24 Aufgaben wird nur die Hälfte ausgewählt, damit die Untersuchung in einer Unterrichtseinheit durchgeführt werden kann. Um mit den Aufgaben alle vier Inhaltsbereiche abzudecken, wird jede zweite Aufgabe aus der Klausur ausgewählt, nämlich nur jene mit ungerader Aufgabennummer.

In der folgenden Tabelle werden den gewählten Aufgaben die jeweiligen notwendigen Grundkompetenzen zugeordnet. Außerdem werden neben ihrer Aufgabennummer in der Reifeprüfung auch ihre Nummerierungen in den beiden Gruppen aufgelistet. Bei Gruppe A ist die Reihenfolge durcheinander und bei Gruppe B sind die Aufgaben nach Kompetenzen geordnet. Es wird darauf geachtet, dass zwei aufeinanderfolgende Aufgaben bei Gruppe A sich nie auf denselben Inhaltsbereich beziehen.

Aufgabennummer in Reifeprüfung	Aufgabennummer in Gruppe A	Aufgabennummer in Gruppe B	Grund-kompetenz
1	4	1	AG 1.1
3	7	2	AG 2.5
5	9	3	AG 3.4
7	1	4	FA 1.5
9	5	5	FA 3.4
11	11	6	FA 5.4
13	2	7	AN 1.1
15	8	8	AN 3.3
17	12	9	AN 4.2
19	10	10	WS 2.2
21	3	11	WS 2.3
23	6	12	WS 3.1

Tabelle 9 - Nummerierungen der Aufgaben und Grundkompetenzen

4. Durchführung der Studie

Die Testungen fanden im April 2016 an zwei AHS im ländlichen Niederösterreichisch statt. Sie wurden am Vormittag im Zuge der Mathematikeinheit der jeweiligen Klasse durchgeführt. Als Aufsichtsperson diente die Lehrperson der jeweiligen Unterrichtsstunde.

Nach 50 Minuten Bearbeitungszeit wurden die Fragebögen abgesammelt und anschließend ausgewertet. Dabei wurde ausschließlich darauf geachtet, ob die Aufgaben korrekt gelöst wurden oder nicht.

Nach der Auswertung der Fragebögen wurden die Ergebnisse an die Lehrpersonen weitergeleitet, um den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein Feedback über ihren Vorbereitungsstand hinsichtlich der Reifeprüfung zu geben.

5. Darstellung der Daten

Im Folgenden werden die Resultate der Untersuchung präsentiert. Dafür werden statistische Kennzahlen und Besonderheiten der beiden Untersuchungsgruppen hervorgehoben. Die detaillierten Ergebnisse der Teilnehmerinnen und Teilnehmer werden im Appendix (4) in Tabelle 12 und Tabelle 13 dargestellt.

Zum Überblick werden in der untenstehenden Tabelle 10 die durchschnittlich erreichten Punktezahlen der beiden Untersuchungsgruppen in absoluten Werten und als prozentueller Anteil an den maximal zwölf erreichbaren Punkten genannt. Alle Werte in der Tabelle sind auf die erste Nachkommastelle gerundet.

	arithm. Mittel in Punkten	arithm. Mittel in Prozent	Anteil: „bestanden“	Anteil: „unsicher“	Anteil: „nicht bestanden“
Gruppe A	8,1	67,3 %	57,9 %	26,3 %	15,8 %
Gruppe B	7,8	64,8 %	49,2 %	36,1 %	14,8 %

Tabelle 10 - Übersicht der Ergebnisse der Versuchsgruppe A und der Kontrollgruppe B

Mit dem Hintergedanken, dass für ein positives Absolvieren der Reifeprüfung zwei Drittel der Teil 1-Aufgaben korrekt gelöst werden müssen, wurde versucht zu berechnen, welche Punktezahlen bei dieser Testung ein Bestehen der Reifeprüfung prognostizieren. Wenn eine Teilnehmerin beziehungsweise ein Teilnehmer acht richtige Antworten hat, hat sie oder er genau zwei Drittel der Aufgaben gelöst. Demnach würden alle Schülerinnen und Schüler, die hier weniger als acht Punkte erreichen, die Prüfung nicht bestehen.

Jedoch müssen auch noch die Ausgleichspunkte berücksichtigt werden. Beim Umfang dieser Testung kann davon ausgegangen werden, dass es im dazugehörigen Teil 2 nur zwei Ausgleichspunkte gäbe. Somit hätten alle, die hier sechs oder sieben Punkte erzielen, bei einer Klausurarbeit noch die Chance, dennoch positiv beurteilt zu werden.

Die prozentuellen Anteile der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die diese Testung „bestanden" beziehungsweise „nicht bestanden" hätten, wie auch jener, deren Beurteilung aufgrund der ausständigen Ausgleichspunkte noch „unsicher" wäre, werden ebenfalls in Tabelle 10 dargestellt.

Zur Veranschaulichung der Ergebnisse beider Untersuchungsgruppen, bilden die beiden Boxplots in Abbildung 29 die Streuung der erreichten Punktezahlen in beiden Untersuchungsgruppen ab. Daraus lassen sich viele der grundlegenden statistischen Kennzahlen ablesen, welche zusätzlich in Tabelle 11 aufgelistet sind.

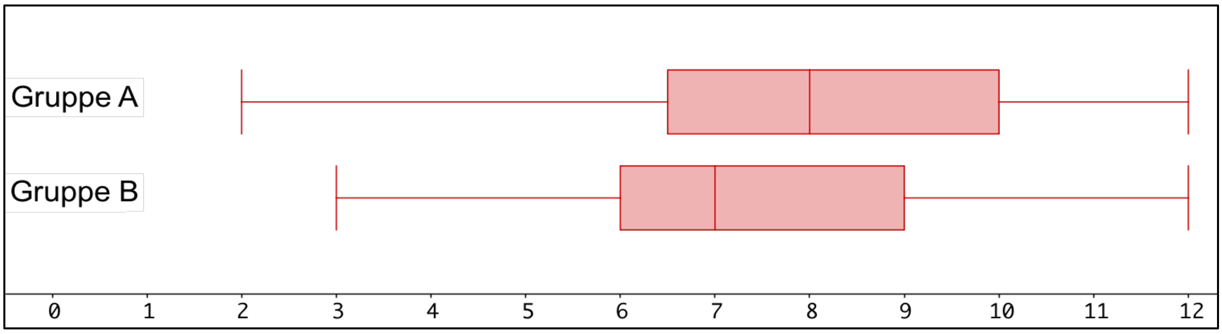


Abbildung 29 – Boxplots zu den Ergebnissen der Versuchsgruppe A und der Kontrollgruppe B

	Gruppe A	**Gruppe B**
Arithmetisches Mittel	~ 8,1	~7,8
Modus	7	7
Minimum	2	3
1. Quartil	6,5	6
Median	8	7
3. Quartil	10	9
Maximum	12	12
Spannweite	10	9
Quartilsabstand	3,5	3
Standardabweichung	~2,5	~2,2

Tabelle 11 - Auswahl statistischer Kennzahlen der erreichten Punktezahlen in Versuchsgruppe A und Kontrollgruppe B

6. Interpretation

In oben dargestellten Daten ist eine große Ähnlichkeit zwischen den beiden Gruppen zu erkennen. Entgegen den Erwartungen erreichten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Versuchsgruppe durchschnittlich sogar mehr Punkte als die der Kontrollgruppe. Sowohl arithmetisches Mittel als auch Median sind bei Gruppe A höher als bei Gruppe B.

Um die Signifikanz dieser Differenzen beurteilen zu können, wurde ein Student-T-Test bezüglich der arithmetischen Mittel durchgeführt. Dieser ergab mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 50%, dass der Unterschied der beiden arithmetischen Mittel charakteristisch ist. Demnach kann keine signifikante Aussage hinsichtlich der Mittelwerte getroffen werden.

Auch die Streuungsmaße der erreichten Punktezahlen weichen zu wenig voneinander ab, um einen signifikanten Trend festzustellen. Die breitere Streuung in Gruppe A ist jedoch auch bei den prozentuellen Anteilen der „bestandenen" und „nicht bestandenen" Testungen wiederzuerkennen. Obwohl mehr Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Gruppe A zumindest acht Punkte erzielen als in Gruppe B, ist auch die Anzahl der Ergebnisse mit weniger als 6 Punkten in Gruppe A minimal größer.

Es zeichnet sich also eine leichte Tendenz zur Polarisierung ab, wenn die Grundkompetenzen in gemischter Reihenfolge abgeprüft werden. Doch auch diese Beobachtung ist aufgrund der geringen Differenzen nicht signifikant.

Folglich lässt sich aus dieser Untersuchung schließen, dass es sich bei der Reihenfolge der getesteten Grundkompetenzen um keine globale Schwierigkeit handelt. Die Probleme beim Vernetzen verschiedener Kompetenzen hängt also nicht mit der Vermischung unterschiedlicher Inhaltsbereiche innerhalb einer Aufgabenserie zusammen.

VI. Conclusio

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden unterschiedliche Lösungsstrategien von Schülerinnen und Schülern beim Bearbeiten von Teil 2-Aufgaben der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik untersucht. Neben einer ausführlichen Literaturrecherche wurden auch Lösungsprozesse von Jugendlichen hinsichtlich ihrer Lösungsstrategien analysiert. Im Zuge dessen wurden damit zusammenhängende Schwierigkeiten bei der Aufgabenbearbeitung ebenfalls beleuchtet.

Als häufig eingesetzte Strategien dient, neben dem Visualisieren am Taschenrechner und dem Herstellen von Analogien, das systematische Probieren. Wenn das Probieren jedoch nicht allzu systematisch durchgeführt wird, droht der Lösungsprozess orientierungslos und ziellos zu werden.

Als effektivere Methode erweist es sich, ausreichend viel Zeit für das Verstehen der Aufgabenstellung aufzuwenden, um anschließend nach einem durchdachten Plan in eine bestimmte Richtung arbeiten zu können. Das Aufstellen eines Plans scheitert unter anderem daran, dass die Schülerinnen und Schüler auf zu wenig Handlungsmöglichkeiten zurückgreifen können.

Um die Optionen der Jugendlichen auszuweiten, müssen die einzelnen Phasen der Aufgabenbearbeitung im Unterricht nachhaltig geübt werden. Dabei sollte die Lehrperson auf die Charakteristika und Relevanz der jeweiligen Phasen hinweisen. Besonders das Planen eines Lösungsprozesses und die Auswahl der Strategien müssen bewusstgemacht werden. Idealerweise werden diese danach gemeinsam besprochen und reflektiert, damit bei späteren Problemstellungen schneller Analogien zu bereits bekannten Aufgaben gefunden werden.

Eine weitere große Schwierigkeit liegt in der Unsicherheit beim Umgang mit der mathematischen Sprache. Die Schülerinnen und Schüler verstehen häufig gar nicht, was in der Aufgabenstellung von ihnen verlangt wird. Oft scheitert dies an ihrem Verständnis von mathematischen Formulierungen. Dieses Defizit zeigt sich auch bei Argumentations- und Interpretationsaufgaben. Denn bei der Reifeprüfung reicht es nicht, die Fachausdrücke bloß wiederzuerkennen. Die Kandidatinnen und Kandidaten müssen diese auch verständig einsetzen und interpretieren können. Darum muss diese Kompetenz über mehrere Jahre hinweg aufgebaut werden. Bestenfalls werden die ersten Grundlagen dazu bereits in der Volksschulzeit implementiert.

Schließlich sind wiederholt auch schwerwiegende Defizite beim Vernetzen einzelner Grundkompetenzen zu beobachten. Genau dies ist aber der Fokus von Teil 2-Aufgaben. Die große Schwierigkeit liegt dabei nicht im schnellen Umdenken zwischen mehreren Inhaltsbereichen, sondern im Erkennen der Zusammenhänge und Verknüpfungen zwischen den unterschiedlichen Inhalten.

Um Parallelen und Abhängigkeiten schneller erkennen zu können, muss schon im vorbereitenden Unterricht immer wieder auf derartige Vernetzungen hingewiesen werden. Es reicht absolut nicht, die Schülerinnen und Schüler penibel genau auf das Anwenden der einzelnen Grundkompetenzen hinzutrainieren. Vielmehr müssen stets Verknüpfungen zwischen den verschiedenen Kompetenzen und Inhalten bewusstgemacht werden, um einen Gesamtüberblick zu behalten.

