



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Genau und doch anders

Die Geometrie im Spannungsfeld der Kunst

verfasst von / submitted by

Bianca Prenner

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 456 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium Unterrichtsfach
Mathematik, Geographie und Wirtschaftskunde

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, am 3. Juni 2018

Bianca Prenner

Danksagung

Ich möchte mich hier an dieser Stelle bei allen Personen bedanken, die mich während meiner Studienzeit begleitet haben. Besonders danke ich meiner Familie und meinen Freunden, die Kombination meiner Studienfächer befürwortet und darin eine spezielle Vernetzung gesehen haben. Weiters bedanke ich mich bei Univ.-Lekt. Ingo Nussbaumer, der mich nicht nur auf die Idee für diese Diplomarbeit gebracht hat, sondern stets für Rückfragen und Literaturtipps offen war. Last but not least, geht mein größtes „Danke!“ an ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith, der sich bereit erklärt hat, mich bei meiner Diplomarbeit zu betreuen und mich immer unterstützt hat.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Ebene Geometrie	2
1.1 Punkt, Gerade, Strecke und Winkel	2
1.2 Das Dreieck	5
1.2.1 Kongruenzsätze	7
1.2.2 Ähnlichkeitssätze	7
1.2.3 Der Satz des Thales	8
1.2.4 Besondere Linien und Punkte im Dreieck	11
1.2.5 Der Satz des Pythagoras	25
1.3 Das Viereck	27
1.3.1 Das Haus der Vierecke	27
1.4 Das Vieleck	30
1.4.1 Flächeninhalte von Polygonen	31
1.5 Der Kreis	36
2 Polyeder und krummflächige Körper	38
2.1 Das Polyeder	38
2.2 Zylinder und Kegel	41
2.3 Die Kugel	42
2.4 Einblick platonische und archimedische Körper	42
3 Ähnlichkeitsgeometrie	46
3.1 Die zentrische Streckung	47
3.2 Strahlensätze	49
3.3 Zentral- und Parallelprojektion	50
4 Geometrie als Thema der Kunst	53
4.1 Geschichtlicher Einblick	53
4.2 Geometrie als Thema in der Kunst vor der Moderne	57
4.2.1 Lorenz Stoer und die Geometrie	58
4.3 Der Kubismus und die Geometrie	62
4.3.1 Analytischer Kubismus und die Geometrie	63
4.3.2 Synthetischer Kubismus und geometrische Formen	68
4.4 Suprematismus	71
4.4.1 Die Ikone: Das schwarze Quadrat auf weißem Hintergrund	71
4.5 Der Konstruktivismus	76
4.5.1 Konstruktivistische Formen	77
4.5.2 El Lissitzky und „Die Geschichte von den zwei Quadraten“	79

4.6	Das Bauhaus	82
4.6.1	Konstruktion und Form im Bauhaus	83
4.6.2	Punkt und Linie zu Fläche	84
4.6.2.1	Der Punkt.....	85
4.6.2.2	Die Linie.....	87
4.6.2.3	Die Grundfläche	91
5	Zusammenfassung	94
6	Abstract	95
7	Schlusswort	96
8	Literaturverzeichnis.....	98
9	Abbildungsverzeichnis	101

Einleitung

„A drawing is simply a line going for a walk.“

(Paul Klee)¹

Dieses Zitat von Paul Klee beschreibt in einer einfachen Art und Weise wie man eine Verbindung zwischen einer geometrischen Form und dem künstlerischen Aspekt schaffen kann. Ebenso zeigt es auch, dass die Mathematik nicht nur benachbarte Wissenschaftsfelder, wie beispielsweise die Physik, durchzieht, sondern auch in der Kunst von besonderem Interesse ist, mit dem Unterschied, dass dies oft nicht offensichtlich erkennbar ist. Worin liegen nun die Verbindungen zwischen Mathematik und Kunst?

Beide haben vor allem eines gemeinsam: Sie suchen nach „pattern“, also Mustern, die sich ihnen durch Erforschung ihrer Umgebung oder durch andere Gegebenheiten eröffnen. Eine Thematik war und ist für die Kunst und die Mathematik noch von besonderer Bedeutung: Die Geometrie.

Schon seit Jahrhunderten wird die Geometrie nicht nur für mathematische Berechnungen und Konstruktionen verwendet, sondern findet auch in der Darstellung von Räumen, Körpern, Proportionen und andere Ausdrucksweisen ihren Weg auf die Leinwand. Doch wie sieht es aus, wenn die Geometrie mit ihren Formen, Figuren und speziellen Eigenschaften selbst zum Thema der Kunst wird?

Auf der Suche nach einer Antwort auf diese Frage werden die Kunstströmungen der Moderne sämtliche Ansichten und Varianten parat haben, jedoch können aus rahmentechnischen Gründen nicht alle Kunstrichtungen ihren Eingang in diese Arbeit finden. Vorrangig werden künstlerische Arbeiten behandelt, die sich mit der Malerei und deren Form- und Farbgebung beschäftigt haben, da die Malerei und die Geometrie eine lange historische Entwicklung verbindet.

Zu Beginn dieser Arbeit werden Schritt für Schritt die geometrischen Begriffe und Formen definiert, um später besser verstehen zu können, wie die Kunst sich diese zu eigen macht und in ihre Sprache übersetzt. Die Kunst ist freier, da sie nicht verpflichtet ist sich an mathematische Regeln und Normen zu halten.

¹ Marder (2018), S. 1

1 Ebene Geometrie

1.1 Punkt, Gerade, Strecke und Winkel

Der Punkt ist in der Mathematik ein wesentliches Element, auch wenn er zugleich als das simpelste Objekt erscheinen mag. Er gilt in der Geometrie als „unendlich klein“ und hat somit keine Ausdehnung, weshalb man hier von einer „Nulldimension“ sprechen kann. Vor allem in Europa werden einzelne Punkte durch lateinische Buchstaben wie A, B, P, Q usw. bezeichnet.²

Ausgehend von der ebenen Geometrie betrachtet man eine Ebene als eine Menge von Punkten und jede Figur in dieser Ebene ist eine Teilmenge der Menge der Punkte dieser Ebene. Eine der wichtigsten ebenen Figuren ist die Gerade.³

Diese kann durch unendlich viele Punkte, die geradlinig aneinander gereiht sind, oder durch eine Verschiebung, der sogenannten Translation, eines Punktes erzeugt werden. Sie ist, im Unterschied zum Punkt, eindimensional.⁴ Die Gerade besitzt keine Breite und hat auch kein Ende.⁵

Die Gerade besitzt folgende Eigenschaften:

- (1) Jede Gerade besitzt unendlich viele Punkte.
- (2) Durch einen Punkt können unendlich viele Geraden verlaufen.
- (3) Zwei verschiedene Punkte verbindet genau eine Gerade.
- (4) Zwei nicht idente Geraden haben entweder keinen oder genau einen Punkt gemeinsam.
- (5) Zu jedem Punkt P und zu jeder Geraden g existiert genau eine Gerade h mit $P \in h$ und $g \parallel h$.

² vgl. Glaeser (2007), S. 2

³ vgl. Kirsche (2006), S. 9

⁴ vgl. Glaeser (2007), S. 2

⁵ vgl. Lundy und Martineau (2017), S. 64

Ebenfalls sind Geraden keine begrenzten Strecken, da sie weder einen Anfangspunkt, noch einen Endpunkt besitzen.⁶

Strecke:

Sei g eine Gerade in der Ebene, die durch die Punkte A und B geht.

Definition 1.1: Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte, die aus A , B und allen Punkten von g zwischen A und B besteht. A und B nennt man Endpunkte der Strecke.⁷

Wenn zwei Punkte A und B verschiedene Punkte sind, dann nennt man die Gerade durch A und B die Verbindungsgerade der Punkte A und B .

Falls die Gerade g und die Gerade h verschieden sind, dann haben sie genau einen Punkt S gemeinsam. S ist dann der Schnittpunkt der Geraden g und h .

Daraus folgt, dass zwei Geraden g und h , welche sich nicht schneiden, keinen Punkt gemeinsam haben und in dem Fall parallel verlaufen. Die Schreibweise $g \parallel h$ wird dafür verwendet. Falls sie jedoch mindestens zwei Punkte gemeinsam haben, sind sie ident.⁸

Winkel:

Zwei Geraden g und h schneiden sich in der Ebene. Dabei schließen sie Winkel mit ein.

Definition 1.2: Jeder Winkel mit 90° ist ein rechter.

⁶ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 2

⁷ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 81

⁸ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 2

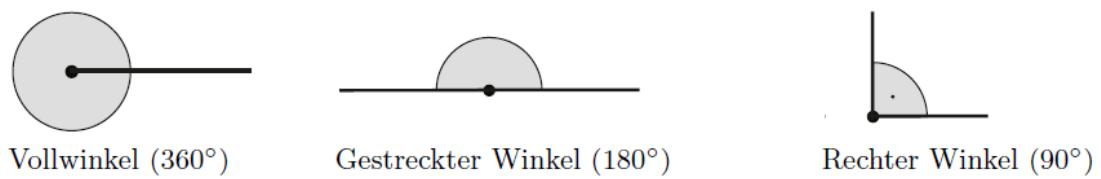


Abbildung 1.1: Vollwinkel, gestreckter Winkel und rechter Winkel

Somit können wir für den Winkel α definieren:

Definition 1.3: Ein Winkel α , der kleiner ist als 90° , nennt man spitzer Winkel.

