DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Grundvorstellungen und Technologieeinsatz im Mathematikunterricht – eine empirische Untersuchung“

verfasst von / submitted by

Peter Rubicko

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 456
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik/ Geographie und Wirtschaftskunde
Betreut von / Supervisor:	Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorgelegte Arbeit selbständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben. Alle wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommenen Textpassagen und Gedankengänge sind durch genaue Angaben der Quellen in Form von Anmerkungen bzw. In-Text-Zitationen ausgewiesen, bei kursiven Textstellen handelt es sich um eine wörtliche Zitierung. Dies gilt auch für Quellen aus dem Internet, bei denen zusätzlich URL und Zugriffsdatum angeführt sind. Ferner versichere ich, diese Arbeit nicht bereits andernorts zur Beurteilung vorgelegt zu haben.

Wien, 2018

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 4
2. Grundvorstellungen 5
2.1. Definitionen 5
2.2. Entwicklung des Grundvorstellungskonzepts 7
2.3. Begriffsbildung 11
2.4. Wozu Grundvorstellungen? 14
2.4.1. Mathematische Grundbildung 15
2.4.2. Mathematische Modellbildung 16
2.4.3. Mathematisches Problemlösen 18
2.5. Kategorisierung der Grundvorstellungen 21
2.6. Ausbilden von Grundvorstellungen 23
3. Grundvorstellungen und Technologieeinsatz 28
3.1. GeoGebra 29
3.2. Einfluss von Technologieeinsatz auf das Ausbilden von Grundvorstellungen 30
4. Empirische Untersuchung 34
4.1. Konkrete Grundvorstellungen zur Untersuchung 34
4.1.1. Integralrechnung 35
4.1.2. Differenzenquotient 36
4.1.3. Differentialquotient 38
4.1.4. Funktionen 39
4.1.5. Wahrscheinlichkeitsbegriff, Wahrscheinlichkeitsrechnung & Statistik 42
4.1.6. Trigonometrie 43
4.2. Fragebogen 45
4.2.1. Handlungsbereiche, Inhaltsbereiche und angesprochene Grundvorstellungen 50
4.3. Auswertung 58
4.3.1. Kategorisierung der Antworten 58
4.3.2. Ergebnisse 79
5. Abstract – Conclusio 103
6. Literaturverzeichnis 105
Anhang 109

1. Einleitung

Nicht selten verbinden Schüler und Schülerinnen Mathematikunterricht nur mit Auswendiglernen von Formeln und rezeptartigen Rechenabfolgen. Dieses Kalkül wird zum Kernelement des Faches und häufig mit der Wissenschaft konnotiert. Es wird leider oft verabsäumt auf die intuitiven Vorstellungen und Ideen der dahinterliegenden mathematischen Konzepte einzugehen. Diese Vorstellungen sind aber in vielen Bereichen der Mathematik unverzichtbar. Um ein Verständnis für die mathematischen Konzepte zu bekommen müssen die Schüler und Schülerinnen diese Grundvorstellungen erst entwickeln. Die notwendigen Fähigkeiten sind dabei nicht angeboren, sondern müssen im Unterricht erarbeitet und gefördert werden. Genau um das Vorhandensein bzw. Nichtvorhandensein dieser Grundvorstellungen geht es in meiner Arbeit. Den Grund für das Verabsäumen des Ausbildens der Vorstellungen sehe ich unter anderem in zwei Bereichen. Einerseits handelt es sich bei der Mathematik um eine sehr abstrakte Wissenschaft, die unsere Vorstellungskraft in etlichen Bereichen deutlich übersteigt. Zweitens ist das Rechnen, das beim mathematischen Arbeiten unabdingbar ist, vor allem bei komplexeren Themenbereichen sehr zeitaufwendig. Kombiniert man diese Aspekte mit den begrenzten Unterrichtsstunden wird das Problem der fehlenden oder unzureichend ausgebildeten Grundvorstellungen deutlich. Computergestützter Unterricht könnte Abhilfe schaffen. Vor allem in letzter Zeit (auch wegen dem Pflichtteil in der standardisierten Reife- und Diplomprüfung) wird Technologieeinsatz in Schulen immer wichtiger und auch immer präsenter. Mittlerweile gut entwickelte und anwenderfreundliche computergestützte mathematische Arbeitsumgebungen, wie z. B. Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometriesysteme oder Tabellenkalkulationsprogramme, übernehmen die Rechenarbeit in Sekundenschnelle und bieten Möglichkeiten komplizierte Sachverhalte zu visualisieren und zu veranschaulichen. Hinzukommend könnte man so an die Lebenswelt der Schüler und Schülerinnen anknüpfen und den Unterricht für sie spannender gestalten.

Das führt zur Annahme, dass Schüler und Schülerinnen, die im Unterricht mit solchen mathematischen Arbeitsumgebungen arbeiten, besser ausgeprägte Grundvorstellungen besitzen. Eine empirische Untersuchung, welche dieser Annahme nachgehen soll, stellt den Kernbereich dieser Arbeit dar. Dazu werden einige theoretische Aspekte des Grundvorstellungskonzepts vorgestellt.

2. Grundvorstellungen

2.1. Definitionen

Um einen Überblick zu bekommen, worum es sich bei Grundvorstellungen handelt möchte ich den theoretischen Teil meiner Arbeit mit unterschiedlichen Definitionen dieses didaktischen Konzepts beginnen.

„Viele Vorstellungen, die hinter mathematischen Inhalten stehen, sind so wichtig und für die Allgemeinbildung unverzichtbar, dass man sie als Grundvorstellungen bezeichnet." (MALLE 2003/04 S.7)

„Jeder mathematische Begriff als elementare Einheit einer mathematischen Theorie ist stets mit intuitiven Vorstellungen und Begleitvorstellungen auf Seiten des Lernenden bzw. ganz allgemein auf Seiten des Mathematik Treibenden verbunden." (LECHNER 1999/2000, S. 12)

„Grundvorstellungen sind eine Ausbildung eines Netzwerks, das sich durch Erweiterungen von alten und Zugewinn von neuen Vorstellungen zu einem leistungsfähigerem System mentaler mathematischer Modelle entwickelt." (v. HOFE 2003, S. 6).

„GVs describe relationships between mathematical structures, individual-psychological processes, and subject-related contexts, or, in short: the relationships between mathematics, the individual and reality." (v. HOFE & BLUM 2016, S. 231).

„Grundvorstellungen sind die Träger der Bedeutung des mathematischen Inhalts und repräsentieren für das Individuum den Kern des Inhalts." (BLUM & WIEGAND 1998, S. 30).

Auch wenn sich die Definitionen in ihrem Wortlaut unterscheiden, überschneiden sie einander in ihren Kernaussagen. Es geht um Vorstellungen, die ein Individuum zu mathematischen Begriffen oder Konzepte entwickelt.

„Meiner Meinung nach ist Mathematik das Hassfach der meisten Schüler schlechthin. Kaum jemand würde sagen, dass er mit großer Angst zum Deutschunterricht geht. Mathematik dagegen wird, ebenso wie Physik, Chemie und andere Naturwissenschaften, von vielen Schülern als sehr abstrakt, weltfremd und ohne großen praktischen Nutzen empfunden.“ (WOLBA 2016, S. 102).

Dass der Mathematikunterricht bei den meisten Schülern und Schülerinnen nicht zu den Lieblingsstunden zählt ist kein Geheimnis. Etwas überraschender wird es, wenn man nach den Ursachen dieses Phänomens sucht. Nicht der hohe zeitliche Aufwand oder die Prüfungsangst sind der Hauptgrund dafür, sondern die vermeintliche Sinnlosigkeit des Mathematikunterrichts. Diese subjektive Einschätzung vieler Schüler und Schülerinnen hat verschiedene Ursachen. Ein Grund für das negative Ansehen der Mathematik bei den Kindern könnte sein, dass es im Unterricht zu Verständnisproblemen kommt. Begriffe und Symbole, welche für den Mathematikunterricht nun mal essentiell sind, werden unterschiedlich gedeutet und es kommt zur Bildung von Fehlvorstellungen. Sobald die Schüler und Schülerinnen dann merken, dass sie mit ihren Vorstellungen an der Lösung von mathematischen Problemen scheitern, besteht die Gefahr, dass sie damit aufhören, die Symbole und Begriffe mit Bedeutung zu füllen (vgl. v. HOFE 1996, S. 4).

Desto fortgeschrittener und etablierter diese Fehlvorstellungen bei den Schülern und Schülerinnen sind, desto schwieriger wird es auch neue Verfahren und Begriffe mit Sinnhaftigkeit zu versehen. Irgendwann besteht die letzte Option der Lernenden darin, sich an Rechenregeln, Formeln und Merksätze zu klammern, welche sie nicht mehr nachvollziehen können. So entsteht ein falsches Bild von Mathematik in den Köpfen der Kinder und grundlegende mathematische Kompetenzen können nicht entwickelt werden (vgl. v. HOFE 2003, S. 7).

Diese Problematik zwingt die Lehrpersonen zu intervenieren. Sie müssen sich die Frage stellen, wie sie mit diesen intuitiven Vorstellungen umgehen und wie sie versuchen sollen

Fehlvorstellungen erst gar nicht entstehen zu lassen. Sie stehen vor der Einschätzung, ob sich die gewünschten Vorstellungen allein durch angemessenen Unterricht bilden, oder ob man das Generieren von adäquaten Grundvorstellungen bewusst fördern und begleiten muss. Allein durch das Aufkommen dieser Unsicherheit bei den Lehrpersonen kommt es zu einer Sensibilisierung für die Denkprozesse der Schüler und Schülerinnen. Ein behutsamerer Umgang mit Fehlern von Schülern und Schülerinnen könnte eine positive Begleiterscheinung darstellen (vgl. LECHNER 1999/2000, S. 12).

Malle ist davon überzeugt, dass entsprechende Grundvorstellungen keinesfalls angeboren sind und auch nicht automatisch im Unterricht induziert werden. Somit ist für ihn klar, dass sich Mathematikunterricht explizit damit beschäftigen muss. Er plädiert dabei für einen zweiphasigen Verlauf. In der ersten, inhaltlich-anschauliche, Phase sollen die nötigen Grundvorstellungen entwickelt werden. Das Arbeiten mit Regeln und dem jeweiligen Kalkül wird erst in der zweiten, formal-regelhaften, Phase Bedeutung geschenkt (vgl. MALLE 2003/04, S. 7).

Der Aufbau von Grundvorstellungen bei Schülern und Schülerinnen wird in Abschnitt 2.6. noch genauer erläutert. Ebenso die Ziele und Vorteile, welche man sich dadurch erhofft. Zuerst wollen wir aber der Frage nachgehen, ob das eingangs erwähnte Verständigungsproblem zwischen den Lehrenden und den Lernenden durch das Grundvorstellungskonzept gelöst bzw. gelindert werden kann und ob Grundvorstellungen dem Mathematikunterricht Sinn verleihen können. Um dies zu tun werfen wir einen Blick auf die historische Entwicklung des Konzepts.

2.2. Entwicklung des Grundvorstellungskonzepts

Bis in die 1980er Jahre war es in der Stoffdidaktik gang und gebe, dass man versucht hat universitäre Hochschulmathematik für das Klassenzimmer zu adaptieren. Statt Metaphern wurden Zahlen verwendet und es war normal für die Schüler und Schülerinnen sich mit der Epsilon-Delta-Umgebung auseinanderzusetzen. Man fand aber bald heraus, dass die Schüler und Schülerinnen mit dieser Art des mathematischen Arbeitens zwar umgehen können, den Sinn dahinter aber nicht zu erfassen vermögen. Diese Erkenntnis leitete einen Paradigmenwechsel hin zum inhaltlichen Verständnis ein (vgl. v. HOFE & BLUM 2016, S. 226-227).

Abbildung 1: Entwicklung des Grundvorstellungskonzepts (vgl. v. HOFE 1996, S. 4)

Eine Vorreiterrolle beim Aufbruch dieser starren mathematischen Strukturen übernahm Felix Klein (1928), welcher in Abbildung 1 nicht angeführt ist. Er war einer der intuitivsten und einflussreichsten Köpfe in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik. Neben mehr Transparenz im Mathematikunterricht forderte er auch den vermehrten Einsatz von angemessenem Material. Durch das Arbeiten mit diesen Materialien soll an bereits Bekanntes angeknüpft werden und neue Inhalte somit lebensweltlicher eingeführt werden. Das kann durch ganz triviale Tätigkeiten wie Zeichnen, Ausschneiden oder Messen geschehen (vgl. KLEIN 1928, S. 30).

Seinem Vorbild folgten auch andere Mathematiker. Nennenswert sind an dieser Stelle Lietzmann, Courant und Robbins. Letztere haben seine Ideen in einem Zitat knapp verschriftlicht.

„Although axiomatic form indeed represents an ideal to be striven towards, it would be a mistake to believe that axioms designate the essence of mathematics. The constructive viewpoint of the mathematician is a non-deductive, non-rational element, which is just as vital to mathematics as the creative imagination is to visual arts and music.“ (Courant & Robbins 1962, S. 165)

Die Auseinandersetzung mit mathematischen Grundvorstellungen hat aber eine sehr viel längere Tradition. Ihren Ursprung hat das Konzept in der Rechendidaktik der Volksschulen im deutschsprachigen Raum. Pestalozzi war der erste, der die mechanischen Rechenabläufe der damaligen Volksschulen kritisierte und sich für eine „Anschauungslehre“ einsetzte. Das bedeutet weg von sinnlosem Auswendiglernen hin zu Anschauungen und Verständnis. Auch er benutzt bereits den Vorstellungsbegriff. Die Begriffe Vorstellungen, Anschauungen und Verinnerlichungen standen alle für dasselbe didaktische Ziel: das Fördern eines adäquaten Begriffsverständnisses der Schüler und Schülerinnen. Wie man in Abbildung 1 entnehmen kann, war Oehl der erste, der den Begriff „Grundvorstellungen“ explizit erwähnte. Der Terminus hat sich etabliert und wurde von Griesel weiterverwendet. Das Konzept von Griesel kann allgemein als die Wurzel des Grundvorstellungskonzepts angesehen werden. Mit ihm wurden Forderungen nach Individualität und schöpferischer Eigenständigkeit laut (vgl. v. HOFE 1996, S. 5).

Besonders viele zentrale Ideen des Grundvorstellungskonzepts sind bei Kühnel sichtbar. Er entwickelte ein Unterrichtskonzept, das den Zielen der bisherigen formalen Bildung eher skeptisch gegenübersteht. Eine grundlegende Neuorientierung der Unterrichtspraxis und ein größeres Augenmerk auf die schöpferische Eigenständigkeit des Kindes und dessen Individualität sind seine Ansatzpunkte. Damit kritisiert er gleich mehrere gängige Unterrichtsformen: Zum einen die strikte Unterweisung des christlichen Glaubens im Mathematikunterricht und zum anderen die fragend-entwickelnde Unterrichtsform, welche, seiner Meinung nach, die Schüler und Schülerinnen ihrer Bildungsmöglichkeiten beraubt. Er möchte einen Wechsel vom fragend-entwickelnden zum problem- und anwendungsorientieren Unterricht vollziehen. So will er der Passivität der Schüler und Schülerinnen entgegenwirken und sie zur Eigenständigkeit motivieren. Ziel seiner Überlegungen ist es, dass die Schüler und Schülerinnen im Mathematikunterricht selbst Probleme entdecken und diese anschließend formulieren, strukturieren und schlussendlich auch rechnerisch lösen können (vgl. v. HOFE 1996, S. 5).

Er streicht auch die Relevanz heraus, dass die Schüler und Schülerinnen Situationen mathematisch erfassen und Begriffe richtig deuten können. Kurz gesagt, sie müssen Vorstellungen generieren. Diese Vorstellungen bauen eine Brücke zwischen der Realität und der abstrakten Mathematik (Abbildung 2). Abstrakte Begriffe werden auf eine anschauliche Ebene geführt und somit für die Schüler und Schülerinnen zugänglich. Dieser Prozess ist für Kühnel keineswegs rezeptiv, sondern aktiv-dynamisch. Eine große Bedeutung bei diesem Unterfangen spielen die Lebenswelten der Schüler und Schülerinnen. Erst durch wirkliches Ausführen und eigenständiges Handeln mit Gegenständen kommt es zu einer erfolgreichen Begriffsbildung (vgl. v. HOFE 1996, S. 6).

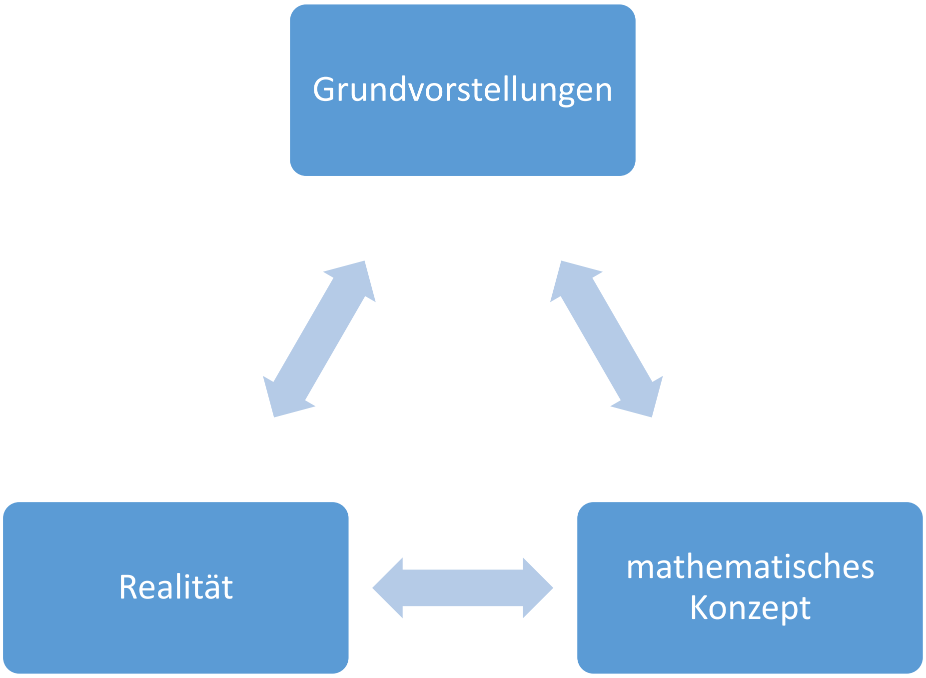


Abbildung 2: Beziehung von Grundvorstellungen, Realität und mathematischen Konzepten (eigene Darstellung)

Wie anfangs in diesem Abschnitt erwähnt hat das Grundvorstellungskonzept seine Ursprünge im Volksschulbereich. Es hat einige Zeit gedauert bis das Konzept auch in weitere Bereiche der mathematikdidaktischen Theorie und Praxis vorgedrungen ist. Diese Limitierung lässt sich vor allem mit zwei Aspekten erklären. Der erste Punkt ist, dass sich alle Überlegungen lange Zeit größtenteils auf die Grundschule und die unteren Klassen der Mittelschule beschränkten. Überlegungen zu Grundvorstellungen in höheren Klassen waren bislang kaum zu finden. Der zweite wesentliche Faktor war ein Problem beim Konkretisieren der relevanten Grundvorstellungen. Es war klar, dass die Schüler und Schülerinnen idealtypische Grundvorstellungen generieren und ein adäquates Begriffsverständnis ausbilden sollen. Die Frage nach den tatsächlich ausgebildeten Vorstellungen, und damit einhergehenden Fehlvorstellungen, wurde aber lange Zeit ignoriert. Blum und Kirsch (1979) wurden auf diese Missstände aufmerksam und versuchten das Grundvorstellungskonzept zu erweitern. Sie übertrugen die Ideen auf Inhalte der Oberstufe und befassten sich insbesondere mit dem Ableitungs- und Integralbegriff (vgl. v. HOFE 1996, S. 6).

Mittlerweile wurden zu so gut wie allen Themenbereiche (auch für die Oberstufe) Grundvorstellungen formuliert. Besonderen Anteil an diesen Entwicklungen haben Malle und vom Hofe. In Abschnitt 4.1. sind etliche Grundvorstellungen von unterschiedlichen Gebieten angeführt, welche für die empirische Untersuchung von Relevanz sind.

2.3. Begriffsbildung

„Das Verstehen von Mathematik ist auf das Engste mit dem Verstehen der Begriffsbildung verbunden." (LECHNER 1999/2000, S. 10).

Schon Lechner erwähnte im angeführten Zitat in Abschnitt 2.1., dass Vorstellungen stets mit Begriffen einhergehen.

Vollrath hebt das Lehren von Begriffen auf eine Stufe, der sich andere Aktivitäten im Unterricht unterzuordnen haben. Er meint dabei nicht nur das bloße Einführen der Begriffe, sondern auch wesentliche Schritte wie das Verstehen von Zusammenhängen, das algorithmische Arbeiten, das Begründen und das Anwenden. Er sieht in der Mathematik ein „Denken in Begriffen".

Wie bei den Grundvorstellungen selbst gibt es auch bei den mathematischen Begriffen Tücken, d. h. Möglichkeiten von Fehlinterpretationen. Viele Begriffe erwecken intuitive Vorstellungen. Bei manchen umgangssprachlichen oder aus Fremdsprachen stammenden Begriffen sind diese Intuitionen auch durchaus hilfreich. In diese Kategorie würden zum Beispiel die Begriffe „Dreieck", „Teiler", „Stetigkeit" oder „Tangente" fallen. Problematischer wird es, wenn es um mathematische Begriffe geht, welche eine ganz andere Konnotation besitzen als im alltäglichen Leben, wie beispielsweise der Begriff „Körper". Falls der Begriff dann auch noch innermathematisch unterschiedliche Bedeutungen besitzt wird es nochmals komplizierter, wie z. B. bei „Körper". Deshalb reicht es bei Weitem nicht aus neue Begriffe lediglich über Definitionen einzuführen. Den Schülern und Schülerinnen würde jegliche Motivation fehlen und den Lernprozess einschränken (vgl. VOLLRATH 1984, S. 11-12).

Das Wesen des Definierens hat schon Kant formuliert.

„Definieren soll, wie der Ausdruck selbst es gibt, eigentlich nur so viel bedeuten, als, den ausführlichen Begriff eines Dinges innerhalb seiner Grenzen ursprünglich darstellen." (KANT 1781/1787, S. 755).

Mathematik ist die einzige Wissenschaft, in der Definieren überhaupt möglich ist. Somit kann die Bedeutung eines Begriffs durch eine Definition vollständig und endgültig erfasst werden.

Dieses Alleinstellungsmerkmal der Wissenschaft kann und soll auch im Unterricht thematisiert werden.

„Auch in der Mathematik-Didaktik ist man sich der Komplexität dessen, was im Umfeld der fertigen Definitionen geschieht, bewusst und sieht darin einen Gegenstand notwendiger Aufmerksamkeit. Folgt man dem Konzept der Fundamentalen Ideen, so sollten Definitionen und ihre Genese auch im Mathematikunterricht prominent vorkommen. Die Struktur der zugrundeliegenden Wissenschaft sollte sich im dazugehörigen Unterricht widerspiegeln, so lautet etwas vereinfacht eine Forderung, um nicht zu sagen die Forderung der Fundamentalen Ideen." (GÖTZ & RAMHARTER 2011, S. 52).

Ein weiteres Argument für das Definieren im Mathematikunterricht liefert uns der Lehrplan. Sowohl in der Ober- als auch in der Unterstufe ist das Definieren fest verankert. Auszüge aus dem Oberstufenlehrplan enthalten Folgendes: Definieren von

- Abschnittweise definierten Funktionen,
- Potenzen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Exponenten,
- Wurzeln und Logarithmen,
- $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ für $0° \leq \alpha \leq 360°$,
- … (vgl. BMBWK 2000).

Ouvrier-Buffet liefert uns drei Möglichkeiten um mathematische Definitionen in der Schule sinnvoll einzusetzen:

1) Definitionen anhand von Beispielen und Gegenbeispielen konstruieren,
2) Definitionen durch Beweisen oder durch das Lösen von Problemstellungen konstruieren oder
3) Definitionen durch einen Modellierungsprozess konstruieren

(vgl. OUVRIER-BUFFET 2002, S. 384).

Wie bei vielen didaktischen Konzepten in der Mathematik findet man auch beim Begriffslernen ein Stufenmodell. Es handelt sich hierbei um Stufen des Verstehens. Solch ein Modell könnte wie folgt aussehen:

(1) Der Schüler oder die Schülerin kann eine Definition des Begriffs nennen.
(2) Er oder sie ist in der Lage zu entscheiden, ob vorgelegte Objekte unter den Begriff fallen.

(3) Der oder die Lernende kann eigenständig Beispiele für den Begriff angeben.

(4) Der Schüler oder die Schülerin kann Eigenschaften des Begriffs erklären.

(5) Er oder sie kann diese Eigenschaften auch zur Beschreibung oder zum Lösen von Problemstellungen benutzen.

(6) Er oder sie ist in der Lage Ober- und Unterbegriffe zu nennen und diese in Beziehung zu setzen (vgl. VOLLRATH 1984, S. 10-11).

Die Punkte ① bis ⑥ des Stufenschemas lassen sich in fünf verschiedene Aspekte des Begriffsverständnisses einordnen.

1. Begriff als Phänomen (Intuitives Begriffsverständnis) ② ③
2. Begriff als Träger von Eigenschaften (Inhaltliches Begriffsverständnis) ④
3. Begriff als Teil eines Begriffsnetzes (Integriertes Begriffsverständnis) ⑥
4. Begriff als formales Objekt (Formales Begriffsverständnis) ③ ①
5. Begriff als strukturierbares Objekt (Strukturelles Begriffsverständnis) ⑤

Fertigkeiten, welche den fünf Aspekten zuzuordnen wären sind beispielsweise:

1. Beispiele erkennen
2. Eigenschaften kennen
3. Beziehungen von Eigenschaften untereinander und Beziehungen zu anderen Begriffen kennen
4. Gesetzmäßigkeiten beweisen
5. Gleichwertigkeit verschiedener Definitionen erkennen

(vgl. WEIGAND et al. 2009, S. 119 ff).

Ein konkretes Beispiel könnte folgendermaßen aussehen:

1. Beispiele für verschiedene Dreiecksarten kennen (z. B. gleichseitige oder rechtwinkelige Dreiecke)
2. Eigenschaften von den verschiedenen Dreiecksarten kennen
3. Die verschiedenen Dreiecksarten zueinander in Beziehung setzen können (z. B. jedes gleichseitige Dreieck ist auch ein gleichschenkeliges Dreieck)
4. Beweisen, dass die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck 180° beträgt
5. Erkennen, dass man gleiche Dreiecke durch Angabe verschiedener Maße (Seitenlängen, Winkel) eindeutig definieren kann (z. B. Seiten-Seiten-Seiten- oder Seiten-Winkel-Winkel-Satz)

Verständnis vollzieht sich hierbei als Ergebnis eines geistigen Prozesses. Diese Zustandsänderung im Denken der Schüler und Schülerinnen zeigt sich dadurch, dass sich am Ende dieses Prozesses konkrete nachprüfbare Fähigkeiten, wie z. B. das Wiedergeben einer Begriffsdefinition oder das Aufzählen von Eigenschaften, eruieren lassen, auf welche unter anderem auch beim Ausbilden von Grundvorstellungen zurückgegriffen werden kann. Das primäre Ziel des Lernens eines Begriffs, sei es durch Definitionen oder anderwärtig, ist der Aufbau eines ausgeprägten Begriffsverständnisses im Sinne des Stufenmodells.

2.4. Wozu Grundvorstellungen?

Die Relevanz von Grundvorstellungen in der mathematischen Allgemeinbildung kann mit zwei Aspekten begründet werden. Zum einen sind Grundvorstellungen essentiell für das mathematische Problemlösen, zum anderen sind sie auch unabdingbar für das bloße Anwenden von Mathematik (vgl. MALLE 2003/04, S. 9).

Vohns beschreibt und legitimiert das Grundvorstellungskonzept folgendermaßen:

„Allgemein zielt das Konzept auf den verständnisorientieren Erwerb mathematischer Begriffe und Verfahrensweisen, wobei bestimmte grundlegende Vorstellungen im Mittelpunkt stehen, die für dieses Verstehen konstituierend sind. Grundvorstellungen beschreiben damit Phänomene, die insbesondere für die individuelle Begriffsbildung als wesentlich angenommen werden, und zwar zunächst einmal aus inhaltsanalytischer Perspektive." (VOHNS 2005, S. 59).

Renommierte internationale Vergleichsstudien wie beispielsweise PISA und TIMSS zeigen gravierende Defizite bei elementaren mathematischen Fähigkeiten auf.

„Die Zahlen sprechen eine deutliche Sprache", kommentiert Bildungsministerin Sonja Hammerschmid (SPÖ) die Ergebnisse der neuen Pisa-Studie. Das tun sie tatsächlich. In allen drei Testbereichen – also in Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften – hat sich Österreich verschlechtert. Fast jeder dritte 15-Jährige ist ein Risikoschüler und hat zumindest in einem der drei Bereiche „gravierende Mängel." (NEUHAUSER 2016).

Das liegt daran, dass sich Mathematikunterricht zu sehr auf die Vermittlung von Standardverfahren konzentriert und der Aneignung von flexibel anwendbaren mathematischen Fähigkeiten zu wenig Beachtung geschenkt wird. Die enttäuschenden Ergebnisse kurbeln immer wieder Diskussionen über mathematische Grundbildung an.

2.4.1. Mathematische Grundbildung

Der Terminus Grundbildung ist in diesen Diskussionen aber nicht genau definiert. Man ist sich nicht einig, welche Fertigkeiten, Ideen, Fähigkeiten und Vorstellungen essentiell sind und welche verzichtbar sind. Die bereits angesprochenen Schulleistungsstudien haben aber einen wesentlichen Teil dazu beigetragen, den Begriff der Grundbildung weitgehend zu normieren. Mathematische Grundbildung beschränkt sich nicht auf technische Rechenverfahren oder Formelanwendungen, sondern dient als Werkzeug zur Modellierung und geistiger Gestaltung (vgl. v. HOFE 2003, S. 4).

PISA beschreibt mathematische Grundbildung als die Fähigkeit,

- die Rolle der Mathematik in der Welt zu verstehen und zu erkennen,
- begründete mathematische Urteile abzugeben und
- sich so mit Mathematik zu beschäftigen, welche den Anforderungen des zukünftigen und gegenwärtigen Lebens einer Person als reflektierten, engagierten und konstruktiven Bürgers entspricht (vgl. BAUMERT et al. 2001, S. 141).

2.4.2. Mathematische Modellbildung

Der vorhin beschriebene Umgang mit Mathematik lässt sich im Wesentlichen als Modellbildungsprozess (Abbildung 3) beschreiben.