Die Fähigkeit des kompetenten Problemlösens ist nicht nur für den Teil 2 der Klausurarbeit förderlich, sondern für die gesamte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, wie auch in Hinblick auf generelle, alltägliche Probleme.

Literaturverzeichnis

Ableitinger, Ch. (2011). Problemlösen am Billiardtisch. In Brinkmann, A., Maaß, J. & Siller, H. (2011) *Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Unterricht* (Bd. 1, S. 70-80). Düsseldorf: Aulis.

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte,* 32 (2), S. 195-232.

Brinkmann, A. (2002). *Über Vernetzungen im Mathematikunterricht – eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I.* Im Internet: http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/go/duett-09112002-195540, gesehen am 20.08.17.

Brinkmann, A. (2007). *Vernetzungen im Mathematikunterricht – Visualisieren und Lernen von Vernetzungen mittels graphischer Darstellungen*. Hildesheim: Franzbecker.

Brinkmann, A., Maaß, J., Ossimitz, G. & Siller, H. (2011). Vernetzungen und vernetzendes Denken im Mathematikunterricht. In Brinkmann, A., Maaß, J. & Siller, H. (2011) *Mathe vernetzt* – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Unterricht (Bd. 1, S. 7-20). Düsseldorf: Aulis.

Brinkmann, A. & Siller, H. (2012). Vertikale Vernetzung über außermathematische Anwendungskontexte. In Brinkmann, A., Maaß, J. & Siller, H. (2012) *Mathe vernetzt* – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Unterricht (Bd. 2, S. 37-57). Düsseldorf: Aulis.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen.

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung (Hrsg.) (2015). *Die standardisierte Reifeprüfung in Mathematik.* Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen – gültig für alle Schüler/innen, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren. Im Internet: https://www.srdp.at/downloads/dl/gueltig-ab-maturatermin-2018-die-standardisierte-schriftliche-reifepruefung-in-mathematik/, gesehen am 14.08.17.

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung (Hrsg.) (2013a). *Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung / Reife- und Diplomprüfung*. Grundlagen – Entwicklung – Implementierung. Wien.

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung (Hrsg.) (2013b). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe.* Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1. Wien.

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung (Hrsg.) (2013c). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe.* Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 2. Wien.

Bundesministerium für Bildung (2016a). *Erste Ergebnisse der schriftlichen Reife- bzw. Reife und Diplomprüfung an AHS/BHS/Bildungsanstalten im Haupttermin 2015/16*. Im Internet: https://www.bmb.gv.at/ministerium/vp/2016/20160628.html, gesehen am 13.08.17.

Bundesministerium für Bildung (2016b). *Mathematik (AHS).* Formelsammlung für die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung (ab Schuljahr 2017/18). Wien.

Bundesministerium für Bildung (2017a). *Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung an AHS*. Im Internet: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung.html, gesehen am 13.08.17.

Bundesministerium für Bildung (2017b). *Zentralmatura: Mathematik-Klausuren deutlich besser*. Im Internet: https://www.bmb.gv.at/ministerium/vp/2017/20170626.html, gesehen am 13.08.17.

Bundesministerium für Bildung (2017c). *Übungsklausuraufgaben für die SRP in Mathematik*. Im Internet: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/index.php?action=14, gesehen am 23.11.17.

Bundesministerium für Bildung und Frauen (2016a). *Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS.* 15. Jänner 2016. Mathematik. Teil-1-Aufgaben. Im Internet: https://www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-2-201415-mathematik-ahs/, gesehen am 15.08.17.

Bundesministerium für Bildung und Frauen (2016b). *Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS.* 15. Jänner 2016. Mathematik.

Teil-1-Aufgaben. Korrekturheft. Im Internet: https://www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-2-201415-mathematik-ahs/, gesehen am 15.08.17.

Bundesministerium für Bildung und Frauen (2016c). *Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS.* 15. Jänner 2016. Mathematik. Teil-2-Aufgaben. Im Internet: https://www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-2-201415-mathematik-ahs/, gesehen am 15.08.17.

Bundesministerium für Bildung und Frauen (2016d). *Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS*. 15. Jänner 2016. Mathematik. Teil-2-Aufgaben. Korrekturheft. Im Internet: https://www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-2-201415-mathematik-ahs/, gesehen am 15.08.17.

Carpenter, T., Corbitt, M., Kepner, H., Lindsquist, M. & Reyes, R. (1980). Solving verbal problems: Results and implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher,* 8, S. 8-12.

Dewey, J. (2001). *Wir denken.* Zürich: Pestalozzianum.

Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des Produktiven Denkens.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

Fischer, R. (1999). Mathematik anthropologisch: Materialisierung und Systemhaftigkeit. In *Mensch – Gesellschaft – Wissenschaft. Versuch einer reflexiven historischen Anthropologie.* Innsbruck: Studia. S. 153-168.

Goldberg, E. (2013). Ist Frontalunterricht schlechter Unterricht? In Bausch, I., Pinkernell, G. & Schmitt, O. (Hrsg.) (2013). *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung – Festschrift für Regina Bruder.* Münster: WTM. S. 329-339.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In: Borromeo Ferri, R., Greefrath, G. & Kaiser, G. (Hrsg.) (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule – Theoretische und didaktische Hintergründe.* Wiesbaden: Springer Spektrum. S. 2-34.

Greefrath, G. (2013). Lösungshilfen für Modellierungsaufgaben. In Bausch, I., Pinkernell, G. & Schmitt, O. (Hrsg.) (2013). *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung – Festschrift für Regina Bruder.* Münster: WTM. S. 131-140.

Heinze, A. & Ufer, S. (2013). Die Interaktion von Wissen mit ProblemLösungsstrategienn am Beispiel geometrischer Beweisprobleme. In Bausch, I., Pinkernell, G. & Schmitt, O. (Hrsg.) (2013). *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung – Festschrift für Regina Bruder.* Münster: WTM. S. 141-150.

Hirscher, H. (2010). *Was sind und was sollen Medien, Netze, Vernetzungen?* Vernetzung als Medium zur Weltaneignung. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Humenberger, H. (2013). Mathematik als Prozess durch Modellierungsaufgaben im Unterricht. In Bausch, I., Pinkernell, G. & Schmitt, O. (Hrsg.) (2013). *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung – Festschrift für Regina Bruder.* Münster: WTM. S. 151-159.

Klafki, W. (1985). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*. Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik. Weinheim und Basel: Beltz.

Klieme, E. & Hartig, J. (2007). Kompetenzkonzepte in den Sozialwissenschaften und im erziehungswissenschaftlichen Diskurs. In *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 8, S. 11-29.

Klieme, E. & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Beschreibung eines neu eingerichteten Schwerpunktprogramms der DFG. In *Zeitschrift für Pädagogik* 52. S. 876-903.

Kratz, H. (2011). *Wege zu einem kompetenzorientierten Unterricht – Ein Studien- und Praxishandbuch für die Sekundarstufe.* Seelze: Friedrich.

Jordan, R. (2011). *Entwicklung und Validierung eines Textverfahrens zur Ermittlung der Lesekompetenz und des mathematischen Textverständnisses mit empirischer Untersuchung an allgemeinbildenden und berufsbildenden Schulen.* Münster: WTM.

Klieme, E. & Hartig J., (2007). Kompetenzkonzepte in den Sozialwissenschaften und im erziehungswissenschaftlichen Diskurs. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 8*, S. 11-29.

Klieme, E. & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Beschreibung eines neu eingerichteten Schwerpunktprogramms der DFG. In *Zeitschrift für Pädagogik, 52,* S. 876-903.

Lave, J. (1992). Word problems: a microcosm of theories of learning. In Light, P. & Butterworth, G. (Hrsg.) (1992). *Context and Cognition: Ways of Learning and Knowing*. New York: Routledge. S. 74-92.

Lorenz, J. (1998). *Anschauung und Veranschauungsmittel im Mathematikunterricht.* Göttingen (u.a.): Hogrefe.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis an expanded sourcebook* (2. Aufl.). Beverly Hills: Sage.

Moosbrugger, H. & Kelava, A. (2012). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion.* Heidelberg: Springer.

Nagy, H., Struger, J. & Wintersteiner, W. (2012). Förderung von Kompetenzen im Deutschunterricht. In Peachter, M. et al. (Hrsg.) (2012). *Handbuch Kompetenzorientierter Unterricht.* Weinheim: Beltz. S. 136-152.

Neuhauser, J. (2017). Neues Benotungssystem bringt Fünfer. In *Die Presse,* Print-Ausgabe vom 10.05.2017, Im Internet: http://diepresse.com/home/bildung/schule/5214979/Neues-Benotungssystem-bringt-Fuenfer, gesehen am 16.08.17.

Newell A. & Simon, H. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik (Hrsg.) (2009). *Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“* (Version 9/09). Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen. Im Internet: http://www.uni-klu.ac.at/idm/inhalt/519.htm, gesehen am 14.08.17.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematische Probleme.* Tübingen: Francke.

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: contextual effects on understanding and solving word problems. In *Instructional Science,* 17, S 309-338.

Siller, H. (2013). Mathematisches Modellieren – eine notwendige Kompetenz zum Betreiben und Anwenden von Mathematik. In Bausch, I., Pinkernell, G. & Schmitt, O. (Hrsg.) (2013). *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung – Festschrift für Regina Bruder.* Münster: WTM. S. 183-192.

Schneeberger, M. (2009). *Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog – Der Erwerb von Mathematisierungskompetenz als Initiation in eine spezielle Diskurspraxis.* Münster: Waxmann.

Schukajlow, S. (2011). Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Baustene einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur. In Krummheuer, G. & Heinze, A. (Hrsg.) (2011). *Empirische Studien zur Didaktik in der Mathematik.* (Band 6). Münster u. a.: Waxmann.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically – Exploring the three worlds of mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur über die Reifeprüfung in den allgemein bildenden höheren Schulen (Prüfungsordnung AHS) (2012). In *BGBl. II Nr. 174/2012*. Fassung vom 13.08.17.

Verordnung des Bundesministers für Unterricht und Kunst über die Leistungsbeurteilung in Pflichtschulen sowie mittleren und höheren Schulen (Leistungsbeurteilungsverordnung) (1974). In *BGBl. Nr. 371/1974.* Fassung vom 16.08.17.

Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems.* Lisse: Swets & Zeitlinger.

Vorhölter, K. (2009). *Sinn im Mathematikunterricht – Zur Rolle von mathematischen Modellierungsaufgaben bei der Sinnkonstruktion von Schülerinnen und Schülern.* Opladen & Farmington Hills: Barbara Budrich.

Weinert, F. (Hrsg.) (2001). *Leistungsmessung in Schulen.* Weinheim: Beltz.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Appendix

1. Einwilligungserklärung zur qualitativen Untersuchung

Einwilligungserklärung zur Erhebung und Verarbeitung personenbezogener Interviewdaten

Diplomarbeit – Valerie Schroll

Das Interview wird mit einem Aufnahmegerät aufgezeichnet und dann von Valerie Schroll in Schriftform gebracht. Für die weitere wissenschaftliche Auswertung der Interviewtexte werden alle Angaben, die zu einer Identifizierung der Person führen könnten, verändert oder aus dem Text entfernt. In der Diplomarbeit wird das Interview nur in Ausschnitten zitiert, um gegenüber Dritten sicherzustellen, dass der entstehende Gesamtzusammenhang von Ereignissen nicht zu einer Identifizierung der Person führen kann.

Die Teilnahme an den Interviews ist freiwillig. Ich habe zu jeder Zeit die Möglichkeit, das Interview abzubrechen, weitere Interviews abzulehnen und dein Einverständnis in eine Aufzeichnung und Niederschrift des Interviews zurückziehen, ohne dass mir dadurch irgendwelche Nachteile entstehen.

Ich bin damit einverstanden, im Rahmen des genannten Forschungsprojekts an einem Interview/ an mehreren Interviews teilzunehmen.

Name in Druckschrift: ________________________________

______________________   ________________________

Ort, Datum   Unterschrift

2. Protokolle

2.1. Dietmar

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

Dietmar bekommt die Unterlagen, überfliegt Angabe und schaut sich an, worum es zirka geht. Dann liest er sich 4 Minuten lang die unterschiedlichen Aufgabenstellungen genauer durch, um zu entscheiden, welche Teilaufgabe er zuerst lösen könnte. Wenn er etwas von der Angabe braucht, liest er sie sich nachher nochmal genauer durch.

