



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Numerische Berechnung des Geschwindigkeitsprofils  
eines Projektils in einer Druckluftapparatur“

verfasst von / submitted by

Michael Mair

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears on  
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears on  
the student record sheet:

Lehramtsstudium UniStG  
UF Mathematik UniStG  
UF Physik UniStG

Betreut von / Supervisor:

Univ.-Prof.i.R.Dr.Herbert Muthsam



# Inhaltsverzeichnis

|                                                            |          |
|------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Einleitung</b> .....                                    | <b>1</b> |
| <b>1 Grundlagen der Strömungsmechanik</b> .....            | <b>3</b> |
| 1.1 Gliederung, Begriffe und Definitionen.....             | 3        |
| 1.1.1 Gliederung der Strömungsmechanik .....               | 3        |
| 1.1.2 Fluidmechanik und Fluid .....                        | 5        |
| 1.1.3 Ideales Gas.....                                     | 6        |
| 1.1.4 Haftungsbedingung und Viskosität .....               | 7        |
| 1.1.5 Kompressibilität .....                               | 8        |
| 1.1.6 Bahnlinie, Stromlinie und Strömungszustände .....    | 9        |
| 1.1.7 Stromfaden und Stromröhre .....                      | 10       |
| 1.1.8 Zustandsgrößen und Zustandsänderungen.....           | 11       |
| 1.2 Reynolds' Transport Theorem .....                      | 12       |
| 1.3 Erhaltungsgleichungen für reibungsfreie Fluide .....   | 14       |
| 1.3.1 Massenerhaltung .....                                | 14       |
| 1.3.2 Impulserhaltung und Euler-Gleichung .....            | 15       |
| 1.3.3 Energieerhaltung .....                               | 17       |
| 1.4 Stromfadentheorie .....                                | 18       |
| 1.4.1 Massenerhaltung eines stationären Stromfadens.....   | 19       |
| 1.4.2 Impulserhaltung bei einer Rohrströmung.....          | 20       |
| 1.4.3 Energieerhaltung entlang eines Stromfadens.....      | 21       |
| 1.4.4 Stationäre Bernoulli-Gleichung .....                 | 22       |
| 1.4.5 Instationäre Bernoulli-Gleichung.....                | 22       |
| 1.5 Kompressible Strömungen und Düsen .....                | 23       |
| 1.5.1 Wellengleichung .....                                | 23       |
| 1.5.2 Schallgeschwindigkeit.....                           | 25       |
| 1.5.3 Qualitatives Verhalten kompressibler Strömungen..... | 26       |
| 1.5.4 Saint-Venant-Wantzel Formel.....                     | 27       |
| 1.5.5 Konvergente Düse .....                               | 28       |
| 1.5.6 Laval-Düse.....                                      | 30       |
| 1.6 Reibungsbehaftete Fluide.....                          | 31       |
| 1.6.1 Spannungstensor.....                                 | 31       |
| 1.6.2 Navier-Stokes-Gleichung .....                        | 33       |
| 1.6.3 Reynoldszahl .....                                   | 34       |
| 1.7 Grenzschichtströmungen.....                            | 35       |

|          |                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.8      | Turbulente Strömungen .....                                  | 36        |
| 1.8.1    | Reynolds'sche Gleichungen .....                              | 36        |
| 1.8.2    | Viskose Unterschicht .....                                   | 38        |
| 1.8.3    | Logarithmisches Wandgesetz.....                              | 39        |
| <b>2</b> | <b>Grundlagen der Numerischen Strömungsmechanik .....</b>    | <b>40</b> |
| 2.1      | Definitionen und Eigenschaften .....                         | 40        |
| 2.1.1    | Der Begriff CFD .....                                        | 40        |
| 2.1.2    | Das CFD-Modell und dessen Eigenschaften .....                | 41        |
| 2.1.3    | CFD Software .....                                           | 42        |
| 2.2      | Rechengitter .....                                           | 43        |
| 2.2.1    | Strukturierte Gitter .....                                   | 44        |
| 2.2.2    | Unstrukturierte Gitter .....                                 | 45        |
| 2.2.3    | Hybride Gitter.....                                          | 45        |
| 2.2.4    | Gütekriterien .....                                          | 46        |
| 2.3      | Erhaltungssätze .....                                        | 47        |
| 2.3.1    | Die prototypische Modellgleichung .....                      | 47        |
| 2.3.2    | Materialgesetze und Zustandsgleichungen .....                | 48        |
| 2.4      | Finite-Volumen-Methode .....                                 | 50        |
| 2.4.1    | Grundidee .....                                              | 50        |
| 2.4.2    | Allgemeines inkompressibles Problem .....                    | 51        |
| 2.4.3    | Diskretisierung .....                                        | 54        |
| 2.5      | Numerische Interpolationsverfahren.....                      | 55        |
| 2.5.1    | UDS-Interpolation .....                                      | 55        |
| 2.5.2    | CDS-Interpolation .....                                      | 56        |
| 2.5.3    | SOU-Interpolation und Verfahren höherer Ordnung .....        | 56        |
| 2.6      | Numerische Differentiation .....                             | 57        |
| 2.6.1    | CDS Differentiation .....                                    | 57        |
| 2.7      | Numerische Integration in Raum und Zeit .....                | 58        |
| 2.7.1    | Mittelpunktsregel.....                                       | 58        |
| 2.7.2    | Explizites/Implizites Euler-Verfahren .....                  | 59        |
| 2.8      | Turbulenzmodelle .....                                       | 61        |
| 2.8.1    | Standard-k- $\epsilon$ -Turbulenzmodell.....                 | 61        |
| 2.8.2    | Mentner-SST-k- $\omega$ -Modell.....                         | 62        |
| <b>3</b> | <b>Numerische Strömungssimulation.....</b>                   | <b>63</b> |
| 3.1      | ANSYS® FLUENT® .....                                         | 63        |
| 3.2      | Beschreibung und Konstruktion des 2D Berechnungsmodells..... | 65        |
| 3.3      | 2D Import und Vernetzung des 2D-Modells .....                | 68        |



|                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------|------------|
| 3.4 Setup-Einstellungen .....                                   | 71         |
| 3.5 Berechnung und Auswertung .....                             | 76         |
| <b>4 Konstruktion und Fertigung der Druckluftapparatur.....</b> | <b>85</b>  |
| 4.1 Konstruktion des 3D-Modells.....                            | 85         |
| 4.2 Fertigung der Druckluftapparatur.....                       | 89         |
| 4.3 Erkenntnisse und Ergebnisse.....                            | 94         |
| <b>5 Analyse von Theorie und Praxis.....</b>                    | <b>100</b> |
| <b>Literaturverzeichnis .....</b>                               | <b>102</b> |
| <b>Abbildungsverzeichnis .....</b>                              | <b>103</b> |
| <b>Tabellenverzeichnis .....</b>                                | <b>105</b> |
| <b>Anhang.....</b>                                              | <b>106</b> |
| Arduino-Code-Pumpe .....                                        | 106        |
| Arduino-Code-Geschwindigkeitsmessgerät .....                    | 107        |
| Abstract.....                                                   | 108        |



## Einleitung

Die Strömungsmechanik spielt in vielen Bereichen von Natur und Technik eine außerordentlich wichtige Rolle und fand ihre Anfänge bereits in der Antike. Schon der Philosoph Heraklit von Ephesos brachte mit dem bekannten Spruch *panta rhei - alles fließt* die Menschen aus dem 5. Jahrhundert v. Chr. zum Nachdenken [1].

Das Ziel der Strömungsmechanik ist es, alle thermischen und mechanischen Vorgänge in strömenden Medien auf wissenschaftlicher Basis zu verstehen und einen technischen Nutzen daraus zu ziehen. Medien, die sich unbegrenzt mechanisch deformieren lassen und in denen ein effektiver Stofftransport möglich ist, sind sowohl Flüssigkeiten und Gase als auch Dämpfe. Werden in diesen Medien Stoffe, Impuls sowie Wärme transportiert, so spricht man von einer Strömung [1] und [2].

Die numerische Strömungsmechanik (engl.: Computational Fluid Dynamics, CFD) beschäftigt sich mit der numerischen Untersuchung von Strömungen und ist im Vergleich zu experimentellen und analytischen Methoden der Strömungslehre noch eine sehr junge Disziplin. Erst in den 70er bis 80er Jahren erlangte die numerische Strömungsmechanik, welche eng an die Entwicklung leistungsfähiger Computer und effizienter numerischer Lösungsmöglichkeiten für partielle nichtlineare Differentialgleichungen gekoppelt war, industrielle Bedeutung [3] und [4].

Wie der Diplomarbeitstitel bereits erahnen lässt, setzt sich diese Arbeit mit einer sehr spezifischen Problemstellung auseinander, welche nachfolgend mit Hilfe moderner Hilfsmittel gelöst werden soll. Sowohl für die Generierung der benötigten 2D- und 3D-Modelle, als auch für die CFD-Simulationen sowie Datenauswertungen, stehen heutzutage leistungsfähige Programme zur Verfügung, die glücklicherweise auch Studenten mit entsprechenden Lizenzen frei zugänglich gemacht wurden.

Als moderne und industriell eingesetzte CFD-Software kommt *ANSYS® FLUENT®* [10] zum Einsatz. Aufgrund meiner beruflichen Vorerfahrung im Bereich der Maschinenbaukonstruktion, wird die CAD-Software *Creo® Elements/ Direct® Modeling* [13] verwendet. Die Datenauswertung erfolgt mit der Dynamischen-Geometrie-Software *GeoGebra* [14].

Das Ziel dieser Diplomarbeit besteht einerseits darin, die theoretischen Grundlagen der Strömungsmechanik und der numerischen Strömungsmechanik verständlich aufzubereiten und mit Hilfe dieser Kenntnisse CFD-Simulationen durchzuführen, welche glaubwürdige und akzeptable Ergebnisse, bezogen auf die spezifische Problemstellung liefern. Andererseits soll ein wesentlicher Teil dieser Arbeit darin bestehen, die theoretischen CFD-Resultate durch experimentell bestimmte Daten zu validieren.

Aufgrund obiger Zielsetzungen, werden im ersten Kapitel die Grundlagen der Strömungsmechanik näher erläutert, um anschließend im Kapitel 2 die Grundlagen der numerischen Strömungsmechanik aufzugreifen. Mit diesem Wissen werden schließlich in Kapitel 3 die jeweiligen CFD-Simulationen mit *ANSYS® FLUENT®* durchgeführt, wobei der Begriff CFD-Simulation sowohl die Formulierung des CFD-Modells, die rechnergestützte Berechnung des Strömungsfeldes, als auch die Auswertung und Visualisierung der Ergebnisse beinhaltet. Um die experimentellen Daten zu gewinnen, wird in Kapitel 4 die Konstruktion und Fertigung einer Druckluftapparatur, sowie die anschließende Versuchsdurchführung und Datenauswertung beschrieben. Im abschließenden Kapitel 5 wird die Theorie der Praxis gegenüber gestellt und mögliche Fehlerquellen, als auch weitere Verbesserungsmöglichkeiten werden analysiert, beziehungsweise diskutiert.

# 1 Grundlagen der Strömungsmechanik

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Strömungsmechanik bearbeitet, welche für die darauffolgenden Kapitel essentiell sind. Zuerst wird ein kurzer Strukturüberblick bezüglich der Vielfalt des Begriffs Strömungsmechanik gegeben, wobei wichtige Definitionen aufgegriffen werden. Anschließend werden die Zustandsänderungen und das Reynolds'sche Transport Theorem besprochen. Darauf aufbauend sind die Erhaltungsgleichungen für reibungsfreie Fluide, welche wiederum für die Stromfadentheorie relevant sind. Mit diesem Wissen können kompressible Strömungen und verschiedene Düsenarten besprochen werden, die uns schlussendlich den reibungsbehafteten Fluiden, Grenzschichtströmungen und turbulenten Strömungen nähern. Als Hauptquellen für die Grundlagen der Strömungsmechanik dienen [1] und [2].

## 1.1 Gliederung, Begriffe und Definitionen

Dieses Unterkapitel beschäftigt sich mit der Gliederung, sowie wichtigen und häufig vorkommenden Begriffen und Definitionen der Strömungsmechanik.

### 1.1.1 Gliederung der Strömungsmechanik



Abbildung 1: Gliederung der Strömungsmechanik  
(Quelle: in Anlehnung an [2, S.42])

In Abbildung 1 ist eine von vielen möglichen Gliederungen der Strömungsmechanik zu erkennen, wobei der Wissenschaft der nichtnewton'schen Fluide (Rheologie) und dem Begriff der verdünnten Gase keine weitere Aufmerksamkeit mehr geschenkt wurde. Obwohl in der Realität kein Stoff existiert, welcher ein exakt lineares Dehnverhalten in Abhängigkeit zur Schubspannung  $\tau$  aufweist, werden Fluide (siehe Abschnitt 1.1.2), welche dies näherungsweise erfüllen, als newton'sche Fluide bezeichnet [2].

Zuerst wird die Strömungsmechanik in die Mechanik der Gase und Hydromechanik unterteilt, wobei sich für kleine Strömungsgeschwindigkeiten (siehe Abschnitt 1.1.5) gewisse Eigenschaften der Gase nur unwesentlich von jenen der Flüssigkeiten unterscheiden. Sowohl in der Hydromechanik, als auch in der Mechanik der Gase, führen Abzweigungen zu den Suffixen *-dynamik* für bewegte und *-statik* für ruhende Systeme. Die Hydromechanik wird durch die Hydrostatik, Hydrodynamik und Hydraulik in drei weitere Unterpunkte gegliedert, wobei die Hydraulik eigentlich ein Teilgebiet der Hydrodynamik darstellt. Berühmte Beispiele, wie das Pascal'sche Paradoxon, sowie die kommunizierenden Röhren, werden gerne im Physikunterricht verwendet, um den Schülerinnen und Schülern die Hydrostatik näher zu bringen. In der Hydrodynamik werden neben Druckverlusten in Rohrleitungen auch komplexe Themen wie z.B der Blutfluss im Körper, die Konvektion im Erdmantel oder die Entstehung von Galaxien behandelt [2].

Die Mechanik der Gase wird analog zur Hydromechanik ebenfalls in drei Unterpunkte gegliedert, welche häufig in der Literatur unter den Begriffen Aerostatik, Aerodynamik und Gasdynamik zu finden sind. Betrachtungen der ruhenden Atmosphäre fallen etwa in den Bereich der Aerostatik, wohingegen die Aerodynamik Auswirkungen von strömender Luft auf bzw. um Körper untersucht. Unter dem Begriff Gasdynamik werden allgemein alle strömenden kompressiblen Gase zusammengefasst, wobei eine weitere Unterteilung je nach Mach-Zahl  $M$  (siehe Abschnitt 1.6.2) in Unterschall, Transschall, Überschall und Hyperschall erfolgt [2].

Wird in der Strömungsmechanik nicht explizit auf eine bestimmte Temperatur oder einen bestimmten Druck verwiesen, sind häufig die Standardbedingungen  $T = 273,15K$  und  $p = 101325Pa$  zielführend. Je nach Anwendungsbereich ist hier jedoch Vorsicht geboten, da sich diese von Fachgebiet zu Fachgebiet leicht unterscheiden können [2].

### 1.1.2 Fluidmechanik und Fluid

Wie bereits in der Einleitung angedeutet, lassen sich die Anfänge und Grundzüge der Strömungsmechanik bereits bis in die Antike zurückverfolgen. Dass die Verwendung des Begriffs Strömungsmechanik eine gewisse historische Prägung erhalten haben könnte, lässt sich somit nur allzu gut nachvollziehen. Bei genauerer Betrachtung des Begriffs Strömungsmechanik erkennt man, dass dieser Terminus dem gesamten Spektrum der möglichen Anwendungsgebiete (siehe Abbildung 1) nicht gänzlich gerecht wird. Man könnte sich nun natürlich die Frage stellen, ob ruhende Systeme existieren, oder ob man niemals zweimal in den selben Fluss steigen kann, um es sinngemäß mit den Worten von Heraklit von Ephesos wiederzugeben. Betrachtet man jedoch sehr große Zeitskalen, so stellt man fest, dass auch scheinbar feste Körper fließen können [1] und [2].

Um eine eindeutige Abgrenzung zu Festkörpern herzustellen, etablierte sich neben der Strömungsmechanik auch der Begriff Fluidmechanik (engl.: Fluid Mechanics, FM) für alle flüssigen, gasförmigen bzw. tropfbaren Stoffe. Gegenüber Festkörpern, die beim Vorliegen einer Schubspannung  $\tau$ , anfänglich näherungsweise ein lineares Dehnverhalten aufweisen und schließlich eine Streckgrenze  $\sigma_S$  und Bruchgrenze  $\sigma_B$  erreichen, kennt ein Fluid keine Streckgrenze und auch kein Materialversagen [2].

Für den Begriff Fluid wurde 1965 mit der DIN 5492 eine eigene Definition geschaffen, die wie folgt lautet:

*"Unter einem Fluid (das Fluid, die Fluide) wird eine Flüssigkeit, ein Gas oder ein Dampf, also ein nichtfestes Kontinuum verstanden, auf welches die Gesetze der Strömungsmechanik anwendbar sind" [2, S. 27].*

### 1.1.3 Ideales Gas

*"Unter einem idealen Gas verstehen wir eine Ansammlung von Atomen oder Molekülen, die wir als punktförmige, massebehaftete Teilchen annehmen, die sich kräftefrei in einem Volumen  $V$  bei einem Druck  $p$  und einer Temperatur  $T$  aufhalten und nur durch Stöße miteinander wechselwirken können"* [5, S. 546].

Die Zustandsgleichung für ein ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten  $c_p$  [ $J/kg \cdot K$ ] und  $c_v$  [ $J/kg \cdot K$ ] lautet:

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad (1.1)$$

mit dem Druck  $p$  [ $Pa$ ], Dichte  $\rho$  [ $kg/m^3$ ], spezifischer Gaskonstante  $R$  [ $J/kg \cdot K$ ] sowie der Temperatur  $T$  [ $K$ ]. Der Wert der spezifischen Gaskonstante für trockene Luft wird in der Literatur mit  $R_{Luft} = 287,06 J/kg \cdot K$  beziffert. Edelgase und Luft können in sehr guter Näherung als ideales Gas betrachtet werden [1] und [2].

Das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten wird Isentropenexponent  $\kappa = c_p/c_v$  genannt. Die spezifische Gaskonstante kann somit folgendermaßen dargestellt werden:

$$R = c_p - c_v = c_p - \frac{c_p}{\kappa} = \frac{c_p \cdot \kappa - c_p}{\kappa} = \frac{c_p \cdot (\kappa - 1)}{\kappa} \quad (1.2)$$

Für die spezifischen Wärmekapazitäten von Gasen, aus gleichartigen Molekülen, gilt:

$$c_v = \frac{n}{2} \cdot R, \quad c_p = \frac{n}{2} \cdot R + R \quad (1.3)$$

wobei  $n$  die Anzahl der Freiheitsgrade der Molekülbewegung des Gases ist. Für ein atomares Gas aus sphärisch gleichartigen Atomen ist  $n = 3$ , wohingegen aufgrund der zusätzlichen Rotation in einem zweiatomigen Gas  $n = 5$  beträgt. Der Isentropenexponent für zwei wichtige Fälle lautet somit [1]:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{2}{n} = \begin{cases} 5/3 = 1,667 (\text{eiatomig}) \\ 7/5 = 1,4 (\text{zweiatomig}) \end{cases} \quad (1.4)$$



### 1.1.4 Haftungsbedingung und Viskosität

Mit dem Geschwindigkeitsfeld  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  ist der Strömungszustand eines Fluids als Funktion des Ortes und der Zeit charakterisiert. Aufgrund der Van-der-Waals-Kräfte muss das Fluid an einer festen Wand haften. Diese sogenannte Haftbedingung führt zu der Randbedingung des Geschwindigkeitsfeldes an einer ruhenden Wand  $\vec{u} = 0$ . Im Mittel ist die Relativbewegung der Moleküle benachbarter Fluidschichten gegeben durch die Scherrate bzw. das häufig verwendete Synonym Schergeschwindigkeit  $\partial u / \partial y$ , wobei  $u$  den Betrag der Tangentialgeschwindigkeit darstellt und  $y$  die senkrecht zur Wand stehende Koordinatenrichtung wiedergibt [1] und [2].

Fluide, die folgendem Reibungsgesetz entsprechen, werden als sogenannte newton'sche Fluide bezeichnet:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.5)$$

mit der Schubspannung  $\tau [N/m^2]$  und der dynamischen Viskosität  $\mu [Pa \cdot s]$  als Proportionalitätsfaktor bezüglich der Scherrate [1].

Die kinematische Viskosität  $\nu [m^2/s]$  ergibt sich durch den einfachen Zusammenhang:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.6)$$

wobei  $\mu$  die oben erwähnte dynamische Viskosität und  $\rho$  die Dichte darstellt. Die Viskosität ist eine Stoffeigenschaft und beschreibt also in gewisser Weise den Widerstand eines Fluids gegen eine Schubspannung [2] und [5].

### 1.1.5 Kompressibilität

Das Hookesche Gesetz (hier für den eindimensionalen Fall) beschreibt mit  $\Delta L/L_0 = \sigma/E$  die elastische reversible Deformation eines Körpers, wobei  $\Delta L/L_0$  als relative Deformation,  $\sigma [N/m^2]$  als Spannung sowie  $E [N/m^2]$  als Kompressibilitätsmodul bezeichnet werden. Die Volumenänderung eines Fluids kann man in analoger Weise definieren:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{\Delta p}{E} \leftrightarrow -\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{1}{E} \quad (1.7)$$

bzw. in differentieller Form:

$$-\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{E} = K \quad (1.8)$$

wobei  $K [1/Pa]$  als Kompressibilität bezeichnet wird [1].

Die Kompressibilität beschreibt die relative Volumenänderung pro Druckänderung und ist für Flüssigkeiten viel geringer als für Gase. Die Luft ist in etwa 20000-mal so kompressibel wie Wasser, was auf die relativ großen Molekülabstände der Gase zurückzuführen ist. Um eine signifikante Volumenänderung bei Wasser hervorzurufen, sind Drücke jenseits von  $10^5 bar$  notwendig, weshalb Wasser bzw. Flüssigkeiten grundsätzlich als inkompressibel erachtet werden. Bei sehr kleinen Dichteänderungen können auch Luftströmungen näherungsweise als inkompressibel angenommen werden. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Strömungsgeschwindigkeit weniger als ein Drittel der Schallgeschwindigkeit beträgt (siehe Abschnitt 1.5) und kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet [1].

### 1.1.6 Bahnlinie, Stromlinie und Strömungszustände

Die Bahnlinie oder auch Trajektorie (siehe Abbildung 2), beschreibt jene Bahn, auf der sich ein bestimmtes Fluidteilchen im Strömungsfeld bewegt. Die Projektion einer Bahnlinie kann man sich als das Ergebnis einer Langzeitbelichtung vorstellen, wobei das zuvor markierte Fluidteilchen eine Spur auf einem Film hinterlässt [1] und [2].

Durch die Momentaufnahme eines Strömungsfeldes entstehen Stromlinien (siehe Abbildung 2). Dies sind Linien, welche zu einem gegebenen Zeitpunkt tangential zu den Geschwindigkeitsvektoren der Fluidteilchen sind. Die zu einer Stromlinie gehörenden Geschwindigkeitsvektoren der Fluidteilchen bilden also die Tangenten der Stromlinie. Stromlinien können sich weder überschneiden noch Unstetigkeitsstellen aufweisen. Ebenso ist im Bild der Hydrodynamik kein Massetransport zwischen Stromlinien möglich [1] und [2].

Betrachtet man neben der Dichte, Druck und Temperatur die Strömungsgeschwindigkeit als zusätzlichen Parameter einer Strömung, so lassen sich stationäre, quasistationäre und transiente Strömungszustände unterscheiden. Werden diese vier Parameter zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten verglichen und ändert sich dabei auch nur ein Parameter, so spricht man von einer instationären bzw. transienten Strömung. Verschwinden hingegen die zeitlichen Derivativa  $\partial/\partial t = 0$  liegt eine stationäre Strömung vor. Von quasistationär spricht man, wenn man sich eines instationären Charakters der Strömung bewusst ist, aber vereinfachend eine stationäre Strömung betrachtet [2].

Liegt eine stationäre Strömung vor, so fallen Bahnlinien und Stromlinien zusammen [2].

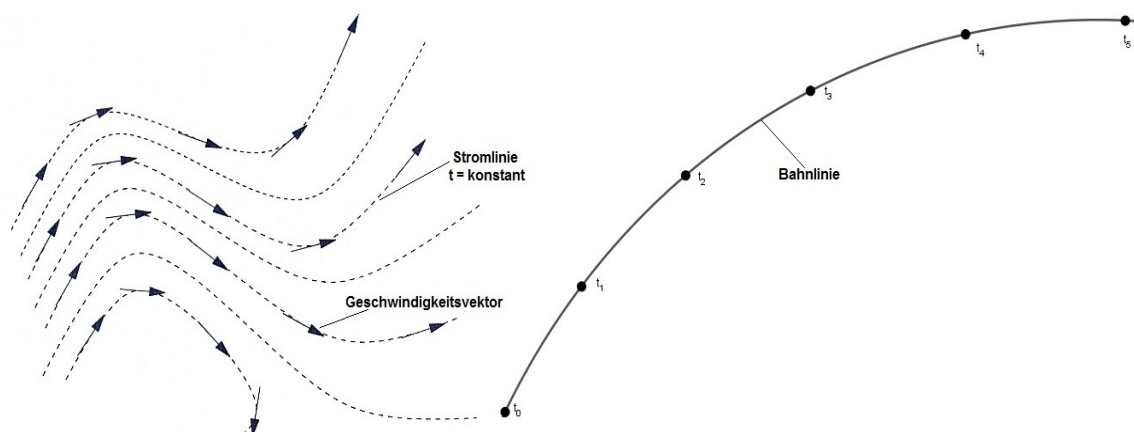


Abbildung 2: Stromlinie und Bahnlinie  
(Quelle: in Anlehnung an [1, S.61])

### 1.1.7 Stromfaden und Stromröhre

Wird die Gesamtheit aller Stromlinien betrachtet, welche durch die Eintrittsfläche  $A_{Ein}$  eintreten und durch die Austrittsfläche  $A_{Aus}$  austreten erhält man, sofern alle Querschnittsflächen sehr klein sind, den Stromfaden (siehe Abbildung 3). Der Querschnitt eines Stromfadens kann sich entlang der Stromfadenachse verringern, aber auch erweitern. Dabei muss die Querschnittsfläche des Stromfadens auch an der weitesten Stelle noch klein genug sein, um die betrachteten relevanten Größen als konstant ansehen zu können [1] und [2].

Eine Stromröhre hingegen ist die einhüllende Fläche um den Stromfaden, welche durch eine Menge von Stromlinien, die durch die Hüllkurve  $H_{Ein}$  und  $H_{Aus}$  treten, gebildet wird (siehe Abbildung 3). Ebenso wie die Stromlinien ändert sich bei einer transienten Strömung auch die Stromröhre mit der Zeit. Im Gegensatz dazu bleiben in einer stationären Strömung alle Stromröhren ebenso stationär [1] und [2].

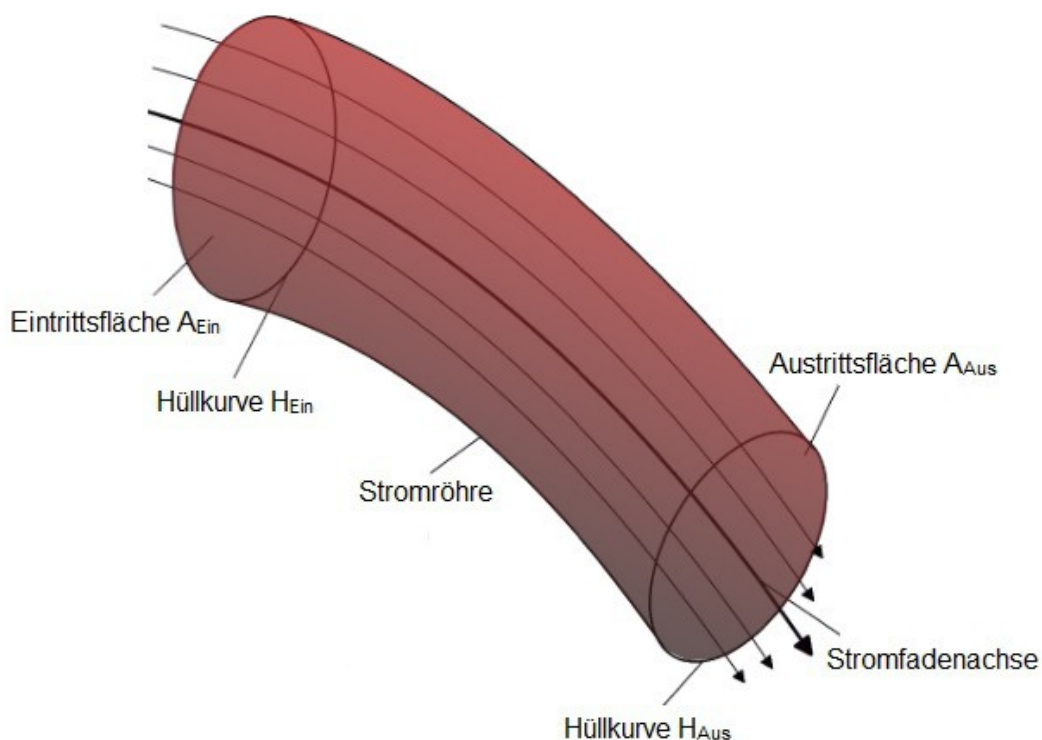


Abbildung 3: Stromfaden und Stromröhre  
(Quelle: in Anlehnung an [2, S.47])

### 1.1.8 Zustandsgrößen und Zustandsänderungen

Ein thermodynamischer Zustand eines Stoffes lässt sich durch Zustandsgrößen beschreiben. Beispiele für Zustandsgrößen wären etwa der Druck  $p$ , die Dichte  $\rho$ , das Volumen  $V$  sowie die Temperatur  $T$ . Grundsätzlich können Zustandsgrößen keine beliebigen unabhängigen Werte voneinander annehmen, sondern sind durch Zustandsgleichungen (siehe Abschnitt 1.1.3) miteinander vernetzt [2].

Mit den Zustandsänderungen werden die Veränderungen einer oder auch mehrerer Zustandsgrößen beschrieben. Eine besonders wichtige Rolle spielen dabei Zustandsänderungen, bei denen jeweils eine Zustandsgröße als konstant erachtet wird. Man unterscheidet grundsätzlich zwischen einer [2]:

- Isothermen Zustandsänderung (Temperatur  $T$  konstant)
- Isobaren Zustandsänderung (Druck  $p$  konstant)
- Isochoren Zustandsänderung (Volumen  $V$  konstant)
- Adiabaten Zustandsänderung (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung)
- Reversiblen Zustandsänderung (idealer Prozess ohne Reibungsverluste)
- Isentropen Zustandsänderung (Prozesse sind adiabat und reversibel)

Einen Überblick der zugehörigen Gleichungen findet man z.B. in [2, S. 297-301].

Zustandsänderungen vom Typ  $p/\rho^n = \text{const.}$  werden polytrop genannt mit der Variable  $n$  als sogenannter Polytropenexponent. Lässt man  $n \rightarrow \infty$  laufen, so trifft man auf den Sonderfall der isochoren Zustandsänderung ( $\lim_{n \rightarrow \infty} (p/p_0)^{1/n} \rightarrow 1 = \rho/\rho_0 = V_0/V$ ). Setzt man  $n = 1$ , so entspricht dies einer isothermen Zustandsänderung, wohingegen für  $n = 0$  eine isobare Zustandsänderung auftritt. Wird  $n = \kappa = c_p/c_v$  gesetzt, stellt dies eine isentrope Zustandsänderung dar, womit nun auch klar ersichtlich wird, warum in Abschnitt 1.1.3 die Variable  $\kappa$  als Isentropenexponent bezeichnet wird [1], [2] und [5].

Die Isenthalpe Zustandsänderung wurde bisher nicht erwähnt, da diese für ideale Gase, welches hier vorausgesetzt wird, der isothermen Zustandsänderung entspricht.

## 1.2 Reynolds' Transport Theorem

Im Folgenden geht es um die Beschreibung der Dynamik physikalischer Größen. Dazu betrachtet man ein bewegtes Volumen  $V$  und eine in diesem Volumen definierte physikalische Größe  $\epsilon$ . Das Interesse besteht darin, die zeitliche Änderung der integralen Größe  $E = \int_V \epsilon dV$  zu kennen, wobei  $\epsilon$  klarerweise die Dichte von  $E$  darstellt. Angenommen  $E$  wäre die Masse im Volumen  $V$ , so entspricht  $\epsilon$  der Massendichte. Ist hingegen  $E$  der Impuls, dann wäre  $\epsilon$  die Impulsdichte, wobei hier auf einen etwaigen vektoriellen Charakter geachtet werden muss. Um  $\dot{E}$  berechnen zu können, muss beachtet werden, dass nicht nur die Dichte  $\epsilon(\vec{x}, t)$ , sondern auch das bewegte Volumen  $V(t)$  zeitabhängig ist, da dieses von der Strömung  $\vec{u}$  transportiert und deformiert wird [1].

Gesucht wird also die zeitliche Änderung von  $E$  in dem bewegten Volumen  $V(t)$ :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \epsilon(\vec{x}, t) dV \quad (1.9)$$

Aufgrund der Zeitabhängigkeit des Integrationsgebietes  $V(t)$  kann die Ableitung jedoch nicht ohne weiteres durchgeführt werden. Es wird daher ein Trick angewendet, indem das Integral in (1.9) auf eine Integration über ein ortsfestes Volumen  $V_0$  zurückgeführt wird. Eine gut nachvollziehbare Herleitung findet sich z.B. in [1, S. 70] und liefert folgendes Ergebnis:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \epsilon dV = \int_{V_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} dV + \int_{A_0} \epsilon \vec{u} d\vec{A} \quad (1.10)$$

wobei  $A_0$  die geschlossene Oberfläche von  $V_0$  und  $\epsilon \vec{u}$  eine Stromdichte darstellt. Die Bezeichnung  $d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA$  stellt das vektorielle Flächenelement mit dem nach außen gerichteten Flächennormalenvektor  $\vec{n}$  dar [1].

Die Gleichung in (1.10) wird als das Reynolds'sche Transport Theorem (für hinreichend glatte Strömungsfelder) bezeichnet und besagt, dass die totale zeitliche Änderung der Größe  $E$  in einem bewegten Volumen  $V(t)$  gleich der zeitlichen Änderung von  $\epsilon$  im momentanen Volumen  $V_0$  plus dem Strom durch die momentane Oberfläche  $A_0$  ist [1].

Genügt die Größe  $E$  einem Erhaltungssatz dann folgt daraus:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} dV + \int_{A_0} \epsilon \vec{u} d\vec{A} = \frac{dE}{dt} = Q \quad (1.11)$$

wobei  $Q$  als Quellterm bezeichnet wird. Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes erhält man:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} dV + \int_{V_0} \nabla \cdot (\epsilon \vec{u}) dV = \frac{dE}{dt} = Q \quad (1.12)$$

mit  $\nabla$  als Nabla-Operator. Das Skalarprodukt aus dem Nabla-Operator mit einer vektoriellen Größe  $(\epsilon \vec{u})$  wird wie üblich als Divergenz bezeichnet. Lässt man das Volumen  $V_0$  gegen Null gehen, kann man von der integralen Form in die bekannte differentielle Form des Reynolds'schen Transport Theorems übergehen:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \vec{u}) = q \quad (1.13)$$

wobei  $q$  hier die Quelldichte darstellt. Die Erhaltungsgleichung (1.13) muss in jedem Raumpunkt erfüllt sein [1].

## 1.3 Erhaltungsgleichungen für reibungsfreie Fluide

### 1.3.1 Massenerhaltung

Man ersetzt nun, die bereits aus Abschnitt 1.2 bekannte Variable  $E$ , durch die im bewegten Volumen  $V(t)$  befindliche Masse  $M = \int_{V(t)} \rho \, dV$ , wobei  $\epsilon = \rho$  nun der Massendichte entspricht. Mit Hilfe von Gleichung (1.13) erhalten wir die differentielle Form der Kontinuitätsgleichung [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.14)$$

Aufgrund der Massenerhaltung eines bewegten Volumens  $V(t)$  verschwindet die zeitliche Ableitung der Masse  $\dot{M} = 0$  und somit auch die Quelldichte  $q = 0$ . Betrachtet man inkompressible Strömungen, so kann die Dichte  $\rho$  als konstant angenommen werden, weshalb sich die Kontinuitätsgleichung (1.14) vereinfacht zu:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.15)$$

Um eine integrale Darstellung zu erhalten, verwendet man Gleichung (1.11):

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int_{A_0} \rho \vec{u} \, d\vec{A} = 0 = \frac{dM_0}{dt} + \int_{A_0} \rho \vec{u} \, d\vec{A} \quad (1.16)$$

wobei  $M_0$  die im ortsfesten Volumen  $V_0$  enthaltene Masse bezeichnet. Wichtig hierbei ist, dass sich diese Masse  $M_0$  im Gegensatz zur Masse  $M$  ändern kann, indem Masse durch die geschlossene momentane Oberfläche  $A_0$  zu- oder abfließt [1].



### 1.3.2 Impulserhaltung und Euler-Gleichung

Die Rate der zeitlichen Änderung des Impulses ist durch die Summe der angreifenden Kräfte gegeben. Mit der Impulsdichte  $\epsilon = \rho \vec{u}$  und Gleichung (1.13) ergibt sich:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \vec{q} \quad (1.17)$$

wobei  $\vec{q}$  der Kraftdichte entspricht. Den Ausdruck  $\rho \vec{u} \vec{u}$  bezeichnet man als Impulsstromdichte, welcher einen Tensor zweiter Stufe darstellt [1].

Beispiele für angreifende Kräfte wären neben der Gravitationskraft noch Reibungskräfte und Druckkräfte. Beziehen wir die Druckkraftdichte  $-\nabla p$  und weitere Kraftdichten  $\rho \vec{f}$  in Gleichung (1.17) ein, so ergibt dies folgende Darstellung:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \rho \vec{f} \quad (1.18)$$

Probleme macht uns hier der nichtlineare Term  $\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u})$ , welcher aber folgendermaßen vereinfacht werden kann [1]:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \vec{u} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \quad (1.19)$$

wobei  $\nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$  hier nicht mit  $\nabla \cdot \vec{u}$  (Divergenz von  $\vec{u}$ ) verwechselt werden

darf. Der Punkt ".", welcher in diesem Fall das Skalarprodukt anzeigt, ist also besonders wichtig. Der Term  $\nabla \vec{u}$  wird auch als transponierte Jacobi Matrix bezeichnet [1].

Mit Hilfe von Gleichung (1.14) und (1.19) erhält man Gleichung (1.20):

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \vec{u} \cdot \nabla (\rho \vec{u}) + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\vec{u} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \quad (1.20)$$

Wird das Ergebnis aus Gleichung (1.20) in Gleichung (1.18) eingesetzt, erhält man:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} - \vec{u} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \rho \vec{f} \quad (1.21)$$

Nun wird der linke Term von Gleichung (1.21) mit Hilfe der Produktregel vereinfacht:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} = \vec{u} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (1.22)$$

Abschließendes Einsetzen in Gleichung (1.21) und Division durch die Dichte  $\rho$  liefert die berühmte Euler-Gleichung für reibungsfreie Fluide [1]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} \quad (1.23)$$

Die integrale Form der Impulsbilanz erhält man durch Integration von Gleichung (1.18):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} + \int_{A_0} \rho \vec{u} \vec{u} d\vec{A} + \int_{A_0} p d\vec{A} = \vec{F} \quad (1.24)$$

wobei mit  $\vec{F}$  alle bisher nicht beachteten Kräfte und mit  $\vec{P} = \int_{V_0} \rho \vec{u} dV$  der Impuls des Fluids im ortsfesten Volumen  $V_0$  bezeichnet werden [1].