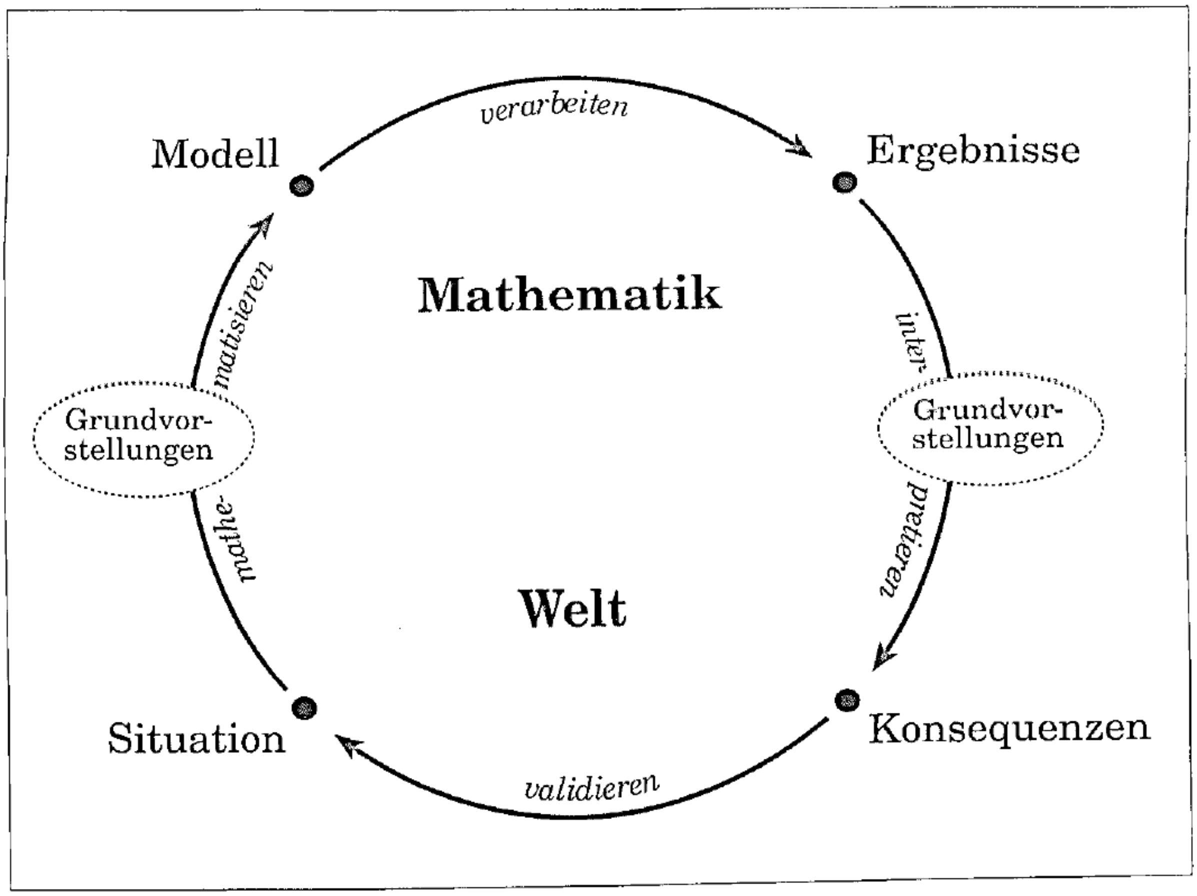


Abbildung 3: Modellierungsprozess (vgl. SCHUPP 1988, S. 6)

In diesem zyklischen Modell wird zunächst eine Situation aus der realen Welt mathematisiert. Es müssen mathematische Verfahren oder Begriffe gefunden werden, mit denen man das reale Problem auf eine mathematische Ebene führen kann. Für diese Kommunikation zwischen der Wirklichkeit und der abstrakten Mathematik benötigt man entsprechenden Grundvorstellungen. Danach werden auf Seiten der Mathematik Ergebnisse erarbeitet, welche in Bezug auf die reale Situation interpretiert werden müssen. Auch bei dieser Überleitung zwischen Mathematik und Realität sind Grundvorstellungen zwingend notwendig. Der letzte Schritt ist die Validierung. Hier muss überprüft werden, ob die Ergebnisse und Konsequenzen des mathematischen Modells für die Lösung des Problems geeignet sind. Sind sie das nicht muss der Zyklus erneut, mit einem besser geeigneten Modell, durchlaufen werden. Wie man Abbildung 3 entnehmen kann, sind besonders zwei Schritte in diesem Modell hervorzuheben. Das ist zuerst das mentale

Übersetzen des realen Problems auf eine mathematische Ebene und danach das Interpretieren der abstrakten Ergebnisse für die tatsächliche Situation. Bei beiden, essentiellen, Schritten werden Grundvorstellungen benötigt, welche die Kommunikation zwischen Wirklichkeit und Mathematik ermöglichen (vgl. HENN 2002, S. 4-7).

Diesen einschneidenden Fakt erkannte auch schon Pollak im Jahre 1979. Vom Hofe und Blum formulierten seine Gedanken folgendermaßen.

„Primary and secondary GVs play a key role in the process of modelling, that is, in the translation between mathematics and the ‚rest oft he world'." (v. HOFE & BLUM 2016, S. 234*).*

Was vom Hofe und Blum mit primären und sekundären Grundvorstellungen meinen wird in Abschnitt 2.5. noch genauer beschrieben. Blum und Leiß (2007) gehen jedenfalls noch einen Schritt weiter und modifizieren den Modellbildungskreislauf, indem sie die Grundvorstellungen nicht nur beim Übersetzungsprozess anführen, sondern ihnen auch eine innermathematische Funktion zuweisen. Dieses modifizierte Modell verwenden auch vom Hofe und Blum.

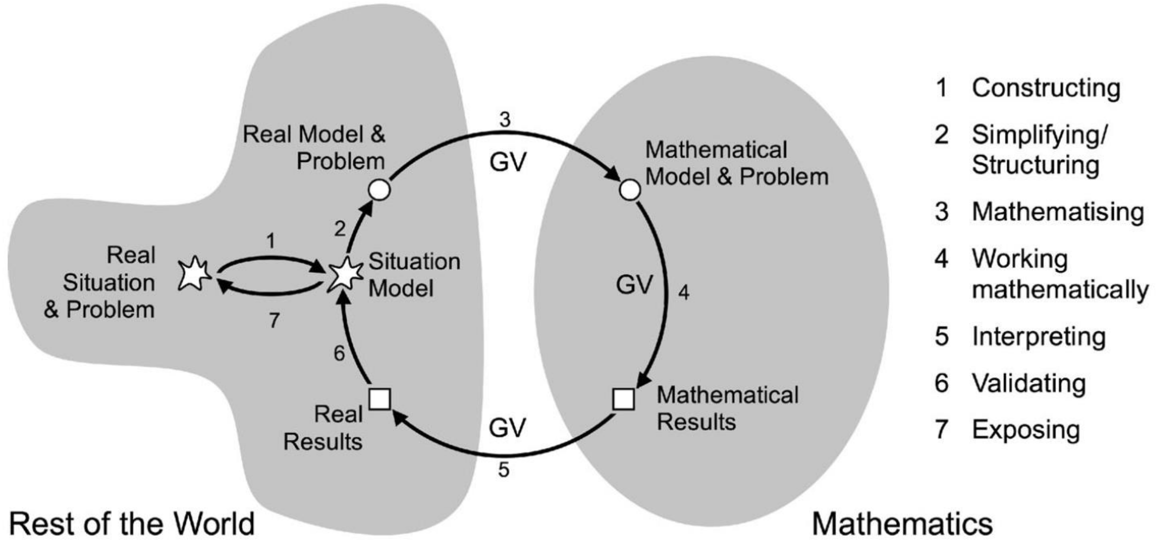


Abbildung 4: erweiterter Modellierungsprozess (vgl. v. HOFE & BLUM 2016, S. 235)

Dieses modifizierte Modell (Abbildung 4) unterscheidet sich von jenem von Schupp dadurch, dass explizit zwischen Realität und Mathematik unterschieden wird. Außerdem kommt deutlich zur Geltung, dass Grundvorstellungen auch innermathematisch relevant sind und nicht ausschließlich zur Übersetzung dienen.

2.4.3. Mathematisches Problemlösen

Auch für Lechner korrelieren mathematisches Verständnis und die Fähigkeit Problemstellungen zu lösen stark. Damit Schüler und Schülerinnen Probleme lösen und sich vom rein strategischen Mathematikunterricht trennen können sind drei Aspekte, welche auch in Abbildung 5 visualisiert sind, entscheidend:

1. Sie müssen ausreichend Wissen und Kenntnisse in den mathematischen Bereichen Algebra/Arithmetik, Geometrie, Analysis und Stochastik vorweisen.
2. Sie müssen ein adäquates Begriffsverständnis verinnerlicht haben, und
3. sie müssen die Fähigkeiten und Fertigkeiten erlangt haben, welche es ihnen ermöglichen mathematisch zu arbeiten.

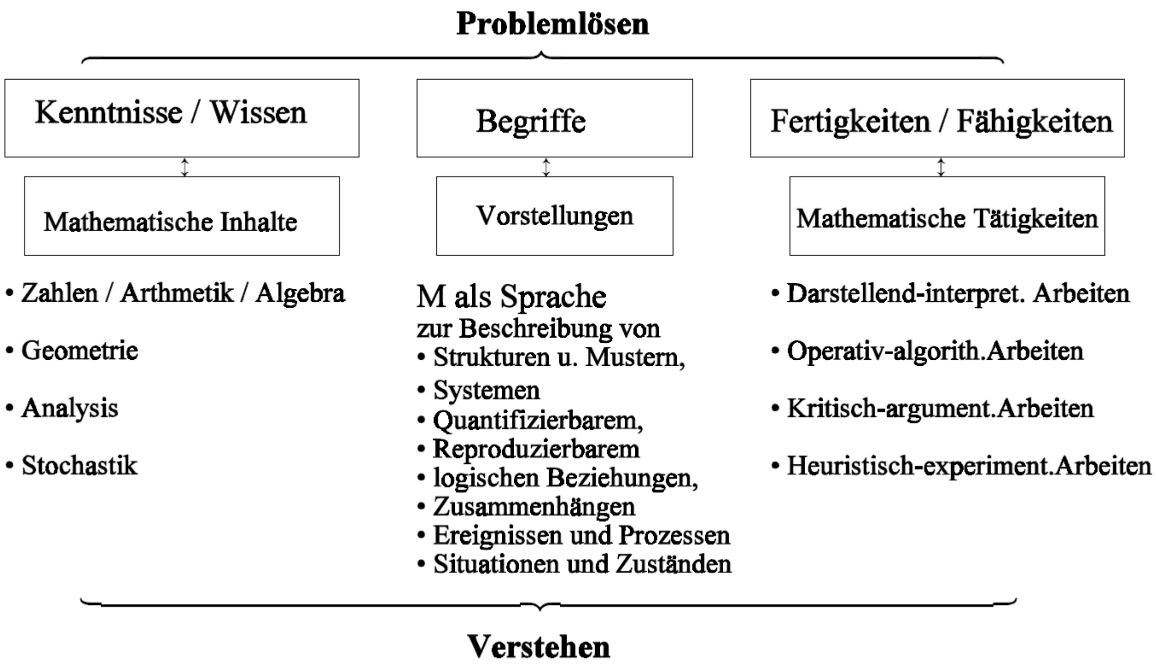


Abbildung 5: mathematisches Problemlösen (vgl. LECHNER 1999/2000, S. 1)

Dieser Prozess soll dabei helfen übergeordnete Ziele zu erreichen. Ähnlich wie bei dem Modellbildungskreislauf geht es darum, dass die Schüler und Schülerinnen Prozesse, Vorgänge und Strukturen der realen Welt erkennen und verstehen sollen und auch die Fertigkeiten besitzen auftretende Probleme mit mathematischen Werkzeugen erschließen zu können. Wie zuvor schon erwähnt, gehen Begriffe und Vorstellungen Hand in Hand. Wie man in Abbildung 6 sehen kann, ist es auch in diesem Modell von zentraler Bedeutung, dass mathematische Begriffe mit angemessenen Grundvorstellungen gekoppelt werden. Erst wenn die Schüler und Schülerinnen die Mathematik als eigene Sprache mit eigener Semantik, Pragmatik und Syntax erkennen, kann es zu einem mathematischen Verständnis kommen (vgl. LECHNER 1999/2000, S. 2).

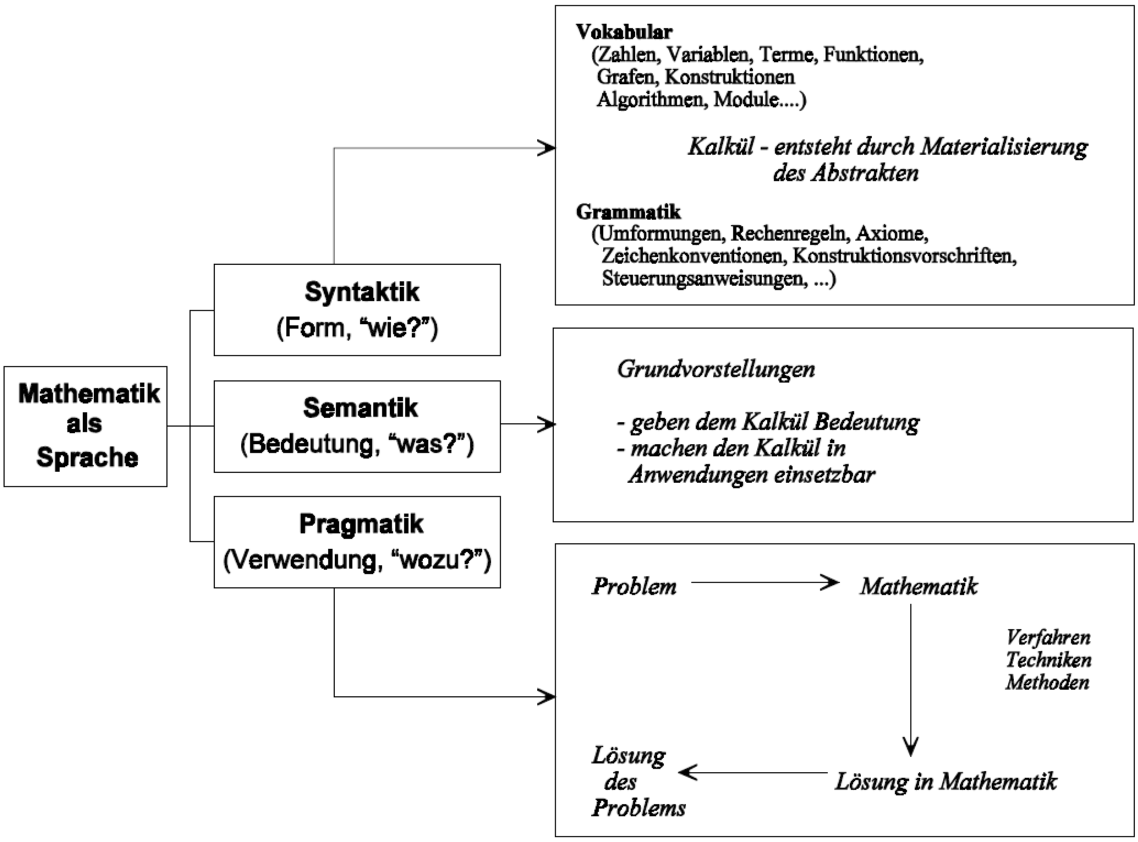


Abbildung 6: Mathematik als Sprache (vgl. LECHNER 1999/2000, S. 27)

In Abbildung 6 können wir noch einen genaueren Blick auf die Mathematik als eigene Sprache werfen und noch besser erkennen, welche Rolle Grundvorstellungen bei diesem gedanklichen Akt spielen. Die Syntaktik kann aufgeteilt werden in zwei Bereiche. Zum einen sind das die Vokabeln, welche die mathematischen Gegenstände (z. B. Funktionen, Vektoren, …) umfassen und zum anderen die Grammatik, welche die zulässigen Manipulationen, Rechenregeln und Operationen beinhaltet. Die Pragmatik stellt sich die Frage des wozu. Sie beschäftigt sich mit der Beschreibung von Problemen in der realen Welt und stellt den anwendungsorientierten Teil der Wissenschaft dar. Wie beim Modellbildungskreislauf haben wir jetzt zwei Pole. Die abstrakte Syntaktik und die reale Pragmatik. Wie zuvor benötigen wir ein Hilfsmittel, dass uns erlaubt vom Abstrakten ins Reale zu gelangen. Hier kommt die Semantik und mit ihr die

Grundvorstellungen ins Spiel. Die Grundvorstellungen füllen das Kalkül mit Bedeutung und bauen eine Brücke zwischen mathematischen Verfahren, Methoden und Techniken und realen Problemen. Wie schon beim Modellbildungskreislauf verleihen die Grundvorstellungen der Mathematik ihre Bedeutung und macht sie für die Lebenswelt der Schüler und Schülerinnen relevant (vgl. LECHNER 1999/2000, S. 27).

Anhand des Modellbildungskreislaufs und des Konzepts des Problemlösens ahnt man schon die Rolle, welche Grundvorstellungen beim mathematischen Arbeiten einnehmen. Sie fungieren als Bindeglied zwischen Theorie und Praxis.

Kleine hat dies in seinem Artikel „Grundbildung durch Grundvorstellungen" auf den Punkt gebracht. Für ihn bedeutet mathematische Grundbildung, die Fähigkeit anwendungsbezogene Sachsituationen über das Konstrukt der Grundvorstellungen zu operationalisieren. Dieses Verständnis unterliegt einer konstruktivistischen Sichtweise. Er meint, dass die Vorstellungen nicht als rezeptiv erworbene Repräsentationen zu verstehen sind, sondern viel mehr als eine flexible und individuelle Gruppierung von kognitiven Schemata. Außerdem weist er darauf hin, dass dieser Prozess von Veränderungen, Neuinterpretationen und Reorganisationen geprägt ist. Er behauptet sogar, dass die mehrmals angesprochene Schnittstelle zwischen Mathematik und Realität das Wesensmerkmal des mathematischen Arbeitens im Sinne von Konkretisierungs- und Abstraktionsvorgängen darstellt. Diese Übersetzungsprozesse sind für ihn beim Modellbildungskreislauf essentiell und müssen auf jeden Fall im Schema berücksichtigt werden. Kleine betrachtet Schüler und Schülerinnen als mathematisch gebildet, wenn sie die Fähigkeiten besitzen, passende Sachsituationen zu skizzieren, die mit gegebenen Termen gelöst werden können. Umgekehrt müssen sie auch die Fertigkeiten aufbringen, mentale Modelle zu eruieren, die zum Lösen realistischer Problemstellungen beitragen. Dieses Abstrahieren und Konkretisieren ist seiner Ansicht nach nur mit ausgeprägten Grundvorstellungen vorstellbar (vgl. KLEINE 2007, S. 171).

Folgendes Zitat von vom Hofe fasst die bisherigen Erkenntnisse kurz und prägnant zusammen:

> *„Wichtig für die Vermittlung zwischen Mathematik und Realität ist die Ausbildung von Grundvorstellungen mathematischer Begriffe und Verfahren." (vom HOFE 2003, S. 5).*

Die von Kleine angesprochene Reorganisation und Neuinterpretation bringt uns gleich zu einem nächsten wichtigen Punkt des Grundvorstellungskonzepts, welcher im folgenden Abschnitt behandelt wird.

2.5. Kategorisierung der Grundvorstellungen

Man kann Grundvorstellungen in zwei verschiedene Arten kategorisieren. Die erste Klasse sind die normativen Grundvorstellungen. Bei ihnen handelt es sich um eine didaktische Kategorie der Lehrperson, welche im Hinblick auf ein didaktisches Ziel hergeleitet werden. Sie gründen sich auf inhaltlichen Überlegungen und Deutungsmöglichkeiten eines Zusammenhangs, welche den mathematischen Kern beschreiben sollen. Die zweite Kategorie beinhaltet die deskriptiven Grundvorstellungen. Sie beschreiben die individuellen Erklärungsmodelle der Schüler und Schülerinnen und basieren auf deren Erfahrungsbereichen (vgl. v. HOFE 1995, S. 123).

Es existiert weiters eine Einteilung in primäre und sekundäre Grundvorstellungen. Die primären Grundvorstellungen der Schüler und Schülerinnen leiten sich aus gegenständlichen Handlungserfahrungen ab und können sowohl im Unterricht als auch im Alltag entwickelt werden. Sie werden auch als individuelle Grundvorstellungen bezeichnet, da sie eben von den Schülern und Schülerinnen selbstständig entwickelt werden. Sekundäre Grundvorstellungen hingegen werden erst durch das Auseinandersetzen mit komplexeren mathematischen Darstellungsmitteln und Zusammenhängen erworben und vertieft. Diese, im Unterricht generierten, Anschauungen werden (auch) als normative Grundvorstellungen bezeichnet und bauen auf den individuellen Grundvorstellungen auf (vgl. ROTH & SILLER 2016, S. 2).

Primäre Grundvorstellungen kennzeichnen sich dadurch, dass sie sich auf reale Objekte und Aktionen beziehen. Das Zusammenbauen und Auseinandernehmen von Legosteinen wäre hierfür ein Beispiel. Sie haben einen repräsentativen Charakter. Die sekundären Grundvorstellungen lösen sich vom Konkreten und gleiten ins Abstrakte. Sie beziehen sich auf symbolische Objekte, welche in der realen Welt nicht vorkommen. Zahlen, Terme oder Funktionsgraphen sind rein gedankliche Konstrukte und haben deshalb einen rein symbolischen Charakter (vgl. v. HOFE & BLUM 2016, S. 234).

Sekundäre Grundvorstellungen können die primären ergänzen oder ersetzen. Hier erkennt man die, von Kleine beschriebene, Reorganisation und Umstrukturierung. Deswegen sind Grundvorstellungen auch keine Kollektion von andauernd gültigen und stabilen mentalen Hilfsmitteln, sondern vielmehr ein Netzwerk, welches durch stetige Erweiterung von neu zugewonnenen Vorstellungen zu einem immer leistungsfähigeren System mathematischer Schemata wird (vgl. v. HOFE 2003, S. 6).

Doch nicht immer gehen die individuellen Grundvorstellungen mit ihren normativen Metamorphosen konform. Wie in Abschnitt 2.1. geschildert, kommt es im Unterricht häufig zu Fehlvorstellungen. Dieses Problem tritt auf, wenn alte Vorstellungen ihre Grenzen erreichen und keine Neuinterpretation stattfindet. Das Beharren auf den bislang erfolgreichen Anschauungen kann das Verständnis neuer mathematischer Inhalte beeinträchtigen und blockieren (vgl. WARTHA & v. HOFE 2005).

Vohns kritisiert diese Einteilung in primäre und sekundäre Grundvorstellungen. Er vermisst ein kritisches Kriterium zur Abgrenzung und stellt in Frage, ob sich sekundäre Grundvorstellungen allein dadurch auszeichnen, dass sie keine Verankerung in konkreten Handlungsanweisungen aufweisen bzw. bereits aus dem Mathematikunterricht stammen. Einen wirklichen Nutzen der Unterscheidung kann er auch nicht feststellen. Er argumentiert damit, dass die Wandlungsfähigkeit von Vorstellungen ungleich wichtiger ist als das Einteilen in Kategorien. Diese Entwicklungsverläufe zu betrachten und zu forcieren ist seine grundsätzliche Position, ganz unabhängig davon, ob die Erfahrungen auf primären oder sekundären Grundvorstellungen beruhen (vgl. VOHNS 2005, S. 63).

Mit dieser Forderung wird sich auch der nächste Abschnitt auseinandersetzen. Dort wird erörtert, wie es gelingen kann Grundvorstellungen auszubilden und aufzubauen.

2.6. Ausbilden von Grundvorstellungen

Das Ausbilden von entsprechenden Anschauungen bildet den Grundstein für drei vorrangige Aspekte der mathematischen Kompetenzentwicklung.

1. Erkennen des Sinngehalts eines neuen Begriffs durch Anknüpfen an bereits bekannte Handlungs- und Sachzusammenhänge.
2. Konstruktion geeigneter gedanklicher Modelle, welche diesen Begriff auf einer Vorstellungsebene vertreten.
3. Verwendung dieses Begriffs auf vorliegende reale Probleme (vgl. v. HOFE 2003, S. 7).

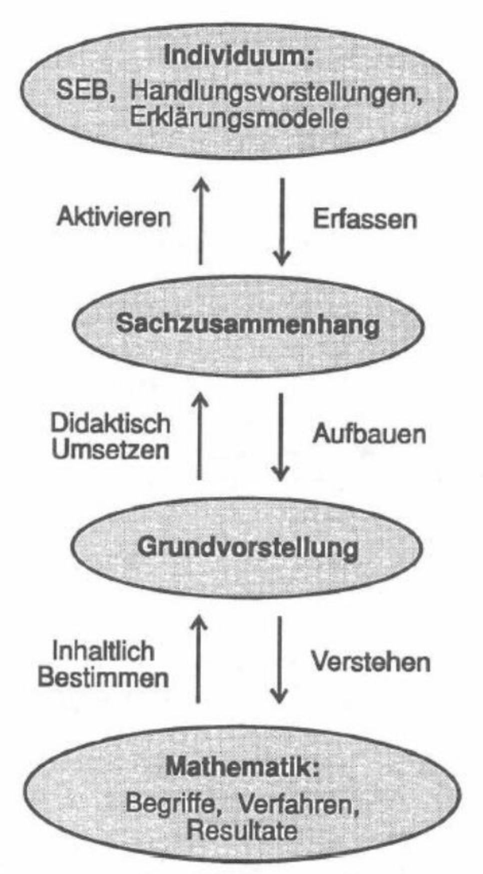


Abbildung 7: Ausbilden von Grundvorstellungen (vgl. v. HOFE 1995, S. 124)

Abbildung 7 beschreibt den Vorgang, mit welchem vom Hofe das Ausbilden von Grundvorstellungen zu beschreiben versucht. Die Pfeile auf der linken Seite symbolisieren die didaktischen Entscheidungen der Lehrer und Lehrerinnen und die Pfeile auf der rechten Seite repräsentieren die Schüler- und Schülerinnenaktivitäten. Diese Aktivitäten werden von den Lehrer- und Lehrerinnenmaßnahmen nicht ausgelöst, können aber dadurch unterstützt werden. Oben in Abbildung 7 steht die Intention der Lehrpersonen. Diese müssen reflektieren, welche Grundvorstellungen auszubilden sind. Für die mittleren Bereiche des Modells sollten die Lehrpersonen versuchen, Erfahrungsbereiche bei den Kindern zu aktivieren um ein bestmögliches Resultat zu erzielen (vgl. v. HOFE 1995, S. 123-125).

Selbst geübte Mathematiker und Mathematikerinnen beziehen sich beim mathematischen Arbeiten auf ihre eigene Person und ihre eigenen Lebenswelten. Für Schüler und Schülerinnen ist es also ungleich notwendiger, dass sie neue Begriffe in irgendeinen Bezug zu ihren lebensweltlichen Situationen setzen können um eine Sinnhaftigkeit zu erkennen. Dieses Anknüpfen an der subjektiven Realität wird aber in den meisten didaktischen Konzepten und Unterrichtsgeschehen weitgehend vernachlässigt (vgl. BENDER 2009, S. 49).

Das Grundvorstellungskonzept sollte im Unterricht keineswegs nur beim Einführen vom Themengebieten berücksichtigt werden. Es legt auch den Grundstein für eine kontinuierliche Weiterentwicklung der Begrifflichkeiten. Die Mathematik ist eine Wissenschaft, welche mit verschiedenen Modi arbeitet: dem bildhaften (analogen) Modus und dem verbalen (propositionalen) Modus. Die Geometrie beispielsweise wird überwiegend analog behandelt, während bei der Algebra der verbale Modus im Vordergrund steht. Diese Denkmodi wirken allerdings unabhängig voneinander und können sogar Widersprüche im Individuum hervorrufen. Während manche Schüler und Schülerinnen für die bildhafte Form der Mathematik zugänglicher sind, liegt die Affinität anderer Schüler und Schülerinnen im Verbalen. Für den Unterricht bedeutet das, dass eine kontinuierliche Übersetzung zwischen den beiden Modi notwendig ist um alle Schüler und Schülerinnen gleichermaßen anzusprechen (vgl. BENDER 2009, S. 52-53).

Die nächste Herausforderung im Unterrichtsgeschehen ist die bereits erwähnte Wandlungsfähigkeit von Vorstellungen. Nun könnten manche Lehrer und Lehrerinnen ja auf die Idee kommen, gleich eine einheitliche Begrifflichkeit einzuführen, welche vom Primar- bis in den tertiären Bereich gültig ist. Auch wenn das Vieles erleichtern würde, sollte man von diesem Ideal Abschied nehmen. Man kann einen Schüler oder eine Schülerin in der Unterstufe zum Beispiel nicht dafür sensibilisieren, dass das Produkt beim Multiplizieren zweier Zahlen auch kleiner sein kann als jeder der beiden Faktoren. Die Notwendigkeit der Reorganisation und des Umdenkens ist hinzunehmen, kann aber auf ihre (negativen) Auswirkungen auf die Vorstellungen überprüft werden (vgl. BENDER 2009, S. 57).

Ein gutes Mittel um Grundvorstellungen im Unterricht bewusst einzubinden sind fundamentale und zentrale Ideen. Vohns empfiehlt, dass sich die Lehrpersonen bei der Unterrichtsplanung auf die relevanten zentralen und universellen Ideen fokussieren. Daraus ergeben sich die zugeordneten Grundvorstellungen, welche bei diesem Themenfeld aktiviert werden sollen. Durch das Wissen von bereits ausgeprägten Grundvorstellungen fällt es den Lehrern und Lehrerinnen leichter diese fortzuentwickeln oder gegebenenfalls neu aufzubauen. Somit dienen die fundamentalen Ideen als analytisches Hilfsmittel. Kommt die Lehrperson zu dem Schluss, dass die zu Grunde liegende fundamentale Idee für den Erwerb der Vorstellungen kontraproduktiv ist, kann eine Neuorientierung und Neuthematisierung stattfinden. Durch diesen gedanklichen Prozess in der Unterrichtsplanung werden die zentralen Ideen zum konstruktiven Handwerkzeug (vgl. VOHNS 2005, S. 62).

Die Tatsache, dass sich Lehrer und Lehrerinnen bewusst sind, dass sie versuchen sollten Grundvorstellungen aufzubauen reicht aber leider nicht aus um dies tatsächlich auch zu tun. Vom Hofe sieht den Knackpunkt beim Aufbau von Grundvorstellungen darin, dass konkrete Handlungen an angemessenen Materialien zu gedanklichen Operationen umkonstruiert werden sollen (vgl. v. HOFE 1995).

Während dieses Verinnerlichen von Handlungen bei leistungsstärkeren Schülern und Schülerinnen ohne besondere Unterstützung geschehen kann, bedarf es bei leistungsschwächeren Kindern häufig einer Unterstützung. Sie sind zwar meistens durchaus im Stande die Handlungen am Material durchzuführen, jedoch haben sie Probleme dabei den Vorgang zu beschreiben (vgl. FRICKE 1959).

Wartha und Schulz versuchen diesen zentralen Prozess beim Aufbau von Grundvorstellungen durch ein Vierphasenmodell zu unterstützen.

1. In der ersten Phase arbeitet der Schüler oder die Schülerin mit dem geeigneten Material. Dabei werden die mathematischen Handlungen und deren Bedeutung beschrieben. Zentral hierbei ist das Versprachlichen der Symbole und Handlungen.
2. In der zweiten Phase beschreiben die Schüler und Schülerinnen die Handlungen lediglich. Dabei dürfen sie das Material sehen aber nicht damit arbeiten. Dieser Prozess wird ausgelagert. Sie beschreiben einem Partner oder einer Partnerin was zu tun ist und kontrollieren den Handlungsprozess durch Beobachtung.
3. In der dritten Phase erfolgt die Beschreibung ohne Sicht auf das Material. Hier sind die Schüler und Schülerinnen dazu gezwungen, sich die Handlungen am Material vorzustellen.
4. In der vierten und letzten Phase erfolgt das Arbeiten auf rein symbolischer Ebene. Diese Phase dient zum Üben und zum Automatisieren.

Ziel dieses Modells ist vor allem das Fördern der geistigen Vorstellungskraft (vgl. WARTHA & SCHULZ 2011, S. 11).

Ein Beispiel für dieses Vierphasenmodell könnte folgendermaßen aussehen:

1. **Handeln an geeignetem Material:** Das Kind soll die Aufgabe: „Berechne 74 – 7" am Rechenrahmen (Abakus) mit möglichst wenigen Zügen lösen.
2. **Beschreiben der Materialhandlung:** Das Kind soll eine zweite Person anleiten, wie die Aufgabe am Rechenrahmen gelöst werden kann.
3. **Beschreibung der Materialhandlung in der Vorstellung:** Das Kind soll diktieren, wie die Aufgabe am Rechenrahmen gelöst werden kann, ohne diesen zu sehen.
4. **Arbeiten auf symbolischer Ebene:** Das Kind löst ähnliche Aufgaben, ohne den Rechenrahmen zu verwenden.