D: Gut.

I: Hast du dir jetzt das Ganze durchgelesen?

D: Ich habe jetzt mal nach etwas gesucht, dass mir was sagt. Ich fang einmal mit (a) an.

Dietmar überlegt 3 Minuten lang, was zu tun ist und schreibt zunächst nichts auf.

D: Oder ich fang doch nicht mit (a) an. Ich probiere lieber mal (b).

Dietmar schlägt quadratische Gleichungen in der Formelsammlung nach und schreibt die große Lösungsformel und die allgemeine quadratische Gleichung auf. Nach etwas Zögern beginnt er zu schreiben und kommentiert dabei seine Schritte.

D: Ich schau mir mal die Angaben in (b) an. Da steht „q = –1“ und das setzte ich da mal ein und rechne das mal aus... Wobei, das steht eh schon da: x^2+px-1. Und die Lösungsfälle bei quadratischen Gleichungen haben nur mit der Diskriminante zu tun, sprich: b^2-4ac. Und in diesem Fall: $p^2–4*1*(-1)$. Also ist die Diskriminante p^2+4.

Dietmar denkt für 3 Minuten nach, ohne etwas zu sagen oder zu schreiben.

D: Was soll ich eigentlich machen? (liest Angabe nochmal laut vor) „Begründen Sie rechnerisch, warum die Gleichung f(x) = 0 genau zwei verschiedene Lösungen in den reellen Zahlen haben muss.“

Weitere 4 Minuten Stille, ein bisschen Ratlosigkeit ist in seinem Gesicht zu erkennen. Er schaut zwischen Angabe und seinen Notizen hin und her. Plötzlich erklärt er entschlossen und in schnellen Worten.

D: Ja, das hat natürlich zwei verschiedene Lösungen, weil da nur eine positive Lösung rauskommen kann. Weil auch wenn man ein Quadrat von einer negativen Zahl einsetzt, kommt hier trotzdem eine positive Zahl raus. Sprich, die Diskriminante ist immer positiv und für eine positive Diskriminante gibt es immer genau zwei verschiedene Lösungen, weil vor der Wurzel plus/minus steht. Also eine Lösung mit „plus der Wurzel" und einmal „minus der Wurzel" Ich hoffe, das ist hinreichend begründet.

Dann schreibt er das eben Erläuterte auf. Dann geht er weiter zu (b)2. Er liest die Angabe vor:

D: ‚Begründen Sie, warum die Funktion f eine positive und eine negative Nullstelle haben muss!' Naja, das ist ja klar, weil einmal ein Plus vor der Wurzel steht und einmal ein Minus. Oder?

Dietmar denkt nochmal 1 Minute darüber nach.

D: Am besten, ich zeichne das einmal und schau, was mir das bringt....

Dietmar zeichnet am Taschenrechner ein paar mögliche Versionen der Funktion und versucht, es sich damit zu erklären. Er variiert p-Werte und q-Werte und versucht herauszufinden, wie diese die Funktion beeinflussen. Er probiert 4 Minuten lang.

D: Ich sehe, dass es immer eine positive und eine negative Nullstelle gibt... Aber ich frage mich gerade, wie ich es begründen könnte.

I: Du musst es nicht lösen, wenn du nicht draufkommst.

D: Ich will aber draufkommen!

Er konzentriert sich nochmal und probiert weiter am Taschenrechner, verschiedene Werte für p und q einzusetzen. Nach 5 weiteren Minuten.

D: Also es muss im Prinzip entweder positiv oder negativ sein, weil die Diskriminante mit p^2 in unserem Fall immer größer ist als das –p in der Lösungsformel. Das heißt, für die eine Lösung von Plus der Diskriminante bekommt man immer eine positive Zahl raus, weil die Diskriminante sowieso größer ist als p. Also wird das –p wieder positiv. Ergibt das Sinn? Und im anderen Fall, also minus der Diskriminante, bleibt es eben negativ. So hätte ich das jetzt mal gesagt.

Dietmar schreibt seine Argumente auf und geht dann weiter zu (c). Er liest die Angabe laut vor und denkt kurz nach.

D: ‚Bestimmen Sie für diese Funktion f denjenigen Wert für p, für den ... gilt.' Das gebe ich einfach in den Taschenrechner ein. Ich nehme den Solve-Befehl und tippe die Gleichung mit dem Integral ein. Also p = –3.

Dietmar schreibt das Ergebnis auf und liest sich die nächste Aufgabe durch. Er berechnet die bestimmten Integrale am Taschenrechner

D: Also da kommt –1,5 raus und da kommt –4,5 raus. Also ist es nicht gleich. Jetzt zeichne ich die Funktion noch am Taschenrechner. ... Okay, das muss im Prinzip so sein, weil die Funktion nicht symmetrisch zur y-Achse ist. Also hat sie zwischen –1 und 0 einen anderen Flächeninhalt als zwischen 0 und 1.

Er skizziert die Funktion und schreibt auf, dass die Funktion nicht achsensymmetrisch ist. Er schaut nochmal kurz zu (a).

D: Die Aufgabe (a) ist so kompliziert formuliert. Das ist mir zu anstrengend. Die will ich nicht machen.

Design-Center Linz

Nachdem Dietmar die Angabe bekommt, liest er sich zunächst nur Aufgabe (a) durch. Er beschriftet die Skizze mit Werten aus der Angabe, hängt aber bei dem Begriff „Spannweite der Bögen". Er ist sich nicht ganz sicher, wo die Länge einzuzeichnen ist. Er deutet sie schließlich richtig und kennzeichnet die Nullstellen mit 36 und –36. Dann liest er noch einmal die Aufgabenstellung des Ausgleichspunktes vor. Es folgt eine fünfminütige Nachdenkphase ohne Schreiben oder Kommentare.

D: Ich lasse den Ausgleichspunkt mal aus und schau zum nächsten Punkt weiter. Gut, das Integral von 0 bis 36 ist die Fläche von da (zeigt auf y-Achse) bis da (zeigt auf rechte Nullstelle). Mal 2 ist die gesamte Fläche von der Funktion mal 200 ist das Volumen vom Design-Center.

Er schreibt kurz „Volumen des Design-Centers" und geht weiter zur Angabe von (b). Nach einer Minute beginnt er zu schreiben und kommentiert dabei:

D: Okay, also Prozentrechnung. Das heißt 66 Millionen ist der Grundwert, sozusagen, mal 1 + 0,035 hoch zehn.

Er berechnet das Ergebnis mit dem Taschenrechner und schreibt eine Antwort auf. Dann wendet er sich dem zweiten Punkt von (b) zu.

D: Bei der Aufgabe wird der Durchschnitt von den Prozentwerten ausgerechnet, aber es wird nicht beachtet, dass jeder Prozentwert sich auf das Vorjahr bezieht. Man müsste das also so machen, dass man... Hä? Wie macht man das?

Es folgt eine lange Nachdenkphase von 8 Minuten. Er probiert am Taschenrechner, das arithmetische Mittel zu berechnen. Er greift zur Formelsammlung und stöbert im Kapitel zu Exponentialfunktionen. Dann schaut er zu Änderungsmaßen und begutachtet den Differenzenquotienten. Nachdem er für ihn Relevantes nicht findet, blättert er zum Kapitel Statistik. Er gelangt zu den Zentralmaßen.

I: Was ist dein Plan gerade?

D: Ich suche nach irgendeiner Formel, die mir vielleicht helfen kann. Ich weiß jetzt schon, dass das das arithmetische Mittel ist und dass das aber hier nicht so ganz passt. Ich weiß auch warum. Aber jetzt such ich nach einem anderen Weg, das zu berechnen.

I: Sticht dir was ins Auge?

D: Nicht wirklich, nein. Ich glaub, ich probiere lieber nochmal den ersten Punkt von (a).

Er nimmt den Taschenrechner und zeichnet quadratische Funktionen.

D: Ich schau jetzt mal, was die einzelnen Parameter bei einer quadratischen Funktion so bewirken. Also setze ich einfach verschiedene Werte für a, b und c ein und zeichne die Funktionen.

Er testet zuerst, was c bewirkt und erkennt es recht schnell.

D: Jetzt weiß ich mal, dass $c = 13$ sein muss.

Als Nächstes verändert er b und kann die Transformationen der Funktion nicht richtig nachvollziehen. Er probiert aber noch 3 Minuten lang weiter und ihm fällt etwas auf.

D: B muss eigentlich 0 sein. Denn in jedem anderen Fall ist die Funktion nicht symmetrisch zur y-Achse. Wow, da hab ich jetzt lang dafür gebraucht. Und weiter... A muss negativ sein. Und jetzt schau ich halt, wie groß es ungefähr ist, indem ich weiter probiere. Die Nullstellen müssen ja bei 36 und –36 sein. Das a muss immer kleiner werden, weil die Kurve dann flacher wird. Also probiere ich mal –0,1. Okay, das geht sich nicht aus. Dann probiere ich halt –0,01. Ah, das könnt sich ausgehen. Ich schau mir mal die Wertetabelle an. Hm, gerundet würde das sogar passen. Dann lass ich das so.

Er schreibt die Funktion an und schaut nochmal zu (b). Beschließt aber dann schnell, dass er nicht mehr draufkommen wird.

Reflexion

Bei der 1. Aufgabe konnte ich mit (a) sehr wenig anfangen, weil ich keinen Zusammenhang zwischen den beiden Formen sehe. Auf den Satz von Vieta wäre ich nie von selbst gekommen. Ich glaub auch nicht, dass das in meiner Klasse viele geschafft hätten. Bei (b) habe ich sehr lang überlegt, obwohl es eigentlich eh nicht so schwer ist. Es ist sehr klar formuliert. Und das haben wir im Unterricht sehr oft gemacht. Also die Aufgabe war wirklich nett, wenn man ein bisschen ein theoretisches Verständnis hat. Und (c) ist eigentlich auch klar, dass man da nur die Gleichung aufstellen muss und dann mit dem Taschenrechner berechnen kann. Das sieht man schnell.

Mit der 2. Aufgabe konnte ich eigentlich mehr anfangen. Ich glaub, was ein bisschen schwierig für viele ist, ist von einem Kontext auf eine Funktion zu schließen. Also da auch die Parameter rauszufinden. Wir haben das viel öfter umgekehrt gemacht, wo wir eine gegebene Funktion interpretieren mussten. In die Richtung ist es schwieriger. Aber es ist wenigstens klar, was man machen muss. Und beim Probieren kommt auch das Richtige raus. Also die Zahlen sind nett ausgesucht. Die Aufgabe mit der kontextbezogenen Anwendung Integral ist eigentlich eh total typisch. Wobei das mit dem Volumen irgendwie schon fies ist, weil man das Integral normalerweise nur im Zusammenhang mit Fläche lernt. Und da ist jetzt plötzlich das Volumen gefragt. Aber wenn man es sich dann durchdenkt, ergibt es schon Sinn. Der erste Teil von Aufgabe (b) ist eigentlich auch recht klar. Da habe ich sofort gewusst, was ich machen muss. Aber der zweite Teil, der ist unmöglich. Also ich verstehe schon, was falsch gemacht wurde. Aber dass man da draufkommt, dass man das geometrische Mittel braucht. Auf das kommt man einfach nicht. Aber allgemein fand ich die Aufgabe cool.

Ich glaub nicht, dass mir die zweite Aufgabe leichter gefallen ist, weil es einen Kontext gab. Ein Kontext hilft mir nicht automatisch bei der Aufgabe. Aber solche Aufgaben fallen mir halt leichter, wo es um Integrale und Funktionen geht. Das kann ich.

Ich denke, ich habe alles gemacht, das ich konnte. Also alles, was mir jetzt gefehlt hat, hätte ich auch nachher nicht können.

2.2. Thomas

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

Thomas bekommt die Angabe, liest sich den Anfang von (a) durch und fängt sofort an:

T: Ich setzte gleich mal Werte für z ein und zeichne es am Taschenrechner.

Er starrt den Graphen der Funktion an und überlegt für eine Weile kommentarlos.

T: Das schaut komisch aus. Ich mach lieber mal (b).

Er überfliegt die Angabe und nimmt wieder den Taschenrechner in die Hand.

T: Ich gebe die Funktion f in den Taschenrechner und nehme für p einen Wert. Mal schauen.

Er schaut lange auf den Taschenrechner und überlegt.