### 1.3.3 Energieerhaltung

Die Energiedichte  $\epsilon$  eines Fluids ergibt sich neben der potentiellen Energiedichte  $\rho g z$  zusätzlich aus der kinetischen Energiedichte  $\rho \vec{u}^2/2$  und inneren Energiedichte  $\rho e$ . Mit der Hilfe von Gleichung (1.11) lautet die Bilanz der Gesamtenergie in integraler Form:

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \cdot \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + g z + e \right) \right] dV + \int_{A_0} \rho \cdot \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + g z + e \right) \vec{u} d\vec{A} = \dot{Q}' \quad (1.25)$$

wobei  $z$  die Höhe und  $e = p/\rho - h$  die spezifische innere Energie mit  $h$  [J/kg] als spezifischer Enthalpie ausdrückt. Die dem ortsfesten Volumen  $V_0$  zugeführte Energie pro Zeiteinheit wird mit der Variable  $\dot{Q}'$  benannt [1] und [2].

Trennt man die Leistung der Druckkräfte von jener der Leistung  $\dot{Q}'$  ab und achtet dabei auf das richtige Vorzeichen, erhält man:

$$\dot{Q}' = \dot{Q} - \int_{A_0} p \vec{u} d\vec{A} \quad (1.26)$$

Wird nun das Ergebnis aus Gleichung (1.26) in Gleichung (1.25) eingesetzt und bringt man danach die Druckleistung auf die linke Seite, erhält man folgende Gleichung :

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \cdot \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + g z + e \right) \right] dV + \int_{A_0} \rho \cdot \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + g z + e + \frac{p}{\rho} \right) \vec{u} d\vec{A} = \dot{Q} \quad (1.27)$$

Abschließend wird der Term  $e + p/\rho$  durch die spezifische Enthalpie  $h$  substituiert und man erhält die Energiegleichung (1.28) in integraler Form:

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \cdot \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + g z + e \right) \right] dV + \int_{A_0} \rho \cdot \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + g z + h \right) \vec{u} d\vec{A} = \dot{Q} \quad (1.28)$$

Die differentielle Form der Energiegleichung ergibt sich, wenn der Gauß'sche Satz auf das Oberflächenintegral angewendet wird und man  $V_0$  gegen 0 gehen lässt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \cdot \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + g z + e \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \vec{u} \cdot \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + g z + h \right) \right] = \rho \dot{q} \quad (1.29)$$

wobei  $\dot{q}$  die Leistung pro Masse ist, welche von außen zugeführt wird [1].

## 1.4 Stromfadentheorie

Mit Hilfe der Stromfadentheorie können die in Abschnitt 1.3 besprochenen Erhaltungsgleichungen stark vereinfacht und sinnvolle Näherungen erzielt werden. In dieser Theorie werden alle physikalischen Größen über den Stromfadenquerschnitt als konstant erachtet und sämtliche Geschwindigkeitskomponenten orthogonal zum Stromfaden verschwinden [1].

In Abbildung 4 ist eine Skizze eines Stromfadens zu sehen, welche nachfolgend verwendet wird um die Bilanzierung der Massen-, Impuls- und Energieströme visuell zu veranschaulichen.

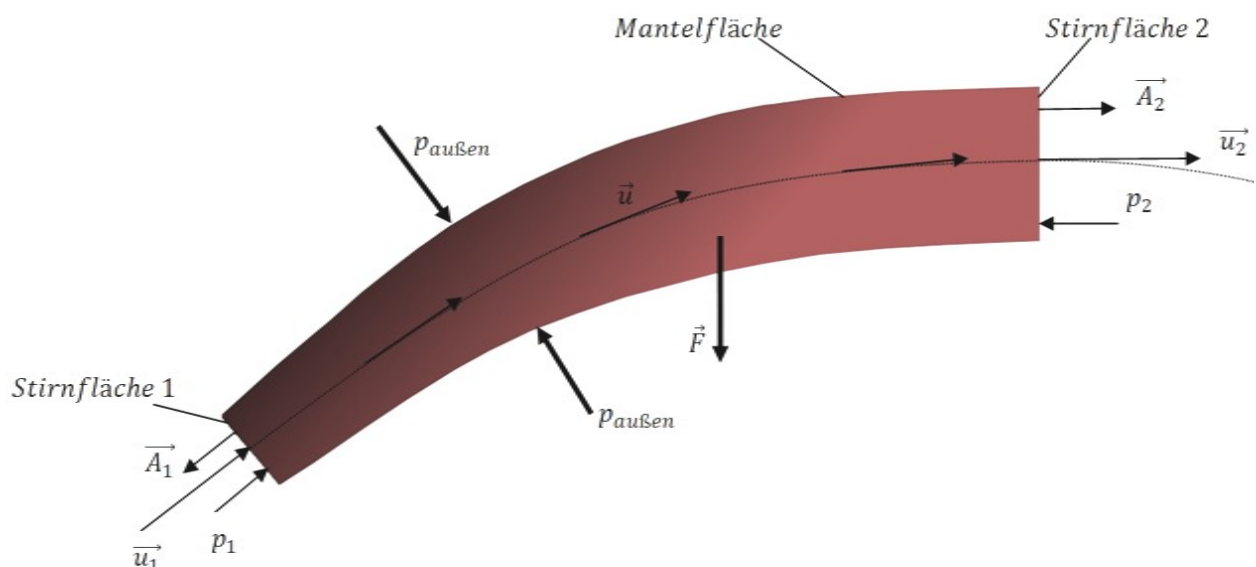


Abbildung 4: Stromfaden zur Bilanzierung der Massen-, Impuls- und Energieströme  
(Quelle: in Anlehnung an [1, S.87])

### 1.4.1 Massenerhaltung eines stationären Stromfadens

Für die Auswertung der Massenerhaltung eines stationären Stromfadens verwendet man die rechte Seite von Gleichung (1.16):

$$\frac{dM_0}{dt} + \int_{A_0} \rho \vec{u} d\vec{A} = 0 \quad (1.30)$$

Wie in Abschnitt 1.1.2 bereits erwähnt, stellt die Bezeichnung  $d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA$  das vektorielle Flächenelement mit dem nach außen gerichteten Flächennormalenvektor  $\vec{n}$  dar. Dies ist deshalb von Bedeutung, da auf der einhüllenden Fläche um den Stromfaden  $\vec{u} \perp d\vec{A}$  gilt. Da der Kosinus von 90 Grad natürlich Null ergibt, ist logischerweise auch das Skalarprodukt von  $\vec{u}$  und  $d\vec{A}$  gleich Null und es tragen letztendlich nur die Stirnflächen des betrachteten Volumens (siehe Abbildung 4) zum Oberflächenintegral bei [1]:

$$\int_{A_0} \rho \vec{u} d\vec{A} = \rho_2 u_2 A_2 - \rho_1 u_1 A_1 \quad (1.31)$$

Setzt man nun das Ergebnis aus Gleichung (1.31) in Gleichung (1.30) ein und berücksichtigt zusätzlich, dass die Strömung einen stationären Charakter  $dM_0/dt = 0$  hat, so ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\rho_2 u_2 A_2 - \rho_1 u_1 A_1 = 0 \quad (1.32)$$

Der Massenstrom  $\dot{m} = \rho u A$  muss also entlang eines Stromfadens konstant sein, da die Masse, welche pro Zeiteinheit in das Kontrollvolumen einströmt, auch gleichzeitig wieder ausströmen muss:

$$\dot{m} = \rho u A = \text{const.} \quad (1.33)$$

Handelt es sich um ein inkompressibles Fluid, ist auch der Volumenstrom entlang eines Stromfadens  $\dot{V} = u A$  als konstant zu erachten [1].

### 1.4.2 Impulserhaltung bei einer Rohrströmung

Nun wird ein Abschnitt eines Rohres, welches von einem Fluid durchströmt wird, als Stromfaden approximiert [1].

Unter Verwendung von Gleichung (1.24) und dem Impuls  $\vec{P} = \int_{V_0} \rho \vec{u} dV$  erhält man folgende Darstellung, welche für das durchströmte Volumen  $V_0$  erfüllt sein muss [1]:

$$\int_{V_0} \frac{\partial(p\vec{u})}{\partial t} dV + \int_{A_0} \rho \vec{u} \vec{u} d\vec{A} + \int_{A_0} p d\vec{A} = \vec{F} \quad (1.34)$$

wobei  $\vec{F}$  die Schwerkraft beinhaltet. Nimmt man nun an, dass das Fluid von 1 nach 2 strömt, kann man analog zu Abschnitt 1.4.1 einige Integrale sofort ausführen, wobei hier jedoch ein vektorieller Charakter einiger Variablen erhalten bleibt [1]:

$$\int_{V_0} \frac{\partial(p\vec{u})}{\partial t} dV + \rho_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2 \vec{A}_2 + \rho_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1 \vec{A}_1 + p_1 \vec{A}_1 + p_2 \vec{A}_2 + \vec{F}_i = \vec{F} \quad (1.35)$$

Dabei bezeichnet  $\vec{F}_i$  alle Kräfte, die von innen auf den Mantel der Stromröhre wirken. Geht man wieder von einer stationären Strömung aus ( $\partial/\partial t = 0$ ) und definiert man  $\vec{u}_1 = u_1 \vec{e}_1$ ,  $\vec{u}_2 = u_2 \vec{e}_2$ ,  $\vec{A}_1 = -A_1 \vec{e}_1$  sowie  $\vec{A}_2 = A_2 \vec{e}_2$  mit  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  als Tangentialvektoren in Strömungsrichtung (Abbildung 4), erhält man folgendes Kräftegleichgewicht:

$$(p_2 + \rho_2 u_2^2) A_2 \vec{e}_2 - (p_1 + \rho_1 u_1^2) A_1 \vec{e}_1 = \vec{F} - \vec{F}_i \quad (1.36)$$

Diese, sich in Waage haltenden Impulsströme, könnte man nun nutzen, um in weiterer Folge, die gesamte Kraft eines Fluids auf einen Rohrabschnitt zu berechnen. Für genauere Informationen und weiteres Interesse wird auf [1, S. 83-84] verwiesen.

### 1.4.3 Energieerhaltung entlang eines Stromfadens

In diesem Abschnitt wird die Energiegleichung (1.28) in integraler Form für eine stationäre Strömung betrachtet. Dabei verschwindet jener Term, der eine zeitliche Ableitung enthält und übrig bleibt folgende Gleichung [1]:

$$\int_{A_0} \rho \cdot \left( \frac{\vec{u}^2}{2} + gz + h \right) \vec{u} d\vec{A} = \dot{Q} \quad (1.37)$$

Analog zu Abschnitt 1.4.1 bzw. 1.4.2 kann auch hier, unter der korrekten Berücksichtigung der Richtungen von  $\vec{u}$  und  $\vec{A}$  (siehe Abbildung 4), das Integral in Gleichung (1.37) ausgeführt werden. Dabei erhält man folgenden Zusammenhang:

$$\left( \frac{\vec{u}_2^2}{2} + gz_2 + h_2 \right) \rho_2 \underbrace{\vec{u}_2 \vec{A}_2}_{u_2 A_2} + \left( \frac{\vec{u}_1^2}{2} + gz_1 + h_1 \right) \rho_1 \underbrace{\vec{u}_1 \vec{A}_1}_{-u_1 A_1} = \dot{Q} \quad (1.38)$$

Nutzt man nun noch die Massenerhaltung  $\dot{m} = \rho u A = \text{const.}$  und lässt folgender Schreibweise Gültigkeit zukommen:  $\vec{u}^2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(0) = |\vec{u}|^2 = u^2$ , erhält man den Energieerhaltungssatz für einen Stromfaden:

$$\left( \frac{u_2^2}{2} + gz_2 + h_2 \right) - \left( \frac{u_1^2}{2} + gz_1 + h_1 \right) = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (1.39)$$

Geht man von einer Strömung ohne Energieaustausch mit der Umgebung aus, sprich  $\dot{Q} = 0$ , erhält man den Energiesatz in folgender Form:

$$\frac{u_1^2}{2} + gz_1 + h_1 = \frac{u_2^2}{2} + gz_2 + h_2 \quad (1.40)$$

Die Gleichung (1.40) sieht der berühmten Bernoulli-Gleichung bereits zum Verwechseln ähnlich und wird im folgenden Abschnitt 1.4.4 genauer behandelt [1].

#### 1.4.4 Stationäre Bernoulli-Gleichung

Grundsätzlich ist die Bernoulli-Gleichung unabhängig von Gleichung (1.40), da die Bernoulli-Gleichung lediglich die Änderung der mechanischen Energie entlang einer Stromlinie beschreibt und somit nicht für die Gesamtenergie verwendbar ist. Man würde diese korrekterweise nur über die Integration der Euler-Gleichung (1.23) entlang einer Stromlinie erhalten. Eine exakte allgemeine Herleitung der Bernoulli-Gleichung mit Hilfe der Fresnet-Serret-Formeln findet sich z.B. in [1, S. 85-87].

Aus [1, S. 87] erhält man für den Spezialfall einer stationären Strömung die Gleichung:

$$u \, du = -\frac{1}{\rho} dp - d\Phi \quad (1.41)$$

wobei  $\Phi = gz$  ein Potential darstellt mit der Erdbeschleunigung  $g \sim 9,81 \text{ m/s}^2$ . Integriert man nun Gleichung (1.41) entlang einer Stromlinie (von Punkt 1 zu Punkt 2), ergibt sich:

$$\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = - \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp \quad (1.42)$$

Betrachtet man nun den weiteren Spezialfall einer konstanten Dichte  $\rho$ , so kann man den konstanten Faktor vor das Integral ziehen und man erhält die Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \text{const.} \quad (1.43)$$

Richtet man seinen Fokus lediglich auf eine isentrope Strömung, welche per Definition adiabat und reversibel ist, so gilt für die spezifische Enthalpie  $dh = dp/\rho$ . Die Bernoulli-Gleichung und Gleichung (1.40) aus dem vorherigen Kapitel 1.4.3 sind nun äquivalent. In diesem Fall wird die Energie bloß zwischen kinetischer-, potentieller-, und Druckenergie ausgetauscht [1] und [2].

#### 1.4.5 Instationäre Bernoulli-Gleichung

Für die Erweiterung der Bernoulli-Gleichung auf zeitabhängige Strömungen wird auf die Quelle [1, S. 88-89] verwiesen.



## 1.5 Kompressible Strömungen und Düsen

In Kapitel 1.1.5 wurde bereits erwähnt, dass man bei sehr kleinen Dichteänderungen Luftströmungen näherungsweise als inkompressibel betrachten kann. Bewegen sich Objekte jedoch mit hoher Geschwindigkeit durch die Atmosphäre bzw. betrachtet man ganz allgemein Gase, welche hohe Strömungsgeschwindigkeiten aufweisen, so spielen Dichteänderungen eine zentrale Rolle [1].

### 1.5.1 Wellengleichung

Man untersucht hier die Ausbreitung kleiner Druck- und Dichteänderungen, wobei angenommen wird, dass diese Schwankungen klein, bezogen auf deren Mittelwerte sind. Aufgrund der Tatsache, dass die Wärmeleitung normalerweise wesentlich langsamer erfolgt, als die Ausbreitung von Druckschwankungen, geht man von einer adiabaten Zustandsänderung aus. Aufgrund dessen ist der Druck lediglich eine Funktion der Dichte und man erhält folgende Gleichung [1]:

$$\frac{p(\rho)}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa \quad (1.44)$$

Im Folgenden wird eine Druck- und Dichteänderung in  $x$ -Richtung betrachtet, wobei sich etwaige Dichteänderungen, aufgrund der vorausgesetzten kleinen Schwankungen, in Form regulärer Schallwellen ausbreiten. Tritt eine Druckschwankung auf, wird das an der Stelle  $x$  befindliche Volumenelement (siehe Abbildung 5) mit der Länge  $dx$  innerhalb der Zeit  $dt$  um die Länge  $\zeta$  verschoben und zusätzlich um  $d\zeta$  verändert [1].

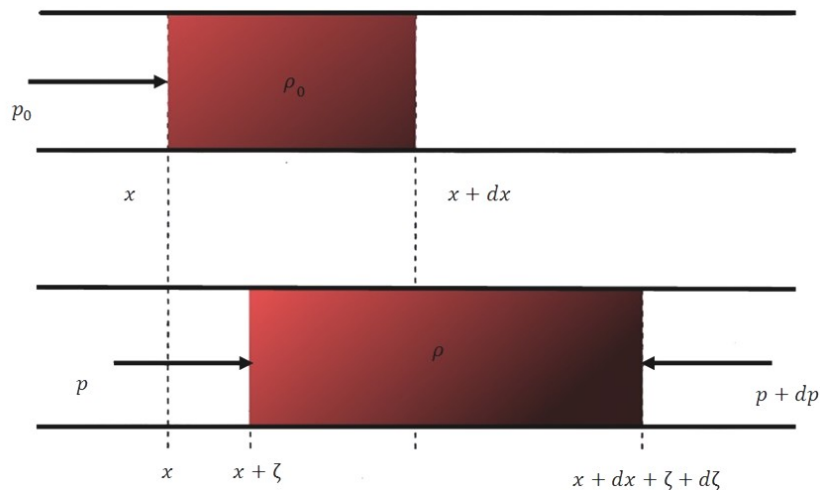


Abbildung 5: Skizze zur Herleitung der eindimensionalen Wellengleichung  
(Quelle: in Anlehnung an [1, S.159])

Wendet man das zweite Newton'sche Gesetz auf das Volumenelement an, ergibt sich:

$$\underbrace{\rho_0 A dx}_m \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -A dp \quad (1.45)$$

wobei  $\partial^2 \zeta / \partial t^2$  die Beschleunigung und  $A$  die Querschnittsfläche repräsentiert [1].

Ein Umformen von Gleichung (1.45) liefert:

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.46)$$

Aufgrund der Massenerhaltung lässt sich nun schlussfolgern:

$$\rho A \cdot (dx + d\zeta) = \rho_0 A dx \quad (1.47)$$

Formt man Gleichung (1.47) auf die Variable  $\rho$  um und führt eine Taylor-Entwicklung bis zum Term 1. Ordnung durch (mit  $\partial \zeta / \partial x < 1$ ), erhält man Gleichung (1.48):

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial \zeta}{\partial x}} = \rho_0 \left\{ 1 - \frac{\partial \zeta}{\partial x} + O \left[ \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \quad (1.48)$$

Der Term  $\partial p / \partial x$  wird nun durch die Auslenkung  $\zeta$  ausgedrückt und wir erhalten mit Hilfe der Kettenregel und Gleichung (1.48) :

$$\frac{\partial p(\rho)}{\partial x} = p'(\rho) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \stackrel{(1.48)}{\approx} p'(\rho) \cdot -\rho_0 \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (1.49)$$

Nutzt man abschließend noch die Näherung  $p'(\rho) \approx p'(\rho_0)$  und definiert  $p'(\rho_0) := c_0^2$ , erhält man durch Einsetzen in Gleichung (1.46) die eindimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (1.50)$$

Die Wellengleichung beschreibt die Ausbreitung einer Schallwelle und zählt zu den hyperbolischen Differentialgleichungen. Die Wellengleichung wird in der Literatur häufig auch als d'Alembert Gleichung bezeichnet [1] und [6].

### 1.5.2 Schallgeschwindigkeit

Mit Hilfe der Methode von d'Alembert können Lösungen der Wellengleichung (1.50) gefunden werden. Eine ausführliche und gut verständliche Herleitung findet sich zum Beispiel in [6, S. 1088-1089].

Die eindimensionale Wellengleichung besitzt Lösungen der Form  $\zeta = f(x \pm c_0 t)$ , welche nach links und rechts laufenden Schallwellen entsprechen. Ein Wellenberg mit konstanter Amplitude  $f$  und konstanter Phase  $x \pm c_0 t$  bewegt sich mit  $x = \text{const.} \pm c_0 t$ . Es ist daher also naheliegend, die Phasengeschwindigkeit der Schallwellen mit  $c_0$  zu bezeichnen. Unter Standardbedingungen beträgt diese für Luft ca. 340m/s [1] und [6].

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (1.44) kann die Schallgeschwindigkeit  $c$  für ein adiabates ideales Gas folgendermaßen berechnet werden [1]:

$$c^2 = p'(\rho) = \frac{dp}{d\rho} = \frac{p}{\rho^\kappa} \cdot \kappa \rho^{\kappa-1} = \kappa \cdot \frac{p}{\rho} = \kappa \cdot R \cdot T \quad (1.51)$$

Das dimensionslose Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit  $u$  und Schallgeschwindigkeit  $c$  wird als Machzahl  $M$  bezeichnet:

$$M = \frac{u}{c} \quad (1.52)$$

In inkompressiblen Medien breiten sich Dichteschwankungen sehr viel schneller aus, als sich die Strömung ändern könnte, daher braucht man Schallwellen in inkompressiblen Medien normalerweise nicht zu berücksichtigen. Eine häufig genutzte Faustformel besagt, dass man für eine Machzahl  $M < 0,3$  einen inkompressiblen Charakter eines Fluids in guter Näherung annehmen kann [1] und [2].

Bei sehr großen Schwankungen von Dichte und Druck kann es zu sprunghaftigen Veränderungen der Zustandsgrößen in Form von Verdichtungsstößen kommen, die jedoch in dieser Diplomarbeit nicht näher behandelt werden [1] und [2].

### 1.5.3 Qualitatives Verhalten kompressibler Strömungen

Zuerst werden nicht die Zustandsgrößen entlang eines Stromfadens integriert, sondern nur differentielle Änderungen untersucht. Hierfür bildet man das totale Differential  $d\dot{m}$  vom Massenstrom  $\dot{m}$  durch den Flächenquerschnitt  $A$  des Stromfadens. Mit Hilfe von Gleichung (1.33) erhält man dann die normierte differentielle Massenerhaltung [1]:

$$\frac{d(\rho Au)}{\rho Au} = \frac{\rho u dA + \rho A du + A u d\rho}{\rho Au} = \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} + \frac{d\rho}{\rho} \stackrel{(1.33)}{=} 0 \quad (1.53)$$

Vernachlässigt man äußere Kraftfelder, kann unter Verwendung der differentiellen Bernoulli-Gleichung (1.41) und Gleichung (1.51) sowie der Machzahl  $M$  der Term  $d\rho/\rho$  folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -u \cdot \frac{du}{c^2} = -\frac{u^2}{c^2} \cdot \frac{du}{u} = -M^2 \cdot \frac{du}{u} \quad (1.54)$$

Benutzt man nun diesen Zusammenhang, erhält man mit (1.53) folgende Gleichung:

$$-\frac{dA}{A} = \frac{du}{u} + \frac{d\rho}{\rho} \stackrel{(1.54)}{=} \frac{du}{u} + \left(-M^2 \cdot \frac{du}{u}\right) = (1 - M^2) \cdot \frac{du}{u} \quad (1.55)$$

Mit dieser Gleichung kann man das Verhalten kompressibler Strömungen beim Durchtritt von Erweiterungen  $dA > 0$  oder Verengungen  $dA < 0$  qualitativ beschreiben. Dabei spielt die Tatsache, ob die Machzahl  $M$  größer oder kleiner 1 ist, eine wesentliche Rolle. Für eine Strömung im Unterschallbereich  $M < 1$  führt eine Erweiterung des Flächenquerschnitts zu einer niedrigeren Strömungsgeschwindigkeit, wohingegen im Überschallbereich  $M > 1$  genau der gegenteilige Effekt eintritt und die Strömungsgeschwindigkeit erhöht wird. Umgekehrt führt eine Verengung des Querschnitts, im Falle einer Unterschallströmung, zu einer Beschleunigung der Strömung und zu einer Verlangsamung im Überschallbereich. Eine Strömung kann also in einem konvergenten Kanal lediglich bis  $M = 1$  beschleunigt werden und würde für eine weitere Beschleunigung einen anschließenden divergenten Kanal benötigen. An der Stelle  $M = 1$  haben der Stromfadenquerschnitt  $A$  und auch die Massenstromdichte  $\rho u$  ein Extremum [1] und [2].

### 1.5.4 Saint-Venant-Wantzel Formel

Nun werden die integralen Änderungen von Zustandsgrößen entlang eines stationären Stromfadens analysiert. Da es sich nun um eine kompressible Strömung handelt, darf man die Dichte  $\rho$  in Gleichung (1.42) nicht ohne Weiteres vor das Integral ziehen. Daher definiert man sich eine Druckfunktion [1]:

$$P := \int \frac{dp}{\rho} \quad (1.56)$$

Vernachlässigt man die Erdbeschleunigung, lautet die Bernoulli-Gleichung:

$$P + \frac{u^2}{2} = P_1 = \text{const.} \quad (1.57)$$

wobei  $P_1$  der Druckfunktion für  $u_1 = 0$  entspricht. Bei sehr schnellen Strömungen kann man in guter Näherung von einer adiabaten Zustandsänderung ausgehen. Unter Verwendung von Gleichung (1.44) und Gleichung (1.56) ergibt sich mit  $\rho = \rho_1(p/p_1)^{1/\kappa}$ :

$$P = \int \frac{p_1^{1/\kappa}}{\rho_1} \cdot p^{-1/\kappa} dp = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p}{\rho_1} \cdot \frac{p_1^{1/\kappa}}{p^{1/\kappa}} \stackrel{(1.44)}{=} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p}{\rho} \quad (1.58)$$

Betrachtet man nun einen ausströmenden Gaskessel, welcher unter einem Druck  $p_1$  steht, mit einer anfänglichen Geschwindigkeit  $u_1 = 0$ , so ergibt sich nach obiger Gleichung (1.57) und (1.58) die berühmte Formel von Saint-Venant-Wantzel [1]:

$$u = \sqrt{2 \cdot (P_1 - P)} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right]} \quad (1.59)$$

Die maximal erreichbare Strömungsgeschwindigkeit wird auch bei einer Expansion ins Vakuum  $p = 0$  nicht unendlich und lautet mit Hilfe der idealen Gasgleichung (1.1):

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_1} \quad (1.60)$$

Dabei ist zu erkennen, dass die maximal erreichbare Geschwindigkeit sich mit steigender Temperatur ebenfalls erhöht. Die maximale Ausströmgeschwindigkeit  $u_{\max}$  aus einem Kessel unter Standardbedingungen liegt für Luft bei ca. 735 m/s [1] und [2].

### 1.5.5 Konvergente Düse

Zunächst sei zu erwähnen, dass eine Stelle, welche ein unterkritisches Gebiet  $M < 1$  von dem eines überkritischen Gebietes  $M > 1$  trennt, als kritische Stelle bezeichnet wird. Alle Werte in diesem kritischen Punkt  $M = 1$  werden mit einem hochgestellten "\*" als Index gekennzeichnet und als kritische Werte bezeichnet. Wichtig sei zu erwähnen, dass die Verhältnisse der kritischen Größen  $T^*, c^*, \dots$  zu den Ruhegrößen  $T_1, c_1, \dots$  für ein ideales Gas konstant sind. Einige nützliche Tabellen finden sich z.B. in [1, S. 182-183].

Eine Düse, bei der sich der Querschnitt lediglich bis zu einer minimalen Querschnittsfläche  $A_2$  verjüngt und sich anschließend instantan unendlich erweitert, wird in der Literatur häufig als konvergente Düse bezeichnet (siehe Abbildung 6). Ebenso sind Bezeichnungen wie konische Düse oder einfache Düse gebräuchlich [1] und [2].

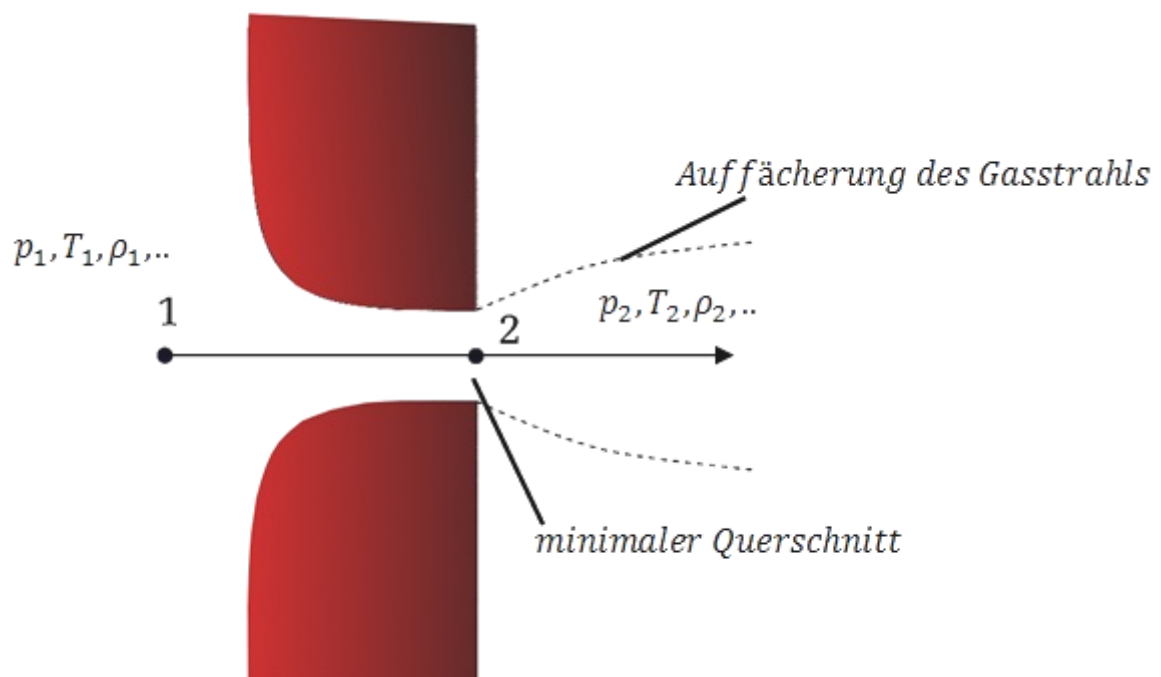


Abbildung 6: Strömung durch eine konvergente Düse  
(Quelle: in Anlehnung an [1, S.159])

Eine solche Düse wird nun in der Außenwand eines Gaskessels, welcher unter dem Druck  $p_1$  steht, montiert. Lässt man durch diese Düse das Gas in eine äußere Umgebung mit Druck  $p_2$  strömen, so ergibt dies mit Hilfe von Gleichung (1.51) und Gleichung (1.59) folgenden Massenstrom [1]:

$$\dot{m} = A_2 \rho_2 u_2 \stackrel{(1.51), (1.59)}{=} A_2 \rho_1 c_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\kappa} \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right]} \quad (1.61)$$

Auf den ersten Blick scheint Gleichung (1.61) plausibel zu sein, jedoch hat diese für den Fall  $p_2 = 0$  einen kleinen Schönheitsfehler, da hier das unsinnige Ergebnis  $\dot{m} = 0$  eintreten würde. Dies liegt ganz einfach an der falschen Annahme, dass  $p_2 = 0$  ist. Dieser Druck kann dort jedoch nie herrschen, da sich der Stromfaden bei einer Expansion ins Vakuum nur stetig auf einen unendlichen Querschnitt erweitern kann. Der Mündungsdruck folgt der Absenkung des Umgebungsdrucks nur solange, bis die Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Ab diesem Zeitpunkt herrscht in der Mündung der konstante kritische Druck  $p^* = [2/(\kappa + 1)]^{\kappa/(\kappa-1)} = p_2$ . Wird der Umgebungsdruck unter den Kesseldruck abgesenkt, steigt also anfänglich der Massenstrom an, jedoch nur bis zu einem kritischen Massenstrom. Ein weiteres Absenken des Umgebungsdrucks führt zu keiner weiteren Erhöhung des Massenstroms und kann lediglich durch ein Erhöhen des Kesseldrucks vergrößert werden. Die Formel für den kritischen Massenstrom (ohne Herleitung) lautet [1]:

$$\dot{m}_{max} = A_2 \rho_1 c_1 \cdot \frac{c^*}{c_1} \cdot \frac{\rho^*}{\rho_1} = A_2 c^* \rho^* \quad (1.62)$$

Da sich der Druck im Gasstrahl erst außerhalb der Düse kontinuierlich an den Umgebungsdruck anpasst, fächert sich der Gasstrahl auf, was aufgrund von Gleichung (1.55) kurzzeitig zu einer Überschallströmung führt. Hier wird natürlich vorausgesetzt, dass im engsten Querschnitt der Düse  $M = 1$  erreicht wurde. Man kann nun also folgern, dass sehr hohe Strahlgeschwindigkeiten nur dann erreicht werden, wenn sich der Querschnitt hinter der konvergenten Düse langsam und kontinuierlich erweitert, was uns nun zum nächsten Kapitel 1.5.6 führt [1].

### 1.5.6 Laval-Düse

Das Ziel einer Laval-Düse ist es, sehr hohe Strömungsgeschwindigkeiten zu erreichen. Wie bereits im vorherigen Kapitel 1.5.5 erwähnt, muss sich hierfür der Düsenquerschnitt nach einem Querschnittsminimum hinreichend langsam erweitern. Durch eine korrekt geformte Düse können somit hohe Mach-Zahlen realisiert werden [1] und [2].

Ist der Druck  $p_2$  kleiner als der Außendruck  $p_a$ , spricht man von einem überexpandierten Strahl (siehe Abbildung 7a). Nun konvergiert der Strahl hinter der Düse und die Druckanpassung erfolgt aufgrund von Stoßwellen, welche vom Rand ausgehen [1] und [2].

Eine optimal angepasste Düse liegt dann vor, wenn der Druck  $p_2$ , welcher am Düsenende herrscht, dem Außendruck  $p_a$  entspricht (siehe Abbildung 7b). Dieser Idealfall wird auch Auslegungsfall genannt und ist in vielen Bereichen der Technik erstrebenswert [1].

Liegt hingegen der Druck  $p_2$  über dem Außendruck  $p_a$  so ist die Rede von einem unterexpandierten Strahl (siehe Abbildung 7c). Der Strahl divergiert nun hinter der Mündung und vom Düsenrand passiert die Druckanpassung von  $p_2$  auf  $p_a$  in Form von Verdünnungswellen [1] und [2].

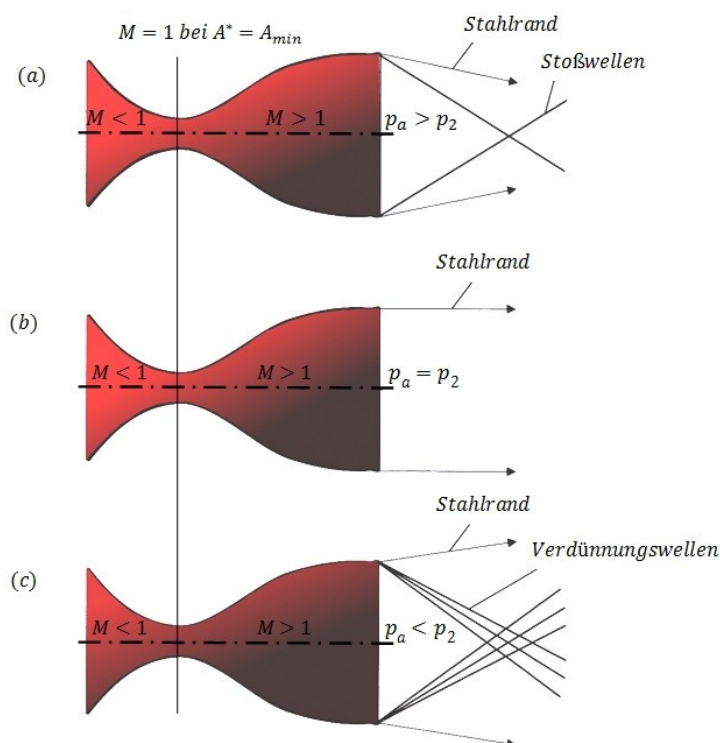


Abbildung 7: Strahlarten einer Lavaldüse  
(Quelle: in Anlehnung an [2, S.328])



## 1.6 Reibungsbehaftete Fluide

Bisher wurden Reibungseffekte völlig außer Acht gelassen. Diese Annahme trifft in guter Näherung auf schnelle Strömungen zu, da die Reibung lediglich in einer dünnen Grenzschicht in Wandnähe relevant ist. Ob jedoch Reibungseffekte tatsächlich mit gutem Gewissen vernachlässigt werden dürfen, hängt grundsätzlich von der spezifischen Ausgangssituation ab. Sind beispielsweise die Längenskalen sehr klein, oder ist die Viskosität sehr groß, kann es vorkommen, dass eine Vernachlässigung der Reibungseffekte zu unbefriedigenden bzw. ungenauen Ergebnissen führt. Um viskose Strömungen beschreiben zu können, muss die Euler-Gleichung (1.23) zur sogenannten Navier-Stokes-Gleichung erweitert werden [1].

### 1.6.1 Spannungstensor

Im Gegensatz zu reibungsbehafteten Fluiden, bei denen die einzelnen Fluidschichten mit beliebiger Geschwindigkeit aneinander vorbeigleiten können, besteht diese Möglichkeit bei reibungsbehafteten Fluiden nicht (vergleiche Abschnitt 1.1.4). Um die viskosen Effekte zu berücksichtigen, müssen die Reibungskräfte in sehr allgemeiner Form in die Bewegungsgleichungen eingefügt werden. Hierzu wird ein Fluidelement mit dem Volumen  $V_0$  betrachtet unter Beachtung, dass die viskose Kraft eine Oberflächenkraft darstellt. Die Spannung  $\vec{t}$  [ $N/m^2$ ] ist somit nichts anderes als die Oberflächenkraft pro Fläche, welche nun als Zusatzterm in Gleichung (1.24) aufgenommen wird [1]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho \vec{u} dV + \int_{A_0} \rho \vec{u} \vec{u} d\vec{A} = \int_{A_0} \vec{t} dA + \vec{F} \quad (1.63)$$

Da auch der Druck  $p$  eine Oberflächenkraft pro Fläche darstellt, wurde dieser in den Spannungsvektor  $\vec{t}$  implementiert. Die Spannung kann so geschrieben werden als [1]:

$$\vec{t} = \mathbf{T} \cdot \vec{n} \quad (1.64)$$

wobei  $\mathbf{T}$  einen Tensor zweiter Stufe mit den neun Komponenten  $\tau_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ) bzw. ( $i, j = x, y, z$ ) darstellt. Dieser Tensor zweiter Stufe wird häufig auch als Spannungstensor bezeichnet [1].

Der Spannungstensor muss unabhängig vom Koordinatensystem sein und er darf lediglich von der direkten Umgebung des betrachteten Punktes abhängen (Lokalität). Ebenfalls darf der Spannungstensor zum Zeitpunkt  $t_0$  lediglich von der Strömung zu den Zeiten  $t < t_0$  abhängen (Kausalität). Die einfachste Darstellung des Spannungstensors, welcher alle oben genannten Punkte erfüllt, lautet in kartesischen Koordinaten folgendermaßen [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -p \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \\ & + \left( \zeta - \frac{2\mu}{3} \right) \cdot \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.65) \end{aligned}$$

Die Variable  $\zeta$  stellt in diesem Fall die Volumenviskosität dar und  $\mu$  kennzeichnet die bereits aus Kapitel 1.1.4 bekannte dynamische Viskosität. Die Variablen  $u_x, u_y$  und  $u_z$  bezeichnen die Strömungsgeschwindigkeiten jeweils in  $x, y$  und  $z$  Richtung. Jene Komponenten, welche sich auf der Hauptdiagonalen befinden, werden als Normalspannungen bezeichnet und beschreiben die Kräfte, welche senkrecht zur Oberfläche stehen. Alle anderen Eintragungen werden als Tangentialspannungen bezeichnet [1].

