

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Häuser auf dem Weg zum Gleichgewicht – Game of Thrones“ – Spieltheorie für den Einsatz in der Schule

verfasst von / submitted by

Florian Schneeberger

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

UF Mathematik,
UF Physik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Abstract

Die Diplomarbeit beschäftigt sich mit dem Thema Spieltheorie und den Einsatz in der Schule. Obwohl die Spieltheorie nicht explizit im österreichischen Lehrplan der Oberstufe verankert ist, wird es als erweitertes Thema für Wahlpflichtfächer empfohlen. Daher wird in der folgenden Arbeit versucht, die spieltheoretischen Inhalte schüler(innen)gerecht aufzubereiten. Dazu werden Spiele zunächst aufgrund ihrer Merkmale beschrieben. Im Folgenden stehen strategische Spiele und Situationen, in denen Entscheidungen getroffen werden müssen, im Mittelpunkt. Diese Entscheidungssituationen und Spiele werden in der Normalform und in der Extensivform vorgestellt und analysiert. Eine Vielfalt an Kontexten und einfache Zugänge zu den Inhalten stehen dabei im Vordergrund. Die Themen reichen dabei von „Game Of Thrones“ bis zum „Chicken-Game“. Somit sollte für jede Schülerin und jeden Schüler etwas dabei sein.

Inhalt

1	EINFÜHRUNG	7
1.1	Was ist Spieltheorie?	7
1.2	Was ist ein Spiel?	8
1.3	Einstieg für die Schule	10
2	SPIELE IN NORMALFORM	13
2.1	Zweipersonen-Nullsummenspiele	13
2.2	Allgemeine Zweipersonenspiele	19
2.3	Das Nash-Gleichgewicht	24
2.4	Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien	26
3	SPIELE IN EXTENSIVER FORM	49
3.1	Übergang zur extensiven Form	49
3.2	Prinzip der Rückwärtsinduktion und teilspielperfekte Gleichgewichte	53
4	LEHRPLANBEZUG UND DIDAKTISCHER KOMMENTAR	61
4.1	Lehrplanbezug	61
4.2	Didaktische Analyse	63
4.3	Beispiele für Stundenplanungen	64
5	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	69
5.1	Ein letztes Beispiel	69
6	LITERATURVERZEICHNIS	71

1 Einführung

1.1 Was ist Spieltheorie?

Menschen sind im täglichen Leben mit Entscheidungssituationen konfrontiert. Dies beginnt bei einfachen Fragestellungen: „Soll ich beim Verlassen des Hauses einen Schirm nehmen oder nicht?“, und reicht bis zukunftsentscheidenden Fragen, wie: „Was soll ich nach der Schule studieren?“. Entscheidungssituationen haben stets gemeinsam, dass sie mindestens zwei Handlungsmöglichkeiten bieten, aus denen gewählt werden kann. Es sind des Weiteren auch immer die äußeren Umstände zu berücksichtigen. Wenn es beim Verlassen des Hauses regnet, greifen wir eher zum Regenschirm, als bei 30 Grad und Sonnenschein. Unsere Entscheidung ist also mit unserem Nutzen gekoppelt. Wir sind häufig auf der Suche nach einer optimalen Entscheidung. Mit dieser Suche landen wir im breiten Feld der Spieltheorie (vgl. WESSLER, 2012, S.2).

Die Spieltheorie beschäftigt sich mit der Modellierung von Entscheidungssituationen von mehreren Personen oder Gruppen mit den gleichen Interessen. Das Ziel der Spieltheorie ist es, ein mathematisches Modell zur optimalen Entscheidungsfindung zu kreieren. Dabei bietet sich die Spieltheorie ausgezeichnet für den Einsatz in der Schule an. Schülerinnen und Schüler können versuchen intuitiv zu handeln und Entscheidungen in exemplarischen Situationen zu treffen. Im Idealfall greifen dabei Intuition und mathematisches Denken nahtlos ineinander.

Die Spieltheorie ist ein interessantes Thema für Schülerinnen und Schülern. Es können sowohl die ökonomische Relevanz der Spieltheorie als auch Auswirkungen von Entscheidungen auf das Weltgeschehen angesprochen werden. Dabei ist es durchaus erwünscht über den mathematischen Tellerrand zu blicken und Entscheidungen zu diskutieren. Mögliche Themenbereiche erstrecken sich auf viele Phänomene der Ökonomie, Medizin, Biologie, Wirtschaftswissenschaften, Psychologie, Militärstrategie oder der Soziologie. Daher ist die Spieltheorie auch im Curriculum von außermathematischen Studienrichtungen zu finden.

Das (Gesellschafts-)Spiel als Urbeschäftigung wird häufig als Ausgangspunkt der Spieltheorie gesehen. Der allgemeine Diskurs über Spieltheorie eröffnete sich erst mit dem Buch „Games and Economic Behavior“ von John von Neumann und Oskar Morgenstern. Im Gegensatz zu anderen Disziplinen beinhaltet dieses Werk hauptsächlich Originalmaterial. Es wurde bereits zuvor in diesem Feld gearbeitet, jedoch wurde erst in diesem Werk der radikal neue Denkansatz deutlich (vgl. BERNINGHAUS, EHRHART & GÜTH, 2010, S.2).

Im Folgenden wird mit „Spieler“ sowohl die männliche als auch die weibliche Form angesprochen.

1.2 Was ist ein Spiel?

Zunächst wird auf Zwei-Personen-Spiele in der Normalform eingegangen, um die elementaren Begriffe einzuführen, in Kapitel 3 wird das Thema vertieft.

Arten von Spielen

Grundsätzlich unterscheidet man drei Arten von Spielen (vgl. BEWERSDORFF, 2012, S.V-VII).

Glücksspiele

Glücksspiele lassen sich im Allgemeinen durch die Wahrscheinlichkeitstheorie erklären. Der zentrale Faktor bei diesen Spielen ist der Zufall. Beispiele hierfür wären Roulette oder das Würfelspiel.

Kombinatorische Spiele

Kombinatorische Spiele sind jene, bei denen der Ausgang eines Spiels allein auf den zahlreichen Zugmöglichkeiten beruht. Bereits nach wenigen Zügen können sich die erlaubten Möglichkeiten in einer kaum überschaubaren Vielfalt kombinieren. Das führt dazu, dass die Konsequenzen eines Zuges kaum ersichtlich sind. Als Beispiele wären hier Schach, Mühle oder andere Brettspiele zu nennen.

Strategische Spiele

Mit dieser Art von Spielen beschäftigt sich die Spieltheorie genauer und daher wird sie auch im Folgenden behandelt.

Ein Spiel ist klar definiert durch die **Gesamtheit seiner Regeln**. Die Spieler können nur nach den vorgeschriebenen Regeln agieren. Entscheidet sich ein Spieler in einer bestimmten Situation, nennt man diese Entscheidung **Zug**. Die Summe aller Züge bezeichnet man als **Partie**. Die Gesamtheit der Züge, die ein Spieler im Rahmen einer Partie treffen kann, heißt **Strategie**.

Beispiel I.1 - „Nim-Spiele“

„Auf einem Tisch liegen 25 Gummibären. Spieler S_1 beginnt und kann einen oder zwei Gummibären vom Tisch entfernen. Danach ist Spieler S_2 am Zug und kann auch einen oder zwei Gummibären vom Tisch entfernen und das Spiel beginnt von vorne. Der Spieler, der das letzte Gummibärchen genommen hat, hat das Spiel verloren/gewonnen.“

Gibt es für einen der beiden Spieler eine Möglichkeit dieses Spiel sicher zu gewinnen?

Variante 1: Der Spieler, der das letzte Gummibärchen nimmt, hat verloren.

Angenommen S_1 nimmt x Gummibärchen ($x \in \{1, 2\}$) und S_2 nimmt $3 - x$ Gummibärchen. So nimmt S_2 stets so viele Gummibären weg, sodass nach seinem Zug um drei weniger am Tisch liegen als nach seinem letzten Zug. Mit dieser Strategie geht S_2 auf Nummer sicher um sich das 24-te Gummibärchen zu nehmen. Somit muss S_1 das letzte Gummibärchen nehmen und hat das Spiel verloren.

1 Einführung

Variante 2: Der Spieler, der das letzte Gummibärchen nimmt, hat gewonnen.

Bei dieser Variante kann S_1 das Spiel für sich entscheiden. S_1 beginnt und nimmt ein Gummibärchen vom Tisch. Danach spielt S_1 dieselbe Strategie, wie S_2 bei der ersten Variante. Durch die Wegnahme von Dreier-Blöcken, kann S_1 bei 24 Gummibärchen das letzte vom Tisch nehmen.

Weitere mögliche Fragen:

- Wovon hängt Sieg/Niederlage der Spieler ab?
- Wie könnte man den Fall für eine beliebige Anzahl an Gummibärchen beschreiben?
- Was passiert, wenn die Spielregeln geändert werden? Wenn z. B. statt zwei höchstens sieben Gummibärchen gezogen werden können.

„Nim-Spiele“ gelten aus spieltheoretischer Sicht als **Spiele mit perfekter Information**. Das bedeutet, dass jeder Spieler zu jedem Zeitpunkt das vorhergegangene Spielgeschehen weiß. Zu dieser Sorte gehören Gesellschaftsspiele wie zum Beispiel Halma oder Mühle. Zwei-Personen-Spiele mit perfekter Information bilden einen gesonderten Teil der Spieltheorie, nämlich die kombinatorische Spieltheorie. Es gibt auch **Spiele ohne perfekte Information**. Zu diesen zählen Kartenspiele, wie Schnapsen oder Jolly, da den Spielern nur die eigenen Karten und nicht die des Gegners bekannt sind (vgl. RIECK, 1993, S.95). Desweiteren sind Gesellschaftsspiele wie etwa „Siedler von Catan“ Spiele ohne perfekte Information aufgrund eines verdeckten Stapels, der das Spielgeschehen verändern kann.

Im Folgenden werden hauptsächlich Spiele ohne perfekte Information behandelt.

Wichtige Faktoren für strategische Spiele (vgl. GRIESEL, 2003, S.240)

Die **Anzahl der Spieler** spielt für strategische Spiele eine wichtige Rolle. Dabei wird der Begriff Spieler im mathematischen Sinne als Sammelbegriff behandelt. Es kann sich hierbei um eine einzelne Person, eine Gruppe, ein Unternehmen oder sogar um ganze Länder handeln, die das gleiche Ziel verfolgen und den gleichen Nutzen haben. Im Rahmen der Spieltheorie können endlich oder sogar unendlich viele Spieler gegeneinander spielen.

Die **Auszahlungsfunktion** gibt den Gewinn bzw. den Verlust an, welcher dem Spieler in Abhängigkeit der gewählten Strategien widerfährt. Ist der Gewinn des einen Spielers stets gleich groß wie der Verlust des anderen Spielers bei insgesamt zwei Spielern, so spricht man von einem **Nullsummenspiel**.

Es gibt strategische Spiele sowohl mit **Zufallszügen** als auch ohne. Häufig ist es sinnvoll einen Zufall „künstlich“ zu erzeugen, um eine Strategiewahl zu verschleiern.

Der Ausgang eines strategischen Spiels steht bis auf den Zufallsfaktor fest, sobald sich alle Spieler für eine Strategie entschieden haben. Somit ist für die Wahl der Strategie entscheidend, was der Spieler vom Ausgang der Partie erwartet.

1.3 Einstieg für die Schule

Um die vielen neuen Begriffe den Schülerinnen und Schülern näher zu bringen, bietet es sich an, sie im Zuge bekannter Spiele zu nennen. Dabei ist es egal, um welche Art von Spielen es sich handelt. Laut Bewersdorff (2012) liegen alle Spiele an den Kanten oder innerhalb eines Dreieckes mit den „Arten von Spielen“ an den Eckpunkten (vgl. Abbildung 1). Die Lage der Spiele können durch einen Punkt markiert werden.



Abbildung 1: Bewersdorff'sche Dreiecke

Liegt zum Beispiel ein Spiel an der Kante zwischen „strategische Spiele“ und „Glücksspiele“, so hat dieses Spiel keine kombinatorischen Elemente. Ob der Schwerpunkt dieses Spiels im Bereich Strategie oder Glück liegt, wird mit dem Abstand zum jeweiligen Eckpunkt beschrieben. Je geringer der Abstand, desto größer das Gewicht des Eckpunktes.

Mittels des Modells von Bewersdorff lassen sich nun verschiedene Spiele analysieren. Ich werde anhand von „Siedler von Catan“ eine Möglichkeit geben, wie dies im Unterricht umzusetzen ist.

Beispiel I.2 - Analyse von „Siedler von Catan“

1. Strategische Elemente:

Um nur einige Elemente zu nennen, beschränke ich mich nur auf den Beginn des Spiels. Im weiteren Verlauf der Partie kommen stets mehr strategische Fragestellungen auf.

Die Wahl der Startansiedlungen zu Beginn des Spiels stellen erste strategische Entscheidungen dar. Typische Fragestellungen sind:

- „Wo sind die besten Plätze?“ – (Anm. Maximierung der Auszahlungsfunktion)
- „Wo werden sich meine Gegenspieler positionieren?“
- „Welche Felder bieten mir weitere Vorteile?“

1 Einführung

Nach der Wahl der Startansiedlungen steht die Richtung, in welche sich mein Spiel bewegen soll, auf dem Plan. Typische Frage hier sind nun:

- „Welche Rohstoffe bekomme ich statistisch gesehen am häufigsten und kann ich damit am besten Siedlungen, Städte oder Entwicklungskarten bauen?“
- „Hat ein anderer Spieler möglicherweise eine ähnliche Strategie? Wenn ja, kann ich mein Ziel schneller erreichen als er?“

2. Glück:

Auch Glück spielt in „Siedler von Catan“ eine große Rolle. Allerdings lässt es sich in vielen Situationen durch geschicktes Bauen oder Verhandeln zum eigenen Vorteil nutzen.

Das Spiel „Siedler von Catan“ besitzt zwei Glücksspielelemente. Das wären zum einen die Würfel, welche die Erträge der verschiedenen Felder jedes Zuges ausgeben. Durch geschicktes Aufstellen der eigenen Siedlung kann man die Wahrscheinlichkeit, dass man jede Runde einen Rohstoff erhält, erhöhen. Den zweiten Glücksfaktor stellen die verdeckten Entwicklungskarten dar. Die Entwicklungskarten sind als verdeckter Stapel aufgelegt. Zahlt ein Spieler bestimmte Rohstoffe, darf er eine Karte abheben. Das folgende Ereignis hängt von der gezogenen Karte ab.

3. Kombinatorik:

Das Spiel „Die Siedler von Catan“ bietet auch ein kombinatorisches Element. So ist es zu Beginn des Spiels nicht nur wichtig die Startansiedlungen auf ertragreiche Felder zu setzen, sondern auch auf ein Feld zu setzen, welches einen weiten Ausbau der Siedlung ermöglicht. So kann ein Feld einen guten Ertrag bringen, aber auch bereits umstellt von Gegenspielern sein. Diese Situation würde dazu führen, dass ein weiterer Ausbau der eigenen Siedlung nur beschränkt möglich wäre.

Nach dem Abdecken der verschiedenen Spielarten lässt sich zusammenfassen, dass „Siedler von Catan“ ein Spiel mit unterschiedlichen Elementen ist. Die Kombinatorik spielt hierbei eine untergeordnete Rolle, während der Zufall durch die Würfel deutlich spielentscheidender sein kann. Der Schwerpunkt des Spiels liegt jedoch auf der Strategie. In Abbildung 2 erkennt man, wie das Spiel „Die Siedler von Catan“ im Bewersdorff'schen Dreieck positioniert werden könnte.

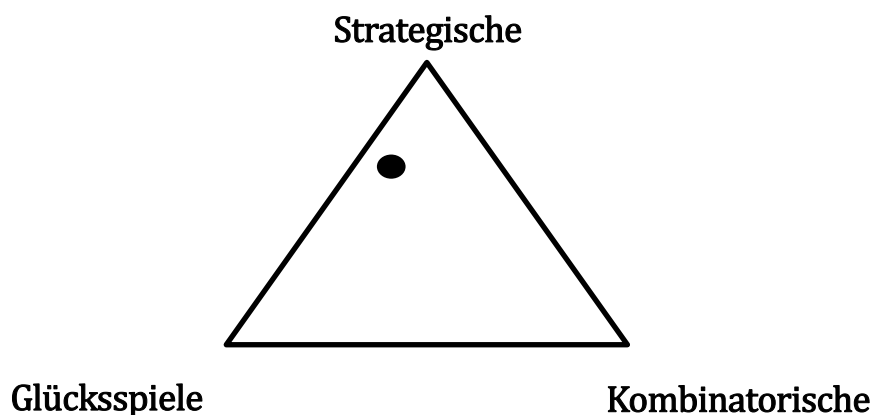


Abbildung 2: „Siedler von Catan“ im Bewersdorff'schen Dreieck

1.3 Einstieg für die Schule

Um das Spiel vollständig zu analysieren, können auch Auszahlungsfunktionen und Auswirkungen auf den Gegenspieler analysiert werden. Dies würde hier jedoch den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen.

In der Schule wäre es nun möglich nach diesem Verfahren und Ideen weitere Spiele zu klassifizieren, um bei den Schülerinnen und Schülern ein Verständnis der Begriffe aufzubauen. Bei diesem Zugang müssen sich Lehrkräfte nicht nur auf Gesellschafts- oder Kartenspiele beschränken, sondern können auch Situationen von Computerspielen analysieren. Geeignete Beispiele für diesen Sektor wären Dota oder LOL. Dabei handelt es sich um sogenannte „MOBAs“ (Anm. Multiplayer Online Arena). Es treten dabei zwei Vierer-Teams gegeneinander an. Jeder Spieler eines Teams wählt einen von mehreren Charakteren, welche sehr unterschiedliche Fähigkeiten besitzen. MOBAs eignen sich sehr gut, um Spiele hinsichtlich des Einflusses der Kombinatorik auf die Strategiewahl zu untersuchen.

2 Spiele in Normalform

Wird ein Spiel nur nach den in 1.2 beschriebenen Faktoren modelliert heißen sie **strategische** oder **statische Spiele** (vgl. RIECHMANN, 2014, S.21). Die Darstellung statischer Spiele wird als **Normalform** bezeichnet. Bei Spielen in der Normalform geben alle Spieler ihre Strategiewahl **gleichzeitig** bekannt. Die Auszahlungsfunktion ergibt sich aus der Wahl dieser Strategien. Im folgenden Kapitel werden ausschließlich statische Spiele behandelt.

2.1 Zweipersonen-Nullsummenspiele

2.1.1 Darstellung von endlichen Zweipersonen-Nullsummenspielen

Spieler S_1 kann die Strategien $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ spielen und Spieler S_2 kann die Strategien $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ spielen. Die Darstellung von endlichen Zweipersonen-Nullsummenspielen kann durch eine Matrix oder eine Tabelle erfolgen. Dabei werden die Strategien von S_1 in den Zeilen und die Strategien von S_2 in den Spalten aufgetragen. Der Matrixeintrag a_{ij} mit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ entspricht den Auszahlungen A_1 an S_1 bzw. A_2 an S_2 bei der Strategiewahl (x_i, y_j) , wobei bei Nullsummenspielen für die Auszahlung gilt: $A_1(x_i, y_j) = -A_2(x_i, y_j) \forall i, j$. Das bedeutet, dass der Gewinn des einen Spielers gleich dem Verlust des anderen Spielers ist. Deswegen werden bei Nullsummenspielen in der Matrix nur die Auszahlungen an Spieler 1 angegeben.

Darstellungen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrixform

oder

$S_1 \backslash S_2$	y_1	...	y_m
x_1	a_{11}	...	a_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	a_{n1}	...	a_{nm}

Tabellenform

Beispiel II.1 - Schere-Stein-Papier

Schere-Stein-Papier ist ein klassisches strategisches Zweipersonen-Nullsummenspiel. Jeder Spieler kann sich für eine von drei Strategien entscheiden. Dabei gilt Schere schlägt Papier, Papier schlägt Stein und Stein schlägt Schere. Der Spieler, der gewinnt erhält als Auszahlung +1 und der Verlierer -1. Wählen beide Spieler die gleiche Strategie, so beläuft sich die Auszahlung auf 0.

Darstellung als Tabelle:

$S_1 \backslash S_2$	Schere	Stein	Papier
Schere	0	-1	1
Stein	1	0	-1
Papier	-1	1	0

2.1.2 Lösungsmethoden von Zweipersonen-Nullsummenspielen in reinen Strategien

Die Strategiemenge von S_1 bezeichnet man mit X und die Strategiemenge von S_2 mit Y . Jedes Element der Strategiemenge heißt **reine Strategie** und wird dargestellt als x_i , für $i \in \{1, \dots, n\}$ bzw. y_j für $j \in \{1, \dots, m\}$ (vgl. BERNINGHAUS, EHRHART & GÜTH, 2010, S.12).

In diesem Kapitel werden Lösungen von Zweipersonen-Nullsummenspielen ausschließlich in reinen Strategien gesucht. Die Lösungsmethoden und Begriffe werden anhand von Beispielen erarbeitet.

Beispiel II.2 - „Ein Kartenspiel für zwei Spieler“ (vgl. GRIESEL, 2003, S.252)

Spieler Z und Spieler S spielen gegeneinander folgendes Kartenspiel:

Jeder Spieler bekommt 15 Spielchips und drei oder vier bestimmte Spielkarten. Die Spielkarten unterscheiden sich in ihrem Kartenwert (2-10 und Ass) und in der Farbe (rot, schwarz). Insgesamt sind also 20 Karten im Spiel, wobei jeweils nur acht Karten verwendet werden. Beide Spieler wissen über die Karten des Gegenspielers Bescheid. Zu Spielbeginn nehmen beide Spieler ihre Karten verdeckt auf die Hand. Anschließend wählen beide Spieler gleichzeitig eine ihrer Karten aus. Stimmen die ausgespielten Karten in der Farbe überein, gewinnt Spieler Z die positive Differenz der Kartenwerte an Spielchips. Anderenfalls gewinnt Spieler S die positive Differenz der Kartenwerte an Spielchips. Anschließend nehmen beide die ausgespielte Karte wieder auf die Hand und das Spiel beginnt von vorne.