T: Ja, wie begründe ich das rechnerisch? Naja, es gibt ja ein positives und ein negatives.... Ich weiß nicht, was jetzt genau damit gemeint ist... Also ich probiere verschiedene Werte für p am Taschenrechner und es kommt immer ein positiver und ein negativer Wert raus. Aber ich bin mir nicht sicher, ob das damit gemeint ist.

Tippt wieder am Taschenrechner weiter und zeichnet verschiedene Funktionen.

T: Also, wenn ich jetzt zum Beispiel p = +2 nehme, dann sind die zwei Lösungen wahrscheinlich auch die Nullstellen – also vom x-Wert. Also ich würde sagen, der negative und der positive Wert sind der x-Wert von den Nullstellen.

I: Und wie begründest du, dass die eine positiv und die andere negativ ist?

T: Hm... Wir haben ja q = –1 und es ist eine quadratische Funktion. Und bei einer quadratischen Funktion muss es eigentlich sein, dass eine Nullstelle von den x-Werten her im positiven und die andere im negativen Bereich liegen muss. Wegen diesen Bedingungen. Ja, das ist eh schon das, was beim Zweiten gefragt ist.

Er schreibt sporadisch „1) positive und negative Lösung sind Nullstellen. 2) wegen x^2 und q=–1“und geht weiter zu (c). Er liest die Angabe und greift nach kurzem Nachdenken wieder zum Taschenrechner. Ohne Kommentare probiert er für 5 Minuten Verschiedenes am Taschenrechner aus.

T: Ich hab jetzt einfach mal das Integral von –1 bis 1 von der Funktion eingegeben, also mit dem Solve-Befehl. Da hab ich mir p ausrechnen lassen. Das ist –3. Jetzt kontrolliere ich das noch schnell, ob da eh das Richtige rauskommt. Ja, das müsste stimmen.

Er schreibt „1) p=–3".

T: So, und jetzt muss ich es einfach vergleichen, die zwei Integralwerte. Also da berechne ich am Taschenrechner die Zahlen. Und schau einfach. Beim einen kommt –1,5 und beim anderen –4,5 raus. Also das ist falsch.

Er schreibt „2) falsch, weil $\int_{-1}^{0} f(x)dx = -1{,}5$ und$\int_{0}^{1} f(x)dx = -4{,}5$".

T: Gut, und jetzt nochmal zu (a)... Hm. Ich finde nicht wirklich einen Zusammenhang zwischen p, q und z.

Er lässt das aus und schaut zum zweiten Punkt der Aufgabe.

T: Theoretisch ist das ja auch eine Funktion. Also zeichne ich eine Funktion, indem ich für z einen Wert einsetze.

Er probiert verschieden Werte für z am Taschenrechner aus.

T: Okay, ich setzte jetzt zum Beispiel z=2 in die Gleichung ein und löse sie mit dem Taschenrechner. Da kommen aber zwei Lösungen raus, also kann es das nicht sein. Null hätte ich auch probiert, aber das geht auch nicht. Aber bei 1 kommt genau eine Lösung raus. Also z wäre 1. Dann zeichne ich die Gleichung. Dann ist das x auch 1, wenn ich es richtig interpretiere.

Er denkt nochmal drüber nach.

T: Nein, das ist ein Schwachsinn. Hm. Oder? Also das lokale Minimum hat die Funktion bei x = 1, wenn z = 1. Naja.

Er schreibt ein „z=1 -> solve -> Minimum bei x=1".

T: Okay, aber auf das Erste von (a) komm ich nicht. Aber bei (b) das begründen... Hm... Ja, da q = –1 und wegen des x^2 gibt es eine positive Krümmung, muss es logischerweise eine positive und eine negative Nullstelle geben.

Er skizziert eine nach oben offene Parabel, die durch (0|–1) geht und beendet die Aufgabe.

Design-Center Linz

Thomas bekommt die Angabe und liest sich erst mal die Einleitung durch und zeichnet die Werte in die Abbildung des Designcenters ein. Dabei zeichnet er ein, dass der Bogen eine Länge von 72 m hat.

T: Ah, nein. Das macht keinen Sinn. Ich glaub, dass das da unten (deutet auf die Spannweite der Bögen) auch 72 m sind. Geht das? Na egal.

Er widmet sich (a) und fängt mit dem zweiten Teil an. Er schreibt das Integral auf und interpretiert dieses als Volumen des Design-Centers. Dabei deutet er auf das Foto vom Design-Center.

T: Also von 0 bis 36 ist ja die Fläche da und dann noch mal 200, weil wir ja die gesamte Länge nehmen. Und mal zwei, weil es ja doppelt vorkommt.

Dann konzentriert er sich auf den Ausgleichspunkt. Er schreibt gleich „d=13".

T: d=13, weil die Funktion da die y-Achse schneidet und die Höhe ist ja auch 13.

Jetzt nimmt er den Taschenrechner und zeichnet verschiedene quadratische Funktionen.

T: Ich schau jetzt einfach, was ungefähr ausschaut wie der Graph. Vorm x muss auf jeden Fall ein Minus sein, weil die Funktion nach unten offen ist. Und jetzt schau ich halt, was man so ändern kann.

Er probiert verschiedene Werte aus.

T: Okay, es gibt keinen Wert, der vor x steht. Also das gibt es nicht. Jetzt habe ich mal gezeichnet $-2x^2+13$. Das schaut schon ganz okay aus. Aber ich will ja noch, dass die Nullstellen bei 36 und –36 sind. Also verändere ich das vorm x^2. Ich probiere 16. Nein, das ist zu steil. Dann versuch ich mal –0,01 und schau mir das in der Wertetabelle an.

Er tüftelt noch eine Weile, um genauere Werte zu finden, z.B. –0,009 und –0,011, merkt aber, dass er auf keinen genauen Wert kommt.

T: Wahrscheinlich kann man das ganz leicht ausrechnen. Ich glaub, das geht mit solve. Aber egal, ich nehme jetzt einfach den gerundeten Wert.

Er schreibt „$f(x)\approx-0{,}011x^2+13$" und schaut weiter zu (b).

T: Also nach einem Jahr hat er 66 Millionen mal 1,035. Und dann mach ich das einfach zehnmal so.

Er berechnet jedes Ergebnis einzeln am Taschenrechner, bis er beim Endergebnis ist, und schreibt „Nach 10 Jahren ~93,1 Mio €“. Dann liest er sich den zweiten Teil durch.

T: Aha. Also ich weiß schon, was falsch ist. Man darf ja nicht einfach von den Prozent ausgehen. Man braucht ja einen Wert, von dem man die Prozent nimmt. Aber wie man das richtig macht? Hm...

Er überlegt für einige Minuten.

T: Die 3,2% vom Jahr 2010 plus die 2,3% vom Jahr 2011 aber in Bezug auf 2010. Hä? Nein, ich komm nicht drauf.

Reflexion

Von den Formulierungen her bei den Beispielen find ich beide eigentlich okay. Nur bei Aufgabe 1a hat mich der Begriff „reziprok“ verwirrt. Da konnte ich gar nichts damit anfangen. Das war bei den anderen aber nicht so schlimm. Der Baukostenindex war gut beschrieben, was das angibt. Das konnte man dann auch leicht berechnen. Auch 2a war relativ einfach, weil man ja alle Werte gegeben hat und man nur mit ein bisschen Probieren draufkommen kann.

Also ich mag so Aufgaben wie die Nummer 2 lieber. Das ist eher mein Gebiet. Da gibt es mehr Angabe und Text. Nicht nur Formeln. Das fällt mir viel leichter, weil ich mehr rauslesen kann. Bei Aufgabe 1 muss man mehr herumprobieren, bis man auf was kommt. Nur halt das mit dem Durchschnitt war blöd. Ich glaub, das hätten aus meiner Klasse nicht viele – wenn überhaupt wer – geschafft. Aber den Rest von Aufgabe 2 hätten schon die meisten geschafft.

Aber Aufgabe 1 war halt schon viel schwieriger. Vor allem bei 1a glaub ich nicht, dass das so viele geschafft hätten. 1b war irgendwie verwirrend, dass man das rechnerisch begründen muss. Wobei, wenn man das mit der Diskriminante im Kopf hat, dann hat man das eh total schnell. Und 1c war sowieso leicht, weil man das einfach nur in den Taschenrechner einsetzt. Eigentlich war sie also eh im Großen und Ganzen machbar, aber schon schwerer als die andere Aufgabe.

2.3. Amelie

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

Amelie bekommt die Angabe und beginnt gleich mit (a).

A: Wenn wir angeben sollen, wie die Parameter p und q jeweils von z abhängen, dann muss man eigentlich p und q ausdrücken. Also quadrier ich die Klammerausdrücke da aus. Ich habe das in der Form noch nie gesehen. Deshalb probiere ich jetzt einfach mal.

Amelie multipliziert die Klammern aus und kennzeichnet „$-zx - \frac{x}{z}$“ als p und „+1“ als q. Sie schreibt die Zusammenhänge aber nicht als Gleichungen. Sie geht weiter zum zweiten Punkt von (a).

A: Das kenn ich so nicht, das gefällt mir nicht. Ich mach mal bei (b) weiter. Rechnerisch begründe ich das einfach so, dass ich die Nullstellen mit der kleinen Lösungsformel berechne.

Sie schlägt sicherheitshalber die Formel in der Formelsammlung auf und notiert, während sie weiter kommentiert.

A: Wenn ich für q –1 einsetze, dann habe ich hier +1. Dadurch ist der Ausdruck unter der Wurzel immer positiv. Und dann gibt es immer plus-minus der Wurzel, also gibt es immer zwei Lösungsfälle. Und die Funktion muss eine positive und eine negative Nullstelle haben, weil sie eine normale quadratische Funktion ist, die nur nach unten verschoben ist. Und sie ist symmetrisch zur y-Achse. Also schneidet sie die x-Achse einmal links und einmal rechts der y-Achse.

Sie geht weiter zu (c) und schreibt gleich die Funktionsgleichung auf. Sie integriert händisch und setzt das bestimmte Integral gleich –6. Sie rechnet alles mit der Hand.

A: Ich integriere und setzte für x einmal –1 und einmal +1 ein. Und dann löse ich die Gleichung. Ich hoffe, ich habe keinen Fehler gemacht. Also bei mir kommt zumindest raus: p = –3.

Für den zweiten Teil nimmt sie den Taschenrechner.

A: Ich zeichne die Funktion jetzt mal am Taschenrechner und sehe, dass die Funktion entlang der x-Achse verschoben ist. Also können die zwei Integrale gar nicht gleich sein, weil die Fläche hier von 0 bis 1 größer ist als die von –1 bis 0.

Sie verschriftlicht ihre Argumente und geht dann wieder zu Aufgabe (a). Sie multipliziert die Klammern noch einmal aus. Dann schaut sie lang auf ihre Notizen. In der Formelsammlung findet sie auch nichts für sie Passendes.

A: Das ist schwierig, wenn man das noch nie gesehen hat. Ich weiß nicht genau, was q und was p ist. Weil q nicht mit x multipliziert werden kann, muss es +1 sein. Aber was wäre dann p? Wahrscheinlich ist es was ganz Einfaches und Logisches, was ich grad total übersehe. Ich probiere mal den zweiten Punkt. Da brauch ich nur eine Lösung.

Sie schreibt die Linearfaktoren auf und verwendet den Produkt-Null-Satz.

A: Da kommt mir einmal raus x=z und einmal x=1/z. Ah! Also, wenn z=1 wäre, dann würde das funktionieren. Aber dann? Nein, das versteh ich nicht.

Sie setzt z=1 in die Gleichung ein und erhält „x^2–x+1=0“. Dann schaut sie eine Weile auf ihre Notizen.

A: Okay, ich weiß nicht weiter. Ich lass das jetzt einfach.

Design-Center Linz

Amelie bekommt die Angabe und liest sich den Text durch. Sie beginnt bei (a) und fängt gleich an zu schreiben.

A: Also ich suche eine Gleichung einer Polynomfunktion. Da muss ich erst mal die allgemeine Funktionsgleichung aufschreiben. Also ax^2+bx+c. Das c muss 13 sein, weil das das Höchste ist. Und weil es eine Spannweite von 72 hat und symmetrisch ist, muss es eine Nullstelle bei –36 und eine bei 36 haben. Und jetzt setzte ich die Nullstellen in diese Funktionsgleichung ein. Und den Hochpunkt in die erste Ableitung.