### 1.6.2 Navier-Stokes-Gleichung

Mit Unterstützung des Gauß'schen Satzes kann der Zusatzterm  $\int_{A_0} \vec{t} dA$  aus Gleichung (1.63) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\int_{A_0} \vec{t} dA = \int_{A_0} \mathbf{T} \cdot \vec{n} dA = \int_{A_0} \mathbf{T} \cdot d\vec{A} = \int_{V_0} \nabla \cdot \mathbf{T} dV \quad (1.66)$$

Daher tritt in der differentiellen Form der Impulsbilanz die Divergenz des Spannungstensors  $\nabla \cdot \mathbf{T}$  auf. Da in vielen Fällen die dynamische Viskosität und die Volumenviskosität in guter Näherung als konstant betrachtet werden können, erhält man [1]:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) \quad (1.67)$$

Ergänzt man nun die Euler-Gleichung (1.23) um die Reibungsterme aus (1.67), erhält man die berühmte Navier-Stokes-Gleichung, welche im Jahre 1827 von Claude Louis Marie Henri Navier postuliert und 1845 von George Gabriel Stokes abgeleitet wurde [1]:

$$\underbrace{\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right)}_{\text{Trägheit}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Druck}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{u}}_{\substack{\text{Reibung} \\ \text{inkompressibel}}} + \underbrace{\left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{u})}_{\substack{\text{Reibung} \\ \text{kompressibel}}} + \underbrace{\rho \vec{f}}_{\substack{\text{Kräfte} \\ \text{extern}}} \quad (1.68)$$

Für inkompressible Fluide vereinfacht sich die Navier-Stokes-Gleichung wesentlich, da der Term  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  verschwindet (siehe Kapitel 1.3.1). Auch bei sehr hohen Geschwindigkeiten stellt die Navier-Stokes-Gleichung für viele Fluide eine exzellente Näherung dar und bildet die Grundlage um turbulente Strömungen zu beschreiben. In reibungsbehafteten Fluiden hat man, im Gegensatz zu reibungsfreien Fluiden, einen konvektiven und einen diffusiven Impulstransport. Der Impuls wird durch Diffusion auch senkrecht zur Strömungsrichtung transportiert, was dazu führt, dass sich die Ordnung der Differentialgleichung von eins auf zwei erhöht. Während die Euler-Gleichung also noch einer hyperbolischen partiellen Differentialen erster Ordnung entspricht, stellt die Navier-Stokes-Gleichung eine parabolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung dar. Daher benötigt man auf allen Rändern des Gebietes eine Randbedingung für jede Komponente des Geschwindigkeitsvektors und zusätzlich die anfängliche Geschwindigkeitsverteilung im Volumen. Sollte die Strömung zusätzlich noch kompressibel sein, muss auch die Energiegleichung mit Randbedingungen angegeben werden [1].

### 1.6.3 Reynoldszahl

Grundsätzlich unterscheidet man in der Strömungsmechanik zwischen einer laminaren und einer turbulenten Strömung. Der Parameter, welcher für die jeweilige Strömungsform maßgeblich ist, nennt sich Reynoldszahl  $Re$  und ist folgendermaßen definiert:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} \quad (1.69)$$

wobei  $U$  der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und  $D$ , im Falle einer Rohrströmung, dem Rohrdurchmesser entspricht [4].

Die Reynoldszahl ist eine dimensionslose Kennzahl und kann als Verhältnis von Trägheitskräften zu Reibungskräften verstanden werden. Besonders anschaulich und für den Schulunterricht gebräuchlich ist der Reynolds'sche Farbfadenversuch, bei dem Farbe durch eine Sonde in eine Rohrströmung eingebracht wird. Bildet sich nun ein kontinuierlicher, gleichmäßiger und zusammenhängender Farbfaden, so spricht man von einer laminaren Strömung mit einer Reynoldszahl  $Re < 2300$ . Werden die Farbfäden hingegen "zerfetzt", ausgelenkt und verteilen sich chaotisch, entspricht dies einer turbulenten Strömung mit einer Reynoldszahl  $Re > 2300$ . Bei einer laminaren Strömung dominieren nach Gleichung (1.69) die stabilisierenden Reibungskräfte, wohingegen bei turbulenten Strömungen die destabilisierenden Trägheitskräfte überwiegen. Bei der kritischen Reynoldszahl  $Re_{kritisch} \approx 2300$  wird manchmal auch von einer transitionellen Strömung gesprochen. Turbulente Strömungen sind immer instationär [1], [2] und [4].

## 1.7 Grenzschichtströmungen

Die Navier-Stokes-Gleichung war zwar bereits seit dem 19. Jahrhundert bekannt, jedoch konnte diese aufgrund ihrer Komplexität lediglich für wenige reibungsfreie Spezialfälle gelöst werden. Eine vollständige analytische Berechnung reibungsbehafteter Strömungen ist bis heute nicht möglich, weshalb weitere Vereinfachungen getroffen werden mussten. Dies führte in weiterer Folge zur Grenzschichttheorie [1] und [2].

Ein berühmter Pionier der sogenannten Grenzschichttheorie war Ludwig Prandtl, welcher das von ihm entwickelte Grundprinzip 1904 auf einem Mathematik-Kongress in Heidelberg vorstellte. Die Kernidee von Prandtl war es, das Strömungsgebiet in einen äußeren Bereich, welcher nahezu unbeeinflusst von Reibungseffekten war und in einen wandnahen, reibungsdominierenden Bereich zu unterteilen. Dieser letztere Bereich wurde als Grenzschicht bezeichnet [1] und [2].

Aufgrund der Haftungsbedingung (siehe Kapitel 1.1.4) beträgt die Fluidgeschwindigkeit an der Körperoberfläche zwar Null, erhöht sich jedoch bereits in der dünnen Grenzschicht derart, sodass außerhalb dieser Grenzschicht die viskose Strömung in guter Näherung wieder der einer reibungsfreien Strömung gleicht [1] und [2].

Aufgrund des begrenzten Umfangs dieser Arbeit wird an dieser Stelle nicht mehr näher auf weitere Einzelheiten der Grenzschichttheorie eingegangen. Eine ausführliche Darstellung des obigen Themas findet sich zum Beispiel in [1, S. 216-231] oder aber auch in [2, S. 221-243].

## 1.8 Turbulente Strömungen

Dominieren die Reibungskräfte gegenüber den Trägheitskräften, kann man den Trägheitsterm  $\partial \vec{u} / \partial t + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$  aus Gleichung (1.68) gegenüber dem Reibungsterm  $\mu \nabla^2 \vec{u}$  vernachlässigen. Dadurch erhält man die Stokes-Gleichung, welche zu gegebenen Randbedingungen eindeutig bestimmte Lösungen liefert. Sind jedoch die Trägheitskräfte dominant ( $Re \gg 1$ ), ist es möglich, dass bereits minimale anfängliche Unterschiede in den Anfangsbedingungen zu völlig unterschiedlichen Strömungen führen. Hängt eine Strömung in sehr komplexer Weise von Zeit und Ort ab, spricht man von Turbulenz [1].

### 1.8.1 Reynolds'sche Gleichungen

Im Mittel weisen turbulente Strömungen häufig immer noch langwellige Strukturen auf, welche den laminaren Strukturen sehr ähnlich sind. Dieses Erkenntnis kann man sich zu Nutze machen, indem man nur die Mittelwerte der Kräfte und Geschwindigkeiten betrachtet. Man bildet nun vom gesamten Geschwindigkeitsfeld  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  den zeitlichen Mittelwert  $\overline{\vec{u}(\vec{x}, t)} = \overline{\vec{u}}(\vec{x})$  und kann schreiben [1]:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \overline{\vec{u}}(\vec{x}) + \vec{u}'(\vec{x}, t) \text{ und } p(\vec{x}, t) = \overline{p}(\vec{x}) + p'(\vec{x}, t) \quad (1.70)$$

wobei

$$\overline{f(t)} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt \text{ und } \overline{f'(t)} = 0 \quad (1.71)$$

Die Größen mit dem Strich ' werden als Schwankungsgrößen bezeichnet, deren zeitlicher Mittelwert verschwindet [1].

Verwendet man nun Gleichung (1.70), sowie die Navier-Stokes-Gleichung (1.68) und die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide (1.15), erhält man nach einigen Umformungen und Substitutionen die Reynolds'schen Gleichungen [1]:

$$\overline{\vec{u}} \cdot \nabla \overline{\vec{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \overline{p} + \nu \nabla^2 \overline{\vec{u}} - \overline{\vec{u}' \cdot \nabla \vec{u}'} \quad (1.72)$$

$$\nabla \cdot \overline{\vec{u}} = 0 \quad (1.73)$$

Diese Gleichungen sind den stationären Navier-Stokes-Gleichungen sehr ähnlich, jedoch tritt in Gleichung (1.72) ein zusätzlicher Term auf, welcher aus dem zeitlichen Mittel des Produkts beider Schwankungsgrößen besteht. Hier sei darauf hingewiesen, dass die Schwankungsgrößen zwar selbst den Mittelwert Null haben, das Produkt jedoch nicht den Wert Null annehmen muss [1].

Ähnlich zu Abschnitt 1.8.1 können die Terme  $\overline{\vec{u}' \cdot \nabla \vec{u}'}$  und  $\nu \nabla^2 \overline{\vec{u}}$  mittels Divergenzbildung aus einem Spannungstensor  $T_a$  hergeleitet werden [1]:

$$\nabla \cdot \underbrace{\left\{ \mu \left[ \nabla \overline{\vec{u}} + \left( \nabla \overline{\vec{u}} \right)^T \right] - \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \right\}}_{T_a} = \mu \nabla^2 \overline{\vec{u}} - \overline{\vec{u}' \cdot \nabla \vec{u}'} \quad (1.74)$$

wobei der Term  $\mu \left[ \nabla \overline{\vec{u}} + \left( \nabla \overline{\vec{u}} \right)^T \right]$  den viskosen Anteil des Spannungstensors darstellt und  $\rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'}$  als turbulenter Spannungstensor bezeichnet wird. Für den turbulenten Spannungstensor mit seinen beinhaltenden Reynolds-Spannungen gilt [1]:

$$-\rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'_x u'_x} & \overline{u'_x u'_y} & \overline{u'_x u'_z} \\ \overline{u'_y u'_x} & \overline{u'_y u'_y} & \overline{u'_y u'_z} \\ \overline{u'_z u'_x} & \overline{u'_z u'_y} & \overline{u'_z u'_z} \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

Die Reynolds'schen Gleichungen stellen leider nicht genügend Informationen bereit, um alle neun Reynolds-Spannungen zu ermitteln. Versucht man Gleichungen dafür zu finden, führt dies unweigerlich zu einem Tensor höherer Stufe und somit zu zusätzlich benötigten Gleichungen. Dies wird als sogenanntes Schließungsproblem bezeichnet. Um diesem Problem einigermaßen entgegenzuwirken, verwendet man halbempirische Turbulenzmodelle, welche in Abschnitt 2.8 genauer besprochen werden [1].

### 1.8.2 Viskose Unterschicht

Für sehr schnelle Strömungen bzw. hohe Reynoldszahlen wird die Grenzschicht entlang einer Wand turbulent, weswegen turbulente wandnahe Strömungen in der Praxis von immenser Wichtigkeit sind. In dieser Wandnähe existiert ein Bereich, welcher inneres Gebiet genannt wird, in dem die gesamte mittlere Schubspannung  $\overline{\tau_{ges}}$  konstant und äquivalent zur mittleren Wandschubspannung  $\overline{\tau_W}$  ist (vergleiche Abschnitt 1.1.4) [1]:

$$\overline{\tau_{ges}} = \underbrace{\mu \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y}}_{\text{visk. Schubspannung}} - \underbrace{\rho \overline{u_x' u_y'}}_{\text{turb. Schubspannung}} = \overline{\tau_W} = \text{const.} \quad (1.76)$$

Als ein Bereich des inneren Gebietes sei die viskose Unterschicht genannt, in welcher turbulente Schwankungen in guter Näherung vernachlässigt werden können. In dieser Unterschicht muss nun also gelten [1]:

$$\overline{\tau_W} = \mu \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} = \text{const.} \quad (1.77)$$

Durch Integration von Gleichung (1.77) mit  $\overline{u_x}(0) = 0$  erhält man die mittlere Geschwindigkeit  $\overline{u_x}(y) = (\overline{\tau_W}/\rho\nu)y$ , wobei man hier gut die Linearität des mittleren Geschwindigkeitsprofils erkennen kann. Definiert man sich nun  $u_{x\tau} := \sqrt{\overline{\tau_W}/\rho}$  als sogenannte Wandschubspannungsgeschwindigkeit, erhält man den dimensionslosen Wandabstand  $y^+$ , welcher besonders für die numerische Strömungsmechanik relevant ist [1]:

$$y^+ := \frac{u_{x\tau}}{\nu} y \quad (1.78)$$

Die Ausdehnung der viskosen Unterschicht reicht von der Wandoberfläche  $y^+ = 0$  bis zu  $y^+ \approx 10$ . Nach einem kurzen Übergangsbereich von  $10 < y^+ < 30$ , in welchem obige Gleichungen zwar noch zutreffen, der gemachte Fehler aber immer relevanter wird, erreicht man einen Bereich, in dem die viskose Schubspannung gegenüber der turbulenten Schubspannung vernachlässigt werden kann [1].



### 1.8.3 Logarithmisches Wandgesetz

Als zweiter Bereich des inneren Gebietes wird nun, neben der viskosen Unterschicht, das logarithmische Wandgesetz besprochen. Wie bereits in Kapitel 1.8.2 erwähnt, wird nun die viskose Schubspannung gegenüber der turbulenten Schubspannung vernachlässigt. Für  $y^+ > 30$  gilt also [1]:

$$\overline{\tau_W} = \rho \left| \overline{u_x' u_y'} \right| = \rho u_{x\tau}^2 = \text{const.} \quad (1.79)$$

Unter Verwendung des Modells des Prandtl'schen Mischungsweges, auf das hier nicht näher eingegangen wird, kann gezeigt werden, dass das mittlere Geschwindigkeitsprofil  $\overline{u}^+ := \overline{u_x}(y)/u_{x\tau}$  folgende Gestalt aufweist [1]:

$$\overline{u}^+ := \frac{1}{k_s} \cdot \ln y^+ + B \quad (1.80)$$

wobei  $k_s$  als Karman-Konstante mit einem experimentellen Wert von  $k_s = 0.41$  bezeichnet wird. Die Konstante  $B$  wurde ebenfalls experimentell bestimmt und bietet mit  $B = 5.5$  in vielen Fällen eine gute Näherung.

Zusammenfassend bleibt also festzuhalten, dass in Wandnähe ein inneres Gebiet existiert, welches sich aus der viskosen Unterschicht und dem logarithmischen Wandgesetz zusammensetzt. Der kurze Übergangsbereich dazwischen sei hier außer Acht gelassen und kann als fließend angesehen werden. In der viskosen Unterschicht ergibt sich mit steigendem Wandabstand ein lineares mittleres Geschwindigkeitsprofil, welches anschließend in ein logarithmisches Geschwindigkeitsprofil übergeht [1].

## 2 Grundlagen der Numerischen Strömungsmechanik

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Numerischen Strömungsmechanik näher erörtert. Die Thematik baut unter anderem auf den Grundlagen der Strömungsmechanik auf, weshalb das vorherige Kapitel 1 geschaffen wurde. Zu Beginn werden wichtige Definitionen und Eigenschaften besprochen, um anschließend die Rechengitter genauer unter die Lupe zu nehmen. Da die Schreibweise in der Numerischen Strömungsmechanik etwas von jener der Strömungsmechanik abweicht, werden die Erhaltungssätze in Analogie zu Kapitel 1 formuliert, welche anschließend benötigt werden, um die Finite-Volumen-Methode vorzustellen. Danach wird kurz auf die verschiedenen numerischen Interpolationsverfahren und die numerische Differentiation eingegangen. Schlussendlich wird ein Übergang zur numerischen Integration in Raum und Zeit geschaffen, bevor wir uns abschließend den Turbulenzmodellen nähern. Als Hauptquellen für die Grundlagen der Numerischen Strömungsmechanik dienten [3] und [4].

### 2.1 Definitionen und Eigenschaften

In diesem Unterkapitel wird der Begriff bzw. die Abkürzung CFD näher betrachtet. Ebenso werden weitere relevante Definitionen und Eigenschaften angesprochen.

#### 2.1.1 Der Begriff CFD

Der Begriff CFD steht für die Abkürzung von "Computational Fluid Dynamics" und wird auch als Synonym für die "Numerische Strömungsmechanik" verwendet. Fälschlicherweise wird gelegentlich auch von "Colored Fluid Dynamics" gesprochen, was sich vermutlich auf die farbige Visualisierung durch eine Postprocessing-Software zurückführen lässt. In manchen Lehrbüchern findet man auch die Bezeichnung "Numerische Thermofluidodynamik". Wie bereits aus Kapitel 1 hervorgegangen ist, lassen sich Strömungen mit Hilfe der Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie beschreiben. Mit speziellen CFD-Programmen werden nun diese komplexen Grundgleichungen mit Hilfe moderner numerischer Methoden gelöst. Dabei ist zu beachten, dass es sich lediglich um eine näherungsweise Lösung handelt, welche sich im günstigsten Fall an die exakte Lösung annähert. Jede numerische Lösung sollte auf Plausibilität geprüft werden, am Besten unterstützt durch eine experimentelle Bestätigung [2], [3] und [4].

### 2.1.2 Das CFD-Modell und dessen Eigenschaften

Als CFD-Modell wird die mathematische Beschreibung einer Strömung in diskreter Weise, z.B. auf diskreten Gitterpunkten innerhalb eines Strömungsgebietes bezeichnet. Es besteht aus dem Rechengitter, dem mathematischen Strömungsmodell, sowie weiteren stoffspezifischen Parametern und den festzulegenden Randbedingungen an den Grenzen des Strömungsgebietes. Mit der Festlegung der numerischen Verfahren und Algorithmen werden die Differentialgleichungen z.B. in Differenzengleichungen übergeführt und in den Stützstellen, welche zuvor durch das Rechengitter definiert wurden, berechnet. Durch diese Diskretisierung wird aus den Differentialgleichungen ein System algebraischer Gleichungen, welches schrittweise bzw. iterativ gelöst werden kann [3].

Damit eine CFD-Simulation qualitativ hochwertige Ergebnisse liefert, trachtet man für gewöhnlich danach, dass das CFD-Modell folgende wichtige Eigenschaften erfüllt:

- Eigenschaft 1 - *"Beschränktheit: Jede mit dem Modell berechnete Größe  $\Phi$  liegt in jedem Punkt des Strömungsgebietes innerhalb eines physikalisch sinnvollen Wertintervalls"* [3, S. 11].
- Eigenschaft 2 - *"Konservativität: Die Gleichungen des CFD-Modells werden so formuliert und diskretisiert, dass eine in den Gleichungen betrachtete Erhaltungsgröße, etwa die Masse in der Kontinuitätsgleichung, im Strömungsgebiet wirklich erhalten wird"* [3, S. 11].
- Eigenschaft 3 - *"Konsistenz: Die durch die Diskretisierung entstandenen algebraischen Gleichungen gehen wieder in die Differentialgleichungen des mathematischen Modells über, wenn der Abstand der Punkte im Gitter gegen Null strebt"* [3, S. 11].
- Eigenschaft 4 - *"Konvergenz: Das Ergebnis des CFD-Modells strebt gegen die exakte Lösung des mathematischen Modells, wenn der Abstand der Punkte im Gitter gegen Null geht"* [3, S. 11].
- Eigenschaft 5 - *"Stabilität: Die Fehler im CFD-Modell wachsen während der CFD-Simulation nicht an"* [3, S. 11].
- Eigenschaft 6 - *"Transporteigenschaft: Bei der Diskretisierung wird berücksichtigt, dass der konvektive Transport einer Größe  $\Phi$  entlang der Bahnlinien in der Strömung erfolgt"* [3, S. 11].

### 2.1.3 CFD Software

Mittlerweile gibt es eine riesige Auswahl an hochkomplexen CFD-Programmen, welche dazu dienen, CFD-Simulationen in unterschiedlichen Bereichen der Technik durchzuführen. Manche kommerzielle Programme, wie zum Beispiel *ANSYS<sup>®</sup> FLUENT<sup>®</sup>*, stellen bereits eine benutzerfreundliche Oberfläche bereit, welche es auch Personen ohne Programmierkenntnissen ermöglicht, in kurzer Zeit plausible Ergebnisse zu erhalten. Im Gegensatz dazu gibt es aber auch Programme im Open-Source-Bereich wie z.B. *OpenFoam<sup>®</sup>*, welches auf der Programmiersprache C++ basiert und wesentlich mehr Einarbeitungszeit erfordert. Dabei sei zu erwähnen, dass grundsätzlich kein Programm dem anderen überlegen ist und es hauptsächlich am "User" und dessen Erfahrung liegt, ob eine CFD-Simulation wertvolle Erkenntnisse liefert [3].

Gemeinsamkeiten gibt es allerdings bei den geforderten Funktionen, welche die Programme bereitstellen müssen [3]:

- **Präprozessor:** In diesem Vorbereitungsprozess wird unter anderem die Konstruktion und Gittergenerierung, sprich die Vernetzung des Strömungsgebietes, vollführt. Normalerweise stehen hierfür bereits CAD-ähnliche Funktionen zur Verfügung, häufiger findet jedoch ein Geometrieimport bzw. Netzimport über speziell implementierte Schnittstellen statt. Eine Festlegung der Methoden und Parameter sowie die Konzeption des mathematischen Modells geschieht ebenfalls noch im Präprozessor.
- **Strömungslöser:** Mit dem Strömungslöser wird die CFD-Simulation ausgeführt und stellt dabei dem Nutzer Informationen über den Verlauf des Lösungsprozesses zur Verfügung. Der Lösungsprozess wird, nach zuvor festgelegten Kriterien, automatisch abgebrochen bzw. kann manuell gestoppt werden.
- **Postprozessor:** Im Postprozessor finden die Auswertungs- und Visualisierungsvorgänge der CFD-Simulation statt, wobei auch hier wieder unterschiedliche Schnittstellen existieren, um einen Export in andere Dateiformate und Programme zu gewährleisten.

## 2.2 Rechengitter

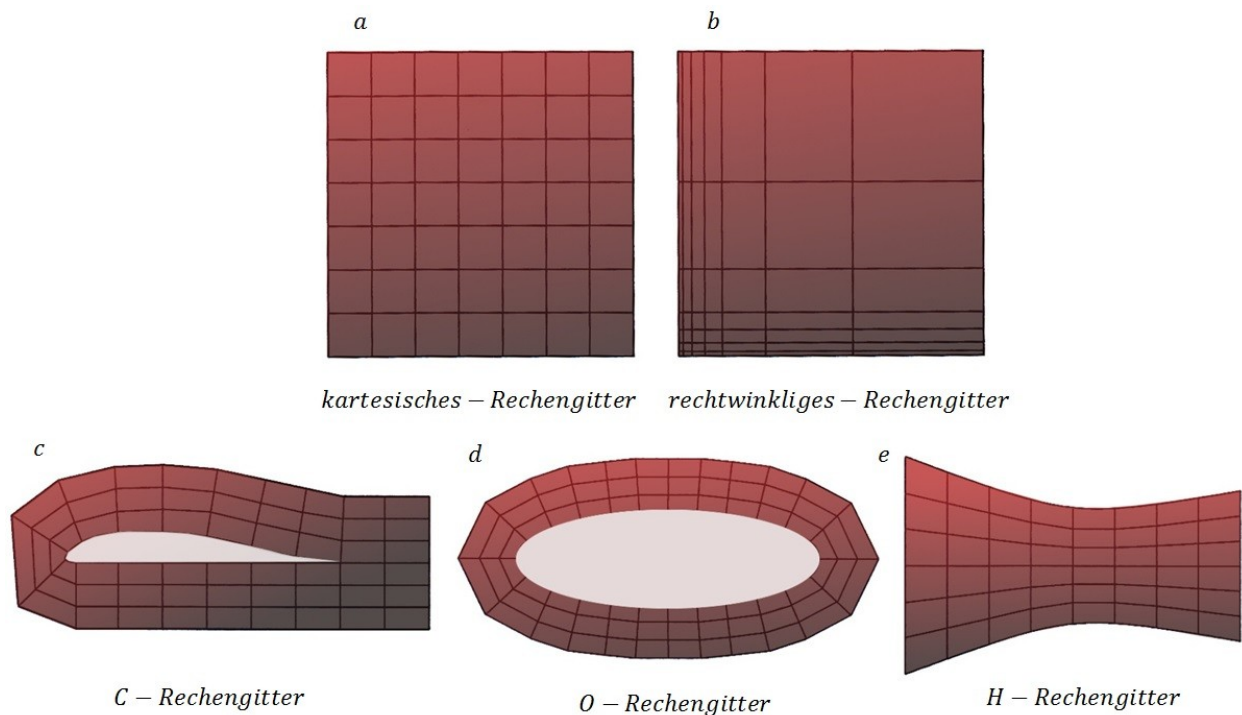
Wie bereits weiter oben angedeutet, werden in einer CFD-Simulation die Strömungsgrößen  $\phi$  in einer endlichen Anzahl von Punkten bestimmt. Das Strömungsgebiet wird durch das Rechengitter in eine Menge von Kontrollvolumen  $KV$  (Gitterzellen) zerlegt, wobei jedes Kontrollvolumen einen charakteristischen Punkt besitzt, in dem nun die Strömungsgrößen abgespeichert werden. Häufig wird der Zellmittelpunkt  $P$  als solch charakteristischer Punkt festgelegt. Eine gute Qualität des Rechengitters ist eine Grundvoraussetzung für akzeptable Ergebnisse und kann im schlimmsten Fall auch zu einem Scheitern der Simulation führen. Anhand der Nachbarschaftbeziehungen der Kontrollvolumen, sowie deren Geometrie, kann grundsätzlich zwischen strukturierten und unstrukturierten Rechengittern unterschieden werden [3] und [4].

In den folgenden Unterkapiteln wird lediglich überblicksmäßig auf die verschiedenen Arten der Rechengitter, sowie wichtige Gütekriterien eingegangen. Es sei anzumerken, dass die Rechengittererstellung einen sehr komplexen Teilbereich in der CFD darstellt. Für genauere Informationen, speziell in Bezug auf die Generierung strukturierter und unstrukturierter Netze, wird auf die Quelle [4, S. 99-118] verwiesen.

Neben den stationären Rechengittern, bei denen die Ränder bzw. Gitterzellen ortsfest sind, gibt es in vielen CFD-Programmen auch die Möglichkeit bewegte Rechengitter zu nutzen, um beispielsweise die Bewegung eines Kolbens in einem Zylinder zu simulieren. Da für die anschließenden Berechnungen in Kapitel 3 die Option "Dynamic Mesh" aktiviert wurde, wird darauf in Kapitel 3.4 noch Bezug genommen [4].

### 2.2.1 Strukturierte Gitter

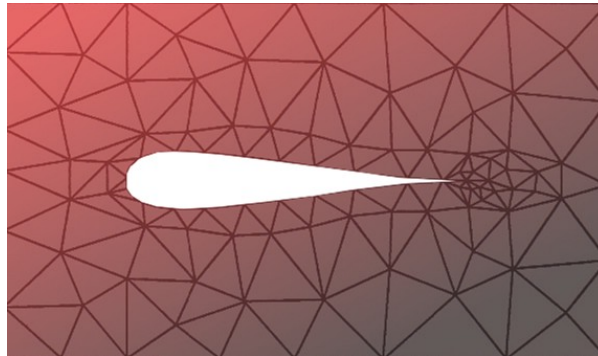
Bei strukturierten Rechengittern sind neben der Geometrie auch die Nachbarschaftbeziehungen zwischen den Kontrollvolumen ähnlich. Man spricht hierbei auch von einer einheitlichen Gittertopologie. Üblicherweise bestehen strukturierte Netze im zweidimensionalen Raum aus Vierecken, wobei der einfachste Fall ein kartesisches Gitter (siehe Abbildung 8a) darstellt. Wird das Strömungsgebiet in achsenparallele Bereiche eingeteilt, bei denen die Kanten der Gitterzellen unterschiedliche Längen besitzen, so ist auch von rechtwinkligen Gittern die Rede (siehe Abbildung 8b). Mit Hilfe von Verteilungsfunktionen wäre es möglich, bestimmte Bereiche in einem Strömungsgebiet gröber und in einem anderen Bereich feiner aufzulösen. Grundsätzlich werden die bis dato genannten strukturierten Gitter lediglich für sehr einfache Geometrien verwendet. Um etwas komplexere Strukturen eines Strömungsgebietes zu vernetzen, eignen sich sogenannte körperangepasste Gitter. Hierbei unterscheidet man, wie in Abbildung 8c-8d zu sehen ist, je nach Verlauf der Linienzüge, zwischen C-Gitter, O-Gitter und H-Gitter. Für sehr komplexe Geometrien eignen sich strukturierte Gitter nur mehr bedingt und man weicht daher häufig auf unstrukturierte oder hybride Gitter aus [3] und [4].



**Abbildung 8: strukturierte Gitter**  
(Quelle: in Anlehnung an [3, S.25-26])

### 2.2.2 Unstrukturierte Gitter

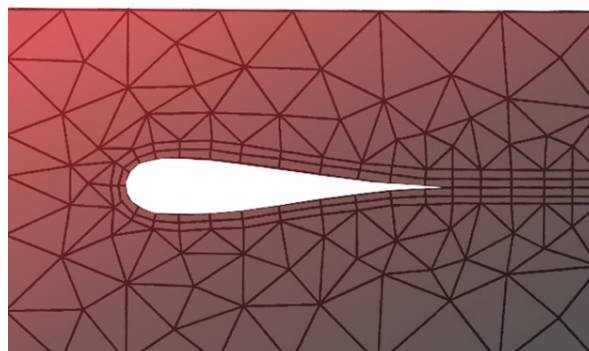
Bei unstrukturierten Rechengittern müssen nun keine ähnlichen Nachbarschaftsbeziehungen mehr zwischen den einzelnen Kontrollvolumen bestehen. Ebenfalls können nun die Geometrien sehr unterschiedlich sein, wobei jedoch im zweidimensionalen Fall häufig Dreiecke Anwendung finden. Hierbei spricht man dann von Dreiecks-Zellen (siehe Abbildung 9). Der Vorteil von unstrukturierten Gittern liegt an der universellen Einsetzbarkeit auch bei sehr komplexen Strukturen. Gerade bei bewegten Netzen wird aus Stabilitätsgründen empfohlen, unstrukturierte Rechengitter zu verwenden. Jedoch benötigen diese im Vergleich zu strukturierten Gittern einen erhöhten Speicherbedarf und bedürfen eines höheren Rechenaufwands [3] und [4].



**Abbildung 9: unstrukturiertes Dreiecksgitter**  
(Quelle: in Anlehnung an [3, S.26])

### 2.2.3 Hybride Gitter

Bereits der Name des hybriden Gitters (siehe Abbildung 10) lässt darauf schließen, dass es sich um eine Mischform handelt, bei der gewisse Bereiche sowohl strukturierter als auch unstrukturierter Natur sind. Das Ziel des hybriden Gitters ist es, sowohl die Vorteile des einen als auch des anderen Gittertyps zu nutzen [3].



**Abbildung 10: hybrides Gitter**  
(Quelle: in Anlehnung an [3, S.27])

## 2.2.4 Gütekriterien

Um eine gute Stabilität bzw. passable Genauigkeit der Berechnung zu erzielen, ist es erforderlich, einige Qualitätskriterien des erstellten Rechengitters im Auge zu behalten. Von besonderer Bedeutung sind dabei die drei Gütekriterien "Skewness" (Schräge), "Orthogonal Quality" (Rechtwinkligkeit) und "Aspect Ratio" (Seitenverhältnis) [7].

Als erstes Gütekriterium wird "Skewness" in der Literatur folgendermaßen definiert [7]:

$$\text{"Skewness"} = \frac{\text{optimale Zellgröße} - \text{generierte Zellgröße}}{\text{optimale Zellgröße}} \quad (2.a)$$

Das Spektrum reicht von exzellent (0-0,25) bis inakzeptabel (0,98-1,00). Als maximale Schräge wird häufig  $< 0.95$  angegeben, wobei Zielwerte von  $< 0,80$  als guter Standard zu betrachten sind [7].

Die "Orthogonal Quality" als zweites wichtiges Qualitätskriterium verwendet nun das Skalarprodukt zwischen Kantennormalenvektor  $\vec{A}_i$  sowie dem Vektor vom Zellmittelpunkt bis zum Kantenmittelpunkt  $\vec{e}_i$  dieser Zelle als Gütekriterium [7]:

$$\text{"Orthogonal Quality"} = \frac{\vec{A}_i \cdot \vec{e}_i}{|\vec{A}_i| \cdot |\vec{e}_i|} \quad (2.b)$$

Der denkbar ungünstigste Fall würde eintreten, wenn das Skalarprodukt null ergeben würde, was natürlich der Fall ist, wenn  $\vec{A}_i \perp \vec{e}_i$  gilt. In diesem Fall reicht das Spektrum also von inakzeptabel (0-0,001) bis exzellent (0,95-1,00). Generell sollte die minimale "Orthogonal Quality"  $> 0.1$  betragen um tolerierbare Ergebnisse zu bekommen [7].

Als letztes Gütekriterium wird der Begriff "Aspect Ratio" behandelt, bei dem es sich im zweidimensionalen Fall lediglich um das Seitenverhältnis von Länge zu Breite handelt.

$$\text{"Aspect Ratio"} = \frac{\text{längere Seite}}{\text{kürzere Seite}} \quad (2.c)$$

Als Grenzwert gilt es ein "Aspect Ratio"  $< 100$  einzuhalten [7].



## 2.3 Erhaltungssätze

Wie bereits in Kapitel 1 ersichtlich wurde, liefern die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie das mathematische Modell einer Strömung. Grundsätzlich wurde diese Theorie bereits zuvor ausführlich besprochen, jedoch haben sich in der numerischen Strömungsmechanik etwas unterschiedliche Schreibweisen und Abkürzungen hervorgetan, weshalb hier diesem Aspekt nochmals kurze Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Ebenso muss man korrekterweise noch erwähnen, dass die Erhaltung der Gesamtenergie in Gleichung (1.29) nur für reibungsfreie Fluide gilt und viskose Spannungen natürlich auch die Energiebilanz beeinflussen. Die nachfolgende Formulierung der Energiegleichung berücksichtigt dies bereits, wobei auf eine zusätzliche Herleitung, aufgrund des begrenzten Umfangs dieser Arbeit, verzichtet wurde [1] und [3].

### 2.3.1 Die prototypische Modellgleichung

Sowohl die Kontinuitätsgleichung KON (1.14), als auch der Impulserhaltungssatz IMP (1.18) bzw. (1.68) und der Energieerhaltungssatz ENG besitzen einen formal ähnlichen Aufbau, welcher durch die prototypische Modellgleichung veranschaulicht werden kann:

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \vec{u} \Phi)}_{F_\Phi} = \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi)}_{D_\Phi} + Q_\Phi \quad (2.1)$$

wobei die Variable  $\Phi$  eine Strömungsgröße (siehe Tabelle 1) und  $\Gamma$  den Diffusionskoeffizienten darstellt.  $F_\Phi$  wird als konvektiver Flussterm bezeichnet, welcher durch den Transport von  $\Phi$  mit der Strömung hervorgerufen wird. Der diffusive Flussterm wird hingegen mit  $D_\Phi$  betitelt und wird durch unterschiedliche räumliche Verteilungen von  $\Phi$  hervorgerufen. Alle sonstigen Quellen oder Senken werden in  $Q_\Phi$  berücksichtigt [3].

| Gleichung | $\Phi$    | $F_\Phi$                              | $D_\Phi$                    | $Q_\Phi$                                                                       |
|-----------|-----------|---------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| KON       | 1         | $\nabla \cdot (\rho \vec{u})$         | 0                           | 0                                                                              |
| IMP       | $\vec{u}$ | $\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u})$ | $\nabla \cdot \mathbf{T}_p$ | $-\nabla p + \rho \vec{f}$                                                     |
| ENG       | $h$       | $\nabla \cdot (\rho \vec{u} h)$       | $-\nabla \cdot \vec{q}''$   | $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{T}_p \cdot \vec{u})$ |

Tabelle 1: Spezifizierung der Variablen in der Modellgleichung

(Quelle: in Anlehnung an [3, S.54])

Entsprechend Tabelle 1 und in Analogie zu den Erhaltungssätzen aus Kapitel 1, ergeben sich folgende drei Darstellungen, beginnend mit der Kontinuitätsgleichung KON:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.2)$$

überleitend zur Darstellung des Impulserhaltungssatzes IMP:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T}_p - \nabla p + \rho \vec{f} \quad (2.3)$$

und abschließend mit dem Energieerhaltungssatz ENG für viskose Fluide:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} h) = -\nabla \cdot \vec{q}'' + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{T}_p \cdot \vec{u}) \quad (2.4)$$

Die bisher unbekannte Variable  $\vec{q}''$  wird als Wärmestromvektor bezeichnet und im folgenden Kapitel 2.3.2 näher erläutert. Der Spannungstensor  $\mathbf{T}_p$  ist dem Spannungstensor  $\mathbf{T}$  aus Kapitel 1.6 ähnlich, wird jedoch vollständigshalber erneut definiert [3].

### 2.3.2 Materialgesetze und Zustandsgleichungen

Die drei Gleichungen (2.2), (2.3) und (2.4) bilden noch kein Gleichungssystem welches lösbar wäre, da mehr unbekannte Strömungsgrößen als Gleichungen vorhanden sind. Mit Hilfe thermischer Zustandsgleichungen (siehe z.B. Kapitel 1.1.3), sowie kalorischer Zustandsgleichungen (z.B.  $dh = c_p dT$ ) und weiteren empirisch ermittelten Materialgesetzen, ist es möglich das Gleichungssystem zu schließen [3].

Zwei besonders wichtige Materialgesetze sind einerseits das Fourier'sche Gesetz:

$$\vec{q}'' = -k \nabla T \quad (2.5)$$

welches mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors  $k$  den Zusammenhang zwischen Wärmestromvektor  $\vec{q}''$  und Temperaturgradienten  $\nabla T$  herstellt [3].

Und andererseits das sogenannte Newton'sche Fließgesetz, welches in abgeänderter Form und Schreibweise bereits in Kapitel 1.6.1 zum Ausdruck gebracht wurde [3]:

$$\mathbf{T}_p = \mu \left[ \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij} \right] \quad (2.6)$$

$\delta_{ij}$  steht dabei für das Kroneckersymbol.

Mit diesem Wissen können nun zusammenfassend fünf Gleichungen angegeben werden, die in vielen CFD-Modellen als mathematisches Basismodell für ein ideales Gas genutzt werden [3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \left\{ \mu \left[ \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij} \right] \right\} + \rho \vec{f} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} h) \\ = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \mu \left[ \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij} \right] \cdot \vec{u} \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad (2.10)$$

$$dh = c_p dT \quad (2.11)$$

Obige Gleichungen umfassen die Kontinuitätsgleichung, den Impulserhaltungssatz, die Energieerhaltung inklusive den Materialgesetzen, sowie die thermische und kalorische Zustandsgleichung für ein ideales Gas. Spätestens jetzt wird auch klar, wie komplex die gesamte Thematik der Strömungsmechanik ist und warum man sich numerischer Lösungsmethoden bedienen muss. Dies führt uns nun im nächsten Kapitel 2.4 zur sogenannten Finite-Volumen-Methode.

## 2.4 Finite-Volumen-Methode

Die Finite-Volumen-Methode (FVM) ist im Bereich der Strömungsmechanik das am häufigsten verwendete Lösungsverfahren für die mathematischen Modellgleichungen. Neben der FVM koexistieren zusätzlich die Finite-Differenzen-Methode (FDM) und die Finite-Elemente-Methode (FEM), welche jedoch nur eine eher untergeordnete Rolle spielen. Mit Hilfe der FVM und in Kombination mit numerischen Differentiations-, Integrations- und Interpolationsverfahren ist es möglich, die prototypische Modellgleichung (2.1) in eine numerisch lösbare Differenzengleichung überzuführen [3].