Spielvariante 1:

Karten für Spieler Z:
Rot:9; Schwarz: 5,6

Karten für Spieler S:
Rot: 5,6,7

Spielvariante 2:

Karten für Spieler Z:
Schwarz: 2,4,8,10

Karten für Spieler S:
Rot: 8; Schwarz: 3,5,9

Bei diesem Spiel handelt es sich um ein Nullsummenspiel, da der Verlust des einen Spielers gleichgroß ist wie der Gewinn des anderen Spielers.

Betrachten wir zunächst **Spielvariante 1:**

Z S	Rot 5	Rot 6	Rot 7
Rot 9	4	3	2
Schwarz 5	0	-1	-2
Schwarz 6	-1	0	-1

2 Spiele in Normalform

Für Spieler Z ist klar, dass er die Strategie „Rot 9“ spielen muss, da er mit dieser Strategie immer gewinnt. Diese Strategie ist für Spieler Z **dominant**. Spieler S weiß dies und wählt daher stets „Rot 7“, um seinen Verlust möglichst gering zu halten. Bei dem Punkt (Rot 9 | Rot 7) stellt sich ein **Gleichgewicht** ein. Keiner der Spieler kann sich durch einseitige Strategieänderung verbessern. Das bedeutet Spieler Z würde nicht mehr gewinnen bzw. Spieler S mehr als zwei Spielchips verlieren.

Diesen Punkt nennt man **Gleichgewichtspunkt (GWP)** und die zugehörige Strategie **Gleichgewichtsstrategie**. Gleichgewichtspunkte sind Lösungen von Nullsummenspielen. Ein Nullsummenspiel heißt **fair**, sobald der GWP einen Wert von Null hat. Dieses Spiel ist unfair, da der GWP einen Wert ungleich Null hat und daher ein Spieler immer gewinnen kann.

Minimaxlösungsmethode eines Nullsummenspiels

Angenommen in der Zeile stehen die Gewinne von Z.

- Optimale Strategie für Z:
Wähle jene Zeile, in der das Minimum am größten ist. Egal wie sich Spieler S entscheidet, Spieler S kann nicht mehr gewinnen bzw. Spieler Z kann nicht weniger verlieren, als den Minimumwert dieser Zeile.
- Optimale Strategie für S:
Wähle jene Spalte, in der das Maximum am kleinsten ist. Egal wie Spieler Z sich entscheidet, Spieler Z kann nicht mehr gewinnen bzw. Spieler S kann nicht mehr verlieren, als den Maximumwert dieser Spalte.

Gibt es in der Matrix/Tabelle einen Wert, der für beide optimalen Strategien zutrifft, so ist dies ein GWP.

Lösung für **Spielvariante 2**:

Z S	Schwarz 3	Schwarz 5	Rot 8	Schwarz 9
Schwarz 2	1	3	-6	7
Schwarz 4	1	1	-4	5
Schwarz 8	5	3	0	1
Schwarz 10	7	5	-2	1

Gemäß der Minimaxlösungsmethode für Nullsummenspiele ist für Spieler Z „schwarz 8“ und für Spieler S „rot 8“ die optimale Strategie. Somit ist der Punkt (schwarz 8 / rot 8) ein GWP. Der GWP hat den Wert Null, daher handelt es sich hier um ein faires Spiel.

2.1.3 Weitere Anwendungen für die Schule

Beispiel II.3 – "A Game Of Thrones" Teil 1

Anmerkung

Folgende Ausgangssituationen stammen aus dem zweiten Band der Romanreihe „A Song Of Ice And Fire“ von George R. R. Martin. Die Bücher wurden als Serie „Game Of Thrones“ verfilmt. Das folgende Zitat stammt aus dem ersten Buch beziehungsweise der ersten Staffel der Serie.

„Spielt man das Spiel um Throne gewinnt man oder man stirbt“-Cersei Lannister

Ausgangssituation des Beispiels ist der Konflikt der beiden Häuser Lannister und Baratheon. Oberhaupt der Familie Lannister ist Joffrey, welcher auf dem Eisernen Thron sitzt und über Westeros regiert. Auf der anderen Seite befiehlt Stannis das Haus Baratheon.

Nach dem Tod von Robert Baratheon übernimmt dessen Stiefsohn Joffrey den Eisernen Thron, obwohl Stannis der rechtmäßige Erbe sein sollte. Stannis akzeptiert dies nicht und entschließt sich zur Rebellion. Mit einer großen Armee im Rücken hat Stannis zwei Möglichkeiten. Er kann die königliche Hauptstadt angreifen („angreifen“) oder sich um einen Dialog bemühen („Kompromiss“). Joffrey hat die Strategien die Hauptstadt verteidigen („verteidigen“) oder mit Stannis eine Lösung finden („Kompromiss“) zur Verfügung.

Fragestellungen:

1. Betrachtet das Zitat zu Beginn! Um welche Art Spiel handelt es sich beim Spiel um Throne?
2. Mit der Annahme, dass das Haus Baratheon die größere Armee besitzt und Haus Lannister ein größeres Vermögen, ergibt sich folgende mögliche Matrix aus der Sicht des Hauses Lannister:

$L B$	angreifen	Kompromiss
verteidigen	-10	10
Kompromiss	-10	10

Was bedeutet in diesem Kontext eine Auszahlung von „10“?

3. Gibt es in diesem Spiel einen Gleichgewichtspunkt? Wenn „ja“, welchen? Wenn „nein“, warum nicht?

Ad 1.:

Gemäß dem Einstiegszitat kann ein Spieler A beim Spiel um den Thron nur alles gewinnen (Spieler B verliert alles) oder alles verlieren (Spieler B gewinnt alles). Daher handelt es sich hierbei um ein Nullsummenspiel.

Ad 2.:

Die Auszahlung „ ± 10 “ bedeutet Sieg oder Niederlage des Krieges. Konkret auf diese Matrix angewandt steht die „-10“ für einen Sieg des Hauses Baratheon und „10“ für einen Sieg des Hauses Lannister.

2 Spiele in Normalform

Ad 3.:

In diesem Spiel gibt es keinen Gleichgewichtspunkt. Grund dafür ist die dominante Strategie „angreifen“ von Stannis Baratheon. Egal wie sich das Haus Lannister in diesem Fall verhält, verlieren sie den Krieg. Begründet werden diese Werte damit, dass Stannis die größere Armee besitzt und somit im Falle einer Schlacht überlegen ist. Die Lannister wären über einen Kompromiss auf Seiten Stannis glücklicher, da sie durch ihr Vermögen und ihren Einfluss in dieser Situation mehr Spielraum hätten.

Beispiel II.4 – “Game Of Thrones Teil 2”

Annahme:

Das Oberhaupt des Hauses Tyrell steht vor einer schwierigen Entscheidung. Das Haus Tyrell befehligt die drittgrößte Armee des Landes, daher werden die Häuser Baratheon und Lannister Interesse daran haben es als Verbündete zu wissen. Schließt sich das Haus Tyrell einer Fraktion an, so gewinnt diese Fraktion den Krieg, da diese Koalition die größte Armee des Landes besitzen würde.

Fragestellungen:

1. Welche Strategien stehen dem Haus Tyrell zur Verfügung?
2. Du bist der Berater oder die Beraterin des Hauses Tyrell! Welche Strategie würdest du empfehlen? Begründe deine Entscheidung mit einer Bimatrix.

Ad 1.:

Das Haus Tyrell hat drei Strategien: („Lannister“, „Baratheon“ oder „nichts tun“)

Ad 2.:

Zur Beantwortung dieser Frage eignet sich eine 3x1 Matrix:

<i>Tyrell</i> <i>Kriegssituation</i>	Frieden
Lannister	10
Baratheon	5
Nichts tun	7

Falls Haus Tyrell in den Krieg zieht, würde es das Haus Lannister dem Hause Baratheon vorziehen. Grund dafür ist der Reichtum der Lannister. Die Tyrells haben für diesen Fall nicht nur den Krieg gewonnen und Frieden erhalten, sondern können sich auch eine große Belohnung erhoffen.

Die positive Auszahlung bei der Strategie „nichts tun“ ergibt sich aus der Tatsache, dass eines der Häuser Lannister oder Baratheon den Krieg verlieren wird. Daher wäre nach dem Krieg das Haus Tyrell das zweitmächtigste des Landes und der Einfluss der Familie würde sich dadurch erhöhen.

2.1 Zweipersonen-Nullsummenspiele

Der zweite Spieler dieser Matrix ist die Kriegssituation selbst. Greifen die Tyrells in das Kriegsgeschehen ein, so kommt es zu einem Ende des Krieges („Frieden“). Die Umwelt wird hierbei als Spieler modelliert. Somit hat der Ausgang des Konfliktes einen Einfluss auf die Strategiewahl des Hauses Tyrell.

Wie diese Geschichte ausgeht wird im dritten und letzten Teil des Beispiels geklärt (vgl. Beispiel III.4).

Beispiel II.5 - Das Modegeschäft (vgl. Griesel, 2003, S.257)

Das Modegeschäft S&T muss im Frühjahr ihre Winterkollektion bestellen. Der Besitzer weiß aus vergangenen Jahren, dass der Verkauf von Winterjacken stark vom Wetter abhängig ist. Im Falle eines strengen Winters mit niedrigen Temperaturen verkauft das Modegeschäft 40 Winterjacken vom Typ „Eisbär“. In einem normalen Winter werden 20 und in einem warmen Winter 10 Stück verkauft. Eine Winterjacke kostet im Einkauf 80 Euro und wird im Geschäft um 180 Euro angeboten. Die Jacken, die nicht innerhalb des Winters unter die Leute gebracht wurden, werden im Winterschlussverkauf für 64 Euro verkauft. Der Verlust lässt sich durch Lagerkosten, Personalkosten, usw. erklären. Das Modegeschäft kann nur Kontingente von 10, 20 oder 40 Jacken kaufen. Da im Winter vom Hersteller der Jacken bereits die Sommerware produziert wird, ist ein Nachbestellen der Jacken nicht möglich.

Wie viele Jacken soll das Modegeschäft S&T einkaufen, um sich einen möglichst großen Gewinn zu sichern?

Das Modegeschäft kann die Strategien $X = \{10, 20, 40\}$ und die Natur kann die Strategien $Y = \{\text{streng, normal, warm}\}$ spielen.

Die *interessante Komponente* ist, dass hier die Natur als Spieler modelliert wird, obwohl diese im eigentlichen Sinn kein Interesse und keine Auszahlungen an diesem Spiel besitzt. Dennoch handelt es sich hierbei um ein Nullsummenspiel, wenn angenommen wird, dass ein Gewinn des Modegeschäftes gleich einem Verlust der Natur jeweils in Euro bedeutet.

Tabelle des Spiels:

Modegeschäft Natur	streng	normal	warm
10	1000	1000	1000
20	2000	2000	840
40	4000	1680	520

Die Einträge a_{ij} der Tabelle entsprechen dem Gewinn des Modegeschäftes in Euro bei jeweiliger Strategiekombination. Berechnet wurden die Werte folgendermaßen:

$$\begin{aligned}a_{11} &= 10 \cdot (-80) + 10 \cdot 180 = 1000 \\&\vdots \\a_{33} &= 40 \cdot (-80) + 10 \cdot 180 + 30 \cdot 64 = 520\end{aligned}$$

Gemäß der Minimaxlösungsmethode stellt das Modegeschäft folgende Überlegung an:

Kauft das Modegeschäft zehn Jacken ein, so hat es mindestens einen Gewinn von 1000 Euro, egal wie sich die Natur entscheidet. Das Modegeschäft entscheidet sich also für die Zeile, in welcher das Minimum maximal ist. Die Natur wiederum möchte ihre Verluste minimieren und entscheidet sich für die Spalte, in welcher das Maximum minimal ist.

Somit ist die Minimaxlösung des Spiels $a_{13} = 1000$.

Das bedeutet, dass gemäß Minimax-Strategie das Modegeschäft zehn Jacken für das Wintergeschäft einkaufen soll.

2.2 Allgemeine Zweipersonenspiele

Bisher wurde auf Zweipersonennullsummenspiele eingegangen. Nun werden allgemeine Zweipersonenspiele beleuchtet. Der Unterschied liegt darin, dass der Gewinn des einen Spielers nicht mehr gleich groß wie der Verlust des anderen Spielers sein muss und umgekehrt.

2.2.1 Darstellung allgemeiner Zweipersonenspiele

Spiele in der Normalform werden als Bimatrix dargestellt. Während bei Nullsummenspielen ein Eintrag genügt, werden im allgemeinen Fall zwei Einträge pro Matrixelement benötigt. Daher folgt der Name „Bimatrix“, quasi eine Zusammenführung zweier Matrizen.

Spieler S_X kann die Strategien $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ spielen und Spieler S_Y kann die Strategien $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ spielen. Dabei werden die Strategien von S_X in den Zeilen und die Strategien von S_Y in den Spalten aufgetragen. Die Matrixeinträge $(a_{ij}|b_{ij})$ mit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ entsprechen den Auszahlungen A an S_X und B an S_Y bei der Strategiewahl (x_i, y_j) . Es gilt also:

$$a_{ij} = A(x_i, y_j) \text{ und } b_{ij} = B(x_i, y_j)$$

Darstellung:

$S_1 S_2$	y_1	...	y_m
x_1	a_{11}	...	a_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	a_{n1}	...	a_{nm}

2.2.2 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in reinen Strategien

Beispiel II.6 - Das Gefangenendilemma (vgl. ABLEITINGER & HAUER-TYPPELT, 2008, S.2-3)

Das Gefangenendilemma ist ein klassisches Beispiel der Spieltheorie, in dem zwei Gefangene G_1 und G_2 beschuldigt werden ein Verbrechen begangen zu haben. Allerdings fehlen der Polizei Beweise. Somit sind sie auf die Aussagen der Gefangenen angewiesen. Beide sitzen in zwei verschiedenen Räumen und machen gleichzeitig ihre Aussage. Gestehen beide ihr Verbrechen, so kommen sie mit vier Jahren Gefängnis davon. Bestreiten beide die Tat oder schweigen, so müssen sie nur für zwei Jahre wegen kleinerer Delikte ins Gefängnis. Falls einer „singt“ und der andere schweigt, so bekommen sie unterschiedliche Strafen. Der, der gesteht kommt frei, während der andere für fünf Jahre ins Gefängnis muss.

Nun stellt sich die Frage: Ist es für einen Gefangenen besser zu gestehen und sich mit eventuell vier Jahren Gefängnis abzugeben? Oder sollte er besser schweigen und damit riskieren fünf Jahre ins Gefängnis zu gehen?

Die Situation dargestellt als Bimatrix:

$G_1 G_2$	gestehen	schweigen
gestehen	-4 -5	-4 0
schweigen	-5 0	-2 -2

Die Matriceinträge geben jeweils die Höhe der Haftstrafen für beide Gefangenen bei der jeweiligen Strategiewahl an. Das negative Vorzeichen beschreibt den Verlust an Lebensjahren in Freiheit.

Die Situation wird zunächst aus der Sicht von Gefangenen 1 betrachtet. Gesteht der Gefangene 2 ist es für den Gefangenen 1 besser zu gestehen, da er nur vier statt fünf Jahre ins Gefängnis muss. Schweigt der Gefangene 2 ist es für den Gefangenen 1 ebenfalls besser zu gestehen, da er so ohne Haftstrafe davonkommt. Die Strategie „gestehen“ ist also eine **dominante Strategie**.

Die Überlegungen zur Situation von Gefangenen 2 sind analog.

Daraus folgt, dass die Antwortkombination (gestehen, gestehen) jeweils die besten Antworten liefert. Für keinen der Gefangenen ergibt sich eine höhere Auszahlung, in diesem Fall weniger Jahre im Gefängnis, falls er **einseitig** seine Strategie „gestehen“ zu ändern. Es stellt sich also hier ein **Gleichgewicht** ein. Diese Antwortkombination kann somit als Lösung des Spiels angesehen werden.

Beide Gefangenen würden allerdings mit der Strategiekombination (schweigen, schweigen) eine bessere Auszahlung erzielen können. Dann hätte jeder der Gefangenen zu hadern gehabt, da er bei einem Geständnis (während der andere schweigt) sogar ohne Freiheitsstrafe davongekommen wäre. In dieser individuellen Rationalität liegt also das „Dilemma“.

2.2.3 Weitere Umsetzungen für die Schule

Beispiel II.7 - Wettrüst-Beispiel (vgl. HAUER-TYPPELT, 2009, S.74 - 75)

Land A und Land B befinden sich im Krieg. Keines der beiden Länder möchte seine Vormachtstellung verlieren. Somit kommt es zu einem Wettrüsten. Beide Länder haben die Möglichkeiten ihre Armeen auf- oder abzurüsten. Zunächst ergibt sich folgende Situation als Bimatrix:

A\B	aufrüsten	abrüsten
aufrüsten	-50 -50	-100 100
abrüsten	100 -100	0 0

Fragestellungen:

1. Wie erklärst du dir die Werte der Bimatrix?
2. Welche Gleichgewichte kannst du in diesem Beispiel finden?
3. Welchem historischen Vorbild dient dieses Beispiel?
4. Wir wissen, dass das Wettrüsten im Kalten Krieg mit beidseitigem Abrüsten beider Armeen endete. Wie kannst du das historisch erklären? Recherchiere!
5. Erstelle eine mögliche Bimatrix mit einem Gleichgewicht (abrüsten, abrüsten)!

Ad 1.:

Die -50 bei der Strategiekombination (aufrüsten, aufrüsten) stehen für die Staatsausgaben für das Militär. Für den Fall, dass ein Staat auf „aufrüsten“ und der andere auf „abrüsten“ setzt, gewinnt der Staat mit der Strategie „aufrüsten“ den Krieg. Dies wird mit dem Wert 100 verdeutlicht.

Ad 2.:

Das Spiel besitzt ähnlich dem Gefangenendilemma zwei Gleichgewichte. Die Strategiekombination (aufrüsten, aufrüsten) ist ein Gleichgewicht mit dominanten Strategien. Die Kombination (abrüsten, abrüsten) ist kein Gleichgewicht, da beide Kontrahenten bei einseitigem Strategiewechsel eine bessere Auszahlung erzielen würden.

Ad 3.:

Das historische Vorbild dieser Situation ist der kalte Krieg, in welchem USA und der Sowjetunion nach dem zweiten Weltkrieg in Konflikt standen. Rund 40 Jahre lang haben beide Parteien massiv aufgerüstet, dennoch kam es nie zu einer militärischen Auseinandersetzung.

2.2 Allgemeine Zweipersonenspiele

Ad 4.:

Mit dem russischen Präsidenten Michail Gorbatschow, der das Geld anderswo einsetzte, und Ronald Reagan, der gegen Ende seiner Amtszeit auf eine atomwaffenfreie Zukunft plädierte, endete das Aufrüsten beider Parteien Mitte der 80er Jahre (vgl. Internetquelle [2]).

Ad 5.:

A\B	aufrüsten	abrüsten
aufrüsten	-50	-100
abrüsten	-100	0

Die gelb markierten Werte entsprechen den neuen Werten als Möglichkeit. Der negative Wert bezieht sich hierbei zum Beispiel auf die militärischen Ausgaben, welche anderswo dringender benötigt werden. Alternativ kann dieser Wert auch für ein militärisches Umdenken stehen. Der Verlust von unzähligen Menschenleben oder ein atomarer Erstschlag und die damit einhergehenden Konsequenzen überwiegen in der Entscheidung.

Mit dieser Änderung wird die Strategiekombination (abrüsten, abrüsten) zu einem Gleichgewicht mit dominanten Strategien.

Dieses Beispiel eignet sich hervorragend für einen fächerübergreifenden Lernbezug zu Geschichte. Es zeigt deutlich, dass spieltheoretische Überlegungen global und historisch eine wichtige Rolle spielen.

Beispiel II.8 - The Chicken Game (vgl. HOLLER & ILLING, 2000)

Als Einstieg eignet sich für dieses Spiel die „Chicken-Game“-Szene aus dem Film „Denn sie wissen nicht was sie tun“ mit James Dean. Der Anführer einer Gang mit dem Namen Buzz fordert den neuen Jungen an der Schule Jim (gespielt von James Dean) zu einer Mutprobe heraus. Die Aufgabe besteht darin parallel mit gestohlenen Autos auf eine Klippe zuzufahren. Die Person, die zuerst aus dem fahrenden Auto springt ist der Feigling (engl. „Chicken“).

Fragestellungen:

1. Nachdem du die „Chicken-Game“-Szene gesehen hast, wie würdest du diese Situation spieltheoretisch modellieren? Welche Vereinfachung/Veränderung könnte getroffen werden ohne die Feiglingssituation zu verändern?
2. Finde die Gleichgewichtspunkte!
3. Denke dir dieses Spiel in der Realität durch. Welche Möglichkeiten haben die Spieler, um die Gewinnchance zu erhöhen?

2 Spiele in Normalform

Ad 1.:

Eine sinnvolle Veränderung wäre die beiden Kontrahenten aufeinander zufahren zu lassen. Bei der Fahrt auf den Abgrund gibt es nur die Strategie „nicht springen“. Der strategische Aspekt wäre der Zeitpunkt des Absprungs und davon gibt es quasi unendlich viele. Um diese Situation in die Normalform zu verpacken gehen wir davon aus, dass die beiden Rivalen aufeinander zufahren. Beide bekommen die Strategien „verharren“ und „nach links ausweichen“. Die Präzisierung der zweiten Strategie verhindert, dass die beiden Kontrahenten trotz Ausweichen kollidieren. Eine mögliche Bimatrix sieht folgendermaßen aus:

A\B	verharren	ausweichen
verharren	-10 -10	-1 1
ausweichen	-1 1	0 0

Bleiben beide Spieler stur und wählen die „Verharren“-Strategie bekommen sie die geringste Auszahlung, da dies ihr Leben kostet. Weichen hingegen beide aus, so gewinnt keiner das Spiel und keiner trägt Schaden davon.

Ad 2.:

Dieses Spiel besitzt zwei Gleichgewichtspunkte in reinen Strategien. Die Strategiekombinationen (verharren, ausweichen) und (ausweichen, verharren) bilden jeweils einen Gleichgewichtspunkt.