Sie setzt den Punkt (36|0) in f(x) und (13|0) in f'(x) ein. Das müsste aber (0|13) sein. Dadurch passieren weitere Folgefehler beim Lösen des Gleichungssystems.

A: Theoretisch müsste b... Nein, ich rechne es lieber mal aus.

Die folgenden Minuten ist sie mit dem händischen Lösen des Gleichungssystems beschäftigt. Schließlich erhält sie die Gleichung „–0,0361x^2+0,938x+13=0“.

A: Das schaut komisch aus, aber okay.

Sie geht weiter zum zweiten Punkt.

A: Da wird ja das Integral berechnet. Und das Integral von 0 bis 36 ist ja die rechte Hälfte von der Fläche. Weil ich das aber noch mal zwei rechne, habe ich dann das Ganze. Wenn ich das Ganze mal 200 nehme, habe ich im Prinzip das Volumen. Oder? Ja, ich schreib das jetzt einfach so hin.

Dann geht sie weiter zu (b) und überfliegt kurz den Text.

A: Der Text ist so unnötig. Also. Die 66 sind die grundsätzlichen Kosten und dann noch der Zinssatz hoch 10. Also sind das rund 93,1 Millionen Euro. Ich habe also eine Gleichung mit exponentiellem Wachstum aufgestellt. Der Anfangswert sind die 66 und es steigt pro Jahr um 3,5% und dann habe ich mir den Wert nach 10 Jahren ausgerechnet.

Sie liest nochmal die Aufgabenstellung für den zweiten Punkt durch.

A: Also der durchschnittliche Baukostenindex wäre eigentlich das arithmetische Mittel, so wie sie es jetzt berechnet haben. Vielleicht berechne ich mir mal die durchschnittliche Steigung, also den Differenzenquotienten. Dann müsste ich durch 4 dividieren und nicht durch 5.

Sie sucht in der Formelsammlung nach einer Idee.

A: Ja, sicher ist es mit dem Differenzenquotienten. Weil es ja darum geht, um wie viel es steigt. Nein, das ist es nicht. Das sagt mir nur, um wie viel es sich verändert hat. Nein, ich glaub, das fällt mir nicht mehr ein. Ich schau mir lieber nochmal das mit dem Volumen an.

Sie blättert nochmal zu (a) zurück.

A: Oja, na sicher ist das das Volumen. Das ist ja die Querschnittsfläche und wenn ich davon die Höhe nehme. Dann habe ich ein Volumen. Aber ich gebe es lieber noch in den Taschenrechner ein und schaue, ob der Wert, der da herauskommt, realistisch klingt.

Sie berechnet das bestimmte Integral der vorher falsch berechneten Funktionsgleichung.

A: Okay, das freut mich nicht mehr. Ich glaub, ich lass es jetzt einfach so. Wird schon stimmen, hoffentlich. Ich überleg lieber nochmal wegen dem Baukostenindex. Da hab ich eine Idee. Die beziehen sich ja immer auf das vorige. Die Kosten steigen ja. Die bleiben ja nicht gleich. Hm. Nein, ich komm nicht mehr drauf.

Reflexion

Also die Aufgabe 2 fällt mir leichter als die erste. Sie hat mehr Realitätsbezug. Der Kontext ist interessanter. Unter dem Design-Center kann ich mir halt was vorstellen. Das mit dem Durchschnitt war halt zu kompliziert. Das habe ich noch nie gehört. Die erste Aufgabe ist mir zu abstrakt. Da ist so viel Herumrechnerei. Da schleicht sich schnell ein Vorzeichenfehler ein und das verfälscht dann das gesamte Ergebnis.

Mit meiner eigenen Leistung bin ich nicht so zufrieden. Ich glaub, ich hätte es besser können, wenn ich mehr darüber nachgedacht hätte.

2.4. Josephine

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

Josephine bekommt die Unterlagen und liest sich erst mal Teilaufgabe (a) durch. Nach kurzer Zeit blickt sie auf.

J: Oh Gott. Was ist das?

I: Was irritiert dich genau?

J: Das „z“. Ich weiß nicht, was ich da machen soll. Wart mal... Ich denk nochmal nach...

Nach nicht einmal einer Minute meint sie:

J: Ich glaub, das mach ich später. Das find ich jetzt grad irgendwie komisch.

Sie geht weiter zum zweiten Punkt von (a).

J: Ich habe mit jetzt das noch durchgelesen. Aber ich glaub, ich geh jetzt einfach zu (b) weiter.

J: Ich schreib mir mal die normale quadratische Gleichung auf mit q = –1. Also eine Polynomfunktion zweiten Grades. (liest vor) ‚Begründen Sie rechnerisch, warum die Gleichung genau zwei verschiedene Lösungen haben muss.’ Das probiere ich mal mit der Diskriminante, also das unter der Wurzel. Sprich: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Und für p habe ich aber keinen Wert. Aber für q kann ich –1 einsetzen. Hm...

Sie nimmt den Taschenrechner zur Hand.

J: Ich schau jetzt mal, dass ich auf das p komme. Ich weiß zwar nicht, was mir das bringt. Aber ich weiß sonst nicht, was ich noch machen könnte. Aber wenn die Gleichung f(x) = 0... Das heißt, ich muss die Funktionsgleichung Null setzen. Na gut. Eh wie eine quadratische Gleichung.

Schaut nochmal auf ihre Notizen.

J: Normalerweise bekommt man x_1, wenn man die Werte in die Formel einsetzt. Aber ich weiß ja das p nicht. Aber wenn ich die Diskriminante berechne, dann komme ich normalerweise auf irgendwas drauf. Nur was, ist die Frage...

Sie denkt kurz nach.

J: Na gut, dann probiere ich mal etwas anderes aus. Ich gebe das in den Solve-Befehl am Taschenrechner ein und schau einfach, was rauskommt. Dann schau ich, was bei x rauskommt. Und dann schau ich mal.

Sie tippt die quadratische Gleichung $x^2+px-1=0$ am Taschenrechner ein und lässt sie nach x lösen.

J: Okay, das ist jetzt nicht so logisch. Da kommen jetzt zwei verschiedene Lösungen raus. Gilt das? Ich glaub schon. Naja. Muss ich das noch weiter begründen?

I: Das darf ich dir nicht sagen.

J: Naja. Es ist ja eine quadratische Funktion.

Sie skizziert eine nach oben offene Parabel mit zwei Nullstellen. Die Skizze hat keine y-Achse.

J: Warum hat die jetzt sicher zwei Nullstellen? Wegen dem q, glaub ich. Das verschiebt die ganze Funktion ja entlang der y-Achse. Und darum schaut die Funktion so aus. Aber das ist ja grafisch. Wie mach ich das rechnerisch?

Sie schreibt die zwei Lösungen vom Taschenrechner auf.

J: So, das wären jetzt die zwei Lösungen. Aber ich weiß das p nicht. Doch die sind ganz sicher verschieden wegen dem Vorzeichen! Ich lass das jetzt einfach so.

Sie schaut nochmal skeptisch auf ihre Notizen.

J: Das q verschiebt die Funktion nach unten. Und das p sagt, wie die Funktion gekrümmt ist. Glaub ich. Ich zeichne das mal am Taschenrechner.

Zeichnet am Taschenrechner: $f_1(x) = x^2 + 2x - 1$ und $f_2(x) = x^2 - 2x - 1$.

J: Ah, die sind ja beide positiv gekrümmt. Oje. Irgendwas mach ich falsch. Ah. Das Minus vorm x^2 macht die Krümmung aus. Aber da ist kein Minus davor, also kann sie nur positiv gekrümmt sein. Das heißt, ich schau einfach mal zum nächsten Punkt. Da muss ich begründen, warum die Nullstellen positiv und negativ sind. Was ist eine positive Nullstelle? Wenn sie im positiven Bereich liegt? Ich gehe jetzt einfach mal davon aus.

Sie denkt nach und macht Notizen. Sie zeichnet in ihre obige Skizze eine y-Achse ein, sodass eine Nullstelle negativ und die andere positiv ist.

J: Ich hätte gesagt, dass wir einmal ein –x und einmal ein +x brauchen. Also einmal negativ und einmal positiv. Hm. Helfen mir da Ableitungen? Nein, ich glaube, die sind egal. Also f(–x) und f(+x) muss ich herausfinden. Also das x. Und das hängt irgendwie zusammen. Die ganze Funktion wird ja nach unten verschoben wegen dem q = –1. Und ich habe ja zwei Lösungen. Dann muss ja auf der einen Seite Minus sein und auf der anderen Seite Plus. Gut. Das lass ich so.

Sie geht weiter zu Aufgabe (c) und notiert die Angabe. Nach kurzem Überlegen nimmt sie den Taschenrechner zur Hand.

J: Also das Integral von –1 bis 1 ist –6 und ich brauch den Wert p. –1 und 1 sind ja die x-Werte. Die kann ich ja in die Funktion einsetzen. Nein. Da rechne ich jetzt mit F(b)–F(a). Und das kann ich –6 setzen und im Solve-Befehl dann p rausfinden.

Sie ist für ein paar Minuten in den Taschenrechner vertieft. Jedoch integriert sie die Funktion nicht. Sie setzt die Werte -1 und 1 nur in die Funktion f(x) ein. Zufälligerweise erhält sie trotzdem den richtigen Wert.

J: Gut. Da kommt 2p raus. Das kann ich –6 setzen. Und wenn ich das in den Solve-Befehl eingebe, dann kommt p = –3 raus.

Sie liest den zweiten Punkt laut vor.

J: Also könnte ich ja jetzt in die Gleichung das p, das wir schon haben, einsetzen und dann die zwei Integrale berechnen und anschauen, ob die gleich sind.

Sie greift wieder zum Taschenrechner und berechnet die bestimmten Integrale.

J: Okay. Da kommt einmal –3/2 und einmal –9/2 raus. Also ist es nicht gleich. Passt. Dann schau ich mir nochmal (a) an.

Sie liest sich die Angabe nochmal durch.

J: Ich versteh den Sinn von „z" nicht ganz. Und reziproke quadratische Gleichung? Das habe ich irgendwann schon mal gesehen. Vor langer, langer Zeit. Also. Ich habe eine Idee. Nachdem beide Gleichungen 0 ergeben, kann ich sie ja gleichsetzen. Und dann kann ich mit dem Taschenrechner schauen, was für p und für q herauskommt.

Sie tippt die Gleichung mit Solve-Befehl ein. Es kommt ein großer, unübersichtlicher Term heraus.

J: Okay. Was ist das? Es hängt auf jeden Fall ab. Hm. Naja. Ich notier das halt mal, bevor ich gar nichts dastehen hab. Und für q kommt auch sowas Großes raus. Ich versteh nicht, wie sie jetzt davon abhängen. P von z und q von z. Hm. Ich glaub, ich komm nicht mehr drauf.

Design-Center Linz

Josephine bekommt die Aufgabe, überfliegt den Kontext nur flüchtig und geht weiter zur Aufgabenstellung von (a).

J: Ah, jetzt muss ich mir die Maße aus der Angabe rauslesen. Also die maximale Höhe sind 13 m und ist hier. (deutet zum Maximum der Funktion) Und die Breite ist hier. (zeigt zur x-Achse). Die Funktion ist zweiten Grades, also $f(x)=ax^2+bx+c$. Die Funktion ist negativ gekrümmt, und c ist 13m. Und wir haben zwei Nullstellen. Also 72 durch zwei. Einmal (–36|0) und einmal (+36|0). Und dann kann ich einsetzen in ein Gleichungssystem. $0=a*(-36)^2+b*(-36)+13$. Und $0=a*36^2+b*36+13$. Und das ist mit Solve...

Sie gibt das Gleichungssystem am Taschenrechner ein.

J: Okay, dann ist a=–13/1269 und b=0. Also kann man b eigentlich weglassen. Also ist es $f(x)=-13/1269 * x^2 +13$. Okay und dann weiter. Das Integral... 200 ist was? Und Integral ist die Fläche von 0 bis 36. Also. 200m sind die Länge nach hinten. Aber die Fläche ist ja nur von 0 bis 36... Hä? Aber mal 2 ist es ja auch auf die andere Seite. Dann habe ich die ganze Fläche unter der Parabel, also die Frontfläche. Aber was ist Fläche mal Länge?

Sie denkt eine Weile nach.

J: Fläche mal Länge... Ist das das Volumen? Nein. Doch. Theoretisch würde das schon Sinn ergeben, weil es ja dann so viele kleine Scheibchen sind. Ja, das ist das Volumen des ganzen Design-Centers.