### 2.4.1 Grundidee

Hierzu betrachtet man das durch die prototypische Modellgleichung (2.1) beschriebene Transportproblem, lediglich für ein Kontrollvolumen KV innerhalb des Rechengitters. Zum Zeitpunkt  $t_0$  soll nun genau ein Kontrollvolumen des Gitters ausgefüllt sein (siehe Abbildung 11). Aufgrund der Strömung, wird das Fluidelement im Laufe der Zeit verschoben, sodass dieses zum Zeitpunkt  $t_1$  eine neue Position im Rechengitter einnimmt. Aufgrund dieser Verschiebung des Fluidelements, werden nun die Erhaltungsgrößen von einer Position zu einer neuen Position transportiert. Die dadurch auftretenden konvektiven und diffusiven Flüsse werden nun an den "Seitenflächen" bzw. "Seitenkanten" aller Zellen im Gitter ausgewertet. Vereinfacht kann man sagen, dass für jede einzelne Gitterzelle eine Bilanzierung der zuströmenden und ausströmenden Flüsse vorgenommen wird. Die Erhaltung der Flüsse steht bei dieser Methode also im Vordergrund [3].

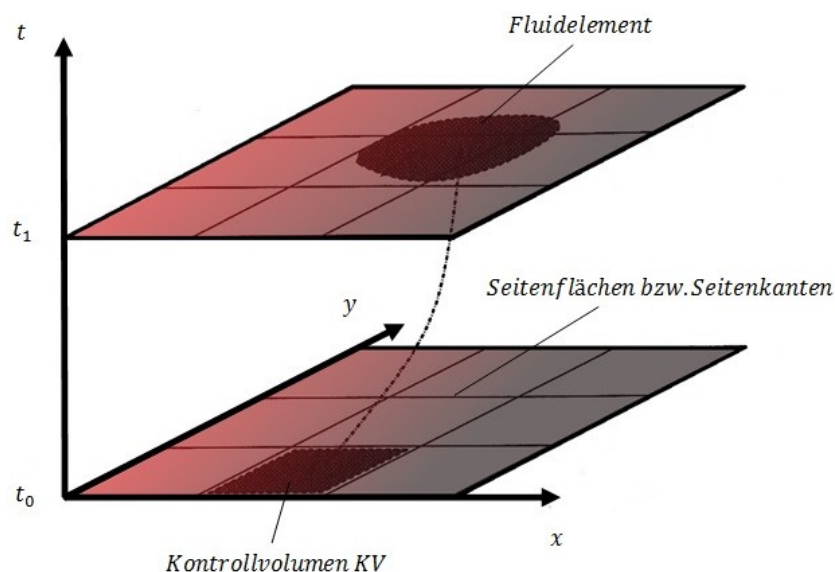


Abbildung 11: Positionsverschiebung eines Fluidelements im Rechengitter

(Quelle: in Anlehnung an [3, S.60])

## 2.4.2 Allgemeines inkompressibles Problem

Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, wird bei der Finite-Volumen-Methode das Integral der allgemeinen Modellgleichung (2.1) über ein Kontrollvolumen KV ausgewertet [3]:

$$\int_{KV} \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} dV = \int_{KV} [\nabla \cdot (\Gamma \nabla \Phi) - \nabla \cdot (\rho \vec{u} \Phi) + Q_\Phi] dV \quad (2.12)$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes und Gleichung (2.12) erhält man:

$$\underbrace{\int_{KV} \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} dV}_{\text{Term 1}} = \underbrace{\int_A (\Gamma \nabla \Phi) \cdot \vec{n} dA}_{\text{Term 2}} - \underbrace{\int_A (\rho \vec{u} \Phi) \cdot \vec{n} dA}_{\text{Term 3}} + \underbrace{\int_{KV} Q_\Phi dV}_{\text{Term 4}} \quad (2.13)$$

wobei der erste Term die Rate der zeitlichen Änderung von  $\rho\Phi$  im Kontrollvolumen angibt. Der zweite Term repräsentiert den Diffusionsstrom durch die geschlossene Oberfläche  $A$  vom Kontrollvolumen und der dritte Term erfasst den Konvektionsstrom. Mit dem vierten Term werden alle sonstigen Quellen und Senken berücksichtigt [3].

Um Gleichung (2.13) auszuwerten, müssen zuerst die Nachbarschaftsbeziehungen der einzelnen Gitterzellen definiert werden. Die Grundidee der FVM ist sowohl bei strukturierten-, als auch bei unstrukturierten Rechengittern ähnlich, jedoch für letztere formal aufwendiger und wird hier nicht näher ausgeführt [3].

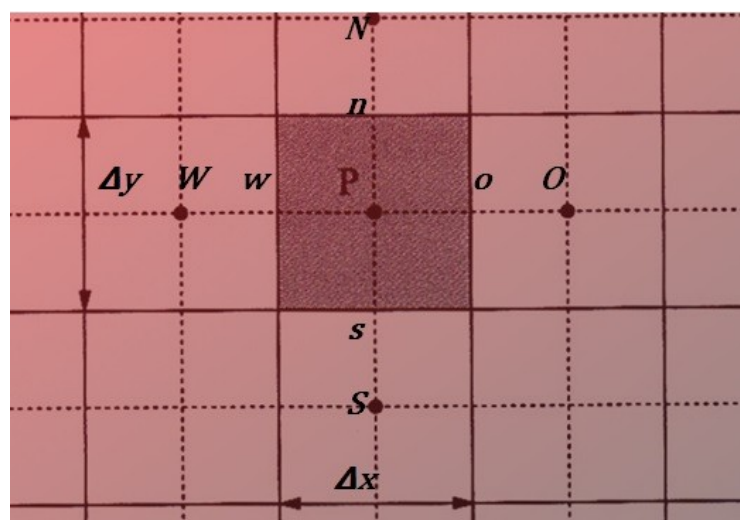


Abbildung 12: Kompass-Notation eines strukturierten Gitters  
(Quelle: in Anlehnung an [3, S.61])

Bei zweidimensionalen strukturierten Gittern können die Nachbarschaftsbeziehungen in der sogenannten Kompass-Notation angegeben werden. Dafür werden die umliegenden Zentralknoten mit den Anfangsbuchstaben für Nord, Ost, Süd und West gekennzeichnet (siehe Abbildung 12). Die Seitenflächen des Kontrollvolumens werden analog mit n, o, s, w bezeichnet, wobei n und s den Flächeninhalt " $\Delta x$ " besitzen. Den Seitenflächen o und w wird hingegen der Flächeninhalt " $\Delta y$ " zugeschrieben. Man muss sich hier bewusst werden, dass auch im zweidimensionalen Fall immer von "Volumen" gesprochen wird, auch wenn die "Schichtdicke" natürlich unendlich dünn ist. Dies rechtfertigt dann auch obige Bezeichnungen und Gleichungen für den zweidimensionalen Fall [3].

Betrachtet man nun eine inkompressible Strömung in zwei Dimensionen und vernachlässigt dabei alle Quellen und Senken, kann Gleichung (2.13) auf dem strukturierten Rechengitter aus Abbildung 12 folgendermaßen ausgewertet werden [3]:

$$\begin{aligned}
 (\rho\Phi_{t_1} - \rho\Phi_{t_0})_{KV} \cdot \Delta V - \int_{t_0}^{t_1} (Q_\Phi)_{KV} \Delta V dt = \\
 = \int_{t_0}^{t_1} \int_w (\Gamma \nabla \Phi - \rho \vec{u} \Phi) \cdot \vec{n}_w dA dt \\
 + \int_{t_0}^{t_1} \int_n (\Gamma \nabla \Phi - \rho \vec{u} \Phi) \cdot \vec{n}_n dA dt \\
 + \int_{t_0}^{t_1} \int_o (\Gamma \nabla \Phi - \rho \vec{u} \Phi) \cdot \vec{n}_o dA dt \\
 + \int_{t_0}^{t_1} \int_s (\Gamma \nabla \Phi - \rho \vec{u} \Phi) \cdot \vec{n}_s dA dt
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

wobei hier zusätzlich das Zeitintervall  $\Delta t = t_1 - t_0$  berücksichtigt wurde. Die Variable  $\Delta V$  deutet den Volumeninhalt des Kontrollvolumens an und  $(\dots)_{KV} \Delta V$  steht für eine günstige numerische Approximation des Volumenintegrals. Folgende vereinfachende Konventionen sind für das weitere Vorgehen nützlich [3] :

$$\begin{aligned}
 u = \vec{u} \cdot \vec{n}_o = -\vec{u} \cdot \vec{n}_w, \quad v = \vec{u} \cdot \vec{n}_n = -\vec{u} \cdot \vec{n}_s \\
 \nabla \Phi \cdot \vec{n}_o = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\nabla \Phi \cdot \vec{n}_w, \quad \nabla \Phi \cdot \vec{n}_n = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\nabla \Phi \cdot \vec{n}_s
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.14) und Gleichung (2.15) folgt abschließend unter Berücksichtigung der Orientierungen [3]:

$$\begin{aligned}
 (\rho \Phi_{t_1} - \rho \Phi_{t_0})_{KV} \cdot \Delta V - \int_{t_0}^{t_1} (Q_\Phi)_{KV} \Delta V dt = \\
 = - \int_{t_0}^{t_1} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \rho u \Phi \right)_w \cdot \Delta y dt \\
 + \int_{t_0}^{t_1} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \rho u \Phi \right)_n \cdot \Delta x dt \\
 + \int_{t_0}^{t_1} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \rho u \Phi \right)_o \cdot \Delta y dt \\
 - \int_{t_0}^{t_1} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \rho u \Phi \right)_s \cdot \Delta x dt
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Auch hier stehen die Ausdrücke  $(\dots)_{w/o} \cdot \Delta y$  bzw.  $(\dots)_{n/s} \cdot \Delta x$  für angemessene numerische Approximationen. Bei diesen handelt es sich um Flächenintegrale, welche mit numerischen Verfahren ausgewertet werden müssen (siehe Kapitel 2.7.1) [3].

### 2.4.3 Diskretisierung

Wie bereits angedeutet besteht der Sinn einer Diskretisierung darin, den kontinuierlichen Charakter der Strömung in eine diskontinuierliche (diskrete) Beschreibung überzuführen, um die Gleichungen für Digitalrechner lösbar zu machen. Die Vorgehensweise der Diskretisierung wird hier an einem eindimensionalen, inkompressiblen und stationären Problem ohne Quellen und Senken veranschaulicht. Auch wenn dies eine sehr starke Vereinfachung des Problems darstellt, bleibt das Grundprinzip erhalten [3] und [4].

Man betrachtet dazu ein Strömungsgebiet, sowie das zugehörige Rechengitter mit einer Zellweite  $\Delta x = \text{const.}$ , Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u} = u_x = \text{const.}$  und Flächenquerschnitt  $\Delta A = \text{const.}$  (siehe Abbildung 13) [3].

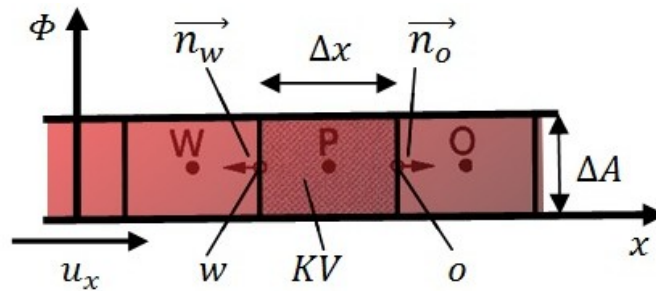


Abbildung 13: Diskretisierung eines eindimensionalen Problems

(Quelle: in Anlehnung an [3, S.64])

Durch eine numerische Integration der Flächenintegrale (siehe Kapitel 2.7.1), lässt sich unter Annahme obiger Bedingungen die Gleichung (2.16) in folgende Gestalt bringen:

$$\underbrace{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_o \cdot \Gamma \Delta A}_{\text{diffusiv}} - \underbrace{\rho u_x \Delta A \Phi_o}_{\text{konvektiv}} - \underbrace{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_w \cdot \Gamma \Delta A}_{\text{diffusiv}} + \underbrace{\rho u_x \Delta A \Phi_w}_{\text{konvektiv}} = 0 \quad (2.17)$$

Dabei stellen  $\Phi_o$  und  $\Phi_w$  bisher noch unbekannte Strömungsgrößen dar, welche in Kapitel 2.5 durch verschiedene numerische Interpolationsverfahren genähert werden. Die ebenfalls noch unbekannten Terme  $(d\Phi/dx)_{o/w}$  lassen sich mittels numerischer Differenzierungsverfahren approximieren, wobei dies nachfolgend in Kapitel 2.6 geschieht [3].

Wenn nun die Diskretisierung für jedes einzelne Kontrollvolumen im Strömungsgebiet durchgeführt wurde, lässt sich ein gekoppeltes Gleichungssystem erhalten, welches man iterativ (wiederholend) lösen kann. Dabei wird die Iteration so lange fortgesetzt, bis die Unterschiede der betrachteten Größen bei zwei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten unter einen zuvor festgelegten Grenzwert fallen [3].



## 2.5 Numerische Interpolationsverfahren

Um die konvektiven Terme aus Gleichung (2.17) zu diskretisieren, müssen die Größen  $\Phi_o$  und  $\Phi_w$  an den Seitenflächen  $o$  und  $w$  aus bereits bekannten Werten in den Stützstellen  $O, W$  und  $P$  (siehe Abbildung 13) interpoliert werden. Häufig eingesetzte Verfahren sind die UDS-Interpolation (Upwind Differencing Scheme) sowie die CDS-Interpolation (Central Differencing Scheme) und die SOU-Interpolation (Second Order Upwind) [3].

### 2.5.1 UDS-Interpolation

Bei der UDS-Interpolation werden die unbekannten Werte  $\Phi_o$  und  $\Phi_w$  durch jenen bekannten Wert ersetzt, welcher sich nächstgelegen stromauf im Zentralknoten befindet. Unter Beachtung von Abbildung 13 aus dem vorherigen Kapitel erhält man somit [3]:

$$\Phi_w^{UDS} = \Phi_W, \quad \Phi_o^{UDS} = \Phi_P \quad (2.18)$$

Durch die UDS-Interpolation ergibt sich ein Fehler  $\epsilon^{UDS}$ , welcher mittels Taylorentwicklung abgeschätzt werden kann. Es lässt sich zeigen, dass der Fehler  $\epsilon^{UDS}$  dem diffusiven Term in der prototypischen Modellgleichung (2.1) ähnelt, weshalb häufig von numerischer Diffusion gesprochen wird. Eine ausführliche Herleitung findet sich zum Beispiel in [3, S. 68].

Die UDS-Interpolation kann sich in komplexen Strömungen als stabilisierend erweisen, jedoch können größere Fehler auftreten, da dieser nur linear mit der Zellweite  $\Delta x$  abnimmt. Die UDS-Interpolation erfüllt die geforderte Transporteigenschaft [3].

Ein etwas allgemeinerer mathematischer Ansatz bezogen auf Abbildung 13 lautet [3]:

$$\Phi_w = \Phi_W + \frac{1}{2}\varphi(\Phi_P - \Phi_W), \quad \Phi_o = \Phi_P + \frac{1}{2}\varphi(\Phi_O - \Phi_P) \quad (2.19)$$

wobei  $\varphi$  die Flux-Limiter-Funktion darstellt, welche für die UDS-Interpolation einfach null gesetzt wird. Für die nachfolgende CDS-Interpolation entspricht  $\varphi = 1$  und für Verfahren höherer Ordnung existieren komplexere Zusammenhänge  $\varphi = \varphi(r)$ .

### 2.5.2 CDS-Interpolation

Bei der CDS-Interpolation werden die unbekannten Werte  $\phi_o$  und  $\phi_w$  im Gegensatz zur UDS-Interpolation linear durch die bekannten Werte in den Zentralknoten interpoliert. Berücksichtigt man die Notation aus Abbildung 13 folgt daraus [3]:

$$\phi_w^{CDS} = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}, \quad \phi_o^{CDS} = \frac{\phi_P + \phi_O}{2} \quad (2.20)$$

bzw.

$$\phi_w^{CDS} = \phi_W + \frac{\phi_P - \phi_W}{2}, \quad \phi_o^{CDS} = \phi_P + \frac{\phi_O - \phi_P}{2} \quad (2.21)$$

um dem etwas allgemeineren mathematischen Ansatz aus Gleichung (2.19) gerecht zu werden. Die CDS-Interpolation lässt sich analog zur UDS-Interpolation in eine Taylorreihe entwickeln. Dabei lässt sich feststellen, dass der Fehler  $\epsilon^{CDS}$  quadratisch mit der Zellweite  $\Delta x$  abnimmt. Grundsätzlich ist die CDS-Interpolation etwas genauer als die UDS-Interpolation, besitzt jedoch keine Transporteigenschaft [3].

### 2.5.3 SOU-Interpolation und Verfahren höherer Ordnung

Die SOU-Interpolation (Second Order Upwind) wird häufig auch als LUDS-Interpolation (Linear Upwind Differencing Scheme) bezeichnet und vereint die Vorteile der UDS- und CDS-Interpolation. Die Fehlerordnung entspricht jener der CDS-Interpolation, besitzt nun aber auch die wichtige Transporteigenschaft [3].

Neben der SOU-Interpolation gibt es noch Interpolationsverfahren höherer Ordnung mit wesentlich komplexeren Flux-Limiter-Funktionen. MUSCL, superbee, van Leer und minmod sind dabei nur einige wenige Beispiele [3].

Einen Überblick dieser Interpolationsverfahren mit zugehörigen Flux-Limiter-Funktionen bietet zum Beispiel [3, S. 68-71].

Eine ausführliche und etwas allgemeinere Beschreibung oben genannter Interpolationsverfahren, speziell mit Bezug zur CFD-Software ANSYS® FLUENT®, findet sich im Ansys Fluent Theory Guide [8, S. 648-654].

## 2.6 Numerische Differentiation

Um die diffusiven Terme  $(d\Phi/dx)_{o/w}$  aus Gleichung (2.17) zu diskretisieren, werden diese an den Seitenflächen mit Hilfe bekannter Werte in den Stützstellen approximiert. In vielen CFD-Modellen kommt dabei ein zentraler Differenzenquotient zum Einsatz [3].

### 2.6.1 CDS Differentiation

Bei dem Verfahren der CDS-Differentiation (zentrales Differenzenschema), werden Informationen zweier Zellmittelpunkte verwendet um die Ableitung an der Seitenfläche des Kontrollvolumens zu bestimmen. Diese ist dabei zentral zwischen den beiden Punkten lokalisiert. Erneut Bezug nehmend auf Abbildung 13 bedeutet dies formal [3]:

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_w = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\Delta x}, \quad \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_o = \frac{\Phi_O - \Phi_P}{\Delta x} \quad (2.22)$$

Bei vielen numerischen Interpolationsverfahren höherer Ordnung, wie auch bei der SOU-Interpolation, ist es nötig zusätzlich den Gradienten  $(\nabla\Phi)_P$  im Zentralknoten P des betrachteten Kontrollvolumens zu bestimmen. Dieser Gradient kann zum Beispiel mit Hilfe des Gaußschen Satzes approximiert werden. Ein weiteres häufig angewandtes Verfahren ist die Least-Square-Gradientenrekonstruktion, bei dieser der Gradient mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt wird [3].

Eine ausführliche Beschreibung oben genannter Verfahren zur numerischen Differentiation bzw. Gradientenbestimmung, speziell mit Bezug zur CFD-Software ANSYS® FLUENT®, lässt sich im Ansys Fluent Theory Guide [8, S. 658-662] finden.

## 2.7 Numerische Integration in Raum und Zeit

Um die Volumenintegrale und Flächenintegrale aus Gleichung (2.16) zu approximieren, sind geeignete numerische Integrationsverfahren bereitzustellen. Die Mittelpunktsregel stellt dabei eines dieser Verfahren dar. Um weiters auch allgemeine zeitabhängige Probleme lösen zu können, müssen auch Verfahren zur numerischen Integration in der Zeit besprochen werden. Hierbei spielt das explizite- und implizite Euler-Verfahren eine wesentliche Rolle [3] und [4].

### 2.7.1 Mittelpunktsregel

Man betrachtet hierzu in Analogie zu Gleichung (2.14) und (2.16) das Volumenintegral und Flächenintegral mit den Funktionen  $Q(\Phi)$  und  $F(\Phi)$  über das Kontrollvolumen KV bzw. über die Seitenflächen  $f = n, o, s, w$  und definiert [3]:

$$\int_{KV} Q(\Phi) dV := (Q(\Phi))_{KV} \Delta V \quad (2.23)$$

$$\int_f F(\Phi) dA := (F(\Phi))_f \Delta A \quad (2.24)$$

Mit Hilfe der Mittelpunktsregel wird nun das Volumenintegral ersetzt durch das Produkt von  $Q(\Phi_p)$  und  $\Delta V$ , wobei letztere Variable dem Volumeninhalt im KV entspricht. Die Vorgehensweise beim Flächenintegral erfolgt in analoger Weise und man erhält [3]:

$$(Q(\Phi))_{KV} \Delta V \rightarrow Q(\Phi_p) \Delta V \quad (2.25)$$

$$(F(\Phi))_f \Delta A \rightarrow F(\Phi_p) \Delta A \quad (2.26)$$

Vergleicht man nun Gleichung (2.17) mit Gleichung (2.16), lässt sich erkennen, dass dort diese Mittelpunktsregel als Approximation verwendet wurde. Der Punkt P stellt wie gewohnt den Mittelpunkt des betrachteten Kontrollvolumens dar. Neben der Mittelpunktsregel finden auch die Trapezregel und Simpsonregel manchmal Anwendung [3].

## 2.7.2 Explizites/Implizites Euler-Verfahren

Die Grundidee der numerischen Intergration in der Zeit lässt sich gut anhand einer inkompressiblen transienten Strömung erläutern. Mit Gleichung (2.1) erhält man [3]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\Gamma}{\rho} \nabla \Phi - \vec{u} \Phi \right) + \frac{Q_\Phi}{\rho} \quad (2.27)$$

In dieser Gleichung wird die Analogie zu einer gewöhnlichen, impliziten Differentialgleichung erster Ordnung sichtbar, wobei die implizite Funktion  $f(t, \Phi(t))$  der rechten Seite von Gleichung (2.27) gleicht [3]:

$$\frac{d\Phi}{dt} = f(t, \Phi(t)) \quad (2.28)$$

Integriert man nun Gleichung (2.28) über ein Zeitintervall  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  und berücksichtigt die übliche Kurzschreibweise  $\Phi(t_n) = \Phi^n$  bzw.  $\Phi(t_{n+1}) = \Phi^{n+1}$  ergibt sich [3]:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \Phi(t)) dt \quad (2.29)$$

Ist nun der Startwert  $\Phi(t=0) = \Phi(t_0) = \Phi^0$  bekannt, kann dadurch eine Lösung gewonnen werden. Da die Variable  $\Phi$  jedoch neben der Zeit  $t$  auch vom Ort abhängt, muss im Allgemeinen ein sogenanntes Raum-Zeit Gitter betrachtet werden. In CFD-Simulationen kommen neben Mehrebenen-Verfahren häufig sogenannte Zweiebenen-Verfahren zum Einsatz. Die Werte für die neue Zeitebene  $\Phi^{n+1}$  werden dabei durch lineare Interpolation der Funktionswerte  $f(t, \Phi(t))$  unter Berücksichtigung der Zeitebenen  $t_n$  und  $t_{n+1}$  folgendermaßen approximiert [3]:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + [\alpha \cdot f(t_n, \Phi^n) + (1 - \alpha) \cdot f(t_{n+1}, \Phi^{n+1})] \Delta t \quad (2.30)$$

Wird der Parameter  $\alpha = 1$  gesetzt, erhält man das explizite Euler-Verfahren [3]:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + [f(t_n, \Phi^n)] \Delta t \quad (2.31)$$

Das implizite Euler-Verfahren erhält man, wenn der Parameter  $\alpha = 0$  gesetzt wird [3]:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + [f(t_{n+1}, \Phi^{n+1})]\Delta t \quad (2.32)$$

Man muss hier beachten, dass die gesuchte Größe  $\Phi^{n+1}$  von sich selbst abhängig ist und man daher ein iteratives Vorgehen benötigt. Das explizite Euler-Verfahren hingegen hat den Vorteil ohne Iteration auszukommen, jedoch muss man hier gewisse Stabilitätskriterien beachten, welche zur sogenannten CFL-Bedingung für die Zeitschrittweite führen. Aus der CFL-Bedingung lässt sich anschließend die Courant-Zahl gewinnen [3]:

$$Cou = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \quad (2.33)$$

Eine Herleitung der Courant-Zahl  $Cou$  und der dazu nötigen CFL-Bedingung findet sich zum Beispiel in [3, S. 76-77].

Das Crank-Nicolson-Verfahren, welches ebenfalls ein implizites Verfahren darstellt, erhält man wenn der Parameter  $\alpha = 1/2$  festgelegt wird [3]:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{1}{2}[f(t_n, \Phi^n) + f(t_{n+1}, \Phi^{n+1})]\Delta t \quad (2.34)$$

In der Praxis kommt häufig auch das sogenannte Runge-Kutta-Verfahren zum Einsatz, welches z.B. der Quelle [4, S. 120-130] entnommen werden kann.

Ist die stationäre bzw. transiente Modellgleichung mit Hilfe oben genannter Verfahren (Kapitel 2.5, 2.6, 2.7) vollständig diskretisiert worden, ergibt dies für jedes Kontrollvolumen eine Differenzengleichung, welche mit geeigneten Lösungsverfahren berechnet werden können. Einen Überblick dieser Lösungsverfahren für Differenzengleichungen inklusive häufig verwendeter Iterationsverfahren (Jacobi-Verfahren, Gauß-Seidel-Verfahren, konjugierte Gradienten Verfahren) lässt sich z.B. in [3, S. 75-84] finden.

## 2.8 Turbulenzmodelle

In Kapitel 1.8 wurde bereits die turbulente Strömung, sowie das sogenannte Schließungsproblem besprochen. Um dieses Schließungsproblem in den Griff zu bekommen, werden Turbulenzmodelle eingesetzt. Häufig wird in diesem Zusammenhang auch von einer RANS-Simulation (Reynolds-Averaged-Navier-Stokes-Simulation) gesprochen, welche sich für industrielle Zwecke mittlerweile als Standard erwiesen hat [3].

Turbulenzmodelle lassen sich einteilen in Reynolds-Spannungs-Modelle und Wirbelviskositäts-Modelle, wobei letztere in Ein-Gleichungsmodelle und Zwei-Gleichungsmodelle gesplittet werden können. In der Literatur gibt es unzählige Turbulenzmodelle, welche je nach Anwendungsfall besser oder schlechter geeignet sind. Größere Verbreitung in der CFD haben Zwei-Gleichungsmodelle wie das Standard-k- $\epsilon$ -Modell sowie das Menter-SST-k- $\omega$ -Modell erlangt, weshalb diese anschließend kurz besprochen werden [3].

### 2.8.1 Standard-k- $\epsilon$ -Turbulenzmodell

Zweigleichungsmodelle werden immer dann angewandt, wenn der Transport von Turbulenz eine entscheidende Rolle spielt. Die Zweigleichungsmodelle gehören in die Kategorie der Transportmodelle, wobei die Diffusion und Konvektion bereits bekannte Transportmechanismen darstellen. Bei dem Standard-k- $\epsilon$ -Modell sind die turbulente kinetische Energie  $k$  sowie die Dissipationsrate  $\epsilon$  entscheidende Parameter. Anschaulich ist die kinetische Energie  $k$  ein Maß für die Intensität einer Turbulenz und ist im Gegensatz zur Dissipationsrate  $\epsilon$  eher an großskalige Wirbel gebunden. Eine ausführliche Herleitung der komplexen Gleichungen inklusive empirisch ermittelter Parameter für das Standard-k- $\epsilon$ -Modell findet sich zum Beispiel in [3, S. 138-143] oder in [4, S. 176-180].

Das Standard-k- $\epsilon$ -Modell ist das mit Abstand am häufigsten genutzte Turbulenzmodell und für turbulente Strömungen mit hohen Reynolds-Zahlen geeignet. Besonders für vollturbulente Rohrströmungen liefert dieses Turbulenzmodell gute Ergebnisse. Auch in Bezug auf Simulationen freier Außenströmungen, ist dieses Turbulenzmodell bevorzugt anzuwenden. Die Nachteile sind jedoch, dass in der Nähe fester Wände eine schlechtere Modellierung der Wirklichkeit gegeben ist und komplexe Strömungen mit vielen Staupunkten nur qualitativ minderwertige Resultate liefern [3].

### 2.8.2 Mentner-SST-k- $\omega$ -Modell

Neben dem Standard-k- $\epsilon$ -Modell existiert das Wilcox-k- $\omega$ -Modell, welches sich in den letzten Jahren immer größerer Beliebtheit erfreut hat. Dieses Turbulenzmodell berücksichtigt, neben der kinetischen Energie  $k$ , die charakteristische Frequenz  $\omega$  der energietragenden Wirbel. Das Wilcox-k- $\omega$ -Modell ist zwar in der freien Außenströmung deutlich schlechter als das Standard-k- $\epsilon$ -Modell, erzielt jedoch in Wandnähe bessere Resultate. Deshalb kam es zur Entwicklung des Mentner-Shear-Stress-Transport-Modells oder kurz Mentner-SST-k- $\omega$ -Modell. Dieses Modell vereint nun die Stärken des Standard-k- $\epsilon$ -Modells und die des Wilcox-k- $\omega$ -Modells [3] und [4].

Eine Darstellung der Gleichungen obiger Turbulenzmodelle mit den zugehörigen Modellkonstanten, ist beispielweise in [3, S. 145-146] zu finden. Weitere Klassifikationen der Turbulenzmodelle sowie zusätzliche und genauere Informationen bezüglich turbulenter Strömungen lassen sich zum Beispiel der Quelle [4, S. 161-190] entnehmen.



### 3 Numerische Strömungssimulation

In diesem Kapitel findet die numerische Berechnung des Geschwindigkeitsprofils eines Projektils in einer Druckluftapparatur statt. Im ersten Unterkapitel wird die eingesetzte CFD-Software *ANSYS® FLUENT®* näher besprochen. Anschließend wird Bezug auf die Konstruktion des 2D Berechnungsmodells genommen, in jener wichtige Parameter wie zum Beispiel Projektildurchmesser, Laufdurchmesser, Projektilmasse sowie der Überdruck im Druckbehälter definiert werden. In Kapitel 3.3 wird der Import und die Vernetzung des zuvor erstellten 2D-Modells näher erläutert um anschließend in Kapitel 3.4 die getätigten Setup-Einstellungen vorzustellen. Abschließend findet die Berechnung und Auswertung statt, welche später in Kapitel 5 den praktischen Werten aus Kapitel 4 gegenüber gestellt wird. Als Hauptquellen für die numerische Strömungssimulation mit *ANSYS® FLUENT®* dienen mir [8] und [9].

#### 3.1 ANSYS® FLUENT®

In der sogenannten ANSYS Workbench (Version 18.2) werden alle möglichen Analysensysteme in einer sogenannten "Toolbox" übersichtlich dargestellt (siehe Abbildung 14).

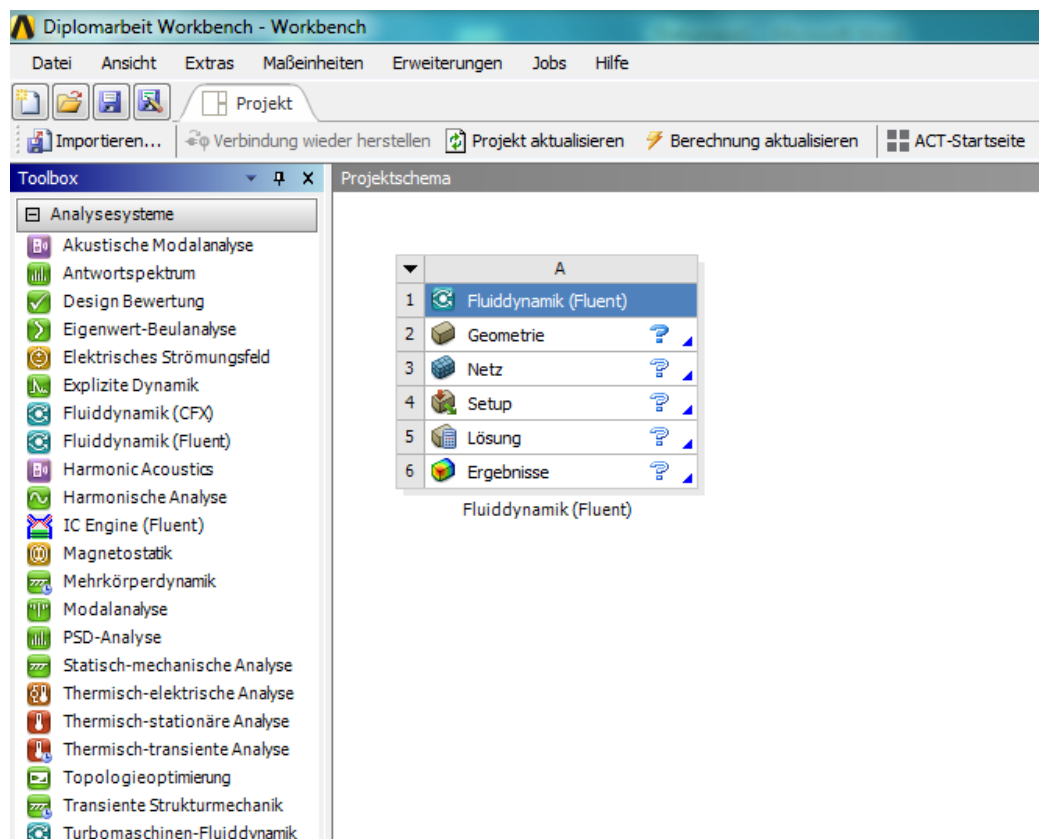


Abbildung 14: Screenshot der ANSYS Workbench 18.2

Diese Analysesysteme können sowohl einzeln als auch in Kombination verwendet bzw. untereinander verknüpft werden. Für diese Diplomarbeit wurde lediglich das einzelne Analysesystem *Fluiddynamik (Fluent)* bzw. *ANSYS® FLUENT®* verwendet. Dieses beinhaltet die Unterpunkte Geometrie, Netz, Setup, Lösung und Ergebnisse, welche in den nachfolgenden Kapiteln näher erläutert werden.

*ANSYS® FLUENT®* [10] ist eine hochmoderne CFD-Software, welche sich die Finite-Volumen-Methode (siehe Kapitel 2.4) zu Nutze macht. Mit dieser Software lassen sich sowohl laminare als auch turbulente Strömungen inkompressibler und kompressibler Fluide berechnen. Ebenfalls ist es möglich, instationäre Strömungen auf festen oder bewegten Gittern zu behandeln. Weiterführend können auch Mehrphasenströmungen, chemische Reaktionen und Verbrennungsprozesse simuliert werden. Auch für die Wissenschaft der nichtnewton'schen Fluide (Rheologie) stehen Optionen zur Verfügung. Die Navigation findet in der Version 18.2 hauptsächlich über eine grafische Benutzeroberfläche statt und erleichtert es dem User ungemein sich zurechtzufinden [3].

*ANSYS® FLUENT®* stellt sowohl mit dem 1162 Seiten starken *ANSYS FLUENT Tutorial Guide 15.0*, als auch mit dem 826 Seiten umfassenden *ANSYS FLUENT Theory Guide 14.0* eine umfassende Dokumentation der CFD-Software bereit, weshalb in dieser Diplomarbeit häufig auf diese beiden Quellen [8] und [9] verwiesen wurde.

### 3.2 Beschreibung und Konstruktion des 2D Berechnungsmodells

Zu Beginn sei zu erwähnen, dass sowohl die numerische Strömungssimulation in Kapitel 3 als auch der praktische Teil in Kapitel 4 gewissermaßen zeitgleich entstanden sind. Wie so oft im Maschinenbau, wurden zuerst viele grobe Handskizzen entworfen und Konzepte an den Tag gelegt, welche später wieder für nichtig erklärt wurden.

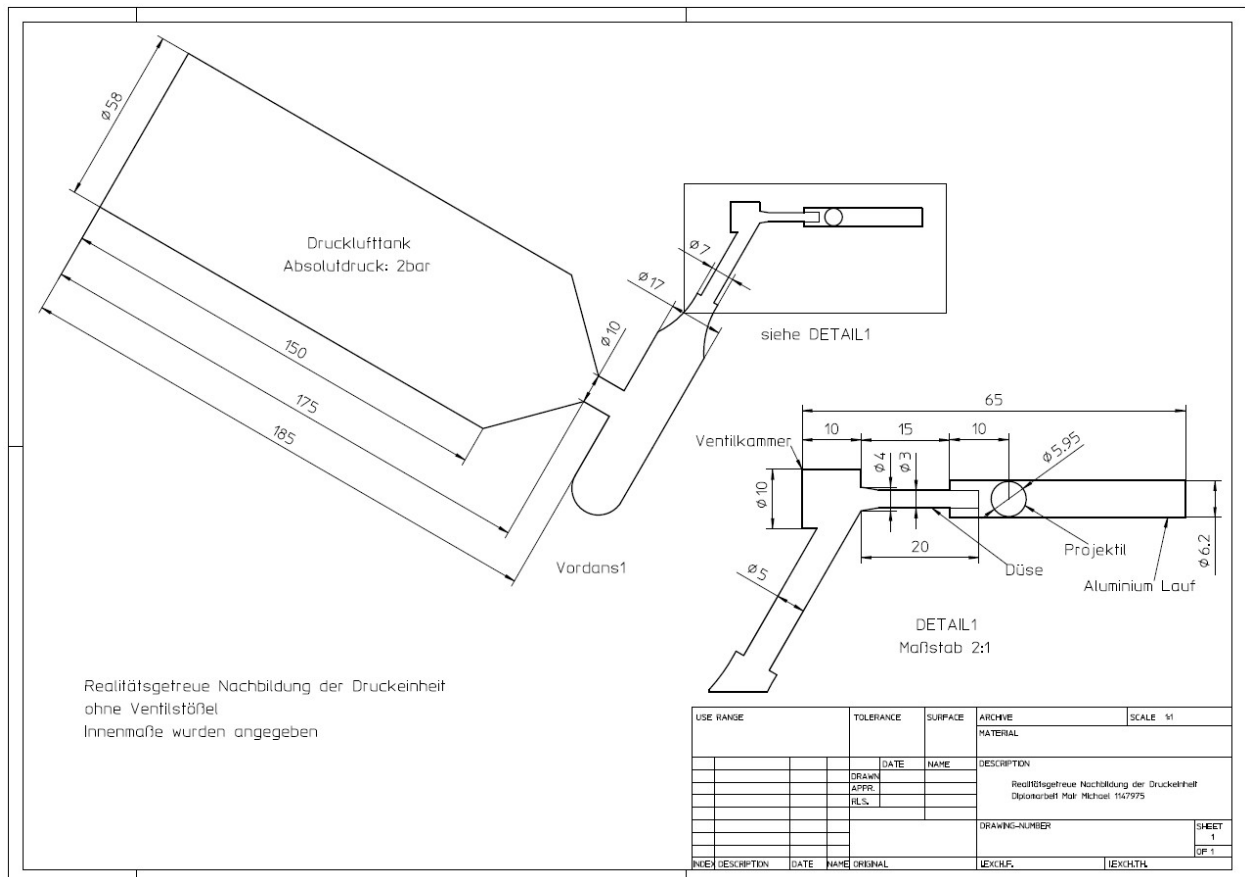
Bei folgenden Entwürfen spielten sowohl fertigungstechnische, als auch kostentechnische Aspekte eine Rolle. Auch die Zeit im Allgemeinen musste immer im Hinterkopf behalten werden. Es wurde jedoch stets versucht, die optimale Balance zwischen den oben genannten Faktoren herzustellen und ein akzeptables Ergebnis zu erreichen.