Ad 3.:

Eine Möglichkeit besteht darin, den anderen Spieler im Vorfeld zu warnen. Ist diese Drohung glaubhaft genug, so tendiert der bedrohte Spieler möglicherweise dazu eher auszuweichen. Ein Spieler, bei dem „Ausweichen“ nicht in Frage kommt, hat eine dominante Strategie mit „verharren“, da diese Strategie stets eine größere Auszahlung liefert. Diesem Spieler wäre ein Sieg bei diesem Spiel wichtiger als sein Leben. Drohungen von diesem Spieler wären sehr glaubwürdig. Der rationale Gegenspieler würde somit auf „Ausweichen“ setzen. Ist der bedrohte Spieler von derselben Sorte, so ist die Kollision der Gleichgewichtspunkt. Die glaubwürdige Drohung geschieht über die sogenannte **Selbstbindung**. Die Selbstbindung ist eine Aktion, über die sich ein Spieler über einen gewissen Zeitraum bindet (vgl. DIXIT & NALEBUFF, 1997).

Beispiel II.9 - Die Kubakrise (vgl. DIXIT & VAN SKEATH MULBREGT, 2004)

Die Kubakrise stellt eine der heikelsten Situationen des kalten Krieges dar. Die Sowjetunion hat als Antwort auf die Errichtung von Seeblockaden durch die USA auf der Insel Kuba einen Raketenstützpunkt errichtet. Die USA drohte daraufhin auf dem amerikanischen Festland eine Blockade zu errichten, was die Chance auf einen Atomkrieg erhöhen würde. Somit hat Spieler 1 (die USA) die Strategien „blockieren“ oder „nichts tun“ und Spieler 2 (die UdSSR) die Strategien „Raketen aufstellen“ und „Rückzug“. Die Bimatrix für dieses Spiel sieht folgendermaßen aus:

2.3 Das Nash-Gleichgewicht

USA UdSSR	Raketen aufstellen	Rückzug
Nichts tun	1 -1	0 0
blockieren	-10 -10	-1 1

Fragestellungen:

1. Finde die Gleichgewichtspunkte!
2. Recherchiere wie die Kubakrise endete!
3. Wie kannst du dir erklären, warum es zu dieser Lösung gekommen ist?

Ad 1.:

Dieses Spiel besitzt zwei Gleichgewichtspunkte in reinen Strategien. Zum einen wäre dies die Strategiekombination („Nichts tun“, „Raketen aufstellen“) und zum anderen („blockieren“, „Rückzug“).

Ad 2.:

Die USA hat der Sowjetunion gedroht bis zum Atomkrieg zu gehen, falls diese ihren Raketenstützpunkt nicht abziehen. Diese Drohung war derart glaubwürdig, dass sich die Sowjetunion zum Rückzug entschlossen hat.

Ad 3.:

Die USA kann nur eine positive Auszahlung erzielen, wenn sie auf die Strategie „blockieren“ setzt. Daher ist es für die USA sinnvoll diese Antwort zu wählen und diese Drohung auszusprechen. Auf der anderen Seite ist für die UdSSR die beste Antwort auf „blockieren“ der „Rückzug“, da es anderenfalls zu einem Atomkrieg kommen könnte. Beide Parteien möchten jedoch einen Atomkrieg vermeiden. So kam es, dass sich der Gleichgewichtspunkt („blockieren“, „Rückzug“) im Jahr 1962 tatsächlich ereignete.

2.3 Das Nash-Gleichgewicht

Die in „Ein Kartenspiel für zwei Spieler“ (Beispiel II.2) und in 2.2 beschriebenen Gleichgewichte sind **Nash-Gleichgewichte**. Der Name geht auf den US-amerikanischen Mathematiker John Nash zurück. Dieser erhielt im Jahre 1994 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für seine Leistungen im Rahmen der Spieltheorie. Er ist eine der wenigen Mathematiker, dem diese Ehre zu Teil wurde (vgl. WESSLER, 2012, S.17).

Definition: Nash-Gleichgewicht in dominanten Strategien für Zweipersonenspiele

Ein Nash-Gleichgewicht in dominanten Strategien stellt sich ein, wenn jeder Spieler seine dominanten Strategien wählt.

Sei (x_i^*, y_j^*) eine dominante Strategiekombination mit den dominanten Strategien x_i^* für Spieler 1 und y_j^* für Spieler 2.

So gelten:

$$A(x_i^*, y_j^*) \geq A(x_i^*, y_j) \text{ und } A(x_i^*, y_j^*) \geq A(x_i, y_j^*)$$

Das bedeutet kein Spieler kann durch einseitige Änderung seine Auszahlung verbessern.

Das Nash-Gleichgewicht in dominanten Strategien ist ein sehr anschauliches Konzept der Spieltheorie, welches jedoch auch an seine Grenzen stößt. Meistens stehen nicht jedem Spieler dominante Strategien zur Verfügung. Die optimale Strategie hängt dann davon ab, wie sich der andere Spieler verhält. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel II.10 - Das Hausübungsbeispiel (vgl. ABLEITINGER & HAUER-TYPPELT, 2008)

Die Lehrerin L gibt jede Woche eine Hausübung auf, welche sie in der folgenden Woche von zwei Schülerinnen und Schülern kontrolliert.

Die Schülerin S stellt nun folgende Überlegung an. Wenn sie ihre Hausübung macht und die Lehrerin kontrolliert diese, empfindet sie dies als positiv, hat jedoch einen freien Tag „verloren“ (Nutzen „+1“). Falls sie die Hausübung macht, aber nicht kontrolliert wird, ärgert sie sich über den „verlorenen“ Tag (Nutzen „-1“). Macht sie die Hausübung nicht und wird kontrolliert, bekommt sie ein „Minus“ und ihre Note ist in Gefahr (Nutzen „-1“). Für sie wäre am besten, wenn sie die Hausübung nicht macht und dabei nicht kontrolliert wird. Sie hat in dem Fall einen freien Tag und es zieht für sie keine Konsequenzen nach sich (Nutzen „+4“).

Betrachten wir nun das Geschehen aus der Sicht der Lehrerin. Falls die Schülerin S ihre Hausübung macht ist die Lehrerin zufrieden, allerdings ist ihr lieber in diesem Fall nicht zu kontrollieren, da sie sich Arbeit erspart hätte. Sie hat aber in diesem Fall ihr Ziel erreicht (Nutzen „+1“ bzw. „+2“). Falls die Schülerin ihre Hausübung jedoch nicht macht, ist es der Lehrerin wichtig, die Schülerin bei diesem „Betrugsversuch“ zu ertappen. Kontrolliert die Lehrerin die nicht gemachte Hausübung, kann sie die Schülerin ermahnen. Unter Umständen macht die Schülerin danach ihre Hausübung immer (Nutzen „+4“). Falls die Lehrerin die nicht gemachte Hausübung nicht kontrolliert, sieht sie darin die vergebene Chance, dass die Schülerin etwas gelernt hätte und hat daher keinen Nutzen.

Die folgende Bimatrix fasst die Situation zusammen.

S L	Kontrolliert	Kontrolliert nicht
macht Hausübung	1 1	2 -1
macht Hausübung nicht	4 -1	0 4

2.4 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien

Bei diesem Spiel erreicht das Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien seine Grenzen. Kontrolliert L die gemachte Hausübung, wäre es besser, sie hätte nicht kontrolliert. Kontrolliert wiederum L die gemachte Hausübung nicht, wäre es für die Schülerin besser sie hätte die Hausübung nicht gemacht und die Überlegungen beginnen von vorne. Es lohnt sich also stets für einen Spieler von seiner Strategie abzuweichen, um eine bessere Auszahlung zu bekommen. Allerdings können wir durch einen Wechsel der Betrachtungsweise auch in diesem Spiel ein Nash-Gleichgewicht finden.

2.4 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien

Fortsetzung des Hausübungsbeispiels (von Beispiel II.10)

Da es bei diesem Spiel kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien gibt, wird eine neue Sichtweise benötigt. Angenommen die Schülerin beobachtet seit längerem die Verhaltensweisen der Lehrerin und weiß, dass sie mit einer relativen Häufigkeit von q die Hausübung kontrolliert. Diese relative Häufigkeit lässt sich als Wahrscheinlichkeit interpretieren. Nun lässt sich die erwartete „Auszahlung“ A_S für beide Strategien der Schülerin berechnen. Entscheidet sie sich die Hausübung zu machen (Strategie S_1), hat sie mit einer Wahrscheinlichkeit q die Auszahlung $+1$ und mit einer Wahrscheinlichkeit $(1 - q)$ die Auszahlung -1 . Daher:

$$A_{S1} = 1 \cdot q - 1 \cdot (1 - q) = 2q - 1$$

Analog dazu die Überlegungen bei der Strategie „Hausübung nicht machen“ (Strategie S_2):

$$A_{S2} = -1 \cdot q + 4 \cdot (1 - q) = -5q + 4$$

Die beiden erwarteten Auszahlungen sind lineare Funktionen in q . Abhängig von q ist eine der erwarteten Auszahlungen größer. Dazu die graphische Lösung in der Abbildung 3:

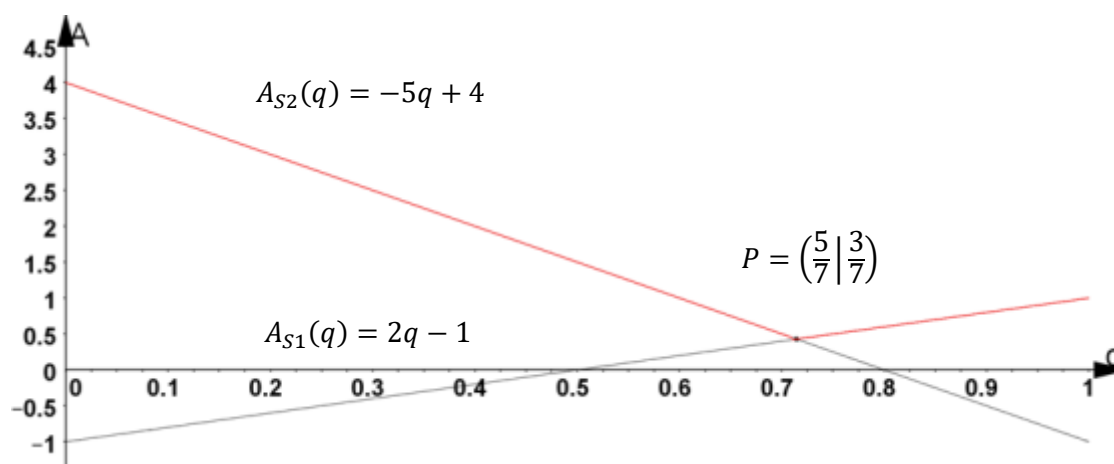


Abbildung 3: Graphen der Auszahlungsfunktionen der Schülerin

Betrachten wir nun den Schnittpunkt. Falls $q < \frac{5}{7}$ gilt, ist es für die Schülerin besser die Hausübung nicht zu machen, da ihre erwartete Auszahlung bei dieser Strategie höher ist. Analog wäre für den Fall $q > \frac{5}{7}$ die bessere Strategie die Hausübung zu machen. Die rot eingefärbten Linien geben die optimale Strategie in Abhängigkeit von q an.

2 Spiele in Normalform

Für die Lehrerin lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen. Angenommen die Schülerin macht mit einer Wahrscheinlichkeit p ihre Hausübung, dann gilt für die erwartete Auszahlung für die Lehrerin für die Strategie „kontrollieren“ (Strategie L_1):

$$A_{L1} = 1 \cdot p + 4 \cdot (1 - p) = -3p + 4$$

Analog ergibt sich die erwartete Auszahlung für die Strategie „nicht kontrollieren“ (Strategie L_2):

$$A_{L2} = 2 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = 2p$$

Die zugehörige Grafik in Abbildung 4 gibt wieder Aufschlüsse über das optimale Verhalten der Lehrerin.

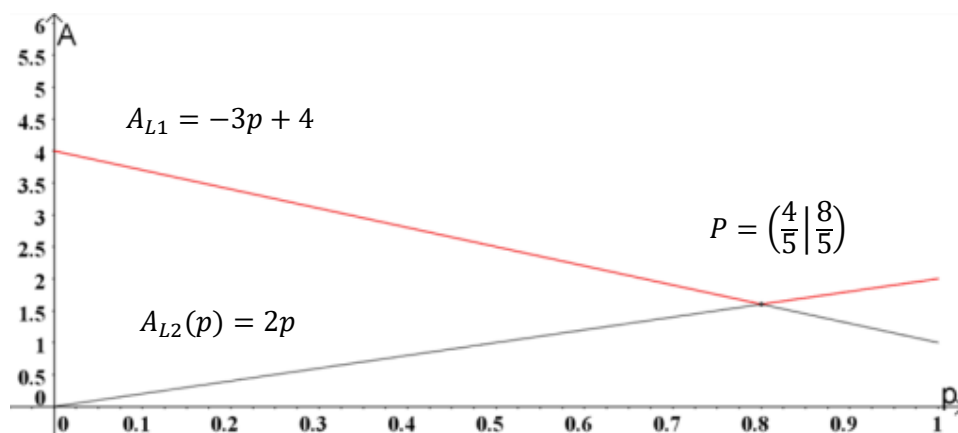


Abbildung 4: Graph der Auszahlungsfunktionen der Lehrerin

Falls $p < \frac{4}{5}$ ist, ist es für die Lehrerin besser die Hausübung zu kontrollieren. Andernfalls macht die Schülerin in mehr als $\frac{4}{5}$ der Fälle ihre Hausübung, bevorzugt die Lehrerin diese dann nicht zu kontrollieren.

Diese gewonnenen Informationen lassen sich in eine „Grafik der Beste-Antwort-Linien“ übertragen. Bei dieser Grafik wird auf der Abszisse der Parameter p aufgetragen und auf der Ordinate der Parameter q (vgl. ABLEITINGER, 2009). Die Parameter entsprechen den relativen Häufigkeiten für „Hausübung machen“ aus Sicht der Schülerin und „Hausübung kontrollieren“ aus Sicht der Lehrerin. Es gilt, wie berechnet, dass für jedes $p < \frac{4}{5}$ für die Lehrerin „Hausübung kontrollieren“ die beste Antwort und für jedes $p > \frac{4}{5}$ „Hausübung nicht kontrollieren“ die beste Antwort ist. Somit ergibt sich folgende „Grafik der Besten-Antwort-Linien“ (siehe Abbildung 5):

2.4 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien

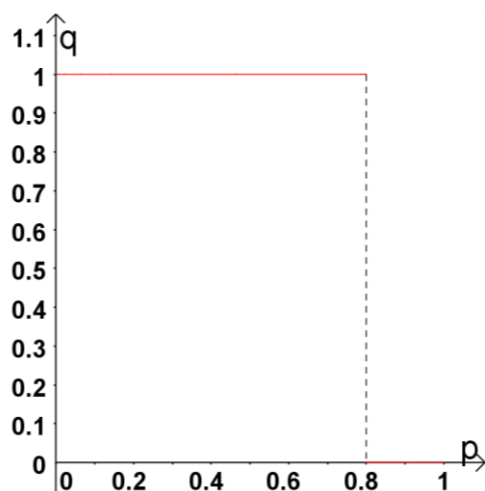


Abbildung 5: Beste-Antwort-Linie für die Lehrerin

Hat p genau den Wert $\frac{4}{5}$ spielt es keine Rolle für welche Strategie sich die Lehrerin entscheidet, da beide Antworten gleich gut sind. Analog lassen sich die Informationen aus Sicht der Schülerin in die „Grafik der Beste-Antwort-Linien“ übertragen (siehe Abbildung 6).

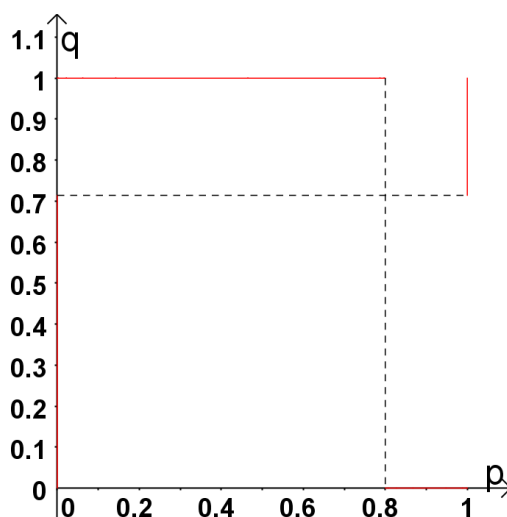


Abbildung 6: Beste-Antwort-Linien für beide Spieler

In dieser Grafik lässt sich sehr gut das Katz und Maus-Spiel dieser Situation erkennen. Befindet man sich im linken unteren Eckpunkt, so befindet sich die Schülerin auf ihrer Besten-Antwort-Linie. Die Lehrerin möchte an dieser Stelle lieber in den linken oberen Eckpunkt springen. Durch die Änderung ihrer Strategie gelangt sie somit auf ihre Beste-Antwort-Linie. Damit nun die Schülerin wieder auf ihre Beste-Antwort-Linie in der rechten oberen Ecke kommt, muss diese wiederum ihre Strategie ändern usw.

Da einander also nie zwei Linien in den Eckpunkten des Einheitsquadrats schneiden, treffen nie zwei beste Antworten in reinen Strategien aufeinander. Betrachtet man jedoch die strichlierten Linien, so lässt sich ein Schnittpunkt im Inneren des Quadrates erkennen. Der Punkt befindet sich bei $(p, q) = \left(\frac{4}{5}, \frac{5}{7}\right)$. Es kreuzen sich also im Inneren des Quadrates beste Antworten mit je einer Wahrscheinlichkeit. Die Schülerin sollte mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{5}$ die Hausübung machen und die Lehrerin die Hausübung mit einer Wahrscheinlichkeit

von $\frac{5}{7}$ kontrollieren. Falls die Spieler einseitig von dieser Strategie abweichen, können sie ihre Auszahlung nicht verbessern. Im Gegensatz zu 2.2 handelt es sich in diesem Fall um ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien**.

2.4.1 Interpretationsmöglichkeiten von Nash-Gleichgewichten in gemischten Strategien

Betrachten wir das Ergebnis des Hausübungsbeispiels. Das Problem bei diesem Ergebnis ist, dass beide Spieler ihre Strategie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit spielen sollten. Allerdings muss die Lehrerin bereits vor Spielbeginn entscheiden, ob sie die Hausübung kontrolliert oder nicht. Analog dazu hat die Schülerin ebenfalls nur die Möglichkeiten ihre Hausübung zu machen oder nicht zu machen. In diesem Abschnitt werden Modellierungsmöglichkeiten für Interpretationen besprochen.

Ein Blick in die Vergangenheit (vgl. ABLEITINGER, 2009, S.117)

Betrachten wir das Hausübungsbeispiel aus der Sicht der Schülerin. Sie muss jeden Tag aufs Neue entscheiden, ob sie die Hausübung macht oder nicht. Ein Erfolg in ihrer Entscheidung ergibt sich beim richtigen Voraussagen des Verhaltens der Lehrerin. Also überlegt sich die Schülerin, wie die Lehrerin sich in der Vergangenheit verhalten hat. Sie erhält somit eine relative Häufigkeit, mit welcher die Lehrerin die Hausübung kontrolliert. Anschließend vergleicht die Schülerin ihren empirischen gewonnenen Wert mit dem berechneten $q_{Nash} = \frac{5}{7}$ und entscheidet so, ob sie die Hausübung macht oder nicht. Sie kann mit dieser Methode jeden Tag ihre Entscheidung treffen.

Es stellt sich nun folgende Fragen:

- Wie wirkt sich das Verhalten der Schülerin auf die Entscheidungen der Lehrerin aus?
- Wie häufig muss die Schülerin ihre Hausübung machen?
- Was passiert auf lange Sicht?

Um diese Fragen beantworten zu können, nehmen wir an, dass beide Spieler genaue Aufzeichnungen über den bisherigen Spielverlauf besitzen. Die Schülerin hat dabei keine Schwierigkeiten, da sie stets weiß, ob die Lehrerin kontrolliert oder nicht. Problematischer wird es bei der Lehrerin, da sie bei „nicht Kontrolle“ keine Informationen über das Verhalten der Schülerin bekommt. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass die Lehrerin in diesem Fall auch über die Entscheidung der Schülerin Bescheid weiß.

Mit Hilfe einer Tabellenkalkulation lässt sich die Situation simulieren. In der ersten Spalte A trägt man die Nummer des wiederholten Spiels ein. In die zweite Spalte B kommt jeweils die Entscheidung der Schülerin. Eins bedeutet, sie macht die Hausübung und Null, sie macht die Hausübung nicht. In der dritten Spalte C steht der durchschnittliche Wert, mit dem sie die Hausübung gemacht hat. Die Spalten vier D und fünf E übernimmt die Lehrerin mit analogen Angaben. Die Durchschnittswerte der Strategien entsprechen den relativen Häufigkeiten p und q , mit denen die jeweiligen Strategien gespielt wurden. Für die Eingabe in die Tabellenkalkulation gilt deshalb für die Spalten B und D Folgendes:

2.4 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien

$$B(x) = \text{Wenn} \left(E(x - 1) < \frac{5}{7}; 0; 1 \right)$$

$$D(x) = \text{Wenn} \left(C(x - 1) < \frac{4}{5}; 1; 0 \right)$$

Der erste Tag beginnt willkürlich. Wir nehmen an, die Schülerin macht ihre Hausübung und die Lehrerin kontrolliert. Das bedeutet die Durchschnittswerte für „kontrollieren“ und „Hausübung machen“ belaufen sich auf eins (vgl. Abbildung 7).

	A	B	C	D	E
1	Spiel Nr.	Schülerin p	Hausübung machen (Durchschnitt)	Lehrerin q	Kontrollieren (Durchschnitt)
2	1	1	1,00	1	1,00

Abbildung 7: Simulation des Hausübungsspiels in einer Tabellenkalkulation

Für jeden weiteren Tag werden die entsprechenden Bedingungen in die Tabellenkalkulation eingegeben (Abbildung 8). Werden die ersten Tage simuliert, lassen sich bereits Schlüsse ziehen.