Das geeignete Material wäre in diesem Fall der Rechenrahmen (vgl. WARTHA & SCHULZ 2011, S. 12).

Will man dieses Modell im Unterricht einsetzen gibt es einige Dinge zu beachten.

- Die Lehrer und Lehrerinnen müssen erkennen, in welchen Phasen die Schüler und Schülerinnen sattelfest sind und in welchen Phasen es noch zu Problemen kommt. Dazu ist eine gut ausgeprägte Diagnosefähigkeit notwendig.
- Wenn man die Intention verfolgt Grundvorstellungen aufzubauen, dürfen die Phasen zwei und drei nicht übersprungen werden und
- Wenn es zu Schwierigkeiten kommt, reicht es aus in die nächst-niedrigere Phase zurück zu gehen. Ein Neustart bei Phase eins ist nicht zu empfehlen und hemmt den Ausbau der mentalen Vorstellungskraft.

Dreh- und Angelpunkt für das erfolgreiche Fördern ist das verwendete Material. Es muss dazu geeignet sein, die Handlungen nicht nur konkret durchzuführen, sondern sich diese auch vorzustellen. Will man an Grundvorstellungen im Unterricht verknüpfen, so sollte man dies erst tun, wenn die Handlungen nicht mehr konkret, sondern schon mental durchgeführt werden können (vgl. WARTHA & SCHULZ 2011, S. 12-14).

Dass sich das beschriebene Konzept bewährt, zeigt die Vermittlung in Schulpraktika, Weiterbildungsmaßnahmen und universitären Lehrveranstaltungen. Die Kommunikation über Lernprozesse, Grundvorstellungen und dem Modellierungskreislauf wird deutlich erleichtert und die Lehrer und Lehrerinnen sind besser dazu imstande, Lernumgebungen zu planen und individuelle Lernprozesse zu beschreiben und zu beobachten (vgl. WARTHA 2010, S. 4).

Lernumgebungen und Aufgabenstellungen sind durchaus zu beachten, wenn es um das Ausbilden von Grundvorstellungen geht. Sie sollen so konzipiert sein, dass es Schülern und Schülerinnen möglich ist, individuelle Grundvorstellungen ausbilden zu können, welche nicht mit den normativen Grundvorstellungen im Widerspruch stehen (vgl. ROTH & SILLER 2016, S. 3).

Auch vom Hofe fordert einen sensiblen Umgang beim Aufbau auf den individuellen Vorstellungen. Seiner Meinung nach ist es sehr heikel neue Inhalte einzuführen, ohne auf das intuitive Vorwissen Rücksicht zu nehmen. Der Aufbau sollte erst erfolgen, wenn die erforderliche Verständnisgrundlage vorhanden ist und wenn es der konkrete Umgang mit Mathematik erfordert (vgl. v. HOFE 2003, S. 8).

3. Grundvorstellungen und Technologieeinsatz

In der dieser Arbeit zugrundeliegenden Fragestellung geht es ja nicht nur lediglich um Grundvorstellungen, sondern auch um den Einfluss von Technologie im Unterricht auf die Entwicklung dieser Gedankenmodelle. Unter Technologieeinsatz verstehe ich konkret den Einsatz von Computer Algebra Systemen (CAS), dynamischer Geometriesoftware (DGS) und Tabellenkalkulationsprogrammen (TK). Die Entwicklungen von DGS geht bis in die 80er Jahre zurück und wurden auch damals schon als rein didaktische Software entwickelt (vgl. HISCHER 2005, S. 278).

Wie bei allen anderen didaktischen Modellen und Konzepten werden auch an DGS Forderungen und Erwartungen gestellt. Hölzl und Elschenbroich formulieren diese Forderungen folgendermaßen:

1. **Zugmodus:** Die DGS müssen in der Lage sein, die Inhalte der Schulgeometrie dynamisch modellieren zu können.
2. **Ortslinie:** Die DGS müssen die Bahnbewegungen von Punkten, welche in Abhängigkeit zu anderen Punkten stehen veranschaulichen können.
3. **Makro:** DGS müssen eine Abfolge von Konstruktionsbefehlen zu einem neuen Befehl verbinden können.

Der wichtigste Aspekt ist hierbei der Zugmodus. Ein besonders überzeugendes DGS zeichnet sich überdies mit einer einfachen und intuitiven Bedienung aus. Desto einfacher der Einsatz ermöglicht wird, umso mehr kann man sich mit den mathematischen Inhalten im Unterricht beschäftigen (vgl. HÖLZL 1997, S. 34 und ELSCHENBROICH 2001, S. 13).

3.1. GeoGebra

Ein kostenloses und intuitives Programm, welche alle drei Funktionen bietet, ist die dynamische Geometriesoftware GeoGebra. Die Software wurde von Markus Hohenwarter im Zuge seines Dissertationsprojekts entwickelt und wird von ihm wie folgt beschrieben.

„GeoGebra ist ein computerbasiertes Werkzeug, das durch die Verbindung von symbolischer und ikonischer Darstellung aktives, handlungsorientiertes, experimentelles und entdeckendes Lernen fördert.“ (HOHENWARTER 2006, S. 16).

Eine Besonderheit von GeoGebra ist, dass es die Algebra und die Geometrie vereint und beide Bereiche parallel anzeigen kann.

„GeoGebra ist so konzipiert, dass alle drei Modi der Darstellung und Erarbeitung von Wissen – enaktiv, ikonisch und symbolisch – in das Lernen einbezogen werden.“ (HOHENWARTER 2006, S. 24).

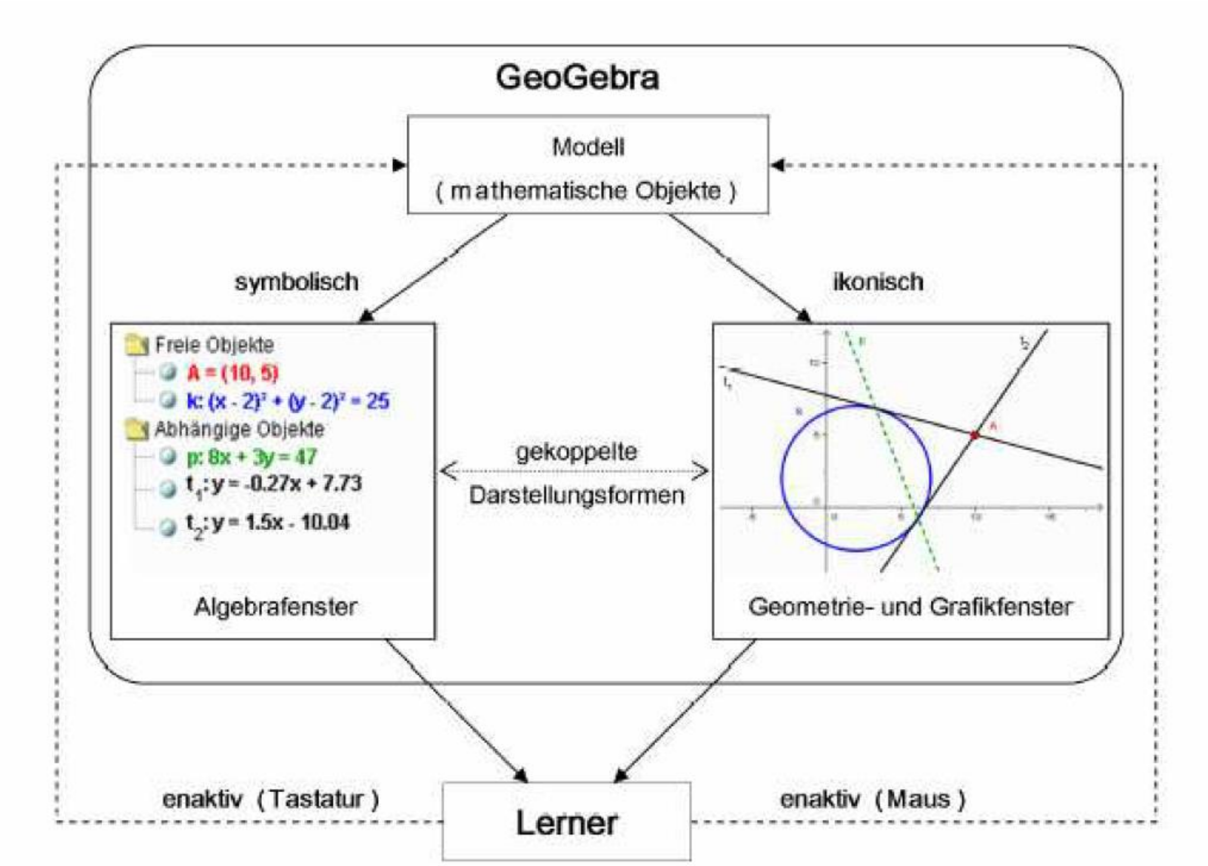


Abbildung 8: Enaktives, ikonisches und symbolisches Lernen mit GeoGebra (vgl. HOHENWARTER 2006, S. 25)

Abbildung 8 beschreibt die Kombination dieser drei Modi. Die Möglichkeit der Schüler und Schülerinnen das Modell selbst mit der Maus oder der Tastatur beeinflussen zu können ist der enaktive Aspekt. Die ikonische Komponente ist, dass Modelle in einem Geometrie- und Grafikfenster dargestellt werden. Gleichzeitig werden die zugehörigen Koordinaten, Gleichungen und Zahlenwerte auch symbolisch in einem Algebrafenster angezeigt (vgl. HOHENWARTER 2006, S. 25).

Dass das Programm im Unterricht durchaus positiv bewertet wird zeigt eine Studie, welche Hohenwarter ebenfalls im Rahmen seiner Dissertation durchgeführt hat. 97,2 % der Lehrer und Lehrerinnen sind der Meinung, dass GeoGebra für ihre Schüler und Schülerinnen einfach zu bedienen ist. 95,5 % der Lehrpersonen meinen auch, dass ihre Schüler und Schülerinnen die Unterrichtsinhalte durch den Einsatz des DGS besser verstanden haben. 93,7 % der Lehrenden haben den Eindruck, dass das Interesse bei den Lernenden durch den Einsatz von GeoGebra gesteigert wurde. Auch befragte Schüler und Schülerinnen bestätigen die Aussagen, auch wenn die Zustimmung hier nicht so eindeutig ausfällt (vgl. HOHENWARTER 2006, S. 241ff.).

3.2. Einfluss von Technologieeinsatz auf das Ausbilden von Grundvorstellungen

Als ich begonnen habe, mich mit der dieser Arbeit zugrundeliegenden Fragestellung zu beschäftigen, hatte ich ganz naive Vorstellungen davon, welche Bedeutung der Einsatz von Technologie auf die Vorstellungen der Schüler und Schülerinnen haben könnte. Ich dachte, dass durch die zusätzlichen zeitlichen Ressourcen, welche durch das Operieren mit dem Computer gewonnen werden, vermehrt auf die sinnhaften Aspekte der Inhalte Rücksicht genommen werden kann. Zusätzlich war ich der Meinung, dass abstrakte und geometrische Inhalte durch Veranschaulichung eingängiger werden. Der Lebensweltaspekt war auch Teil meiner Überlegungen. Der Computer nimmt mittlerweile einen festen Platz im Alltag der Schüler und Schülerinnen ein und könnte im Unterricht dazu führen das Interesse der Lernenden zu steigern. Im Laufe der Literaturrecherche fühlte ich mich in meinen Überlegungen bestätigt und entdeckte noch weitere Punkte.

Vor allem bei Lechner konnte ich meine Ideen wiederfinden. Eins seiner Zitate drückt meine Überlegungen treffend aus.

„CAS sind nicht nur vielseitige Werkzeuge, die einerseits leicht durchschaubare, aber rechenaufwendige Umformungen und Verfahren übernehmen, andererseits insbesondere durch ihre Darstellungsmöglichkeiten in effektiver Weise die Begriffsbildung unterstützen. Darüber hinaus können sie durch Anregung von Denkprozessen zur Festigung von Grundvorstellungen beitragen." (LECHNER 1999/2000, S. 12).

Als primäre Funktion der mathematischen Arbeitsumgebungen, welche Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometriesoftware und Tabellenkalkulationsprogramme beinhalten, sieht Lechner die Visualisierungswerkzeuge.

„Während Visualisierung ohne Technologie oft aufwendig ist und auch mit erheblichen Rechenaufwand verbunden ist, unterstützt der leichtere Zugang zu graphischen Darstellungen das mathematische Verständnis und erleichtert auch die Interpretation praktischer Ergebnisse." (HEUGL 1999, S. 4).

Dass das Operieren zunehmend von den Computerprogrammen übernommen wird bedeutet nicht, dass die Beschäftigung mit Techniken, Verfahren und Methoden bedeutungslos wird. Vielmehr bietet diese Entwicklung eine Reihe an Chancen. Fischer sieht diese Möglichkeiten in einer Neugewichtung des Unterrichts, welche den Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler und Schülerinnen eher gerecht werden soll. Er betont das explizite Unterrichtsziel „Darstellen", welches sowohl im Unterstufen- als auch im Oberstufenlehrplan verankert ist. Eine Neuorientierung in diese Richtung liegt seiner Meinung nach auf der Hand. Darstellend-interpretative Arbeitsbereiche stehen in einer besonderen Verbindung zu Grundvorstellungen. Deshalb können mathematische Arbeitsumgebungen hier einen bedeutenden Beitrag zu einem besseren Verständnis der Begrifflichkeiten leisten (vgl. LECHNER 1999/2000, S.20ff).

Auch beim formal-operativen Arbeiten nehmen Computerprogramme eine gewichtige Rolle ein. Im Gegensatz zum Visualisierungswerkzeug beim darstellend-interpretierenden Arbeiten fungieren sie hier als Rechenwerkzeuge. Viele Mathematiker und Mathematikerinnen sehen in dieser Erleichterung die große Stärke von mathematischen Arbeitsumgebungen. Die Einsatzmöglichkeiten in diese Richtung sind enorm.

„Zusammenfassend und etwas plakativ kann man sagen, dass die heutigen universellen mathematischen Softwaresysteme mit symbolischen Kern für alle Probleme, die in der Gymnasialmathematik und in den mathematischen Einführungsvorlesungen an den Universitäten behandelt werden, Algorithmen anbieten. Darüber hinaus gibt es aber spezielle symbolische Softwaresysteme, deren algorithmische Problemlösungen weit über die Mathematik der Einführungsvorlesungen hinausgehen.“ (RECHENBERG & POMBERGER 1997, S. 804).

Einige weitere Aspekte bei den mathematischen Arbeitsumgebungen als Rechenwerkzeuge sind das Ausführen von Kalkülen als arithmetische oder numerische Hilfsmittel und das Ausführen von symbolischen Operationen. Die Grundvoraussetzung für das allgemeine Lösen von Gleichungen ist das algebraische Umformen mit Symbolen. Dazu sind mathematische Arbeitsumgebungen in der Lage. Auch das Bestimmen von Ableitungen und unbestimmten Integralen, sowie das Lösen von Differentialgleichungen stellen keine Probleme dar (vgl. LECHNER 1999/2000, S. 23).

Es ist aber zu beachten, dass das Auslagern von Kalkülen ohne diese zu beherrschen oder verstanden zu haben zu Problemen führen könnte. Mathematische Arbeitsumgebungen können aber auch bei diesem formal-operativen Arbeiten hilfreich sein. Sie bieten die Möglichkeiten:

- die Algorithmen und Kalküle besser zu verstehen,
- Analogien und Zusammenhänge zwischen den Kalkülen zu erkennen,
- die Grenzen ihrer Möglichkeiten auszuloten und diese zu überschreiten und
- die mathematischen Kalküle bei einem erweiterten mathematischen Problemlöseprozess zu verwenden (vgl. LECHNER 1999/2000, S. 23).

Diese Möglichkeiten können von den Lehrpersonen erkannt und genutzt werden. Sie könnten den Schülern und Schülerinnen beispielsweise die Frage stellen, wie Computer oder Taschenrechner die Funktionswerte der Sinus- oder der Cosinus-Funktion berechnen und wieso den technischen Hilfsmitteln bei diesen Anweisungen nicht die Rechenleistung ausgeht. Für Algorithmen und Kalküle eignen sich Tabellenkalkulationsprogramme. So könnte man zum Beispiel Grenzwerte mit Tabellenkalkulationsprogrammen simulieren und veranschaulichen.

Als nächstes werfen wir einen Blick auf den heuristisch-experimentellen Arbeitsbereich. Dieser umfasst alle Aktivitäten, die mit Variation von Parametern, dem Aufstellen von Vermutungen und dem zielgerichteten Entdecken zu tun haben. Die Verwendung von mathematischen Arbeitsumgebungen schürt die Hoffnung, dass experimentelles Arbeiten im Unterricht möglich wird. Selbst reines Probieren und Simulationen können zu Formen des Problemlösens aufgewertet werden. Neben dem Visualisierungs- und Rechenwerkzeug nehmen mathematische Arbeitsumgebungen somit die Rolle eines Untersuchungswerkzeugs ein. Das führt zum Auftreten von unerwarteten Ergebnissen und dem Aufstellen von Vermutungen. Individuelle Lernwege und individuelle Rückmeldungsmöglichkeiten unterstützen diese Prozesse. Ein einfacher Vergleich und eine einfache Wahl von Parametern bieten eine gute Unterstützung beim heuristisch-experimentellen Arbeiten (vgl. LECHNER 1999/2000, S. 28-29).

Diesen Aspekt erwähnt auch Hischer. Für ihn wird der Computer zum Entdecker, welcher zum Nachdenken verführen soll. Den Irr- und Umwegen, welche die Schüler und Schülerinnen bei diesem Prozess einschlagen misst er eine besondere Bedeutung zu. Er meint, dass Fehler als Anlass genommen werden über die Gründe der Fehler nachzudenken. Außerdem ist er der Ansicht, dass Fehler eine notwendige Begleiterscheinung von Lernprozessen sind und Raum für ungewöhnliche Ideen schaffen. Der Erkundungsprozess, als welcher Mathematiklernen oft erfahren wird, wird dadurch optimal unterstützt (vgl. HISCHER 2005, S. 280-282).

Bleibt noch das kritisch-argumentative Arbeiten. Hier sind die Unterstützungsmöglichkeiten von mathematischen Arbeitsumgebungen etwas geringer als in den anderen Bereichen, aber dennoch vorhanden. Diese liegen hier primär auf Überprüfungswerkzeugen. Dadurch, dass die Rechenarbeit ausgelagert wird kommt man sehr schnell zu Ergebnissen. Aber nicht immer machen diese Ergebnisse im gegebenen Sachverhalt Sinn. Die Schüler und Schülerinnen müssen dazu sensibilisiert werden, dem Computer nicht blind zu vertrauen und die gewonnenen Ergebnisse zu überprüfen und zu hinterfragen. Diese Tätigkeiten fördern die Argumentationsfähigkeiten der Schüler und Schülerinnen und lenken den Blick auf grundlegendere mathematische Tätigkeiten (vgl. LECHNER 1999/2000, S. 32-33).

4. Empirische Untersuchung

Wie in der Einleitung (Kapitel 1.) bereits erwähnt, stellt eine empirische Untersuchung den Kernpunkt dieser Arbeit dar. Die Untersuchung dient dem Zweck, die Forschungsfrage

„Besteht ein Zusammenhang zwischen dem Einsatz von mathematischen Arbeitsumgebungen im Unterricht und dem Vorhandensein entsprechender Grundvorstellungen?“

zu beantworten. Dazu wurde eine schriftliche Befragung mittels eines Fragebogens durchgeführt. Die Befragung sollte in achten Klassen an niederösterreichischen Gymnasien stattfinden. Um dies zu tun musste eine Genehmigung beim Landesschulrat für Niederösterreich angesucht werden, welche im Anhang beigelegt ist (Abbildung 70). Nach Erhalt aller benötigten Bescheide wurde der Fragebogen von insgesamt 89 Schülern und Schülerinnen aus drei verschiedenen Gymnasien im ländlichen und urbanen Raum und vier verschiedenen Klassen beantwortet. Die Fragebögen wurden persönlich vor Ort ausgeteilt und unter Aussicht anonym und freiwillig ausgefüllt. Das hatte den Vorteil, dass ich für eventuelle Verständnisfragen zur Verfügung stehen konnte. Da noch nicht alle Teilnehmer und Teilnehmerinnen zum Zeitpunkt der Erhebung volljährig waren, habe ich auch eine Einverständniserklärung für die Eltern entworfen, welche ebenfalls dem Anhang entnommen werden kann (Abbildung 69). Zwei Klassen verwendeten mathematische Arbeitsumgebungen zum Beantworten der Fragen und zwei Klassen nicht. Zusätzlich wurde der Fragebogen auch von den Lehrpersonen ausgefüllt. Dabei wurde erhoben, wie die jeweiligen Themenbereiche im Unterricht eingeführt wurden. Diese zusätzlichen Informationen werden beim Auswerten der Ergebnisse einfließen.

4.1. Konkrete Grundvorstellungen zur Untersuchung

Vor dem Zusammenstellen des Fragebogens wurden Grundvorstellungen der verschiedenen Themenbereiche aus der Literatur zusammengestellt und mögliche Kontrollaufgaben dazu formuliert. Zu jedem Themenbereich gibt es noch eine Einschätzung, welche Relevanz Technologieeinsatz beim entsprechenden Thema haben könnte.

4.1.1. Integralrechnung

Grundvorstellungen

GV 1: Das Integral als verallgemeinerter Summationsprozess.
GV 2: Das Integral als Stammfunktion.
GV 3: Das Integral als Mittelwert.
GV 4: Das Integral als Umkehrung des Differenzierens.
GV 5: Das Integral als orientierter Flächeninhalt.
(vgl. BLUM & KIRSCH 1979, HUMENBERGER 2007 und BLUM & TÖRNER 1983).

Mögliche Aufgaben

1) Was stellst du dir unter dem Begriff Integral vor?

2) Wofür kann man Integrale verwenden? Was kann man mit ihrer Hilfe berechnen?

3) Erkläre die Schreibweise $\int_a^b f(x)\,dx$.

4) Erkläre den Unterschied: $\int_a^b f(x)\,dx$ und $\int f(x)\,dx$.

5) Gibt es einen Unterschied zwischen den Integralen? Wenn ja, welchen?

$$\int ux^2\,dx \qquad \int ux^2\,du$$

6) Wie interpretierst du die folgende Aussage: „Das Integral ist eine sehr große Summe sehr kleiner Produkte.“?

7) Was bedeutet die Aussage: „Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens.“?

8) Skizziere den Graphen der zugehörigen Integralfunktion per Freihandzeichnung und begründe deine Skizze!

9) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Begründe diese Gleichung mit eigenen Worten
(vgl. HARRER 2005 und MEINDL 2011).

Technologieeinsatz

Für die Studie würde sich eine Kombination aus Frage 1) und 2) anbieten. Die Integralrechnung beschränkt sich im Mathematikunterricht oft auf Rechenregeln und rezeptartiges Rechnen. Mathematische Arbeitsumgebungen übernehmen diesen Part und bieten Möglichkeiten um GV 1 und auch GV 2 zu visualisieren. Auch bei den Aufgaben 8 und 9 könnten Schüler und Schülerinnen mit Technologieeinsatz Vorteile haben, da die Antworten beider Aufgaben im Unterricht möglicherweise veranschaulicht wurden.

4.1.2. Differenzenquotient

Grundvorstellungen

GV 1: Differenzenquotient als Verhältnis.
GV 2: Differenzenquotient als mittlere Änderungsrate.
GV 3: Differenzenquotient als Faktor.
GV 4: Vorzeichen des Differenzenquotienten.
GV 5: Der Differenzenquotient einer linearen Funktion ist in jedem Intervall gleich der Steigung der linearen Funktion.
GV 6: Der Differenzenquotient von f in $[a;\ b]$ ist gleich der Steigung der zugehörigen Sekantenfunktion.
(vgl. BLUM & KIRSCH 1979 und BÜRGER, FISCHER & MALLE 1991)

Mögliche Aufgaben

1) Gegeben sei eine reelle Funktion f. Schreib die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[1;3]$ sowie im Intervall $[u;v]$ an! Wie lauten diese mittleren Änderungsraten, falls $f(x) = x^2$?

2) Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Intervall $[0;4]$

a) Um wie viel wächst $f(x)$, wenn x von 0 auf 1 erhöht wird? Um wie viel wächst $f(x)$, wenn x von 3 auf 4 erhöht wird?

b) Um wie viel wächst $f(x)$ im Mittel im Intervall $[0;4]$, wenn x um 1 erhöht wird?

3) Gegeben sei eine monoton wachsende reelle Funktion f. Wenn x von u auf v erhöht wird, wievielmal stärker wächst dabei $f(x)$ als x? Falls $f(x) = x^2$ und x von 1 auf 3 erhöht wird, wievielmal stärker wächst dann $f(x)$ als x?

4) Skizziere den Graphen einer nichtlinearen Funktion f im Intervall $[a; b]$, deren Differenzenquotient in diesem Intervall a) positiv, b) negativ, c) gleich 0 ist.

5) Gegeben sei eine lineare Funktion f mit $f(x) = kx + d$. Wie groß ist der Differenzenquotient dieser Funktion im Intervall $[a; b]$? Beweise deine Antwort.

6) a) Was versteht man unter dem Differenzenquotienten einer Funktion?
b) Kennst du ein anderes Wort für den Differenzenquotienten?
c) Erläutere deine Antwort anhand einer Skizze.

7) Kreuze an, welche Deutungen des Ausdrucks $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ richtig sind:

o Der Ausdruck gibt das Verhältnis der Änderung der Funktionswerte (y-Werte) zur Änderung der Argumente (x-Werte) im Intervall $[a; b]$ an.

o Der Ausdruck gibt die Änderung der Funktionswerte im Intervall $[a; b]$ an.

o Der Ausdruck gibt den Unterschied zwischen den Funktionswerten und den Argumenten im Intervall $[a; b]$ an.

o Der Ausdruck gibt die mittlere Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit im Intervall $[a; b]$ an.

o Der Ausdruck gibt die Ableitung der Funktion im Intervall $[a; b]$ an.

o Der Ausdruck gibt an, wievielmal stärker sich die Funktionswerte im Intervall $[a; b]$ ändern als die Argumente.

8) Was gibt das Vorzeichen des Differenzenquotienten an? Skizze!

(vgl. SPRINGNAGEL 2000).

Technologieeinsatz

Das Thema Differenzenquotient eignet sich wiederum um mathematische Arbeitsumgebungen in den Unterricht miteinzubeziehen. Schüler und Schülerinnen könnten vor allem bei den Aufgaben 4, 5 und 8 hier Vorteile wegen der Darstellung und Veranschaulichung haben.

4.1.3. Differentialquotient

Grundvorstellungen

GV 1: Der Differentialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten.

GV 2: Der Differentialquotient $f'(x)$ ist näherungsweise gleich dem Differenzenquotienten von f in einem sehr kleinen Intervall um x.

GV 3: Der Differentialquotient $f'(x)$ ist gleich der Steigung von f an der Stelle x bzw. gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x/f(x))$.

(vgl. BLUM & KIRSCH 1979 und BÜRGER, FISCHER & MALLE 1991).

Mögliche Aufgaben

1) Was versteht man unter dem Differentialquotienten?

2) $f(x) = x^2$. Berechne $f'(3)$! Deute das Ergebnis auf möglichst viele Arten!

3) $f(x) = x^2$

a) Wie groß ist die Steigung an der Stelle 5?

b) In welchen Punkten hat die Tangente an den Graphen von f die Steigung 10?

4) a) Kennst du ein anderes Wort für den Differentialquotienten?

b) Erläutere deine Antwort anhand einer Skizze!

5) $f(x) = x^2$

a) Berechne $f'(3)$!

b) Deute das Ergebnis auf möglichst viele Arten!

6) Was ist der Unterschied zwischen der mittleren Geschwindigkeit in einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ und der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t?

7) a) Sind der Differentialquotient und der Differenzenquotient dasselbe?

b) Wenn nein, wann sind sie zumindest annähernd gleich?

(vgl. SPRINGNAGEL 2000).

Technologieeinsatz

Auch bei diesem Thema kann richtig eingesetzter Technologieeinsatz sehr zum Verständnis beitragen. Beispiel 7 könnte beispielsweise wunderbar mit GeoGebra visualisiert werden.

4.1.4. Funktionen

Grundvorstellungen

GV 1: Zuordnungsvorstellung.
GV 2: Kovariations- oder Änderungsvorstellung.
GV 3: Objektvorstellung.
(vgl. v. HOFE 2003, VOLLRATH 1989 und MALLE 2000).

Lineare Funktionen

GV i: „Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt gleich Zunahme (bzw. Abnahme) der Funktionswerte." (MALLE 2000, S. 6)
GV ii: „Die mittlere und momentane Änderungsgeschwindigkeit ist konstant." (KÖSTERS 1995, S. 51)
GV iii: „Die Differenz der Funktionswerte hängt nur von der Differenz der Argumentwerte ab." (KÖSTERS, 1995, S. 51)

Mögliche Aufgaben

1) Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = 2x + 5$. Um wie viel wächst $f(x)$, wenn x um 2 wächst?
2) Gib eine Termdarstellung der beschriebenen Funktion an: $f(1) = 1$ und wächst x um 1, so fällt $f(x)$ um 2.
(vgl. MALLE et al. 2010, S. 149ff.)

Potenzfunktionen

GV iv: „Gleiche relative Zunahme der Argumente bewirkt gleiche relative Zunahme der Funktionswerte.“ (KÖSTERS 1995, S. 52)
GV v: „Der Quotient der Funktionswerte hängt nur vom Quotient der Argumente ab.“ (KÖSTERS 1995, S. 52)

Mögliche Aufgaben

3) Gegeben ist die Funktion f: $\mathbb{R}+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c \cdot x^2$ Wie verändert sich $f(x)$, wenn x ver-a-facht wird? (vgl. MALLE et al. 2010, S. 181)

4) Eine gerade quadratische Pyramide hat die Höhe h, die Basiskante a und das Volumen $V = 300\ cm^2$. Beschreibe unter der Voraussetzung konstanten Volumens, wie sich die Höhe ändert, wenn die Basiskante a im Intervall $I = [10; 30]$ (in cm) variiert. Gib eine Funktionsgleichung sowie eine Wertetabelle an und zeichne den Graphen! Formuliere den Zusammenhang mit Worten! (vgl. REICHEL 2010, S. 148)

Exponentialfunktionen

GV vi: „Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt gleiche prozentuale Zunahme bzw. Abnahme der Funktionswerte.“ (MALLE 2000, S. 6)
GV vii: „Der Quotient der Funktionswerte hängt nur von der Differenz der Argumente ab. Der Zuwachs der Argumente um h bedeutet die Multiplikation der Funktionswerte mit derselben Zahl, nämlich a^h.“ (KÖSTERS 1995, S. 52)
GV viii: „Die lokale Änderungsgeschwindigkeit ist proportional zum Funktionswert.“ (KÖSTERS 1995, S. 52)

Mögliche Aufgaben

5) Auf das Wievielfache nimmt der Funktionswert $f(x) = 3^x$ zu, wenn das Argument x um 2 erhöht wird? Gib auch an, um wie viel Prozent sich der Funktionswert verändert hat! (vgl. BLEIER et al. 2010, S. 161)

Winkelfunktionen

GV ix: Winkelfunktionen sind periodisch verlaufende Funktionen und werden deshalb zur Beschreibung von Schwingungen verwendet.
GV x: „Die zweite Ableitung ist negativ proportional zum Funktionswert.“
(KÖSTERS 1995, S. 53)

Mögliche Aufgaben

6) Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sin(3x) + 2$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und beschreibe die Auswirkung des Parameterwertes 3 auf den Graphen von f. (vgl. BLEIER et al. 2010, S. 218)

Technologieeinsatz

Funktionen visualisieren und Funktionsgraphen zeichnen lassen ist eins der Paradebeispiele für den Einsatz von mathematischen Arbeitsumgebungen im Unterricht. Vor allem Aufgabe 6 ist sehr spannend. Durch die dynamischen Veränderungsmöglichkeiten von Parametern (z. B. durch Schieberegler o. ä.) in den Programmen erkennen die Schüler und Schülerinnen welche Auswirkungen es hat, wenn sie einzelne Parameter verändern.