Um ein zweidimensionales Berechnungsmodell erstellen zu können, mussten vorab wichtige Parameter festgelegt bzw. abgeklärt werden. Diese Parameter lauten:

- Projektildurchmesser
- Projektilmasse
- Material und Oberflächenbeschaffenheit des Projektils
- Laufdurchmesser
- Lauflänge
- Material und Oberflächenbeschaffenheit des Laufs
- Überdruck (absolut) des Druckbehälters
- Düsengeometrie und deren Oberflächenbeschaffenheit

Das kugelförmige Projektil der Marke G&G Armament hat einen Projektildurchmesser von  $5,95 \pm 0,01\text{mm}$  und eine Projektilmasse von  $0,28 \pm 0,01\text{g}$ . Die Oberflächenbeschaffenheit des Projektils ist feinpoliert. Das Material, aus dem dieses Projektil hergestellt wurde, lautet Polylactide (PLA) und wird auch aufgrund der biologischen Abbaubarkeit immer häufiger in der Airsoftszene verwendet. Der originale Aluminiumlauf hat einen Innendurchmesser von etwa  $6,20 \pm 0,05\text{mm}$  und wurde vorerst mit einer maximalen Länge von 40mm festgelegt. Die Oberfläche im Inneren des Laufs ist hochglanzpoliert, ebenso wie jene der konvergenten Düse. Der Absolutdruck des Druckbehälters wurde mit  $2,00 \pm 0,25\text{bar}$  vordefiniert.

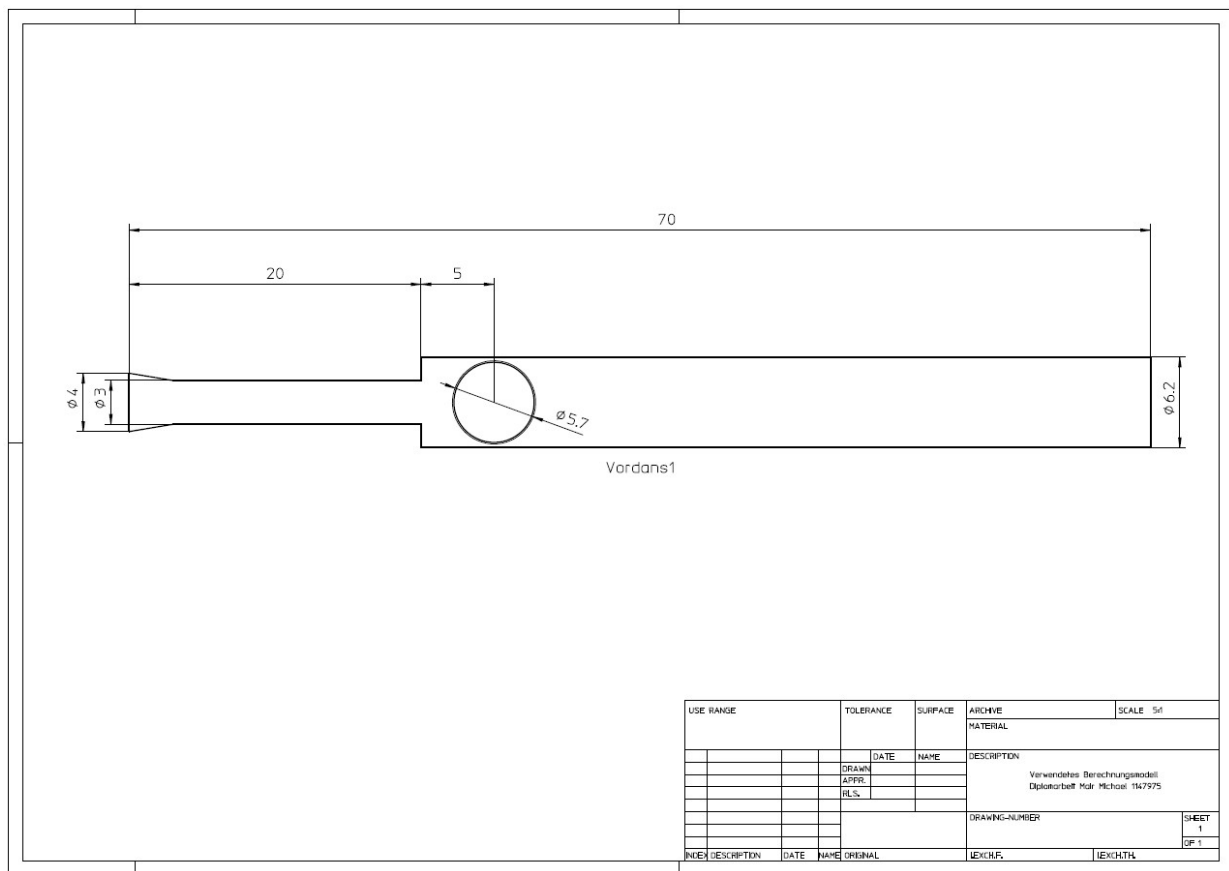
Anhand vorhin genannter Parameter wurde zuerst eine Zeichnung des Realitätsmodells erstellt. Dieses Realitätsmodell stellt in guter Näherung die Wirklichkeit der in Kapitel 4 konstruierten und später verwirklichten Drucklufteinheit dar (siehe Abbildung 15).



**Abbildung 15: Realitätsgetreue Nachbildung der Druckeinheit**

Dabei bleibt festzuhalten, dass sowohl in allen Zeichnungen als auch in den späteren Berechnungen die oben angegebenen Toleranzen nicht mehr weiter berücksichtigt wurden. Diese Annahme liegt darin begründet, dass der Fehler derart komplexer Berechnungen, Fertigungen und Messungen viel größer ist, als dass Abweichungen im Hundertstel-Bereich eine ausschlaggebende Rolle spielen würden.

Aus der realitätsgetreuen Nachbildung der Druckeinheit in Abbildung 15 konnte nun das zweidimensionale Berechnungsmodell abgeleitet werden (siehe Abbildung 16).



**Abbildung 16: Berechnungsmodell auf Basis des Realitätsmodells**

Wie der Name bereits verrät, handelt es sich hierbei lediglich um ein Modell, welches die Wirklichkeit möglichst realitätsgetreu widerspiegeln soll. Daher ist es wichtig, die während der Modellbildung getroffenen Annahmen und Vereinfachungen stets kritisch zu hinterfragen. Beispielsweise wurde im Berechnungsmodell der tatsächliche Projektildurchmesser von  $5,95\text{ mm}$  auf  $5,70\text{ mm}$  reduziert, um eine akzeptable Balance zwischen Gitterfeinheit und Berechnungsdauer zu gewährleisten. Ebenfalls wurde auf den Einfluss der Gravitation verzichtet und angenommen, dass die Ventilöffnung instantan erfolgt, was sich später in Kapitel 4.3 als nachweislich falsch herausstellen wird. Auch die Annahme eines konstanten Drucks im Drucklufttank spiegelt keineswegs die Realität wider, konnte aber in Kapitel 4.3 als Fehlerquelle nahezu ausgeschlossen werden. Die Lauflänge wurde derart gewählt, sodass die Anzahl der Gitterelemente und Gitterknoten in einem vernünftigen Rahmen blieben und die Einflüsse im Mündungsbereich trotzdem keine allzu großen Auswirkungen auf die Berechnung hatten. Ebenfalls wurde im Berechnungsmodell von glatten Oberflächen ausgegangen, was aufgrund aufwendiger fertigungstechnischer Verfahren in guter Näherung realisiert werden konnte.

### 3.3 2D Import und Vernetzung des 2D-Modells

Nachdem das 2D-Modell mit der CAD-Software *Creo® Elements/ Direct® Modeling* konstruiert worden war, konnte die Geometrie in *ANSYS® FLUENT®* importiert werden (siehe Abbildung 18). Um einen reibungsfreien Geometrieimport sicherzustellen, war besondere Vorsicht bei der Wahl des Dateiformats geboten, wobei sich Dateien im STEP-Format als zuverlässig erwiesen haben.

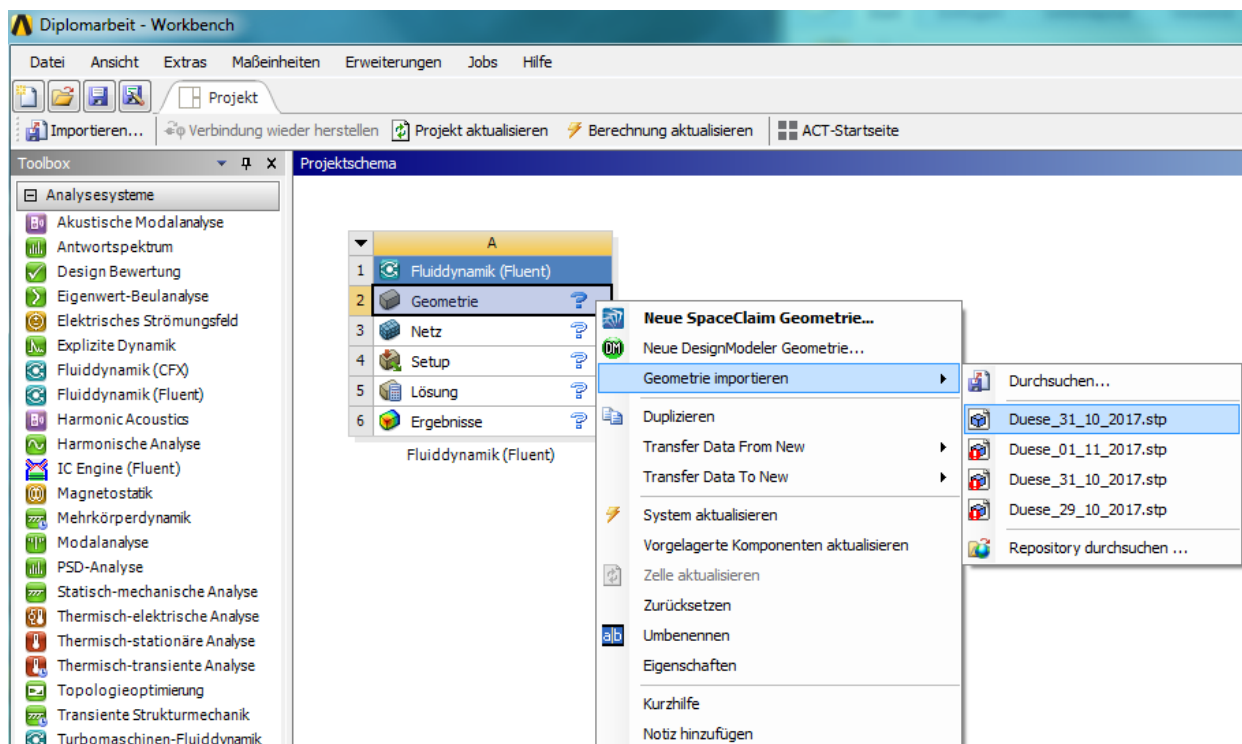
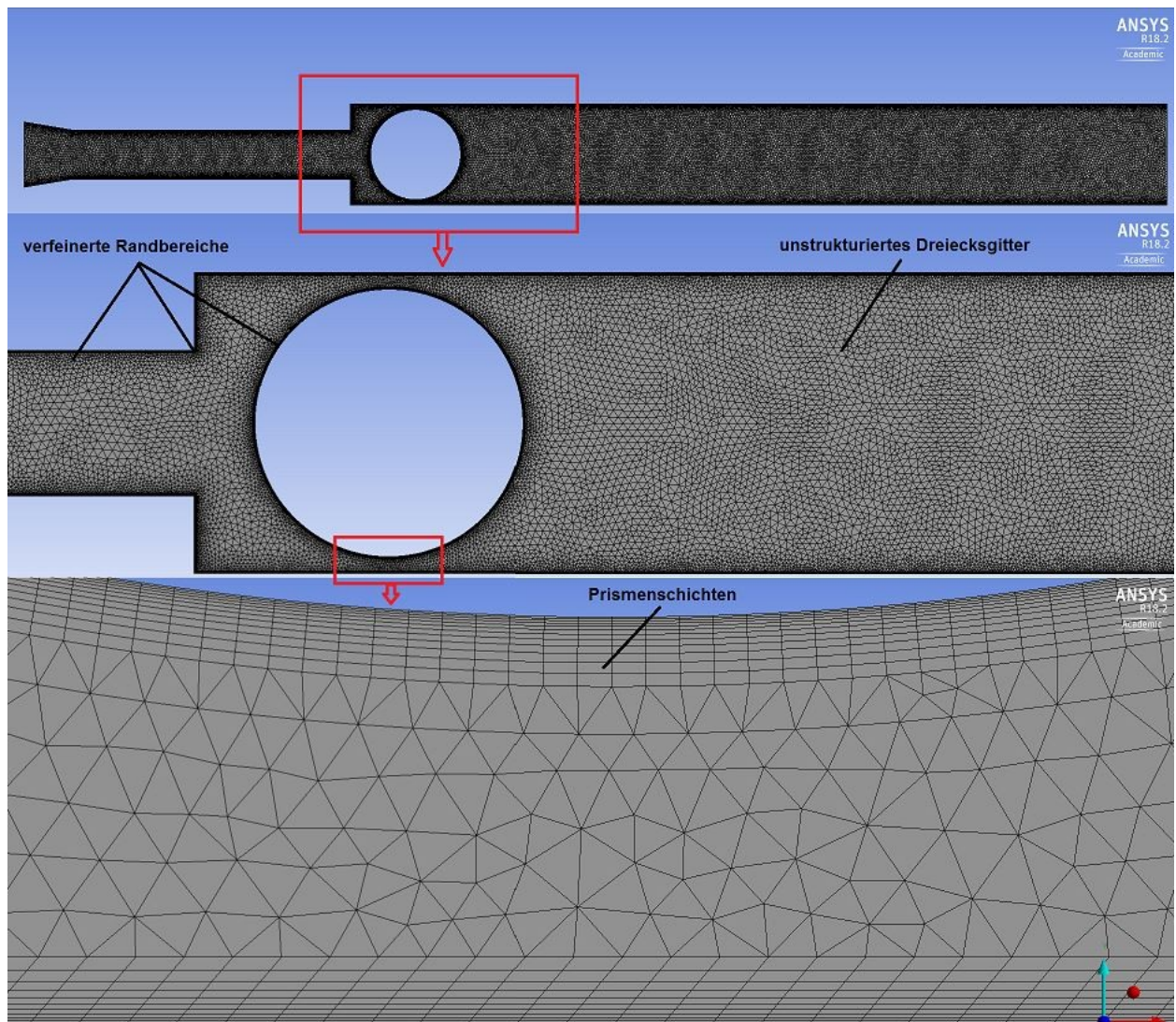


Abbildung 17: Screenshot ANSYS Workbench 18.2 Geometrie Import

Nach erfolgreichem 2D Import konnte mit Hilfe des Netziems die Vernetzung des 2D-Modells gestartet werden. Aufgrund der vorhandenen "komplexen" Geometrie, sowie der später verwendeten Dynamic-Mesh-Option, fiel die Wahl auf ein hybrides Gitter (siehe Kapitel 2.3). Der Hauptbereich bzw. die "Domain" wurde dabei durch unstrukturierte Dreieckselemente modelliert, wohingegen die Randbereiche mit sogenannten Prismenschichten bzw. "Inflation Layers" ausgestattet wurden. Eine sinnvolle Größe der Gitterelemente, sowie die später benötigte Zeitschrittgröße, konnte grob mit Gleichung (2.33) abgeschätzt werden. Grundsätzlich wurde jedoch unter Beachtung der Gütekriterien aus Kapitel 2.2.4, sowie nach Hinweis der Quelle [11, S. 12], welche einen dimensionslosen Wandabstand  $y^+ \approx 1$  für das verwendete Mentner-SST-k- $\omega$ -Turbulenzmodell fordert, gehandelt.

Dies führte zu einer sehr feinen Auflösung der viskosen Unterschicht in den Randbereichen durch 12 Lagen "Inflation Layers" mit einer Dicke der ersten Schicht von 0,0000015m und einem maximalen Wachstumsfaktor von 1,2. Eine maximale Elementgröße des Dreiecksgitters von 0,00015 führte zu 79652 Knoten und 105360 Elementen (siehe Abbildung 18) und erfüllte sowohl die Anforderung an die Gütekriterien aus Abschnitt 2.2.4 als auch an die Stabilität der Berechnung.



**Abbildung 18: Vernetztes Berechnungsmodell inklusive Inflation Layers**

Eine Variation der maximalen Elementgröße stellte sich als sinnvoll heraus und zeigte mir, dass eine Verringerung der Elementgröße von 0,00015 auf 0,0001 keinen nennenswerten Einfluss auf das Geschwindigkeitsprofil des Projektils hatte. Die Berechnungsdauer hingegen vervielfachte sich und stand nun in keiner Relation mehr zum getätigten Rechenaufwand und erhaltenem Ergebnis.



Eine Vergrößerung der Elementgröße von 0,00015 auf 0,0002 bzw. 0,0003 führte zwar zu kürzeren Berechnungszeiten, ergab jedoch immer größer werdende Konvergenzprobleme und eine Verschlechterung der Gütekriterien, bei leicht abweichenden Geschwindigkeitsprofilen. Dass die Wahl der Gittergröße sehr wohl eine Rolle spielen kann, lässt sich in der Quelle [12] nachvollziehen. Grundsätzlich wäre es immer sinnvoll eine ausführliche Gitterstudie durchzuführen. Da dies jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde und sowohl die Gütekriterien als auch Konvergenzkriterien eingehalten wurden und zusätzlich eine experimentelle Überprüfung stattfindet, wurde mit gutem Gewissen darauf verzichtet.

Wie bereits in Abbildung 18 und Abbildung 19 zu erkennen ist, wurden die kritischen Bereiche und Ecken etwas feiner modelliert, was auch für eine stabile Berechnung vonnöten war. Um das Modell für das zukünftige Setup vorzubereiten, mussten diesem noch Bezeichnungen wie "domain", "inner domain", "inlet", "outlet", "bullet" und "wall" zugewiesen werden. Diese einzelnen Komponenten sind in Abbildung 19 ersichtlich.

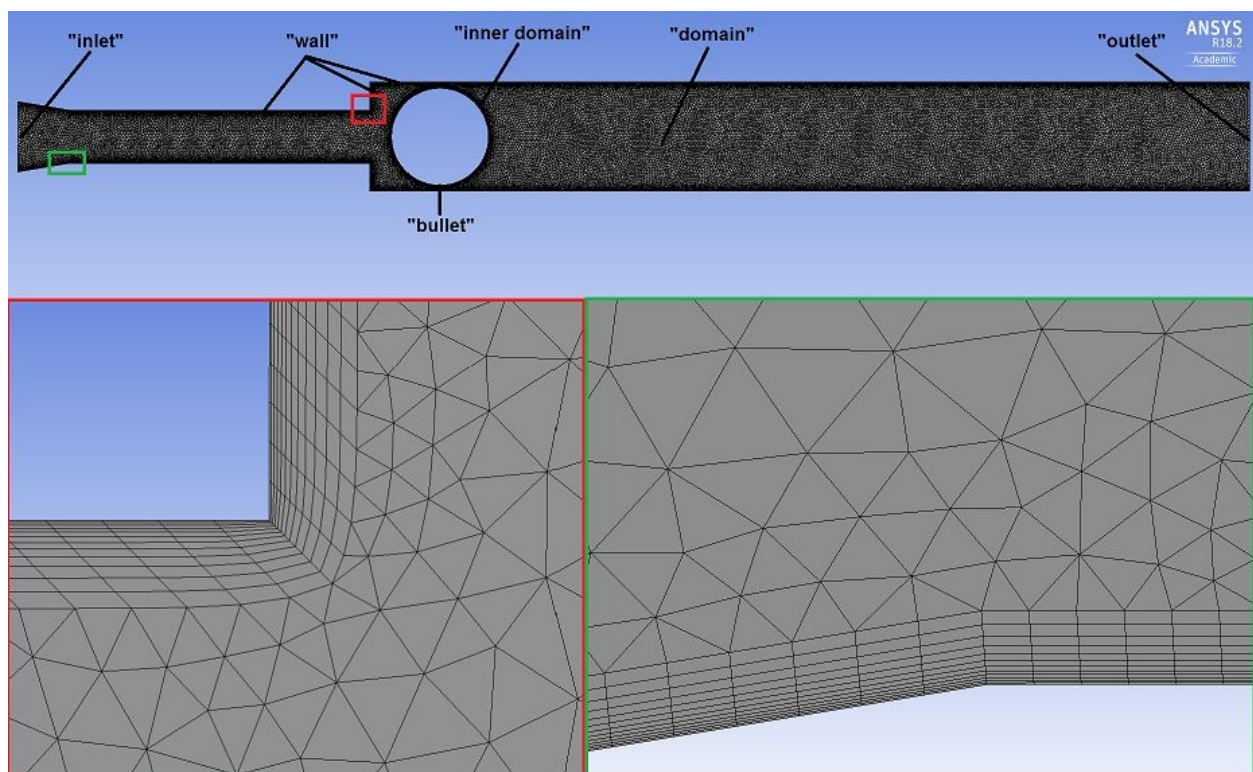


Abbildung 19: Komponentendefinition für das Setup



### 3.4 Setup-Einstellungen

Nachdem die Geometrie importiert wurde und die Vernetzung des Berechnungsmodells stattgefunden hat, konnten die Setup Einstellungen erfolgen. Die Benutzeroberfläche ist übersichtlich aufgebaut und hierarchisch gegliedert (siehe Abbildung 20).

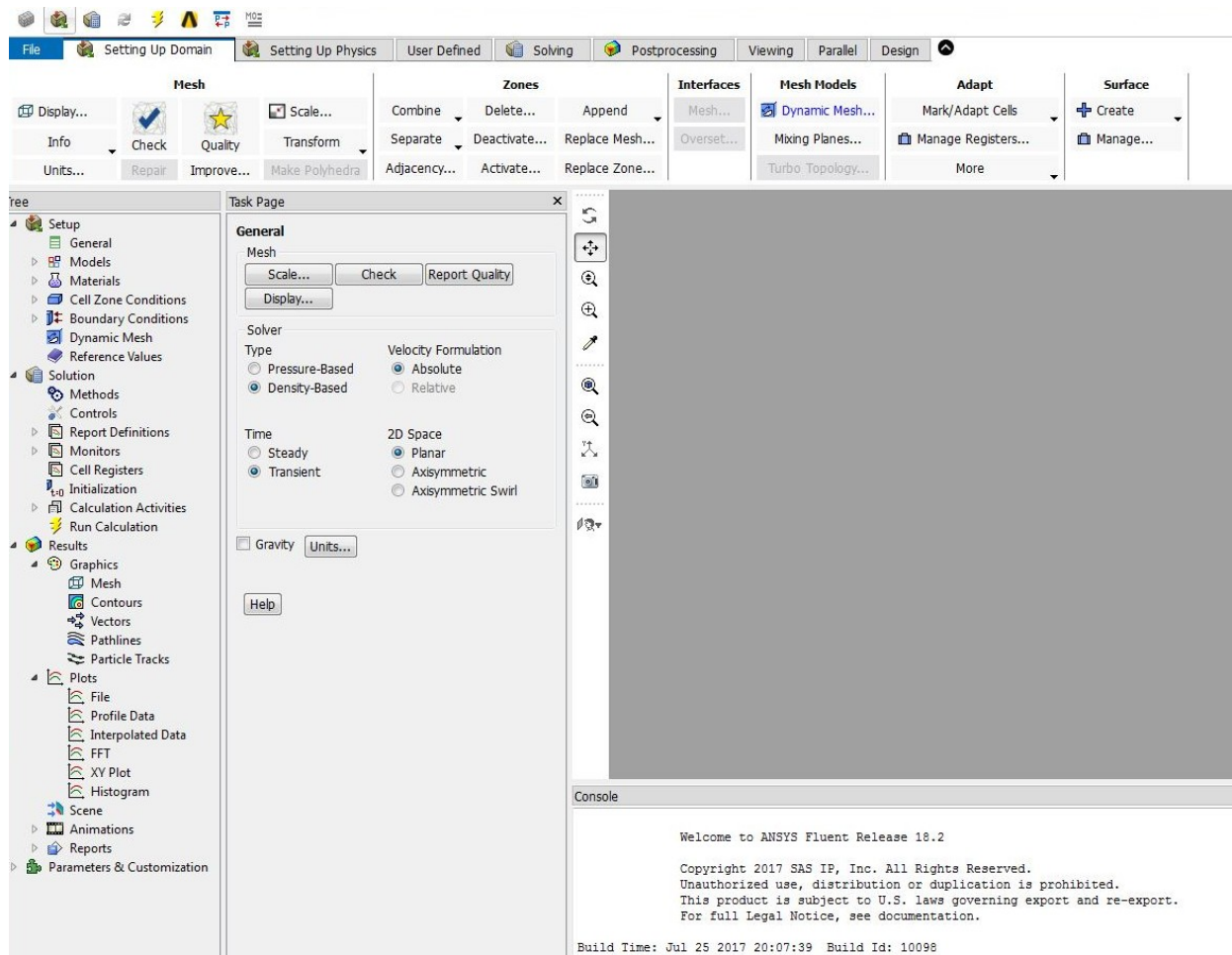


Abbildung 20: Screenshot der Setup Benutzeroberfläche

Das Setup gliedert sich in die Unterpunkte: "General", "Models", "Materials", "Cell Zone Conditions", "Boundary Conditions", "Dynamic Mesh" und "Reference Values".

Im ersten Unterpunkt "General" bestand die Möglichkeit sich für den "Density-Based-Solver" oder den "Pressure-Based-Solver" zu entscheiden. Dabei sei zu erwähnen, dass druckbasierte Algorithmen hauptsächlich bei inkompressiblen Strömungen Anwendung finden, während dichtebasierte Algorithmen nahezu ausschließlich verwendet werden um kompressible Strömungen zu berechnen. Einen Überblick der unterschiedlichen Lösungsalgorithmen findet man zum Beispiel in [3, S. 109-113] oder [8].

Bei dem Vorgang der Schussabgabe strömt die komprimierte Luft mit sehr hoher Geschwindigkeit aus dem Druckbehälter durch die konvergente Düse und beschleunigt das Projektil. Dieser transiente Vorgang kann nun nicht mehr als inkompressibel betrachtet werden, weswegen der "Density-Based-Solver" zum Einsatz kommt. Wie bereits zuvor erwähnt, wurde die Gravitation in dieser Berechnung vernachlässigt.

Im zweiten Unterpunkt "Models" wurde das Energiegleichungsitem aktiv gesetzt und das Mentner-SST-k- $\omega$ -Turbulenzmodell ausgewählt (siehe Abbildung 21).

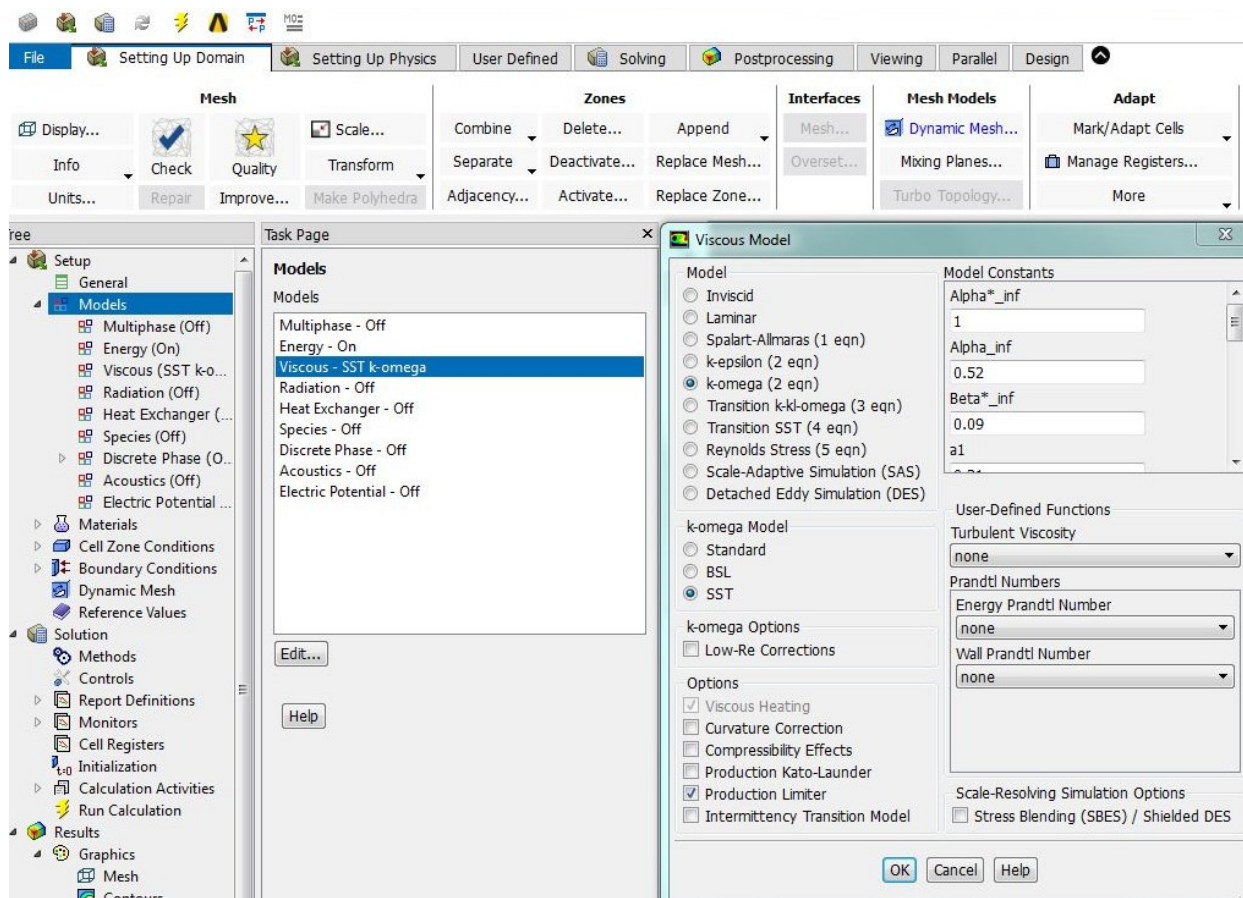


Abbildung 21: Screenshot der "Models" Benutzeroberfläche

Im dritten Unterpunkt "Materials" bestand die Möglichkeit die "domain" als Fluid festzulegen. Mit den Kenntnissen aus Kapitel 1.1.3, in der die Luft in guter Näherung als ideales Gas beschrieben wurde, konnte somit auch dieses Item abgeschlossen werden.

Im vierten Unterpunkt "Cell Zone Conditions" wurde lediglich nochmals kontrolliert, ob der Materialname "air" für die "domain" auch tatsächlich gesetzt wurde.

Im fünften Unterpunkt "Boundary Conditions" wurden die Randbedingungen festgelegt. Der Komponente "inlet" wurde die Typenbezeichnung "pressure inlet" zugewiesen, wobei der Überdruck mit  $10^5$  Pascal definiert wurde. Aufgrund einer Arbeitsumgebung von 101325 Pascal bzw. 1013,25mbar führte dies zu dem geforderten Absolutdruck von 201325 Pascal bzw. 2,01325 bar. Die Turbulenzintensität wurde bei standardmäßig 5% belassen, was laut [11, S. 18] für Fälle ohne genauere Informationen zulässig ist.

Die Komponente "outlet" wurde mit der Typenbezeichnung "pressure outlet" versehen (siehe Abbildung 22), während die Werte so gewählt wurden, dass ein Ausströmen unter Umgebungsdruck von 1013,25mbar erfolgt. Ansonsten wurden analog zum obigen Fall die von ANSYS® FLUENT® vorgeschlagenen Standardeinstellungen übernommen.

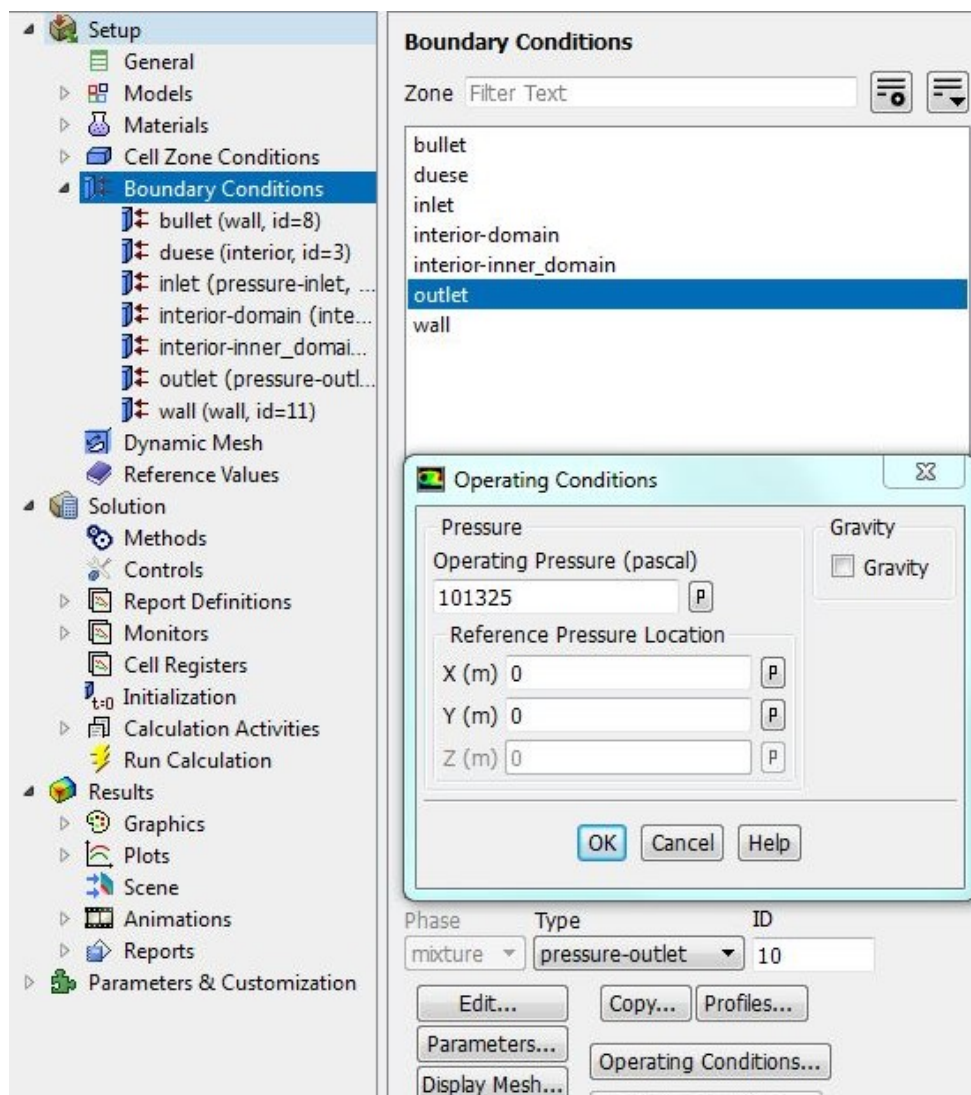


Abbildung 22: Screenshot der möglichen Auswahl der Randbedingungen

Die Oberflächen der "wall" und "bullet" wurden mit dem "standard roughness model" ausgestattet, wobei jeweils die Typenbezeichnung "wall" ausgewählt wurde.



Im vorletzten Unterpunkt "Dynamic Mesh" wurden jene Konfigurationen vorgenommen, welche die Simulation der Projektilbewegung relativ zum Lauf ermöglichen. Der theoretische Hintergrund der dafür nötigen bewegten Rechengitter kann zum Beispiel im ANSYS FLUENT Theory Guide 14.0 [8, S. 67-72] nachgeschlagen werden. Ein von ANSYS® FLUENT® zur Verfügung gestelltes Tutorial, bei dem weitere Informationen zur Thematik "Dynamic Mesh" bereitgestellt werden, findet sich in [9, S. 647-686].

Wie in Abbildung 23 zu sehen ist, setzt sich der Unterpunkt "Dynamic Mesh" aus weiteren Unterpunkten zusammen. Für diese Diplomarbeit wurden die Items "Smoothing", "Layering", "Remeshing" und "Six DOF" aktiv gesetzt. Eine ausführliche Beschreibung der jeweiligen Items findet sich in der zugehörigen "Hilfeleiste" der Software [10].

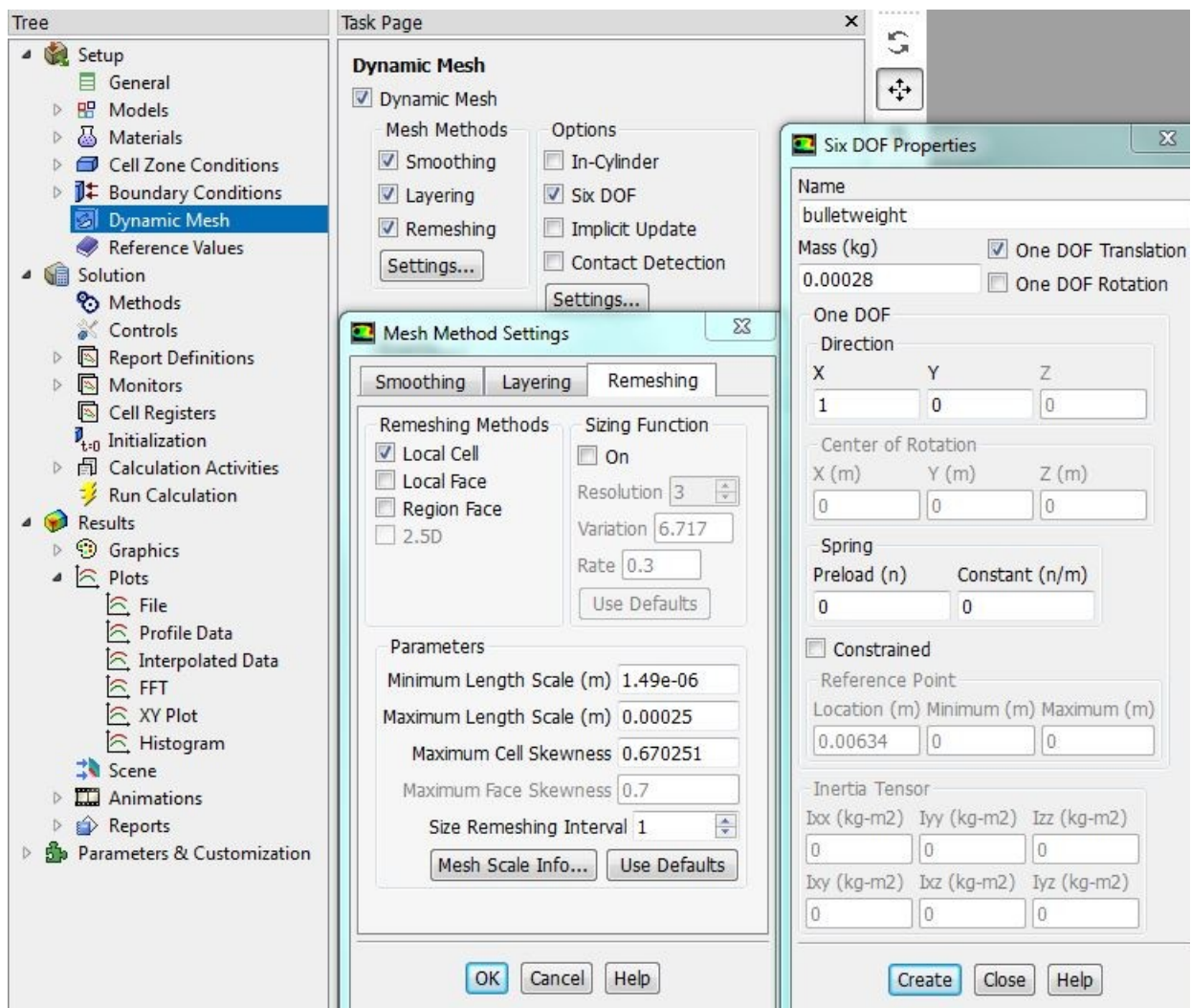


Abbildung 23: Screenshot der "Dynamic Mesh" Benutzeroberfläche

Wird das Item "Smoothing" aktiviert, bewegen sich zwar die Knoten des Gitters, die Anzahl der Knoten und deren Verbindungen untereinander bleiben jedoch existent. Zur Auswahl standen die Unteroptionen "Spring-Based Smoothing", "Diffusion-Based Smoothing" und "Linearly Elastic Solid Based Smoothing".