	A	B	C	D	E
1	Spiel Nr.	Schülerin p	Hausübung machen (Durchschnitt)	Lehrerin q	Kontrollieren (Durchschnitt)
2	1	1	1,00	1	1,00
3	2	1	1,00	0	0,50
4	3	0	0,67	0	0,33
5	4	0	0,50	1	0,50
6	5	0	0,40	1	0,60
7	6	0	0,33	1	0,67
8	7	0	0,29	1	0,71
9	8	1	0,38	1	0,75
10	9	1	0,44	1	0,78
11	10	1	0,50	1	0,80
12	11	1	0,55	1	0,82
13	12	1	0,58	1	0,83
14	13	1	0,62	1	0,85
15	14	1	0,64	1	0,86
16	15	1	0,67	1	0,87
17	16	1	0,69	1	0,88
18	17	1	0,71	1	0,88
19	18	1	0,72	1	0,89
20	19	1	0,74	1	0,89
21	20	1	0,75	1	0,90
22	21	1	0,76	1	0,90
23	22	1	0,77	1	0,91
24	23	1	0,78	1	0,91
25	24	1	0,79	1	0,92
26	25	1	0,80	1	0,92
27	26	1	0,81	0	0,88
28	27	1	0,81	0	0,85
29	28	1	0,82	0	0,82
30	29	1	0,83	0	0,79

Abbildung 8: Simulation der ersten 29 Tage

2 Spiele in Normalform

Die Schülerin wiegt sich am dritten Tag nach einmaligen „nicht kontrollieren“ in Sicherheit und macht ihre Hausübung zum ersten Mal nicht. An diesem Tag hat sie Glück und kommt mit ihrer Strategie durch. Die Lehrerin merkt dies und entschließt sich am vierten zu korrigieren und erwischt die nachlässige Schülerin. Die Schülerin hält dies möglicherweise für Pech und bleibt ihrer Strategie treu. Erst am achten Tag entscheidet die Schülerin ihrer Hausübung wieder zu machen, nachdem sie viermal erwischt wurde. Nun folgen auffällige 18 Tage an denen die Schülerin ihre Hausübung macht und die Lehrerin kontrolliert. Am 26. Tag ändert die Lehrerin wiederum auf nicht korrigieren, da sie nun der Schülerin wieder vertraut (vgl. Abbildung 8).

In der Tabelle lässt sich ablesen, dass dieser (einseitige) Strategiewechsel immer dann stattfindet, wenn die relative Häufigkeiten p und q den Wert des zuvor berechneten Nash-Gleichgewichtes über- oder unterschreiten. Ein Blick auf den zeitlichen Verlauf des Spiels bietet weitere Einblicke in das Gleichgewicht des Spiels (siehe Abbildung 9).

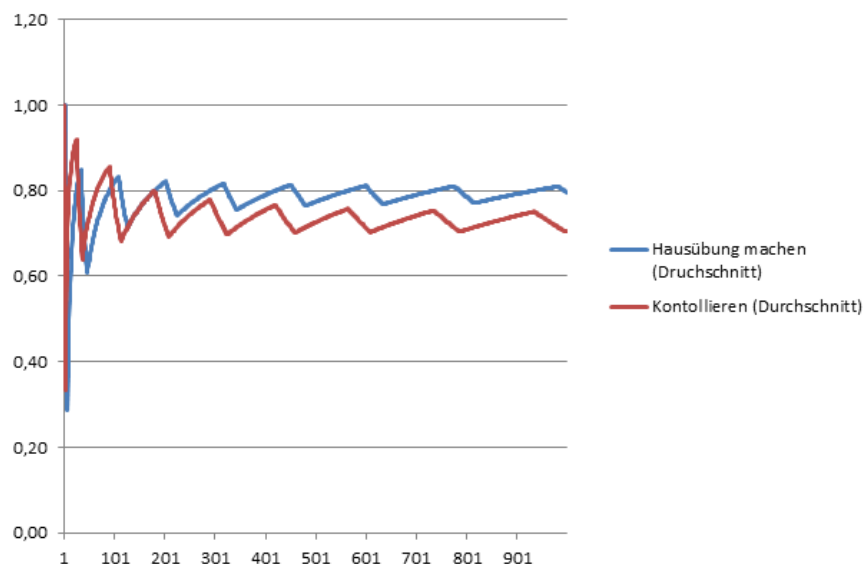


Abbildung 9: Zeitlicher Verlauf des Spiels nach 100 Tagen

Im zeitlichen Verlauf des Spiels lässt sich ein oszillierendes Verhalten der relativen Häufigkeiten erkennen. Auffällig hierbei ist, dass sie mit kleiner werdender Amplitude um den Gleichgewichtswert pendeln.

Das Gleichgewicht stellt sich im Laufe des Spiels von selbst ein. In $\frac{5}{7}$ der Tage kontrolliert die Lehrerin und in $\frac{4}{5}$ der Tage macht die Schülerin die Hausübung. Somit ist die Interpretation, dass beide Spieler ihre Strategien mit gewissen Wahrscheinlichkeiten spielen sollen, obwohl sie jeden Tag nur eine von zwei Entscheidungen treffen können, durchaus sinnvoll.

Anteil einer Gesamtheit

Aus Sicht der Lehrerin kann das Ergebnis $p_{Nash} = \frac{4}{5}$ auch als relative Häufigkeit für die Strategiewahl aller Schülerinnen und Schüler der Klasse gedeutet werden. Das würde für die Lehrerin bedeuten, dass $\frac{4}{5}$ der Schülerinnen und Schüler die Hausübung machen und die restlichen $\frac{1}{5}$ nicht. Diese Interpretation des berechneten Nash-Gleichgewichtes in gemischten Strategien bietet sich geeignet für den Einsatz im Unterricht an und bietet den Schülerinnen und Schülern einen guten Einblick in diese Form der Spiele.

2.4.2 Weitere Umsetzungen für die Schule

Beispiel II.11 - Schwarzfahren (vgl. ABLEITINGER, 2009)

Franz fährt jeden Tag mit der Straßenbahnlinie O in die Arbeit. Er ist täglich mit der Frage konfrontiert, ob er sich ein Ticket kaufen oder schwarzfahren soll. Ein Ticket kostet bei den Wiener Linien für den Weg zur Arbeit und retour 4,4 Euro. Falls er beim Schwarzfahren erwischt wird schlägt sich dies mit 103 Euro zu Buche (vgl. Internetquelle [1]). Karl ist bei den Wiener Linien Kontrolleur-Koordinator und unter anderem für die Straßenbahnlinie O zuständig. Er kann sich jeden Tag entscheiden, ob in der Straßenbahnlinie O kontrolliert wird oder nicht.

Fragestellungen:

1. Modelliere die Situation mit einer Bimatrix!
2. Argumentiere, wieso du bestimmt Auszahlungswerte gewählt hast! Versetze dich dazu in die Situation der beiden Spieler!
3. Finde Nash-Gleichgewichte!
4. Veranschauliche die Gleichgewichte mittels Beste-Antwort-Linien Diagramm!
5. Interpretiere dein Ergebnis!

Ad 1.:

Eine mögliche Bimatrix für diese Situation sieht folgendermaßen aus. Dabei werden die jeweils besten Antworten fett markiert (vgl. Abbildung 10).

<i>Franz Karl</i>	kontrolliert	kontrolliert nicht
fährt schwarz	-8 3	1 -2
zahlt	0 -1	-1 0

Abbildung 10: Bimatrix des Schwarzfahrer-Beispiels

Dies ist nur **eine** Möglichkeit, wie diese Situation dargestellt werden kann. Die Schülerinnen und Schüler können selbst überlegen, wie Franz und Karl die jeweiligen Situationen bewerten. Wichtig ist, dass sie ihre Bimatrix in Punkt zwei begründen.

2 Spiele in Normalform

Ad 2.:

Die schlechteste Auszahlung bekommt Franz, wenn er kontrolliert wird und keine Fahrkarte besitzt. Er muss einen hohen Geldbetrag bezahlen und schämt sich in der öffentlichen Situation erwischt worden zu sein. Er hätte in diesem Fall besser einfach ein Ticket kaufen soll. Karl wiederum freut sich, da er einen Schwarzfahrer erwischt hat. Dies bringt ihm die größte Auszahlung, weil er für jeden kontrollierten Schwarzfahrer eine Provision erhält. Kontrolliert Karl Franz, welcher aber eine Fahrkarte besitzt, so fällt dieses Honorar weg.

Wird Franz nicht kontrolliert, obwohl er eine Fahrkarte gekauft hat, so ärgert er sich über die 4,4 Euro zusätzlich ausgegebenen Euro. Für Karl hat dies weder eine positive, noch negative Auswirkung. Wird Franz nicht kontrolliert und er fährt schwarz, dann freut ihn die Ersparnis von 4,4 Euro. Karl ärgert sich in dieser Situation, da er seine Provision nicht erhält.

Schülerinnen und Schüler können bei dieser Frage zu gänzlich anderen Interpretationen kommen. Möglicherweise spielt für Franz Geld keine wichtige Rolle und sieht es daher nicht so schlimm beim Schwarzfahren erwischt zu werden. Oder Karl erhält keine Provision, und sieht sich nur als Verfechter der Gerechtigkeit.

Es wäre auch möglich die Auszahlungen direkt in Euro anzugeben (vgl. Abbildung 11).

<i>Franz Karl</i>	kontrolliert	kontrolliert nicht
fährt schwarz	2 -103	-2 0
zahlt	0 -4,4	2 -4,4

Abbildung 11: Bimatrix des Schwarzfahrer-Beispiels mit Auszahlungen in Euro

Die Interpretation ist ähnlich zur anderen Bimatrix. Bei der Strategiekonfiguration (*zahlt; kontrolliert nicht*) kommt für Karl die positive Auszahlung zustande, weil er in dieser Zeit eine andere Person beim Schwarzfahren erwischen kann.

Für folgende Antworten übernehme ich die Bimatrix aus „Ad 1.“.

Ad 3.:

Zuerst überlegen wir, ob dieses Spiel ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien besitzt. Führt Franz schwarz und Karl kontrolliert ihn, wäre es für Franz besser das Ticket zu bezahlen. Treffen allerdings die Strategien Zahlen und kontrollieren aufeinander, bekäme Karl die bessere Auszahlung, wenn er nicht kontrolliert hätte. Kontrolliert Karl nicht, sollte Franz aber besser schwarzfahren. Für den Fall, dass Franz schwarzfährt und Karl nicht kontrolliert, sollte Karl für eine bessere Auszahlung seine Strategie ändern. Somit landen wir wieder bei dem Ausgangspunkt („schwarzfahren“; „kontrollieren“) und dieselben Überlegungen beginnen von Neuem. Somit hat dieses Spiel kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

2.4 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien

Die Suche nach Nash-Gleichgewichten in gemischten Strategien erfolgt nach der Methode in Beispiel II.10 (Fortsetzung).

Angenommen Franz wird mit der Wahrscheinlichkeit q kontrolliert und mit $1 - q$ nicht kontrolliert. Somit ergibt sich für ihn eine Auszahlung A_s und A_z :

$$A_s = -8 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 9 \cdot q$$

und

$$A_z = 0 \cdot q - 1 \cdot (1 - q) = q - 1$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen ergibt sich: $q = \frac{1}{5}$

Wenn Karl mit $q < \frac{1}{5}$ kontrolliert, ist es für Franz besser schwarzzufahren. Kontrolliert Karl hingegen mit $q > \frac{1}{5}$, wäre eine Fahrkarte kaufen für Franz die bessere Entscheidung.

Für Karl ergeben sich die Auszahlungen A_k und $A_{\neg k}$ durch die Annahme, dass Franz mit der Wahrscheinlichkeit p schwarzfährt:

$$A_k = 3 \cdot p - 1 \cdot (1 - p) = 4 \cdot p - 1$$

und

$$A_{\neg k} = -2 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = -2 \cdot p$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen ergibt sich: $p = \frac{1}{6}$

Fährt Franz nun mit $p < \frac{1}{6}$ schwarz, so ist es für Karl besser nicht zu kontrollieren. Allerdings sollte Karl kontrollieren, wenn Franz mit $p > \frac{1}{6}$ schwarzfährt.

Somit ergibt sich als Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien: $(p_{Nash}, q_{Nash}) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right)$

Fährt Franz mit der Wahrscheinlichkeit seines Nash-Gleichgewichtes schwarz, so spielt es für Karl keine Rolle, ob er kontrolliert oder nicht. Analog gilt dies, wenn Karl mit der Wahrscheinlichkeit seines Nash-Gleichgewichtes kontrolliert.

Ad 4.: Analog zu Beispiel II.10 (Fortsetzung)

Ad 5.:

Durch einen Blick in die Vergangenheit lässt sich der relative Anteil der Strategien berechnen. Notiert zum Beispiel Franz jeden Tag, ob er kontrolliert wurde oder nicht, kann er die relative Häufigkeit von Karls Strategien bestimmen. Liegt die relative Häufigkeit von (*kontrollieren*) dabei unter dem entsprechenden Wert des Nash-Gleichgewichtes $\frac{1}{5}$, so ist es für Franz klüger schwarzzufahren. Analog kann sich dies Karl überlegen, wobei es für ihn nur theoretisch möglich ist das tägliche Fahrverhalten von Franz zu protokollieren.

Karl hat zusätzlich noch die Möglichkeit Franz' Nash-Gleichgewichtswert auf die Gesamtheit der Passagiere umzusetzen. Sofern alle Passagiere Franz' Überlegungen teilen, kann Karl davon ausgehen, dass $\frac{1}{6}$ der Fahrgäste schwarzfahren.

Bemerkung für den Unterricht

Sowohl das Hausübungsbeispiel (Beispiel II.10), als auch das „Schwarzfahrer“-Beispiel (Beispiel II.11) lassen sich mit der gesamten Klasse umsetzen. Folgender Vorschlag gilt für das „Hausübungsbeispiel“ analog.

Eine Person in der Klasse wird als Schaffner oder Schaffnerin bestimmt. Der Rest der Klasse übernimmt die Rolle der Passagiere. Jeder Passagier bekommt zwei Karten. Auf der einen Karte steht „Ticket“ und auf der anderen „Schwarzfahren“. Zu Beginn des Spiels muss sich jeder Passagier für eine Karte entscheiden. Die übrigen Karten werden eingesammelt. Anschließend geht der Schaffner oder die Schaffnerin durch die Klasse und führt beliebige Ticketkontrollen durch. Unabhängig von der Wahl der Strategien werden bei jedem Aufeinandertreffen von Schaffner oder Schaffnerin mit einem Passagier die Strategien aufgedeckt. Somit weiß jeder Spieler, welche Auszahlung er gemäß Abbildung 10 für seine Strategie bekommen würde.

In der zweiten Phase des Spiels bekommen alle Spieler ein gewisses Startkapital. Ziel jedes Spielers ist nun dieses Geld nicht zu verlieren und möglichst zu maximieren. Die Lehrperson dient als Bank, die die Auszahlungen an die Spieler tätigt. Die Schülerinnen und Schüler können durch wiederholtes Spielen das Wesen von gemischten Gleichgewichten erlernen. So können beide Parteien über den Spielverlauf buchführen und aufgrund vergangener Entscheidungen ihre Strategiewahl treffen. Zusätzlich können sie nach ihrem berechneten Wert für das gemischte Nash-Gleichgewicht spielen und so ihre Strategiewahl anpassen. Am Ende des Spiels kann ein Vergleich der Endbeträge zwischen Spielern, die das berechnete gemischte Nash-Gleichgewicht nutzten, jenen die nach Gefühl entschieden und möglicherweise sogar zufällig gewählt haben, gemacht werden.

Beispiel II.12 - Elfmeter (vgl. HAUER-TYPPELT, 2009, S.78-79)

Betrachten wir folgende (vereinfachte) Elfmetersituation. Ein Schütze tritt zum Elfmeter an, mit dem Ziel ein Tor zu erzielen. Er hat drei Möglichkeiten auf das Tor zu schießen (*links, mittig, rechts*). Ihm gegenüber steht der Torwart, der natürlich das Tor verhindern möchte. Er hat die Möglichkeiten sich *links, mittig oder rechts* zu werfen (vgl. Abbildung 12).

<i>Torwart /Schütze</i>	links	mittig	rechts
links	3 -4	-3 4	-1 3
mittig	-2 2	4 -6	-2 2
rechts	-1 3	-3 4	3 -4

Abbildung 12: Bimatrix des Elfmeter-Beispiels

2.4 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien

Die Werte der Bimatrix sind subjektiv. Zusätzlich zum Erfolg beziehungsweise Misserfolg der Spieler kommt ein Faktor der „Blamage“. Der Schütze hat die Möglichkeit mit einem Schuss in Mitte seine höchste Auszahlung (+4) zu erzielen, wenn der Torwart sich nach *links* oder *rechts* wirft. Durch diese Aktion wäre der Torwart blamiert und dieser erhält seine geringste Auszahlung (−3). Allerdings kann der Torwart im Gegenzug seine höchste Auszahlung (+4) erzielen, wenn er bei einem Schuss in die Mitte einfach stehen bleibt und fängt. In diesem Fall war der Schütze überheblich und schämt für seinen schlechten Schuss (−6).

Wie sollen Torwart und Schütze am besten entscheiden?

Es ist intuitiv klar, dass es in diesem Beispiel kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien gibt. Das würde bedeuten, es gibt eine Strategiekombination, sodass keiner der beiden Spieler von ihrer Strategie einseitig abweichen. Es lässt sich jedoch überprüfen, ob ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien existiert.

Nehmen wir an, dass der Schütze mit einer Wahrscheinlichkeit p nach *links* schießt und mit der Wahrscheinlichkeit q nach *rechts*. Daraus ergibt sich, dass er mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p - q$ in die *Mitte* schießt. Mit diesen Informationen ergeben sich folgende Auszahlungen A_T für die Strategien des Torwarts:

I: Der Torwart wirft sich nach *links*:

$$A_T = 3p - 3(1 - p - q) - q \Leftrightarrow A_T = 6p + 2q - 3$$

II: Der Torwart bleibt *mittig*:

$$A_T = -2p + 4(1 - p - q) - 2q \Leftrightarrow A_T = -6p - 6q + 4$$

III: Der Torwart wirft sich nach *rechts*:

$$A_T = -p - 3(1 - p - q) + 3q \Leftrightarrow A_T = 2p + 6q - 3$$

Es handelt sich hier um lineare Gleichungen mit zwei Variablen. Im Gegensatz zu 2.4 wird nun ein Schnittpunkt der drei Ebenen ermittelt. Durch Gleichsetzen von I=II und I=III erhält man:

$$p = q = \frac{7}{20} \text{ und } 1 - p - q = \frac{6}{20}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Torwart sich nach *links* wirft wird mit s angenommen und die Wahrscheinlichkeit, dass er sich nach *rechts* wirft mit t . In der *Mitte* verharret der Torwart demnach mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - s - t$.

Analog gilt für die Auszahlungen A_S des Schützen:

I: Der Schütze schießt nach *links*:

$$A_S = -4s + 2(1 - s - t) + 3t \Leftrightarrow A_S = -6s + t + 2$$

II: Der Schütze schießt *mittig*:

$$A_S = 4s - 6(1 - s - t) + 4t \Leftrightarrow A_S = 10s + 10t - 6$$

III: Der Schütze schießt nach links:

$$A_S = 3s + 2(1 - s - t) - 4t \Leftrightarrow A_S = s - 6t + 2$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen I=II und I=III erhält man:

$$s = t = \frac{8}{25} \text{ und } 1 - s - t = \frac{9}{25}$$

Durch dieses Ergebnis lässt sich sagen, dass ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien vorliegt, wenn der Torwart seine Strategien mit den Wahrscheinlichkeiten $(s, 1 - s - t, t) = (\frac{8}{25}, \frac{9}{25}, \frac{8}{25})$ und der Schütze seine Strategien mit den Wahrscheinlichkeiten $(p, 1 - p - q, q) = (\frac{7}{20}, \frac{6}{20}, \frac{7}{20})$ spielt. Die Interpretation dieses Ergebnisses ist vergleichbar mit jener von Beispiel II.10 in Abschnitt 2.4.

Die *interessante Komponente* bei diesem Spiel ist, dass hier ein allgemeines Zweipersonenspiel vorliegt, bei welchem die Spieler jeweils aus drei Strategien wählen können. Die Suche nach einem Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien erfolgt dabei analog zu 2.4 (Beispiel II.10).

Beispiel II.13 - Klassifizierung spieltheoretischer Situationen (vgl. ABLEITINGER UND HAUERTYPELT, 2011)

Diese Aufgabe könnte als Abschluss des Themas „Spiele in Normalform“ dienen. Die zentrale Frage lautet: „Können reale Entscheidungssituationen, die durch 2x2-(Bi-)Matrizen repräsentiert werden, klassifiziert werden?“ Ausgehend von bereits besprochenen Beispielen stellt sich folgende zentrale Frage:

- Wovon hängt die Existenz eines Nash-Gleichgewichtes in reinen oder gemischten Strategien ab?

Um zu einer schrittweisen Antwort auf diese Frage zu gelangen, betrachten wir zunächst Entscheidungssituationen *eines* Spielers. Seine Bedeutungen sind die Auszahlungen a_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (siehe Abbildung 13).

<i>Spieler 1</i> <i>Spieler 2</i>	Strategie B_1	Strategie B_2
Strategie A_1	a_1	a_2
Strategie A_2	a_3	a_4

Abbildung 13: Allgemeine Bimatrix mit den Auszahlungen für Spieler 1

Die Matrixeinträge bestimmen, ob die Geraden der Auszahlungsfunktion einen Schnittpunkt haben oder nicht. Da die Geraden stets abhängig von der Wahrscheinlichkeit q der Strategiewahl des Gegenspielers sind, kommt es nur darauf an, wie a_1 und a_3

2.4 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien

beziehungsweise a_2 und a_4 zueinanderstehen. Die Auszahlungsfunktionen für Spieler 1 sehen wie folgt aus:

$$U_{A1} = a_1 \cdot q + a_2 \cdot (1 - q) = a_2 + (a_1 - a_2) \cdot q$$

und

$$U_{A2} = a_3 \cdot q + a_4 \cdot (1 - q) = a_4 + (a_3 - a_4) \cdot q$$

Der Anfangs- und der Endpunkt der Geradenstücke spiegeln die Auszahlungen bei $q = 1$ und $q = 0$ wieder. Das Aussehen der Graphen ist analog zu Beispiel II.10 (Fortsetzung).

Wenn gilt:

$$\text{Fall 1: } a_1 > a_3 \text{ und } a_2 > a_4$$

oder

$$\text{Fall 2: } a_1 < a_3 \text{ und } a_2 < a_4$$

liegt ein Geradenstück stets über dem anderen Geradenstück. Inhaltlich bedeutet dies, dass eine Strategie von Spieler 1 dominant ist. Die Graphen der Auszahlungsfunktionen für den ersten Fall sind in Abbildung 14 dargestellt.