Sie liest die Aufgabenstellung des ersten Punktes von (b) laut vor.

J: Gut. t sind 10 Jahre. Und das sind 66 Mio.$*(1+0{,}035)^{10}$. Das ist nämlich exponentiell, weil die prozentuelle Änderung immer gleichbleibt. Und da kommt raus 93 099508,2€.

Sie notiert ihre Rechnung und geht zum nächsten Punkt.

J: Das kommt mir bekannt vor. Er darf das nicht so machen. Er darf nämlich nicht durch fünf teilen, glaub ich. Das ist so ein besonderes arithmetisches Mittel. Ich probiere jetzt einfach, dass ich rechne 1*3,2+2*2,3+3*2,1+4*1,9+5*1,1. Nein, das stimmt nicht. Es muss irgendwie multipliziert werden. Oder halt irgendwie anders berechnet werden.

Sie schlägt in der Formelsammlung nach.

J: Das geometrische Mittel hört sich gut an. Weil es ja lauter relative Änderungen sind. Dann nehme ich die fünfte Wurzel und multipliziere 3,2*2,3*2,1*1,9*1,1. Da kommt raus: 2,00377. Gut. Das lass ich jetzt so.

Reflexion

Aufgabe 1 war für mich persönlich schon sehr schwer, weil das „reziprok" sehr verwirrend klingt. Ich habe dann gar nicht mehr daran gedacht, dass ich noch im Formelheft nachschauen könnte. Da sind so viele unnötige Informationen, dass ich mich nicht mehr ausgekannt habe. Also (a) war ganz schwierig für mich. Ich wäre vielleicht eh draufgekommen, wenn es nicht so kompliziert formuliert wäre.

Und Aufgabe 2 hat mir gut gefallen. Wobei ich die Erklärung am Anfang komisch finde. Die Werte, die man braucht, stehen erst ganz am Schluss. Und in der Volksschule steht nur Länge= und Breite=, da waren halt noch nicht so komplizierte Erklärungen, die einige verwirren. Gut gefunden habe ich, dass man es sich räumlich vorstellen kann auch wegen dem Bild. Es war wirklich nicht schwierig. Man muss nur die richtigen Werte rauslesen. Und die Aufgabe mit dem geometrischen Mittel ist mir nur so leichtgefallen, weil wir das irgendwann mal in der Schule besprochen haben. Aber ich denke, wenn man das nie in der Schule gemacht hat, dann kommt man einfach nicht auf die Idee. Und was halt blöd war, dass ich die Werte nicht verschoben hab auf 0,0032 und so weiter. Aber sonst wäre das gar nicht so schwierig gewesen.

2.5. Helena

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

Helena bekommt die Angabe und liest sich die Aufgabe (a) durch.

H: Beim ersten Punkt habe ich eigentlich keine Ahnung, was das bedeuten soll. Also ich könnte mir zirka vorstellen, dass das wahrscheinlich so eine auseinandergeteilte... So wie zum Beispiel (x–5)·(x+5). Aber weil bei der Aufgabe zwei Minus sind, kann das nicht die sein. Zumindest nicht genau die.

Sie denkt an binomische Formeln.

H: Ich fang lieber mal mit dem Bestimmen an.

Sie meint den zweiten Punkt von (a).

H: Ich muss irgendwie eine Lösung finden. Wenn ich die Werte für z bestimmen muss, muss ich diese Gleichung einfach nur umformen. Und vielleicht hängt das dann ja auch mit den Werten p und q zusammen. Ich bin mir nicht sicher. Ich glaub aber, dass das zwei verschiedene Sachen sind. Vielleicht kann ich auch die zwei Sachen gleichsetzen, also: $x^2 + p \cdot x + q = (x - z) \cdot (x - \frac{1}{z})$, weil ja beide Null sind. Aber das Problem ist dann, dass da p und q drinnen sind. Das sind ja eigentlich Zahlen, aber jetzt nur Variablen. Und die kann ich ja nicht einfach wegkürzen. Und wie sollte ich x wegbekommen? Also hätte ich dann nur eine Gleichung und drei Unbekannte. Ich probiere einfach mal, was rauskommt.

Sie multipliziert die Terme $(x - z) \cdot (x - \frac{1}{z})$ miteinander und vereinfacht die Gleichung. Dabei passiert ihr ein Rechenfehler. Sie rechnet: $\frac{1}{z}x = 0{,}5z\mathrm{x}$. Als vereinfachte Gleichung steht bei ihr nun $x^2 - 1{,}5zx + 1 = 0$

H: Das schaut ja schon mal schöner aus. Jetzt brauche ich nur noch dieses eine z, sodass genau eine Lösung rauskommt. Ich versuche das mal mit Herausheben.

Sie hebt x heraus: $x \cdot (x - 1{,}5z) + 1 = 0$ und verwendet dann fälschlicherweise den Produkt-Null-Satz: x = 0 oder x = 1,5z. Sie denkt gar nicht daran, die quadratische Lösungsformel zu verwenden. Sie setzt 1,5z in die obere Gleichung ein und erhält mit ein paar weiteren Denk- und Rechenfehlern folgende Gleichung: $x^2 - 2{,}25z + 1 = 0$.

H: Ich habe jetzt -2,25 rausbekommen und versuch jetzt für z eine schöne Zahl zu finden. Weil bei schönen Zahlen die Wahrscheinlichkeit größer ist, dass das Ergebnis stimmt. Aber ich weiß jetzt eigentlich nicht mehr wirklich, was ich suche. Und weil ich auch auf die Zeit schauen muss, werde ich das jetzt auslassen und zu (b) weitergehen.

Sie arbeitet zu diesem Zeitpunkt bereits 11 Minuten an dieser Aufgabe.

H: Okay, ich zeichne die Funktion erst mal und setzte für p irgendwas ein.

Sie zeichnet die Funktion am Taschenrechner und schreibt dann auf: „Weil durch q = –1 die Funktion an der y-Achse um eins nach unten verschoben wird und die Funktion somit zweimal die x-Achse schneidet an der gilt: f(x)=0“

H: Weil die Gleichung nach unten verschoben ist, muss sie die Achse zweimal schneiden, und deshalb gibt es auch zwei Lösungen.

Die Aufgabenstellung „begründen Sie rechnerisch“ lässt sie außer Acht.

H: Den zweiten Punkt habe ich so noch nie gehört. Positive Nullstelle heißt wahrscheinlich, dass sie auf der positiven x-Achse ist. Und negativ auf der anderen Seite. Ich glaub, dadurch dass q immer auf der y-Achse sein muss, also immer der Punkt ist, der die y-Achse schneidet, muss die Funktion ja irgendwann mal auf der anderen Seite wieder raufgehen. Ich skizziere das schnell mal.

Sie zeichnet zwei positiv gekrümmte quadratische Funktionen, die durch (0|–1) gehen. Dabei stellt sie aber nicht klar, dass die Funktion positiv gekrümmt sein muss.

H: Wahrscheinlich ist das zu wenig Begründung für die Matura. Aber ich finde es logisch. Es hat ja dort den fixen Punkt (0|–1). Also können die Nullstellen ja nur links und rechts davon liegen. Das ist halt so und fertig. Ich weiß nicht, wie ich das anders formulieren sollte. Vielleicht fällt mir ja später noch was ein.

Sie geht weiter zu Aufgabe (c).

H: Da werde ich jetzt einmal für x „–1“ und dann plus das Gleiche mit „1“ einsetzen. Und das ist dann gleich –6. Aber da könnte es auch einen anderen Weg geben. Ich bin mir gerade nicht sicher. Vielleicht kann ich das auch einfach integrieren und dann gleichsetzen. Das ist mir aber zu kompliziert, ich mach das einfachere.

Sie berechnet händisch f(–1) + f(1) = –6 und erhält p = –3,6.

H: Zur Kontrolle könnte ich den Funktionsgraphen noch am Taschenrechner zeichnen. Da setze ich jetzt –3,6 für p ein. Und wenn ich jetzt vom Taschenrechner das Integral mit den Grenzen –1 und 1 ausrechnen lasse... Aha. Da kommt nicht –6 raus, also kann meins nicht stimmen. Dann probiere ich es doch lieber mit dem Integrieren.

Sie integriert die Funktion händisch nach x und setzt die Grenzen –1 und 1 ein. Dabei rechnet sie jedoch wieder F(–1) + F(1). Außerdem passiert ihr auch ein Rechenfehler und sie erhält p = –4.

H: Gut, dann dasselbe Spiel nochmal. Ich zeichne den Funktionsgraphen und berechne das Integral. Aber... Es kommt was anderes raus. Das Integral wäre jetzt –8. Hm. Dann ist da irgendwo ein Rechenfehler, aber so weit bin ich nicht mehr entfernt, glaub ich!

Sie überprüft ihre Rechnung und sucht nach Rechenfehlern.

H: Das war sicher irgendein Flüchtigkeitsfehler. Wenn ich das hier ändere, dann kommt p = –6 raus. Aber dann stimmt das Integral wieder nicht. Da ist es jetzt –12. Da bin ich jetzt noch weiter weg. Na, dann probiere ich einfach mal die Hälfte, was ist, wenn –3 rauskommt?

Sie zeichnet neuerlich einen Funktionsgraphen mit p=–3 und überprüft das Integral.

H: Oho! Da kommt das Richtige raus! Ich habe zwar keine Ahnung, wo mein Fehler war, aber p ist –3.

Sie schreibt ihr Ergebnis auf und geht weiter zum zweiten Punkt.

H: Ich glaub nicht, dass das gleich groß ist. Ich habe die Funktion ja schon gezeichnet Das auf der linken Seite ist ja nur ein kleines Eckerl und das im Positiven ist ja größer. Also die Fläche ist größer, weil die Funktion nicht symmetrisch ist. Das würde ich mit der Symmetrie begründen. Und das oben kann ich, glaub ich, nicht begründen. Ich lass das jetzt so.

Design-Center Linz

Helena bekommt die Angabe und liest sich den Kontext nicht durch. Sie fängt gleich mit dem Ausgleichspunkt bei (a) an.

H: Ich zeichne jetzt mal eine Funktion am Taschenrechner und versuche sie dann so zu verändern, dass ich auf die Funktion komm.

Sie zeichnet eine allgemeine quadratische Funktion am Taschenrechner und variiert die b-Werte.

H: Okay, durch das b verschiebt sich die Funktion nach links oder rechts. Und ich will aber eine, die den Hochpunkt auf der y-Achse hat. Die soll also nicht verschoben werden. Also ist b=0.

Sie setzt am Taschenrechner ein Minus vor das x^2.

H: Und das Minus stellt sie am Kopf. Also $-x^2 + q = 0$. Aber weil da nicht “allgemein” steht, muss ich für q was einsetzen. Ich nehme da jetzt irgendeinen Wert. Ich schreibe jetzt zum Beispiel: $-x^2 + 5 = 0$.

Dann geht sie weiter zu Punkt zwei. Und nach kurzem Überlegen schreibt sie: „Dies beschreibt die Fläche einer Hälfte im Integral [0; 36), die um das 400-fache vergrößert ist. Beziehungsweise auf das gesamte Gebäude bezogen, bedeutet dies, dass das Design-Center im Querschnitt um das 200-fache vergrößert ist.“

I: Kannst du die Zahl 200 vielleicht auch noch im Kontext deuten?

H: Wie? Da hat sich irgendwer einfach nur ausgedacht. Ich glaube nicht, dass das einen tieferen Sinn hat. Aber es ist ein Integral, also ist es sicher eine Fläche. Vielleicht hat es noch irgendwas mit Prozenten zu tun, aber das weiß ich nicht genau. Da will mir einfach irgendwer das Leben schwer machen.

Sie geht weiter zu (b).

H: Ich muss jetzt zuerst mal aus dem Kontext die Informationen zusammensuchen, damit ich verstehe, was sie von mir wollen. Wenn ich es richtig verstanden habe, dann geht es um den Baukostenindex. Den kann ich sicher durch einen Graphen darstellen, wo man ablesen kann, wie sich das jährlich verändert. Also, wie viele Kosten man für Material und Arbeitsstunden einrechnen muss. Also im Jahr 1993 hat das ganze 66 Mio € gekostet. Und wir sollen jetzt berechnet, wie viel es im Jahr 2003 wären.

Sie denkt eine Weile nach.