Bei der Unteroption "Spring-Based Smoothing" werden die Verbindungen der Knoten als eine Art Netzwerk aus Federn betrachtet, welche dem Hookeschen Gesetz gehorchen. Für viele Fälle stellt diese Option einen guten Standard dar. Eine etwas höherwertige Alternative, welche zwar einen höheren Rechenaufwand erfordert, dafür aber für bessere Gitterqualitäten und mehr Stabilität während der Berechnung sorgt, ist die "Diffusion-Based Smoothing Methode", weshalb diese auch verwendet wurde. Im Allgemeinen können translatorische Bewegungen besser verarbeitet werden als rotatorische Bewegungen. Eine theoretische Beschreibung der jeweiligen Items findet sich wiederum in der zugehörigen "Hilfeleiste" der Software [10].

Für die Randbereiche, in denen sich die Prismenschichten befinden, wurde zusätzlich die Option "Dynamic Layering" aktiviert. Werden die Zellen in der Randschicht gedehnt, passiert dies nur bis zu einem gewissen Ausmaß bevor gegengesteuert wird. Die Unteroption "height-based" sorgt dabei für eine "ideale" Schicht konstanter Höhe. Nähere Informationen finden sich in der zugehörigen "Hilfeleiste" der Software [10].

Im Laufe der Zeit können manche Zellen sehr stark deformiert werden und somit das "scewness" Kriterium verletzen. Dies führt meist zu Stabilitätsproblemen bis hin zum Abbruch der Berechnung. Um dies zu verhindern, existiert die Option "Remeshing", bei der die betroffenen Zellen nach dem Überschreiten gewisser Grenzwerte neu generiert werden. Weitere Informationen finden sich wieder in der "Hilfeleiste" der Software [10].

Der "six degree of freedom" Solver bzw. die Option "Six DOF" wird verwendet, um die translatorische Beschleunigung des Projektils, hervorgerufen durch ein Ungleichgewicht der Kräfte aufgrund des Druckunterschieds, zu berechnen. Dabei wurden sowohl die Projektilmasse als auch die Bewegungsrichtung definiert, um schlussendlich die "Dynamic Mesh Zones" anzugeben. Hier wurde die domain als "Deforming" festgelegt und die Komponente "bullet" und "inner domain" als "Rigid Body" definiert [8].

### 3.5 Berechnung und Auswertung

Um die komplexen Berechnungen in einem akzeptablen Zeitrahmen durchzuführen, wurde ein Rechner (siehe Abbildung 24) mit folgenden Systemkomponenten verwendet:

- Gigabyte GA-970A-UD3P Mainboard Sockel AM3+
- HyperX Savage HX316C9SRK2 / 16 Arbeitsspeicher 16GB (1600Mhz, CL9)
- Gigabyte R7 260X 2048MB GDDR5
- AMD FX 8320 Octa-Core Prozessor  
(3,5Ghz, Socket AM3+, 16MB Cache, 125 Watt) "overclocked" auf 8x4,0Ghz
- Western Digital 4TB externe Festplatte USB3.0 WDBWLG0040HBK-EESN
- Be quiet! BK013 Shadow Rock 2 CPU-Kühler



Abbildung 24: Foto des verwendeten Rechners

Nachdem die Setup-Einstellungen in Abschnitt 3.4 abgeschlossen wurden, konnte man sich dem Item "Solution" zuwenden, welches die wichtigen Unterpunkte "Methods", "Controls", "Initialization", "Calculation Activities" und "Run Calculation" beinhaltet.

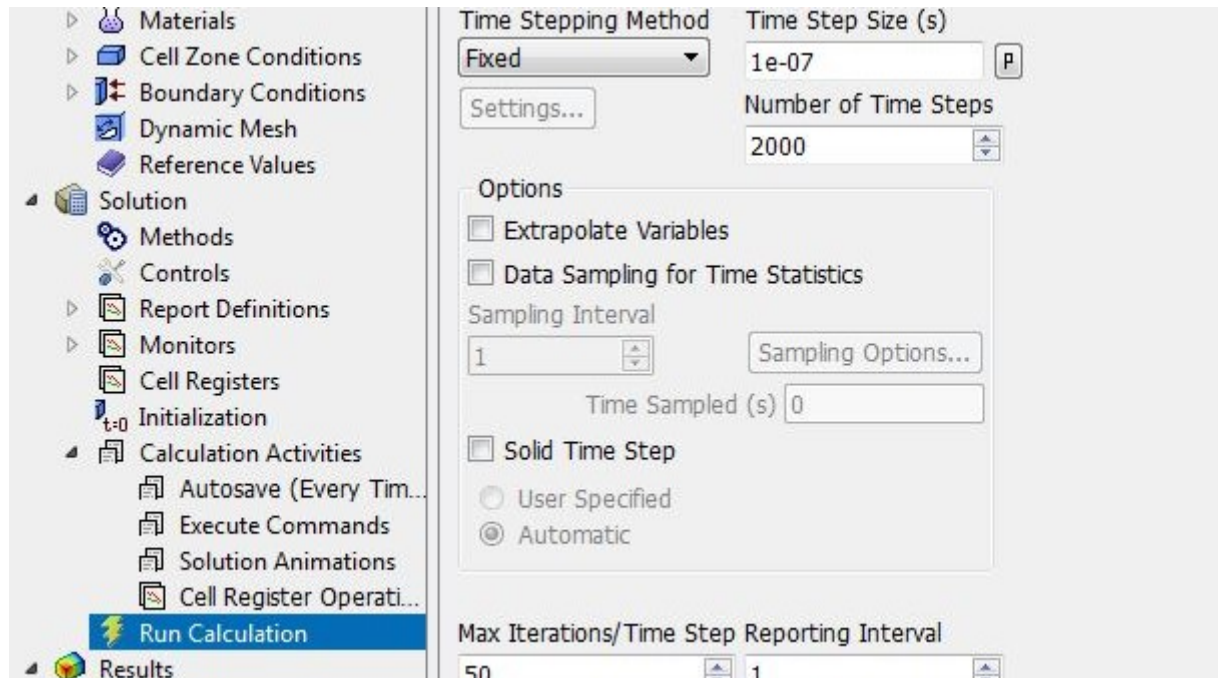


Abbildung 25: Screenshot der "Solution" Benutzeroberfläche

In dem Unterpunkt "Methods" wurde eine implizite Formulierung gewählt, ebenso wie das Verfahren der Least-Square-Gradientenrekonstruktion. Alle weiteren Items wurden mit der SOU-Interpolation (Second Order Upwind) versehen [8] und [9].

Die Unterpunkte "Controls" und "Initialization" wurden unverändert mit den von ANSYS vorgeschlagenen Standardeinstellungen bzw. Standardwerten übernommen [9].

In dem Unterpunkt "Calculation Activities" wurde lediglich der Speicherort, das Dateiformat, sowie die Zeitintervalle der Speicherungen angegeben [9].

Im letzten Unterpunkt "Run Calculation" (siehe Abbildung 25) wurde schlussendlich die Berechnung gestartet. Davor wurden 2000 "Time Steps" mit einer "Time Step Size" von  $0,0000001\text{s}$  festgelegt. Die Zeitschrittgröße wurde zu Beginn grob mit Gleichung (2.33) abgeschätzt und letztlich so gewählt, dass die Residuen innerhalb eines "Time Steps" um mindestens vier Größenordnungen abgenommen haben. Die standardmäßig eingestellten absoluten Konvergenzbedingungen für transiente Probleme wurden von  $10^{-3}$  auf  $10^{-4}$  verfeinert, um aussagekräftigere Ergebnisse zu erhalten [8] und [9].



Die Berechnung wurde für einen maximalen Projektilweg von 0 bis  $1,4 \cdot D_{\text{Projektil}}$  bzw. 0 bis 8mm durchgeführt. Die dafür nötige Berechnungsdauer lag bei etwa 20 Stunden. Als die maximale "Flow Time", welche jene Zeit darstellt, in der das Projektil die 8mm Strecke zurückgelegt hat, konnte 0,00017s (1700 Time Steps) ermittelt werden.

In Abbildung 26 ist das Weg-Geschwindigkeits-Profil des Projektils zu sehen. Wie erwartet, erhöht sich die Projektilgeschwindigkeit anfänglich sehr stark und flacht mit zurückgelegtem Projektilweg ab. Dies ist mitunter auch eine Erklärung dafür, warum Revolver mit sehr kurzen Läufen trotzdem hohe  $V_0$  Werte erreichen. Ab einer gewissen Lauflänge würde sich die Geschwindigkeit des Projektils kaum mehr erhöhen.

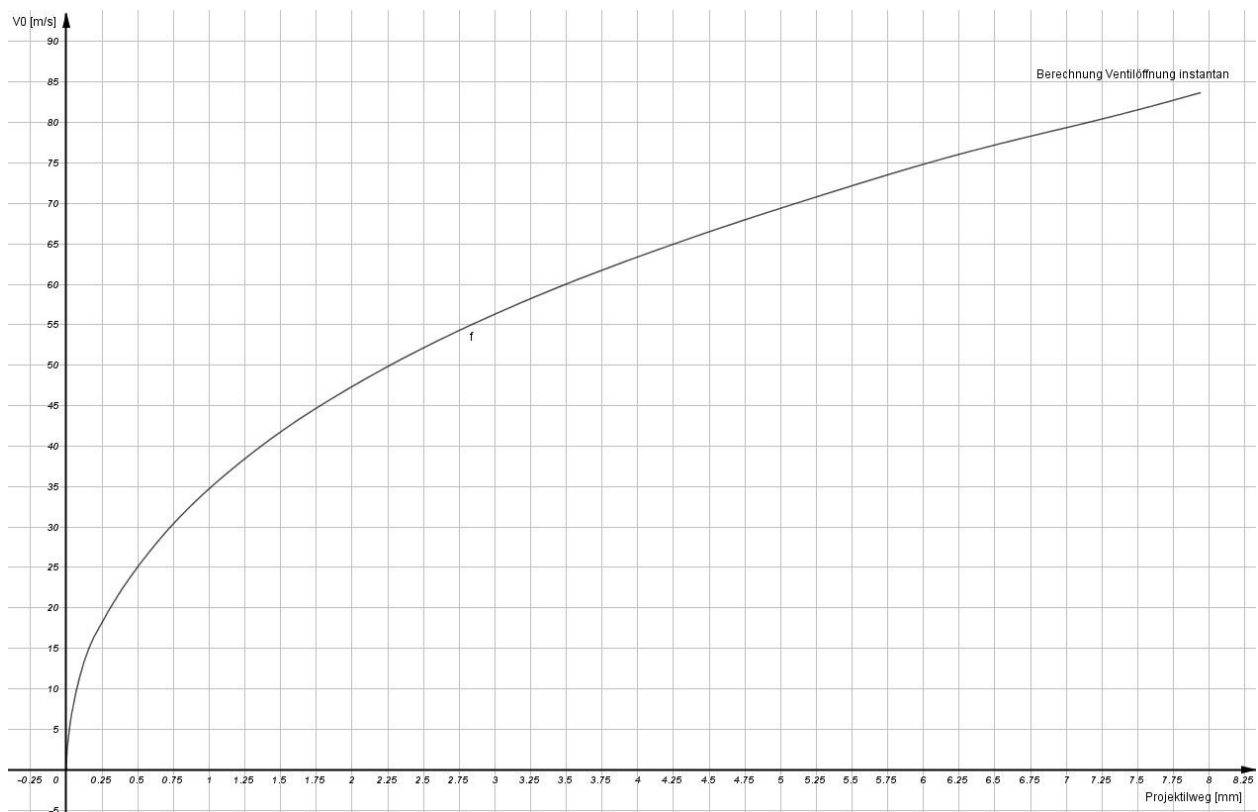


Abbildung 26: Weg-Geschwindigkeits-Profil eines 0,28g Projektils ( $p_{\text{abs}}=2\text{bar}$ )

In [12, S. 12-13] wurde für einen sehr einfachen Fall, bei dem ein Tischtennisball in einem Rohr ohne Luftwiderstand und ohne Düse beschleunigt wird, eine Gleichung aufgestellt, die auf ein ähnliches konvergentes Verhalten hindeutet. Die maximale Geschwindigkeit wurde dort mit ca. 288m/s berechnet. Dabei wurde jedoch auch darauf hingewiesen, dass die Dichte als konstant betrachtet wurde und bei hohen Geschwindigkeiten fehlerhafte Ergebnisse zu erwarten seien. Auch wenn Abbildung 26 plausibel wirkt, erscheint eine  $V_0=83,68\text{m/s}$  für 8mm Projektilweg etwas hoch. Das Ergebnis wird vorerst akzeptiert und in Kapitel 5 mit praktischen Werten aus Kapitel 4 verglichen.



Im nächsten Schritt wurde das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm des Projektils ausgewertet. Im einfachsten Fall, würde man aufgrund des konstanten Eingangsdrucks eine konstante Beschleunigung erwarten. Diese würde sich dann als lineare Funktion im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm widerspiegeln.

Betrachtet man Abbildung 27, so ist dieser lineare Charakter zumindest im Ansatz zu erkennen. Die Düse, der Luftwiderstand und viele weitere Faktoren lassen aber keine ideale lineare Funktion zustande kommen. Das Projektil erreicht laut Berechnung innerhalb von 0,00017s eine  $V_0$  von 83,68m/s. Eine Aussage darüber, ob dies plausibel ist, kann nur sehr schwer getroffen werden. Bedenkt man aber, dass sich ein Autoairbag in wenigen Millisekunden öffnet, so erscheint dieser Zeitbereich zumindest plausibel.

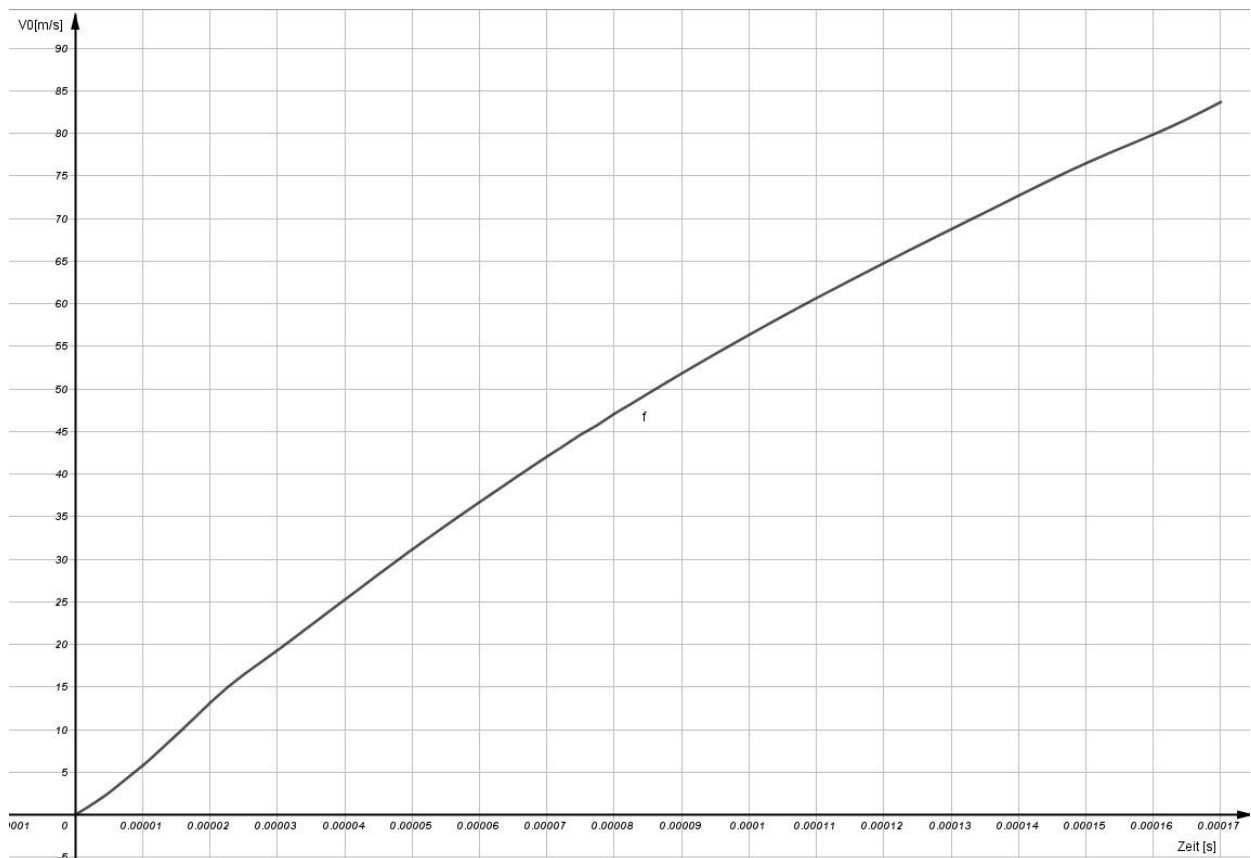


Abbildung 27: Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm eines 0,28g Projektils ( $p_{abs}=2bar$ )

Abschließend wurde das Zeit-Weg-Diagramm des Projektils ausgewertet. Würde man von einer einfachen konstanten Beschleunigung ausgehen, so wäre das Resultat ein quadratischer Anstieg der Funktion.

In Abbildung 28 ist das Zeit-Weg-Diagramm des Projektils zu erkennen. Da bereits in Abbildung 27 einen linearer Charakter der Beschleunigung erkennbar war, lässt sich nun ein quadratisches Naturell feststellen. Das Projektil durchquert laut Berechnung die 8mm im Laufinneren innerhalb von 0,00017s. Auch dies scheint plausibel zu sein. Eine ausführliche Analyse der Ergebnisse und möglichen Fehlerquellen bzw. ein Vergleich zwischen der Theorie und Praxis findet nachfolgend in Kapitel 5 statt.

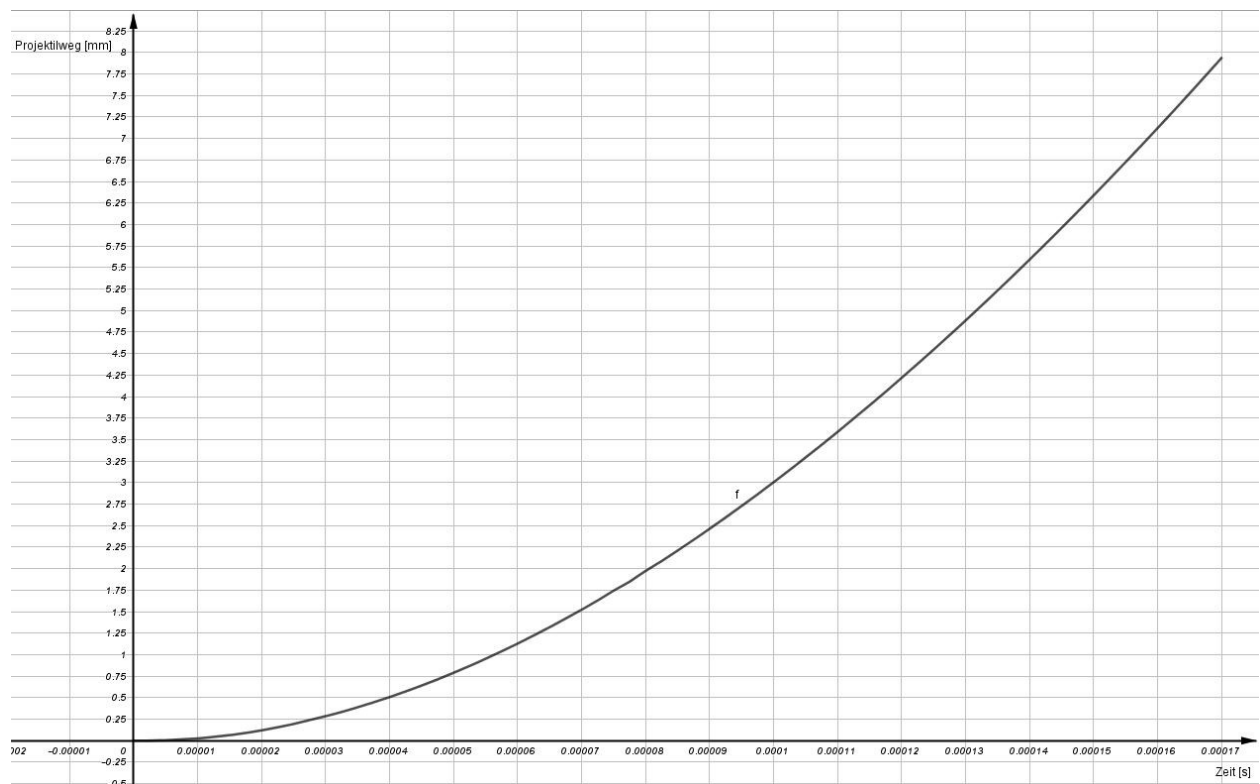


Abbildung 28: Zeit-Weg-Diagramm eines 0,28g Projektils ( $p_{\text{abs}}=2\text{bar}$ )

In Abbildung 29 und Abbildung 30 werden die aus der Simulation erhaltenen Geschwindigkeitsverteilungen des Luftstroms im Inneren des Laufs für verschiedene Zeitpunkte präsentiert. Dabei ist zu erkennen, dass sich, wie bei einem "Carnot-Diffusor" üblich, in den Ecken starke Turbulenzen ausbilden. Ebenfalls wird sichtbar, dass sich die Strömungsgeschwindigkeit im Bereich zwischen Projektil und Lauf stark erhöht. Zusätzlich ist zu erkennen, dass die Düse für eine Geschwindigkeitszunahme sorgt. Die Werte der Geschwindigkeiten erscheinen ebenso plausibel.

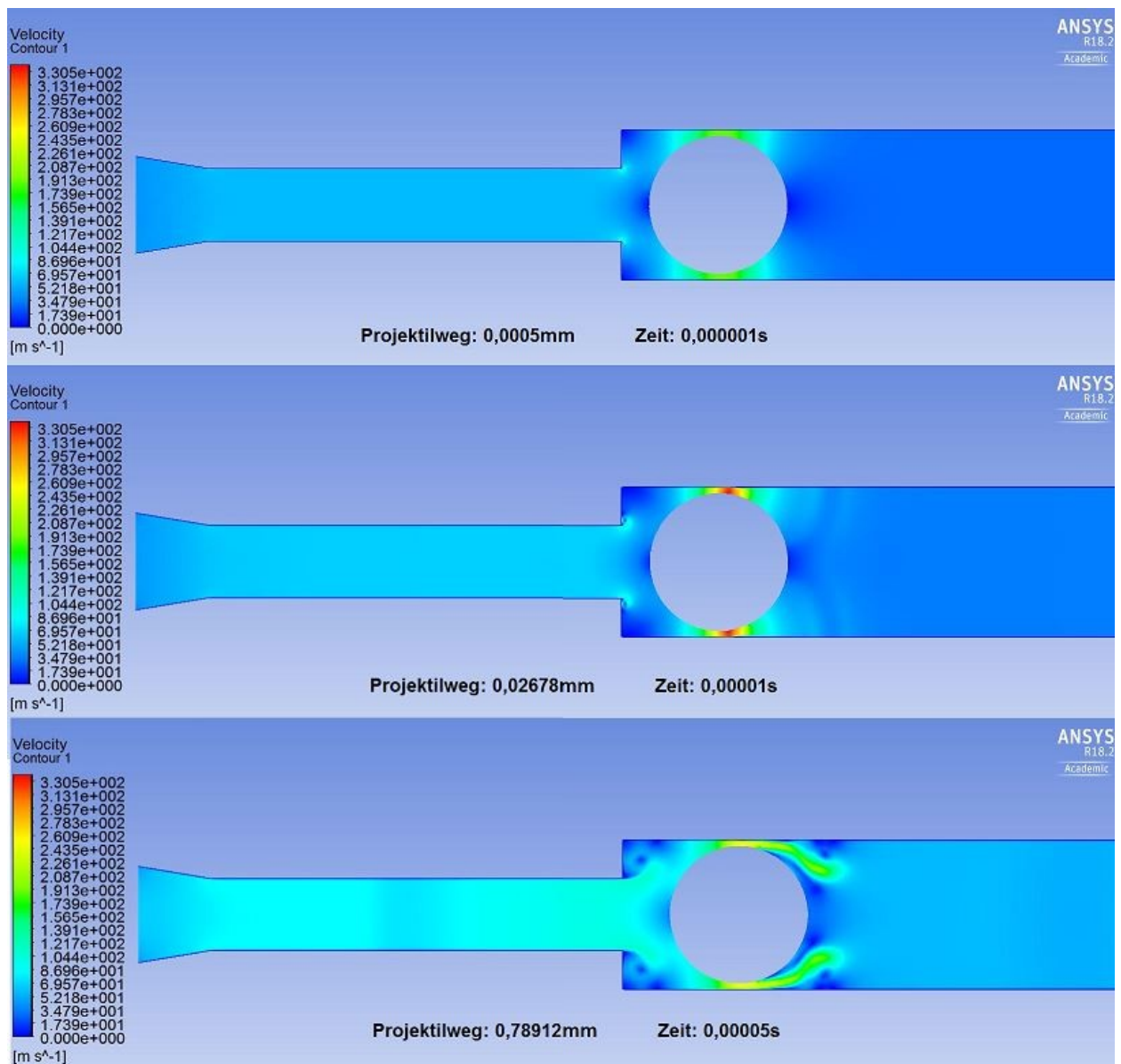


Abbildung 29: Simulationsergebnis der Geschwindigkeitsverteilung des Luftstroms 1

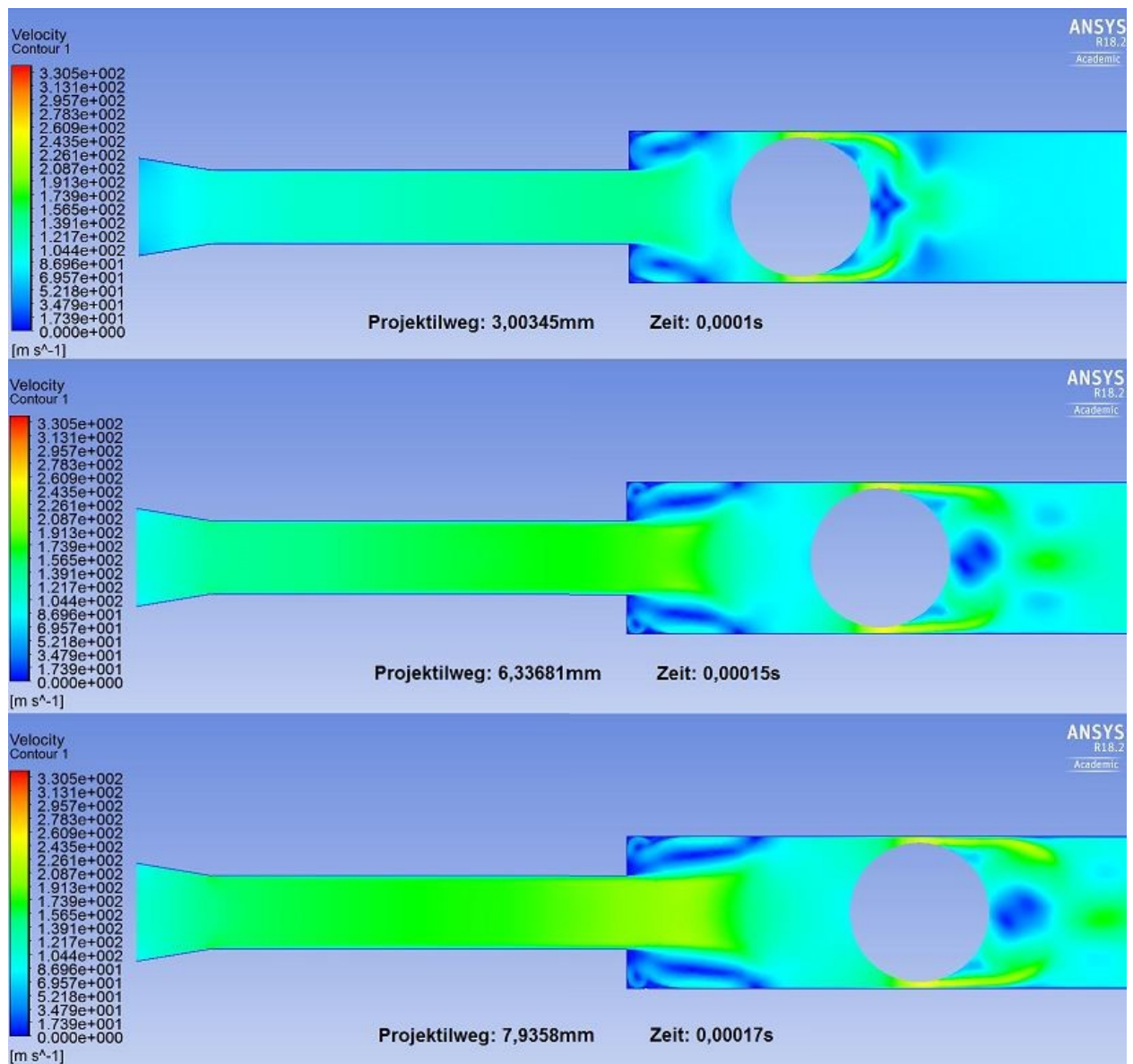


Abbildung 30: Simulationsergebnis der Geschwindigkeitsverteilung des Luftstroms 2

In Abbildung 31 und Abbildung 32 werden die aus der Simulation erhaltenen Druckverteilungen im Inneren des Laufs für verschiedene Zeitpunkte präsentiert.

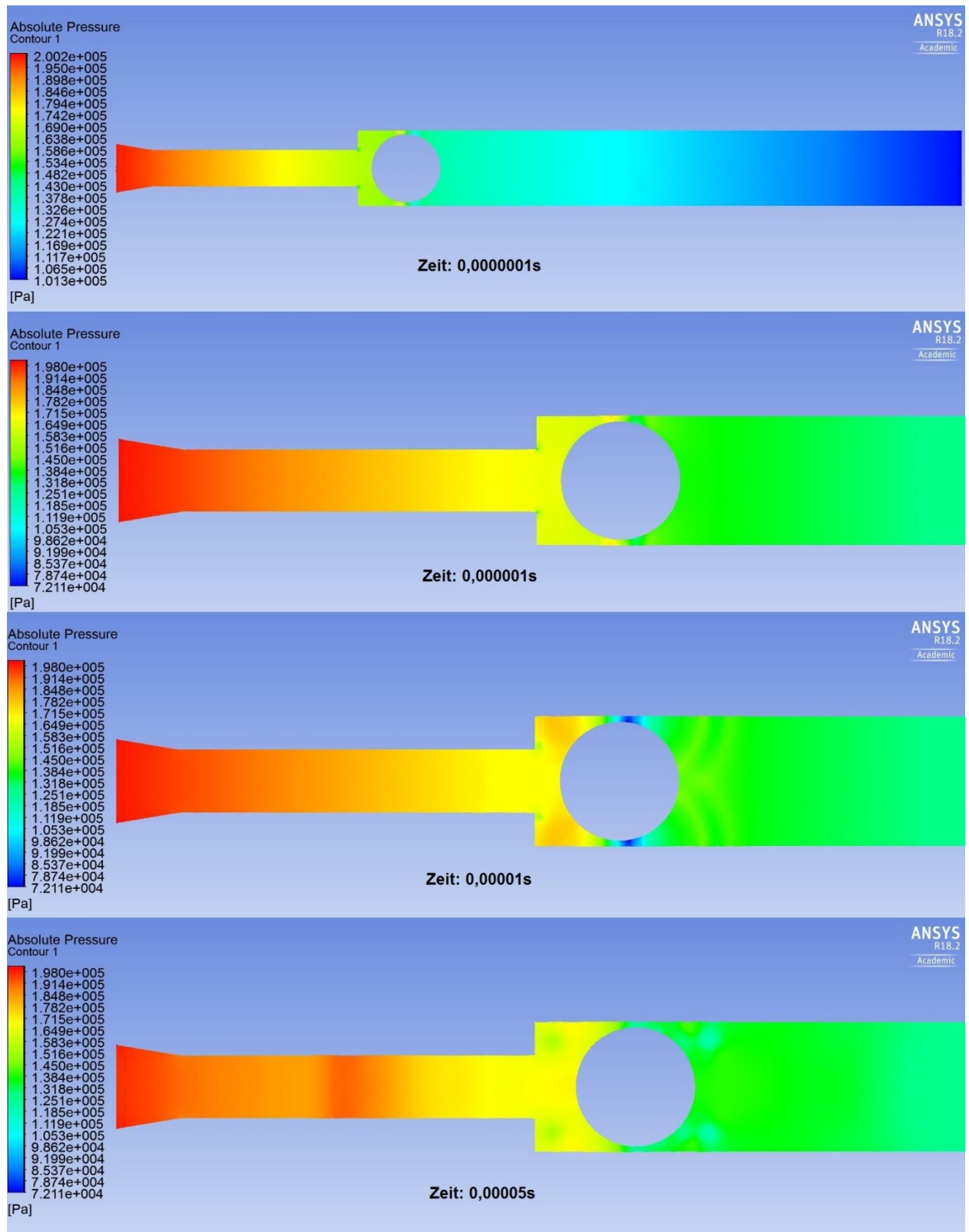


Abbildung 31: Simulationsergebnis der Druckverteilung im Inneren des Laufs 1

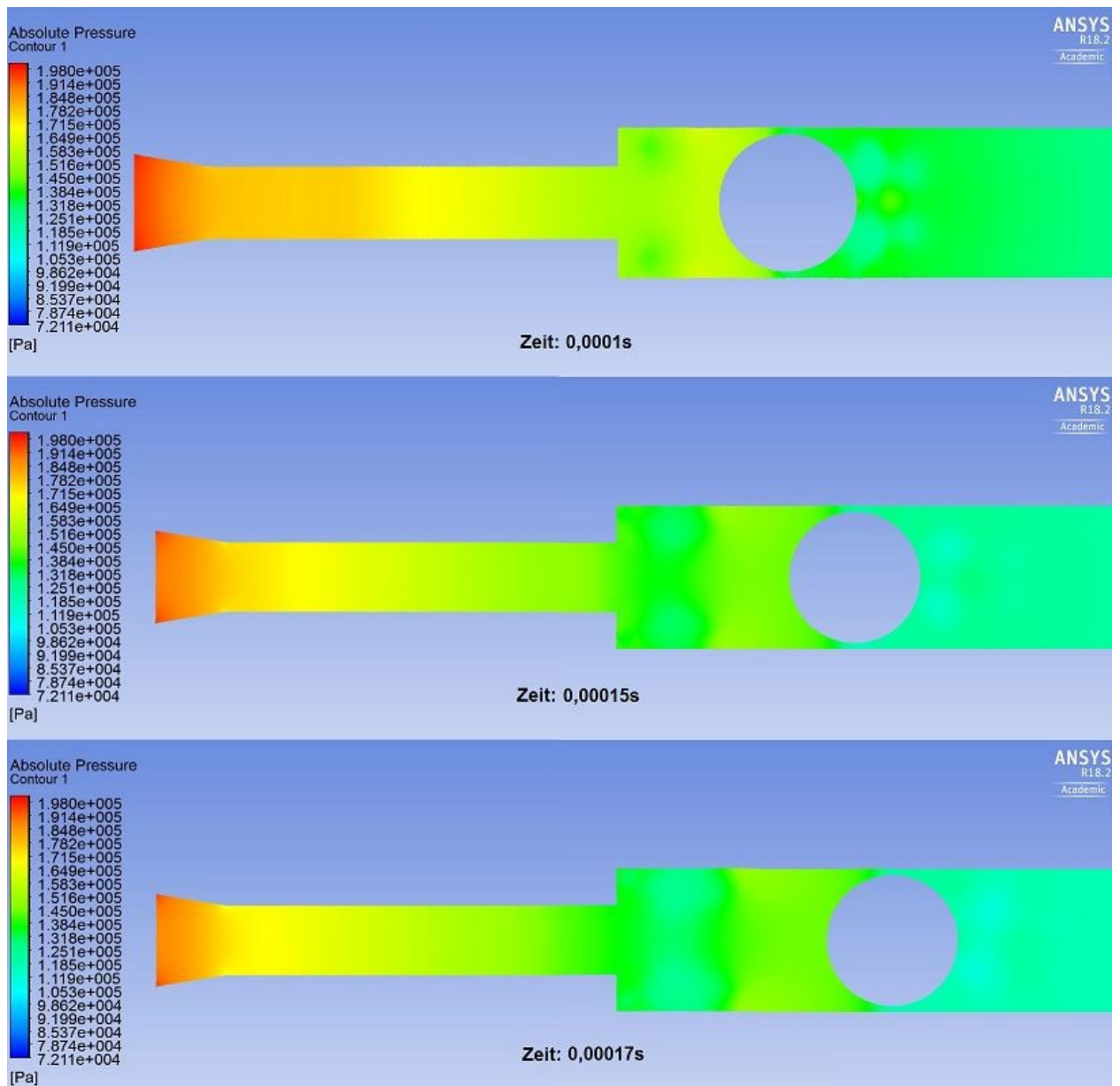


Abbildung 32: Simulationsergebnis der Druckverteilung im Inneren des Laufs 2



## 4 Konstruktion und Fertigung der Druckluftapparatur

In Kapitel 4.1 wird die 3D-Konstruktion der Druckluftapparatur vorgestellt, welche anschließend genutzt wurde um die Druckluftapparatur maschinell zu fertigen. Wesentliche fertigungstechnische und konzeptionelle Aspekte der maschinellen Fertigung werden in Kapitel 4.2 besprochen und mit Hilfe von Bildern visuell veranschaulicht. Um die aus Kapitel 3 erhaltenen theoretischen Werte überprüfen zu können, werden im Unterkapitel 4.3 die Ergebnisse der Versuchsdurchführung präsentiert bzw. tabelliert. Als Quellen dienten mir in diesem Kapitel einerseits meine langjährige Erfahrung als Maschinenbaukonstrukteur im Sondermaschinenbau, sowie andererseits meine fünfjährige Ausbildung an einer Höheren Technischen Lehranstalt für Maschinenbau.