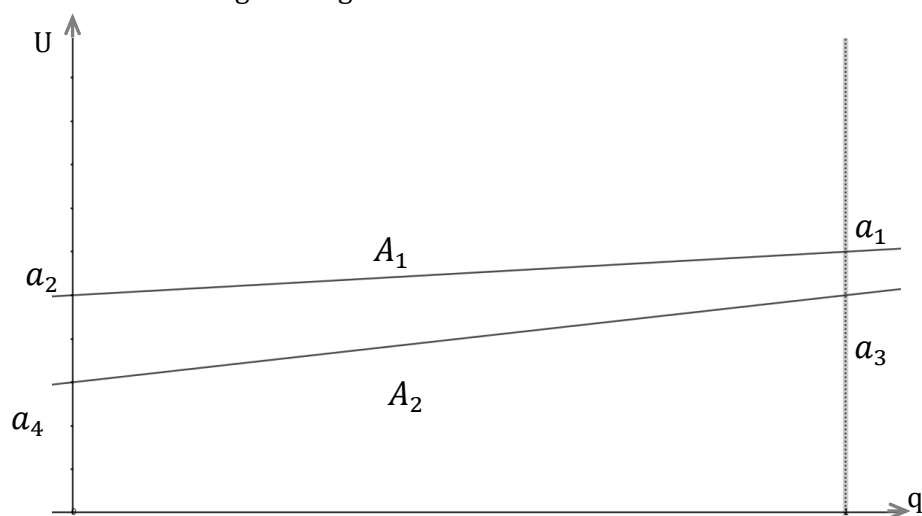


Abbildung 14: Graphen der Auszahlungsfunktionen für Spieler 1 (Fall 1)

Damit einander die Geradenstücke schneiden (vgl. Abbildung 15), muss gelten:

$$\text{Fall 3: } a_1 < a_3 \text{ und } a_2 > a_4$$

oder

$$\text{Fall 4: } a_1 > a_3 \text{ und } a_2 < a_4$$

Inhaltlich bedeutet dies, dass die optimale Strategiewahl von Spieler 1 abhängig von der Wahrscheinlichkeit q der Strategiewahl von Spieler 2 ist. Schneiden die beiden Geradenstücke an der Stelle q_1 , ist es egal welche Strategie von Spieler 1 gewählt wird, wenn Spieler 2 mit der Wahrscheinlichkeit q_1 die Strategie B_1 wählt.

2 Spiele in Normalform

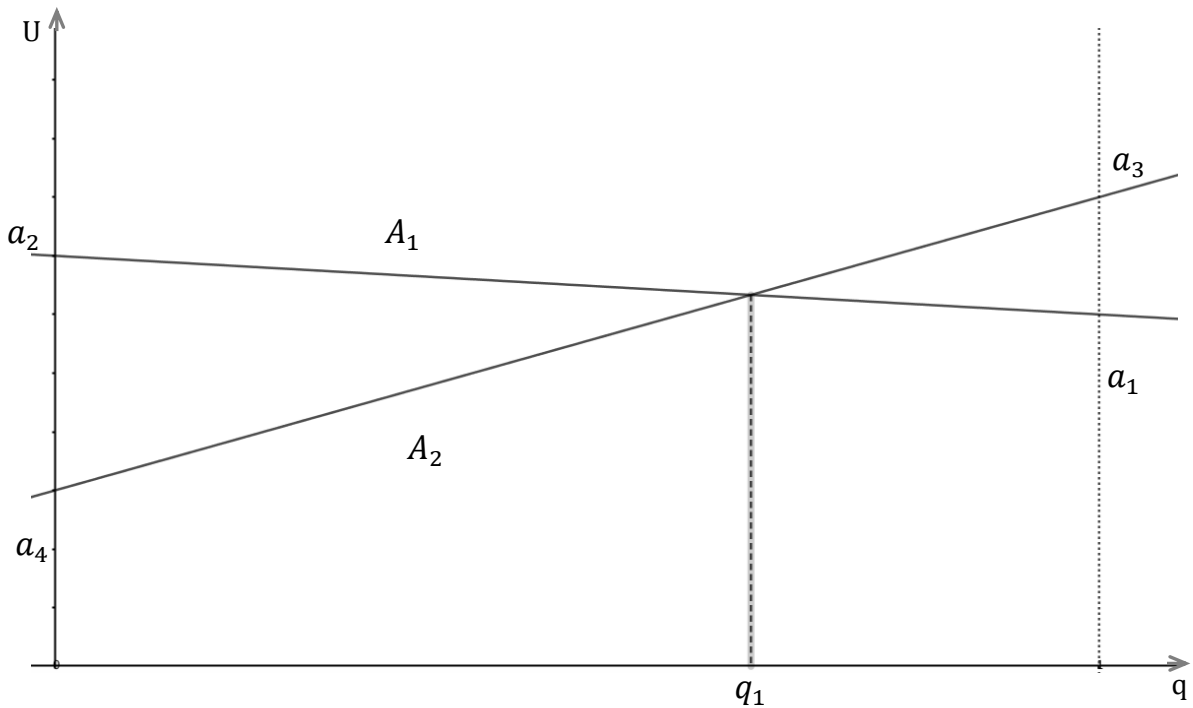


Abbildung 15: Graphen der Auszahlungsfunktionen für Spieler 1 (Fall 3)

Mit diesen beiden Fällen sind die meisten 2x2-Spiele bereits abgedeckt. Allerdings gibt es noch Spezialfälle, die untersucht werden müssen. So besteht die Möglichkeit, dass gilt $a_1 = a_3$ oder $a_2 = a_4$. Wir betrachten nur den ersten Fall $a_1 = a_3$, da die Argumentation für $a_2 = a_4$ analog ist.

Für diesen Fall wird wiederum zwischen zwei Fällen unterschieden. Erstens:

$$a_2 > a_4 \text{ oder } a_2 < a_4$$

Gilt zwischen a_2 und a_4 eine größer- oder kleiner Relation, so schneiden die Graphen der Auszahlungsfunktion in $q = 1$.

Zweitens:

$$a_2 = a_4$$

Der letzte Fall $a_2 = a_4$ ergibt zwei idente Auszahlungsfunktionen. Inhaltlich ist dieser Fall nicht sehr interessant, da Spieler 1 keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Dieser Fall wird für die weitere Klassifizierung nicht weiter beachtet.

Nachdem alle Fälle bekannt sind, ist es möglich die Graphen der Auszahlungsfunktionen in „Beste-Antwort-Linien“ zu übersetzen. Eine vollständige Liste bildet Abbildung 16.

2.4 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien

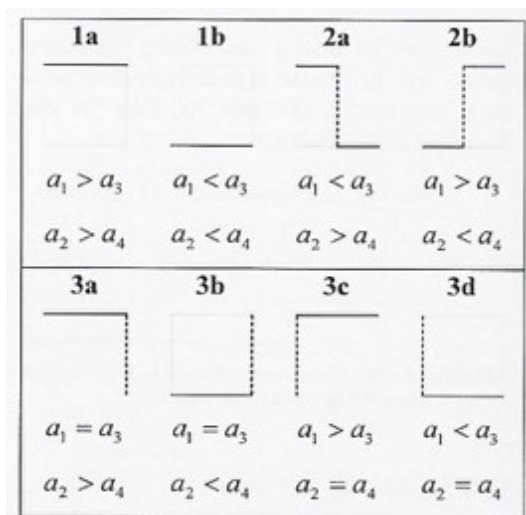


Abbildung 16: Sammlung der möglichen „Beste-Linien-Quadrate“ für Spieler 1 (ABLEITINGER & HAUER-TYPPELT, 2008, S. 8)

Um nun zu einer vollständigen Betrachtung von 2x2-Matrixspielen zu gelangen, muss der zweite Spieler hinzugefügt werden. Mit dem zweiten Spieler ergibt sich folgende 2x2-Matrix (vgl. Abbildung 17):

<i>Spieler 1</i> <i>Spieler 2</i>	Strategie B_1	Strategie B_2
Strategie A_1	a_1	a_2
Strategie A_2	a_3	a_4

Abbildung 17: Allgemeine 2x2-Matrix eines Zweipersonen-Spiels

Analog zu Spieler 1 können nun die Auszahlungsfunktionen für Spieler 2 aufgestellt werden.

$$U_{B1} = b_1 \cdot p + b_2 \cdot (1 - p) = b_2 + (b_1 - b_2) \cdot p$$

und

$$U_{B2} = b_3 \cdot p + b_4 \cdot (1 - p) = b_4 + (b_3 - b_4) \cdot p$$

Die Matriceinträge b_1, b_2, b_3 und b_4 bestimmen, ob die Graphen der Auszahlungsfunktionen einen Schnittpunkt haben oder nicht. Somit resultieren für Spieler 2 ebenfalls acht mögliche Fälle. Diese finden sich in Abbildung 18.

2 Spiele in Normalform

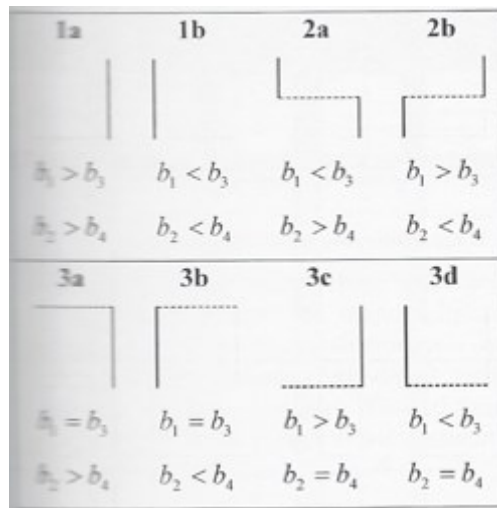


Abbildung 18: Sammlung der möglichen „Beste-Linien-Quadrate“ für Spieler 2 (ABLEITINGER & HAUER-TYPPELT, 2008, S.9)

Nachdem nun alle „Beste-Antwort-Linien“-Grafiken bekannt sind, lassen sich durch Zusammenführen der Grafiken beider Spieler alle Kombinationsmöglichkeiten abdecken. Alle Kombinationsmöglichkeiten werden in Abbildung 19 angeführt.

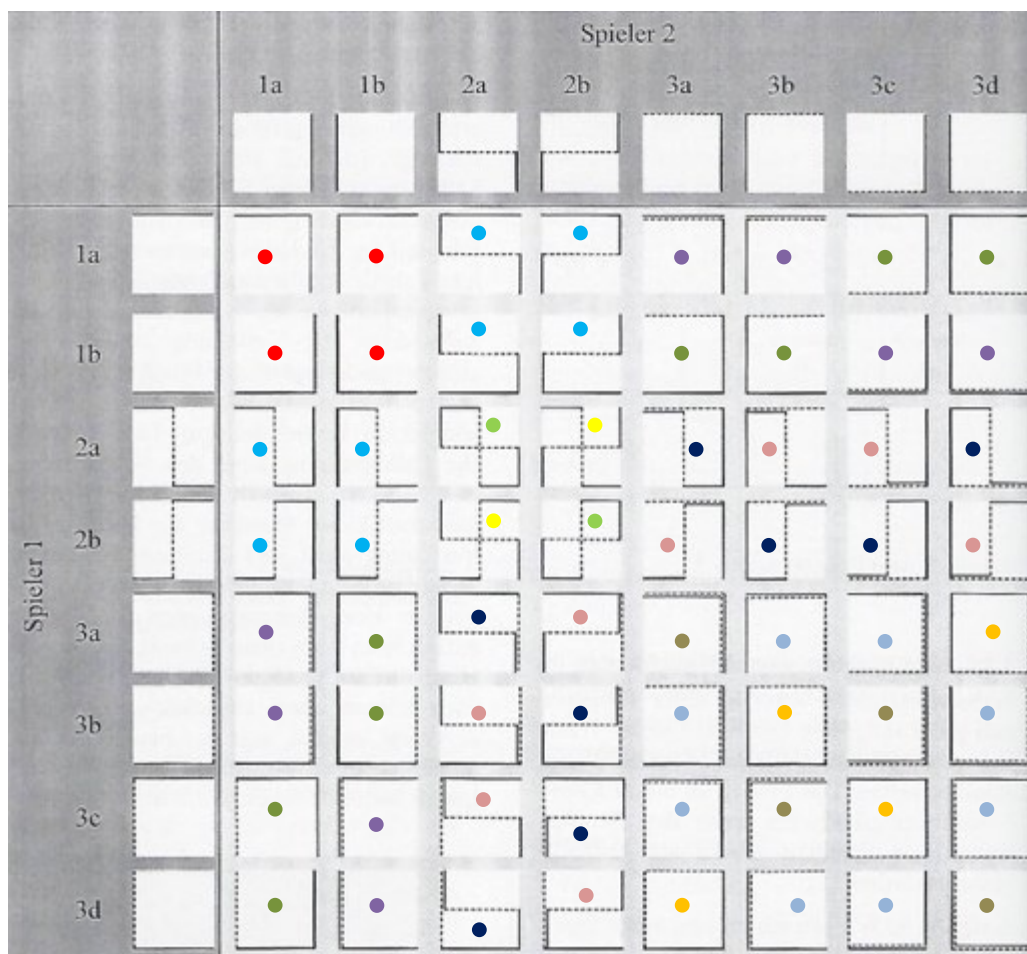


Abbildung 19: Alle Lösungsmöglichkeiten von 2x2-Matrix-Spielen (ABLEITINGER & HAUER-TYPPELT, 2008, S.10)

2.4 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien

Für den Einsatz in der Schule empfehlen Ableitinger und Hauer-Typelt die Sammlungen der jeweiligen „Besten-Antworten-Linien“-Grafiken der beiden Spieler auf Glaskärtchen zu zeichnen. Dadurch können die Schülerinnen und Schüler durch Kombinieren selbst auf alle Lösungsmöglichkeiten kommen.

Um die Klassifizierung abzuschließen, muss erwähnt werden, dass die Anordnung der Strategien der einzelnen Spieler vertauscht werden kann. So kann die „Beste-Antwort-Linien“-Grafik „1a“ von Spieler 1 durch Vertauschen der Strategien in die Grafik „1b“ transformiert werden. Analog gilt dies für Spieler 2. Somit ergibt eine Vertauschung der Strategien bei Spieler 1 eine horizontale Spiegelung der „Beste-Antwort-Linien“-Grafik, während es bei Spieler 2 analog zu einer vertikalen Spiegelung kommt. Vertauscht man die Strategien beider Spieler, so kommt es zu einer Spiegelung bezüglich der ersten Medianen. Vergleicht man die die Lösungen $1a-1a$ mit $1b-1b$ ist diese Spiegelung zu erkennen.

Nun wurden alle Maßnahmen gesetzt, um die Klassifizierung abzuschließen. In Abbildung 19 lassen sich elf verschiedene Klassen erkennen. Die Klassen wurden in der Abbildung mit verschiedenen Farben markiert. Jene „Beste-Antwort-Linien“-Grafiken mit gleichen Farbpunkten gehören zur selben Klasse.

Für die Schülerinnen und Schüler bedarf es nun noch einer inhaltlichen Besprechung der verschiedenen Klassen. Schneiden zwei durchgehende Linien in einem Punkt, handelt es sich um ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. Bei einem Schnittpunkt zweier punktierter Linien spricht man von einem gemischten Nash-Gleichgewicht. Diese zwei Fälle sollten den Schülerinnen und Schülern beim Absolvieren dieser Aufgabe bereits bekannt sein. Neu hinzu kommt der Fall, dass einander eine durchgehende und eine punktierte Linie überlagern. In diesem Fall kommt es zu einem kontinuierlichen Gleichgewicht.

Für den Einsatz in der Schule empfiehlt sich bei den einzelnen Schritten die Schülerinnen und Schüler selbstständig überlegen zu lassen. Sie bekommen dadurch ein Gespür für die verschiedenen Parameter eines 2x2-Matrix-Spiels. Mit diesem Wissen lassen sich bereits gelöste und neue Spiele aus einem neuen Blickwinkel betrachten. So handelt es sich zum Beispiel beim „Schwarzfahrer-“ und „Hausübungs“-Beispiel spieltheoretisch um dieselbe Situation mit einem anderen Kontext. Weiterführend lassen sich weitere neu Kontexte mit dieser Tabelle schnell analysieren.

Exkurs: Interpretation des kontinuierlichen Gleichgewichts

Wie in Beispiel II.13 beschrieben, tritt ein kontinuierliches Gleichgewicht auf, wenn in der Besten-Antwort-Linien Grafik eine durchgezogene und eine unterbrochene Linie überlappen (vgl. Abbildung 20).

2 Spiele in Normalform

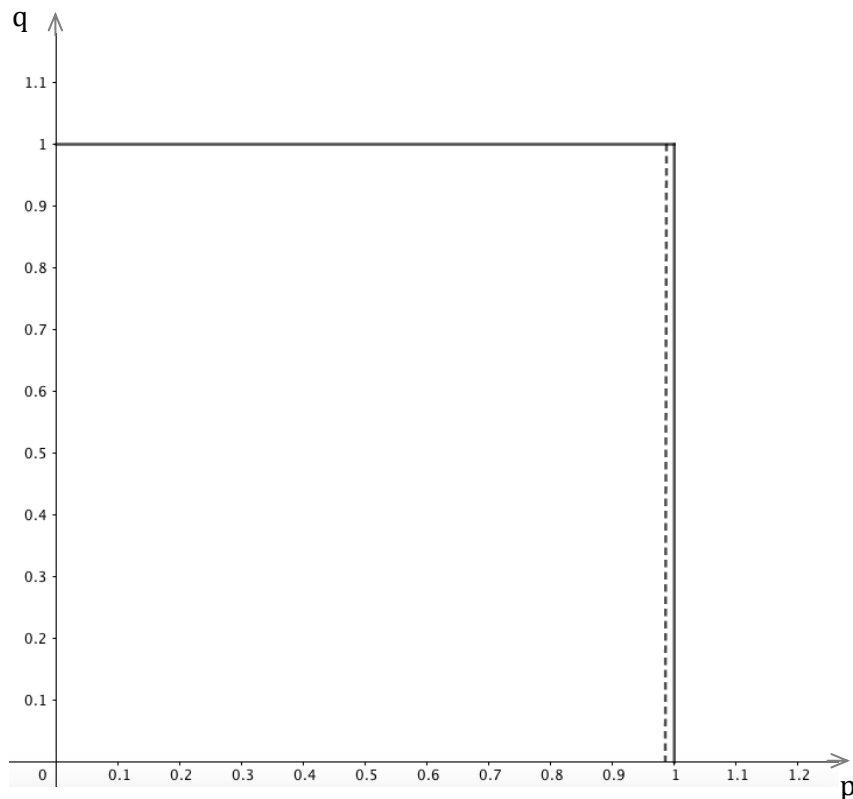


Abbildung 20: Beste-Antwort-Linien mit einem kontinuierlichen Gleichgewicht

Die Variablen p und q geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Strategie eines Spielers gespielt wird. Wir nehmen nun an, dass Spieler 1 „ p “ und Spieler 2 „ q “ zugeordnet werden. Betrachten wir zunächst Spieler 1. Dieser hat eine dominante Strategie. Für alle $q \in [0; 1]$ sollte die Strategie mit $p = 1$ immer gespielt werden. Spielt er diese Strategie, befindet er sich immer auf seiner Linie der besten Antworten.

Für Spieler 2 zeichnet sich ein ähnliches Bild ab. Für alle $p \in [0; 1)$ hat er eine dominante Strategie mit $q = 1$. Für den Fall $p = 1$ ist es jedoch egal, welche Strategie er spielt. Es spielt hierbei auch keine Rolle, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Strategien gespielt werden. Spieler 1 spielt, unabhängig von der Strategiewahl von Spieler 2, ein optimales Spiel.

Da sich bei $p = 1$ eine dominante Strategie von Spieler 1 befindet, ergibt sich ein Nash-Gleichgewicht mit $(p_{Nash}, q_{Nash}) = (1, x)$ mit $x \in [0; 1]$. Hierbei handelt es sich nun um ein **kontinuierliches Nash-Gleichgewicht**, weil x jeden Wert im Intervall $[0; 1]$ annehmen kann.

Beispiel II.14 – Weitere Aufgabenstellungen

1) Gegeben sei folgende Bimatrix:

<i>Spieler 1</i> <i>Spieler 2</i>	Strategie B_1	Strategie B_2
Strategie A_1	-1 2	1 -4
Strategie A_2	4 -1	-2 1

- Ändere den markierten Wert so, dass ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien existiert. Welche Werte kann dieser Eintrag dafür annehmen?
- Erfinde einen Kontext für diese Bimatrix.

Ad a):

Wird der markierte Wert durch die Variable x ersetzt, so kann er die Werte $L = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 1\}$ annehmen um ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien zu erhalten.

- 2) Gegeben sind zwei Graphen von Auszahlungsfunktionen von Spieler 1 (vgl. Abbildung 21).

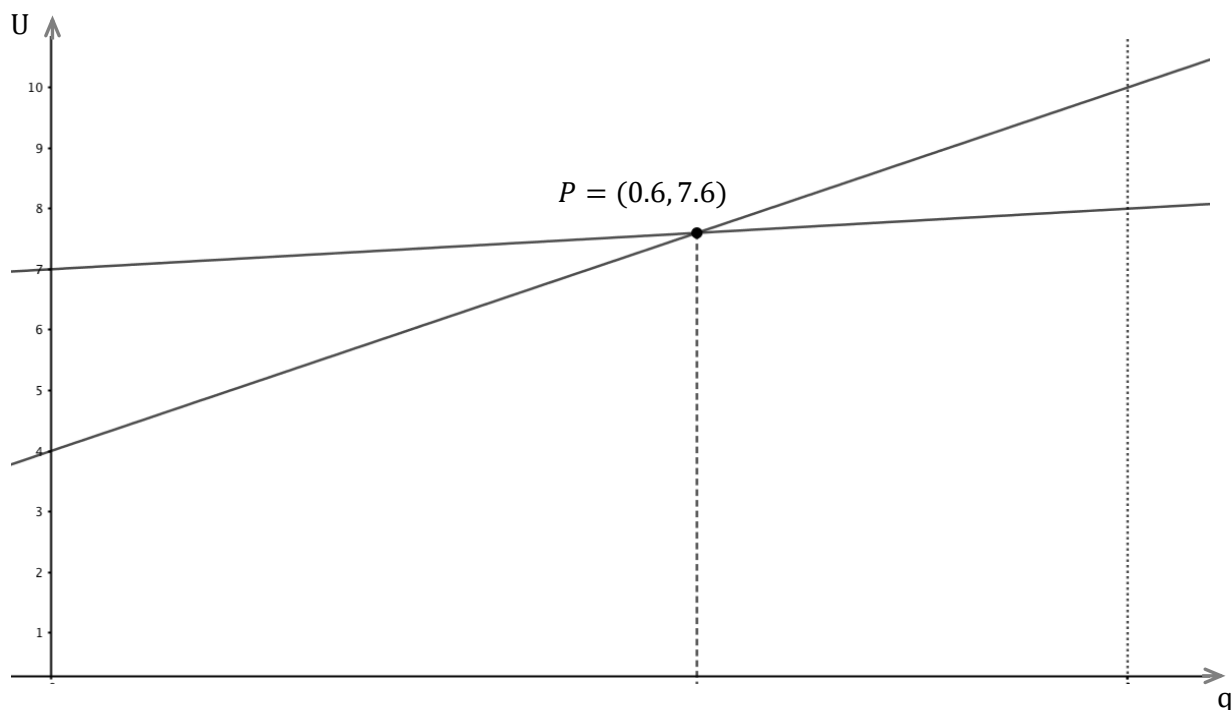


Abbildung 21: Graph zweier Auszahlungsfunktionen von Spieler 1

- Ermittle eine zugehörige Bimatrix zu diesem Spiel
- Lies die Koordinaten des Punktes P ab. Interpretiere dessen Werte der q - und U -Achse.
- Erkläre, wie aus den Auszahlungsfunktionen die Arten von Nash-Gleichgewichten ersichtlich sind.