H: Okay, also der Baukostenindex steigt jährlich um 3,5%. Das darf man so annehmen. Also da steht nichts von einer Abnahme. Dann wären es ja –3,5. Gut, dann kann ich ja sagen f(0) ist bei 1993, und im Jahr darauf, also 1994, haben wir f(1) und das ist 66 Millionen mal 1,035 mehr. Und im nächsten Jahr darauf müssten es dann diese 1,035 mal wieder diese 1,035. Und wenn das immer dazugerechnet wird, dann wird es ja eigentlich hoch x genommen. Dann ist die allgemeine Formel: $f(x) = 66\,000\,000 \cdot 1{,}035^x$. Und wenn ich das fürs Jahr 10 rechne, dann muss ich nur 10 für x einsetzen.

Sie berechnet den Wert mit dem Taschenrechner und erhält das richtige Ergebnis und liest sich anschließend den zweiten Punkt durch.

H: Meine Überlegung ist grad, ob man da nicht mit falschen Zahlen gerechnet hat. Weil wir ja im Jahr 2010 auf 2011 eigentlich 3,2+2,3 rechnen. Also ist das Wachstum ja 5,5 im Jahr 2011. Und dann wieder 5,5+2,1 für 2012. Und immer so weiter rechnen.

Sie summiert die prozentuellen Änderungen und berechnet dann das arithmetische Mittel davon.

H: Aber das ist unlogisch, weil das ja eigentlich die ganze Zeit abnimmt. Und wenn wir es aber zusammenrechnen, dann nimmt es eigentlich zu. Also habe ich wahrscheinlich falsch gedacht.

Sie überprüft einfach mal, ob das dort angegebene arithmetische Mittel richtig berechnet wurde.

H: Okay, verrechnet haben sie sich nicht. Und was ist, wenn ich malrechne?

Sie multipliziert die Werte und dividiert durch fünf.

H: Nein, das ergibt auch keinen Sinn. Ich glaube, ich komm nicht drauf. Wahrscheinlich muss man irgendwas mit einem Gesamtwert machen. Weil das ja alles zusammenhängt und voneinander abhängt. Aber ich komm nicht drauf, darum lass ich das jetzt. Aber ich schau nochmal schnell zu (a).

Sie liest sich nochmal kurz die Angabe durch.

H: Ah, das ist nicht einfach +5 sondern +13.

Sie schreibt: „$-x^2+13=0$“

H: Und dann kann man sicher auch noch diese 72 m einbeziehen. Von dem die Hälfte ist 36. Und das kann ich jetzt vielleicht am Taschenrechner eingeben. Die Nullstelle sollte dann ja auch bei 36 sein. Aber ich weiß nicht, ob es dann einfach $-36x^2+13$ ist. Das wäre ja zu leicht.

Sie zeichnet die Funktion. Sie schaut sich die Wertetabelle an und bemerkt, dass diese Gleichung nicht stimmen kann.

H: Okay, also bei 0 ist es 13 und bei 36 soll es 0 sein. Das kann ich ja für $x=36$ und $y=0$ einsetzen. Es ist auch eine negative Krümmung darum muss ich ein Minus davor schreiben.

Sie schreibt: (36|0) => $0 = -36^2 a + 13$ => $-13 = -36 a$ => $a = -{}^{13}/_{36}$.

H: Gut, dann habe ich als endgültige Lösung $-{}^{13}/_{36}\, x^2 + 13$.

Reflexion

Ich halte mich für eine durchschnittliche Matheschülerin. Und es kommt bei mir total darauf an, was kommt und wie mir das liegt. Ich denke oft viel zu kompliziert. Grundsätzlich ist mir das zweite Beispiel besser gelegen, weil das viel konkreter war. Beim ersten waren so allgemeine Sachen, wo ich mir nichts darunter vorstellen kann. Und es ist oft einfach kompliziert formuliert. Also da haben nur die Besten eine Chance. Das finde ich irgendwie unfair.

Bei Aufgabe 2 ist es so, dass ich den Kontext gar nicht gelesen habe. Darum habe ich das auch anfangs falsch gehabt. Ich habe das einfach schon so oft erlebt, dass der Kontext nur verwirrt und nicht wirklich brauchbar ist. Das kostet viel zu viel Zeit. Deshalb überspringe ich den meistens gleich. Ich schau mir immer zuerst an, was von mir gefragt ist und dann suche ich erst das aus dem Kontext, was ich brauchen kann.

Und dann denke ich mir bei den Aufgabenstellungen auch immer sofort: „Was wollen die jetzt von mir hören?“ Ich möchte also keine Lösung auf das Problem finden, sondern den Punkt bekommen. Das geht oft durch Probieren schneller als mit komischem Rechnen. Das kommt mir halt oft vor wie Rätselraten. Das macht es extrem schwierig für mich. Aber ich gebe prinzipiell nicht auf. Mehr als falsch kann mein Ergebnis nicht sein. Irgendetwas schreibe ich immer hin.

2.6. Marie und Nora

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

Marie und Nora bekommen die Angabe und lesen sich zunächst (a) durch.

M: Ich bin schon mal froh, dass kein zu langer Kontext ist, dann muss ich nicht so viel lesen...

N: Aber ich weiß trotzdem nicht, was sie von mir wollen. Was heißt „reziprok"?

M: Das habe ich schon mal gehört, aber ich weiß nicht mehr, was das war. Aber das Ganze hat sicher irgendwas mit der kleinen Lösungsformel zu tun

N: Na dann schauen wir mal in der Formelsammlung nach. Da stehen die kleine und die große. Aber warum weißt du, dass es die kleine Lösungsformel sein muss?

M: Weil sie normiert ist.

N: Aja.

M: Ah, da steht auch der Satz von Vieta. Das schaut so ähnlich aus. Das könnte es vielleicht sein. Das heißt $-z-\frac{1}{z}=p$ und $-z\cdot-\frac{1}{z}=q$.

N: Bitte erklär mir das nochmal. Also du hast jetzt die Parameter eingesetzt?

M: Schau, da steht Satz von Vieta. Und da steht das mit den Klammern. Und da ist das jetzt nur mit z für die Lösungen. Das gilt ja dann auch für diese Gleichung. Also haben wir schon p und q.

N: Aber dann hast du falsch eingesetzt: $p=-z+\frac{1}{z}$.

M: Aja, minus und minus.

N: Genau.

M: Und wenn man es dann noch ausrechnet, dann ist q = 1.

N: Dann haben wir das ja schon mal.

M: Gut. Und jetzt sollen wir die Werte für z bestimmen. Okay. Genau eine Lösung heißt, dass der Wert unter der Diskriminante null sein muss. Dann hat es eine Doppellösung.

N: Das heißt $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$.

M: Und dann müssen wir für die Werte von z auch noch die Minimumstellen angeben.

N: Oh Gott.

M: Also $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = 1$, weil q = 1. Das heißt, wir müssen jetzt noch für p einsetzen. Das wäre dann $\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2 = 1$.

N: Und das müssen wir jetzt umformen. Das ist ja langwierig.

M: Ja, das ist ja dann eine binomische Formel, und das wird ganz schön lang.

Marie vereinfacht die Gleichung händisch. Nora schaut zu.

M: Da steht jetzt $z^2 + \frac{1}{z^2} = 2$.

Marie multipliziert mit z^2 und substituiert die folgende Gleichung. Dabei passiert ihr ein Rechenfehler.

N: Ich versteh das jetzt nicht mehr, das ist mir zu kompliziert.

M: Ja, das wird irgendwie viel zu viel. Da kommt jetzt entweder die Wurzel aus 1,5 oder 0 raus. Wobei es 0 nicht sein darf, weil ich ja nicht durch 0 dividieren darf. Das ergibt keinen Sinn.

N: Weißt du was, wir machen jetzt bei (b) weiter. Ich habe das jetzt schon am Taschenrechner gezeichnet und für p irgendwas eingesetzt. Und dann haben wir eine positive und eine negative Nullstelle. Aber ich weiß jetzt nicht, wie ich das begründen soll.

M: Also, das heißt, die Diskriminante ist positiv.

N: Ich würde das jetzt gern in die kleine Lösungsformel einsetzen. Aber das ergibt ja keinen Sinn. Gehen wir davon aus, dass $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ....

Nora hält kurz inne.

N: Aso. Ich habe gerade vergessen, dass das Quadrat das p sowieso wieder positiv macht, egal welches Vorzeichen es hat. Und das q bringt das Minus schon mit und macht es also auch automatisch positiv. Also ist es immer positiv. Und die positive Diskriminante bringt automatisch zwei Lösungen.

M: Also lassen wir das p einfach p sein? Muss das keinen Wert haben?

N: Ja, das p ist im Prinzip egal. Stell dir vor, du hast p = –2. Dann ist es ja zum Quadrat auch wieder positiv. Und das Minus minus ist auch wieder positiv.

M: Also müssen wir keine Zahl einsetzen?

N: Nein, das schreiben wir einfach so auf.

M: Okay.

Marie liest den nächsten Punkt laut vor.

N: Hm. Das –1 verschiebt sie doch nach rechts, oder?

M: Nein, das q = –1 und das x^2 ist positiv. Also ist sie positiv gekrümmt und hat den Tiefpunkt unterhalb der x-Achse. Also muss sie zwei Nullstellen haben.

N: Genau. Und weil sie die y-Achse bei –1 schneidet, ist eine Nullstelle links und eine rechts. Das kann man ja auch zeichnen.

Nora skizziert die Parabel.

M: Ja, ist eh klar. Sie kommt von oben, also muss es so sein. Und wenn die Funktion negativ gekrümmt wäre, dann hätte sie gar keine Nullstelle. Aber vor dem x^2 ist ja kein Minus. Also kommt sie eh von oben. Das sollte die Skizze erklären.

N: Ich denke auch, dass das reicht.

M: Gut, dann machen wir jetzt (c)?

Sie lesen sich beide die Aufgabenstellung durch und schauen etwas ratlos drein.

N: Vielleicht könnten wir einfach... Nein.

M: Wir müssen zumindest einen Wert für p ausrechnen, der ungefähr so ist wie der vorige, weil das Integral von –1 bis 1... Nein, ich weiß nicht.

N: Ich weiß grad nicht so wirklich, worauf du hinauswillst. Warum brauchen die jetzt ein Integral? Und was hat das mit p und q zu tun?

M: Na, das ist ja nur eine neue Funktion.

N: Ich setze jetzt einfach mal irgendeine Zahl für p ein und schau, wie das ausschaut. Also ich nehme einfach irgendeinen Wert für p und zeichne die Funktion am Taschenrechner. Und jetzt berechne ich mit dem Taschenrechner das Integral von –1 bis 1. Da kommt 6 raus. Nicht –6. Aber das ist ja schon mal gut.

M: Was hast du für p genommen?

N: 3.

M: Na dann nimm doch mal –3.

N: Okay, besser als gar nichts machen.

Sie zeichnet den Graphen am Taschenrechner.

N: Da kommt –6 raus.

M: Passt, dann nehmen wir das jetzt einfach: $p = -3$. Und jetzt weiter zum zweiten Punkt.

N: Da müssen wir jetzt einfach die beiden Integrale ausrechnen. Da kommt nicht das Gleiche raus.

M: Gut, jetzt müssen wir nur noch herausfinden, wieso.

N: Weil die Flächen nicht gleich sind: Das eine ist –1,5 und das andere –4,5.

M: Aber warum?

N: Ich weiß es nicht.

M: Lassen wir es?

N: Ja, ich glaub, wir kommen nicht mehr drauf.

Design-Center Linz

Marie und Nora bekommen die Angabe und lesen sich erst mal den Kontext und die gesamte Aufgabenstellung durch.

M: Dann fangen wir mal mit (a) an.

N: Da steht ja, dass die maximale Höhe bei 13 m liegt. Das ist also der Hochpunkt da auf der y-Achse.

M: Da brauchen wir ja nur die Parameter, dass wir die Funktion aufstellen können.

N: Also a, b und c?

M: Genau. Es ist irgendwas mit Minus.

N: Weil es nach unten schaut!

M: Ja. Und es ist breiter.

N: Also vielleicht $-{}^1/_2$. Ich verwende immer gerne gleich Zahlen. Und gebe die dann gleich als Funktionen am Taschenrechner ein. Dann kann ich gleich mal ausprobieren, was die Parameter sein könnten.

M: Jetzt hast du sie nach rechts verschoben. Wie hast du das gemacht?

N: Mit dem b.

M: Okay, aber es muss symmetrisch sein....