### 4.1 Konstruktion des 3D-Modells

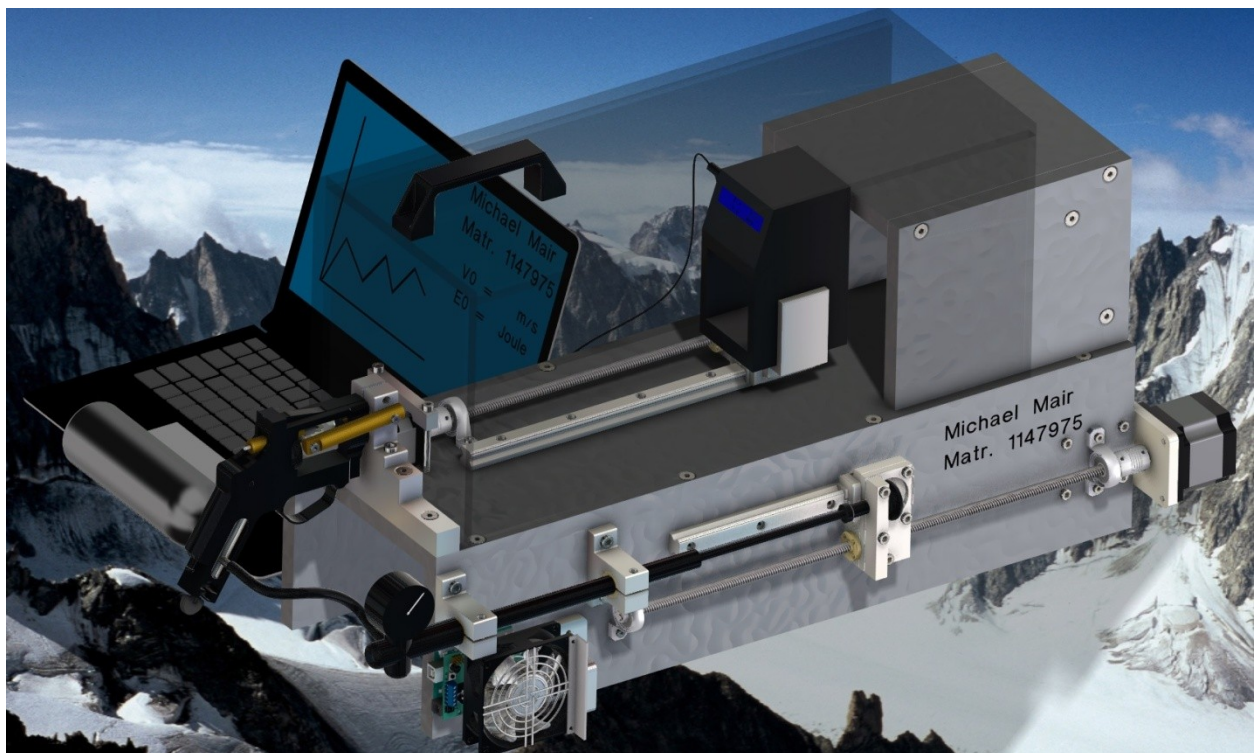


Abbildung 33: 3D-Konstruktion der Druckluftapparatur (Version 1)

In Abbildung 33 ist die vollendete 3D-Konstruktion der Druckluftapparatur dargestellt. Für die Konstruktion wurde die CAD-Software *Creo® Elements/ Direct® Modeling* [13] eingesetzt. Die Funktionsweise der Druckluftapparatur sowie wichtige Detailansichten einzelner Systemkomponenten werden im Folgenden näher erläutert.

Ein Arduino Uno Rev.3 mit aufgesetztem L293D Motor Drive Shield fungiert als "Gehirn" dieser Druckluftapparat. Über einen Laptop wird der Nema 23 Schrittmotor angesteuert, welcher wiederum mit einer Trapezspindel verbunden ist (siehe Abbildung 34). Sobald die Welle des Schrittmotors in Rotation versetzt wird, vollführt der Führungsschlitten eine translatorische Bewegung. Dreht sich die Welle gegen den Uhrzeigersinn, dann bewegt sich der Führungsschlitten in Richtung des Ventilators und die Druckluftpumpe erhöht den Absolutdruck im Druckbehälter.

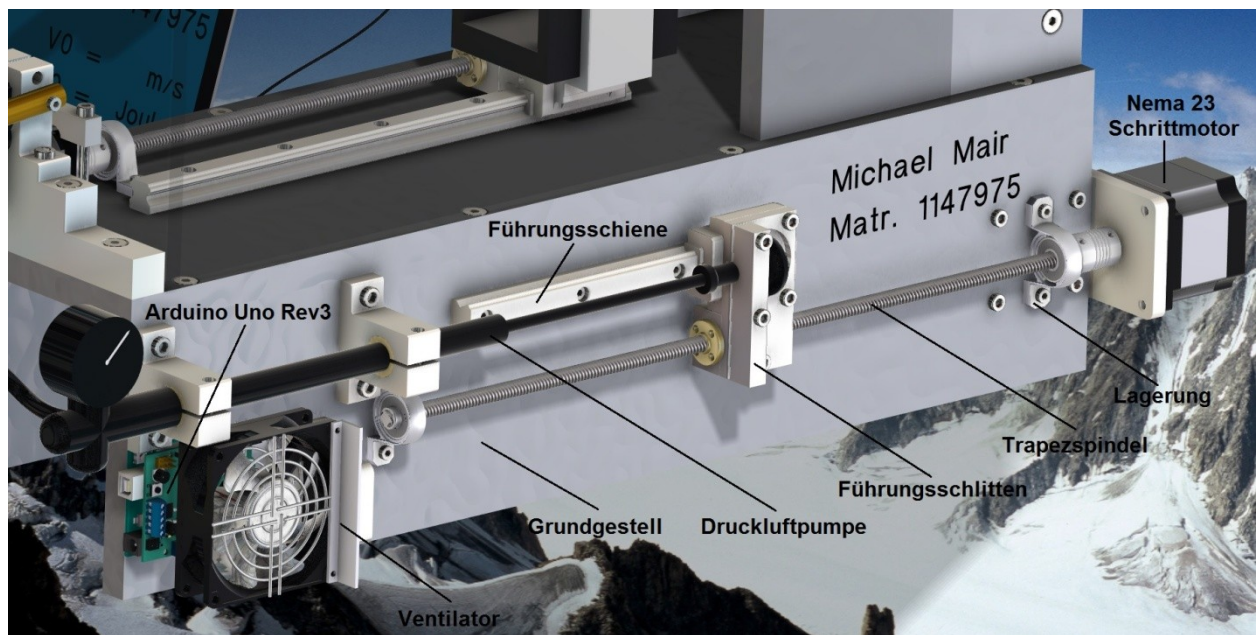


Abbildung 34: Detailansicht der 3D-Konstruktion (Startposition des Pumpvorgangs)

Wenn der Führungsschlitten die Endposition (siehe Abbildung 35) erreicht, kehrt sich die Drehrichtung der Welle um und die Startposition wird erneut angefahren.



Abbildung 35: Detailansicht der 3D-Konstruktion (Endposition des Pumpvorgangs)



Obiger Vorgang wird solange wiederholt, bis der gewünschte Absolutdruck von etwa 2bar (entspricht ca. 1bar auf der Anzeige) erreicht wird. Das geschriebene Programm zur Ansteuerung des Schrittmotors wurde dem Anhang beigelegt.

Wenn nun der erforderliche Druck im Druckbehälter erreicht wurde, kann die Schussabgabe erfolgen. Zuvor wird noch das Projektil im Lauf platziert und überprüft, ob alle Sicherheitsmaßnahmen (Schutzbrille, Schutzhaube,...) getroffen wurden. Auch wenn die Geschwindigkeiten und somit die kinetischen Energien sehr gering sind ( $<0,5\text{J}$ ), besteht trotzdem die Gefahr einer Augenverletzung. Daher wurde in allen Bereichen des Experiments großer Wert auf die Sicherheit gelegt.

Um den Schuss auszulösen, wird mit einem Holzhammer bzw. Gummihammer auf den Ventilstößel (siehe Abbildung 36) geschlagen. Der Ventilstößel öffnet dabei das Ventil und die Luft kann mit sehr hoher Geschwindigkeit aus dem Druckbehälter durch die konvergente Düse (Ventil) strömen und das Projektil im Lauf beschleunigen.

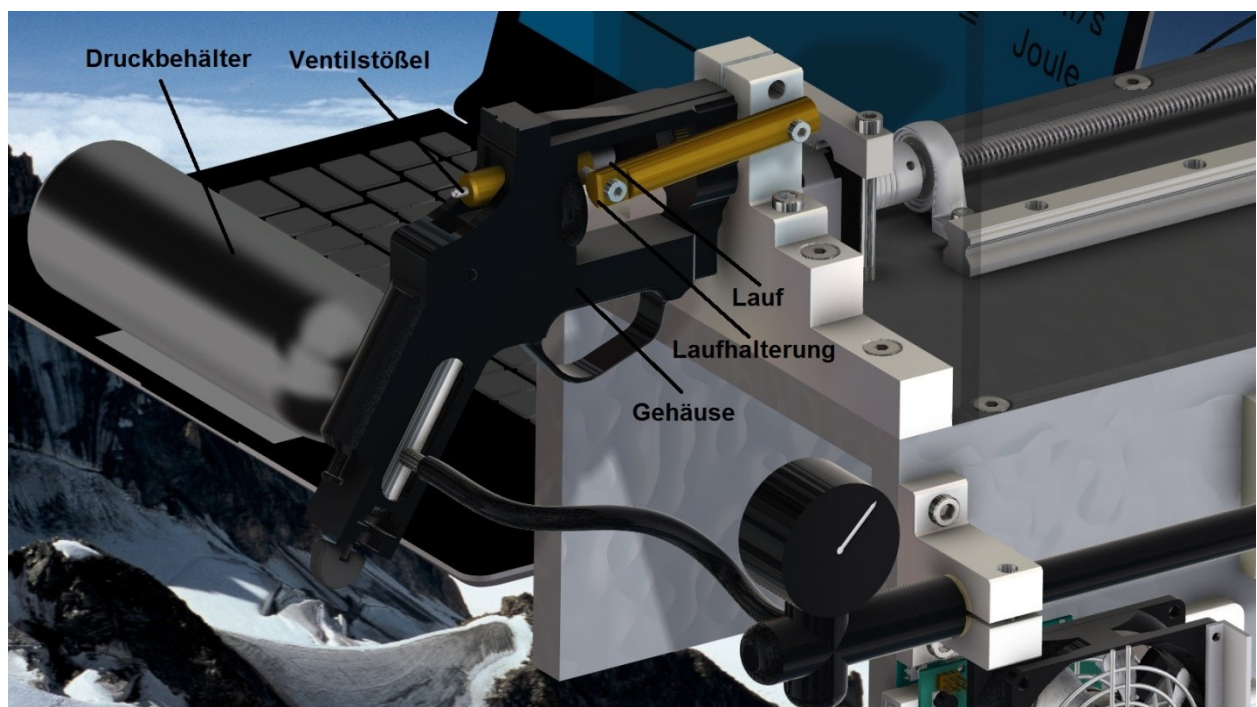


Abbildung 36: Detailansicht der 3D-Konstruktion im Bereich der Schussabgabe

Um die Projektilgeschwindigkeit verschiedener Lauflängen zu bestimmen, müssen lediglich kürzere bzw. längere Läufe in der Laufhalterung positioniert werden. In Abbildung 37 wurde dies schematisch angedeutet. Grundsätzlich wären bei diesem Aufbau Lauflängen von 10mm bis max. 200mm realisierbar.



Abbildung 37: Detailansicht der 3D-Konstruktion im Bereich der Laufhalterung

Um auch bei variablen Lauflängen gleichbleibende Abstände zwischen V0-Messgerät und Laufmündung gewährleisten zu können, wurde das Messgerät auf einem Führungsschlitten montiert. Die Position des V0-Messgeräts kann nun mit Hilfe des Arduino an die unterschiedlichen Gegebenheiten angepasst werden (siehe Abbildung 38).

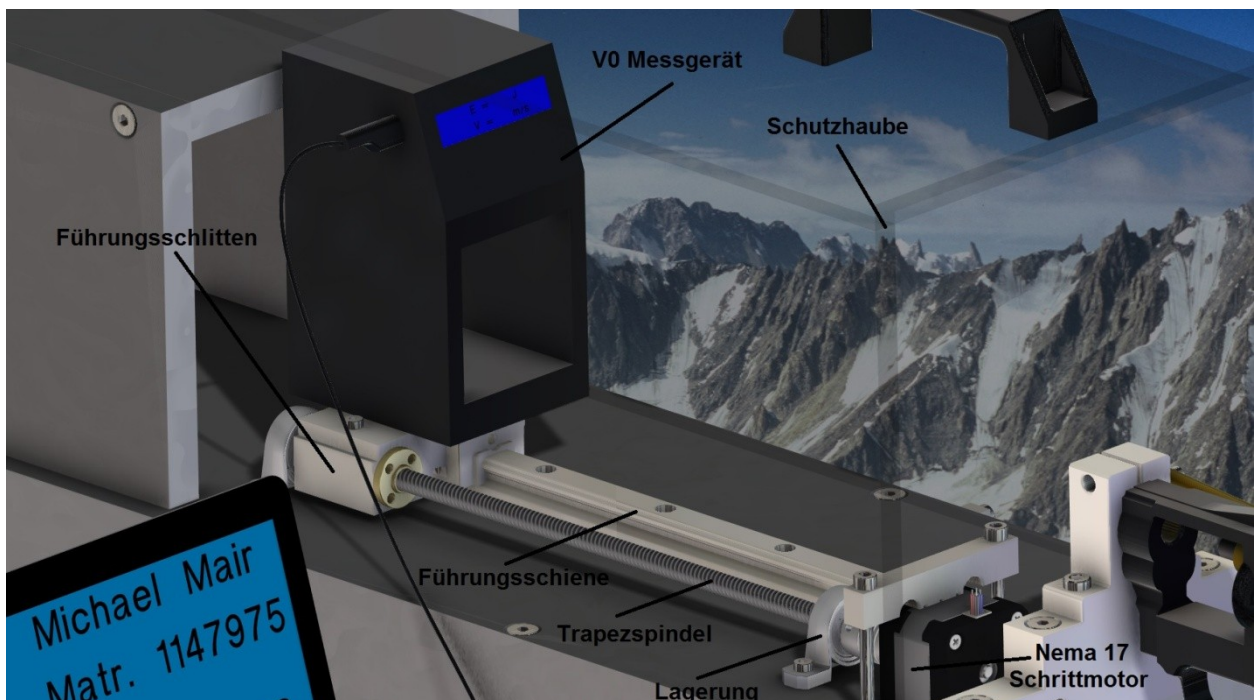


Abbildung 38: Detailansicht der 3D-Konstruktion im Bereich des V0-Messgeräts

## 4.2 Fertigung der Druckluftapparat

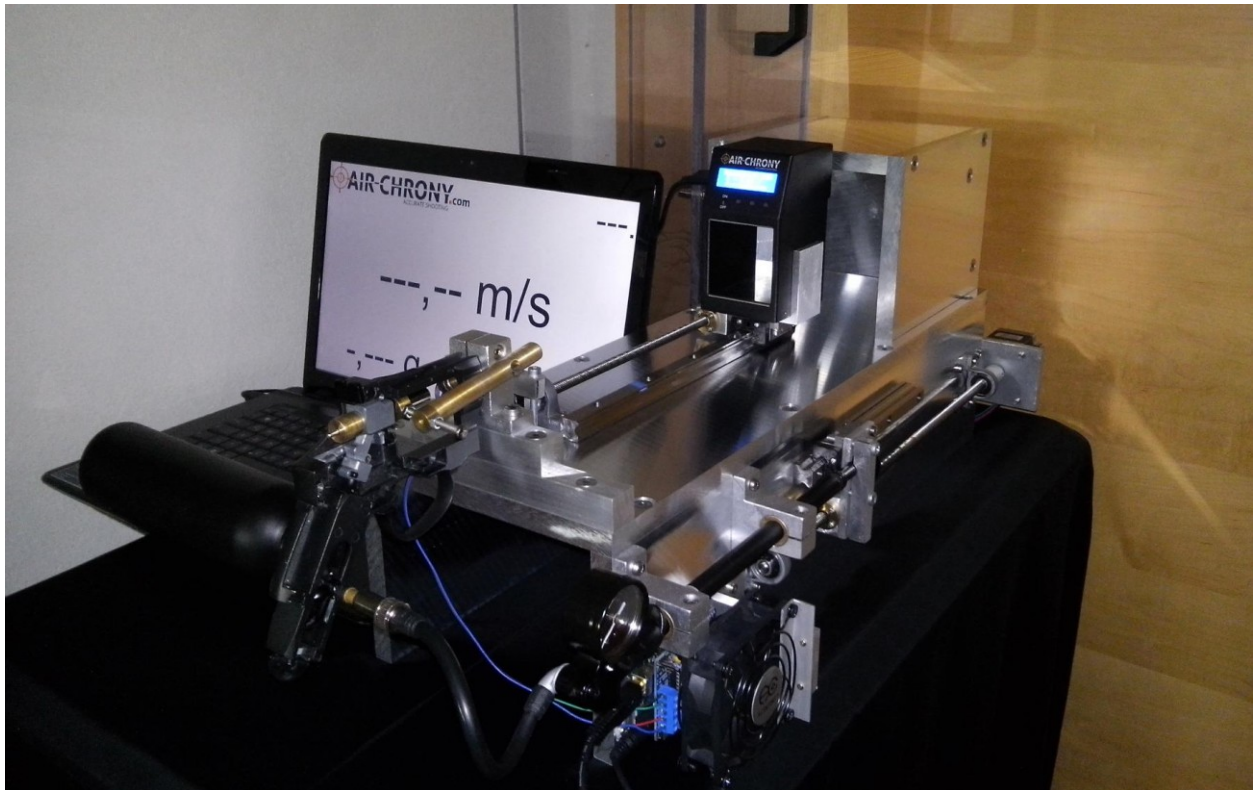


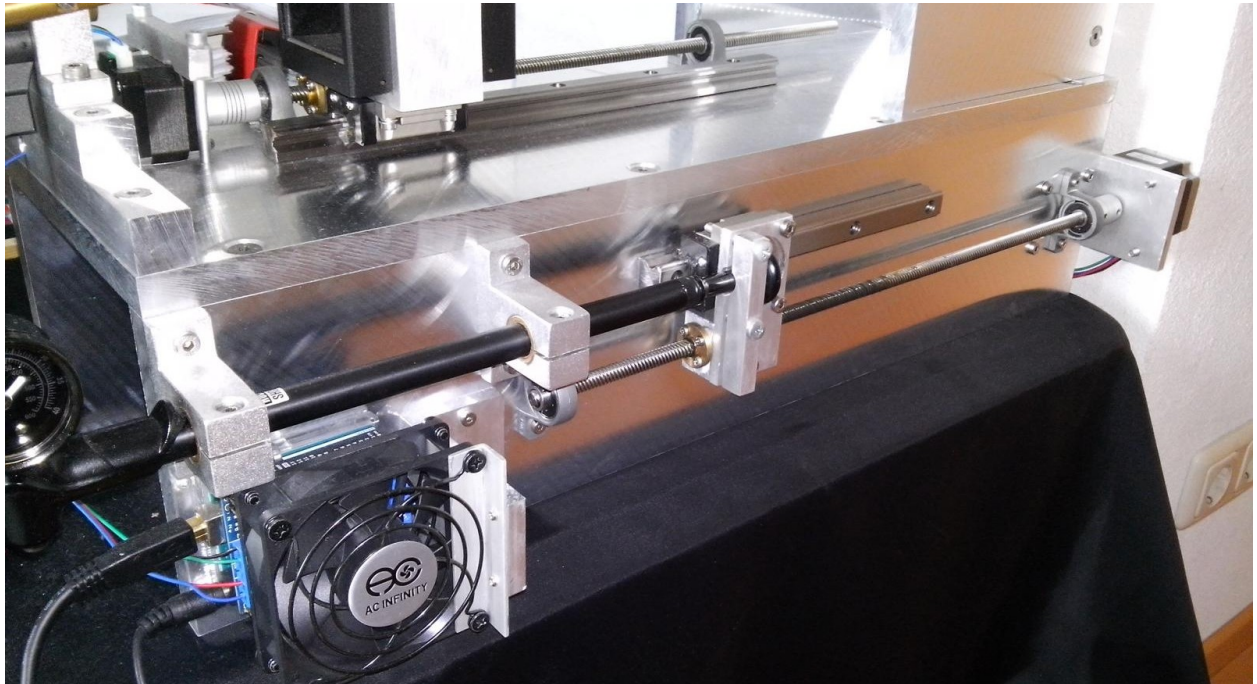
Abbildung 39: Reale Druckluftapparat (Version 1)

Wie bereits zuvor erwähnt, sollen die theoretischen Ergebnisse aus Kapitel 3 mit realen Werten verglichen werden. Dazu ist es nötig, nicht nur eine virtuelle sondern auch eine reale Druckluftapparat zur Verfügung zu haben (siehe Abbildung 39). Deshalb wurde in aufwendigen fertigungstechnischen Schritten das virtuelle 3D-Modell in der Werkstatt nachgebaut. Die dafür benötigten Bauteile, wie z.B. die Druckluftpumpe, die Stepper-motoren, das V0-Messgerät usw., wurden bei verschiedenen Firmen im Internet bestellt. Die feingefrästen Aluminiumplatten wurden bis auf die Bohrungen bereits auf Maß geliefert. Alle weiteren Flachmaterialien bzw. Rundmaterialien wurden als Rohmaterial zugekauft und selbstständig auf Maß bearbeitet. Das "Gehäuse" in dem sich die Ventil-einheit befindet, wurde von einem Airsoft-Revolver zweckentfremdet und auf meine Be-dürfnisse angepasst. Alle weiteren Normteile wie Schrauben, Buchsen, Beilagscheiben, Stehlager, Führungsschienen, Führungswagen usw. wurden ebenfalls zugekauft. Für die Sicherheit sorgt eine Schutzhaube aus kratzfestem Polycarbonat.

Bereits während der Konstruktion ist es immer erstrebenswert sowohl auf den Preis, als auch auf die Lieferzeiten bzw. Verfügbarkeiten einzelner Komponenten zu achten!

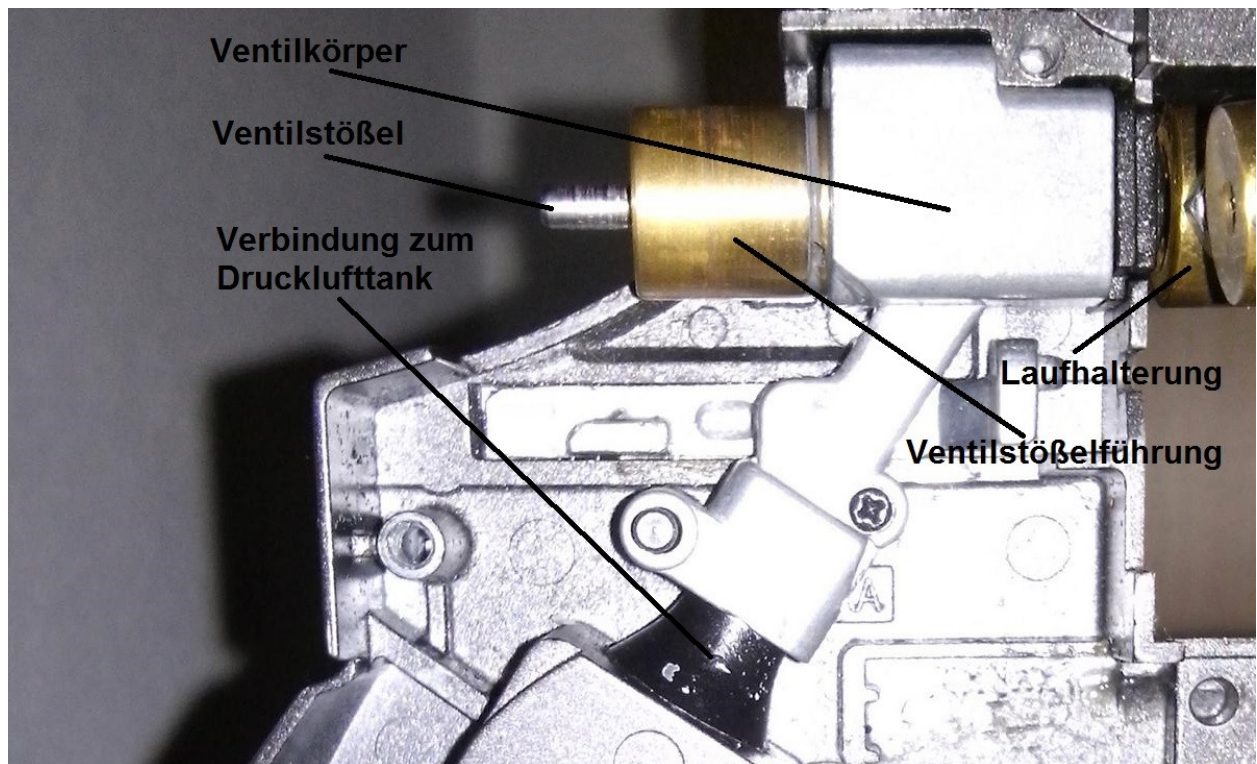


Analog zu Abbildung 35, in dem die virtuelle Endposition des Pumpvorgangs dargestellt wird, ist in Abbildung 40 dessen reales Abbild erkennbar.



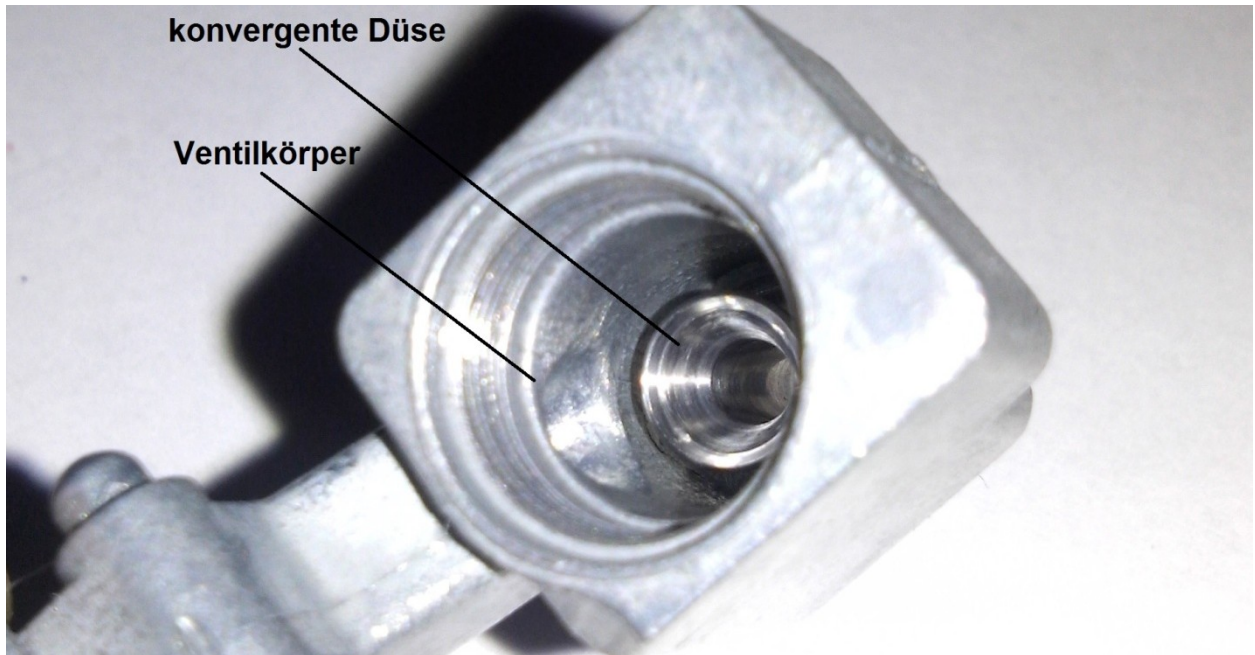
**Abbildung 40: Detailsicht der Druckluftapparatur (Endposition des Pumpvorgangs)**

Der Bereich der Schussabgabe, wo auch der Ventilkörper und der Übergang zum Drucklufttank sichtbar ist, wird in Abbildung 41 dargestellt.



**Abbildung 41: Detailsicht der Druckluftapparatur im Bereich der Schussabgabe**

Im Ventilkörper befindet sich die konvergente Düse, welche durch einen Schlag auf den Ventilstößel geöffnet wird. Die Ventilstößelführung wird einerseits benötigt, um Dichtheitsverluste des Systems zu minimieren und andererseits, um eine Knickung des Ventilstößels zu verhindern. In Abbildung 42 ist das Innere des Ventilkörpers inklusive der konvergenten Düse zu sehen. Die Strömungskanäle wurden sowohl bei der Düse als auch beim Ventilkörper mit einem Dremel ausgefräst und poliert.



**Abbildung 42: Detailansicht des Ventilkörpers mit der konvergenten Düse**

Abbildung 43 zeigt den Ventilstößel in Verbindung mit der konvergenten Düse. Hier wird klar ersichtlich, dass durch den Ventilstößel der Durchflussquerschnitt der Düse minimiert wird und jedenfalls eine Abweichung zur Berechnung zu erwarten ist.



**Abbildung 43: Detailansicht der konvergenten Düse mit dem Ventilstößel**



In Analogie zu Abbildung 37, in der der virtuelle Bereich der Laufhalterung zu sehen ist, werden in Abbildung 44 die unterschiedlichen Lauflängen (ca.10mm, ca.13mm und ca.17mm) in der Laufhalterung dargestellt.



Abbildung 44: Detailansicht der unterschiedlichen Lauflängen in der Laufhalterung



Abbildung 45 zeigt, in welchen Positionen sich in etwa die Projektile im Inneren der Läufe befinden. Aufgrund dieser Positionierung kann anschließend in Kapitel 4.3 der effektive Projektilweg von 1,5mm, 4mm und 8mm verwendet werden, um das Weg-Geschwindigkeits-Profil des Projektils aufzuzeichnen. Dabei wird angenommen, dass das Projektil den Lauf verlassen hat, sobald dessen Mittelpunkt die Laufmündung überschritten hat.

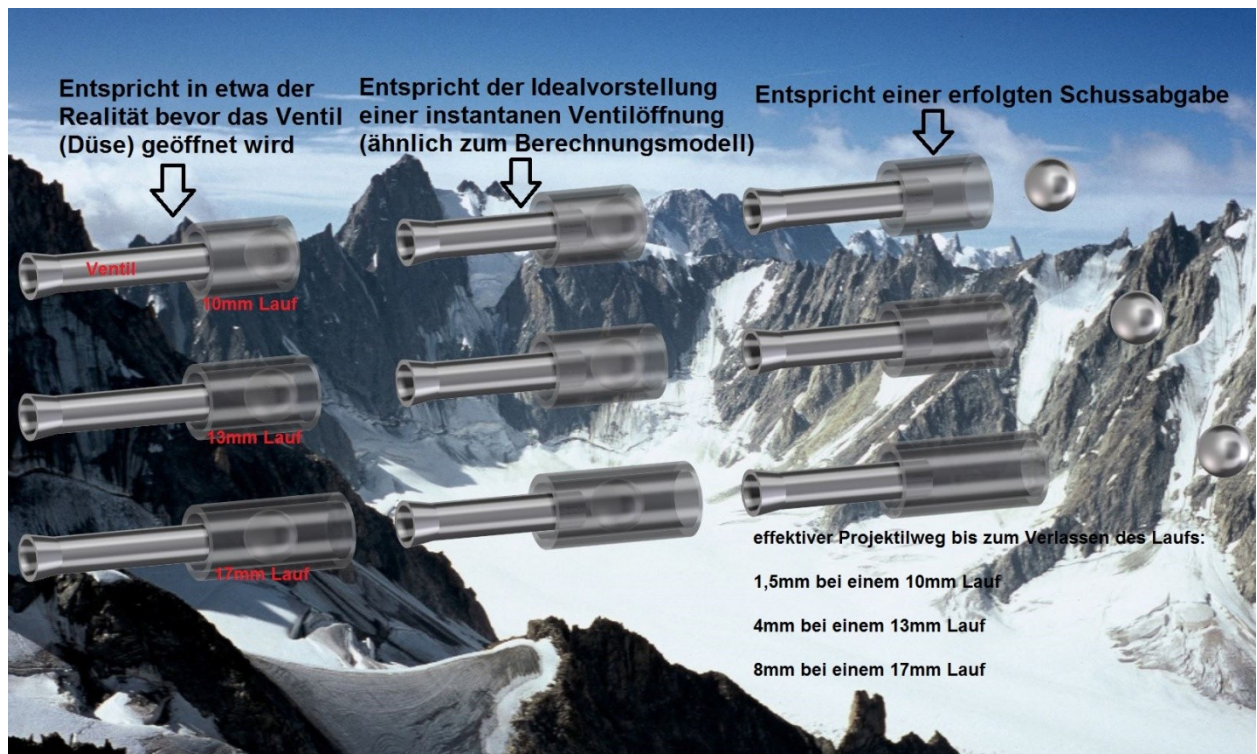


Abbildung 45: Effektive Projektilwege unterschiedlicher Lauflängen

In Abbildung 46 ist die Projektilposition für eine Lauflänge von etwa 10mm dargestellt.



Abbildung 46: Detailansicht der Projektilposition im 10mm langen Lauf

### 4.3 Erkenntnisse und Ergebnisse

Um optimale Ergebnisse zu erzielen, wurden zu Beginn alle Strömungskanäle maximal erweitert, poliert und mögliche Kanten abgerundet. Da die Geometrie des Ventilstößels einen entscheidenden Einfluss auf die  $V_0$  des Projektils hat, wurden verschiedene Ventilstößelformen angefertigt. Es zeigte sich, dass Version 2 (siehe Abbildung 47) eine um ca. 10% höhere  $V_0$  aufwies, als jene der beiden anderen Versionen. Daher wurde in zukünftigen Experimenten und Auswertungen die Version 2 des Ventilstößels als Standard festgelegt. Die Fertigung der unterschiedlichen Ventilstößel erwies sich als äußerst zeitaufwendig, weshalb lediglich drei verschiedene Versionen angefertigt wurden.



Abbildung 47: Detailansicht der unterschiedlichen Ventilstößelformen

Da in der Berechnung von einem konstanten Initialdruck ausgegangen wird, muss dies zumindest näherungsweise auch für den Versuchsaufbau gelten. Daher wurde ein zweiter Druckbehälter mit höherem Fassungsvermögen konstruiert (siehe Abbildung 48).

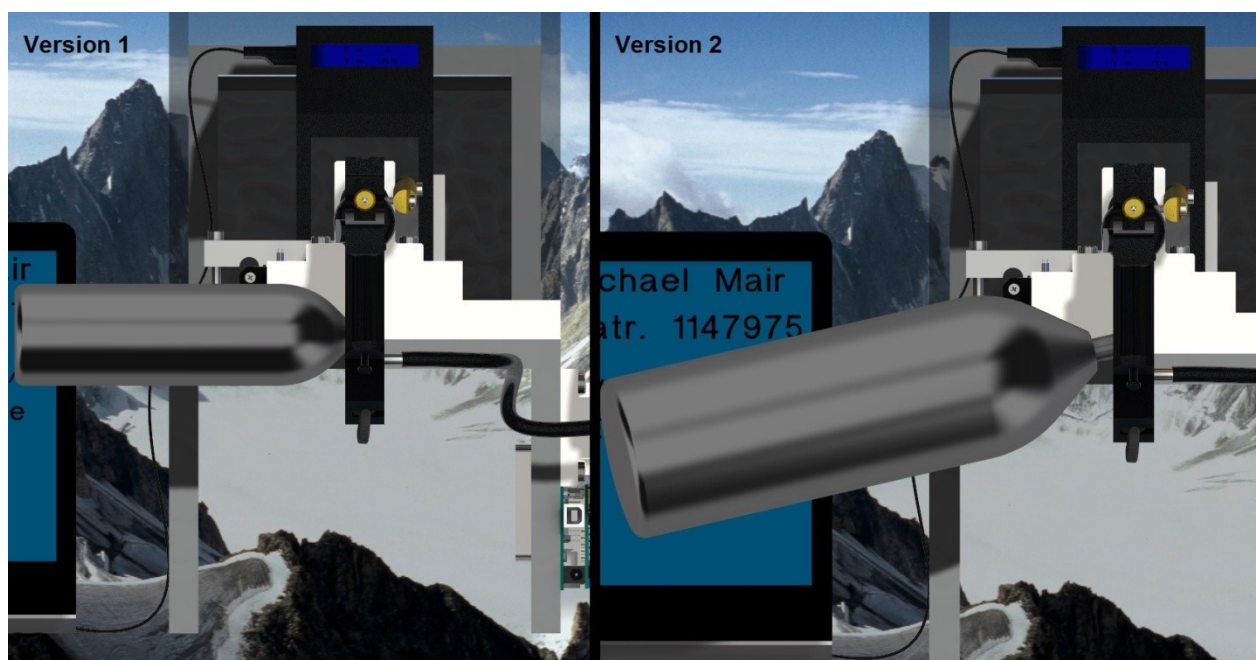
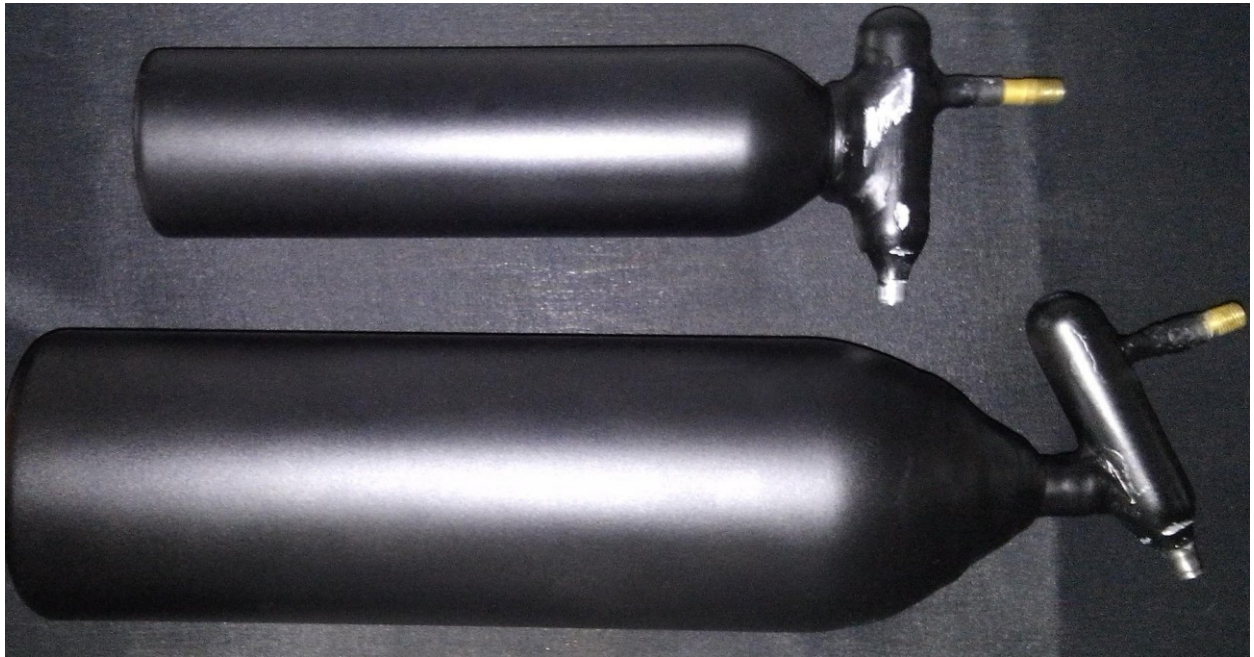


Abbildung 48: Detailansicht der 3D-Konstruktion unterschiedlicher Druckbehälter



Um in der Realität einen konstanten Initialdruck zu gewährleisten, müsste das Fassungsvermögen der Druckbehälter unendlich groß sein. Da dies in der Praxis aber nicht realisierbar ist, wurde ein Druckbehälter mit 250ml Fassungsvermögen und ein größerer Druckbehälter mit 1000ml Fassungsvermögen angefertigt. Zusätzlich wurde die Anordnung des größeren Druckbehälters verbessert, um plötzliche Strömungsumlenkungen zu minimieren (siehe Abbildung 49).



**Abbildung 49: Druckbehälter mit unterschiedlichem Fassungsvermögen**

Da sich die  $V_0$  unter Verwendung des größeren Druckbehälters lediglich um etwa 2% im Vergleich zum kleineren Druckbehälter erhöht hat, kann in guter Näherung davon ausgegangen werden, dass der Initialdruck konstant ist.