2 Spiele in Normalform

Ad a):

Eine mögliche Bimatrix für dieses Spiel sieht folgendermaßen aus:

<i>Spieler 1</i> <i>Spieler 2</i>	Strategie B_1	Strategie B_2
Strategie A_1	8 b_1	7 b_3
Strategie A_2	10 b_2	4 b_4

Da die Graphen der Auszahlungsfunktionen nicht eindeutig sind, wäre es auch möglich die Strategien A_1 und A_2 zu vertauschen.

Die Wert von Spieler 2 lassen sich aus der Grafik von Abbildung 21 nicht herauslesen und dürfen beliebig gewählt werden.

Ad b):

Der Punkt P hat die Koordinaten $P = (0.6, 7.6)$.

Die q -Achse gibt die relativen Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten der Strategiewahl des zweiten Spielers an. Somit ist zu jeder Wahrscheinlichkeit q eine optimale Strategiewahl von Spieler 1 ersichtlich. Wählt Spieler 2 ein $q < 0.6$ so sollte Spieler 1 die Strategie A_1 wählen um seine Auszahlung zu maximieren. Spielt der Spieler 2 mit $q > 0.6$, ist für Spieler 1 die Strategie A_2 besser. Dies ist in der Grafik daran zu erkennen, dass die Graphen der Auszahlungsfunktion der optimaleren Strategien über der „schwächeren“ Auszahlungsfunktion liegt (vgl. Abbildung 21). Bei $q = 0.6$ ist es egal, für welche Strategie sich Spieler 1 entscheidet, seine Auszahlung wird sich auf ein durchschnittliches $U = 7.6$ belaufen, sofern das Spiel häufig wiederholt wird (vgl. 2.4.1).

Ad c):

Um das Nash-Gleichgewicht aus den Graphen der Auszahlungsfunktionen zu bestimmen, werden die Grafiken beider Spieler benötigt. Allgemein können zwischen drei Möglichkeiten unterschieden werden. In Klammern werden die daraus resultierenden Lösungen aus Sicht von Spieler 1 angegeben (vgl. Abbildung 16)

- I) Der Graph der Auszahlungsfunktion einer Strategie ist im Intervall $q \in [0, 1]$ stets über dem anderen Graphen. (Lösungen 1a und 1b)
- II) Es gibt einen Schnittpunkt bei $q = 0$ oder $q = 1$. (Lösungen 3a, 3b, 3c und 3d)
- III) Es gibt einen Schnittpunkt im Intervall $q \in (0, 1)$. (Lösungen 2a und 2b)

Analog gilt dies für Spieler 2. Mit diesem Wissen lassen sich wie in *Beispiel II.13* die Gleichgewichte bestimmen.

2.4 Lösungsmethoden von Zweipersonenspielen in gemischten Strategien

3) Betrachte ein allgemeines Zweipersonen-Spiel.

- Untersuche den Fall, dass es sich bei dem allgemeinen Zweipersonen-Spiel auch um ein Nullsummenspiel handelt. Gehe dabei auf die Einträge der Bimatrix ein.
- Finde alle möglichen Lösungen für Zweipersonen-Nullsummenspiele (Klassifikation). Vergleiche die Lösungen mit der Klassifikation von allgemeinen Zweipersonenspielen (vgl. *Beispiel II.13*).

Ad a):

Betrachte die allgemeine Bimatrix:

<i>Spieler 1</i> <i>Spieler 2</i>	Strategie B_1	Strategie B_2
Strategie A_1	a_1 b_1	a_2 b_3
Strategie A_2	a_3 b_2	a_4 b_4

Für Nullsummenspiele gelten zusätzlich folgende Bedingungen:

$$-b_1 = a_1$$

$$-b_2 = a_3$$

$$-b_3 = a_2$$

$$-b_4 = a_4$$

Ad b):

Für die Klassifikation von Spieler 1 kommt es gemäß *Beispiel II.13* nur darauf an, wie a_1 und a_3 bzw. a_2 und a_4 zueinanderstehen. Daraus resultiert sich gemäß den Regeln des Nullsummenspiels eine Ordnung zwischen b_1 und b_2 bzw. b_3 und b_4 . Allerdings beschreiben die Ordnungen zwischen b_1 und b_3 bzw. b_2 und b_4 um welche Lösung des Spiels es sich handelt. Durch geschickte Wahl von a_1, a_2, a_3 und a_4 lassen sich alle Klassifikationen aus dem *Beispiel II.13* erzeugen. Anhand zweier Beispielen wird nun erläutert, wie die verschiedenen Lösungen von Zweipersonen-Nullsummenspielen gefunden werden können. Wir gehen davon aus, dass die verschiedenen Lösungen von allgemeinen Zweipersonenspielen bekannt sind (vgl. Abbildungen 16 und 18). Anschließend treffen zwei Lösungen der Spieler aufeinander.

Zum Beispiel:

- *Fall: 1a, 2a*

Es gilt: $a_1 > a_3$ und $a_2 > a_4$ (vgl. 1a in Abbildung 16)

Und: $b_1 < b_3$ und $b_2 > b_4$ bzw. $-b_1 > -b_3$ und $-b_2 < -b_4$ (vgl. 2a in Abbildung 18)

Aus den Bedingungen für Nullsummenspiele folgt: $a_1 > a_2$ und $a_3 < a_4$

Aus den markierten Relationen folgt nun: $a_1 > a_2 > a_4 > a_3$

Stehen die Matrixeinträge von Spieler 1 in dieser Ordnung, so lautet die Lösung des Spiels 1a, 2a. (vgl. Abbildung 19).

- *Fall: 3a, 2b*

Es gilt: $a_1 = a_3$ und $a_2 > a_4$ (vgl. 3a in Abbildung 16)

Und: $b_1 > b_3$ und $b_2 < b_4$ bzw. $-b_1 < -b_3$ und $-b_2 > -b_4$ (vgl. 2b in Abbildung 18)

Aus den Bedingungen für Nullsummenspiele folgt: $a_1 < a_2$ und $a_3 > a_4$

Aus den markierten Relationen folgt nun: $a_2 > a_1 = a_3 > a_4$

Stehen die Matrixeinträge von Spieler 1 in dieser Ordnung, so lautet die Lösung des Spiels 3a, 2b. (vgl. Abbildung 19).

Mit dieser Methode lassen sich alle 64 verschiedenen Lösungen von Zweipersonen-Nullsummenspielen finden.

3 Spiele in extensiver Form

3.1 Übergang zur extensiven Form

Beispiel III.1 - Energiemarkt (vgl. BARTHOLOMAE & WIENS, 2016, S.32 ff.)

Ein Energieunternehmen überlegt sich ein Konzept für die Zukunft. Dabei hat es die Wahl, ob es weiterhin auf konventionelle (k) oder auf erneuerbare (e) Energien setzen soll. Das Unternehmen hofft mit seiner Wahl die Energiepolitik des Staates widerzuspiegeln, da es in diesem Fall einen Bonus für das Unternehmen gibt. Wobei das Unternehmen konventionelle Energien bevorzugen würde, da der Umstieg auf erneuerbare Energien kostenintensiver wäre. Dieselbe Überlegung gilt auch für den Fall, dass sich Unternehmen und Staat sich unterschiedlich entscheiden.

Für den Staat wiederum hat es keinerlei Auswirkung, ob das Unternehmen eine andere Strategie wählt. Entscheiden sich jedoch beide Parteien für dieselbe Energie der Zukunft würde der Staat die klimafreundlichere erneuerbare Energie bevorzugen.

Daher hat das Unternehmen die Strategien $X = \{e, k\}$ wobei e für erneuerbare Energie und k für traditionelle Energie steht. Analog die Strategiemenge für den Staat $Y = \{e, k\}$.

Somit ergibt sich folgende Bimatrix (siehe Abbildung 22):

<i>Unternehmen Staat</i>	Erneuerbare Energie	Konventionelle Energie
Erneuerbare Energie	2 1	0 -1
Konventionelle Energie	0 0	1 2

Abbildung 22: Bimatrix des Energiemarktspiels in Normalform

Mittels Lösungsstrategien aus Kapitel 2 kann nun dieses Spiel gelöst werden. Bei diesem Spiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte, welche auftreten, wenn Unternehmen und Staat jeweils dieselbe Strategie wählen.

Nash-Gleichgewichte: $(e|e)$ und $(k|k)$

Bisher wurde das Spiel in der Normalform modelliert. Das würde für das Beispiel bedeuten, dass das Unternehmen und der Staat gleichzeitig oder zumindest unabhängig voneinander entscheiden. Wird die Bedingung gefordert, dass zuerst der Staat und anschließend das Unternehmen entscheiden, eröffnet sich das breite Feld der **sequentiellen Spiele**.

Sequentielle Spiele werden durch die sogenannte **extensive Form** dargestellt.

3.1.1 Spiele in extensiver Form

Im Unterschied zur Normalform werden in der extensiven Darstellung von Spielen die Zugfolge und der Informationsstand von Spielern berücksichtigt. Lange Zeit galten Normalform und die extensive Darstellung von Spielen als äquivalente Modelle derselben Spielsituation. Erst mit den Arbeiten von Reinhard Selten in den Jahren 1965, 1975 und 1978 wurden erkannt, dass die extensive Form weitere Einblicke in eine Spielsituation liefert (vgl. BERNINGHAUS, EHRHART & GÜTH, 2010, S.91).

3.1.2 Darstellung in extensiver Form

Da in der Extensivform die Zugfolge eine entscheidende Rolle spielt, erfolgt die Darstellung von Spielen über Spielbäume, auch Graphen genannt. Jede Stufe eines Spielbaums steht für eine Entscheidungssituation des Spielers dieser Stufe. Ein Spielbaum besteht aus Knoten und Kanten. Die Knoten repräsentieren Entscheidungs- und Endpunkte eines Spiels und die Kanten beschreiben die möglichen Aktionen der Spieler.

Damit ein Graph tatsächlich eine Spielsituation beschreiben kann, muss er zwei Eigenschaften besitzen. Graphen, die diese Eigenschaften nicht haben, sind in Abbildung 23 dargestellt.

- *zusammenhängend* bedeutet, dass jeder Knoten mit allen anderen Knoten durch einen Streckenzug verbunden sein muss.
- *schleifenlos* ist ein Graph, sobald es für jeden Knoten keinen Streckenzug gibt, welcher wiederum zum Ausgangsknoten führt.



Abbildung 23: Beispiele für *nicht zusammenhängende* und *nicht schleifenlose* Graphen

Da bei Spielen in extensiver Form die Reihenfolge eine wichtige Rolle spielt, kommt auch der **Information** bzw. dem **Informationsstand** eine größere Bedeutung zu, als bei Spielen in der Normalform. Der Spieler, der in der ersten Stufe entscheidet, wird **First-Mover** genannt. Er muss vor dem Gegenspieler entscheiden und weiß daher nicht über dessen Strategiewahl Bescheid. Der First-Mover hat somit **imperfekte Information** über das Spiel. Der Spieler in der zweiten Stufe wird **Second-Mover** oder **Follower** genannt (vgl. BARTHOLOMAE & WIENS; 2016, S.124). Besitzt der Second-Mover über die Wahl des First-Movers Kenntnis, so besitzt er **perfekte Information**. Bei den meisten Spielen, die in diesem Kapitel beschrieben werden, handelt es sich um Spiele dieser Art. Es kann jedoch sein, dass der Second-Mover nicht oder nur teilweise über die Entscheidungen des First-Movers informiert ist. In diesem Fall werden Entscheidungsknoten zu **Informationsbezirken** zusammengefasst. Innerhalb eines Informationsbezirkes weiß der Spieler der jeweiligen Stufe nicht, auf welchem Knoten er sich befindet. Informationsbezirke werden durch gestrichelte Linien zwischen den betroffenen Entscheidungsknoten gekennzeichnet (vgl. Abbildung 24).

3 Spiele in extensiver Form

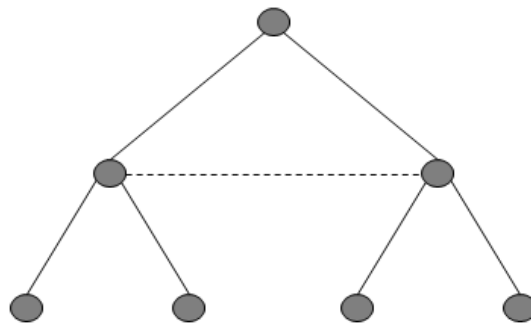


Abbildung 24: Informationsbezirk in der zweiten Stufe des Spiels

Zurück zum Energiemarkt-Beispiel (Beispiel III.1) als Extensivform-Spiel:

Nun entscheidet der Staat als First-Mover zuerst. Das Unternehmen trifft seine Entscheidung nach der Wahl des Staates. Es ist daher Second-Mover. Der zugehörige Spielbaum sieht folgendermaßen aus (siehe Abbildung 25):

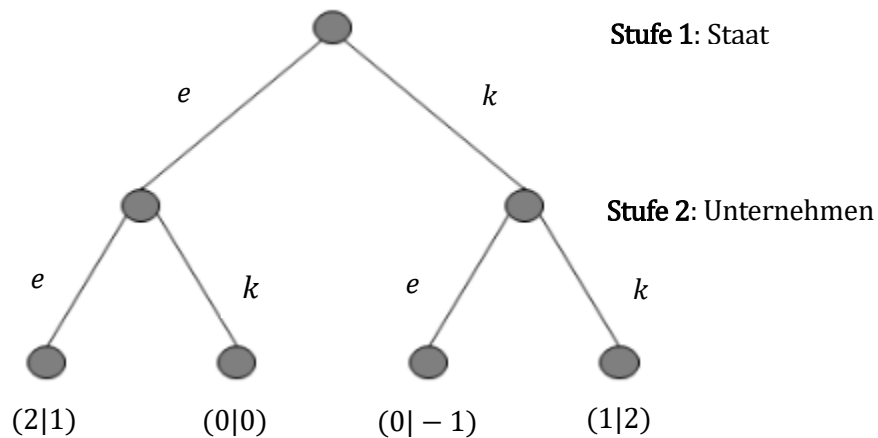


Abbildung 25: Spielbaum Energiemarkt-Beispiel in extensiver Form

Die Bitupel an den Enden der Zweige entsprechen den Eintragungen in der Bi-Matrix in Abbildung 22.

Aus diesem Spielbaum lassen sich nun Gleichgewichte herauslesen. Wählt der Staat in der ersten Stufe die Strategie e , so wird auch das Unternehmen sich für die Strategie e entscheiden, da die Kombination $(e|e)$ für das Unternehmen eine höhere Auszahlung liefert als die Kombination $(e|k)$. Der erste Wert des Tupels entspricht der Auszahlung an den Staat, während der zweite Wert die Auszahlung an das Unternehmen angibt. Die Kombination $(e|e) = (2|1)$ liefert somit für den Staat eine Auszahlung von Zwei und für das Unternehmen eine Auszahlung von Eins. Diese Kombination ist ein Nash-Gleichgewicht, da sich beide Spieler bei einseitiger Strategieänderung nicht verbessern würden. Ändert das Unternehmen einseitig seine Strategie, endet das Spiel im Knoten $(e|k) = (0|0)$. Daher würde sich das Unternehmen um „Eins“ verschlechtern. Entscheidet sich der Staat einseitig für die andere Strategie, endet das Spiel im Knoten $(k|e) = (0|-1)$. Dies würde ebenfalls eine

3.1 Übergang zur extensiven Form

Verschlechterung der Auszahlung für den Staat bedeuten. Somit ist gezeigt, dass die Kombination $(e|e)$ ein Nash-Gleichgewicht darstellt.

Analog sind die Überlegungen für die Strategiekombination $(k|k)$.

Es ist zu sehen, dass die Normalform und die Extensivform zu den gleichen Ergebnissen führen. Eine Möglichkeit Nash-Gleichgewichte in der Extensivform zu bestimmen, besteht darin, das sequentielle Spiel in die sogenannte **induzierte Normalform** zu transformieren (vgl. *BERNINGHAUS, EHRHART & GÜTH, 2010, S.104 ff.*). Dabei wird die Menge der reinen Strategien an jedem Knoten als alle möglichen Strategiekombinationen des jeweiligen Spielers aufgefasst (siehe Abbildung 26). Die Auszahlung resultiert demnach aus dem jeweiligen Endpunkt.

Staat Unternehmen	(e, e)	(e, k)	(k, e)	(k, k)
e	$(2 1)$	$(2 1)$	$(0 0)$	$(0 0)$
k	$(0 -1)$	$(1 2)$	$(0 -1)$	$(1 2)$

Abbildung 26: Induzierte Normalform des Energiemarkt-Beispiels

Die Strategiekombination (e, k) des Unternehmen bedeutet:

Das Unternehmen befindet sich in der zweiten Stufe des Spiels und kann auf zwei möglichen Knoten landen. Die Strategiekombination (e, k) bedeutet nun, dass sich das Unternehmen auf dem ersten Knoten für die erneuerbare Energie und auf dem zweiten Knoten für die konventionelle Energie entscheidet. Der Ausgang des Spiels hängt nun noch von der Strategiewahl des Staates ab. Entscheidet sich der Staat für die konventionelle Energie, so muss das Unternehmen an dem zweiten Knoten entscheiden. Bei der Strategiekombination (e, k) wäre dies die Strategie der konventionellen Energie und das Spiel endet auf dem Knoten $(k|k) = (1|2)$. Würde der Staat die erneuerbare Energie wählen, so kommt das Unternehmen in der zweiten Stufe auf dem ersten Knoten zur Entscheidung. Bei der Strategiekombination (e, k) des Unternehmens bedeutet dies, dass das Unternehmen in der zweiten Stufe auf dem ersten Knoten die Strategie „erneuerbare Energie“ wählt. Somit endet das Spiel auf dem Knoten $(e|e) = (2|1)$.

Jede Position einer Strategiekombination steht für eine Entscheidung an einem Knoten, unabhängig davon ob er in der Auszahlung erreicht wird.

Achtung: $(e, e) \neq (e|e)$

Sind die Strategien eines Strategientupels durch einen Beistrich getrennt, so handelt es sich um die Strategiewahl eines Spielers auf seinem Entscheidungsknoten des Spiels. Falls die Strategien eines Strategientupels durch einen senkrechten Strich getrennt werden, so handelt es sich um einen Spielpfad, der in einem Endknoten mit einer Auszahlung endet.

Mit Hilfe der induzierten Normalform lassen sich Gleichgewichte wie in der Normalform gewohnt berechnet.

3.2 Prinzip der Rückwärtsinduktion und teilspielperfekte Gleichgewichte

Wie bereits in 3.1 angedeutet, bietet die extensive Form neue Einblicke in eine Spielsituation. Eine dieser neuen Einblicke ist das Aufsuchen von teilspielperfekten Gleichgewichten, welche mittels dem Prinzip der Rückwärtsinduktion gefunden werden können. Wie sich teilspielperfekte Gleichgewichte auf die Lösung des Spiels auswirken, erfahren wir nun.

Das Prinzip der Rückwärtsinduktion ist eine Möglichkeit teilspielperfekte Gleichgewichte eines sequentiellen Spiels zu ermitteln. Ein **Teilspiel Γ** entsteht in jedem Knoten X , sofern dieser keinen Informationsbezirk trennt und beinhaltet alle von ihm ausgehenden Knoten und Kanten (vgl. Abbildung 27). Ein Informationsbezirk wird durch eine unterbrochene Linie zwischen zwei oder mehreren Knoten in einer Stufe des Spiels gekennzeichnet. Landet ein Spieler auf einem Knoten innerhalb eines Informationsbezirkes, so weiß er nicht auf welchem Knoten des Informationsbezirkes er sich genau befindet.

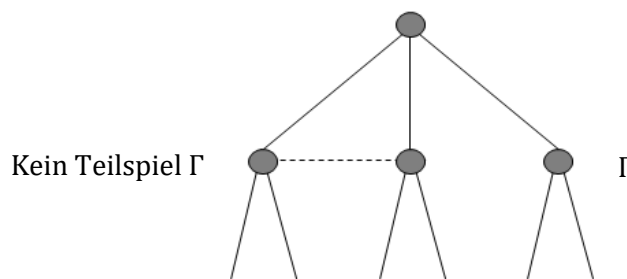


Abbildung 27: Teilspiel Γ

Ein **teilspielperfektes Gleichgewicht** ist ein Nash-Gleichgewicht, welches in jedem Teilspiel ebenfalls ein Gleichgewicht ist. Mit diesem Begriff lässt sich das Prinzip der Rückwärtsinduktion begründen. Demnach wird in der letzten Stufe des Spiels begonnen und das optimale Verhalten des Spielers auf der letzten Stufe ermittelt. Mit diesem Wissen wird anschließend die vorletzte Stufe betrachtet und die optimale Strategie des anderen Spielers bestimmt. So verfährt man bis der erste Entscheidungsknoten erreicht ist. Das Ergebnis ist ein Pfad des Spielbaumes, welches ein teilspielspielperfektes Gleichgewicht des Spiels repräsentiert.