N: Ja. Auf jeden Fall wissen wir c = 13. Weil es ja auf der Höhe 13 m ist.

M: Jetzt haben wir mal $y = -0{,}5x^2 + 13$. Das schaut schon mal gut aus.

N: Jetzt müssen wir noch irgendwie die Spannweite reinkriegen.

M: Das sind 72m, aber brauchen wir das überhaupt für die Funktion?

N: Ja, wir müssen ja rausfinden, wo sie die Nullpunkte hat. Also wo die Funktion die x-Achse schneidet.

M: Aber müssen wir wissen, wo die sind?

N: Sicher, sonst ist das ja nicht die Funktion.

M: Gut, wenn die Funktion symmetrisch ist, dann sind die Nullstellen bei 36 und –36.

N: Ich probiere jetzt einfach aus, was a sein könnte und schau mir die Wertetabelle an.

M: Bei mir ist die Funktion gerade verschoben worden.

N: Was hast du eingegeben?

M: $-{}^{1}/_{4}x^2 + x + 13$.

N: Naja, das wird das x sein. Das verschiebt die Funktion ja.

M: Aja. Also müssen wir das x weglassen.

N: Ja, aber ich verstehe noch nicht den Zusammenhang mit den Nullstellen.

M: Okay, dann probieren wir so lang, bis wir unsere Nullstellen bei 36 und –36 haben.

N: Das a muss immer kleiner werden.

M: Ich glaub bei $-{}^{1}/_{100}$ passt es so halbwegs.

N: Ja, dann nehmen wir das jetzt. $f(x) = -{}^{1}/_{100}\, x^2 + 13$ und machen weiter. Wir haben jetzt schon eine Viertelstunde dafür gebraucht.

M: Ja, also bei dem haben wir jetzt das Integral von 0 bis 36.

N: Das ist die Fläche von der Hälfte.

M: Mal 200, das ist die Länge von dem Gebäude.

N: Und mal zwei. Dann ist es wieder das Ganze.

M: Darf man das so machen?

N: Ja, es ist ja symmetrisch.

M: Gut, dann haben wir die ganze Fläche mal die Länge.

N: Und was wollen die dann von uns?

M: Oder das ist einmal das Halbe vorne und das zweite ist das Halbe hinten. Also der Deckel hinten. Die halbe Rückseite.

N: Aber das ergibt ja keinen Sinn.

M: Doch. Das ist dann die Fläche vom halben Design-Center mit Boden.

N: Für mich ist das eher das Volumen.

M: Ja, das Volumen vom halben Design-Center. Das klingt logischer!

N: Aber es wird ja mal zwei genommen. Also das ganze Gebäude.

M: Ah! Ja, das klingt plausibler. Das ist ja Fläche mal Länge. Aber es ist ja dann hinten nicht abgeschlossen.

N: Aber ein Volumen muss ja nicht abgeschlossen werden. Das wird ja nur aufgefüllt. Also es wird ja nur berechnet, was fassbar ist.

M: Okay, ja, es ist das Volumen des ganzen Centers.

N: Passt, dann gehen wir weiter zu (b): Baukosten.

M: Ich mag Wirtschaftsmathematik nicht. Da steht so viel Unnötiges. Was ist überhaupt gefragt?

N: Die Baukosten für 10 Jahre später.

M: Ist das eine Exponentialfunktion?

N: Kann sein, probieren wir es doch.

M: Also nehmen wir an, dass der Baukostenindex pro Jahr um 3,5% steigt.

N: Ja, das kommt immer dazu.

M: Also 66 Millionen mal 1,035 hoch 10.

N: Klingt gut. Dann schauen wir mal, was da rauskommt.

M: Zirka 93 Millionen.

N: Passt und jetzt ist da der durchschnittliche Baukostenindex.

M: Warum ist die Vorgehensweise nicht ganz korrekt? Er berechnet eh das arithmetische Mittel.

N: Schauen wir mal in der Formelsammlung nach.

M: Er will den Durchschnitt. Es gibt sonst noch Median und Modus. Aber die ergeben da auch keinen Sinn. Was sind harmonisches und geometrisches Mittel?

N: Keine Ahnung, davon habe ich noch nie gehört. Das brauchen wir nicht.

M: Was haben wir in der Schule besprochen? Das arithmetische Mittel wird durch Ausreißer beeinflusst.

N: Aber da gibt es ja keine richtigen Ausreißer.

M: Wie wäre es mit dem Median?

N: Der wäre 2,1.

M: Und er hat 2,12 berechnet. Das könnte es sein.

N: Aber es ist der Durchschnitt gefragt.

M: Und das ist das arithmetische Mittel. Was hat er falsch gemacht?

N: Ich glaube, wir kommen nicht mehr drauf.

M: Dann lassen wir es bleiben.

Reflexion

N: Aufgabe 1 fand ich nicht so ansprechend. (a) war blöd formuliert und sehr umständlich. Ich mag das nicht, wenn da kein Kontext ist. Und keine fixen Zahlen. Das ist mir zu theoretisch und abstrakt. Ich möchte nicht so rein hypothetische Sachen begründen. Das verstehe ich nicht sofort und dann blockiere ich schnell. (b) war dafür schon wieder okay. Das habe ich schnell verstanden, weil ich mir da gleich viel mehr darunter vorstellen konnte. Und das haben wir in der Schule einfach auch so oft besprochen, dass das schnell klar war, was zu tun ist.

M: Ich mochte Aufgabe 1 mehr als Aufgabe 2. Ich mag das nicht, wenn man vom Kontext so abgelenkt wird. Das ist nur Theorie und da kann ich mich viel besser auf das Wesentliche konzentrieren. Aber es war schon ziemlich schwer.

N: Bei Aufgabe 2 fand ich (a) sehr cool. Wir mussten zwar ein bisschen umständlich denken. Aber ist doch sehr logisch und man kann es sich gut vorstellen. Und auch der Punkt mit dem Integral passt gut. Bei (b) fand ich den Kontext irgendwie verwirrend, dafür dass dann eh nur eine Exponentialfunktion gefragt ist. Also da war die Einleitung unnötig. Und das mit dem geometrischen Mittel. Ja, das hätte man wissen können.

M: Ich fand die Aufgabe 2 ganz okay... Die ersten Punkte waren klar. Da musste man zwar schon ein bisschen nachdenken. Aber dann konnte man einfach das anwenden, was man bereits gelernt hat. Nur das letzte – mit dem geometrischen Mittel – das war schwierig. Das weiß man ja nicht einfach so.

3. Einverständniserklärungen zur quantitativen Untersuchung

3.1. Elternbrief

Liebe Schülerinnen und Schüler, sehr geehrte Eltern!

Mein Name ist Valerie Schroll und ich habe vor vier Jahren am Stiftsgymnasium Melk maturiert. Momentan studiere ich an der Universität Wien Mathematik und Geographie und Wirtschaftskunde auf Lehramt. Im Rahmen meiner Diplomarbeit untersuche ich die Fähigkeit von Achtklässlerinnen und Achtklässlern, unterschiedliche Grundkompetenzen der Mathematik miteinander zu verknüpfen.

Deshalb führe ich am Freitag, den 8. April, eine jahrgangsumfassende Untersuchung in den achten Klassen mit Unterstützung der jeweiligen Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer durch: Dabei werden den Schülerinnen und Schülern im Rahmen einer schriftlichen Überprüfung zwölf reifeprüfungsähnliche Teil-1-Aufgaben gestellt, welche sie in einer vorgegebenen Reihenfolge lösen sollen. Die Testung nimmt eine Unterrichtsstunde in Anspruch.

Dieser Kompetenzcheck wird selbstverständlich nicht benotet, denn die Teilnahme an dieser Studie ist freiwillig. Sie dient den Schülerinnen und Schülern jedoch automatisch als Vorbereitung auf die standardisierte, kompetenzorientierte Reifeprüfung, und eine gewissenhafte Teilnahme ist deshalb empfehlenswert.

Die einzelnen Ergebnisse werden danach so bald wie möglich an die jeweiligen Lehrpersonen weitergeleitet. In der Diplomarbeit selbst werden keine persönlichen Daten, sondern nur anonymisierte, statistische Ergebnisse veröffentlicht.

Für etwaige Fragen stehe ich gerne zur Verfügung: valerie.schroll@outlook.com

Vielen Dank für Ihre Unterstützung, mit freundlichen Grüßen,

- -

Hiermit bestätige ich, dass mein Sohn / meine Tochter / ich, ________________________ (Klasse: ____), an dem Kompetenzcheck am ....2016 teilnimmt / teilnehme und die statistischen Ergebnisse in der Diplomarbeit von Valerie Schroll veröffentlicht werden dürfen.

______________ ____________________

Ort, Datum Unterschrift

3.2. Formular quantitative Untersuchung

Gruppe ...

Datum: _______________

Schule: _______________

Klasse: _______

Mathematiklehrer/in: ___________________________

Name: ___________________________

Schulzweig: ___________________________

Im Rahmen meiner Diplomarbeit im Fach Mathematik untersuche ich die Fähigkeit von Achtklässlerinnen und Achtklässlern, verschiedene Grundkompetenzen miteinander zu verknüpfen. Deshalb ersuche ich dich, in diesen 45 Minuten die folgenden reifeprüfungsähnlichen Teil-1-Aufgaben zu lösen. Bitte versuch dabei, die Aufgaben möglichst in der vorgegebenen Reihenfolge zu bearbeiten.

Die Ergebnisse werde ich so bald wie möglich an deine Lehrperson weiterleiten.

Vielen Dank für deine Hilfe und alles Gute,

4. Detaillierte Ergebnisse der quantitativen Untersuchung

4.1. Ergebnisse Gruppe A – durchmischte Reihenfolge

AG 1.1	AG 2.5	AG 3.4	FA 1.5	FA 3.4	FA 5.4	AN 1.3	AN 3.3	AN 4.2	WS 1.1	WS 2.3	WS 3.1	Gesamt-punkte
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	**11**
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	**11**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	**11**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	**11**
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	**10**
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	**10**
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	**10**
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	**10**
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	**10**
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	**10**
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	**10**
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	**10**
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	**10**
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	**9**
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	**9**
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	**9**
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	**9**
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	**9**
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	**8**
0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	**8**
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	**8**
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	**8**
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	**8**
1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	**8**
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	**8**
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	**8**
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	**8**
1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	**7**
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	**7**
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	**7**
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	**7**
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	**7**

1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	**7**
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	**7**
0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	**7**
1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	**7**
1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	**7**
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	**6**
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	**6**
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	**6**
1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	**6**
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	**6**
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	**5**
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	**5**
1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	**5**
0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	**5**
1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	**5**
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	**4**
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	**4**
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	**2**
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	**2**
75,4%	**63,2%**	**75,4%**	**57,9%**	**82,5%**	**36,8%**	**82,5%**	**71,9%**	**45,6%**	**61,4%**	**71,9%**	**82,5%**	**67,3%**

Tabelle 12 - Detaillierte Ergebnisse der Versuchsgruppe

4.2. Ergebnisse Gruppe B – geordnete Reihenfolge

AG 1.1	AG 2.5	AG 3.4	FA 1.5	FA 3.4	FA 5.4	AN 1.3	AN 3.3	AN 4.2	WS 1.1	WS 2.3	WS 3.1	Gesamt-punkte
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	**11**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	**11**
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**11**
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**11**
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**11**
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	**10**
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	**10**
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	**10**
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	**10**
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	**10**
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	**9**
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	**9**
1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	**9**

1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	**9**
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	**9**
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	**9**
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	**9**
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	**9**
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	**8**
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	**8**
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	**8**
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	**8**
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	**8**
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	**8**
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	**8**
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	**8**
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	**7**
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	**7**
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	**7**
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	**7**
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	**7**
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	**7**
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	**7**
0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	**7**
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	**7**
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	**7**
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	**7**
1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	**7**
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	**7**
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	**6**
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	**6**
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	**6**
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	**6**
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	**6**
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	**6**
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	**6**
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	**6**
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	**6**
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	**5**
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	**5**
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	**5**
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	**5**
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	**5**
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	**5**
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	**4**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**3**

1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	**3**
83,6%	**59,0%**	**52,5%**	**60,7%**	**63,9%**	**45,9%**	**82,0%**	**72,1%**	**42,6%**	**63,9%**	**77,0%**	**73,8%**	**64,8%**

Tabelle 13 - Detaillierte Ergebnisse der Kontrollgruppe