Definition 1.4: Ein Winkel α , der größer ist als 90° , nennt man stumpfer Winkel.

In Abbildung 1.1 und Abbildung 1.2 sind die definierten als auch weitere Winkelbezeichnungen zu sehen.⁹

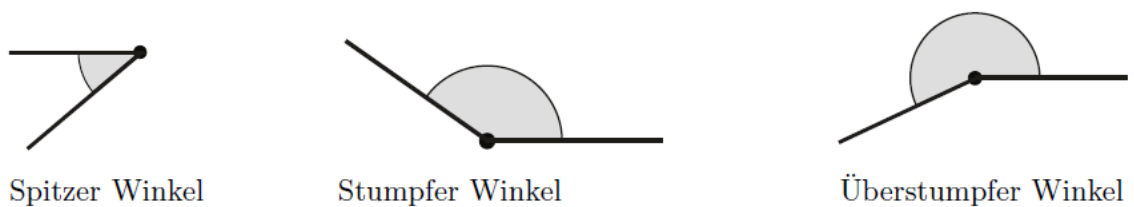


Abbildung 1.2: Spitzer, stumpfer und überstumpfer Winkel

⁹ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 11

1.2 Das Dreieck

Liegen drei Punkte A, B, C nicht auf einer Geraden, so legen diese Punkte ein Dreieck fest.¹⁰

Die jeweiligen gegenüberliegenden Seiten der Eckpunkte A, B, C werden mit den entsprechenden Kleinbuchstaben a, b, c bezeichnet.¹¹

Ebenfalls ist es möglich mithilfe der jeweiligen Strecken $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{CA} = b$ das Dreieck festzulegen. Dadurch lassen sich auch alle anderen Teile des Dreiecks bestimmen, wie beispielsweise die Winkel. In einem Dreieck ABC können somit die Innenwinkel $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$ und $\gamma = \sphericalangle ACB$ bestimmt werden.¹²

Weiters gilt in einem Dreieck:

Satz 1.1:¹³ (Dreiecksungleichung) $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$

Satz 1.2:¹⁴ Die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck beträgt 180° .

Satz 1.3:¹⁵ In einem Dreieck gehört zur größeren Seite stets der größere Gegenwinkel.

Daraus ergeben sich folgende Forderungen:¹⁶

- Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, dann stimmen sie auch im Dritten überein.
- Es kann maximal ein stumpfer Winkel im Dreieck existieren, die beiden anderen Winkel müssen daher spitz sein.
- Es kann maximal ein rechter Winkel im Dreieck existieren, die beiden anderen Winkel müssen daher spitz sein.

¹⁰ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 3

¹¹ vgl. Agricolar und Friedrich (2011), S. 6

¹² vgl. Glaeser (2007), S. 3

¹³ Agricolar und Friedrich (2011), S. 15

¹⁴ Glaeser (2007), S. 3

¹⁵ Krauter und Bescherer (2013), S. 62

¹⁶ vgl. Kirsche (2006), S. 19

Betrachtet man nun nicht nur die jeweiligen Strecken bzw. Seiten des Dreiecks, sondern die Trägergeraden der Dreiecksseiten, so werden an jeder Ecke vier Winkel festgelegt.

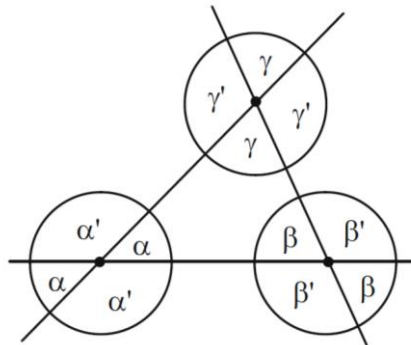


Abbildung 1.3: Innen- und Außenwinkel eines Dreiecks

Mit α , β und γ sind in der Abbildung 1.3 die sogenannten Innenwinkel gekennzeichnet, sie liegen also innerhalb der Figur.

Definition 1.5: Die Nebenwinkel zum jeweiligen Innenwinkel eines Dreiecks nennt man Außenwinkel.

Die Außenwinkel für den Winkel α in der Abbildung 1.3 sind somit zweimal α' , denn es gilt, dass die beiden Außenwinkel gleich groß sind.¹⁷

Somit wird für ein Dreieck mit den jeweils zugehörigen Außenwinkeln α' , β' , und γ' folgende Eigenschaften festgelegt:¹⁸

- Jeder Innenwinkel und sein zugehöriger Außenwinkel ergänzen sich auf 180° :
 $\alpha + \alpha' = 180^\circ, \beta + \beta' = 180^\circ, \gamma + \gamma' = 180^\circ$.
- Die Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel ist gleich jeder Außenwinkel:
 $\alpha' = \beta + \gamma, \beta' = \alpha + \gamma, \gamma' = \alpha + \beta$
- Die Summe aller drei Außenwinkel ergibt zusammen 360° .

¹⁷ vgl. Kirsche (2006), S. 19

¹⁸ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 275ff

1.2.1 Kongruenzsätze

Definition 1.6: Zwei oder mehrere Figuren heißen kongruent, wenn die entsprechenden Seitenlängen gleich bleiben.¹⁹

Definition 1.7: Zwei Dreiecke sind kongruent (deckungsgleich), wenn es eine kongruente Abbildung gibt, sodass sich das eine Dreieck in das andere abbildet.²⁰

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie:²¹

- in drei Seitenlängen übereinstimmen. (abgekürzt SSS)
- übereinstimmen in zwei Seitenlängen und der Größe des eingeschlossenen Innenwinkels. (abgekürzt SWS)
- übereinstimmen in einer Seitenlänge und der Größe der beiden anliegenden Innenwinkel. (abgekürzt WSW)
- übereinstimmen in zwei Seitenlängen und der Größe des Innenwinkels, der der größeren Seite gegenüberliegt. (abgekürzt SSWg)

Mithilfe dieser Kongruenzsätze können kongruente Dreiecke mit nur drei Bestimmungsstücken konstruiert werden.

1.2.2 Ähnlichkeitssätze

Definition 1.8:²² Zwei Figuren nennt man ähnlich, wenn sie in den entsprechenden Winkeln übereinstimmen und das Verhältnis entsprechender Seitenlängen konstant ist.

Definition 1.9:²³ Zwei Formen nennt man ähnlich, falls sie durch eine Ähnlichkeitsabbildung aufeinander abgebildet werden können.

¹⁹ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 15

²⁰ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 63

²¹ Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 165

²² vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 215

²³ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 192f

Nachdem nun der Begriff definiert wurde, folgen nun die wichtigsten Ähnlichkeitssätze für Dreiecke.

Zwei Dreiecke sind bereits dann schon ähnlich, wenn:

- sie in zwei Winkel übereinstimmen (abgekürzt WW).
- sie in den Verhältnissen entsprechender Seitenlängen übereinstimmen (abgekürzt SSS).
- sie im Verhältnis zweier Seitenlängen und in der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen (abgekürzt SWS).

1.2.3 Der Satz des Thales²⁴

Satz 1.4: Sei ABC ein Dreieck mit Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$. Dann ist der Winkel γ bei C genau dann ein Rechter, wenn C auf dem Kreis mit Mittelpunkt M und dem Radius $l(\overline{AM})$ liegt.

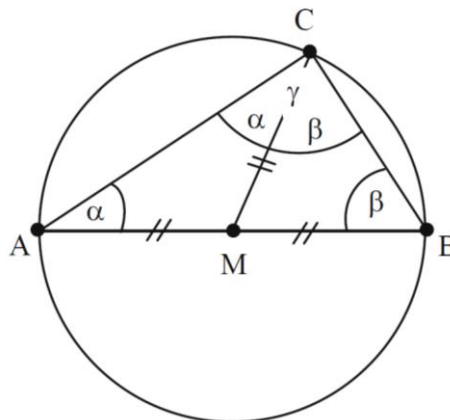


Abbildung 1.4: Thaleskreis

²⁴ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 298

Beweis:²⁵

Da es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, muss der Beweis in beide Richtungen gezeigt werden.

„ $\Rightarrow$ “

Nun gilt es zu zeigen: Wenn C auf dem Kreis mit Mittelpunkt M liegt und den Radius $l(\overline{AM})$ hat, dann ist der Winkel γ ein rechter.

Nach den Voraussetzungen teilen wir das Dreieck ABC in die zwei gleichschenkeligen Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle BCM$ und können die Winkel gemäß der Abbildung 1.4 angeben.

Es gilt daher:

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ \quad / \text{ aufgrund der Winkelsumme } \triangle ABC$$

$$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$$

Aus $\gamma = \alpha + \beta$ folgt:

$$\Rightarrow 2\gamma = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

Somit ist die obere Behauptung bewiesen und in weiterer Folge muss noch die Rückrichtung bewiesen werden.

„ $\Leftarrow$ “

Es bleibt noch zu zeigen: Wenn $\gamma = 90^\circ$, dann liegt der Punkt C auf dem Kreis mit Mittelpunkt M und dem Radius $l(\overline{AM})$. Diese Behauptung wird indirekt bewiesen.

Angenommen, der Winkel $\gamma = 90^\circ$ und C liegt nicht auf dem Kreis. Dann kann C nur außerhalb oder innerhalb des Kreises liegen.