Betrachten wir nun wieder das *Energiemarkt-Beispiel (Beispiel III.1)*:

Um die Strategien besser unterscheiden zu können, werden die Strategien mit Indizes versehen und die Entscheidungsknoten mit Großbuchstaben benannt (vgl. Abbildung 28):

3.2 Prinzip der Rückwärtsinduktion und teilspielperfekte Gleichgewichte

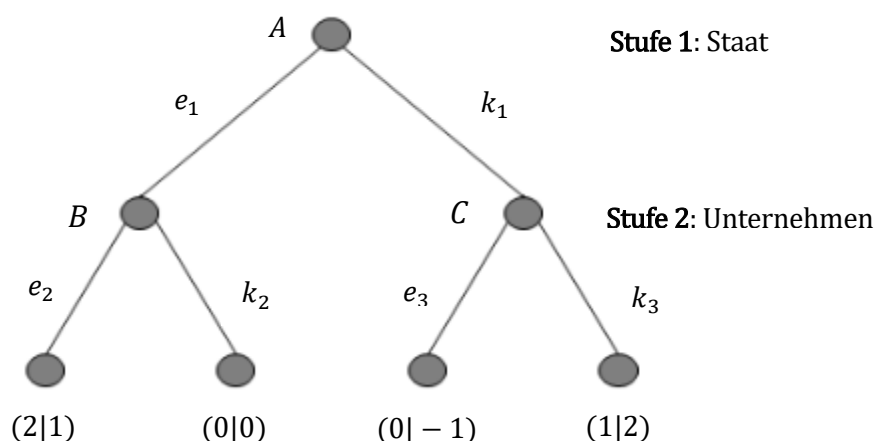


Abbildung 28: überarbeiteter Spielbaum Energiemarkt-Beispiel

Auf der zweiten Stufe entsteht in den beiden Knoten B und C jeweils ein Teilspiel, in welchem das Unternehmen eine Strategie wählen muss. Am Knoten B wird sich das Unternehmen für die Strategie e_2 entscheiden, da es mit dieser Entscheidung eine höhere Auszahlung erzielt. Analog entscheidet sich das Unternehmen im Knoten C für die Strategie k_3 . Somit sind die Teilspiele in den Knoten B und C gelöst und der Staat weiß, wie sich das Unternehmen an den jeweiligen Knoten verhält. Wählt der Staat die Strategie k_1 , wird das Unternehmen die Strategie k_3 wählen und der Staat erhält eine Auszahlung von 1. Entscheidet der Staat sich allerdings für die Strategie e_1 , antwortet das Unternehmen darauf mit der Strategie e_2 . Dieser Fall bedeutet für den Staat eine Auszahlung von 2 und ist damit höher als bei der Wahl der „konventionellen Energie“-Strategie. Daher ist die Strategiekombination $(e_1|e_2)$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht.

3.2.1 Eine Frage der Glaubwürdigkeit

Mit dem folgenden Beispiel lässt sich die Frage zu klären, worin sich normale und teilspielperfekte Gleichgewichte unterscheiden.

Beispiel III.2 - Markteintritt (vgl. BERNINGHAUS, EHRHART & GÜTH, 2010, S.107 ff.)

In einem Ort gibt es einen Elektronikmarkt. Dieser wird als **Monopolist** bezeichnet, da er der einzige Fachhändler in diesem Ort ist. Ein Elektronikmarkt einer anderen Kette überlegt, sich ebenfalls in diesem Ort niederzulassen. Da dieser Elektronikmarkt auf potentielle Kunden des Monopolisten aus ist, wird er **Konkurrent** bezeichnet. Der Monopolist bekommt Wind von einem angeblichen Konkurrenten und droht diesem im Falle eines Markteintrittes (E) mit Aggressiven Verhalten (a) durch massive Werbe- und Preispolitik. Das aggressive Vorgehen des Monopolisten würde dazu führen, dass beide Unternehmen viel Geld investieren müssten. Lässt sich der Konkurrent von der Drohung beeindrucken, würde er nicht in den Markt eintreten (NE) und der Monopolist behielte seine Vormachtstellung. Würde der Monopolist jedoch friedlich (f) auf den Markteintritt des Konkurrenten reagieren, teilen sie sich die potentiellen Kunden.

3 Spiele in extensiver Form

Der positive Wert des Konkurrenten bei Nichteintritt resultiert aus dem Geld, welches er sich in diesem Fall spart.

Der Spielbaum für die Situation sieht folgendermaßen aus (siehe Abbildung 29):

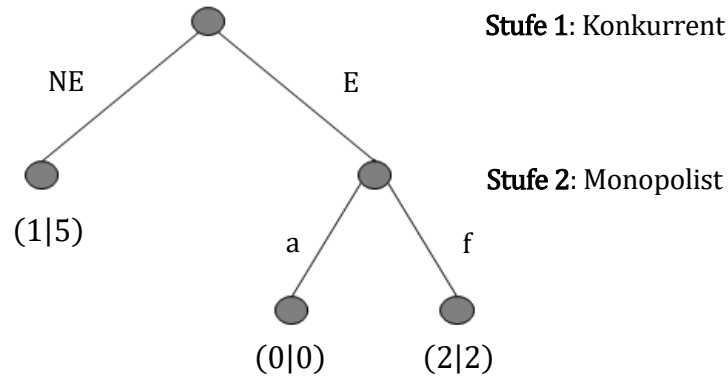


Abbildung 29: Spielbaum Markteintritt

Dieses Spiel hat zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich die Strategiekombinationen $(E|f)$ und $(NE|a)$. Während die Strategiekombination $(E|f)$ den erfolgreichen Markteintritt des Konkurrenten beschreibt, zeichnet sich das Gleichgewicht $(NE|a)$ durch das gelingende aggressive Verhalten des Monopolisten aus.

Tatsächlich würde der Konkurrent bei dem Gleichgewicht $(NE|a)$ verlieren, wenn er seine Strategie auf E ändern würde, nämlich von 1 auf 0. Die Frage ist nun, ob die Drohung des Monopolisten auch glaubwürdig ist? Angenommen der Konkurrent entscheidet sich für einen Eintritt in den Markt, dann würde sich der Monopolist natürlich für die friedliche Variante entscheiden. Durch eine friedliche Reaktion würde er eine höhere Auszahlung bekommen, als durch das aggressive Verhalten. Daher ist die Drohung im Vorfeld nicht glaubwürdig und nur ein Bluff.

Dieses Beispiel bietet also zwei Nash-Gleichgewichte, bei dem nur ein Gleichgewicht plausibel ist $(E|f)$ und keine leeren Drohungen enthält. Diese plausiblen Gleichgewichte sind **teilspielperfekte Gleichgewichte**.

Eine andere Herangehensweise wäre wiederum gemäß dem Prinzip der Rückwärtsinduktion. In der zweiten Stufe des Spiels beginnt ein Teilspiel, bei dem der Monopolist zwischen „aggressiver“ oder „friedlicher“ Marktpolitik entscheiden muss. Er wird „friedlich“ wählen, da seine Auszahlung in diesem Fall höher ist. Nun wird zurück in die erste Stufe geblickt. Der Konkurrent weiß somit, dass der Monopolist den friedlichen Weg einschlagen wird. Dadurch erhält der Konkurrent eine höhere Auszahlung, wenn er in den Markt eintritt. Auf diese Weise lässt sich die Strategiekombination $(E|f)$ ebenfalls als teilspielperfektes Gleichgewicht erklären.

3.2.2 Weitere Umsetzungen für die Schule

Beispiel III.3 - Die Kubakrise Teil 2

Ausgang für dieses Beispiel ist das Zweipersonen-Spiel „Die Kubakrise“ aus 2.2.3 (Beispiel II.9).

Fragestellungen:

1. Modelliere das ursprüngliche Normalformspiel in ein Spiel der extensiven Form!
2. Argumentiere, warum es sich bei dem Gleichgewicht („blockieren“, „Rückzug“) um ein teilspielperfektes Gleichgewicht handelt.
3. Vergleiche dein Ergebnis mit jenem des Normalformspiels.

Ad 1.:

Um die Normalform in die extensive Form zu wandeln muss ein Spieler als First-Mover ernannt werden. Im Vorfeld des Spiels hat die Sowjetunion den Raketenstützpunkt auf Kuba aufgestellt. Somit liegt der erste Spielzug an der USA, welche eine Blockade errichten oder nichts tun können. Die Sowjetunion reagiert danach auf die Strategie der USA. In Abbildung 30 ist ein möglicher Spielbaum dargestellt.

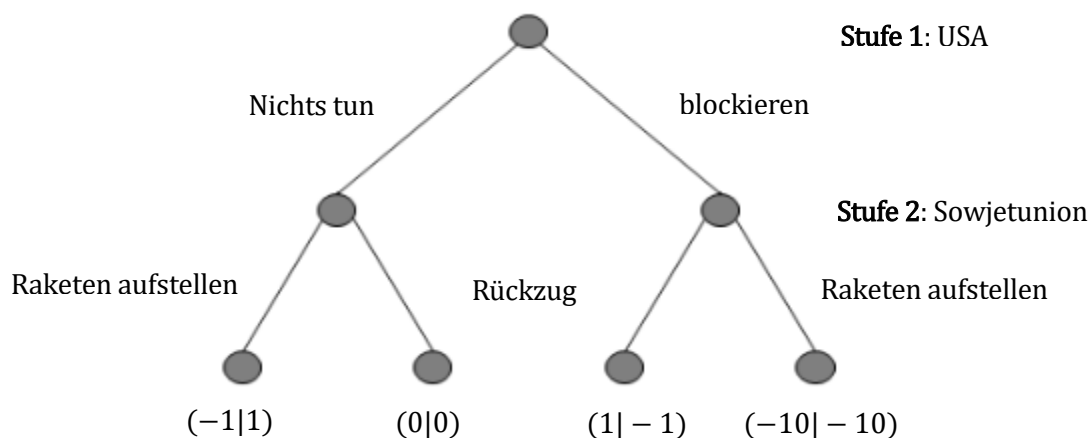


Abbildung 30: Spielbaum Kubakrise-Beispiel in extensiver Form

Ad 2.:

Teilspielperfekte Gleichgewichte können mit dem Prinzip der Rückwärtsinduktion gefunden werden. Das bedeutet wir starten in der zweiten Stufe. Befindet sich das Spiel im zweiten Knoten, so wird die Sowjetunion sich für die Strategie „Raketen aufstellen“ entscheiden, wenn die USA nichts tut, da die Auszahlung höher ist, als bei einem Rückzug. Entscheidet sich die USA hingegen für die Strategie „blockieren“, so ist „Rückzug“ die bessere Antwort für die Sowjetunion.

3 Spiele in extensiver Form

Somit stehen jeweils die besten Antworten auf Seiten der Sowjetunion fest. Die USA kann nun vergleichen, bei welcher dieser beiden Szenarien sie die bessere Auszahlung erhält. In diesem Fall bevorzugt die USA die Strategiekonfiguration („blockieren“, „Rückzug“) gegen über („Nichts tun“, „Raketen aufstellen“). Obwohl es sich bei beiden Strategiekonfigurationen um Nash-Gleichgewichte handelt, ist nur („blockieren“, „Rückzug“) glaubhaft und daher teilspielperfekt.

Ad 3.:

Obwohl nun beide Spieler nicht mehr gleichzeitig, sondern nacheinander ihre Strategien wählen, kommt es zu denselben Gleichgewichten. Allerdings bietet das Prinzip der Rückwärtsinduktion eine stichhaltigere Begründung, warum das Nash-Gleichgewicht („blockieren“, „Rückzug“) auch in der Realität umgesetzt wurde.

Beispiel III.4 – „A Game Of Thrones - Teil 3“

Ausgangssituation:

- Stannis vom Haus Baratheon möchte seinen Anspruch auf den Eisernen Thron gültig machen und überlegt, ob er in den Krieg gegen das Haus Lannister ziehen möchte.
- Haus Tyrell kann die Lannister unterstützen oder sich aus dem Krieg raushalten. Haus Baratheon zu unterstützen fällt durch die geringste Auszahlung aus Teil 2 weg.
- Haus Lannister kann sich verteidigen oder es auf einen Kompromiss mit Stannis abzielen.

Fragestellungen:

1. Modelliere die Ausgangssituation als Spiel in extensiver Form. Verwende als Auszahlungen dazu die Werte aus dem ersten Teil.
2. Wie endet dieser Konflikt?

Ad 1.:

- Spieler: B (Baratheon)
Strategiemenge: $A = \{a \text{ (angreifen)}; K \text{ (Kompromiss)}\}$
- Spieler: T (Tyrell)
Strategiemenge: $B = \{u \text{ (unterstützen)}; \neg u \text{ (nicht unterstützen = raushalten)}\}$
- Spieler: L (Lannister)
Strategiemenge: $L = \{v \text{ (verteidigen)}; K \text{ (Kompromiss)}\}$

3.2 Prinzip der Rückwärtsinduktion und teilspielperfekte Gleichgewichte

In der ersten Stufe des Spiels entscheidet sich Haus Baratheon, ob es in den Krieg zieht, oder einen Kompromiss mit den Lannister vorzieht. Falls es zum Krieg kommt, schaltet sich Haus Tyrell ein. Allerdings weiß Stannis nicht, wie sich Haus Tyrell entscheidet, daher entsteht auf der zweiten Stufe des Spiels ein Informationsbezirk. Dies wird durch die strichlierte Linie in Abbildung 31 gekennzeichnet. Als letztes entscheidet sich das Haus Lannister, ob es sich verteidigt, oder sich um einen Kompromiss bemüht. Die Auszahlungen sind aus der Sicht des Hauses Lannister. Da es sich weiterhin um ein Nullsummenspiel handelt, bedeutet eine Auszahlung von „10“ auf Seiten der Lannister, eine Auszahlung von „-10“ für Stannis.

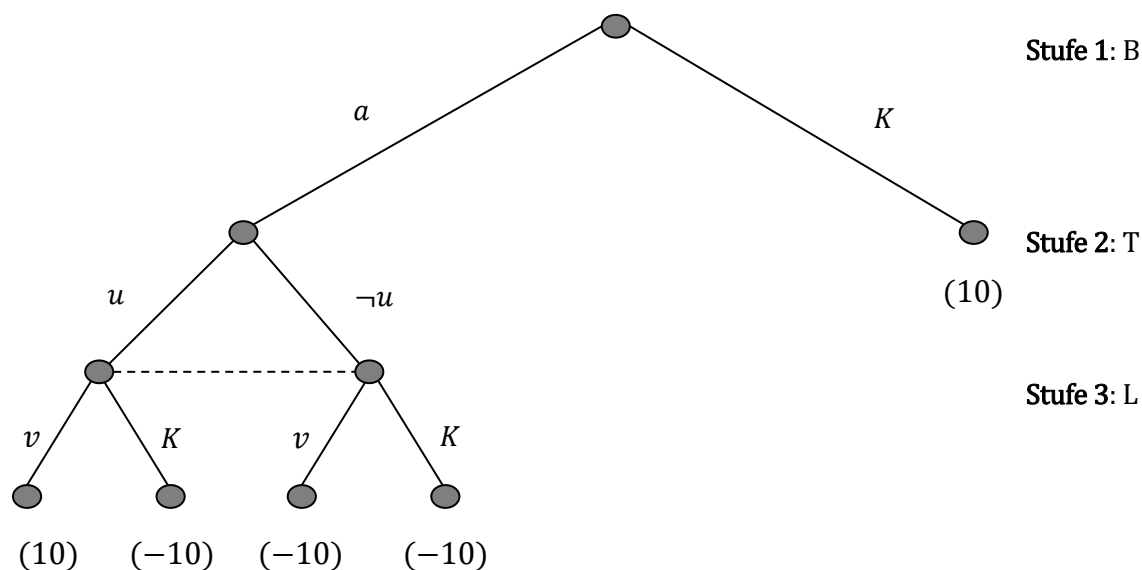


Abbildung 31: Spielbaum „Game of Thrones“

Ad 2.:

Dieses Spiel lässt sich wiederum mit dem **Prinzip der Rückwärtsinduktion** lösen. Das Haus Lannister hat zwei Möglichkeiten, um zu einer positiven Auszahlung zu kommen. Entweder ist Stannis für einen Kompromiss bereit oder sie verteidigen mit Hilfe des Hauses Tyrell den Thron. Somit bleibt dem Haus Lannister nur die Strategie (*verteidigen*) auf der dritten Stufe. Entscheidet sich Stannis für den Kompromiss, ist es egal, welche Strategie Haus Lannister wählt, da es eine Auszahlung von „10“ bekommen (vgl. Abbildung 31 zweiter Knoten in der zweiten Stufe).

Unabhängig von der Entscheidung des Hauses Tyrell muss Haus Baratheon sich für die Strategie (*angreifen*) entscheiden. Dies ist für Stannis die einzige Möglichkeit eine positive Auszahlung zu erzielen.

3 Spiele in extensiver Form

Für das Haus Tyrell wissen wir aus dem zweiten Teil des Beispiels, dass sie mit einer Unterstützung für das Haus Lannister die höchste Auszahlung erzielen. Daher ist die Strategiekombination $(a|u|v)$ ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht. Anzumerken ist, dass auch die Strategiekombinationen $(K|u|v)$ und $(K|u|K)$ ein Nash-Gleichgewicht darstellt, welches aber nicht glaubwürdig sind, da Stannis auf der ersten Stufe nicht Kompromiss wählen sollte. Für Haus Baratheon macht es somit aus der Sicht des Hauses Lannister keinen Unterschied, welche Strategie es wählt.

Kommentar

Kenner des Buches oder der Serie wissen natürlich wie dieser Konflikt endet. Stannis greift mit seiner Armee den Thron an. Das Haus Lannister verteidigt den Thron bis Haus Tyrell rettend zur Unterstützung heraneilt und Stannis zurückschlagen kann.

Mit diesem Beispiel habe ich versucht die Beweggründe der Figuren glaubwürdig spieltheoretisch zu modellieren. Auch wenn die Namen zunächst verwirrend sind, sollten auch Nichtkenner der Vorlage bei diesem Beispiel mitarbeiten und eine Lösung suchen können.

4 Lehrplanbezug und didaktischer Kommentar

4.1 Lehrplanbezug

In den Lehrplänen der österreichischen allgemein höheren Schulen (kurz: AHS) wird die Spieltheorie nicht explizit genannt. Dennoch deckt die Spieltheorie viele lehrplankonforme Aspekte und Beiträge zu den Bildungsbereichen ab. Alle Zitate in Kapitel 4.1 stammen, falls nicht anders gekennzeichnet, vom „AHS-Lehrplan Oberstufe Neu: Mathematik“ (vgl. Internetquelle [3])

4.1.1 Aspekte der Mathematik

„Schöpferisch - kreativer Aspekt:

Mathematik ist eine Schulung des Denkens, in der Arbeitstechniken vermittelt, Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert werden.“

Dieser Aspekt kommt besonders bei den spieltheoretischen Anwendungsbeispielen zum Tragen. Dabei werden alltägliche Entscheidungssituationen mathematisiert, um mit bestimmten Arbeitstechniken die optimale Entscheidung zu treffen. Diese Herangehensweise deckt auch den „Erkenntnistheoretischen Aspekt“ ab.

„Erkenntnistheoretischer Aspekt:

Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.“

Die Spieltheorie erfasst vielfältige Bereiche der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler. Angefangen über die Wahl einer Nachmittagsaktivität (vgl. „Battle oft the sexes“, In: BERNINGHAUS, EHRHART, GÜTH, 2010, S.22-23) bis hin zur Entscheidung, ob es klüger ist die Hausübung zu machen oder nicht (vgl. Beispiel II.10).

„Sie können an diesem Beispiel die Nützlichkeit der Mathematik in anderen Wissensbereichen entdecken und die Stärken und Grenzen der mathematischen Denkweise erkennen.“ (MÜLLER, 2007, S.63)

„Pragmatisch- anwendungsorientierter Aspekt:

Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien bzw. Berufsfelder.“

Die Beispiele zum Thema „Energemarkt (vgl. Beispiel III.1)“ und „Markteintritt“ (vgl. Beispiel III.2) zeigen, dass spieltheoretische Überlegungen unter anderem in der Politik und der Wirtschaft eine wichtige Rolle spielen. Die Modelle, Ergebnisse und Lösungsverfahren von

spieltheoretischen Anwendungsbeispielen erlauben es den Schülerinnen und Schülern kritisch über ihr Handeln und ihre Einschätzungen zu reflektieren. Dies befähigt Schülerinnen und Schüler dazu mündige Aussagen bezüglich ihrer Entscheidungen zu treffen. Somit entspricht die Spieltheorie auch dem „sprachlichen Aspekt“ der Mathematik im Lehrplan.

„Sprachlicher Aspekt:

Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden.“

4.1.2 Beiträge zu den Bildungsbereichen

„Sprache und Kommunikation: *Mathematik ergänzt und erweitert die Umgangssprache vor allem durch ihre Symbole und ihre Darstellungen, sie präzisiert Aussagen und verdichtet sie; neben der Muttersprache und den Fremdsprachen wird Mathematik so zu einer weiteren Art von Sprache.“*

Die Tabellen, Matrizen und Spielbäume von Spielen in Normal- bzw. Extensivform bieten eine reduzierte Darstellung von Entscheidungssituationen. Schülerinnen und Schüler können stets aus einer der genannten Darstellungsmöglichkeiten einen Kontext kreieren und andersrum aus einem Kontext die wichtigsten Informationen in eine Darstellungsform übersetzen. Die Mathematik funktioniert hierbei als Sprache. Es kommt zu einem ständigen Wechselspiel zwischen Muttersprache und der Mathematik.

„Mensch und Gesellschaft: *Der Unterricht soll aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens (Finanzwirtschaft, Soziologie, Medizin usw.) eine wichtige Rolle spielt.“*

Die feste Verankerung der Spieltheorie in Fächern wie Soziologie und Wirtschaft zeigt das breite Spektrum, in welchem die Spieltheorie Anwendung findet. Es ist somit ein Fachbereich der die beliebte Frage von Schülerinnen und Schülern: „Wozu brauche ich das?“ fast von selbst beantwortet.