Das muss nicht unbedingt eine Winkelfunktion sein. Genau die gleiche Aufgabe könnte man auch mit einer quadratischen Funktion f mit $f(x)=ax^2+bx+c$ stellen und auf die Auswirkungen der Veränderungen von a, b und c eingehen. Schüler und Schülerinnen, die bei der Einführung von quadratischen Funktionen mit Geogebra (o. ä.) gearbeitet haben, hätten hier sicher einen Vorteil und sollten bei der Erhebung besser abschneiden.

4.1.5. Wahrscheinlichkeitsbegriff, Wahrscheinlichkeitsrechnung & Statistik

Grundvorstellungen

GV 1: Wahrscheinlichkeit als Maß für eine Erwartung.
GV 2: Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil.
GV 3: Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit.
GV 4: Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen.
(vgl. MALLE & MALLE 2003).

GV 5: Die Binomialverteilung als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable mit zwei Ausprägungen.
(vgl. KRÜGER 2015).

GV 6: Das arithmetische Mittel als repräsentativer Wert.
GV 7: Das arithmetische Mittel als Ausgleichswert für stark schwankende Daten.
GV 8: Der Median als repräsentativer Wert.
GV 9: Der Median als Zentrum einer Verteilung.
GV 10: Der Median als ausreißerrobustes Lagemaß.
(vgl. BENDER 1997).

Mögliche Aufgaben

1) Warum lernst du mit Wahrscheinlichkeiten zu rechnen? Brauchst du diese in deinem späteren Leben?

2) Kannst du dir eine Welt ohne Wahrscheinlichkeit vorstellen? Wenn ja/nein, warum?

3) Welche Aussage(n) haben mit Wahrscheinlichkeit zu tun?

- o Gestern hat es geschneit.
- o Morgen wird es regnen.
- o In zwei Stunden geht die Sonne unter.

4) Was verstehst du unter dem Begriff „Zufall“?

5) In deine Klasse gehen 30 Schüler und Schülerinnen. Jeder hat einen Würfel und würfelt genau einmal. Wie viele Sechser werden erwartet?
(vgl. FENZ 2015).

Technologieeinsatz

Ich glaube nicht, dass es beim Thema „Wahrscheinlichkeitsrechnung" große Unterschiede bezüglich des Technologieeinsatzes gibt, da dieses Gebiet zwar sehr abstrakt für die Schüler und Schülerinnen ist, mathematische Arbeitsumgebungen dazu eher standardisiert als Black Box, eventuell mit graphischen Veranschaulichungen verfügbar sind.

4.1.6. Trigonometrie

Grundvorstellungen

GV 1: Für $0° \leq \varphi \leq 90°$ gilt:

$$\sin\varphi = \frac{Länge\ der\ Gegenkathete}{Länge\ der\ Hypotenuse}$$

$$\cos\varphi = \frac{Länge\ der\ Ankathete}{Länge\ der\ Hypotenuse}$$

$$\tan\varphi = \frac{Länge\ der\ Gegenkathete}{Länge\ der\ Ankathete}$$

GV 2: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Darstellung von Sinus und Cosinus am Einheitskreis kennen und Skizzen erläutern können. Sie sollen anhand des Einheitskreises jederzeit das Vorzeichen von $\sin\mu$ und $\cos\mu$ $(0° \leq \mu \leq 360°)$ ermitteln können.

GV 3: Die Schüler und Schülerinnen sollen wissen, dass das Bogenmaß das Verhältnis zweier Längenmaße ist und daher eine dimensionslose Zahl ist.

GV4: Visuelle Vorstellung vom typischen Verlauf der Graphen von Sinus, Cosinus und Tangens.
(vgl. BRUCKER 2002).

Mögliche Aufgaben

1) Was versteht man unter sin α, cos α bzw. tan α, wenn $0° \leq \alpha < 90°$ gilt?

2) Erläutere, wie man Sinus und Cosinus am Einheitskreis darstellen kann.

3) Auf welches Intervall sind die Werte von Sinus und Cosinus beschränkt? Begründe deine Aussagen mit Hilfe des Einheitskreises.

4) Was versteht man unter dem Bogenmaß eines Winkels?

5) Erläutere, warum das Bogenmaß eine dimensionslose Zahl ist.

6) Skizziere den Graph der Sinus- bzw. Cosinusfunktion.

7) Beschreibe alle Eigenschaften der Sinus- bzw. Cosinusfunktion, die du kennst.

8) Begründe am Einheitskreis für $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sin(-x) = -\sin(x)$

b) $\cos(-x) = \cos(x)$

(vgl. BRUCKER 2002).

Technologieeinsatz

Die Trigonometrie ist wieder ein Thema, welchem Visualisierungen viel Bedeutung zukommen. Dementsprechend bietet sich computergestützter Unterricht an. Ich glaube, dass die Schüler und Schülerinnen vor allem beim Einheitskreis viel durch Veranschaulichung lernen können. Auch die Graphen der Sinus- bzw. Cosinusfunktion lassen sich so gut untersuchen. Deshalb passen die Aufgaben 7 und 8 besonders.

4.2. Fragebogen

Die schriftliche Befragung bietet eine Reihe von Vorteilen und eignet sich optimal für die Zwecke dieser Untersuchung. Neben der großen Reichweite und der großen Anzahl von Personen, die gleichzeitig befragt werden können, gibt es auch organisatorische Vorteile. Die Befragungen werden persönlich beaufsichtigt und auf etwaige Rückfragen kann individuell reagiert werden. Durch das schriftliche Beantworten fällt der Interviewer als Fehlerquelle weg und die Teilnehmer und Teilnehmerinnen werden nicht von externen Faktoren beeinflusst. Somit ist die Objektivität gewahrt und Standardisierung gewährleistet (vgl. ATTESLANDER et al. 2010, S. 157).

Beim Entwickeln des Fragebogens hatte ich große Hilfe von meinem Betreuer. Gemeinsam sind wir die Grundvorstellungen und Aufgaben durchgegangen, welche ich exzerpiert habe und haben überlegt, welche Inhalte sich anbieten würden. Wir haben uns für Aufgaben entschieden, von denen wir der Meinung sind, dass Schüler und Schülerinnen, welche mathematische Arbeitsumgebungen verwenden, Vorteile haben. Außerdem war es ein Anliegen meines Betreuers, dass der Fragebogen Aufgaben zu möglichst vielen Inhaltsbereichen enthalten soll. Dadurch, dass die Erhebung in achten Klassen stattfand, hatten wir keine inhaltlichen Einschränkungen und könnten aus dem Vollen schöpfen. Das Ergebnis waren insgesamt elf offene Aufgaben (mit Unterpunkten), welche in einer Unterrichtseinheit beantwortet werden sollten. Im Folgenden wird nun der Fragebogen vorgestellt.

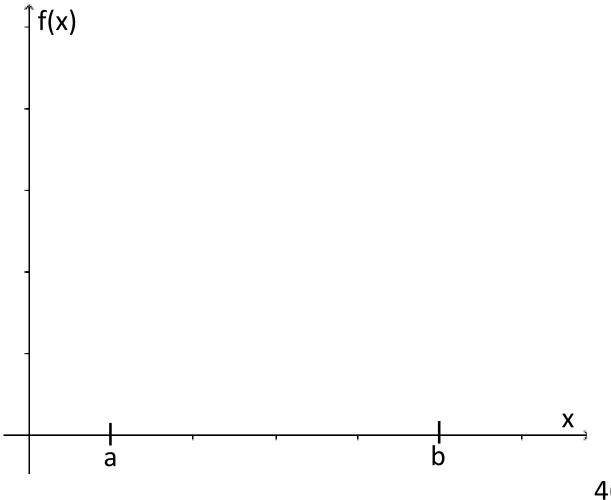
Fragebogen zur empirischen Untersuchung: „Technologieeinsatz und Grundvorstellungen im Mathematikunterricht".

Der Fragebogen wird anonym ausgefüllt und die Ergebnisse dienen nur zu meiner eigenen Verwendung. – Peter Rubicko

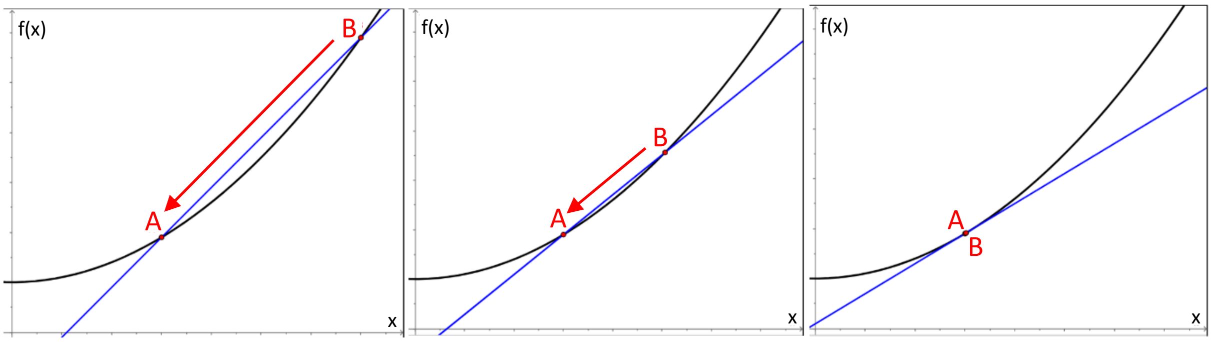
1) a) Was versteht man unter $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$, wenn $0° \leq \alpha \leq 90°$ gilt?

b) Begründe am Einheitskreis für $x \in [0, 2\pi]$: $\cos(-x) = \cos(x)$.

2) Skizziere einen Graphen einer nichtlinearen Funktion auf einem Intervall $[a, b]$, deren Differenzenquotient auf $[a, b]$ negativ ist.
Was versteht man unter dem Differenzenquotienten einer Funktion?



3) In den folgenden Abbildungen wandert der Punkt B gegen den Punkt A. Beschreibe den mathematischen Vorgang, der hier dargestellt wird!



---

4) Gegeben ist eine Funktion f mit: $f(x) = -x^2$. Berechne $f'(3)$ und deute das Ergebnis!

5) a) Wofür können bestimmte Integrale verwendet werden und was kann man mit ihrer Hilfe berechnen? (Mehrere Antworten erwünscht!)

b) Berechne: $\int ux^2 \, du$

---

6) Kannst du dir eine Welt ohne Wahrscheinlichkeit vorstellen? Wenn ja/nein, warum?

7) Angenommen du hast bei den bisherigen Mathematikwiederholungen folgende Punkteanzahlen erreicht: 10, 40, 40.

a) Würdest du den Median oder das arithmetische Mittel verwenden, um deine Durchschnittspunktezahl zu berechnen? Begründe deine Antwort!

b) Welcher wichtige Unterschied zwischen den beiden Berechnungsarten ist bei diesem Beispiel gut erkennbar?

---

8) In einem Schulbuch findet sich folgende Aufgabe:
„Eine Jägerin trifft ihr Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von $40\ \%$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt sie bei zehn Schüssen mehr als sechs Treffer?“.
Erkläre, wieso es sich hierbei um eine Binomialverteilung handelt!

Vielen Dank für deine Mitarbeit!

4.2.1. Handlungsbereiche, Inhaltsbereiche und angesprochene Grundvorstellungen

In diesem Abschnitt werden zu jeder Aufgabe die Grundvorstellungen angeführt, welche von den Schülern und Schülerinnen erwartet werden. Insgesamt wurden diese im Abschnitt 4.1. bereits vorgestellt. Außerdem werden die Aufgaben den Handlungsbereichen der Bildungsstandards für Mathematik achten Schulstufe zugeordnet. Die Inhaltsbereiche sind analog jenen, welche bei der kompetenzorientierten Reifeprüfung für Mathematik an AHS verwendet werden (vgl. BIFIE 2017 & BMBF 2012).

Frage 1a

Frage 1a fällt unter den Inhaltsbereich „Algebra und Geometrie“ und den Handlungsbereich H3 „Interpretieren“. Folgende Grundvorstellungen können mit dieser Aufgabe abgefragt werden:

GV 1: Für $0° \leq \varphi \leq 90°$ gilt:

$$\sin\varphi = \frac{\textit{Länge der Gegenkathete}}{\textit{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\textit{Länge der Ankathete}}{\textit{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\textit{Länge der Gegenkathete}}{\textit{Länge der Ankathete}}$$

GV 2: Die Schüler und Schülerinnen sollen die Darstellung von Sinus und Cosinus am Einheitskreis kennen und Skizzen erläutern können. Sie sollen anhand des Einheitskreises jederzeit das Vorzeichen von $\sin\mu$ und $\cos\mu$ $(0° \leq \mu \leq 360°)$ ermitteln können.

GV 4: Visuelle Vorstellung vom typischen Verlauf der Graphen von Sinus, Cosinus und Tangens.

Frage 1b

Wir bleiben im gleichen Inhaltsbereich, allerdings beschäftigt sich diese Frage mit dem Handlungsbereich H4 „Argumentieren, Begründen“. Die angesprochene Grundvorstellung ist hier GV 2 von Frage 1a.

Frage 2

Mit Frage 2 wechseln wir in den Inhaltsbereich „Analysis“. Handlungsbereiche werden gleich zwei angesprochen, nämlich H1 „Darstellen, Modellbilden“ und H3 „Interpretieren“. Folgende Grundvorstellungen sind bei dieser Frage zu erwarten:

GV 1: Differenzenquotient als Verhältnis.
GV 2: Differenzenquotient als mittlere Änderungsrate.
GV 3: Differenzenquotient als Faktor.
GV 6: Der Differenzenquotient von f in $[a;\, b]$ ist gleich der Steigung der zugehörigen Sekantenfunktion.

Frage 3

Diese Aufgabe ist der vorherigen Fragestellung sehr ähnlich. Sie behandelt den Handlungsbereich H3 „Interpretieren“ und den Inhaltsbereich „Analysis“. Im Gegensatz zu Frage 2, in der es um Grundkenntnisse und Grundfertigkeiten geht, müssen die Schüler und Schülerinnen hier Verbindungen herstellen und reflektieren. Das Komplexitätsniveau ändert sich also. Zu den Grundvorstellungen zum Differenzenquotient kommen die Grundvorstellungen zum Differentialquotienten hinzu:

GV 1: Der Differentialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten.
GV 2: Der Differentialquotient $f'(x)$ ist näherungsweise gleich dem Differenzenquotienten von f in einem sehr kleinen Intervall um x.
GV 3: Der Differentialquotient $f'(x)$ ist gleich der Steigung von f an der Stelle x bzw. gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x/f(x))$.

Frage 4

Frage 4 ist wieder eine Standardaufgabe. Inhaltsbereich bleibt nach wie vor „Analysis“. Die beiden angesprochenen Handlungsbereiche sind H2 „Rechnen, Operieren“ und H3 „Interpretieren“. Vor allem GV 3 aus Frage 3 ist bei dieser Aufgabe zu erwarten.

Frage 5a

Aufgabe 5 fällt wiederum in den Inhaltsbereich „Analysis“, behandelt aber diesmal die Integralrechnung. Handlungsbereich ist wieder H3 „Interpretieren“. Folgende Grundvorstellungen zur Integralrechnung werden erwartet:

GV 1: Das Integral als verallgemeinerter Summationsprozess.
GV 2: Das Integral als Stammfunktion.
GV 3: Das Integral als Mittelwert.
GV 4: Das Integral als Umkehrung des Differenzierens.
GV 5: Das Integral als orientierter Flächeninhalt.

Frage 5b

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Standardaufgabe. Schüler und Schülerinnen, die den Fragebogen mithilfe von mathematischen Arbeitsumgebungen ausfüllen sollten hier überhaupt keine Probleme haben, da es ums bloße Kalkül geht. Handlungsbereich wäre hier H2 „Rechnen, Operieren“. Die erforderliche Grundvorstellung ist GV 2 aus Frage 5a.

Frage 6

Mit Frage 6 kommen wir in den letzten Inhaltsbereich der gestellten Aufgaben, nämlich „Wahrscheinlichkeit und Statistik“. Handlungsbereich dieser Aufgabe ist H4 „Argumentieren, Begründen“. Das Vorhandensein bzw. Fehlen folgender Grundvorstellungen kann damit überprüft werden:

GV 1: Wahrscheinlichkeit als Maß für eine Erwartung.
GV 2: Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil.
GV 3: Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit.
GV 4: Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen.

Frage 7a

Bei den Inhaltsbereichen und Handlungsbereichen ändert sich nichts mehr. Lediglich die zu erwartenden Grundvorstellungen ändern sich:

GV 6: Das arithmetische Mittel als repräsentativer Wert.
GV 7: Das arithmetische Mittel als Ausgleichswert für stark schwankende Daten.
GV 8: Der Median als repräsentativer Wert.
GV 9: Der Median als Zentrum einer Verteilung.

Frage 7b

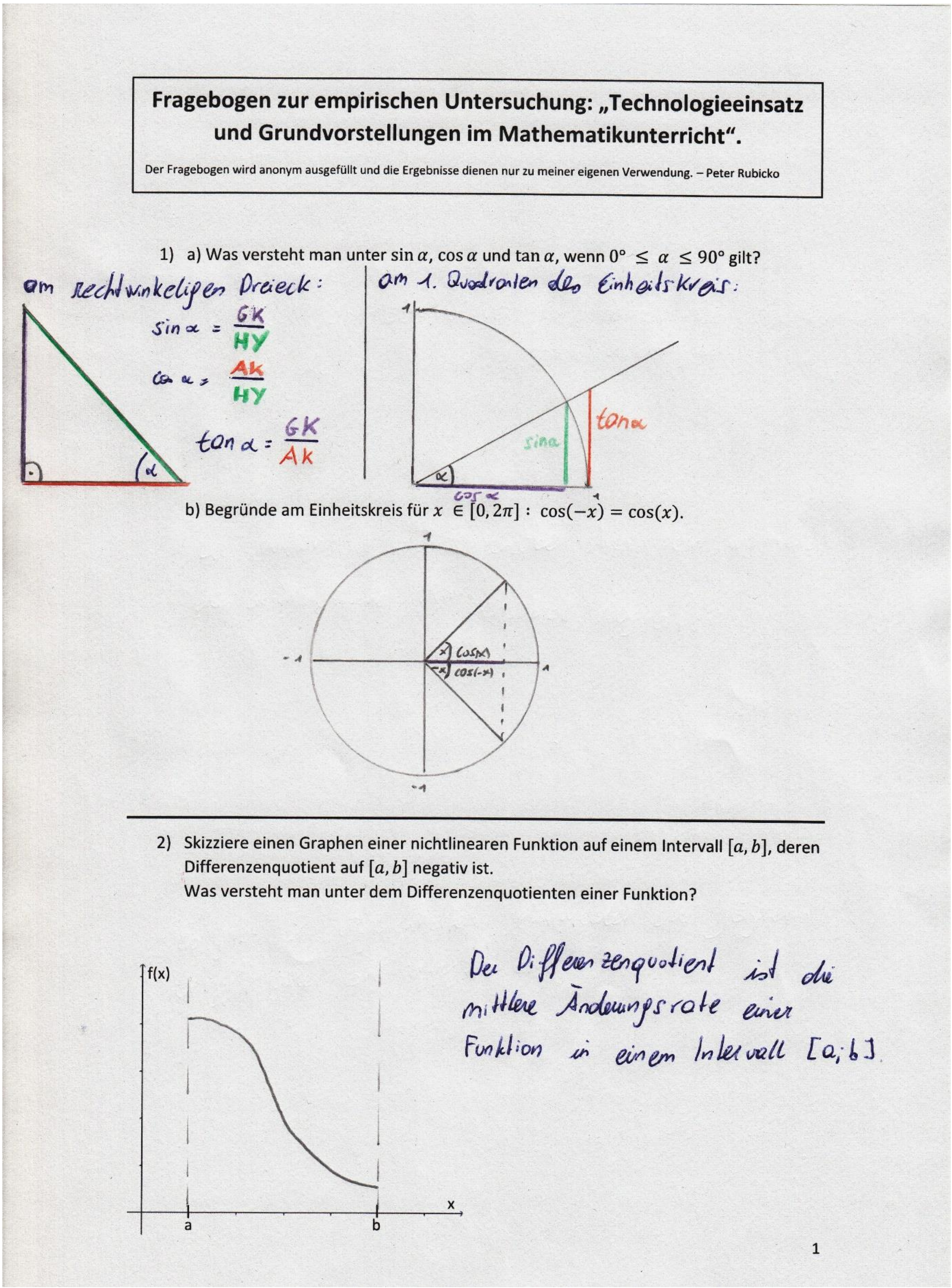
Diese Aufgabe überprüft explizit folgende Grundvorstellung:
GV 10: Der Median als ausreißerrobustes Lagemaß.

Frage 8

Bei Aufgabe 8 ist es besonders wichtig, dass die Schüler und Schülerinnen über eine gute Lesekompetenz verfügen. Die zugehörige Grundvorstellung ist:
GV 5: Die Binomialverteilung als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable mit zwei Ausprägungen.

Es ist kein Zufall, dass der Großteil der Aufgaben in die Handlungsbereiche „Interpretieren" und „Argumentieren, Begründen" fallen, da es bei den Grundvorstellungen überwiegend um Verständnisfragen geht.

Ein Musterblatt mit möglichen Lösungen anzufertigen ist im Folgenden zu sehen. Danach werden die Ergebnisse ausgewertet und interpretiert.



Fragebogen zur empirischen Untersuchung: „Technologieeinsatz und Grundvorstellungen im Mathematikunterricht".

Der Fragebogen wird anonym ausgefüllt und die Ergebnisse dienen nur zu meiner eigenen Verwendung. – Peter Rubicko

1) a) Was versteht man unter $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$, wenn $0° \leq \alpha \leq 90°$ gilt?

am rechtwinkeligen Dreieck:

$\sin\alpha = \frac{GK}{HY}$

$\cos\alpha = \frac{AK}{HY}$

$\tan\alpha = \frac{GK}{AK}$

am 1. Quadranten des Einheitskreis:

b) Begründe am Einheitskreis für $x \in [0, 2\pi]$: $\cos(-x) = \cos(x)$.

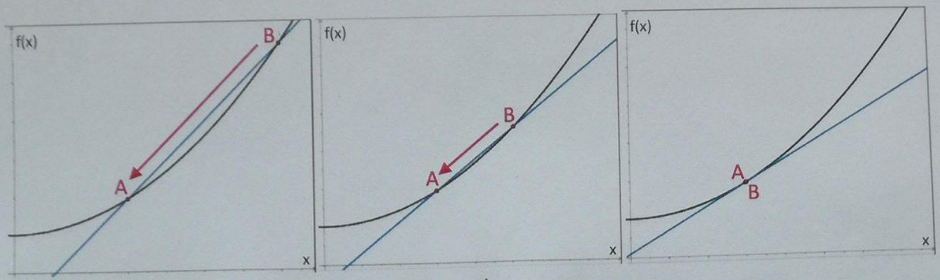
2) Skizziere einen Graphen einer nichtlinearen Funktion auf einem Intervall $[a, b]$, deren Differenzenquotient auf $[a, b]$ negativ ist.
Was versteht man unter dem Differenzenquotienten einer Funktion?

Der Differenzenquotient ist die mittlere Änderungsrate einer Funktion in einem Intervall [a;b].

1

Abbildung 9: Musterbogen Blatt 1 (eigene Darstellung)

3) In den folgenden Abbildungen wandert der Punkt B gegen den Punkt A. Beschreibe den mathematischen Vorgang, der hier dargestellt wird!



Dieser Vorgang symbolisiert den Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotienten.
Durch Bilden des Grenzwerts kommt man von der mittleren Änderungsrate zur lokalen Änderungsrate

4) Gegeben ist eine Funktion f mit: $f(x) = -x^2$. Berechne $f'(3)$ und deute das Ergebnis!

$f'(x) = -2x$
$f'(3) = -6$

Beim Punkt (3/-9) beträgt die lokale Änderungsrate (Steigung) -6.

2

Abbildung 10: Musterbogen Blatt 2 (eigene Darstellung)

5) a) Wofür können bestimmte Integrale verwendet werden und was kann man mit ihrer Hilfe berechnen? (Mehrere Antworten erwünscht!)

- Stammfunktionen
- Flächen und Volumina
- physikalische Anwendungen

b) Berechne: $\int ux^2\,du$

$$\int ux^2\,du = \frac{u^2x^2}{2} + c$$

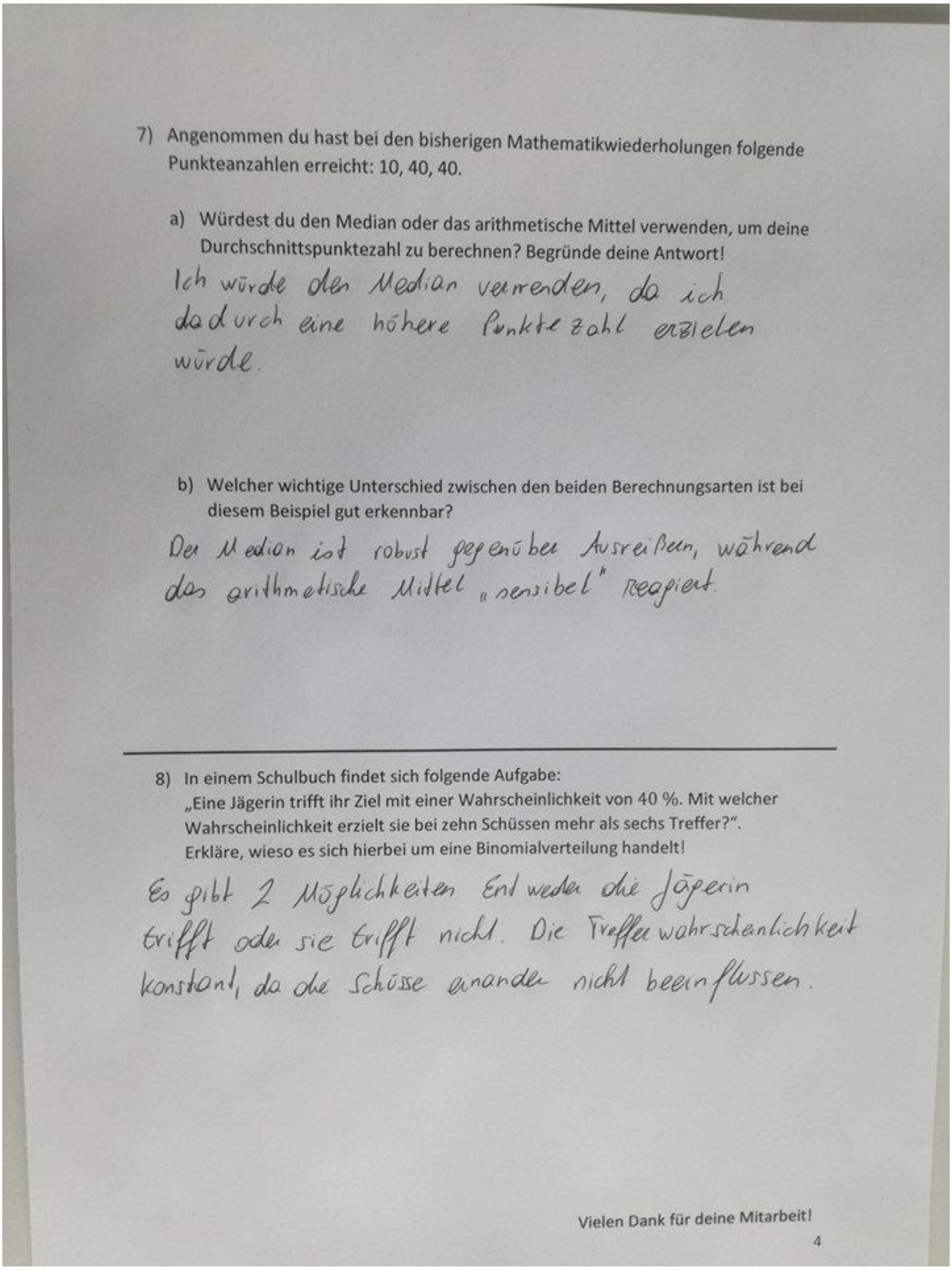
---

6) Kannst du dir eine Welt ohne Wahrscheinlichkeit vorstellen? Wenn ja/nein, warum?

Nein, da viele Entscheidungen in meinem Alltag davon beeinflusst sind, mit welchem Ergebnis am ehesten zu rechnen ist. z.B. spiele ich nicht Lotto, da meine Gewinnchancen zu niedrig sind.

3

Abbildung 11: Musterbogen Blatt 3 (eigene Darstellung)



7) Angenommen du hast bei den bisherigen Mathematikwiederholungen folgende Punkteanzahlen erreicht: 10, 40, 40.

a) Würdest du den Median oder das arithmetische Mittel verwenden, um deine Durchschnittspunktezahl zu berechnen? Begründe deine Antwort!

Ich würde den Median verwenden, da ich dadurch eine höhere Punktezahl erzielen würde.

b) Welcher wichtige Unterschied zwischen den beiden Berechnungsarten ist bei diesem Beispiel gut erkennbar?

Der Median ist robust gegenüber Ausreißern, während das arithmetische Mittel „sensibel" reagiert.

8) In einem Schulbuch findet sich folgende Aufgabe:
„Eine Jägerin trifft ihr Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt sie bei zehn Schüssen mehr als sechs Treffer?".
Erkläre, wieso es sich hierbei um eine Binomialverteilung handelt!

Es gibt 2 Möglichkeiten Entweder die Jägerin trifft oder sie trifft nicht. Die Trefferwahrschenlichkeit konstant, da die Schüsse einander nicht beeinflussen.

Vielen Dank für deine Mitarbeit!

4

Abbildung 12: Musterbogen Blatt 4 (eigene Darstellung)

4.3. Auswertung

Um die gewonnen Daten auswerten und interpretieren zu können, habe ich versucht die erhaltenen Antworten in Kategorien zusammenzufassen. Für jede Kategorie ist eine Musterantwort angeführt, welche ich händisch übernommen habe.