²⁵ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 289f

1. Fall: C liegt außerhalb des Kreises

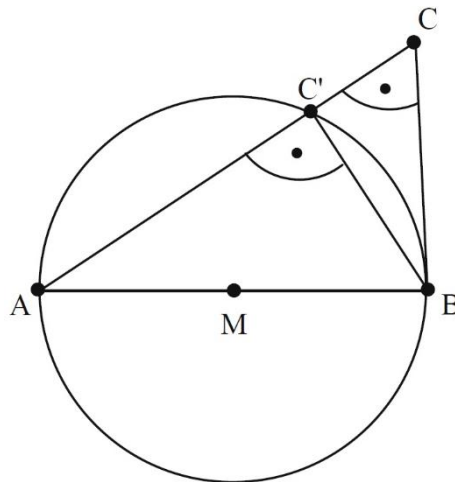


Abbildung 1.5: Hilfszeichnung zum Beweis des Thaleskreises

Verbinden wir nun die Punkte A und C, so schneidet die Strecke $\overline{AC}$ den Kreis mit dem Radius $l(\overline{AM})$ im Punkt C' .

Nach „ $\Leftarrow$ “ ist der Winkel $AC'B$ ein rechter Winkel und somit muss auch der Winkel $BC'C$ ein Rechter sein, da C' auf $\overline{AC}$ liegt.

Falls der Winkel $BC'C$ ein Rechter ist und die Winkelsumme im Dreieck $BC'C$ 180° beträgt, so muss der Winkel γ kleiner als 90° sein.

Somit ergibt das einen Widerspruch zur Annahme und die Behauptung ist somit bewiesen.

Mit dem 2. Fall verfährt man analog, nur das die Strecke $\overline{AC}$ über C hinaus verlängert wird bis zum Schnittpunkt C' mit dem Kreis.

□

1.2.4 Besondere Linien und Punkte im Dreieck

a) Umkreis

Definition 1.10: Sei m eine Gerade. Dann heißt m Streckensymmetrale einer Strecke $\overline{AB}$, wenn die Gerade senkrecht durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ geht.²⁶

Satz 1.5:²⁷ Die Streckensymmetralen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M . Dieser ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC .

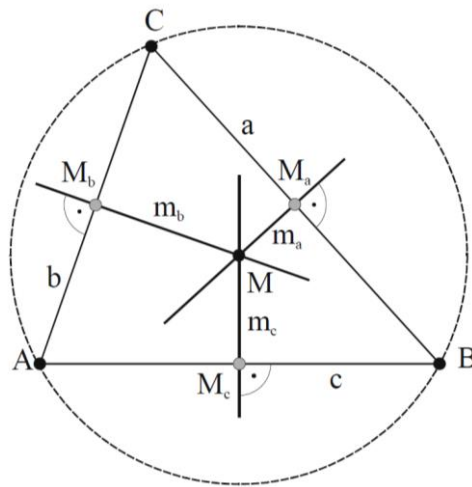


Abbildung 1.6: Umkreis eines Dreiecks

Je nachdem ob das Dreieck spitzwinklig, stumpfwinklig oder rechtwinklig ist, liegt der Mittelpunkt des Umkreises im oder außerhalb des Dreiecks.²⁸

Beweis:²⁹

Die Punkte der Streckensymmetrale m_{AB} der Dreiecksseite AB haben von A die gleiche Entfernung wie von B. Ebenfalls haben alle Punkte der Streckensymmetrale m_{BC} der Dreiecksseite BC von B denselben Abstand wie von C.

²⁶ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 111

²⁷ Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 278

²⁸ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 279

²⁹ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 19

Aufgrund dessen gilt für den Schnittpunkt M der Streckensymmetralen m_{BC} und m_{AB} :

$$d(M, A) = d(M, B) \text{ und } d(M, B) = d(M, C) \quad \text{also auch} \quad d(M, A) = d(M, C).$$

Hiermit wurde gezeigt, dass M auf der Streckensymmetrale m_{AC} der Dreiecksseite AC liegt. Damit wurde auch gezeigt, dass sich die Streckensymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, der der Mittelpunkt des Kreises ist, der alle Ecken des Dreiecks schneidet.

□

b) Höhenlinie

Die Höhen eines Dreiecks sind die Lotgeraden von den Ecken des Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten. Ebenfalls bezeichnet man die Strecken vom Lotfußpunkt bis zum dazugehörigen Eckpunkt als Höhen.³⁰

Satz 1.6:³¹ Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt H .

Beweis:³²

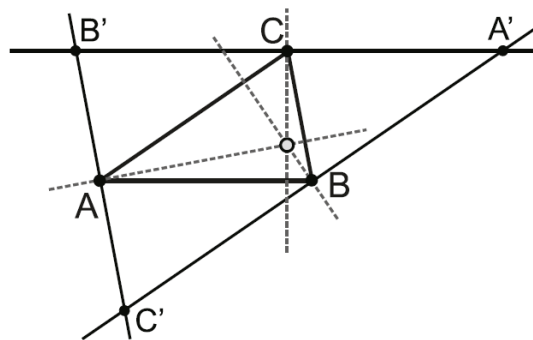


Abbildung 1.7: Mittendreieck

Durch eine Konstruktion, welche in Abbildung 1.7 zu erkennen ist, kann der Höhensatz auf den vorherigen Satz 1.5 zurückgeführt werden.

Für das Dreieck ABC zeichnet man Parallelen der Verbindungsgeraden g_{AB} , g_{AC} , g_{BC} durch die jeweilige dritte Ecke C , B und A des Dreiecks. Dadurch schneiden sich jeweils zwei Parallelen

³⁰ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 20

³¹ Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 279

³² vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 20

und wir erhalten die Eckpunkte A' , B' und C' . Dieses neue Dreieck ist ähnlich zum Dreieck ABC .

Die Punkte A , B , C sind dann die Mittelpunkte der Seiten des $\triangle A'B'C'$. Weiters ist das Dreieck ABC dann das sogenannte Mittendreieck von $\triangle A'B'C'$. Das folgt daraus, dass die Wechselwinkel an den Parallelen gleich groß sind und daher laut Kongruenzsatz (WSW) die Dreiecke BAC' , $CB'A$, $A'CB$ alle zum Dreieck ABC kongruent sind. Daher sind die Höhen des Dreiecks ABC die Streckensymmetralen des Dreiecks $A'B'C'$.

Da sich diese nach Satz 1.5 nur in einem Punkt schneiden, ist der Satz 1.6 somit bewiesen.

□

c) Schwerlinien

Die Schwerlinien sind diejenigen Strecken, die die Mittelpunkte der Seiten mit dem entsprechenden gegenüberliegenden Winkel verbindet.³³

Satz 1.7:³⁴ Die Schwerlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S . Dieser teilt die Linien im Verhältnis 1:2 und heißt Schwerpunkt des Dreiecks.

Dieser Punkt S ist in der Abbildung 1.8 deutlich zu erkennen.

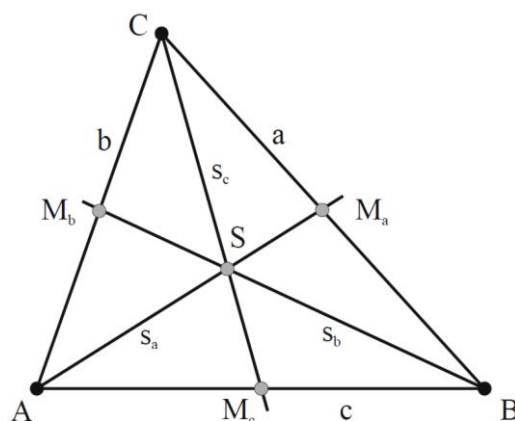


Abbildung 1.8: Schwerpunkt und Schwerlinien eines Dreiecks ABC

³³ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 257

³⁴ vgl. ebd. (2014), S. 280

Beweis:³⁵

Nach dem Satz über die Höhenlinien ist $M_a M_b \parallel AB$ und $l(\overline{M_a M_b}) = \frac{1}{2} \cdot l(\overline{AB})$.

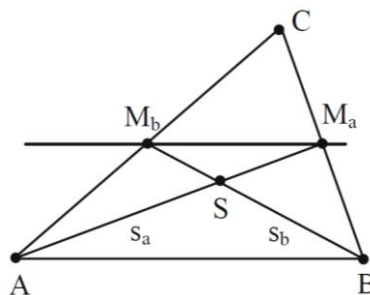


Abbildung 1.9: Hilfszeichnung für Beweis des Schwerpunkts

Durch Einzeichnen der Schwerlinien s_a und s_b und den Schnittpunkt S ergibt sich eine Strahlensatzfigur mit Zentrum S, welche auch auf der Abbildung 1.9 zu sehen ist.

Somit können folgende Verhältnisse festgelegt werden:

$$\begin{aligned}
 l(\overline{SM_a}) : l(\overline{SA}) &= l(\overline{SM_b}) : l(\overline{SB}) && / \text{ nach 1. Strahlensatz} \\
 \wedge \quad l(\overline{SM_b}) : l(\overline{SB}) &= l(\overline{M_a M_b}) : l(\overline{AB}) && / \text{ nach 2. Strahlensatz} \\
 \wedge \quad l(\overline{M_a M_b}) : l(\overline{AB}) &= 1 : 2 && / \text{ siehe Teilbeweis Höhensatz}
 \end{aligned}$$

Somit teilt S die Schwerlinien s_a und s_b im Verhältnis 1 : 2. (1)

Nun betrachten wir die Schwerlinien s_a und s_c und ihren Schnittpunkt S', welche in der Abbildung 1.10 zu sehen sind.