Da es sich um Druckbehälter handelt, wurden diese abschließend unter besonderen Sicherheitsvorkehrungen auf einen Absolutdruck von mindestens  $p_{abs} = 9\text{bar}$  sicherheitsgeprüft. Da in den Versuchen maximal  $p_{abs} = 2,5\text{bar}$  zum Einsatz kommen, wurde eine mindestens 3,6-fache Sicherheit als ausreichend erachtet. Diese Druckbehälter werden lediglich in Verbindung mit der Druckluftapparatur verwendet und dürfen keinesfalls zweckentfremdet bzw. einem höheren Überdruck als 1,5bar ausgesetzt werden.

Die Vergrößerung des Fassungsvermögens des Druckbehälters führte zur aktualisierten Version 2 der Druckluftapparat, welche in Abbildung 50 dargestellt ist.

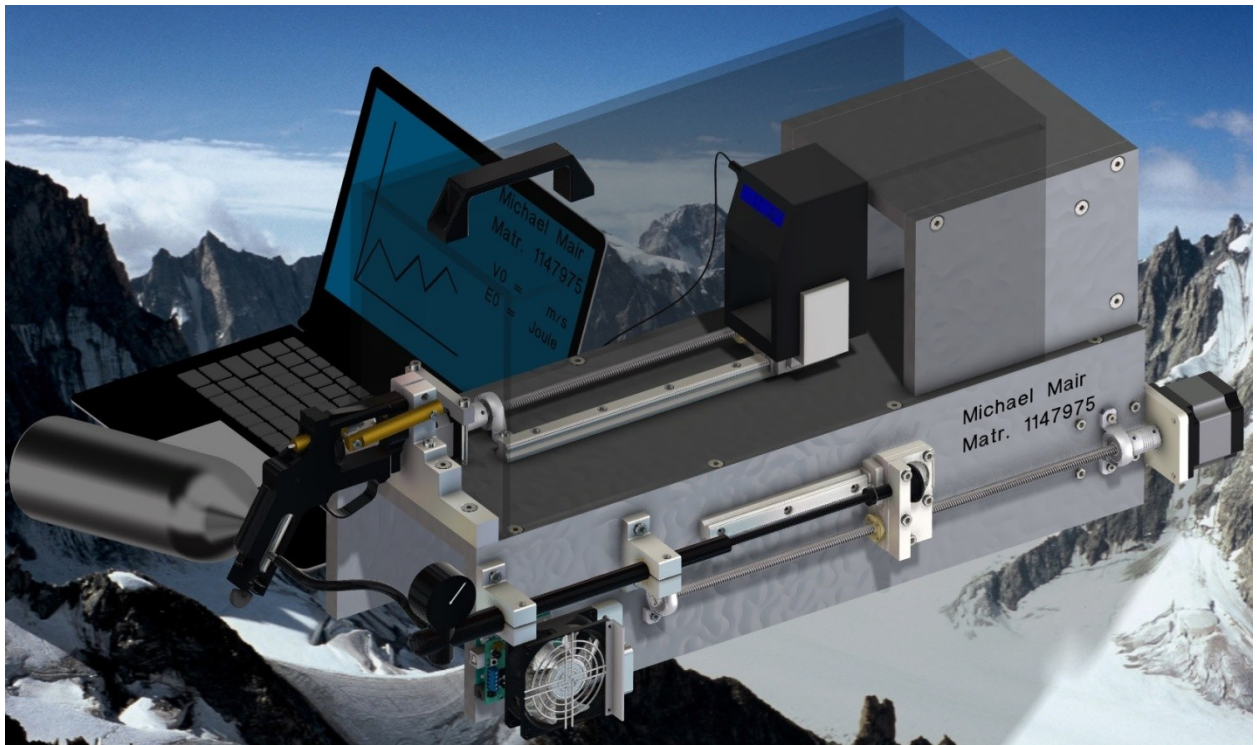


Abbildung 50: 3D-Konstruktion der Druckluftapparat (Version 2)

In Abbildung 51 ist die Version 2 der realen Druckluftapparat zu erkennen.

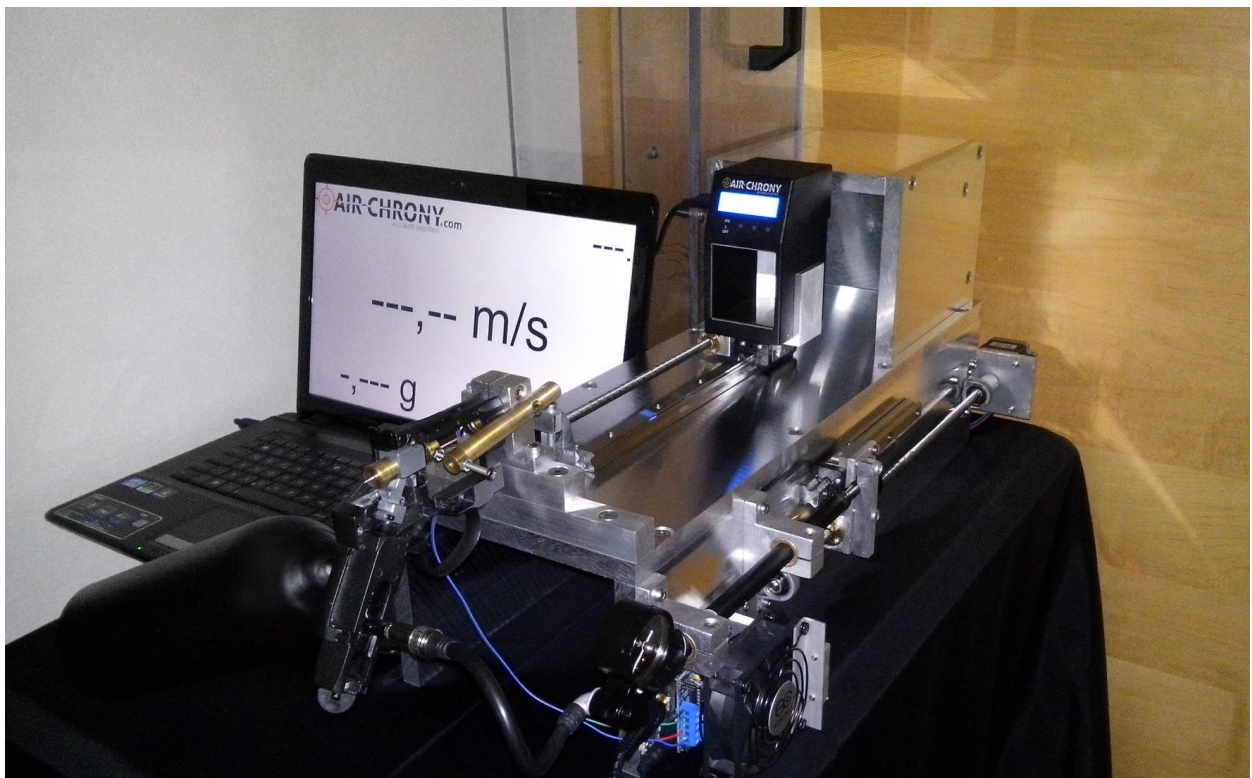


Abbildung 51: Reale Druckluftapparat (Version 2)



Durch die Einarbeitung obiger Erkenntnisse konnte die Versuchsdurchführung vollzogen werden. Dabei wurden jeweils 10 Messungen mit dem 10mm, 13mm und 17mm Lauf durchgeführt. Anschließend wurde jeweils das arithmetische Mittel gebildet und grafisch dargestellt (siehe Abbildung 52).

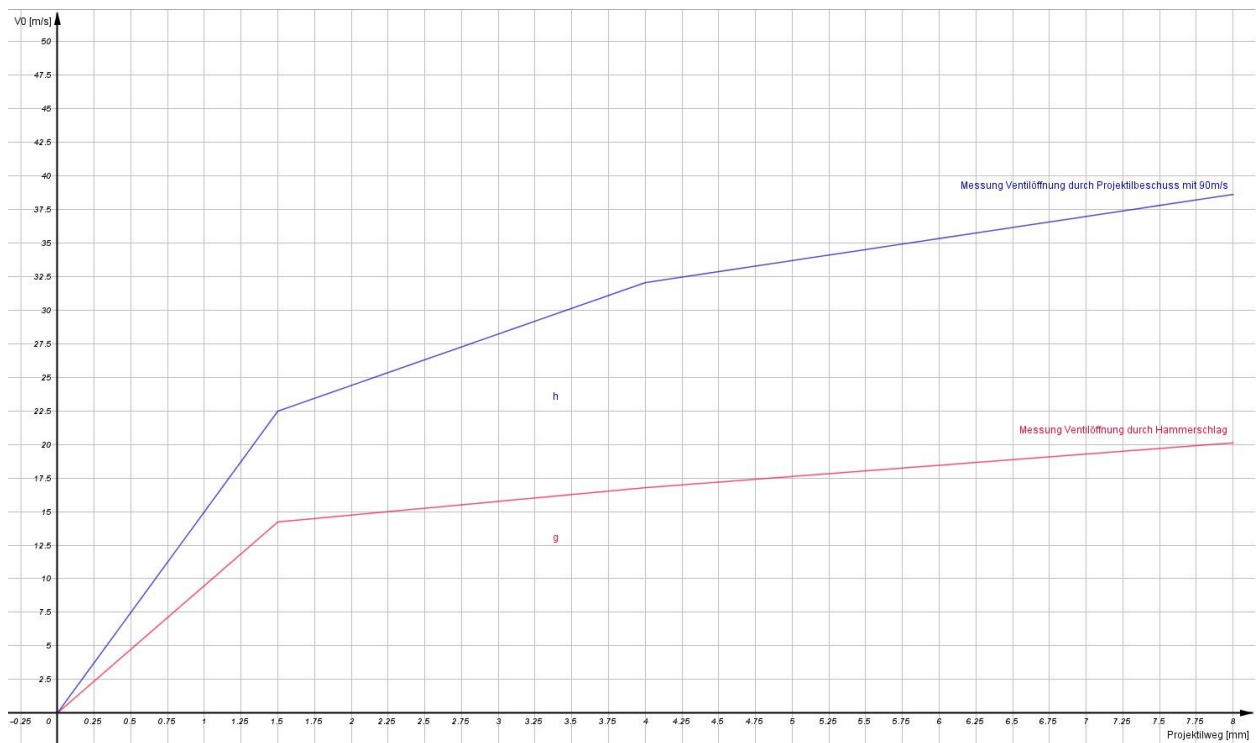


Abbildung 52: Messung der Weg-Geschwindigkeits-Profile (0,28g Projektil)

Das Ergebnis mittels Hammerschlag (rote Kurve in Abbildung 52) war trotz aller Verbesserungen ernüchternd. Bei einem zurückgelegten Projekttilweg von 1,5mm betrug die durchschnittliche Projekttilgeschwindigkeit lediglich 14,23m/s. Die Geschwindigkeit des Projekttils nach 4mm konnte im Mittel mit 16,78m/s veranschlagt werden. Nach 8mm wurde eine durchschnittliche  $V_0$  von 20,12m/s verifiziert. Die Abweichungen der praktischen Werte von jenen der theoretischen Werte, lagen mit einem Faktor von 3-4 viel zu hoch und waren nur schwer zu akzeptieren, weswegen nach Fehlern gesucht wurde. Eine Gegenüberstellung der Theorie und Praxis findet sich in Kapitel 5.

Da nach einiger Überlegung die Ventilöffnungsdauer für die von der Theorie stark abweichenden Werte verantwortlich gemacht wurde, musste diese Vermutung letztlich durch eine Zeitlupenanalyse untermauert werden (siehe Abbildung 53).

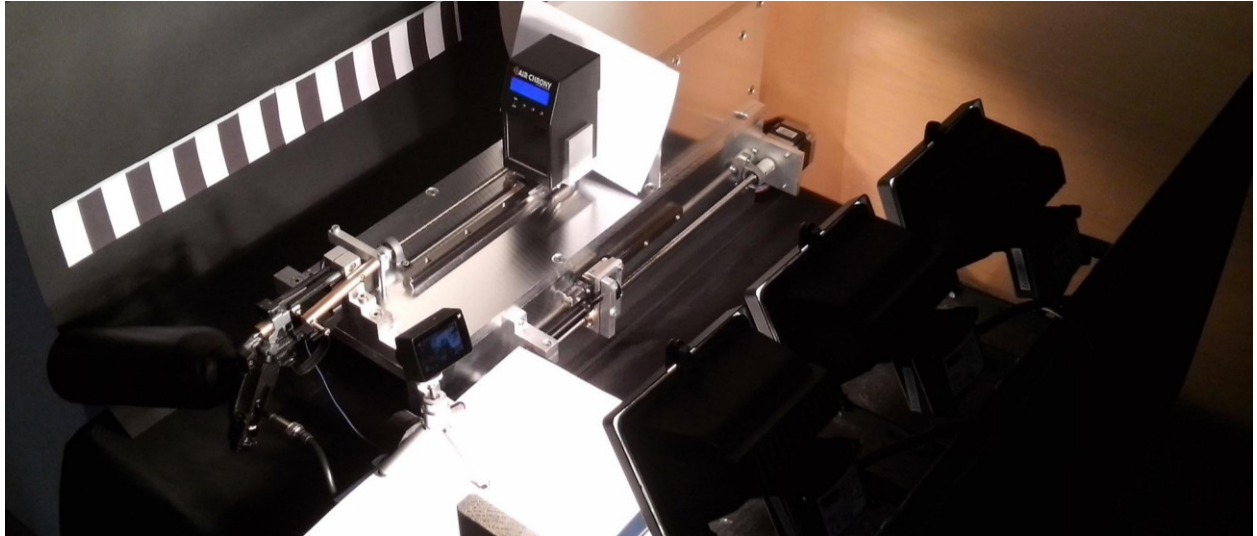


Abbildung 53: Versuchsaufbau der Zeitlupenanalyse

Die Ergebnisse der Zeitlupenanalyse (siehe Abbildung 54) bestätigten, dass das Projektil bereits den Lauf verlassen hat, als das Ventil kaum geöffnet war.

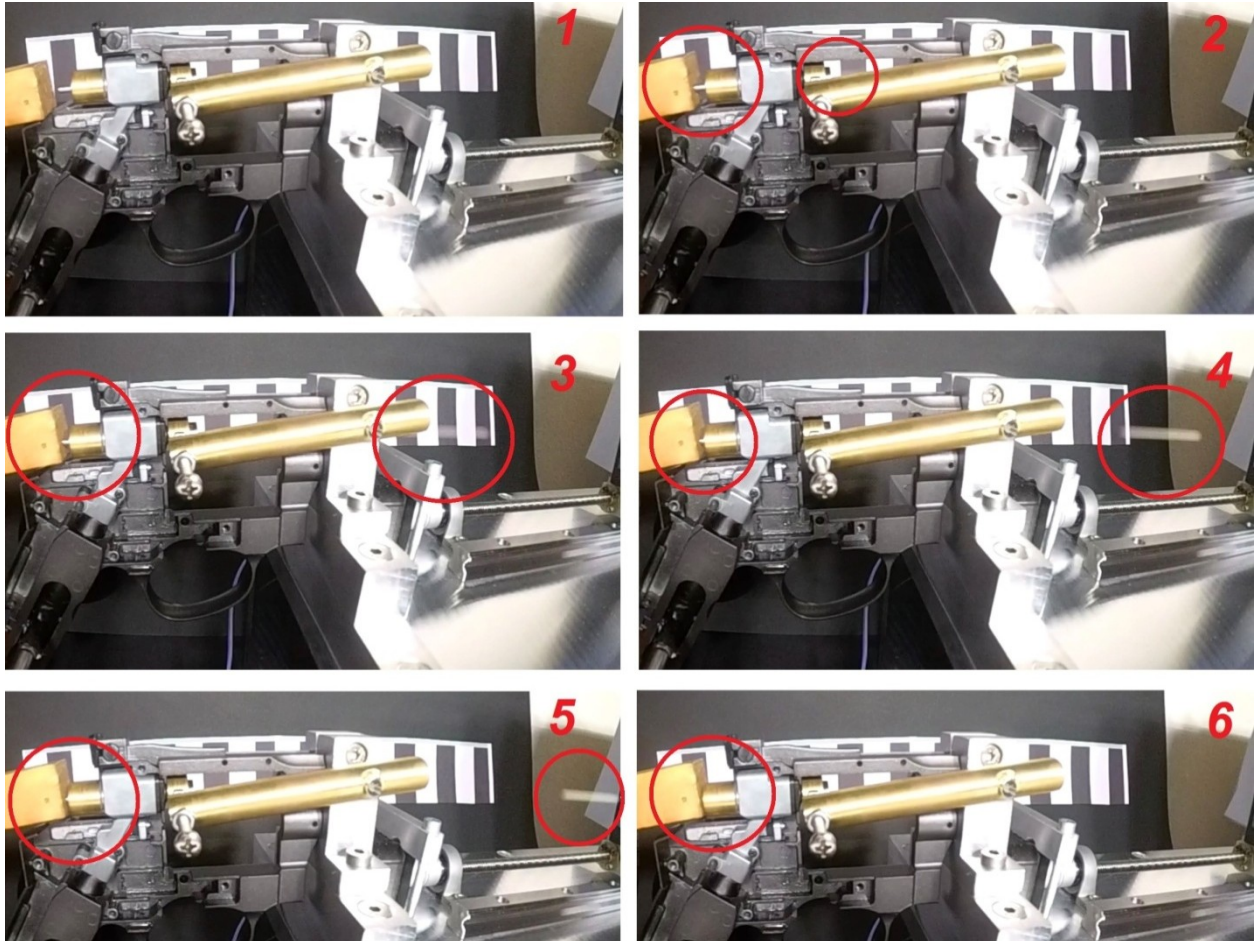
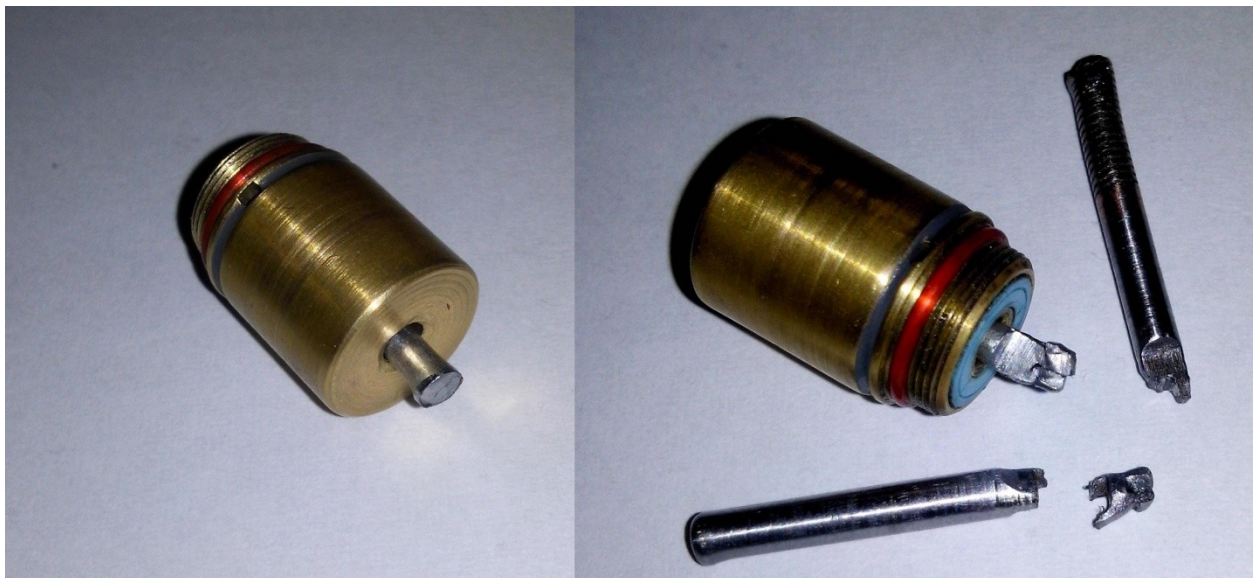


Abbildung 54: Zeitlupenanalyse 40x verlangsamt

Da die Vermutung bestätigt wurde, dass die Ventilöffnungsdauer ausschlaggebend für die Projektilgeschwindigkeit war, musste eine Lösung für eine blitzartige Ventilöffnung gefunden werden. Deshalb erfolgte die Ventilöffnung statt mit dem Hammerschlag durch den Beschuss des Ventilstößels mittels einer zweiten Druckluftapparatur. Das Ventil wurde letztlich mit einer 90m/s schnellen Stahlkugel regelrecht aufgeschossen und lieferte nun plausible Ergebnisse (blaue Kurve in Abbildung 52). Bei einem zurückgelegten Projektilweg von 1,5mm betrug die  $V_0$  bereits 22,48m/s. Nach 4mm konnten 32,05m/s verifiziert werden. Und nach 8mm wurde eine  $V_0$  von 38,62m/s gemessen. Eine Abweichung der Praxis von der Theorie um den Faktor 1,8-2,2 konnte nun guten Gewissens akzeptiert werden.

Leider konnte diese Ventilöffnungsmethode lediglich dreimal durchgeführt werden, da kaum ein Material des Ventilstößels existiert, welches dem Beschuss standhält (siehe Abbildung 55).



**Abbildung 55: Ventilstößel nach Beschuss**

Ebenfalls wurden Risse in der konvergenten Düse entdeckt, welche mühsam repariert werden mussten. Da es nicht meiner Intention entspricht, meine Versuchsanlage zu zerstören, werden die getätigten Einzelmessungen akzeptiert und es wird festgehalten, dass eine blitzartige Ventilöffnung plausible Werte liefert. Auf eine Bildung des arithmetischen Mittels wurde aus oben genannten Gründen verzichtet.



## 5 Analyse von Theorie und Praxis

In Abbildung 56 sind die Weg-Geschwindigkeits-Profile sowohl für die Berechnung (schwarze Kurve), als auch für die Messungen (blaue Kurve und rote Kurve) dargestellt.

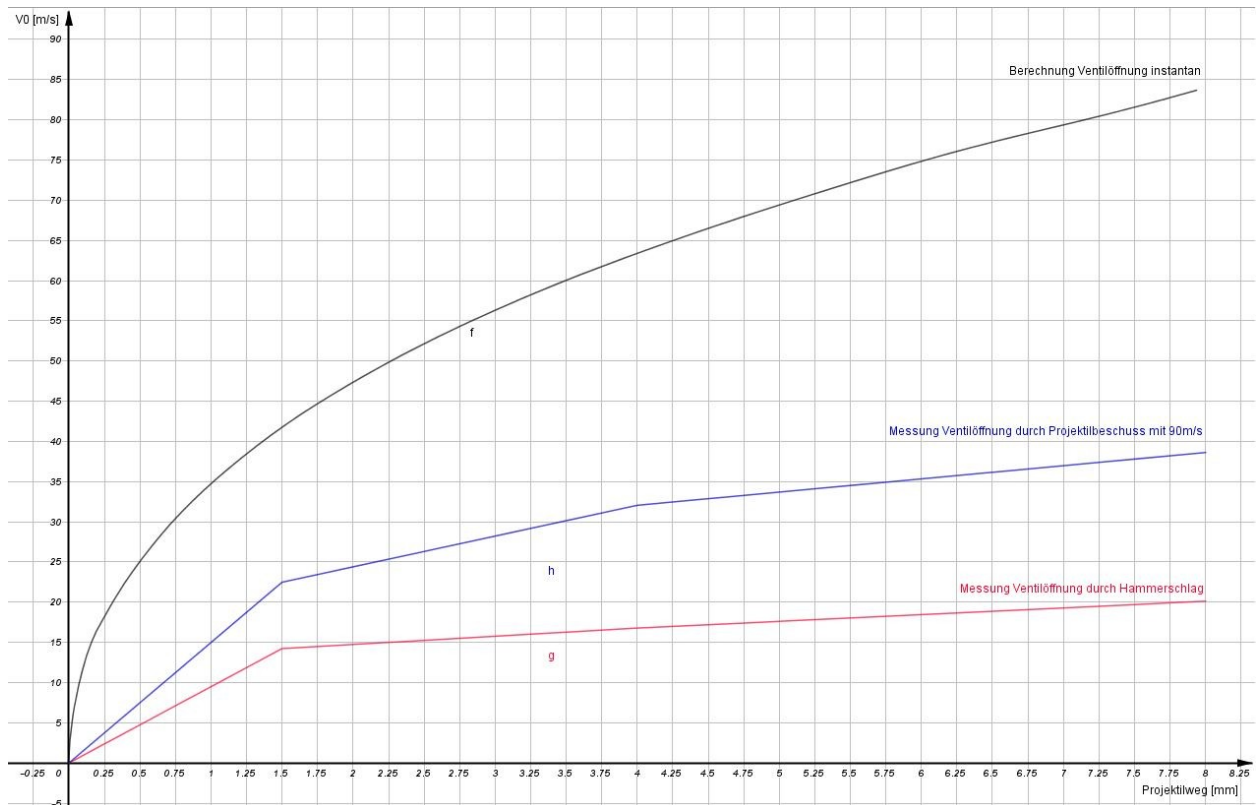


Abbildung 56: Vergleich der unterschiedlichen Weg-Geschwindigkeits-Profile

Dabei ist klar ersichtlich, dass die Berechnung höhere  $V_0$  Werte liefert als jene der praktisch durchgeführten Messungen. Wichtige Referenzwerte, welche im Folgenden näher diskutiert werden, finden sich in Tabelle 2 wieder.

| Vergleich der Referenzwerte                              | zurückgelegter Projekttilweg |           |           |
|----------------------------------------------------------|------------------------------|-----------|-----------|
|                                                          | 1,5mm                        | 4mm       | 8mm       |
| $V_0$ Berechnung                                         | 41,88m/s                     | 63,37m/s  | 83,68m/s  |
| $V_0$ Messung mit Ventilöffnung durch Projekttilbeschuss | 22,48m/s                     | 32,05m/s  | 38,62m/s  |
| $V_0$ Messung mit Ventilöffnung durch Hammerschlag       | Ø14,23m/s                    | Ø16,78m/s | Ø20,12m/s |

Tabelle 2: Vergleich der  $V_0$  Referenzwerte der Berechnung und Messung

Analysiert man die Ergebnisse aus Abbildung 56 bzw. Tabelle 2, so erkennt man, dass die Messung, bei der das Ventil mit dem Hammer aufgeschlagen wurde, die niedrigsten  $V_0$  Werte liefert. Die Abweichungen der gemessenen Werte von jenen der berechneten Referenzwerte liegen mit einem Faktor von 2,9-4,2 im oberen Bereich. Ebenfalls ist zu erkennen, dass die rote Kurve sehr schnell abflacht, was ebenfalls die zuvor überprüfte Vermutung einer zu langsam öffnenden Düse bestätigt. Wird das Ventil dagegen blitzartig aufgeschossen, zeigt sich, dass sich die  $V_0$  Werte erhöhen und sich die blaue Kurve der schwarzen Kurve nähert. Die Abweichungen liegen nun, bezogen auf die Referenzwerte aus Tabelle 2, mit einem Faktor von etwa 1,9-2,2 in einem durchaus akzeptablen Bereich.

Berücksichtigt man die Tatsachen, dass bereits bei der Modellbildung viele Annahmen getroffen wurden, welche nicht exakt der Realität entsprechen und bedenkt zusätzlich, dass es sich trotz allem Aufwand nur um eine numerische Näherung handelt, so sind obige Ergebnisse zumindest als plausibel zu erachten.

Sollten sich zu dieser Thematik zukünftige Arbeiten ergeben, wäre es einerseits sinnvoll eine ausführliche Gitterstudie durchzuführen, um den Einfluss von Vernetzungsfehlern auf das Berechnungsergebnis nachzuvollziehen. Andererseits wäre es zusätzlich sinnvoll die in *ANSYS® FLUENT®* getätigten Setup-Einstellungen minimal zu verändern und etwaige Standardeinstellungen zu optimieren.

Aufgrund der vielen Strömungsumlenkungen, wäre eine Änderung der Anordnung des Druckbehälters eine ebenso sinnvolle Verbesserung des Versuchsaufbaus, wie die Optimierung der Ventilöffnung. Dabei sollte ein Konzept entwickelt werden, welches eine nahezu instantane Ventilöffnung erlaubt und eine Minimierung des Durchflussquerschnitts durch den Ventilstößel verhindert. Zukünftige Experimente mit elektrischen Ventilen könnte einer dieser Lösungsansätze sein.

Ich bedanke mich bei meinem Betreuer Univ.-Prof.i.R.Dr.Herbert Muthsam für die tolle Unterstützung und Zusammenarbeit, sowie bei meiner Mutter Edith Mair und meinem Vater Franz Mair für die finanzielle Unterstützung. Ebenso danke ich allen Familienmitgliedern und Freunden, welche mich auf diesem Weg begleitet haben.

## Literaturverzeichnis

- [1] **Kuhlmann, Hendrik.** *Strömungsmechanik.* 85399 Hallbergmoos : Pearson, 2014.
- [2] **Hakenesch, Peter.** *Strömungsmechanik für Dummies.* 69469 Weinheim : WILEY-VCH, 2014.
- [3] **Schwarze, Rüdiger.** *CFD-Modellierung.* 69120 Heidelberg : Springer, 2013.
- [4] **Laurien, Eckart und jr., Herbert Oertl.** *Numerische Strömungsmechanik.* 65189 Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013.
- [5] **A.Tipler, Paul, Mosca, Gene und Wagner, Jenny.** *Physik.* 69120 Heidelberg : Springer Spektrum, 2015.
- [6] **Arens, Tilo, Hettlich, Frank und Karpfinger, Christian.** *Mathematik.* 69120 Heidelberg : Springer, 2015.
- [7] **Ozen, Metin.** Meshing Workshop. [Online] Ozen Engineering, 13. November 2014.[https://www.ozeninc.com/wpcontent/uploads/2014/11/MESHING\\_WORKS\\_HOP\\_2014.pdf](https://www.ozeninc.com/wpcontent/uploads/2014/11/MESHING_WORKS_HOP_2014.pdf). Zuletzt aufgerufen am 11.02.2018
- [8] **ANSYS, Inc.** ANSYS Fluent Theory Guide Release 14.0. [Online] November 2011.<https://de.scribd.com/doc/140163341/Ansys-Fluent-14-0-Theory-Guide>. Zuletzt aufgerufen am 11.02.2018
- [9] **ANSYS, Incorporated.** ANSYS Fluent Tutorial Guide Release 15.0. [Online] November 2013. <https://de.scribd.com/doc/242894781/ANSYS-Fluent-Tutorial-Guide-Ver-15-0>. Zuletzt aufgerufen am 11.02.2018
- [10] **ANSYS, Homepage.** ANSYS. [Online] 18.2. [www.ansys.com](http://www.ansys.com).
- [11] **ANSYS.** Lecture 7: Turbulence Modeling. [Online] ANSYS, 28. Februar 2014. <https://de.scribd.com/document/346114049/Fluent-Intro-14-5-L07-Turbulence-pdf>. Zuletzt aufgerufen am 11.02.2018
- [12] **Bae, Jun Han.** Analysis of the Ping-Pong Ball Gun. *Purdue University.* [Online] Juni2014.<https://docs.lib.purdue.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://www.google.at/&httpsredir=1&article=1049&context=techdirproj>. Zuletzt aufgerufen am 11.02.2018
- [13] **PTC, Homepage.** PTC-CoCreate. [Online] <http://www.ptc-de.com/cad/co-create>.
- [14] **GeoGebra, Homepage.** GeoGebra. [Online] 5.0. [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).



## Abbildungsverzeichnis

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Abbildung 1: Gliederung der Strömungsmechanik .....                                          | 3  |
| Abbildung 2: Stromlinie und Bahnlinie .....                                                  | 9  |
| Abbildung 3: Stromfaden und Stromröhre .....                                                 | 10 |
| Abbildung 4: Stromfaden zur Bilanzierung der Massen-, Impuls- und Energieströme...           | 18 |
| Abbildung 5: Skizze zur Herleitung der eindimensionalen Wellengleichung .....                | 23 |
| Abbildung 6: Strömung durch eine konvergente Düse .....                                      | 28 |
| Abbildung 7: Strahlarten einer Lavaldüse .....                                               | 30 |
| Abbildung 8: strukturierte Gitter .....                                                      | 44 |
| Abbildung 9: unstrukturiertes Dreiecksgitter .....                                           | 45 |
| Abbildung 10: hybrides Gitter .....                                                          | 45 |
| Abbildung 11: Positionsverschiebung eines Fluidelements im Rechengitter .....                | 50 |
| Abbildung 12: Kompass-Notation eines strukturierten Gitters .....                            | 51 |
| Abbildung 13: Diskretisierung eines eindimensionalen Problems .....                          | 54 |
| Abbildung 14: Screenshot der ANSYS Workbench 18.2 .....                                      | 63 |
| Abbildung 15: Realitätsgetreue Nachbildung der Druckeinheit .....                            | 66 |
| Abbildung 16: Berechnungsmodell auf Basis des Realitätsmodells .....                         | 67 |
| Abbildung 17: Screenshot ANSYS Workbench 18.2 Geometrie Import .....                         | 68 |
| Abbildung 18: Vernetztes Berechnungsmodell inklusive Inflation Layers .....                  | 69 |
| Abbildung 19: Komponentendefinition für das Setup .....                                      | 70 |
| Abbildung 20: Screenshot der Setup Benutzeroberfläche .....                                  | 71 |
| Abbildung 21: Screenshot der "Models" Benutzeroberfläche .....                               | 72 |
| Abbildung 22: Screenshot der möglichen Auswahl der Randbedingungen .....                     | 73 |
| Abbildung 23: Screenshot der "Dynamic Mesh" Benutzeroberfläche .....                         | 74 |
| Abbildung 24: Foto des verwendeten Rechners .....                                            | 76 |
| Abbildung 25: Screenshot der "Solution" Benutzeroberfläche .....                             | 77 |
| Abbildung 26: Weg-Geschwindigkeits-Profil eines 0,28g Projektils ( $p_{abs}=2bar$ ) .....    | 78 |
| Abbildung 27: Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm eines 0,28g Projektils ( $p_{abs}=2bar$ ) ..... | 79 |
| Abbildung 28: Zeit-Weg-Diagramm eines 0,28g Projektils ( $p_{abs}=2bar$ ) .....              | 80 |
| Abbildung 29: Simulationsergebnis der Geschwindigkeitsverteilung des Luftstroms 1 ..         | 81 |
| Abbildung 30: Simulationsergebnis der Geschwindigkeitsverteilung des Luftstroms 2 ..         | 82 |
| Abbildung 31: Simulationsergebnis der Druckverteilung im Inneren des Laufs 1 .....           | 83 |
| Abbildung 32: Simulationsergebnis der Druckverteilung im Inneren des Laufs 2 .....           | 84 |

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Abbildung 33: 3D-Konstruktion der Druckluftapparatur (Version 1) .....                  | 85  |
| Abbildung 34: Detailansicht der 3D-Konstruktion (Startposition des Pumpvorgangs) ...    | 86  |
| Abbildung 35: Detailansicht der 3D-Konstruktion (Endposition des Pumpvorgangs).....     | 86  |
| Abbildung 36: Detailansicht der 3D-Konstruktion im Bereich der Schussabgabe .....       | 87  |
| Abbildung 37: Detailansicht der 3D-Konstruktion im Bereich der Laufhalterung .....      | 88  |
| Abbildung 38: Detailansicht der 3D-Konstruktion im Bereich des V0-Messgeräts .....      | 88  |
| Abbildung 39: Reale Druckluftapparatur (Version 1) .....                                | 89  |
| Abbildung 40: Detailansicht der Druckluftapparatur (Endposition des Pumpvorgangs) .     | 90  |
| Abbildung 41: Detailansicht der Druckluftapparatur im Bereich der Schussabgabe .....    | 90  |
| Abbildung 42: Detailansicht des Ventilkörpers mit der konvergenten Düse .....           | 91  |
| Abbildung 43: Detailansicht der konvergenten Düse mit dem Ventilstößel .....            | 91  |
| Abbildung 44: Detailansicht der unterschiedlichen Lauflängen in der Laufhalterung ..... | 92  |
| Abbildung 45: Effektive Projektilwege unterschiedlicher Lauflängen .....                | 93  |
| Abbildung 46: Detailansicht der Projektilposition im 10mm langen Lauf .....             | 93  |
| Abbildung 47: Detailansicht der unterschiedlichen Ventilstößelformen .....              | 94  |
| Abbildung 48: Detailansicht der 3D-Konstruktion unterschiedlicher Druckbehälter .....   | 94  |
| Abbildung 49: Druckbehälter mit unterschiedlichem Fassungsvermögen .....                | 95  |
| Abbildung 50: 3D-Konstruktion der Druckluftapparatur (Version 2) .....                  | 96  |
| Abbildung 51: Reale Druckluftapparatur (Version 2) .....                                | 96  |
| Abbildung 52: Messung der Weg-Geschwindigkeits-Profile (0,28g Projektil) .....          | 97  |
| Abbildung 53: Versuchsaufbau der Zeitlupenanalyse .....                                 | 98  |
| Abbildung 54: Zeitlupenanalyse 40x verlangsamt .....                                    | 98  |
| Abbildung 55: Ventilstößel nach Beschuss .....                                          | 99  |
| Abbildung 56: Vergleich der unterschiedlichen Weg-Geschwindigkeits-Profile .....        | 100 |

## **Tabellenverzeichnis**

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabelle 1: Spezifizierung der Variablen in der Modellgleichung .....       | 47  |
| Tabelle 2: Vergleich der V0 Referenzwerte der Berechnung und Messung ..... | 100 |



## Arduino-Code-Geschwindigkeitsmessgerät

```
#include <AFMotor.h>

AF_Stepper motor(200, 1);

void setup() {
  Serial.begin(9600);
  Serial.println("Positionierung");

  motor.setSpeed(150);

  Serial.println("Double coil steps");

  motor.step(2000, BACKWARD, DOUBLE); //Backward heißt der Schlitten fährt zum Lauf
  motor.step(2000, FORWARD, DOUBLE); //Forward heißt der Schlitten fährt weg vom Lauf
}
void loop() {
}
```

## Abstract

### Abstract in Deutsch:

Diese Diplomarbeit hat zum Ziel, die theoretischen Grundlagen der Strömungsmechanik und der numerischen Strömungsmechanik verständlich darzulegen, um mit dessen Hilfe numerische Strömungssimulationen durchführen zu können. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf dem Erhalt plausibler Ergebnisse bezüglich problemspezifischer Fragestellungen, weshalb die theoretischen Werte mit experimentell ermittelten Daten abgeglichen werden. Im ersten Kapitel dieser Diplomarbeit werden die Grundlagen der Strömungsmechanik aufgefrischt, welche in Kapitel 2 um die Grundlagen der numerischen Strömungsmechanik erweitert werden. Dieses Wissen wird in Kapitel 3 genutzt, um CFD-Simulationen mit *ANSYS® FLUENT®* durchzuführen. Um die experimentellen Daten zu generieren, wird in Kapitel 4 sowohl die Konstruktion, als auch die Fertigung einer Druckluftapparatur beschrieben. Im abschließenden Kapitel 5, werden die mit Hilfe der Druckluftapparatur erhaltenen experimentellen Daten den Berechnungen gegenüber gestellt und mögliche Fehlerquellen sowie zukünftige Verbesserungsmöglichkeiten werden analysiert und diskutiert.

### Abstract in Englisch:

The aim of this diploma thesis is to explain the theoretical fundamentals of fluid mechanics and numerical fluid mechanics in order to be able to carry out numerical flow simulations. Particular attention is paid to obtaining plausible results with regard to problem-specific questions, which is why the theoretical values are compared with experimentally determined data. In the first chapter of this diploma thesis the fundamentals of fluid mechanics are refreshed, which are extended in chapter 2 with the basics of numerical fluid mechanics. This knowledge is used in Chapter 3 to perform CFD simulations with *ANSYS® FLUENT®*. In order to generate the experimental data, chapter 4 describes both the design and the manufacture of a compressed air apparatus. In the concluding chapter 5, the experimental data obtained with the aid of the compressed air apparatus are compared with the calculations and possible sources of error as well as future possibilities for improvement are analyzed and discussed.