4.3.1. Kategorisierung der Antworten

<u>Frage 1a</u>

<table>
<tr><td>A:
$\sin\varphi = \frac{Länge\ der\ Gegenkathete}{Länge\ der\ Hypotenuse}$
$\cos\varphi = \frac{Länge\ der\ Ankathete}{Länge\ der\ Hypotenuse}$
$\tan\varphi = \frac{Länge\ der\ Gegenkathete}{Länge\ der\ Ankathete}$</td><td rowspan="3">Grundvorstellung vorhanden</td></tr>
<tr><td>B: Visuelle Vorstellung von Sinus, Cosinus und Tangens am Einheitskreis</td></tr>
<tr><td>C: Vorstellung vom typischen Verlauf der Graphen</td></tr>
<tr><td>D: falsche Antwort</td><td rowspan="2">Grundvorstellung nicht vorhanden</td></tr>
<tr><td>E: keine Antwort</td></tr>
</table>

Tabelle 1: Kategorisierung Frage 1a (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

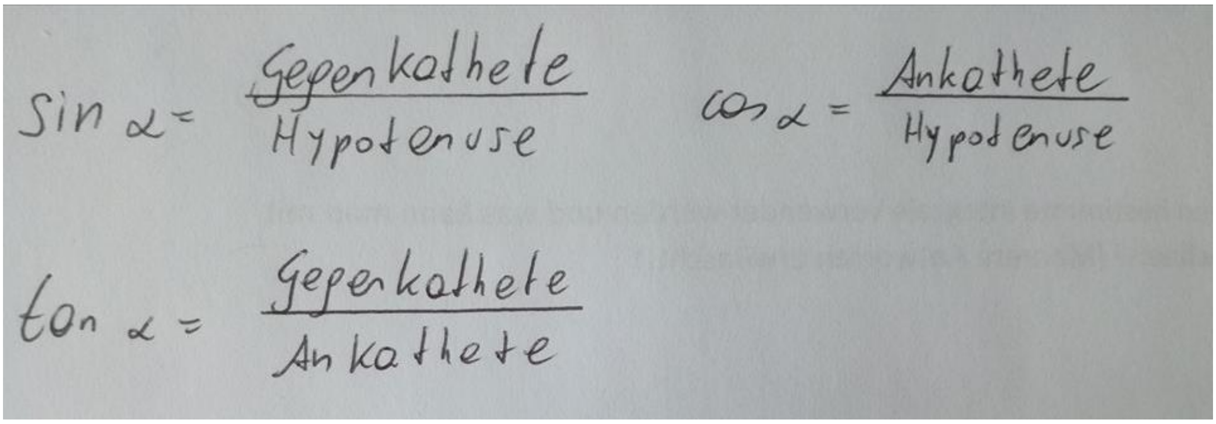


Abbildung 13: Musterantwort Frage 1a - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

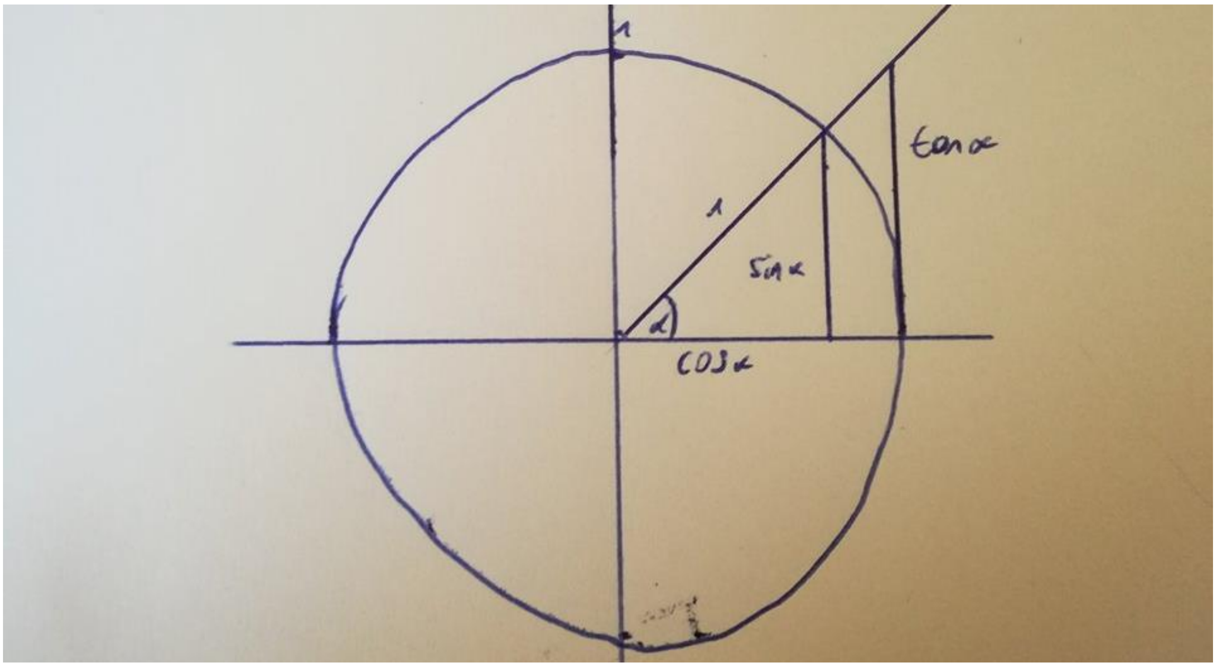


Abbildung 14: Musterantwort Frage 1a - Kategorie B (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie C:

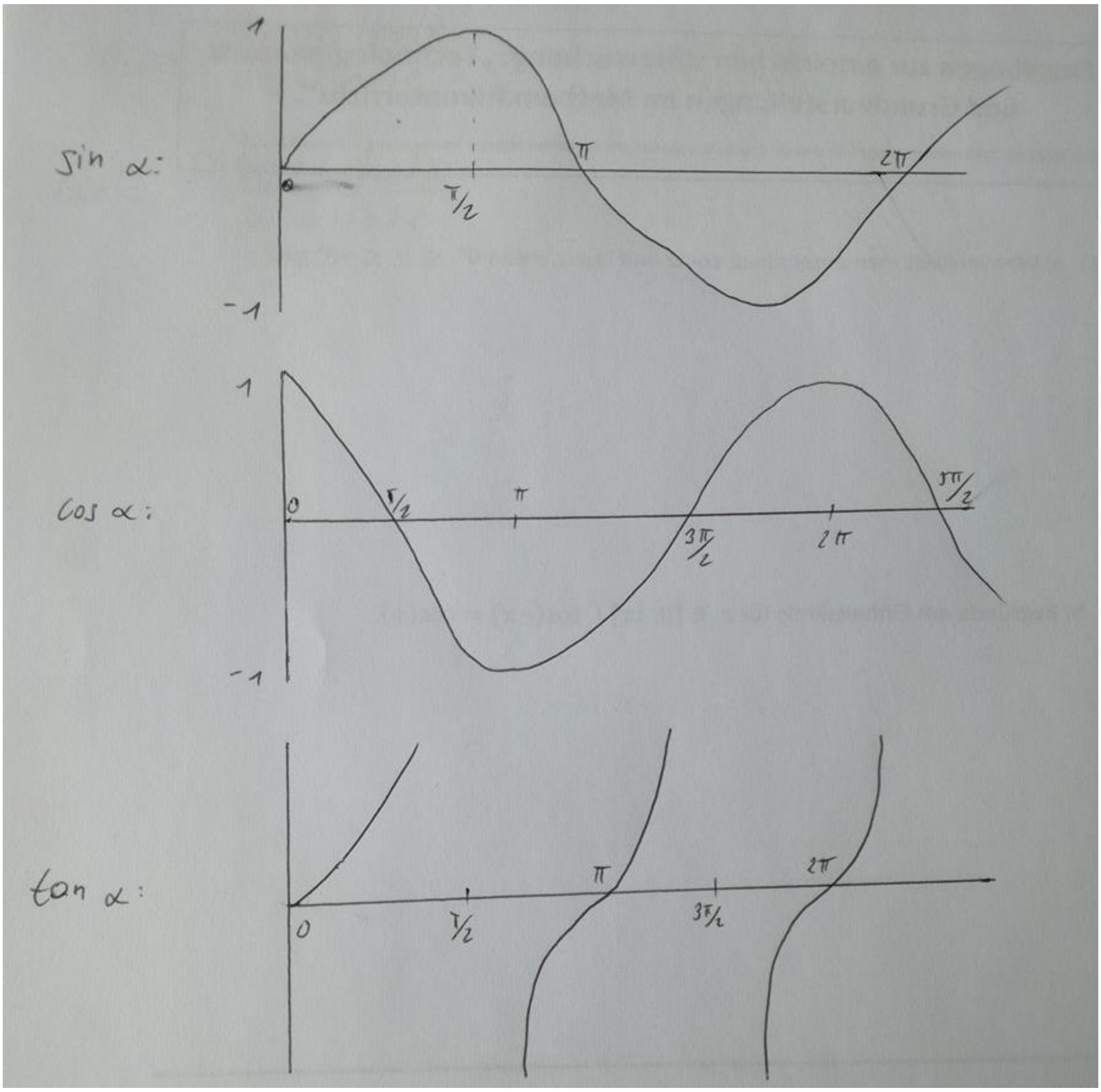


Abbildung 15: Musterantwort Frage 1a - Kategorie C (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie D:

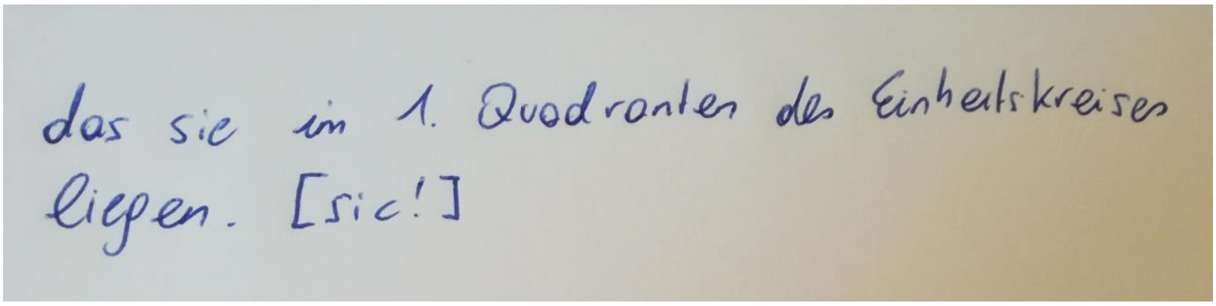


Abbildung 16: Musterantwort Frage 1a - Kategorie D (eigene Darstellung)

Frage 1b

<table>
<tr><td>A: richtige Antwort</td><td>Grundvorstellung vorhanden</td></tr>
<tr><td>B: falsche Antwort</td><td rowspan="2">Grundvorstellung nicht vorhanden</td></tr>
<tr><td>C: keine Antwort</td></tr>
</table>

Tabelle 2: Kategorisierung Frage 1b (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

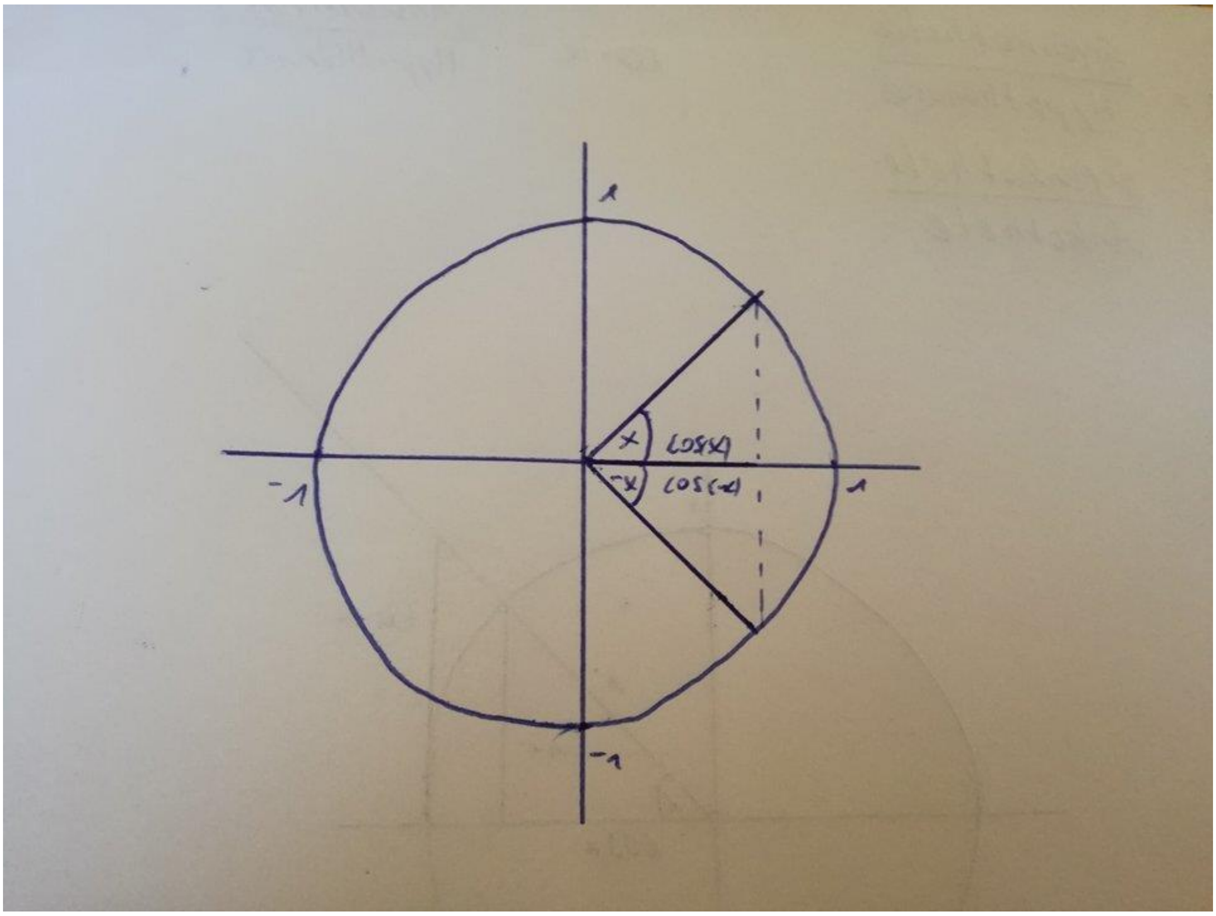


Abbildung 17: Musterantwort Frage 1b - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

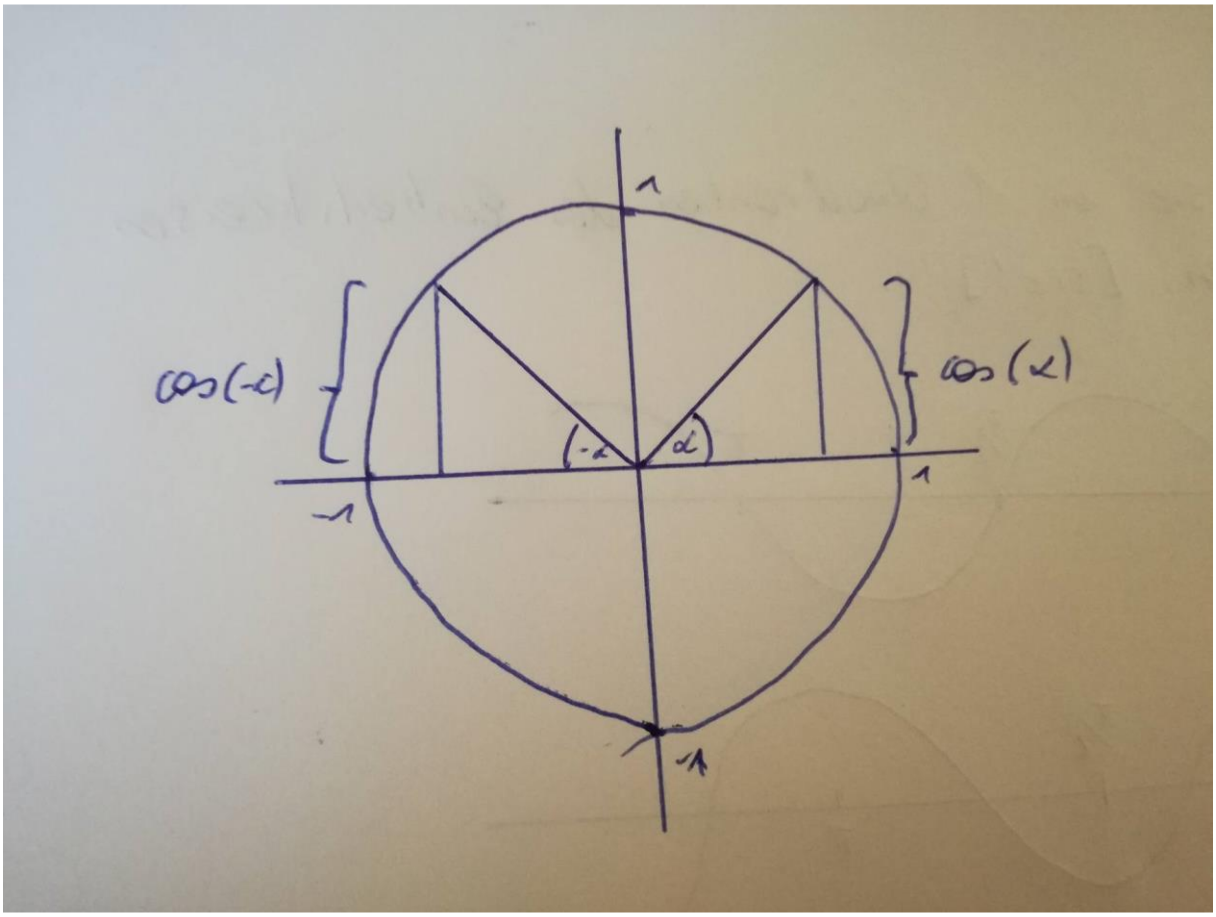


Abbildung 18: Musterantwort Frage 1b - Kategorie B (eigene Darstellung)

Frage 2

A: Der Differenzenquotient von f in $[a, b]$ ist gleich der Steigung der zugehörigen Sekantenfunktion	Grundvorstellung vorhanden
B: Der Differenzenquotient als mittlere Änderungsrate	
C: Der Differenzenquotient als Verhältnis	
D: Adjektiv „mittlere“ vergessen	Grundvorstellung nicht vorhanden
E: nur Definition ohne Interpretation	
F: nur Graph ohne Interpretation	
G: Verwechslung mit Differentialquotienten	
H: falsche Antwort	
I: keine Antwort	

Tabelle 3: Kategorisierung Frage 2 (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

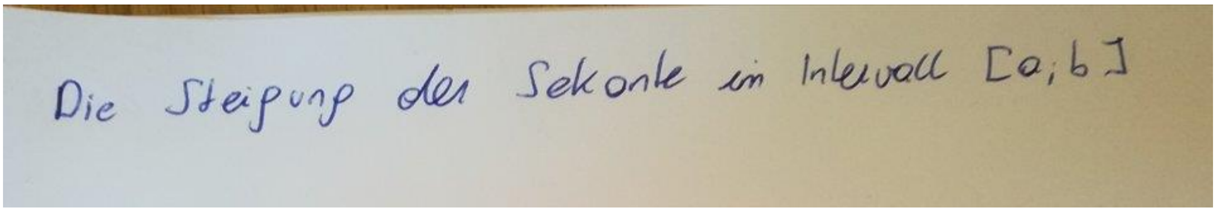


Abbildung 19: Musterantwort Frage 2 - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

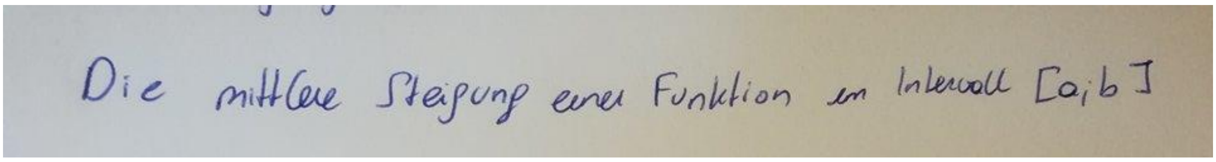


Abbildung 20: Musterantwort Frage 2 - Kategorie B (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie C:

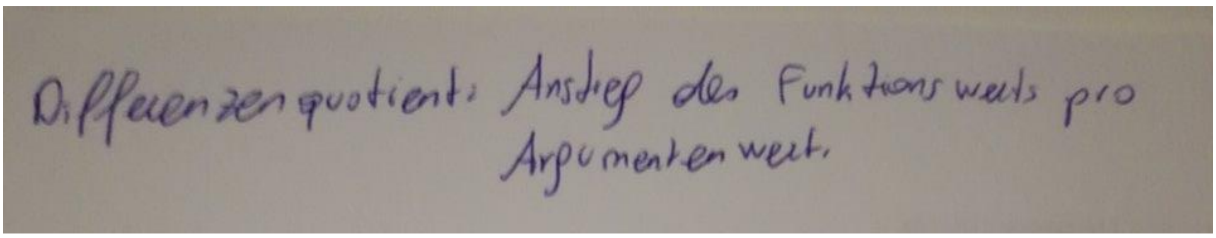


Abbildung 21: Musterantwort Frage 2 - Kategorie C (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie D:

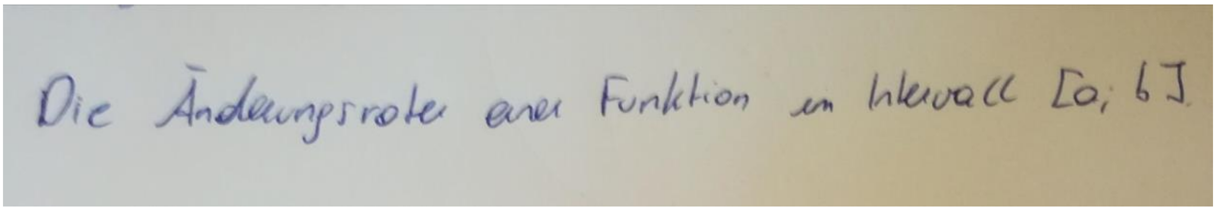


Abbildung 22: Musterantwort Frage 2 - Kategorie D (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie E:

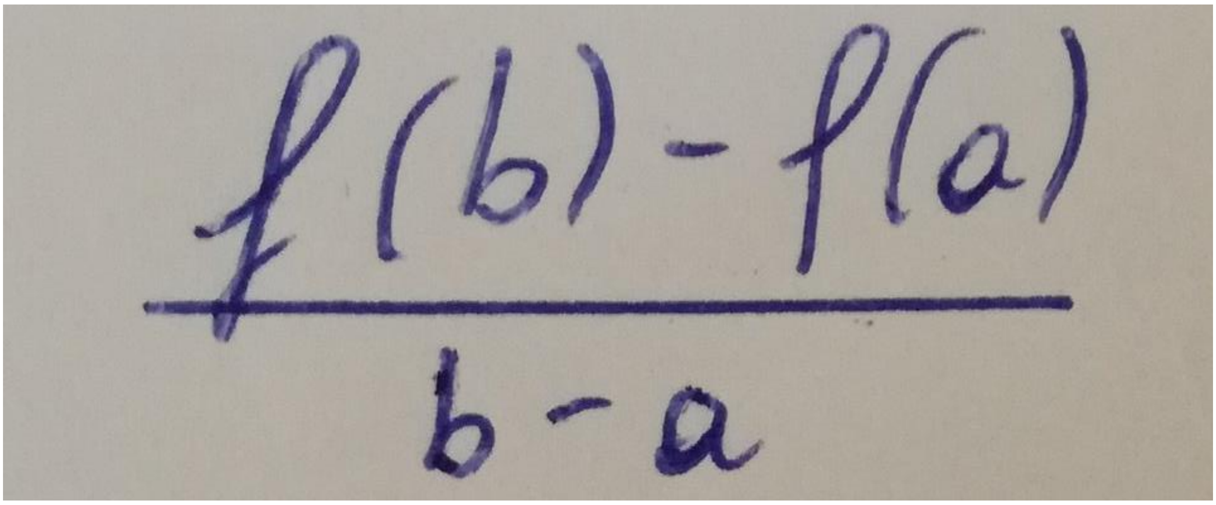


Abbildung 23: Musterantwort Frage 2 - Kategorie E (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie G:

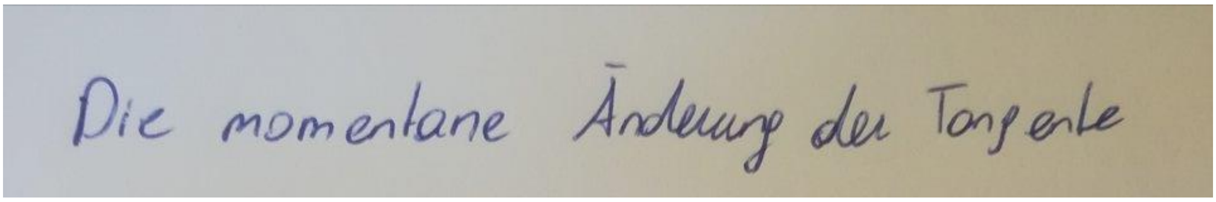


Abbildung 24: Musterantwort Frage 2 - Kategorie G (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie H:

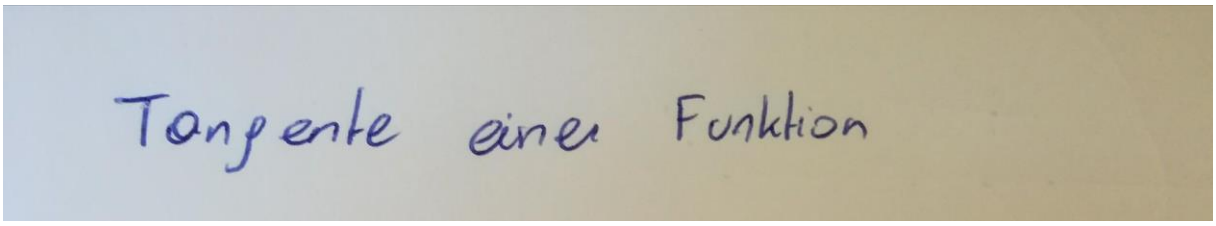


Abbildung 25: Musterantwort Frage 2 - Kategorie H (eigene Darstellung)

Frage 3

A: Der Differentialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten	Grundvorstellung vorhanden
B: Der Differentialquotient $f'(x)$ ist näherungsweise gleich dem Differenzenquotienten von f in einem sehr kleinen Intervall um x	
C: Der Differentialquotient $f'(x)$ ist gleich der Steigung von f an der Stelle x bzw. gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x/f(x))$	
D: falsche Antwort	Grundvorstellung nicht vorhanden
E: keine Antwort	

Tabelle 4: Kategorisierung Frage 3 (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

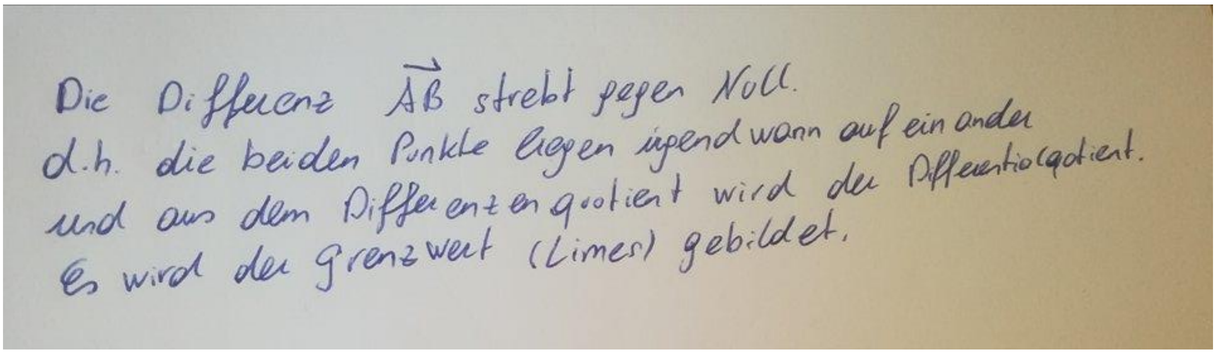


Abbildung 26: Musterantwort Frage 3 - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

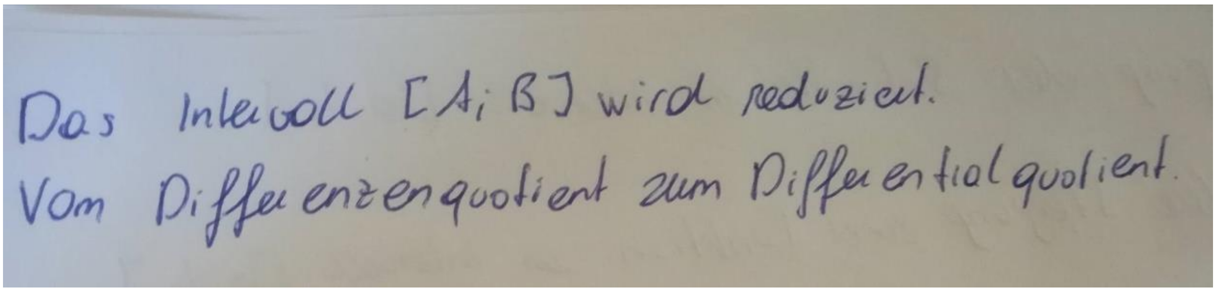


Abbildung 27: Musterantwort Frage 3 - Kategorie B (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie C:

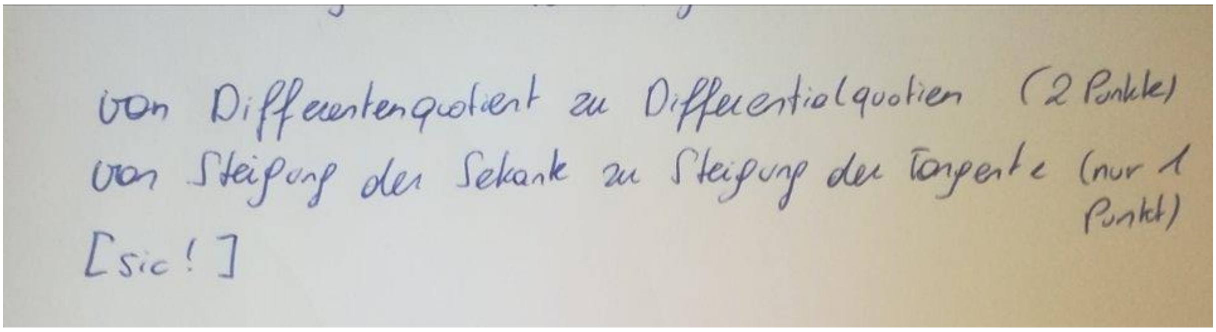

von Differenzenquotient zu Differentialquotien (2 Punkte)
von Steigung der Sekant zu Steigung der Tangente (nur 1 Punkt)
[sic!]

Abbildung 28: Musterantwort Frage 3 - Kategorie C (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie D:

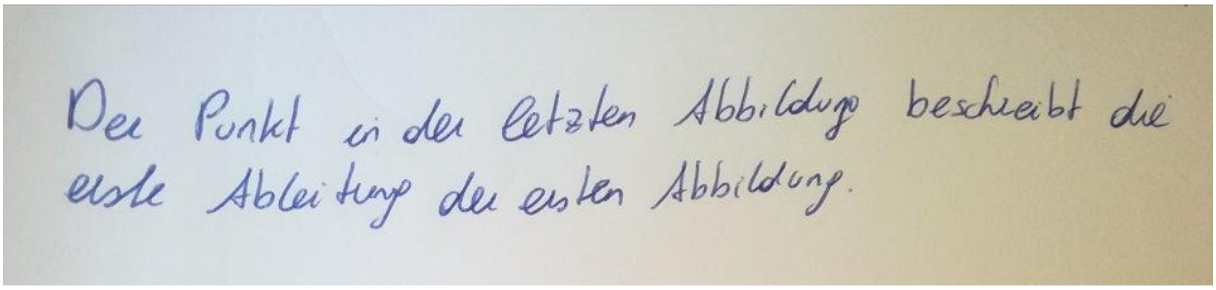

Der Punkt in der letzten Abbildung beschreibt die erste Ableitung der ersten Abbildung.