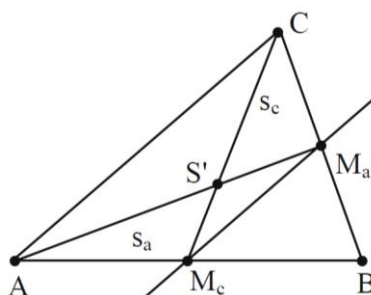


Abbildung 1.10: Hilfszeichnung zum Beweis des Schwerpunkts

³⁵ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 280f

Aus dem Beweis über die Höhenlinien wissen wir, dass $M_a M_c \parallel AC$ und $l(\overline{M_a M_c}) = \frac{1}{2} \cdot l(\overline{AC})$.

Somit kann analog vorgegangen werden wie oben und es gilt:

$$\begin{aligned} l(\overline{S' M_c}) : l(\overline{S' C}) &= l(\overline{S' M_a}) : l(\overline{S' A}) && / \text{ nach 1. Strahlensatz} \\ \wedge \quad l(\overline{S' M_a}) : l(\overline{S' A}) &= l(\overline{M_a M_c}) : l(\overline{AC}) && / \text{ nach 2. Strahlensatz} \\ \wedge \quad l(\overline{M_a M_c}) : l(\overline{AC}) &= 1 : 2 && / \text{ siehe Teilbeweis Höhensatz} \end{aligned}$$

Daher teilt S' die Schwerlinien s_a und s_c im Verhältnis $1 : 2$. (2)

Daher folgt aus (1) und (2), dass die Schwerlinie s_a von S und S' im Verhältnis $1 : 2$ geteilt und somit muss $S = S'$ sein.

□

d) Winkelsymmetrale

Definition 1.11:³⁶ Sei a und b zwei Geraden mit einem gemeinsamen Anfangspunkt S mit dem Winkel $\sphericalangle(a,b)$. Die Gerade h mit Anfangspunkt S heißt dann Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle(a,b)$, wenn:

$$w(a, h) = \frac{1}{2} \cdot w(a, b)$$

Satz 1.8:³⁷ Der Punkt P liegt genau dann auf einer Winkelsymmetrale w_α des Winkels α , wenn P von beiden Schenkeln denselben Abstand hat.

³⁶ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 95

³⁷ vgl. ebd. (2014), S. 282

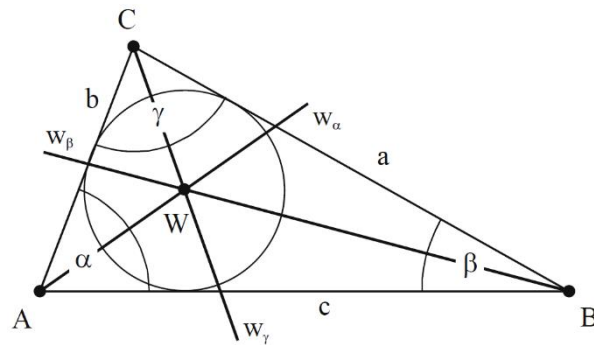


Abbildung 1.11: Inkreis eines Dreiecks

In der Abbildung 1.11 ist das Ergebnis zu sehen, wenn wir die Winkelsymmetralen für alle Eckpunkte eines Dreiecks ABC einzeichnen.

Satz 1.9:³⁸ Die Winkelsymmetralen der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt W . Dieser ist der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks.

e) *Eulersche Gerade*^{39 und 40}

Satz 1.10: Der Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks, der dazugehörige Schwerpunkt S und der dazugehörige Umkreismittelpunkt M liegen auf einer Geraden. Diese nennt man Eulersche Gerade.

Die Eulersche Gerade ist in der Abbildung 1.12 mit e bezeichnet.

³⁸ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 283

³⁹ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 25

⁴⁰ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 285

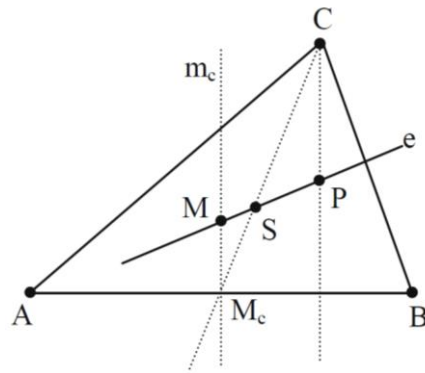


Abbildung 1.12: Eulersche Gerade

Wenn das Dreieck ein gleichseitiges ist, dann gilt: $H = S = M$. Ist dies nicht der Fall, dann liegt S zwischen U und H und es gilt: $l(\overline{HS}) = 2 \cdot l(\overline{SU})$.

Beweis:

Falls das Dreieck ABC nicht gleichschenkelig ist, gilt $S \neq M$ und diese zwei Punkte legen dann die Gerade e fest.

Die Gerade e ist die Halbgerade $\overrightarrow{MS}$ auf der wir den Punkt P suchen.

Für diesen soll gelten: $l(\overline{PS}) = 2 \cdot l(\overline{SU})$

Zu zeigen ist, dass P der Höhenschnittpunkt H ist.

Nun wissen wir, dass:

$$l(\overline{PS}) = 2 \cdot l(\overline{SM}) \Leftrightarrow l(\overline{PS}) : l(\overline{SM}) = 2 : 1 \quad \text{/nach Wahl von } P \quad (1)$$

$$\wedge \quad l(\overline{CS}) = 2 \cdot l(\overline{SM_c}) \Leftrightarrow l(\overline{CS}) : l(\overline{SM_c}) = 2 : 1 \quad \text{/nach Satz 1.7} \quad (2)$$

Nun kann aus (1) und (2) gefolgert werden:

$$l(\overline{PS}) = l(\overline{SM}) = l(\overline{CS}) = l(\overline{SM_c})$$

$$\Rightarrow PC \parallel m_c$$

/ nach Umkehrung 1. Strahlensatz

$$\Rightarrow PC \perp c$$

/ da $m_c \perp c$

$$\Rightarrow P \in h_c$$

Analog verfährt man mit den Höhen h_a und h_b und stellt fest, dass P ebenfalls ein Element der Höhen h_a und h_b ist. Somit muss P der Höhenschnittpunkt H sein.

□

f) Der Neunpunktekreis und der Feuerbachkreis

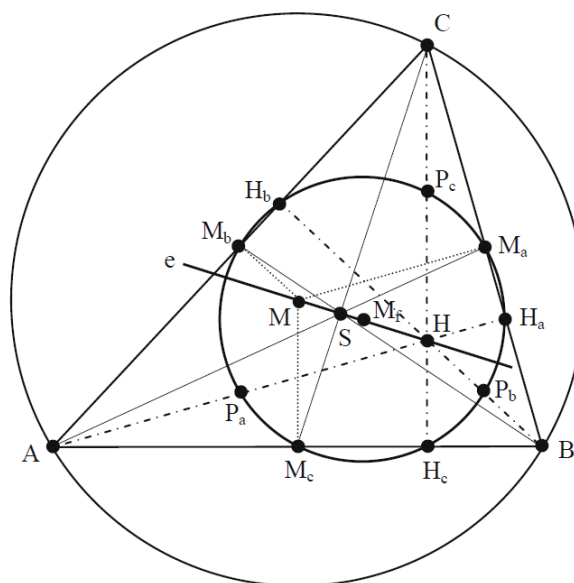


Abbildung 1.13: Neunpunktekreis und Feuerbachkreis

Wie oben bereits erwähnt, liegen der Schwerpunkt, der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt auf der Eulerschen Gerade e.

Satz 1.11:⁴¹ Im Dreieck ABC mit dem Höhenschnittpunkt H seien M_a, M_b, M_c die Seitenmittelpunkte, H_a, H_b, H_c die Höhenfußpunkte, P_a, P_b, P_c die Mittelpunkte der Strecken HA, HB, HC . Dann liegen diese neun Punkte auf einem Kreis, dem Neunpunktekreis von $\triangle ABC$.

Weiters können wir einen weiteren Kreis in der Abbildung 1.13 erkennen.

Satz 1.12:⁴² Der Mittelpunkt F des Feuerbachkreises eines nicht gleichseitigen Dreiecks ABC liegt auf der Eulerschen Gerade e des Dreiecks. Genauer gilt: F ist der Mittelpunkt der Strecke MH , wenn H den Höhenschnittpunkt und M den Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ bezeichnet. Der Radius r_F des Feuerbachschen Kreises von $\triangle ABC$ ist halb so groß wie der Umkreisradius r des Dreiecks.

Falls das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist, gilt sogar $F = H = M = S = W$.⁴³

Beweis:⁴⁴

Dieser Beweis wird in fünf Teilbeweise untergliedert.

- 1) Zu zeigen ist, dass die Mittelpunkte der Dreiecksseiten und die Mittelpunkte P_a, P_b, P_c der Strecken $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$ auf einem Kreis liegen.
- 2) Zu zeigen ist, dass die Höhenfußpunkte auch Elemente desselben Kreises sind.
- 3) Weiters gilt es zu zeigen, dass der Mittelpunkt M_f dieses Kreises auf der Eulerschen Gerade liegt.
- 4) Danach wird gezeigt, dass M_f der Mittelpunkt der Strecke $\overline{HM}$ ist.
- 5) Schlussendlich wird bewiesen, dass der Radius des Feuerbachkreises halb so groß ist wie der des Umkreises des Dreiecks ABC .