„Kreativität und Gestaltung: *Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite; vor allem das Experimentieren an neuen Aufgabenstellungen und Problemen macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden.“*

Die vielfältigen Anwendungsgebiete der Spieltheorie verlangen von den Schülerinnen und Schülern Interesse und Kreativität auf unterschiedlichen Bereichen. Es werden von ihnen Problemlösefertigkeiten gefordert, damit sie Antworten auf spieltheoretische Fragestellungen geben können (vgl. MÜLLER, 2007, S.63). Nicht nur die Mathematisierung und Lösungsverfahren fordern die Kreativität der Schülerinnen und Schüler, sondern auch das kritische Hinterfragen und die Interpretation ihrer Lösung. So kann es durchaus der Fall sein, dass eine Lösung eines Spiels im krassen Gegensatz zu ihren Erfahrungen und Meinungen stehen. Sie müssen sich somit selbst ein Bild von den verschiedenen Sachverhalten machen.

4.2 Didaktische Analyse

4.2.1 Was wird gelernt?

Die Schülerinnen und Schüler können in einem Wahlpflichtfach erste Erfahrungen in der Spieltheorie sammeln. Dabei wird versucht Begriffe wie *reine Strategie*, *Information*, *Auszahlungsfunktion*,... möglichst intuitiv einzuführen. Ziel dieses Wahlfaches ist es die Schülerinnen und Schüler Schrittweise auf das Nash-Gleichgewicht zu führen und stetig weiterzuentwickeln.

Ein großer Vorteil dieses Konzeptes ist, dass die Schülerinnen und Schüler mit wenig Vorwissen ab der 6. Klasse AHS dieses Wahlpflichtfach absolvieren können. Als Lehrperson kann man dabei sehr gut auf die verschiedenen Wissensstände der Schülerinnen und Schüler eingehen. Aus fachlicher Sicht sind folgende Voraussetzungen nützlich:

- Aufstellen einer Matrix bzw. eines Vektors
- Lösen von Gleichungssystemen mit mehreren Variablen
- Aufstellen linearer Funktionen und schneiden ihrer Graphen

Da diese fachlichen Inhalte im Rahmen des Wahlpflichtfaches wiederholt werden, eignet es sich auch für schwächere Schülerinnen und Schüler.

„Einer der Vorteile der Spieltheorie ist aber, dass grundlegende Elemente dieses mathematischen Teilgebietes vergleichsweise rasch von den Lernenden verstanden werden können. Selbst wenn man sich auf das Aufsuchen von reinen Nash-Gleichgewichten beschränkt, kommt das Wesen der Spieltheorie sehr gut zur Geltung.“ (Internetquelle [4])

Ziele des Wahlpflichtfaches

Auf Seiten der Lehrperson sollte als oberstes Ziel sein, das Interesse an der Spieltheorie und ihre vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten bei den Schülerinnen und Schülern zu wecken. Des Weiteren sollten die verschiedenen Inhalte die Schülerinnen und Schüler zum Entdecken und Diskutieren motivieren. Dies gelingt, indem die Grundbegriffe im Rahmen von praxisnahen Beispielen eingeführt werden.

Folgende Ziele sollten Schülerinnen und Schüler am Ende des Wahlpflichtfaches beherrschen:

- *Schülerinnen und Schüler können Grundbegriffe der Spieltheorie erklären.*
- *Schülerinnen und Schüler können spieltheoretische Textaufgaben modellieren.*
- *Schülerinnen und Schüler können Nash-Gleichgewichte finden.*
- *Schülerinnen und Schüler können zwischen Spielen in Normalform und Spielen in extensiver Form unterscheiden.*
- *Schülerinnen und Schüler können gemischte Nash-Gleichgewichte im Kontext deuten.*

4.2.2 Methoden des Wahlpflichtfaches

Nachdem die Schülerinnen und Schüler in das Thema Spieltheorie eingeführt wurden, bieten sich Gruppen- und Projektarbeiten an. So können die Schülerinnen und Schüler bestmöglich miteinander kommunizieren und an optimalen Lösungen arbeiten. So ist auch für die Lehrperson spannend welche Lösungsstrategien die Schülerinnen und Schüler ansetzen. Aufgrund der vielen unterschiedlichen Anwendungsmöglichkeiten ist auch ein von den Schülerinnen und Schülern organisierter Stationenbetrieb möglich. Dazu wird die Klasse in gleichgroße Gruppen geteilt. Jede Gruppe bearbeitet ein Beispiel und gestaltet damit eine Station für ihre Mitlernenden. Durch diese Gruppenarbeit können viele Beispiele in relativ kurzer Zeit abgedeckt werden. Des Weiteren können Schülerinnen und Schüler sich ihren Interessen nach bestimmten Fragestellungen widmen. Schülerinnen, die geschichtlich interessiert sind wählen eher das Beispiel der Kubakrise (vgl. Beispiel II.9 und III.3), während Sportinteressierte sich eher das Torwart-Beispiel (Beispiel II.12) entscheiden.

Ein weiterer positiver Aspekt der Projektarbeiten an der Spieltheorie erläutert Franz Picher in „Spiele und Texte als Reflexionsanlässe – Mathematik als Reflexionsmittel“. In seinem Unterrichtsprojekt fördert er durch Spiele den Anreiz zur sozialen Reflexion.

„Sozialreflexion meint dabei zweierlei: Einerseits die Beschäftigung mit einer sozialen Problemstellung und auf der anderen Seite ein gemeinsames Nachdenken darüber. ... Die Mathematik hilft uns, gemeinsam über eine soziale Problemstellung nachzudenken.“ (Picher, 2007, S. 70)

Um die Reflexion bei den Schülerinnen und Schülern anzukurbeln, können verschiedene Spiele mit Realsituationen verglichen werden. Dazu eignen sich Texte, die die Problematik eines Spiels in andere Kontexte transferieren. Picher nutzt hierfür zum Beispiel einen Text zum Thema „Umweltverschmutzung“, um dem „Gefangenendilemma“ (vgl. Beispiel II.6) einen weiteren Kontext zu bieten.

Die Aufgaben und Fragestellungen der nummerierten Beispiele (Beispiel I.1 - Beispiel V.1) eignen sich einerseits, um bestimmte Inhalte zu vermitteln und andererseits, um Arbeitsblätter zu gestalten. Dabei ist methodisch darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler die Arbeitsblätter in Gruppen bearbeiten. In den Gruppen können dann die Schülerinnen und Schüler über die Kontexte, Lösungen und Interpretationen diskutieren. Interessante Ansätze und Idee können über mehrere Stunden hinweg von den Gruppen zusätzlich bearbeitet werden.

4.3 Beispiele für Stundenplanungen

Ich gebe hier ein Beispiel, wie der Einstieg in die Spieltheorie aussehen könnte. Dabei werden in den ersten beiden Einheiten die wichtigsten Werkzeuge für weitere Lösungsstrategien vermittelt. Ich würde empfehlen zwei weitere Theorieeinheiten im Laufe des Semesters zu setzen um mit den Schülerinnen und Schülern noch Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien und die extensive Form zu besprechen.

4.3.1 Erste Einheit

Ziel: Erarbeitung des Begriffes „Spiel“

Zeit	Phase	Geplanter Unterrichtsverlauf	Sozialform, Methode	Medium
5 Minuten	Begrüßung, Aufbau des Wahlpflichtfaches, Methoden, Benotung	L begrüßt S, L erklärt grundsätzlichen Ablauf des Wahlpflichtfaches und teilt Handout mit Informationen zum Ablauf aus.	Frontalunterricht	Handout
10 Minuten	A Eruiieren von Vorkenntnissen	L versucht im Dialog Vorkenntnisse und Vorstellungen von S zu sammeln	L-S Gespräch	
30 Minuten	B Erarbeitung der „Arten von Spielen“	S „sammeln“ verschiedene Spiele in Gruppen; Ergebnisse werden an die Tafel geschrieben; „Ordnen“ der Spiele in der Gruppe; Anschließend Diskussion im Plenum; → Ergebnis: 3 Arten von Spielen	Gruppenarbeit; L-S Gespräch; Diskussion	Tafel; Farbkreide
30 Minuten	C Beispiel: „Nim-Spiele“	2er Teams spielen jeweils und versuchen Fragen zu beantworten; Besprechung der Fragen im Plenum;	Gruppenarbeit; L-S Gespräch; Diskussion	Spielgegenstände (zum Beispiel: Gummibären); Tafel; Handout
15 Minuten	D Einstieg in die Spieltheorie	Erarbeitung der ersten Begriffe an der Tafel	L-S Gespräch; Frontalunterricht	Tafel

Konkreter Ablauf

A) Dialog mit Schülerinnen und Schülern

Mögliche Fragen an die Schülerinnen und Schüler:

- Wieso habt ihr euch für dieses Wahlpflichtfach entschieden?
- Wer hat schon einmal etwas über Spieltheorie gehört?
- Was stellt ihr euch unter Spieltheorie vor?
- Was versteht ihr unter dem Begriff „Spiel“?

B) Erarbeitung der Arten von Spielen

Zu Beginn dieser Phase wird die Klasse in Vierer-Gruppen geteilt. Die Aufgabe jeder Gruppe besteht darin eine Liste von Spielen zu erstellen. Dafür haben sie ungefähr fünf Minuten Zeit. Anschließend soll jede Schülerin und jeder Schüler mindestens ein Spiel nennen. Diese Spiele werden auf der Tafel geschrieben. Es sollten danach zwischen 20 und 30 Spiele an der Tafel stehen.

Im nächsten Schritt geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler versuchen, die an der Tafel gesammelten Spiele in Kategorien zu ordnen. Dazu gehen sie zurück in die Kleingruppen und überlegen sich mögliche Kategorien. Danach wird im Plenum diskutiert:

- Welche Arten von Spiele könnte es geben?
- Welche Spiele gehören in welche Kategorie?
- Gibt es Überschneidungen bei bestimmten Spielen?
- Welche Kategorien/Spiele könnten für das Thema „Spieltheorie“ interessant sein?

4.3 Beispiele für Stundenplanungen

Überleitung zu den drei Arten von Spielen (siehe 1.2). Betont sollte werden, dass der Fokus der Spieltheorie auf strategischen Spielen liegt.

C) Das „Nim-Spiel“

Die Lehrperson bereitet diverse Gegenstände, die sich für ein „Nim-Spiel“ eignen, vor.

Zu Beginn dieser Phase werden zweier Teams gebildet. Jedes Team hat die Aufgabe einige Male das „Nim-Spiel“ zu spielen. Anschließend teilt die Lehrperson ein Handout mit Fragen zu diesem Spiel (siehe 1.2) aus, welche im Team beantwortet werden sollen. Abschließend werden die Ergebnisse im Plenum diskutiert und an der Tafel ausgearbeitet.

D) Einführende Begriffe

Zum Abschluss dieser Einheit erzählt die Lehrperson Grundlegendes und Wissenswertes über die Spieltheorie. Wichtige Begriffe werden an der Tafel definiert.

Folgendes soll in dieser Phase unbedingt erklärt werden:

- Was sind Merkmale strategischer Spiele?
- Spieltheorie untersucht Entscheidungen.
- Definition: Normalform

Optional: Ausblick auf die nächste Einheit

4.3.2 Zweite Einheit

Ziel: Erste Erfahrungen und Anwendungen von Lösungsstrategien von strategischen Spielen.

Zeit	Phase		Geplanter Unterrichtsverlauf	Sozialform, Methode	Medium
10 Minuten	Begrüßung, Wiederholung		Gemeinsames Wiederholen der Eigenschaften und Begriffe strategischer Spiele	L-S Gespräch	Tafel
5 Minuten	A	Schere-Stein-Papier	SuS spielen Schere-Stein-Papier → Begriff: Nullsummenspiele	Gruppe	
5 Minuten		Überlegungen, Darstellungsformen	Wie kann Schere-Stein-Papier dargestellt werden	L-S Gespräch, frontal	Tafel
15 Minuten	B	Kartenspiel	„zufällige“ Karten werden an 2er Teams verteilt; SuS spielen	L-S Gespräch, Gruppe	Tafel
10 Minuten	Begriffe sortieren		L erklärt neue Begriffe	Frontal	Tafel
10 Minuten	C	Kartenspiel mit bestimmter Vorgabe	SuS überlegen sich Lösung des Spiels	Einzelarbeit	
5 Minuten	Definition Min-Max-Strategie		Definition und Erklärung anhand des Beispiels	Frontal	Tafel, Farbkreiden
25 Minuten	D	Beispiel Gefangenendilemma	Handout austeilen; SuS lesen Beispiel durch; Erste Diskussion im Plenum; Spiel spielen; Darstellung und Lösung diskutieren	Einzelarbeit, L-S Gespräch; Interaktion mit gesamter Klasse	Handout, Tafel
5 Minuten	Definition		Definition: Darstellung von Zweipersonenspielen	Frontal	Tafel

Konkreter Ablauf

A) Schere-Stein-Papier: Überlegungen, Darstellung

Schülerinnen und Schüler sollen durch die Durchführung des Spiels ein Gefühl für ein einfaches strategisches Spiel erhalten. Die Spielregeln sind gemäß Beispiel II.1. Es ist so möglich, dass die Schülerinnen und Schüler erste Überlegungen zur Darstellung strategischer Spiele anstellen und ein intuitives Verständnis für Nullsummenspiele erfahren. Die Darstellung des Spiels erfolgt gemeinsam mit der Lehrperson an der Tafel.

B) Kartenspiel (vgl. Beispiel II.2)

Die Lehrperson bereitet ein Kartendeck vor und bildet in der Klasse Zweier-Gruppen. Eine Gruppe erhält das vorbereitete Spiel (vgl. „Spielvariante 1“ von Beispiel II.2), die anderen Gruppen bekommen zufällige Karten. Die Schülerinnen und Schüler spielen anschließend das Spiel. Danach erzählt die Klasse über ihre Erlebnisse. Dabei sind folgende Fragen zu klären:

- Welcher Spieler konnte eine höhere Auszahlung erzielen?
- Konnte ein Spieler immer gewinnen?
- Welche Überlegung hat der verlierende Spieler angestellt?

Übergang zu den Begriffen:

- Reine Strategie
- Dominante Strategie
- Auszahlung
- Gleichgewicht (-spunkt)

C) Kartenspiel mit bestimmter Vorgabe

Die Schülerinnen und Schüler bekommen die Aufgabe das Spiel „Spielvariante 2“ von Beispiel II.2 selbstständig zu analysieren. Anschließend werden mögliche Lösungen im Plenum diskutiert. Dies bildet den Übergang zur „Min-Max-Lösungsstrategie“.

D) Beispiel Gefangenendilemma (Beispiel II.6)

Die Schülerinnen und Schüler bekommen ein Handout mit der Geschichte des Gefangenendilemmas und Fragen zum Gefangenendilemma. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich zuerst selbstständig Gedanken zu diesem Thema machen. Danach wird im Plenum über eine mögliche Lösungsstrategie diskutiert. Es besteht die Möglichkeit das Spiel mit den Schülerinnen und Schülern zu spielen. Danach wird im Plenum über eine mögliche Lösungsstrategie diskutiert.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde in die spannende Welt der Spieltheorie eingetaucht. Bereits nach kurzer Einarbeitungszeit ist es möglich erste Spiele zu analysieren, Strategien auszuarbeiten und diese zu reflektieren. Genau dieser rasche Zugang beschert womöglich auch Schülerinnen und Schülern erste schnelle Erfolge. Die Mathematik in den Aufgaben meiner Diplomarbeit ist in vielen Fällen auf das Zeichnen von Graphen linearer Funktionen und das Lösen eines Systems zweier linearen Gleichungen beschränkt. Somit können bereits ab der neunten Schulstufe einige spieltheoretische Problemstellungen bearbeitet und erste Nash-Gleichgewichte gefunden werden. Dabei können durchaus schon Spiele in der extensiven Form besprochen werden. Die Interpretation von gemischten Nash-Gleichgewichten eignet sich aufgrund des Begriffes „Wahrscheinlichkeit“ ab der elften Schulstufe.

Die Spieltheorie umfasst natürlich mehr als das Auffinden von Nash-Gleichgewichten in Normal- und Extensivform-Spielen. Die Arbeit befasst sich hierbei mit einem einfachen Einstieg in die Spieltheorie für die Schule.

Zwei weiterführende Überlegungen wären (vgl. ABLEITINGER & HAUER-TYPPELT, 2008, S.11-12):

- 1) Was passiert, wenn nicht nur zwei, sondern mehrere Spieler gegeneinander antreten?
- 2) Wie verändert sich die Situation, wenn die Spieler nicht nur zwei, sondern unendlich viel Strategien zur Verfügung haben?

Zur Beantwortung der zweiten Frage, befasst man sich mit kontinuierlichen Strategieräumen. Kontexte, in denen diese Fragen aufkommen, sind etwa Preispolitik (z. B. „Wie viel Euro soll ich für ein bestimmtes Produkt verlangen?“) oder sinnvolle Nutzung eines Raumes oder Fläche (z. B. Ackerland oder Geschäftsfläche).

5.1 Ein letztes Beispiel

Beispiel V.1 - Das Ultimatumspiel – Angabe und Fragen (vgl. BERNINGHAUS, EHRHART & GÜTH, 2010, S. 114 ff.)

Bei diesem Spiel bekommt Spieler 1 eine gewisse Menge Geld vom Spielleiter. Allerdings darf Spieler 1 das Geld nicht einfach behalten, sondern muss einen Anteil davon Spieler 2 anbieten. Spieler 1 entscheidet, wie hoch dieser Anteil ausfällt. Spieler 2 hat nach dem Erhalt des Angebots zwei Möglichkeiten. Er kann sich entscheiden das Angebot anzunehmen oder abzulehnen. Nimmt Spieler 2 das Angebot an, so wird das Geld gemäß der Vereinbarung aufgeteilt. Lehnt Spieler 2 jedoch das Angebot ab, so gehen beide Spieler leer aus.

5.1 Ein letztes Beispiel

Folgende Fragen können sich die Spieler vor Beginn des Spiels stellen:

Als Spieler 1

- Welchen Anteil biete ich Spieler 2 an?
- Um den eigenen Anteil zu maximieren stellt sich die Frage, wie groß der kleinstmögliche Anteil lautet, den Spieler 2 annimmt.

Als Spieler 2

- Welche Angebote nehme ich an?
- Wovon hängt meine Zusage zum Angebot ab?

Weitere Fragen für das Ultimatumspiel:

- Was passiert, wenn der zweite Spieler ein Gegenangebot machen darf?
- Was passiert, wenn mehrere Spieler teilnehmen oder Gruppen gegeneinander antreten?
- Wie realistisch sind Lösungen? Stimmen Logik und menschliches Verhalten überein?

Zum Thema „Ultimatumspiel“ arbeitet die Firma 3DataX an einer App für Android und iOS. Der Name der App lautet „Waltzing Numbers“ (vgl. Internetquelle [5]). Zum jetzigen Zeitpunkt ist die App allerdings noch in einer sehr frühen Phase, weshalb ich das Ultimatumspiel und mögliche didaktische Ansätze mit „Waltzing Numbers“ nicht weiter ausführe. In weiterführenden Arbeiten kann dies ausführlich bearbeitet werden

Literaturverzeichnis

- ABLEITINGER, C. (2009). So erhält ein Nash-Gleichgewicht gleich Gewicht. In: H.-S. SILLER & J. MAAß (Hg.): *Modellieren lernen*, Hildesheim: Franzbecker, 110–124.
- ABLEITINGER, C. & HAUER-TYPPELT, P. (2008). Spieltheorie im Schulunterricht – kann es das spielen? *ÖMG-Didaktik-Hefte* (Band 40), 1–12.
- ABLEITINGER, C. & HAUER-TYPPELT, P. (2011). Was haben „Koalitionsabkommen“ und „jugendliche Draufgänger“ miteinander zu tun? - Klassifizieren spieltheoretischer Situationen. In: G. GREEFRATH (Hg.): *Unterrichts- und Methodenkonzepte*, Hildesheim: Franzbecker, 1-21.
- BARTHOLOMAE, F. & WIENS, M. (2016). *Spieltheorie. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch*. Wiesbaden: Springer Gabler.
- BERNINGHAUS, S.K., EHRHART, K.-M. & GÜTH, W. (2010). *Strategische Spiele. Eine Einführung in die Spieltheorie*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- BEWERSDORFF, J. (2012). *Glück, Logik und Bluff. Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- DIXIT, A.K. & NALEBUFF, B.J. (1997). *Spieltheorie für Einsteiger. Strategisches Know-how für Gewinner*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel.
- DIXIT, A.K. & VAN SKEATH MULBREGT, S. (2004). *Games of strategy*. New York, NY: Norton.
- GIRNAT, B. (2010). Mathematik auf der Anklagebank - Didaktische Überlegungen zu einem Ausflug in die Spieltheorie. In: R. BRUDER & A. EICHLER (Hg.): *Modellierung von Eratosthenes bis Google*, Hildesheim: Franzbecker, 63-74
- GRIESEL, H. (Hg.) (2003). *Elemente der Mathematik - Unterrichtsmaterialien*. Hannover: Schroedel.
- HAUER-TYPPELT, P. (2009). Realitätsnahe Entscheidungssituationen modellieren und analysieren. In: A. BRINKMANN & R. OLDENBURG (Hg.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, Hildesheim: Franzbecker, 67–82.
- HOLLER, M.J. & ILLING, G. (2000). *Einführung in die Spieltheorie*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- MÜLLER, A. (2007). Sprouts - ein Strategiespiel für zwei Personen. In: G. GREEFRATH & J. MAAß (Hg.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, Hildesheim: Franzbecker, 62-69
- PICHER, F. (2007). Spiele und Texte als Reflexionsanlässe - Mathematik als soziales Reflexionsmittel. In: G. GREEFRATH & J. MAAß (Hg.): *Unterrichts- und Methodenkonzepte*, Hildesheim: Franzbecker, 70-79.
- RIECHMANN, T. (2014). *Spieltheorie*. München: Vahlen.
- RIECK, C. (1993). *Spieltheorie. Einführung für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler*. Wiesbaden: Gabler Verlag.

WESSLER, M. (2012). *Entscheidungstheorie. Von der klassischen Spieltheorie zur Anwendung kooperativer Konzepte*. Wiesbaden: Gabler Verlag.

Internetquellen:

- [1] <https://www.wienerlinien.at/eportal3/ep/channelView.do/pageTypeId/66526/channelId/-52603>
- [2] <http://www.bpb.de/internationales/amerika/usa/10625/reagan-jahre?p=all>
- [3] https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf
- [4] <https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2007%20Band%2040/VortragAbleitingerHauerTyppelt.pdf>
- [5] <http://www.waltzingatoms.com/waltzing-numbers>