Abbildung 29: Musterantwort Frage 3 - Kategorie D (eigene Darstellung)

Frage 4

A: Der Differentialquotient $f'(x)$ ist gleich der Steigung von f an der Stelle x bzw. gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x/f(x))$	Grundvorstellung vorhanden
B: richtige Interpretation, aber Rechenfehler	
C: nur Berechnung, ohne Interpretation	Grundvorstellung nicht vorhanden
D: falsche Antwort	
E: keine Antwort	

Tabelle 5: Kategorisierung Frage 4 (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

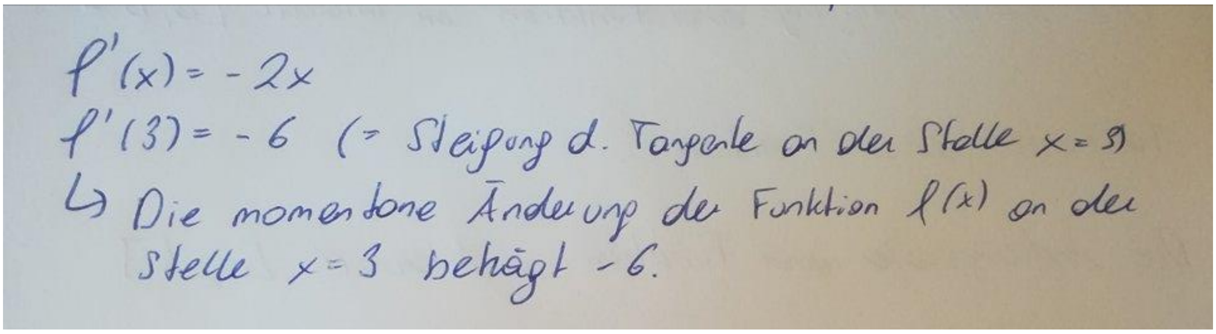


Abbildung 30: Musterantwort Frage 4 - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

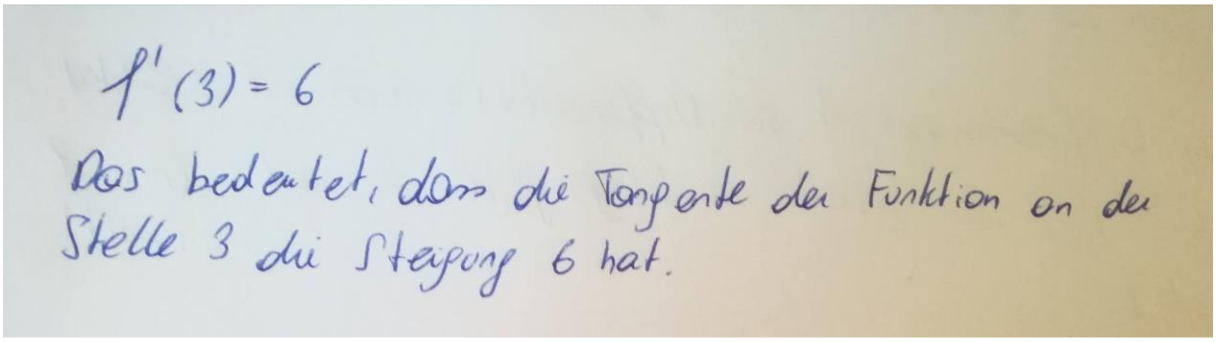


Abbildung 31: Musterantwort Frage 4 - Kategorie B (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie C:

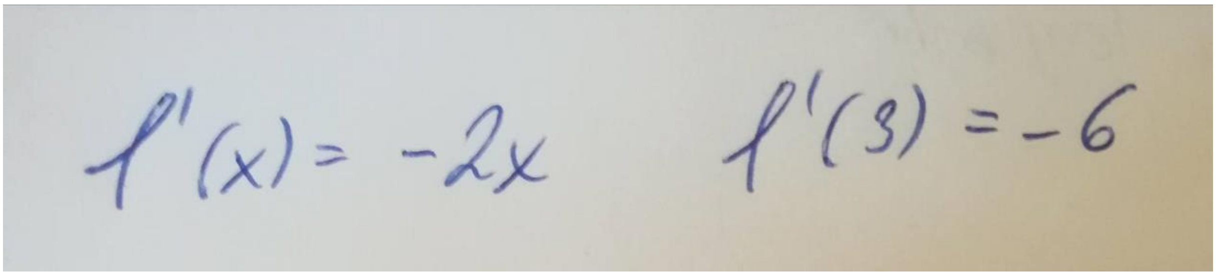


Abbildung 32: Musterantwort Frage 4 - Kategorie C (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie D:

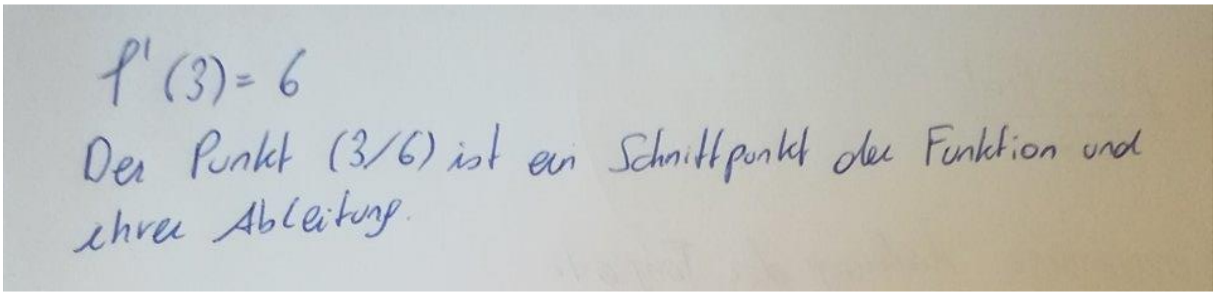


Abbildung 33: Musterantwort Frage 4 - Kategorie D (eigene Darstellung)

Frage 5a

A: mehrere Aspekte	Grundvorstellung vorhanden
B: Das Integral als orientierter Flächeninhalt	
C: Das Integral als Stammfunktion	
D: falsche Antwort	Grundvorstellung nicht vorhanden
E: keine Antwort	

Tabelle 6: Kategorisierung Frage 5a (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

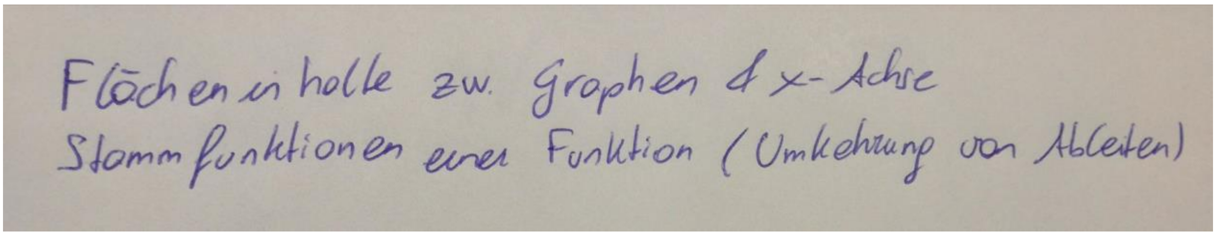


Abbildung 34: Musterantwort Frage 5a - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

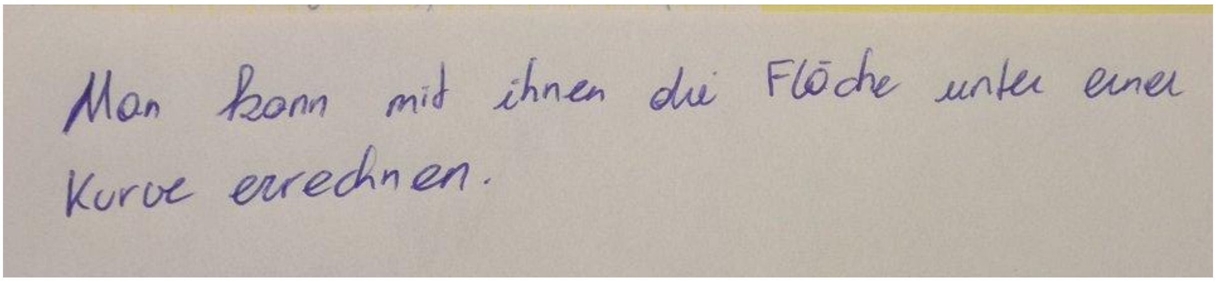


Abbildung 35: Musterantwort Frage 5a - Kategorie B (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie C:

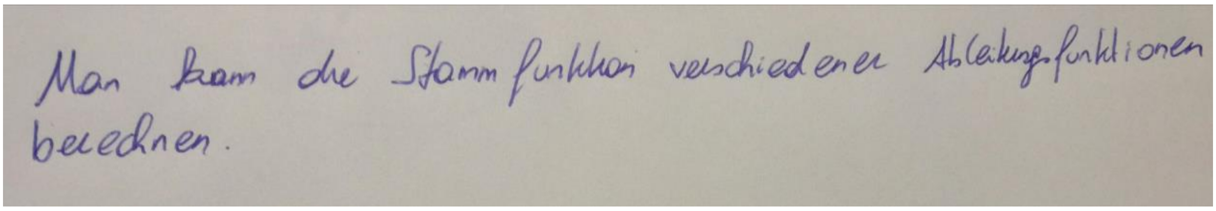


Abbildung 36: Musterantwort Frage 5a - Kategorie C (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie D:

zum Aufsummieren von unendlich vielen Punkten auf einem Graphen.

Abbildung 37: Musterantwort Frage 5a - Kategorie D (eigene Darstellung)

Frage 5b

A: richtig berechnet	Grundvorstellung vorhanden
B: falsch berechnet; nach u integriert	Grundvorstellung nicht vorhanden
C: falsch berechnet; nach x integriert	
D: ganz falsch berechnet	
E: keine Antwort	

Tabelle 7: Kategorisierung Frage 5b (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

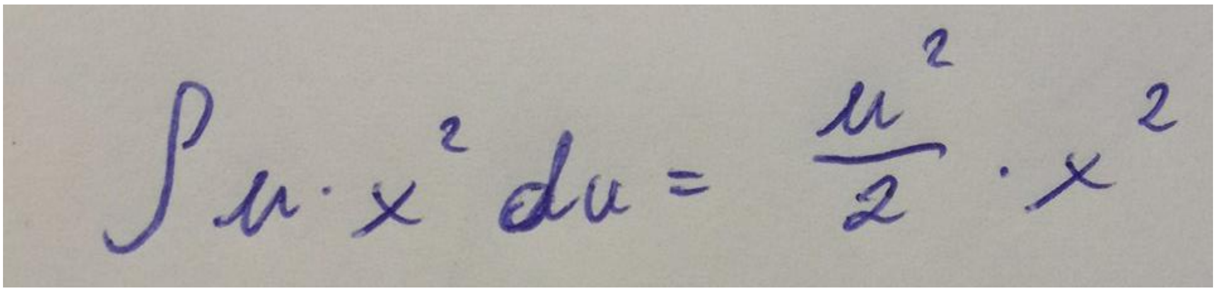


Abbildung 38: Musterantwort Frage 5b - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

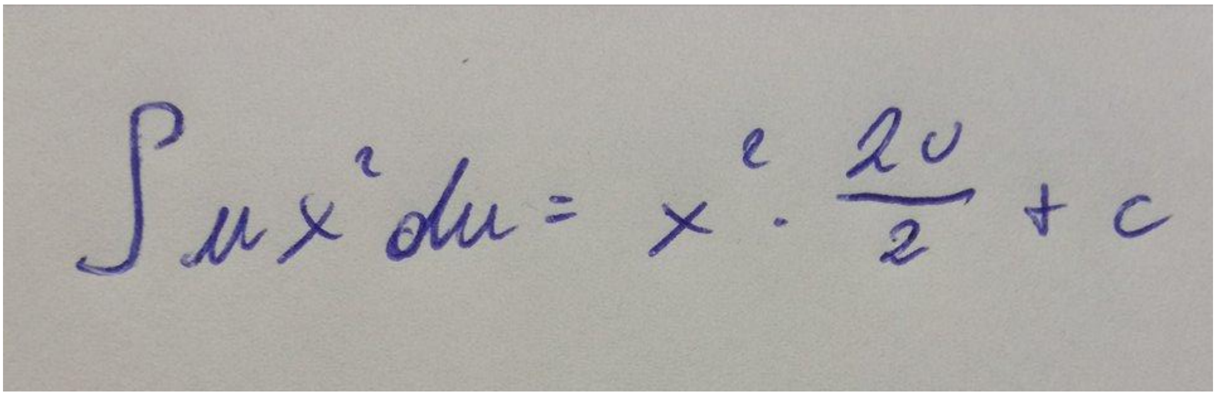


Abbildung 39: Musterantwort Frage 5b - Kategorie B (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie C:

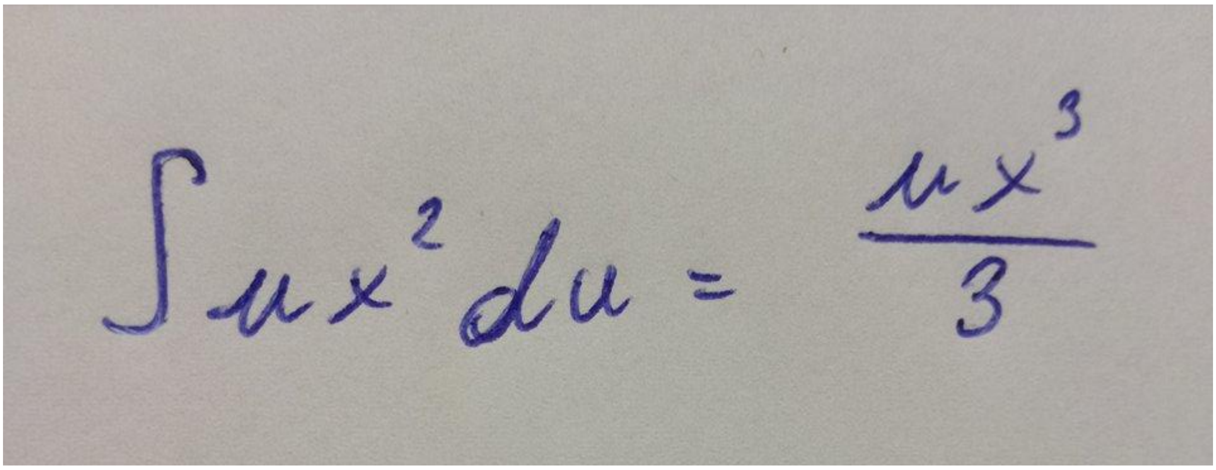


Abbildung 40: Musterantwort Frage 5b - Kategorie C (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie D:

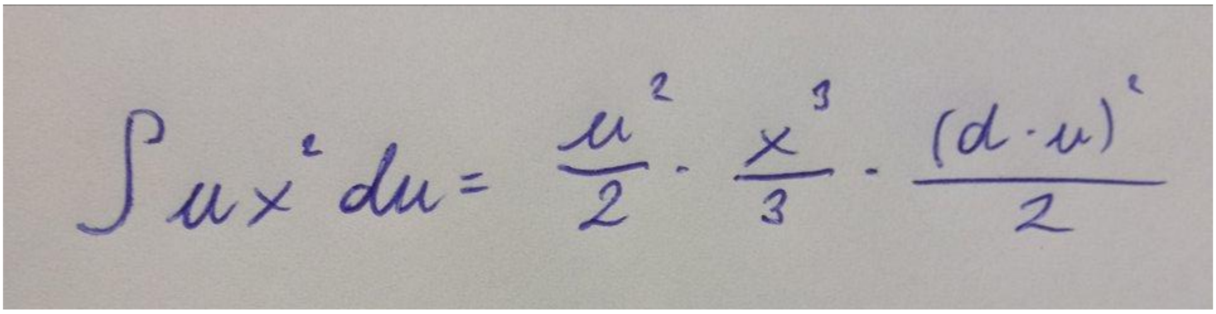


Abbildung 41: Musterantwort Frage 5b - Kategorie D (eigene Darstellung)

Frage 6

A: Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen	Grundvorstellung vorhanden
B: Wahrscheinlichkeit als Maß für eine Erwartung	
C: nein, andere Begründung	Grundvorstellung nicht vorhanden
D: Ja	
E: keine Antwort	

Tabelle 8: Kategorisierung Frage 6 (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

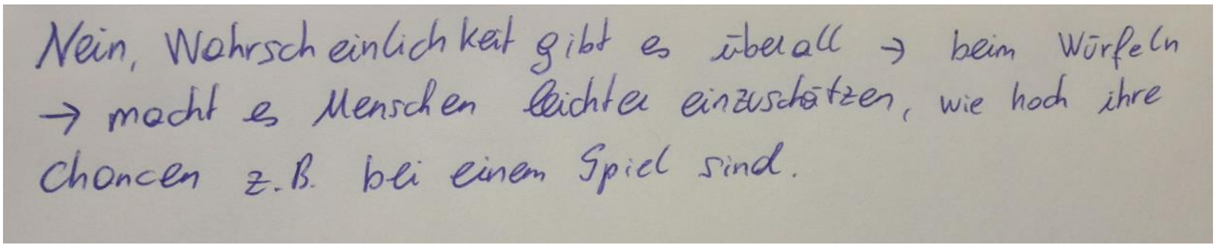

Nein, Wahrscheinlichkeit gibt es überall → beim Würfeln
→ macht es Menschen leichter einzuschätzen, wie hoch ihre
Chancen z.B. bei einem Spiel sind.

Abbildung 42: Musterantwort Frage 6 - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

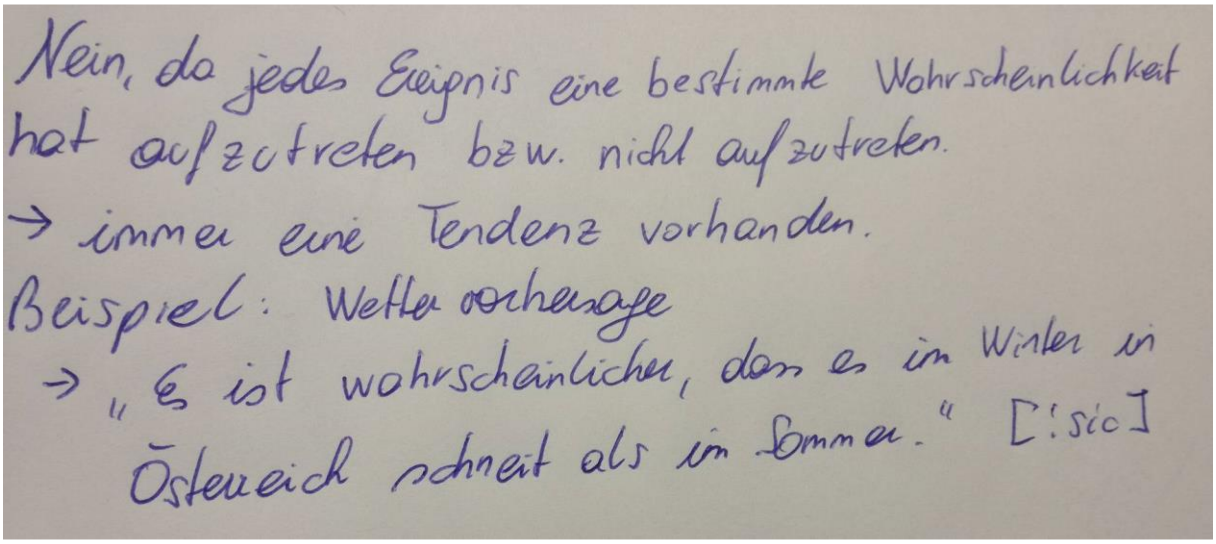
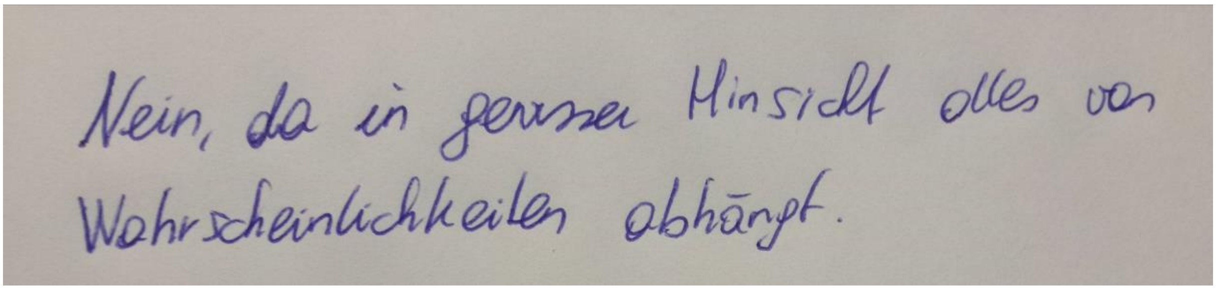

Nein, da jedes Ereignis eine bestimmte Wahrscheinlichkeit
hat aufzutreten bzw. nicht aufzutreten.
→ immer eine Tendenz vorhanden.
Beispiel: Wettervorhersage
→ „Es ist wahrscheinlicher, dass es im Winter in
Österreich schneit als im Sommer." [!sic]

Abbildung 43: Musterantwort Frage 6 - Kategorie B (eigene Darstellung)

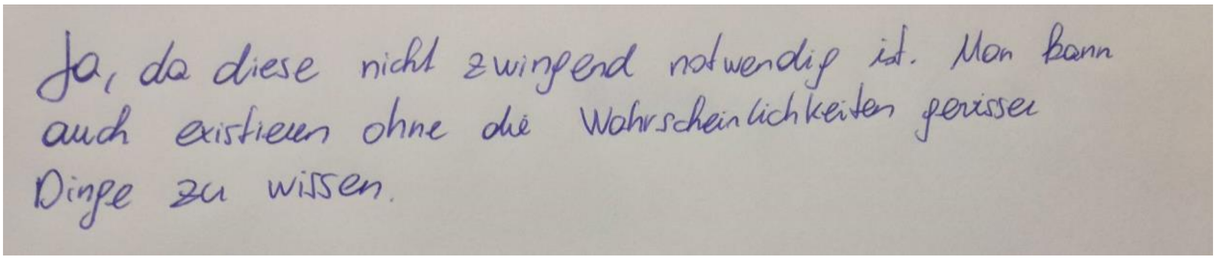
Musterantwort Kategorie C:



Nein, da in gewisser Hinsicht alles von Wahrscheinlichkeiten abhängt.

Abbildung 44: Musterantwort Frage 6 - Kategorie C (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie D:



Ja, da diese nicht zwingend notwendig ist. Man kann auch existieren ohne die Wahrscheinlichkeiten gewisser Dinge zu wissen.

Abbildung 45: Musterantwort Frage 6 - Kategorie D (eigene Darstellung)

Frage 7a

<table>
<tr><td>A: Das arithmetische Mittel als repräsentativer Wert</td><td rowspan="4">Grundvorstellung vorhanden</td></tr>
<tr><td>B: Das arithmetische Mittel als Ausgleichswert für stark schwankende Daten</td></tr>
<tr><td>C: Der Median als repräsentativer Wert</td></tr>
<tr><td>D: Der Median als Zentrum einer Verteilung</td></tr>
<tr><td>E: keine Begründung</td><td rowspan="3">Grundvorstellung nicht vorhanden</td></tr>
<tr><td>F: falsche Antwort</td></tr>
<tr><td>G: keine Antwort</td></tr>
</table>

Tabelle 9: Kategorisierung Frage 7a (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

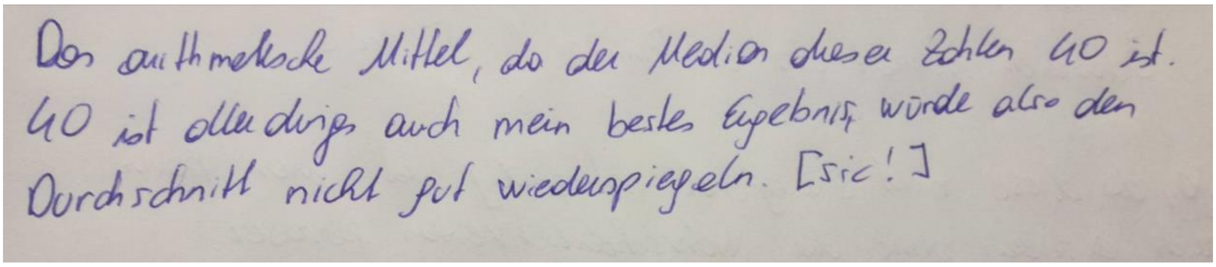


Abbildung 46: Musterantwort Frage 7a - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

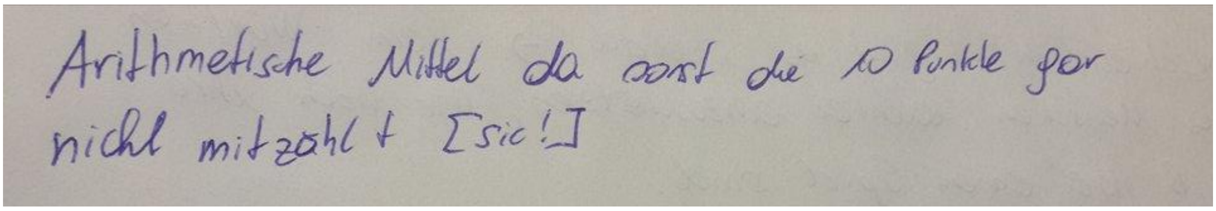


Abbildung 47: Musterantwort Frage 7a - Kategorie B (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie C:

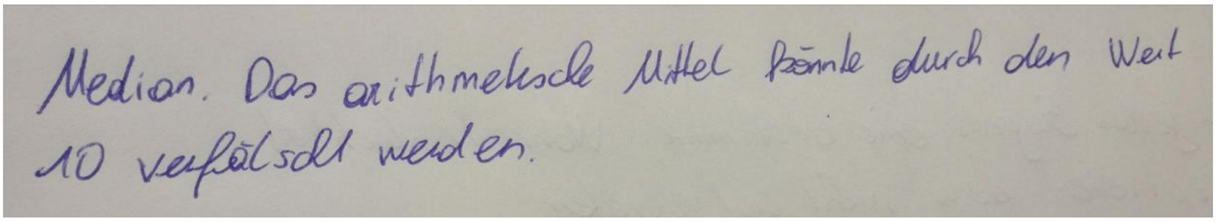


Abbildung 48: Musterantwort Frage 7a - Kategorie C (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie D:

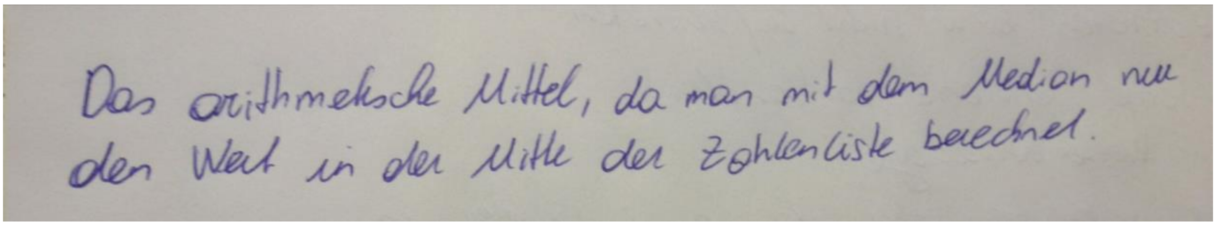

Das arithmetische Mittel, da man mit dem Median nur den Wert in der Mitte der Zahlenliste berechnet.

Abbildung 49: Musterantwort Frage 7a - Kategorie D (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie E:

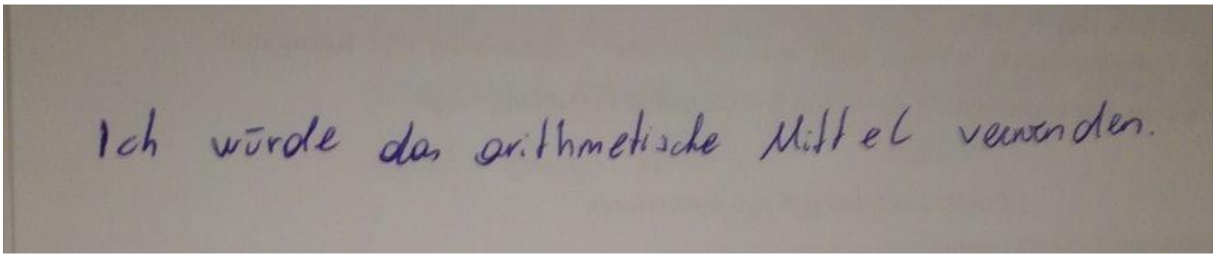

Ich würde das arithmetische Mittel verwenden.

Abbildung 50: Musterantwort Frage 7a - Kategorie E (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie F:

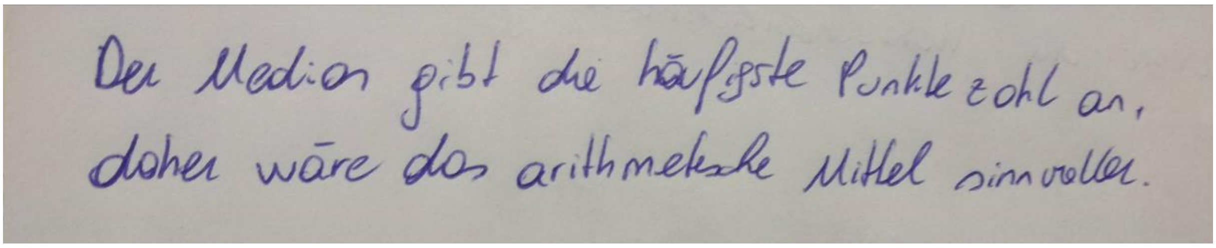

Der Median gibt die häufigste Punktezahl an, daher wäre das arithmetische Mittel sinnvoller.

Abbildung 51: Musterantwort Frage 7a - Kategorie F (eigene Darstellung)

Frage 7b

A: Der Median als ausreißerrobustes Lagemaß	Grundvorstellung vorhanden
B: richtige Aussage, welche die Frage allerdings nicht beantwortet	Grundvorstellung nicht vorhanden
C: falsche Antwort	
D: keine Antwort	

Tabelle 10: Kategorisierung Frage 7b (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

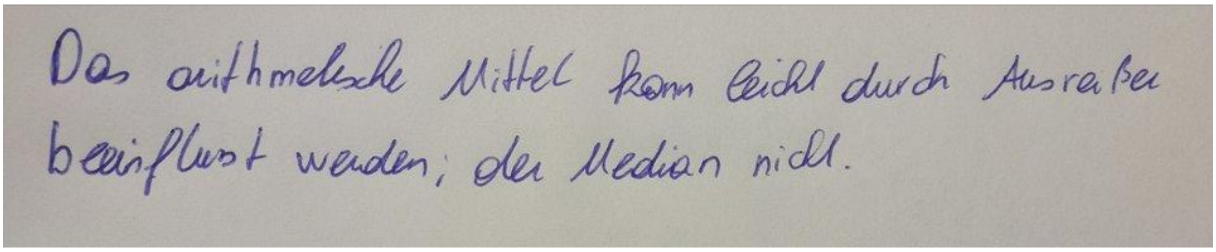

Das arithmetische Mittel kann leicht durch Ausreißer beeinflusst werden; der Median nicht.

Abbildung 52: Musterantwort Frage 7b - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

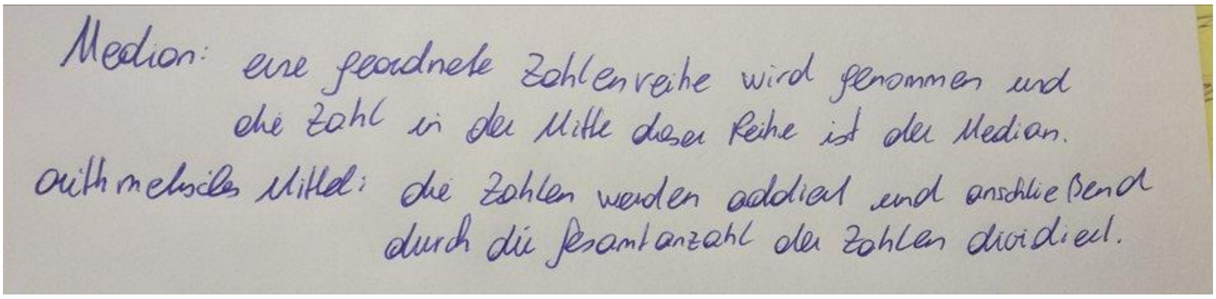

Median: eine geordnete Zahlenreihe wird genommen und die Zahl in der Mitte dieser Reihe ist der Median.
arithmetisches Mittel: die Zahlen werden addiert und anschließend durch die Gesamtanzahl der Zahlen dividiert.