⁴¹ Scheid und Schwarz (2017), S. 27

⁴² ebd. (2017), S. 28

⁴³ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 28

⁴⁴ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 286 - 289

Ad 1)

Zunächst betrachten wir die Vierecke $P_a P_b M_a M_b$ und $P_b P_c M_b M_c$ und wenn bewiesen werden kann, dass diese Vierecke Rechtecke sind, so besitzen sie einen Umkreis. Die beiden Vierecke haben die Diagonale $\overline{P_b M_b}$ gemeinsam und daher müssen die Umkreise der beiden identisch sein. Dieser enthält die Punkte M_a, M_b, M_c, P_a, P_b und P_c .

Nun gelte:

$$\begin{aligned}
 & l(\overline{HA}) : l(\overline{HP_a}) = 2 : 1 && / \text{ da } P_a \text{ Mittelpunkt von } \overline{HA} \\
 \wedge & l(\overline{HB}) : l(\overline{HP_b}) = 2 : 1 && / \text{ da } P_b \text{ Mittelpunkt von } \overline{HB} \\
 & \Rightarrow \overline{P_a P_b} \parallel \overline{AB} && / \text{ durch Umkehrung 1. Strahlensatzes (1)}
 \end{aligned}$$

Es gelte weiters:

$$\overline{M_a M_b} \parallel \overline{AB} \quad / \text{ siehe Teilbeweis Höhensatz} \quad (2)$$

$$\text{Aus (1) und (2)} \Rightarrow \overline{P_a P_b} \parallel \overline{M_a M_b} \quad (3)$$

Weiters gelte:

$$\begin{aligned}
 & l(\overline{AC}) : l(\overline{AM_b}) = 2 : 1 && / \text{ da } M_b \text{ Mittelpunkt von } \overline{AC} \\
 \wedge & l(\overline{AH}) : l(\overline{AP_a}) = 2 : 1 && / \text{ da } P_a \text{ Mittelpunkt von } \overline{AH} \\
 & \Rightarrow \overline{P_b M_b} \parallel \overline{HC} && / \text{ durch Umkehrung 1. Strahlensatzes (4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & l(\overline{BC}) : l(\overline{BM_a}) = 2 : 1 && / \text{ da } M_a \text{ Mittelpunkt von } \overline{BC} \\
 \wedge & l(\overline{BH}) : l(\overline{BP_b}) = 2 : 1 && / \text{ da } P_b \text{ Mittelpunkt von } \overline{BH} \\
 & \Rightarrow \overline{P_b M_a} \parallel \overline{HC} && / \text{ durch Umkehrung 1. Strahlensatzes (5)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Aus (4) und (5)} \Rightarrow \overline{P_a M_b} \parallel \overline{P_b M_a} \quad (6)$$

Die Ergebnisse (3) und (6) zeigen, dass das Viereck $P_a P_b M_a M_b$ zwei Paar parallele Seiten hat. Davon sind zwei Seiten nach (4) und (5) parallel zur Strecke $\overline{HC}$, welche als ein Teil der Höhe senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$ steht. Zu dieser Strecke sind die beiden anderen Vierecksseiten nach (1) und (2) parallel. Daher sind die Vierecksseiten senkrecht zu einander und somit ist das Viereck $P_a P_b M_a M_b$ ein Rechteck.

Analog dazu wird mit dem Viereck $P_b P_c M_b M_c$ verfahren.

Somit liegen die Punkte M_a, M_b, M_c, P_a, P_b und P_c auf einem Kreis, da die Rechtecke dieselbe Diagonale $\overline{P_b M_b}$ und somit auch denselben Umkreis gemeinsam haben. Dessen Mittelpunkt wird mit der Bezeichnung M_f versehen. M_f ist ebenfalls der Mittelpunkt der Rechtecksdiagonalen $\overline{P_a M_a}, \overline{P_b M_b}$ und $\overline{P_c M_c}$.

Ad 2)

Nun gelte:

$$P_a \in h_a \wedge h_a \perp \overline{BC}$$

$$\Rightarrow w(\sphericalangle P_a H_a M_a) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow H_a \in k(M_f, r = \frac{1}{2} l(\overline{P_a M_a})) \quad / \text{ nach Satz des Thales}$$

$$\Rightarrow H_a \text{ liegt somit auf dem Feuerbachkreis}$$

Weiters ist:

$$P_b \in h_b \wedge h_b \perp \overline{AC}$$

$$\Rightarrow w(\sphericalangle P_b H_b M_b) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow H_b \in k(M_f, r = \frac{1}{2} l(\overline{P_b M_b})) \quad / \text{ nach Satz des Thales}$$

$$\Rightarrow H_b \text{ liegt somit auf dem Feuerbachkreis}$$

Weiters ist:

$$P_c \in h_c \wedge h_c \perp \overline{AB}$$

$$\Rightarrow w(\sphericalangle P_c H_c M_c) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow H_c \in k(M_f, r = \frac{1}{2} l(\overline{P_c M_c})) \quad / \text{ nach Satz des Thales}$$

$$\Rightarrow H_c \text{ liegt somit ebenfalls auf dem Feuerbachkreis}$$

Somit ist bewiesen, dass alle drei Höhenfußpunkte auf dem Feuerbachkreis liegen.

Ad 3)

Da die Punkte M_a , M_b und M_c im Feuerbachkreis enthalten sind, ist der Umkreis des Mittendreiecks $M_a M_b M_c$ ident mit dem Feuerbachkreis. Im folgenden Teil wird die Eulersche Gerade des Dreiecks ABC mit e bezeichnet und die Eulersche Gerade des Mittendreiecks mit e_m . Der Umkreismittelpunkt des Mittendreiecks nennen wir M_m , seinen Schwerpunkt bezeichnen wir mit S_m und seinen Höhenschnittpunkt mit H_m .

So gelte:

$$M, S, H \in e \quad / \text{ nach Satz 1.10}$$

$$\wedge \quad M_m, S_m, H_m \in e_m \quad / \text{ nach Satz 1.10}$$

$$\wedge \quad M_m = M_f \quad / M_f \text{ ist Umkreismittelpunkt von Mittendreiecks} \quad (1)$$

$$\wedge \quad H_m = M \quad / \text{ siehe Teilbeweis Höhensatz} \quad (2)$$

$$\wedge \quad S_m = S \quad / \text{ nach Satz 1.7} \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt, dass die Eulerschen Geraden e und e_m zwei gemeinsame Punkte haben. Somit sind sie identisch und nach (1) liegt der Mittelpunkt des Feuerbachkreises auf der Geraden e .

Ad 4)

Nun gelte:

$$l(\overline{MM_f}) = l(\overline{SM}) + l(\overline{SM_f}) \quad (1)$$

$$\wedge \quad l(\overline{HS}) = 2 \cdot l(\overline{SM}) \quad / \text{ nach Satz 1.10 für } \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \quad l(\overline{SM}) = \frac{1}{2} \cdot l(\overline{HS}) \quad (2)$$

$$\wedge \quad l(\overline{H_m S_m}) = 2 \cdot l(\overline{S_m M_m}) \quad / \text{ nach Satz 1.10 für } \triangle M_a M_b M_c$$

$$\Rightarrow \quad l(\overline{SM}) = 2 \cdot l(\overline{SM_f}) \quad / \text{ nach } H_m = M, S_m = S, M_m = M_f$$

$$\Rightarrow \quad l(\overline{SM_f}) = \frac{1}{2} \cdot l(\overline{SM}) \quad (3)$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (1) von (2) und (3) erhalten wir:

$$l(\overline{MM_f}) = l(\overline{SM}) + l(\overline{SM_f})$$

$$\Rightarrow \quad l(\overline{MM_f}) = \frac{1}{2} \cdot l(\overline{HS}) + \frac{1}{2} \cdot l(\overline{SM})$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot l(\overline{MM_f}) = l(\overline{HS}) + l(\overline{SM}) = l(\overline{HM})$$

$$\Rightarrow \quad M_f \text{ ist somit Mittelpunkt der Strecke } \overline{HM}$$

Ad 5)

Nach dem Teilbeweis 4) und der Gleichung (3) aus diesem gilt:

$$l(\overline{SM}) : l(\overline{SM_f}) = 2 : 1$$

Nach Satz 1.7 gilt:

$$l(\overline{AS}) : l(\overline{SM_a}) = 2 : 1$$

Die vorliegende Situation ist eine Strahlensatzfigur mit Zentrum S. Somit folgt aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

$$l(\overline{AM}) \parallel \overline{M_f M_a}$$

Aufgrund dieser Gegebenheiten kann nun der 2. Strahlensatz angewandt werden:

$$l(\overline{AM}) : l(\overline{M_f M_a}) = l(\overline{AS}) : l(\overline{SM_a}) = 2 : 1$$

$$\Rightarrow l(\overline{M_f M_a}) = \frac{1}{2} \cdot l(\overline{AM})$$

Somit ist der Radius des Feuerbachkreises halb so groß wie der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC .

□

1.2.5 Der Satz des Pythagoras

Im vorigen Unterkapitel haben wir uns mit speziellen Punkten und Linien im Dreieck auseinandergesetzt. Nun wollen wir uns einem der berühmtesten Sätze der Mathematik zuwenden: Der Satz des Pythagoras.

Davor betrachten wir die Bezeichnungen in der Abbildung 1.14.

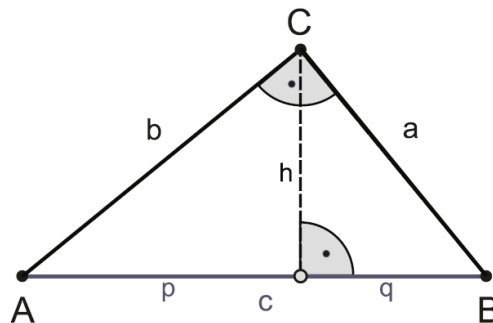


Abbildung 1.14: rechtwinkeliges Dreieck mit Bezeichnungen für den Satz des Pythagoras

Zu erkennen ist in der Abbildung 1.14 ein rechtwinkeliges Dreieck. Die Dreiecksseiten, die am rechten Winkel anliegen, nennt man Katheten. In der obigen Abbildung 1.14 sind das die Seiten a und b . Die gegenüberliegende Seite des rechten Winkels heißt Hypotenuse, dementsprechend ordnen wir im Falle der Abbildung 1.14 ihr die Seite c zu. Die Höhe h der Hypotenuse teilt diese in zwei Hypotenusenabschnitte, p und q , ein.⁴⁵

Satz 1.13:⁴⁶ Der Innenwinkel γ eines Dreiecks ABC ist genau dann ein rechter Winkel, wenn gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Es gibt für den Satz des Pythagoras mehr als 200 verschiedene Beweise.⁴⁷ Aufgrund des Themas der Diplomarbeit eignet sich besonders hier an dieser Stelle ein geometrischer Beweis,

⁴⁵ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 31

⁴⁶ vgl. Agricola und Friedrich (2011), S. 18

⁴⁷ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 31

der sich aus der zweifachen Berechnung des Flächeninhalts eines Quadrats der Seitenlänge $(a+b)$ ergibt.⁴⁸

Beweis:⁴⁹

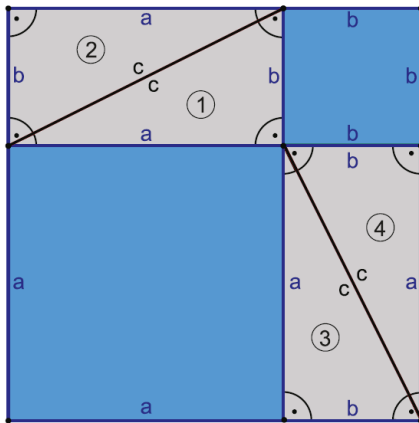


Abbildung 1.15: Anordnung 1

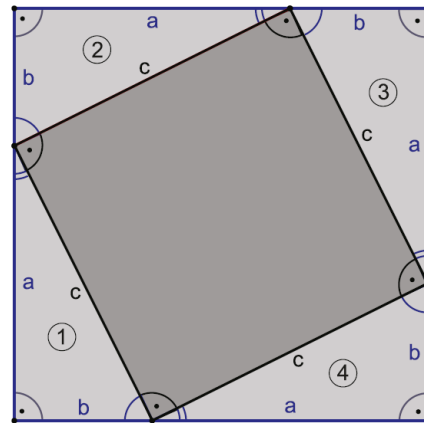


Abbildung 1.16: Anordnung 2

Vier rechtwinkelige kongruente Dreiecke mit den Katheten a und b können so neben einander gelegt werden, dass sie zwei Rechtecke bilden, wie in der Abbildung 1.15 zu sehen ist. Es ergibt sich ein Quadrat mit den Seitenlänge $(a + b)$. Werden nun die kongruenten Dreiecke so nebeneinander angeordnet wie in der Abbildung 1.16, so stoßen die Winkel der Hypotenusen c aneinander und ergeben einen rechten Winkel. Diese werden zusätzlich zu einem gestreckten Winkel ergänzt und im Inneren des Quadrats mit der Seitenlänge $(a + b)$ kann aus den vier rechtwinkligen Dreiecken ein Quadrat mit der Seitenlänge c eingeschrieben werden. Der Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge c ist berechenbar durch die Flächeninhalte der Quadrate der Seitenlängen a und b , wie wir der Abbildung 1.15 entnehmen können:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot ab + b^2 \quad (\text{Abbildung 1.15})$$

$$= c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \quad (\text{Abbildung 1.16})$$

$$\text{Daraus erhalten wir } a^2 + b^2 = c^2.$$

□

⁴⁸ vgl. Agricola und Friedrich (2011), S. 19

⁴⁹ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 32f

1.3 Das Viereck

Bekannt ist, dass jedes Viereck in zwei Dreiecke zerlegt werden kann. Daraus kann folgende Eigenschaft gewonnen werden:

Satz 1.14:⁵⁰ Die Winkelsumme in allen Vierecken beträgt 360° .

1.3.1 Das Haus der Vierecke⁵¹

Aus einem Viereck kann mithilfe von besonderen Eigenschaften ein System, das sogenannte „Haus der Vierecke“, erkennbar gemacht werden. Ein Viereck ist durch fünf voneinander unabhängige Bestimmungsstücke eindeutig festgelegt. Beginnend beim Quadrat, lassen sich hier folgende Eigenschaften über Winkel, Seiten und Diagonalen aussagen:

1. Die gegenüberliegenden Seiten sind gleich lang.
2. Die gegenüberliegenden Seiten sind parallel.
3. Die Diagonalen halbieren einander.
4. Die Diagonalen sind orthogonal.
5. Die Diagonalen sind gleich lang.

Daraus lässt sich für das Quadrat folgende Definition festlegen:

Definition 1.12: Ein Quadrat ist ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel sind, die Diagonalen gleich lang, sich gegenseitig halbierend und im rechten Winkel zueinander stehen.

Entsprechend dem Aufbau des Hauses der Vierecke, verliert das Quadrat eine oder mehrere Eigenschaften und wird daraufhin zu einer nächsten speziellen Form. Der Verzicht auf die Orthogonalität der Diagonalen ermöglicht bereits die nächste Definition:

Definition 1.13: Ein Rechteck ist ein Viereck mit vier rechten Winkeln.

⁵⁰ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 76

⁵¹ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 211f

Ebenfalls gilt in einem Rechteck, dass die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind. Auch die Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander.

Eine weitere Abzweigung vom Quadrat ergibt der Verzicht auf gleich lange Diagonalen, wobei die Orthogonalität dieser aufrechterhalten werden soll. Durch Beibehaltung der anderen Eigenschaften gelangt man zur Raute.

Definition 1.14: Eine Raute ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten.

Ausgehend vom Rechteck kann das nächste besondere Viereck festgelegt werden. Dies ist ein gleichschenkeliges Trapez, welches nur für ein Seitenpaar Parallelität verlangt und die gleiche Länge für die Diagonalen vorsieht. Eine Definition erfolgt beim allgemeinen Trapez.

Ebenfalls ausgehend vom Rechteck kann die nächste Viereckform, das Parallelogramm, bestimmt werden. Hierzu braucht man lediglich auf die Eigenschaft der gleichen Länge der Diagonalen zu verzichten und die Parallelität gegenüberliegender Seiten beizubehalten. Das Parallelogramm kann auch von der Raute aus hergeleitet werden. Dazu behält man die Parallelität je zwei gegenüberliegender Seiten aufrecht, verzichtet aber auf die Orthogonalität der Diagonalen.

Definition 1.15: Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Ausgehend von der Raute und ihren Eigenschaften kann durch das Beibehalten der Orthogonalität der Diagonalen und der zusätzlichen Forderung, dass zumindest eine Diagonale halbiert wird, das Deltoid, auch der Drache genannt, entstehen.

Definition 1.16: Ein Deltoid ist ein Viereck, dass zwei Paar benachbarte gleiche lange Seiten hat.

Vom Parallelogramm oder vom gleichschenkligen Trapez ausgehend, kann durch das Beibehalten der Parallelität der gegenüberliegenden Seiten das allgemeine Trapez entstehen.

Definition 1.17: Ein Trapez ist ein Viereck, in welchem ein Gegensatzpaar zueinander parallel ist.

Definition 1.18: Ein schräges Deltoid ist ein Viereck, in dem zumindest eine Diagonale die andere halbiert.