Abbildung 53: Musterantwort Frage 7b - Kategorie B (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie C:

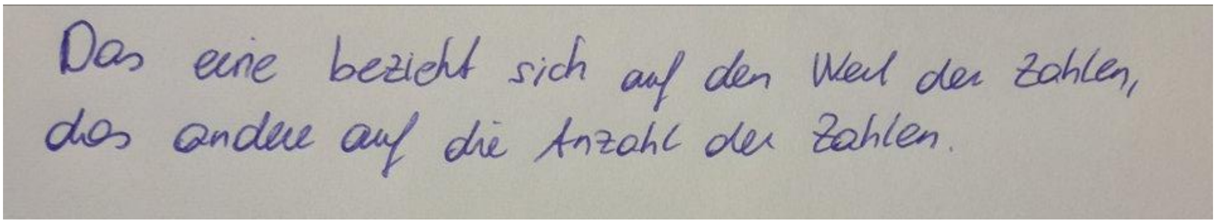

Das eine bezieht sich auf den Wert der Zahlen, das andere auf die Anzahl der Zahlen.

Abbildung 54: Musterantwort Frage 7b - Kategorie C (eigene Darstellung)

Frage 8

A: Die Binomialverteilung als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable mit zwei Ausprägungen	Grundvorstellung vorhanden
B: Aufgabe (falsch) gerechnet	Grundvorstellung nicht vorhanden
C: falsche Antwort	
D: keine Antwort	

Tabelle 11: Kategorisierung Frage 8 (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie A:

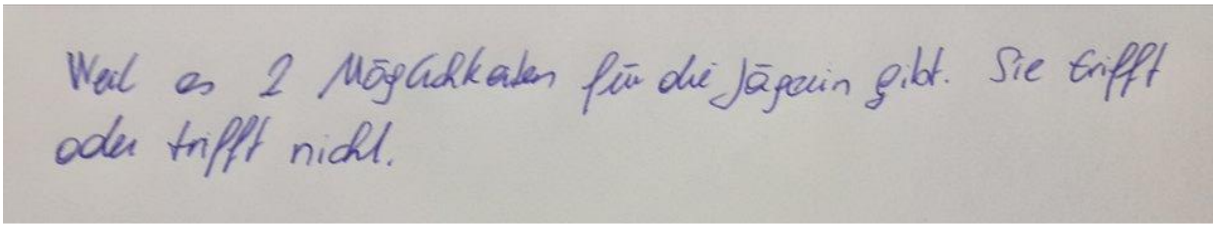


Abbildung 55: Musterantwort Frage 8 - Kategorie A (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie B:

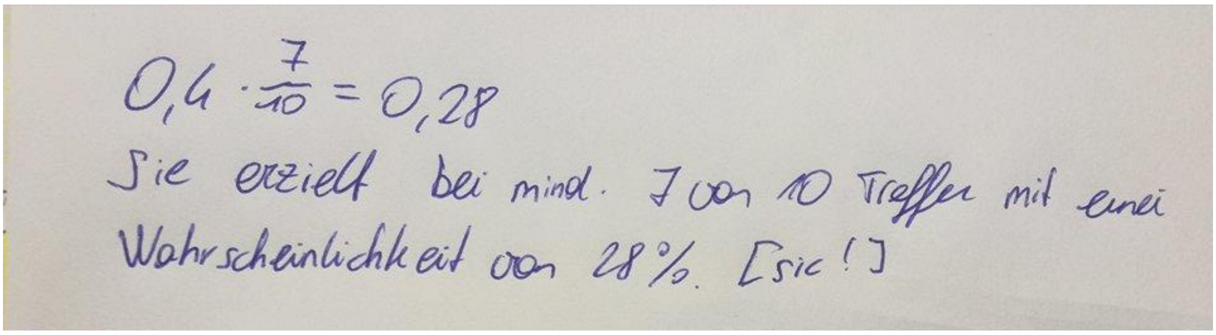


Abbildung 56: Musterantwort Frage 8 - Kategorie B (eigene Darstellung)

Musterantwort Kategorie C:

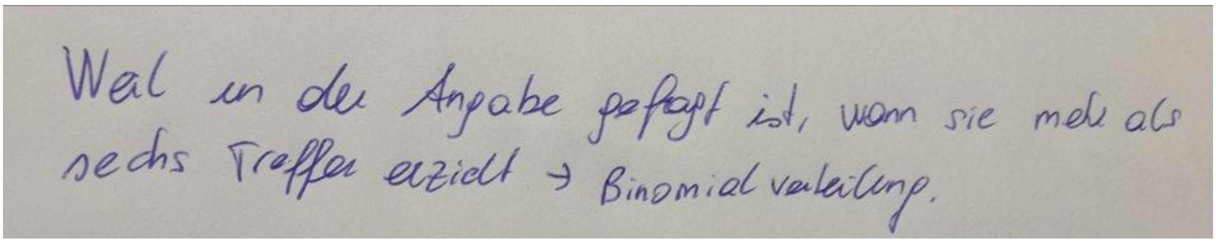


Abbildung 57: Musterantwort Frage 8 - Kategorie C (eigene Darstellung)

4.3.2. Ergebnisse

Die teilnehmenden Klassen wurden in Technologieklassen und traditionelle Klassen kategorisiert. Die Schüler und Schülerinnen aus den Technologieklassen arbeiten im Mathematikunterricht regelmäßig mit mathematischen Arbeitsumgebungen und verwendeten diese auch beim Bearbeiten des Fragebogens. Die Jugendlichen aus den traditionellen Klassen verwenden mathematische Arbeitsumgebungen kaum im Unterricht und falls diese doch eingesetzt werden, dann meistens nur von der Lehrperson. Die Schüler und Schülerinnen dieser Kategorie verwendeten keine mathematischen Arbeitsumgebungen beim Ausfüllen des Fragebogens. Subjektive Einschätzungen der Lehrpersonen und eine Analyse der Inhaltseinführungen bestätigen die Kategorisierung in Technologie- und traditionelle Klassen. Insgesamt sind 48 Schüler und Schülerinnen den Technologieklassen zuzuordnen und 41 Schüler und Schülerinnen den traditionellen Klassen.

Die Auswertung jeder einzelnen Frage beinhaltet eine Tabelle mit den Antworten der Schüler und Schülerinnen. Die Antworten wurden den beschriebenen Kategorien (siehe Abschnitt 4.3.1.) zugeordnet. Zusätzlich gibt es pro Frage ein Diagramm, in dem ersichtlich ist welcher Anteil der Schüler und Schülerinnen in Besitz der abgefragten Grundvorstellungen ist. Um zu klären, ob ein Zusammenhang zwischen dem Einsatz von mathematischen Arbeitsumgebungen und dem Vorhandensein von den entsprechenden Grundvorstellungen besteht, gibt es pro Frage eine statistische Analyse in Form eines Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstests.

Dieser Test eignet sich als Prüfmethode für Hypothesen über Verteilungsannahmen. Es wird die Differenz zwischen den jeweils beobachteten und den erwarteten Häufigkeiten berechnet.

$$\mathrm{X}^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(f_{b(j)} - f_{e(j)})^2}{f_{e(j)}}$$

$f_{b(j)}$ ... *beobachteten Häufigkeiten*

$f_{e(j)}$ ... *erwartete Häufigkeiten*

k ... *Anzahl der Kategorien*; $j = 1, \dots, k = 4$

Desto kleiner dieser Wert ist, desto eher entsprechen die beobachteten Häufigkeiten, den erwarteten Häufigkeiten (vgl. ATTESLANDER et al. 2010, S. 285-286).

Die Sicherheit des Tests ist mit 95 % angesetzt, das entspricht einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 %. Bei einem Freiheitsgrad $[(2-1)\cdot(2-1)]$ ergibt das einen kritischen Wert von 3,84. Wird dieser Wert überschritten kann die Null-Hypothese (H_0) verworfen werden.

H_0: Es besteht kein Zusammenhang zwischen dem Einsatz von mathematischen Arbeitsumgebungen und dem Vorhandensein der entsprechenden Grundvorstellungen.

Sollten die Ergebnisse des Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest nicht eindeutig sein und die berechneten Werte in der Nähe des festgelegten kritischen Werts liegen wird noch ein 2-Stichprobentest für Anteilswerte durchgeführt, um ein aussagekräftigeres Ergebnis zu bekommen. Dieser Test misst die Verteilung der Differenz der Stichprobenanteile in den beiden Grundgesamtheiten. Er standardisiert die Differenz der Anteilswerte. Bei derselben Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % liefert die Tabelle zur Standardnormalverteilung einen kritischen Wert von 1,64 für diesen Test.

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$p_1 \ldots Anteilswert\ Stichprobe\ 1$ … Klassen mit Technologieunterstützung

$p_2 \ldots Anteilswert\ Stichprobe\ 2$ … Klassen ohne Technologieunterstützung

$n_1 \ldots Grundgesamtheit\ Stichprobe\ 1$

$n_2 \ldots Grundgesamtheit\ Stichprobe\ 2$

$p \ldots \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$

Überschreitet der z-Wert den kritischen Wert, kann H_0 verworfen werden (vgl. HUDEC o. J.).

Falls bei den Ergebnissen Besonderheiten oder Anomalien auffallen, werden diese ebenfalls berücksichtigt und beschrieben.

$H_0: p_1 = p_2$

$H_1: p_1 > p_2$

Frage 1a

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	12	0	0	0
Kategorie B	1	9	5	3
Kategorie C	0	0	2	0
Kategorie D	8	12	12	11
Kategorie E	6	0	1	7

Tabelle 12: Ergebnisse Frage 1a (eigene Darstellung)

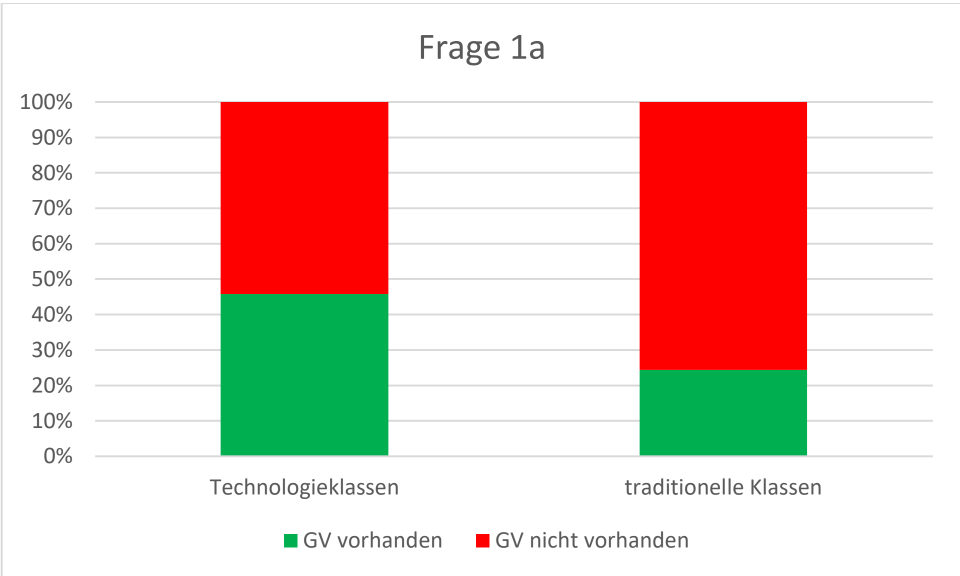


Abbildung 58: Verteilung der Grundvorstellungen - Frage 1a (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest – Frage 1a

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	22	10	32
GV nicht vorhanden	26	31	57
Σ	48	41	89

Tabelle 13: beobachtete Häufigkeiten - Frage 1a (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	17,26	14,74	32
GV nicht vorhanden	30,74	26,26	57
Σ	48	41	89

Tabelle 14: erwartete Häufigkeiten - Frage 1a (eigene Darstellung)

$$X^2 = \frac{(22-17{,}26)^2}{17{,}26} + \frac{(26-30{,}74)^2}{30{,}74} + \frac{(10-14{,}74)^2}{14{,}74} + \frac{(31-26{,}26)^2}{26{,}26} = 4{,}41$$

Die Daten sprechen mit einer Sicherheit von 95 % gegen die Nullhypothese. Es ist davon auszugehen, dass die beiden Merkmale abhängig voneinander sind. Grund dafür könnte die Visualisierungsfunktion der mathematischen Arbeitsumgebungen sein, welche Lechner im Abschnitt 3.2. beschreibt. Auffallend bei den Ergebnissen ist die Verteilung bei den Grundvorstellungen. Während bei den Schülern und Schülerinnen der Technologieklasse 1 fast ausschließlich Grundvorstellungen der Kategorie A aufgetreten sind, kamen diese bei den restlichen Klassen gar nicht vor. Dafür überwiegen hier die Grundvorstellungen der Kategorie B. Das führt zur Annahme, dass Mathematikunterricht explizite Grundvorstellungen ansprechen und auch ausbilden kann.

Frage 1b

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	2	0	1	1
Kategorie B	21	15	18	13
Kategorie C	4	6	1	7

Tabelle 15: Ergebnisse Frage 1b (eigene Darstellung)

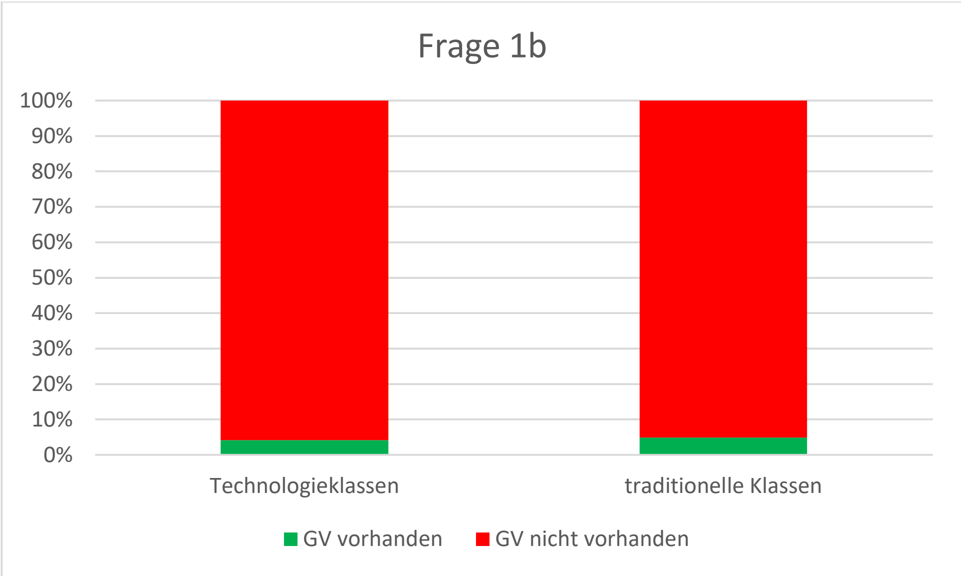


Abbildung 59: Verteilung der Grundvorstellungen - Frage 1b (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest – Frage 1b

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	2	2	4
GV nicht vorhanden	46	39	85
Σ	48	41	89

Tabelle 16: beobachtete Häufigkeiten - Frage 1b (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	2,16	1,84	4
GV nicht vorhanden	45,84	39,16	85
Σ	48	41	89

Tabelle 17: erwartete Häufigkeiten - Frage 1b (eigene Darstellung)

$$X^2 = \frac{(2-2{,}16)^2}{2{,}16} + \frac{(46-45{,}84)^2}{45{,}84} + \frac{(2-1{,}84)^2}{1{,}84} + \frac{(39-39{,}16)^2}{39{,}16} = 0{,}027$$

Die Daten widersprechen nicht mit einer Sicherheit von 95 % der Nullhypothese. Es ist davon auszugehen, dass die beiden Merkmale unabhängig voneinander sind. Diese Frage dürfte für die Schüler und Schülerinnen zu schwer gewesen sein, da es insgesamt nur vier korrekte Antworten gab. Diese sind allerdings zwischen den Technologieklassen und den traditionellen Klassen gleichverteilt. Daher eignet sich diese Aufgabenstellung nicht, um die dieser Arbeit zugrundeliegenden Hypothese zu untersuchen. Der Chi-Quadrat-Test passt für die Analyse dieser Aufgabe nicht, da die beobachteten und erwarteten Häufigkeiten in jeder Zeile größer als fünf sein sollten. In Anbetracht der eindeutigen Ergebnisse ist dies aber vernachlässigbar.

Frage 2

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	11	0	0	0
Kategorie B	2	9	7	3
Kategorie C	0	0	3	0
Kategorie D	1	0	3	3
Kategorie E	1	3	2	0
Kategorie F	0	4	0	12
Kategorie G	3	2	1	0
Kategorie H	3	2	3	0
Kategorie I	6	1	1	3

Tabelle 18: Ergebnisse Frage 2 (eigene Darstellung)

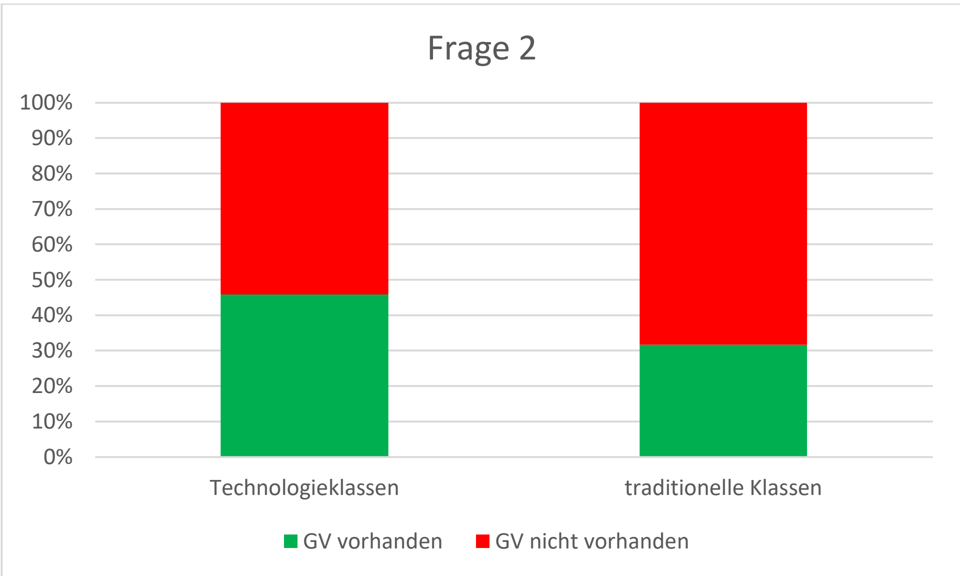


Abbildung 60: Verteilung der Grundvorstellungen - Frage 2 (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest – Frage 2

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	22	13	35
GV nicht vorhanden	26	28	54
Σ	48	41	89

Tabelle 19: beobachtete Häufigkeiten - Frage 2 (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	18,88	16,12	35
GV nicht vorhanden	29,12	24,88	54
Σ	48	41	89

Tabelle 20: erwartete Häufigkeiten - Frage 2 (eigene Darstellung)

$$\mathrm{X}^2 = \frac{(22-18{,}88)^2}{18{,}88} + \frac{(26-29{,}12)^2}{29{,}12} + \frac{(13-16{,}12)^2}{16{,}12} + \frac{(28-24{,}88)^2}{24{,}88} = 1{,}85$$

2-Stichprobentest für Anteilswerte – Frage 2

$$z = \frac{0{,}46-0{,}32}{\sqrt{0{,}39(1-0{,}39)(\frac{1}{48}+\frac{1}{41})}} = 1{,}35$$

Die Daten widersprechen nicht mit einer Sicherheit von 95 % der Nullhypothese. Erst mit einer Sicherheit von bloß 80 % (Chi-Quadrat-Test) bzw. 91 % (2-Stichprobentest) könnte H_0 abgelehnt werden. Obwohl es bei dieser Aufgabenstellung positive Tendenzen für die Technologieklassen gibt ist der Unterschied nicht signifikant. Auch wenn es sich hier um mathematisches Grundwissen handelt überwiegen die falschen Antworten sowohl bei den Technologieklassen, als auch bei den traditionellen Klassen. Auch bei den Antworten, welche Grundvorstellungen implizieren, gibt es Besonderheiten. Wie schon bei Frage 1a besitzen die Schüler und Schülerinnen der Technologieklasse 1 andere Grundvorstellungen als ihre Kollegen und Kolleginnen aus den übrigen Klassen.

Frage 3

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	15	12	8	8
Kategorie B	3	1	1	0
Kategorie C	3	6	3	0
Kategorie D	5	2	8	10
Kategorie E	1	0	0	3

Tabelle 21: Ergebnisse Frage 3 (eigene Darstellung)

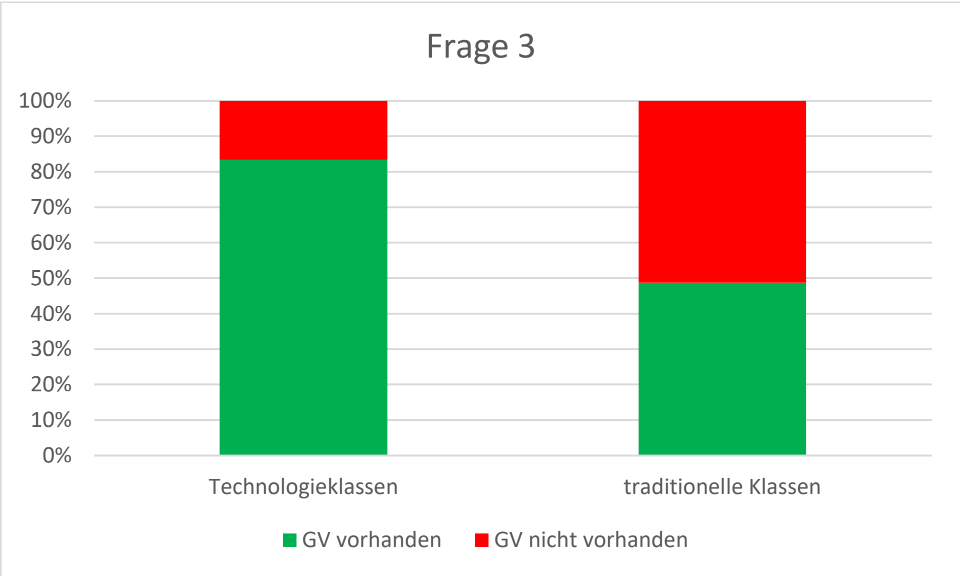


Abbildung 61: Verteilung der Grundvorstellungen – Frage 3 (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest – Frage 3

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	40	20	60
GV nicht vorhanden	8	21	29
Σ	48	41	89

Tabelle 22: beobachtete Häufigkeiten - Frage 3 (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	32,36	27,64	60
GV nicht vorhanden	15,64	13,36	29
Σ	48	41	89

Tabelle 23: erwartete Häufigkeiten - Frage 3 (eigene Darstellung)

$$\mathrm{X}^2 = \frac{(40-32{,}36)^2}{32{,}36} + \frac{(8-15{,}64)^2}{15{,}64} + \frac{(20-27{,}64)^2}{27{,}64} + \frac{(21-13{,}36)^2}{13{,}36} = 12{,}08$$

Die Daten sprechen mit einer Sicherheit von 95 % gegen die Nullhypothese. Es ist davon auszugehen, dass die beiden Merkmale abhängig voneinander sind. Bei einem Wert von 12,08 ist der Unterschied zwischen den Technologieklassen und den traditionellen Klassen hoch-signifikant. Diese Aufgabe fällt in den Bereich des darstellend-interpretierenden und heuristisch-experimentellen Arbeitens, in denen Lechner ein großes Potential der mathematischen Arbeitsumgebungen sieht (siehe Abschnitt 2.3.). Die Ergebnisse bestätigen seine Vermutungen.

Frage 4

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	22	6	11	12
Kategorie B	1	0	1	0
Kategorie C	2	13	4	6
Kategorie D	2	2	4	3
Kategorie E	0	0	0	0

Tabelle 24: Ergebnisse Frage 4 (eigene Darstellung)

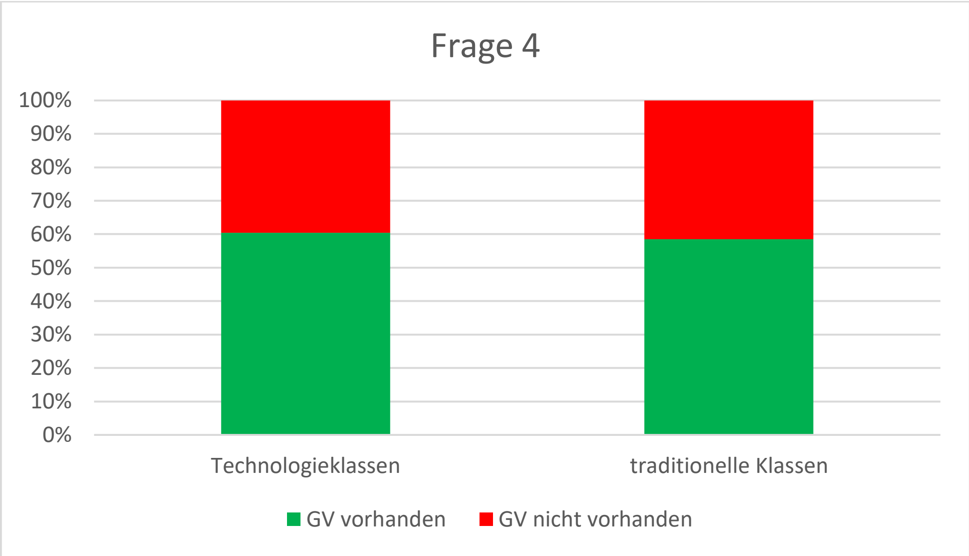


Abbildung 62: Verteilung der Grundvorstellungen - Frage 4 (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest – Frage 4

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	29	24	53
GV nicht vorhanden	19	17	36
Σ	48	41	89

Tabelle 25: beobachtete Häufigkeiten - Frage 4 (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	28,58	24,42	53
GV nicht vorhanden	19,42	16,58	36
Σ	48	41	89

Tabelle 26: erwartete Häufigkeiten - Frage 4 (eigene Darstellung)

$$\mathrm{X}^2 = \frac{(29-28{,}58)^2}{28{,}58} + \frac{(19-19{,}42)^2}{19{,}42} + \frac{(24-24{,}42)^2}{24{,}42} + \frac{(17-16{,}58)^2}{16{,}58} = 0{,}033$$

Die Daten widersprechen nicht mit einer Sicherheit von 95 % der Nullhypothese. Es ist davon auszugehen, dass die beiden Merkmale unabhängig voneinander sind. Diese Aufgabe zählt zum mathematischen Grundwissen und ist in dieser Form auch in vielen Schulbüchern zu finden. Deshalb ist es auch nicht überraschend, dass die Mehrheit der Schüler und Schülerinnen diese Aufgabe richtig gelöst haben. Auffallend ist hingegen der große Unterschied innerhalb der Technologieklassen. Technologieklasse 2 ist die einzige Klasse in der weniger als die Hälfte der Jugendlichen die Grundvorstellungen besitzen. Das ist auch insofern interessant, da es bei Frage 3 zu ganz anderen Erkenntnissen gekommen ist, obwohl die beiden Aufgaben den gleichen Inhaltsbereich ansprechen.

Frage 5a

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	4	15	12	14
Kategorie B	22	4	7	4
Kategorie C	1	0	1	1
Kategorie D	0	1	0	1
Kategorie E	0	1	0	1

Tabelle 27: Ergebnisse Frage 5a (eigene Darstellung)

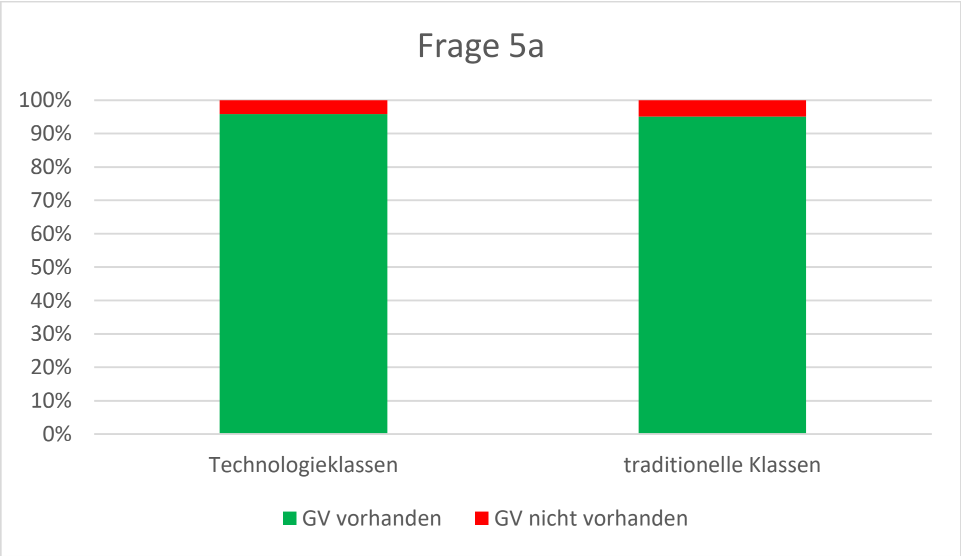


Abbildung 63: Verteilung der Grundvorstellungen - Frage 5b (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest – Frage 5a

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	46	39	85
GV nicht vorhanden	2	2	4
Σ	48	41	89

Tabelle 28: beobachtete Häufigkeiten - Frage 5a (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	45,84	39,16	85
GV nicht vorhanden	2,16	1,84	4
Σ	48	41	89

Tabelle 29: erwartete Häufigkeiten - Frage 5a (eigene Darstellung)

$$\mathrm{X}^2 = \frac{(46-45{,}84)^2}{45{,}84} + \frac{(2-2{,}16)^2}{2{,}16} + \frac{(39-39{,}16)^2}{39{,}16} + \frac{(2-1{,}84)^2}{1{,}84} = 0{,}027$$

Die Daten widersprechen nicht mit einer Sicherheit von 95 % der Nullhypothese. Es ist davon auszugehen, dass die beiden Merkmale unabhängig voneinander sind. Im Gegensatz zu Frage 1a scheint diese Aufgabe zu einfach und zu elementar gewählt um das Vorhandensein von Grundvorstellungen abzuprüfen. Lediglich vier Schüler und Schülerinnen hatten keine Vorstellungen zum Integralbegriff. Auch hier ist wieder erkennbar, dass gewisse Grundvorstellungen explizit angesprochen und ausgebildet werden können. Nur in der Technologieklasse 1 verstehen die meisten Schüler und Schülerinnen das Integral als orientierten Flächeninhalt. Die Mehrheit der Schüler und Schülerinnen der übrigen Klassen haben mehrere Vorstellungen zum Integralbegriff entwickelt.