The diagram illustrates the classification of quadrilaterals based on five properties:

- 1: Gegenseiten gleich lang (Opposite sides equal)
- 2: Gegenseiten parallel (Opposite sides parallel)
- 3: Diagonalen halbieren sich (Diagonals bisect each other)
- 4: Diagonalen orthogonal (Diagonals are orthogonal)
- 5: Diagonalen gleich lang (Diagonals are equal in length)

The hierarchy is as follows:

- Quadrat** (Square) is at the top, possessing all five properties (1, 2, 3, 4, 5).
- It branches into **Rechteck** (Rectangle) and **Raute** (Rhombus):
 - Rechteck** has properties 1, 2, 3, and 5.
 - Raute** has properties 1, 2, 3, and 4.
- Rechteck** branches into **gleichschenkeliges Trapez** (Isosceles Trapezoid) and **Parallelogramm** (Parallelogram):
 - gleichschenkeliges Trapez** has properties 1, 2, and 5.
 - Parallelogramm** has properties 1, 2, and 3.
- Raute** branches into **Drachen** (Kite) and **Parallelogramm**:
 - Drachen** has properties 3 and 4.
 - Parallelogramm** has properties 1, 2, and 3.
- gleichschenkeliges Trapez** branches into **Trapez** (Trapezoid) and **Parallelogramm**:
 - Trapez** has properties 1 and 2.
 - Parallelogramm** has properties 1, 2, and 3.
- Drachen** branches into **schräger Drachen** (Convex Kite) and **Parallelogramm**:
 - schräger Drachen** has property 3.
 - Parallelogramm** has properties 1, 2, and 3.
- Trapez** branches into **allgemeines Viereck** (General Quadrilateral) and **Parallelogramm**:
 - allgemeines Viereck** has no specific properties listed.
 - Parallelogramm** has properties 1, 2, and 3.
- schräger Drachen** branches into **allgemeines Viereck** and **Parallelogramm**:
 - allgemeines Viereck** has no specific properties listed.
 - Parallelogramm** has properties 1, 2, and 3.

29

1.4 Das Vieleck

Ein Vieleck ist ein spezieller Streckenzug, welcher bereits durch einfaches verbinden von Punkten in der Ebene entsteht. Ein Streckenzug verbindet Strecken wie $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \dots, \overline{MN}$. Zu diesem Streckenzug gehören der Anfangs- und Endpunkt und alle Verbindungspunkte der einzelnen Strecken.⁵²

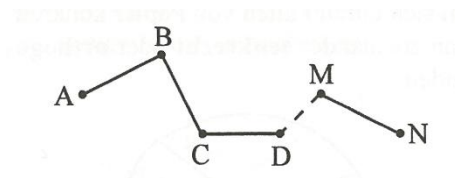


Abbildung 1.18: Streckenzug

Falls der Anfangs- und Endpunkt eines Streckenzugs zusammenfallen, in unserem Fall A und N, dann ist der Streckenzug geschlossen und man nennt die entstandene Figur Vieleck. Die Punkte A, B, usw. bezeichnen wir dann als Eckpunkte des Vielecks und die Strecken $\overline{AB}, \overline{BC}$, usw. bilden die Seiten.⁵³

Somit kann eine Form, die mehr als vier Ecken aufweist, im Allgemeinen als ein Vieleck, n-Eck oder auch Polygon bezeichnet werden.

Für die Konstruktion eines beliebigen n-Ecks benötigt man $(2n - 3)$ Bestimmungsstücke. Ebenfalls beträgt die Summe der Innenwinkel $(n - 2) \cdot 180^\circ$ und es besitzt genau $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Diagonalen.

Definition 1.19:⁵⁴ Ein Vieleck heißt einfach, wenn jede Ecke zu genau zwei Seiten gehört und je zwei Seiten keinen inneren Punkt gemeinsam haben.

Definition 1.20:⁵⁵ Ein Vieleck heißt konvex, wenn für je zwei Ecken des Flächenstücks auch die Verbindungsstrecke zum Flächenstück gehört.

⁵² vgl. Kirsche (2006), S. 18

⁵³ vgl. ebd. (2006), S. 18

⁵⁴ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 80

⁵⁵ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 59

Ebenfalls können regelmäßige Polygone gebildet werden. Ein n-Eck ist bereits schon dann regelmäßig, wenn es n gleich große Winkel und n gleich lange Seiten besitzt. Weiters ist durch die Eckanzahl n ein regelmäßiges n-Eck der Form nach, bis auf die Größe, eindeutig bestimmt. Der Innenwinkel eines regelmäßiges n-Ecks kann durch $180^\circ \cdot \frac{360^\circ}{n}$ berechnet werden.⁵⁶

1.4.1 Flächeninhalte von Polygonen

Für die Berechnung des Flächeninhalts verwenden wir im Allgemeinen die Längeneinheit 1 LE und für die Einheit des Flächeninhalts 1 LE². Dieser Flächeninhalt ist jener des Quadrats mit der Seitenlänge 1 LE. Für ein Quadrat mit der Seitenlänge a LE würde daher die Formel für den Flächeninhalt lauten: a^2 LE. Wenn wir also den Inhalt einer Fläche angeben möchten, dann ist diese als Konstruktion eines Quadrats zu verstehen, welches denselben Flächeninhalt wie die vorliegende Fläche hat. Daher spricht man bei der Bestimmung des Flächeninhalts auch von der Quadratur der Fläche.⁵⁷

Bevor wir dies verwenden können, müssen wir zuerst den Höhen- und den Kathetensatz beweisen.

Satz 1.15:⁵⁸ Bei jedem rechtwinkligen Dreieck besitzt ein Kathetenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus dem zur betreffenden Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse selbst.

⁵⁶ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 80

⁵⁷ vgl. vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 84f

⁵⁸ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 311

Beweis:⁵⁹

Für den Kathetensatz wird ein *abbildungsgeometrischer Beweis* verwendet, der mithilfe des Scherungsprinzips durchgeführt werden kann.

Schritt 1: Durch Scherung mit der Achse EA ergibt es sich, dass das Kathetenquadrat EACD zu einem flächengleichen Parallelogramm EABF verwandelt wird. Hierbei geht D in F und C in B über.

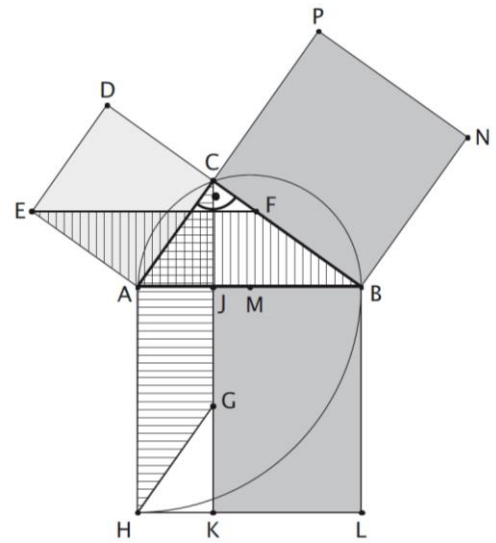


Abbildung 1.19:
Scherungsbeweis Kathetensatz

Schritt 2: Anschließend wird eine Drehung bei A um 90° im Uhrzeigersinn durchgeführt. Dadurch wird das Parallelogramm EABF kongruent abgebildet in das Parallelogramm CAHG und E geht in C über.

Schritt 3: Danach erfolgt eine Scherung mit der Achse AH. Dadurch wird das Parallelogramm AHGC flächengleich in das Rechteck AHKJ abgebildet. Hierbei geht C in J über.

Dadurch ist gezeigt, dass das Kathetenquadrat ACDE flächengleich zum Rechteck AHKJ ist. Weiters ist bewiesen, dass dessen Seitenlängen die Hypotenuse c und der der Kathete b anliegende Hypotenusenabschnitt $AJ = q$ ist.

Analog dazu kann gezeigt werden, dass das Quadrat BNPC inhaltsgleich zum Rechteck BJKL ist. □

⁵⁹ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 112

Satz 1.16: Im rechtwinkligen Dreieck besitzt das Quadrat über der Höhe denselben Flächeninhalt wie das Rechteck der beiden Hypotenusenabschnitte.

Beweis:⁶⁰

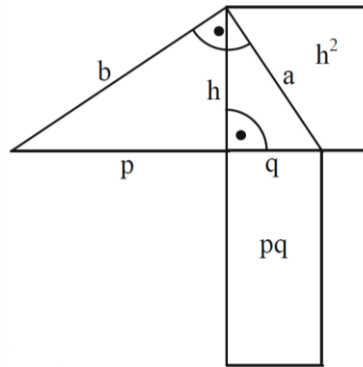


Abbildung 1.20: Höhensatz

Die Höhe steht senkrecht auf der Hypotenuse und unterteilt somit das rechtwinklige Dreieck in zwei kleine rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen a bzw. b. Nun wenden wir auf a und b den Satz des Pythagoras an.

Daher gilt: $h^2 + p^2 = b^2$ und $h^2 + q^2 = a^2$.

Durch die Addition der Gleichungen erhalten wir:

$$h^2 + q^2 + h^2 + p^2 = a^2 + b^2$$

Durch weiteres Umformen und Herausheben erhalten wir schlussendlich:

$$h^2 = p \cdot q$$

□

Nun können wir durch die Anwendung von Höhen- oder Kathetensatz des Dreiecks eine Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen a und b aufstellen: $A = a \cdot b$.

Diese Formel ist ebenfalls für die Berechnung des Parallelogramms zulässig.

⁶⁰ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 310

Aus dieser Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms oder des Rechtecks kann der Flächeninhalt für ein Dreieck hergeleitet werden. Je nach Ausgangspunkt muss entweder das Dreieck in seiner Höhe h halbiert werden und dann zu einem Rechteck ergänzt werden, oder man erhält durch Hinzufügen eines weiteren Dreiecks mit derselben Grundseite g und Höhe h ein Parallelogramm.

Durch diese Herangehensweise ist erkennbar, dass durch die Zerlegung einer Figur andere Formen angenommen werden können. Daher ist es auch ersichtlich, dass diese dann auch flächeninhaltsgleich sind.