Frage 5b

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	21	14	11	11
Kategorie B	0	0	2	0
Kategorie C	4	0	4	4
Kategorie D	2	1	3	4
Kategorie E	0	6	0	2

Tabelle 30: Ergebnisse Frage 5b (eigene Darstellung)

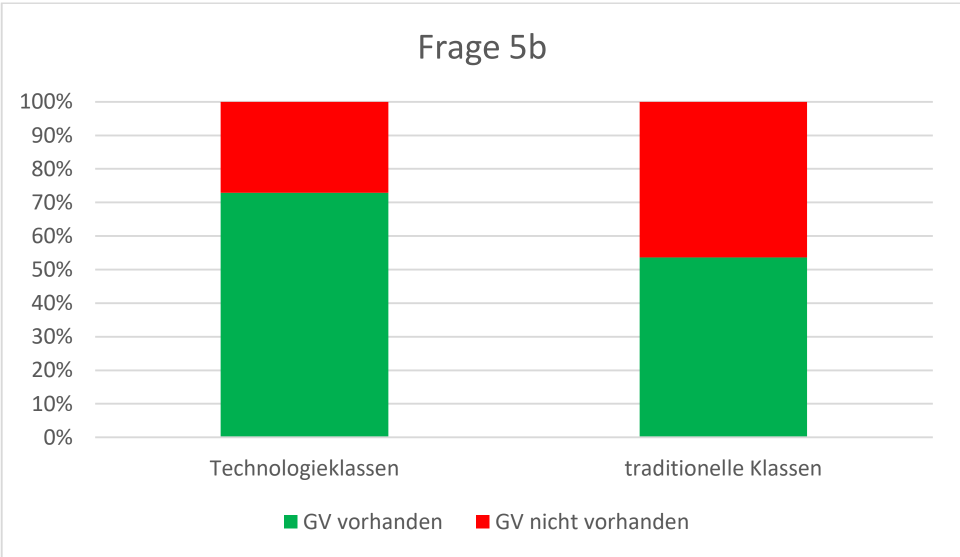


Abbildung 64: Verteilung der Grundvorstellungen - Frage 5b (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest – Frage 5b

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	35	22	57
GV nicht vorhanden	13	19	32
Σ	48	41	89

Tabelle 31: beobachtete Häufigkeiten - Frage 5b (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	30,74	26,26	57
GV nicht vorhanden	17,26	14,74	32
Σ	48	41	89

Tabelle 32: erwartete Häufigkeiten - Frage 5b (eigene Darstellung)

$$\mathrm{X}^2 = \frac{(35-30{,}74)^2}{30{,}74} + \frac{(13-17{,}26)^2}{17{,}26} + \frac{(22-26{,}26)^2}{26{,}26} + \frac{(19-14{,}74)^2}{14{,}74} = 3{,}56$$

2-Stichprobentest für Anteilswerte – Frage 5b

$$z = \frac{0{,}73 - 0{,}54}{\sqrt{0{,}64(1-0{,}64)(\frac{1}{48}+\frac{1}{41})}} = 1{,}86$$

Betrachtet man den Chi-Quadrat-Test, widersprechen die Daten nicht mit einer Sicherheit von 95 % der Nullhypothese, aber sie tun das mit einer Sicherheit von 90 %. Der 2-Stichproben-Test für Anteilswerte besagt jedoch, dass die Daten mit einer Sicherheit von 95 % der Nullhypothese widersprechen. Es ist davon auszugehen, dass die beiden Merkmale voneinander abhängig sind. Diese Aufgabe zielt explizit auf das formal-operative Arbeiten ab. Mit Hilfe von mathematischen Rechenumgebungen sollte diese Aufgabe kein Problem darstellen. Dennoch gibt es in den Technologieklassen insgesamt 13 Schüler und Schülerinnen, die das Integral falsch berechnet haben. Das relativiert den von Lechner angesprochenen (siehe Abschnitt 2.3.) Aspekt von mathematischen Arbeitsumgebungen als Rechenwerkzeug. In der Technologieklasse 2 entstanden fast alle falschen Antworten dadurch, dass die Schüler und Schülerinnen die Aufgabe nicht beantwortet haben. Ein Grund dafür könnte sein, dass sie nicht wussten, wie sie diese Aufgabe mithilfe der mathematischen Arbeitsumgebungen lösen sollten.

Frage 6

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	5	6	5	4
Kategorie B	15	8	4	5
Kategorie C	4	6	7	9
Kategorie D	3	0	4	3
Kategorie E	0	1	0	0

Tabelle 33: Ergebnisse Frage 6 (eigene Darstellung)

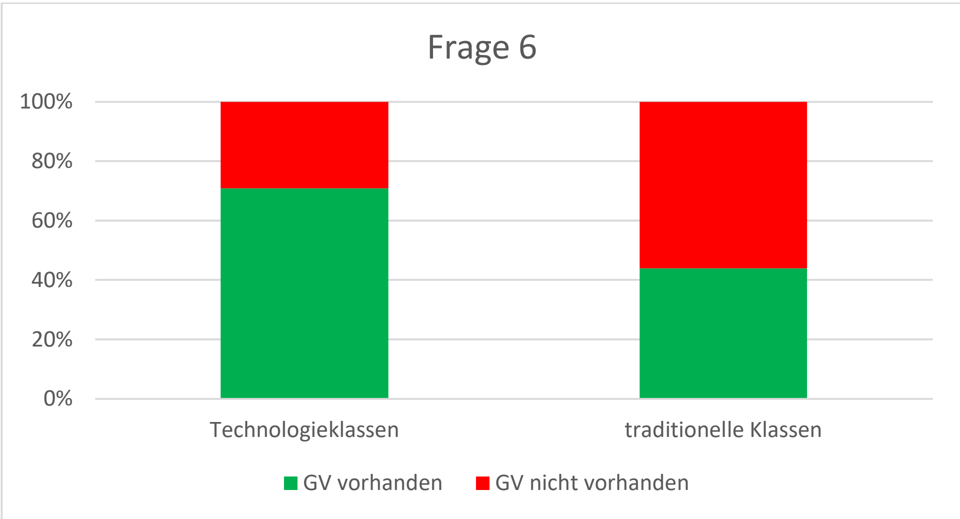


Abbildung 65: Verteilung der Grundvorstellungen - Frage 6 (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitsest – Frage 6

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	34	18	52
GV nicht vorhanden	14	23	37
Σ	48	41	89

Tabelle 34: beobachtete Häufigkeiten - Frage 6 (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	28,04	23,96	52
GV nicht vorhanden	19,96	17,04	37
Σ	48	41	89

Tabelle 35: erwartete Häufigkeiten - Frage 6 (eigene Darstellung)

$$\mathrm{X}^2 = \frac{(34-28{,}04)^2}{28{,}04} + \frac{(14-19{,}96)^2}{19{,}96} + \frac{(18-23{,}96)^2}{23{,}96} + \frac{(23-17{,}04)^2}{17{,}04} = 6{,}61$$

Die Daten sprechen mit einer Sicherheit von 95 % gegen die Nullhypothese. Es ist davon auszugehen, dass die beiden Merkmale abhängig voneinander sind. Diese Abhängigkeit überrascht, da die Aufgabe keine der vermeintlichen Stärken der mathematischen Arbeitsumgebungen anspricht. Sie dienen hier weder als Visualisierungs- noch als Rechenwerkzeug. Viel eher fällt sie in die Kategorie des kritisch-argumentativen Arbeitens, in der Lechner die geringsten Einsatzmöglichkeiten von mathematischen Arbeitsumgebungen sieht (siehe Abschnitt 2.3.).

Frage 7a

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	5	8	3	10
Kategorie B	10	4	6	1
Kategorie C	4	2	4	0
Kategorie D	6	6	5	6
Kategorie E	2	1	1	4
Kategorie F	0	0	1	0
Kategorie G	0	0	0	0

Tabelle 36: Ergebnisse Frage 7a (eigene Darstellung)

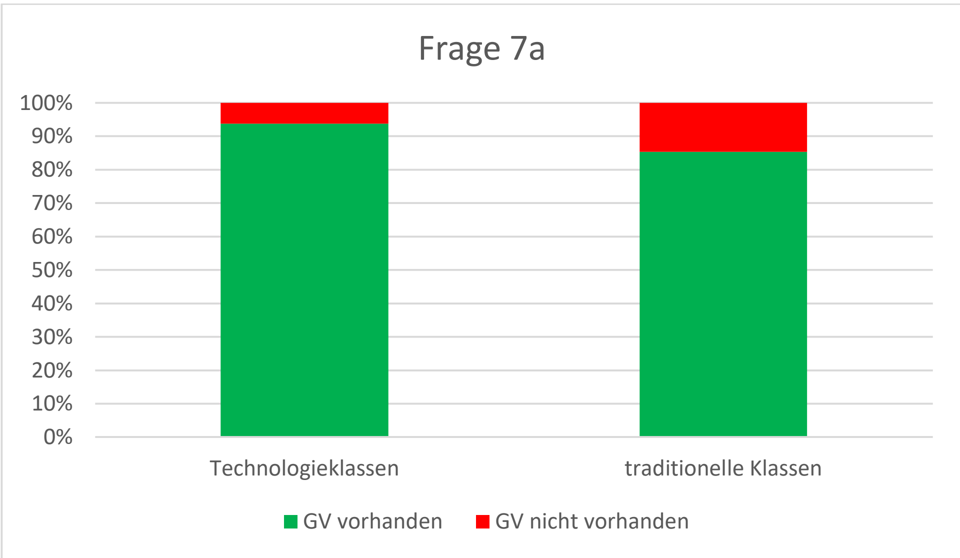


Abbildung 66: Verteilung der Grundvorstellungen - Frage 7a (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitsest – Frage 7a

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	45	35	80
GV nicht vorhanden	3	6	9
Σ	48	41	89

Tabelle 37: beobachtete Häufigkeiten - Frage 7a (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	43,15	36,85	80
GV nicht vorhanden	4,85	4,15	9
Σ	48	41	89

Tabelle 38: erwartete Häufigkeiten - Frage 7a (eigene Darstellung)

$$\mathrm{X}^2 = \frac{(45-43{,}15)^2}{43{,}15} + \frac{(3-4{,}85)^2}{4{,}85} + \frac{(35-36{,}85)^2}{36{,}85} + \frac{(6-4{,}15)^2}{4{,}15} = 1{,}70$$

2-Stichprobentest für Anteilswerte – Frage 7a

$$z = \frac{0{,}94-0{,}85}{\sqrt{0{,}90(1-0{,}90)(\frac{1}{48}+\frac{1}{41})}} = 1{,}41$$

Die Daten widersprechen nicht mit einer Sicherheit von 95 % der Nullhypothese, tun das aber mit einer Sicherheit von 80 % (Chi-Quadrat-Test) bzw. 92 % (2-Stichprobentest). Es ist davon auszugehen, dass die beiden Merkmale nicht unabhängig voneinander sind. Ähnlich zur Frage 5a lässt diese Aufgabe viel Spielraum. Die guten Ergebnisse der Schüler und Schülerinnen lassen hingegen wenig Spielraum für Interpretationen. Die ausgeprägten Grundvorstellungen sind in allen Klassen gut verteilt.

Frage 7b

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	14	8	8	7
Kategorie B	8	10	7	12
Kategorie C	5	2	5	1
Kategorie D	0	1	0	1

Tabelle 39: Ergebnisse Frage 7b (eigene Darstellung)

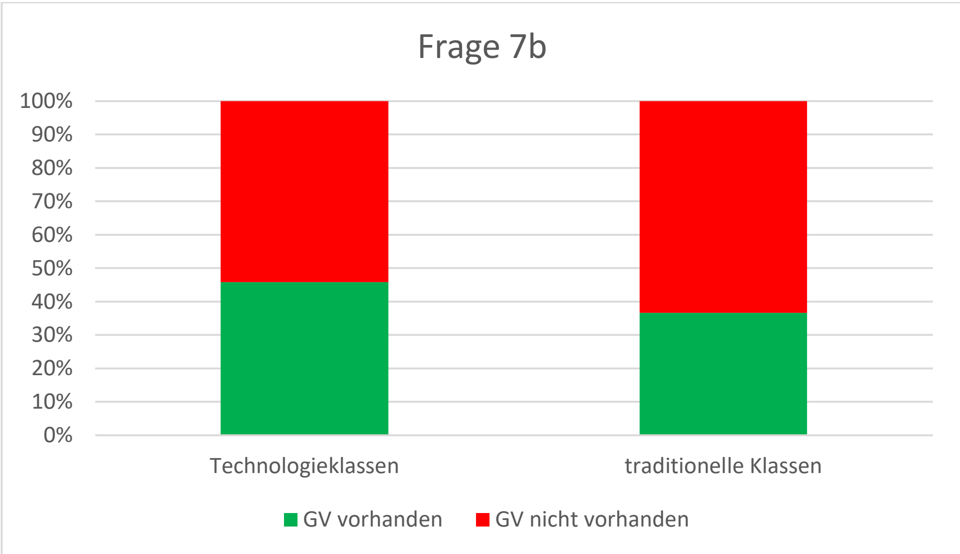


Abbildung 67: Verteilung der Grundvorstellungen - Frage 7b (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest – Frage 7b

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	22	15	37
GV nicht vorhanden	26	26	52
Σ	48	41	89

Tabelle 40: beobachtete Häufigkeiten - Frage 7b (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	19,96	17,04	37
GV nicht vorhanden	28,04	23,96	52
Σ	48	41	89

Tabelle 41: erwartete Häufigkeiten - Frage 7b (eigene Darstellung)

$$X^2 = \frac{(22-19{,}96)^2}{19{,}96} + \frac{(26-28{,}04)^2}{28{,}04} + \frac{(15-17{,}04)^2}{17{,}04} + \frac{(26-23{,}96)^2}{23{,}96} = 0{,}77$$

Die Daten widersprechen nicht mit einer Sicherheit von 95 % der Nullhypothese. Es ist davon auszugehen, dass die beiden Merkmale voneinander unabhängig sind. Bei dieser Aufgabe fehlt mehr als der Hälfte der Schüler und Schülerinnen die entsprechende Grundvorstellung, sowohl in den Technologie- als auch in den traditionellen Klassen. Technologieklasse 1 ist die einzige Klasse, in der knapp mehr als 50 % der Schüler und Schülerinnen die angesprochene Grundvorstellung besitzen.

Frage 8

	Technologiekasse 1	Technologieklasse 2	traditionelle Klasse 1	traditionelle Klasse 2
Kategorie A	11	12	2	11
Kategorie B	7	0	9	4
Kategorie C	5	6	4	6
Kategorie D	4	3	5	0

Tabelle 42: Ergebnisse Frage 8 (eigene Darstellung)

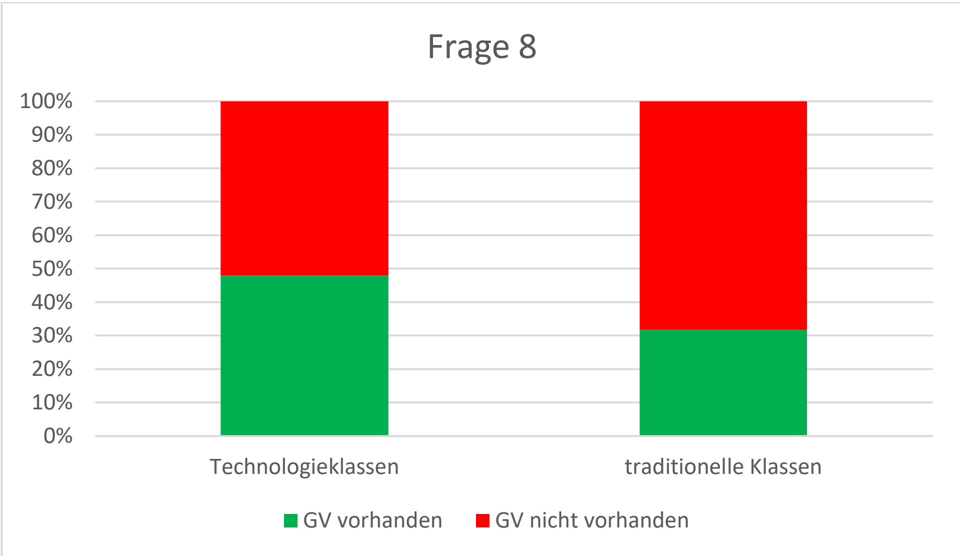


Abbildung 68: Verteilung der Grundvorstellungen - Frage 8 (eigene Darstellung)

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest – Frage 8

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	23	13	36
GV nicht vorhanden	25	28	53
Σ	48	41	89

Tabelle 43: beobachtete Häufigkeiten - Frage 8 (eigene Darstellung)

	Technologieklassen	traditionelle Klassen	Σ
GV vorhanden	19,42	16,58	36
GV nicht vorhanden	28,58	24,42	53
Σ	48	41	89

Tabelle 44: erwartete Häufigkeiten - Frage 8 (eigene Darstellung)

$$X^2 = \frac{(23-19{,}42)^2}{19{,}42} + \frac{(25-28{,}58)^2}{28{,}58} + \frac{(13-16{,}58)^2}{16{,}58} + \frac{(28-24{,}42)^2}{24{,}42} = 2{,}41$$

2-Stichprobentest für Anteilswerte – Frage 7a

$$z = \frac{0{,}48-0{,}32}{\sqrt{0{,}40(1-0{,}40)(\frac{1}{48}+\frac{1}{41})}} = 1{,}54$$

Die Daten widersprechen nicht mit einer Sicherheit von 95 % der Nullhypothese, tun das aber mit einer Sicherheit von 85 % (Chi-Quadrat-Test) bzw. 94 % (2-Stichprobentest). Es ist davon auszugehen, dass die beiden Merkmale nicht unabhängig voneinander sind. Einzige Besonderheit ist die traditionelle Klasse 1, in der nur zwei Schüler und Schülerinnen die entsprechende Grundvorstellung besitzen.

5. Abstract – Conclusio

Bei den insgesamt elf Aufgaben kann man lediglich bei vier sagen, dass mit einer Sicherheit von 95 % ein Zusammenhang zwischen dem Einsatz von mathematischen Arbeitsumgebungen und dem Vorhandensein der entsprechenden Grundvorstellungen besteht. Bei drei weiteren Aufgaben trifft die Aussage zu, wenn man die Irrtumswahrscheinlichkeit auf höchstens 20 % erhöht. Inhalts- und Handlungsbereichen scheint keine besondere Rolle zuzukommen, obwohl beim darstellend-interpretierenden und beim heuristisch-experimentellen Arbeiten die größten Unterschiede zu erkennen sind (siehe Aufgaben 1a, 3, 6 und 8). Richtig eingesetzt können mathematische Arbeitsumgebungen also durchaus als Visualisierungswerkzeug fungieren. Auch der formal-operative Aspekt ist erkennbar. Erfahrener Umgang mit den mathematischen Arbeitsumgebungen ist allerdings Voraussetzung um sie als Rechenwerkzeug zu verwenden. Obwohl der Zusammenhang zwischen Unterrichtsform und Technologieaffinität nur bei vier (bzw. sieben) Aufgaben (signifikant) nachweisbar ist, schnitten die Technologieklassen bei keiner einzigen Aufgabe schlechter ab als die traditionellen Klassen.

Diese Erkenntnis verleitet mich dazu, die dieser Arbeit zugrundeliegenden Forschungsfrage:

„Besteht ein Zusammenhang zwischen dem Einsatz von mathematischen Arbeitsumgebungen im Unterricht und dem Vorhandensein entsprechender Grundvorstellungen?“

zu bejahen. Natürlich gibt es noch viele weitere Faktoren, welche die Ergebnisse möglicherweise beeinflussen konnten. Hier wären zum Beispiel die fachlichen, pädagogischen und didaktischen Fähigkeiten der Lehrpersonen, das generelle Leistungsniveau der verschiedenen Klassen oder die Uhrzeit und die damit verbundene Aufmerksamkeit der Schüler und Schülerinnen anzuführen.

Eine weitere gewonnene Erkenntnis ist, dass Grundvorstellungen im Unterricht explizit angesprochen und ausgebildet werden können. Die Diversität in den Ergebnissen zeigt dies deutlich. Vor allem bei der zweiten Aufgabe ist das gut erkennbar. Während die Schüler und Schülerinnen der Technologieklasse 1 vor allem die Grundvorstellung der Kategorie A besitzen, ist diese Grundvorstellung in den anderen Klassen nie zu erkennen gewesen. Wie das genau funktioniert und welche Rolle mathematische Arbeitsumgebungen in diesem Prozess einnehmen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Eine Untersuchung in diese Richtung würde sich allerdings als Anknüpfungspunkt anbieten und könnte Gegenstand einer folgenden, aufbauenden Arbeit werden. Eine Konfrontation der Lehrpersonen mit den Ergebnissen könnte Aufschluss darüber geben, wie das (fehlende) Vorhandensein der Grundvorstellungen zu erklären ist.

Ein weiterer Aspekt, welcher bei dieser Arbeit komplett außer Acht gelassen wurde ist die Unterscheidung der mathematischen Arbeitsumgebungen. Es wurde bei der Untersuchung nicht zwischen Computeralgebra-Systemen, dynamischen Geometriesystemen und Tabellenkalkulationsprogrammen differenziert. Die gewonnenen Ergebnisse könnten jetzt noch weiterverwendet werden um zu untersuchen, welche mathematischen Arbeitsumgebungen die verschiedenen Grundvorstellungen bestmöglich ausbilden können.

Die durchgeführte Untersuchung ist eine reine Momentaufnahme der derzeitigen Situation. Möchte man den Zusammenhang über einen längeren Zeitraum untersuchen und somit eine Entwicklung oder einen Trend feststellen würde sich eine Kohortenstudie anbieten. Falls diese mit denselben Lehrpersonen durchgeführt wird könnte man die externen Effekte minimieren und vielleicht auch einen Lernprozess auf Seiten der Lehrer und Lehrerinnen feststellen.

6. Literaturverzeichnis

ATTESLANDER Peter, CROMM Jürgen, GRABOW Busso, KLEIN Harald, MAURER Andrea & SIEGERT Gabriele (2010): Methoden der empirischen Sozialforschung. 13., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. – Berlin.

BAUMERT Jürgen, KLIEME Eckhard, NEUBRAND Michael, PRENZEL Manfed, SCHIEFELE Ulrich, SCHNEIDER Wolfgang, STANAT Petra, TILLMANN Klaus-Jürgen & WEISS Manfred (2001): PISA 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. – Opladen.

BENDER Peter (1997): Grundvorstellungen und Grundverständnisse für den Stochastikunterricht. In: Stochastik in der Schule 17, S. 8-33.

BENDER Peter (2009): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen: ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht, erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Mathematik lehren und lernen: Festschrift für Heinz Griesel, S. 48-60. – Hannover.

BIFIE (Hrsg.) (2017): Bildungsstandards für Mathematik 8. Schulstufe. online: https://www.bifie.at/wp-content/uploads/2017/06/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf (17.02.2018)

BLEIER Gabriele, LINDENBERG Judith, LINDNER Andreas & SÜSS-STEPANCIK Evelyn (2010): Dimension Mathematik 6. – Wien.

BLUM Werner & KIRSCH Arnold (1979): Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. In: MU 25, S.6-24.

BLUM Werner & LEISS Dominik (2007): How do students and teachers deal with modelling problems? In: Mathematical modelling: education, engineering and economics, S. 222-231. – Chichester.

BLUM Werner & TÖRNER Günter (1983): Didaktik der Analysis. – Göttingen.

BLUM Werner & WIEGAND Bernd (1998): Wie kommen die deutschen TIMSS-Ergebnisse zustande? Ein Interpretationsansatz auf der Basis stoffdidaktischer Analysen. In: TIMSS und der Mathematikunterricht, S. 28-35. – Hannover.

BMBF (Bundesministerium für Bildung und Frauen) (Hrsg.) (2012): Die kompetenzorientierte Reifeprüfung. Mathematik an AHS. Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben. online: https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ahs_lfmath.pdf?5te94m (17.02.2018)

BMBWK (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur) (Hrsg.) (2000); Lehrplan für die AHS-Oberstufe. Mathematik. online: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf (19.01.2018)

BRUCKER Sabine (2002): Grundvorstellungen zur Trigonometrie: eine empirische Untersuchung. Diplomarbeit Universität Wien. – Wien.

BÜRGER Heinrich, FISCHER Roland & MALLE Günther (1991): Mathematik Oberstufe 3. – Wien.

COURANT Richard & ROBBINS Herbert (1962): Was ist Mathematik? Reprint 1992. – Berlin.

ELSCHENBROICH Hans-Jürgen (2001): Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software. – Hildesheim.

FENZ Lena Isabella (2015): Wie sehen Schüler und Schülerinnen den Wahrscheinlichkeitsbegriff? Diplomarbeit Universität Wien. – Wien.

GÖTZ Stefan & RAMHARTER Esther (2011): Begriffsbildung in der Mathematik. Amphibium zwischen Zwang und Freiheit. In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG, Heft 43, S. 50-74.

HARRER Wolfgang (2005): Unterschiedliche Zugänge zur Integralrechnung und eine empirische Studie zu den Grundvorstellungen. Diplomarbeit Universität Wien. – Wien.

HENN Hans-Wolfgang (2002): Mathematik und der Rest der Welt. In: Mathematik lehren, Heft 113, S. 4-7.

HEUGL Helmut (1999): Klassifikation von Aufgaben im Mathematikunterricht. – Hollabrunn.

HISCHER Horst (2005): Mathematikunterricht und Neue Medien. – Hildesheim, Berlin.

HOHENWARTER Markus (2006): GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht. Dissertationsschrift, Universität Salzburg. – Salzburg.

HÖLZL Reinhard (1997): Dynamische Geometriesysteme – softwaretechnologische Entwicklungen, didaktische Diskussionen und unterrichtspraktische Erfahrungen. In: Computer und Geometrie – Neue Chancen für den Geometrieunterricht? S. 34-39. – Hildesheim.

HUDEC Marcus (o. J.): Skriptum – Vorlesung Statistik für SoziologInnen. – Wien.

HUMENBERGER Hans (2007): Skriptum – Vorlesung Schulmathematik 6. – Wien.

KANT Immanuel (1781/1787): Kritik der reinen Vernunft. In: Werke in zwölf Bänden. Band 3 und 4 (1977). – Frankfurt.

KLEIN Felix (1928): Präzisions- und Approximationsmathematik. Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, vol. 3. – Berlin.

KLEINE Michael (2007): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: Journal für Mathematikdidaktik 28, S. 171-172.

KÖSTERS Claudia (1995): Didaktische Probleme des Funktionsbegriffes. Diplomarbeit Universität Wien. – Wien.

KRÜGER Katja, SILL Hans-Dieter & SIKORA Christine (2015): Stochastikunterricht in den Jahrgangsstufen 5 und 6. In: Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. – Heidelberg.

LECHNER Josef (1999/2000): Grundwissen, Grundvorstellungen, Grundtätigkeiten. online: http://www.acdca.ac.at/projekt3/a303grundwissen.pdf (15.11.2017)

MALLE Günther (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: Mathematik lehren, Heft 103, S. 4-7.

MALLE Günther (2003/04): Grundvorstellungen im Mathematikunterricht. Innovations in mathematics, science and technology teaching. online: http://imst.uni-klu.ac.at/materialien/2004/newsletter8.pdf (07.03.2018)

MALLE Günther & MALLE Sonja (2003): Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? In: Mathematik lehren, Heft 118, S. 52-56.

MALLE Günther, WOSCHITZ Helge, KOTH Maria & SALZGER Sonja (2010): Mathematik verstehen 5. – Wien.

MEINDL Lena (2011): Grundvorstellungen zur Integralrechnung – ein empirischer Vergleich zwischen Wien und Berlin. Diplomarbeit Universität Wien. – Wien.

NEUHAUSER Julia (2016): Pisa: Weltweit größte Geschlechterkluft. – In: Die Presse, 07.12.2016. online: https://diepresse.com/home/bildung/schule/5130511/Pisa_Weltweit-groesste-Geschlechterkluft (16.02.2018)

OUVRIER-BUFFET Cécile (2002): Zum Begriff der Definition. Eine epistemologisch-didaktische Untersuchung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt, S. 383-386. – Berlin.

POLLAK Henry Otto (1979): The interaction between mathematics and other school subjects. In: New Trends in Mathematics Teaching IV, S. 232-248. – Paris.

RECHENBERG Peter & POMBERGER Gustav (1997): Informatik-Handbuch. – München.

REICHEL Hans-Christian, GÖTZ Stefan (Hrsg.), MÜLLER Robert & HANISCH Günter (2010): Mathematik 5. – Wien.

ROTH Jürgen & SILLER Hans-Stefan (2016): Bestand und Änderung. Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. In: Mathematik lehren, Heft 199, S. 2-9.

SCHUPP Hans (1988): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe zwischen Theorie und neuen Impulsen. In: MU 34, S. 5-16.

SPRINGNAGEL Petra (2000): Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentialquotienten. Eine empirische Untersuchung. Diplomarbeit Universität Wien. – Wien.

VOHNS Andreas (2005): Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. In: Journal für Mathematikdidaktik 26, S. 52-79.

VOLLRATH Hans-Joachim (1984): Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht. – Stuttgart.

VOLLRATH Hans-Joachim (1989): Funktionales Denken. In: Journal für Mathematikdidaktik 10, S. 3-37.

vom HOFE Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. – Heidelberg.

vom HOFE Rudolf (1996): Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. In: Mathematik lehren, Heft 79, S. 4-8.

vom HOFE Rudolf (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: Mathematik lehren, Heft 118, S. 4-8.

vom HOFE Rudolf & BLUM Werner (2016): „Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. In: Journal für Mathematikdidaktik 37, S. 225-254.

WARTHA Sebastian (2010): Aufbau von Grundvorstellungen: Ein Förderkonzept. – Bielefeld.

WARTHA Sebastian & vom HOFE Rudolf (2005): Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. In: Mathematik lehren, Heft 128, S. 10-17.

WARTHA Sebastian & SCHULZ Axel (2011): Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. – Kiel.

WEIGAND Hans-Georg, FILLER Andreas, HÖLZL Reinhard, KUNTZE Sebastian, LUDWIG Matthias, ROTH Jürgen, SCHMIDT-THIEME Barbara & WITTMANN Gerald (2009): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. – Heidelberg.

WOLBA Benjamin (2016): Bildung im Wandel. – Norderstedt.

Anhang

Einverständniserklärung

Sehr geehrte Eltern,

ich bin Student an der Universität Wien. Dieses Semester werde ich mein Studium im Unterrichtsfach Mathematik abschließen. Im Rahmen meiner Diplomarbeit wird es auch eine empirische Untersuchung geben. Hierfür habe ich die Möglichkeit bekommen, Schüler und Schülerinnen zum Thema „Technologieeinsatz und Grundvorstellungen im Mathematikunterricht" zu befragen. Auch in der Klasse, die ihr Kind besucht, soll die Befragung durchgeführt werden. Die Befragung dient ausschließlich der Erhebung wissenschaftlicher Daten für meine Diplomarbeit. Der Fragebogen wird anonym auszufüllen sein und die erhobenen Daten werden nicht an Dritte weitergegeben.

Ich bitte Sie, den unten angefügten Abschnitt auszufüllen und dem Klassenvorstand zukommen zu lassen.

Vielen Dank für Ihre Mithilfe!
Peter Rubicko

✂---

Ich bestätige, dass mein Kind ________________________ an der Befragung teilnehmen darf:

☐ ja ☐ nein

Datum, Unterschrift des/der Erziehungsberechtigten:

____

Abbildung 69: Einverständniserklärung zur empirischen Untersuchung

Bestätigung des Landesschulrats für Niederösterreich

Landesschulrat für Niederösterreich

LSR NIEDERÖSTERREICH

Rennbahnstraße 29
3109 St. Pölten

Herr
Peter Rubicko
peter.rubicko@karo-ass.at

Sachbearbeiter:
Lukas Weixelbaum

t: +43 2742 280 4311
f: +43 2742 280 1111
e: lukas.weixelbaum@lsr-noe.gv.at

Beilage(n): ---
Bezug: ----

Datum: 10.10.2017

Betrifft:
Genehmigung der Durchführung einer empirischen Untersuchung in Form einer Fragebogenerhebung

Der Landesschulrat für Niederösterreich genehmigt die Durchführung der vorgelegten empirischen Untersuchung im Rahmen der Diplomarbeit an der Universität Wien zum Thema „Technologieeinsatz und Grundvorstellungen im Mathematikunterricht" durch Herrn Peter Rubicko an folgenden Schulen:

Die an dieser Untersuchung teilnehmenden SchülerInnen sind vor Beginn der Erhebung ausdrücklich auf die Freiwilligkeit der Teilnahme hinzuweisen, außerdem ist deren Anonymität im Rahmen der Diplomarbeit jedenfalls zu wahren.

Vor Beginn der Erhebung sind die Zustimmung der Direktion und das Einverständnis der Erziehungsberechtigten einzuholen.

Auf die Einhaltung der Datenschutzbestimmung wird besonders hingewiesen.

Die Befragungen haben außerhalb der Unterrichtszeit stattzufinden.

Für den Amtsführenden Präsidenten:
Mag. Loibl
Hofrat

Elektronisch gefertigt

Parteienverkehr
Dienstag 8-12 Uhr

http://www.lsr-noe.gv.at
office@lsr-noe.gv.at
DVR:0064394

Amtsstunden
Mo.-Fr. 8-16 Uhr

Abbildung 70: Bestätigung des LSR für Niederösterreich für die empirische Untersuchung