Definition 1.21: Zwei Figuren in der Ebene nennt man zerlegungsgleich, wenn sie in paarweise kongruente (deckungsgleiche) Figuren zerlegt werden können.

Weiters gilt, wie oben bereits angedeutet, dass zerlegungsgleiche Figuren flächeninhaltsgleich sind.

Definition 1.22: Zwei Figuren in der Ebene heißen ergänzungsgleich, wenn sie durch gleich viele paarweise kongruente Teile zu zerlegungsgleichen Figuren ergänzt werden können.

Ebenfalls gilt hier, dass ergänzungsgleiche Figuren flächeninhaltsgleich sind.⁶¹

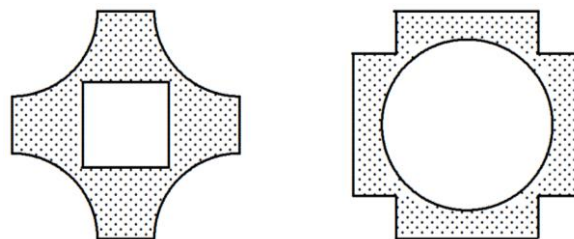


Abbildung 1.21: Ergänzungsgleiche Figuren

Für die Zerlegungsgleichheit von Vielecken folgen wir jenen, die „einfach“ und geschlossen sind. Die Fläche des n -Ecks besteht aus der Menge der Punkte des n -Ecks und den Punkten seines Inneren. Wenn ein Vieleck aus Teilvielecken zusammengesetzt werden kann, sodass die Inneren der Teilvielecke paarweise disjunkt sind und dass die Vereinigung der Flächen der

⁶¹ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 84f

Teilvielecke die Fläche des Vielecks ergibt, so sind sie zerlegungsgleich. Abgekürzt sind zwei Vielecke zerlegungsgleich, wenn sie in paarweise kongruente Teilvielecke zerlegbar sind.⁶²

Wenn ein n -Eck mit $n \geq 4$ vorhanden ist, so ist es möglich dieses in ein flächeninhaltsgleiches Polygon mit $n - 1$ Ecken zu verwandeln. Das gelingt durch „wegscheren“ der vorspringenden Ecke P , wie Abbildung UU zeigt. Mithilfe dieser Methode kann das Polygon nun in ein flächeninhaltsgleiches Dreieck verwandelt werden.⁶³

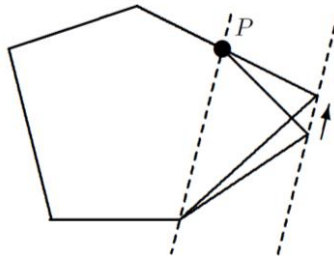


Abbildung 1.22: Wegscheren des Punktes P

Für die Flächenberechnung eines Polygons kann dieses auch in Dreiecke zerlegt werden. Anschließend werden Grundseite und Höhe festgelegt und berechnet mithilfe der Dreiecksformel. Insgesamt lässt sich daher feststellen, dass der Flächeninhalt eines Polygons gleich die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Teildreiecke ist.⁶⁴

⁶² vgl. Kirsche (2006), S. 84

⁶³ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 85

⁶⁴ vgl. ebd. (2017), S. 85

1.5 Der Kreis

Ein weiteres wichtiges Element in der euklidischen Geometrie ist der Kreis.

Definition 1.23:⁶⁵ Sei $M \in \mathcal{E}$ ein Punkt und r der Radius mit $r > 0$. Dann nennt man:

$$K(M; r) := \{X \in \mathcal{E}; |XM| = r\}$$

einen Kreis mit Mittelpunkt M und dazugehörigen Radius r .

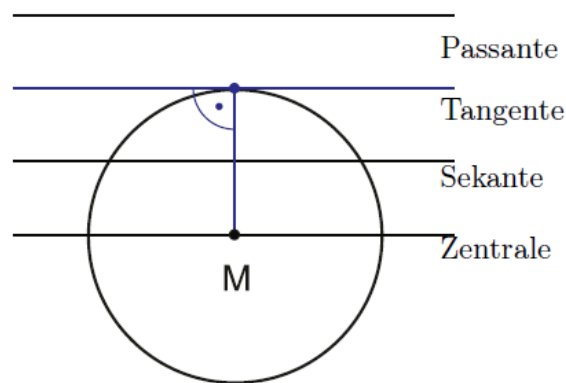


Abbildung 1.23: Kreis mit Passante, Tangente, Sekante und Zentrale

Für die Gerade kann es bezüglich des Kreises vier verschiedene Möglichkeiten geben:

1. Passante
2. Tangente
3. Sekante
4. Zentrale (wobei diese ebenfalls eine Sekante ist, die durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft)

Die Passante berührt nie den Kreis, die Sekante schneidet den Kreis an zwei Stellen. Eine Besonderheit bildet die Tangente, die nur einen Berührungspunkt mit dem Kreis hat und stets orthogonal zum Kreis ist.⁶⁶

⁶⁵ vgl. Berchtold (2017), S. 34

⁶⁶ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 52

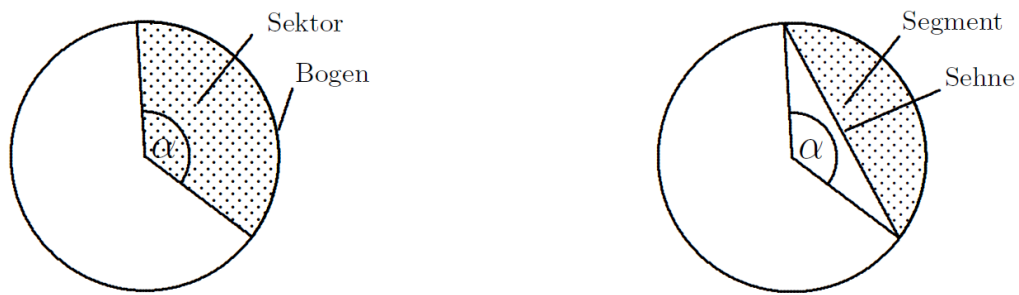


Abbildung 1.24: Kreis mit Kreissektor, Kreisbogen und Kreis mit Kreissegment und Kreissehne.

Definition 1.24: Ein Kreissektor wird begrenzt durch den Radius des Kreises und die dazugehörige Bogenlänge b . Der Winkel α ist der Zentriwinkel des Kreises.

Ebenfalls gehört zu einem Zentriwinkel α eine Kreissehne und ein Kreissegment, wie man auf der Abbildung 1.24 erkennen kann.⁶⁷

⁶⁷ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 98

2 Polyeder und krummflächige Körper

2.1 Das Polyeder

Wenn wir uns nun die Formen im zweidimensionalen Raum ansehen, können wir nun folgende Verknüpfungen zum dreidimensionalen Raum erkennen:

Eine Fläche, die begrenzt und endlich ist, nennt man ein Flächenstück. Ein Stück des Raumes, das begrenzt und endlich ist, heißt Körper.

Ein ebenes Flächenstück nennt man konvex, falls zu je zwei Punkten des Flächenstücks auch die Verbindungsstrecke zum Flächenstück dazugehört. Dementsprechend nennt man einen Körper konvex, falls zu je zwei Punkten des Körpers auch die Verbindungsstrecke zum Körper gehört.⁶⁸

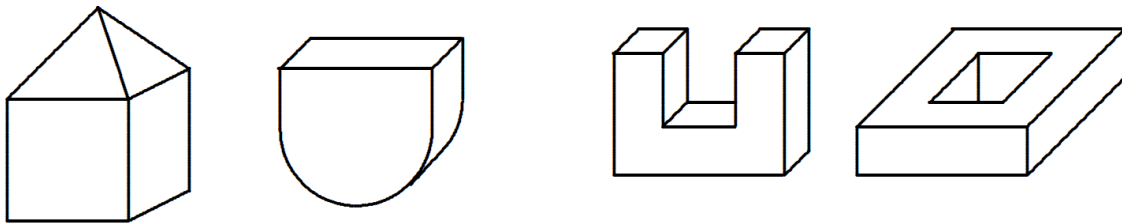


Abbildung 2.1: Konvexe und nicht-konvexe Körper

Wie bereits im Kapitel über Polygone aufgezeigt wurde, ist dieses ein ebenes Flächenstück, welches von endlich vielen Strecken begrenzt wird.

Definition 2.1: Ein Polyeder ist ein Körper, der von endlich vielen Polygonflächen begrenzt wird.

Weiters besitzt er mindestens vier Begrenzungsflächen. Falls ein Polyeder genau vier Begrenzungsflächen hat, so sind diese alle Dreiecke. Sind die jeweiligen Begrenzungsflächen ein n -Eck, so müssen mindestens n weitere Begrenzungsflächen existieren. Daher muss das Polyeder mindestens $n + 1$ Begrenzungsflächen haben. Wird ein Polyeder von vier Dreiecken begrenzt, so heißt die Figur Dreieckspyramide.

⁶⁸ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 59

Definition 2.2: Eine Figur, die von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, heißt Tetraeder.

Bevor hier auf weitere Spezialfälle eingegangen wird, behandeln wir noch den Begriff „Prisma“.

Wird ein Polygon in eine Richtung verschoben, die nicht in der Ebene des Polygons liegt, dann bilden die dabei überstrichenen Punkte ein Prisma. Die dabei verschobene Fläche nennt man die Grundfläche des Prismas.⁶⁹

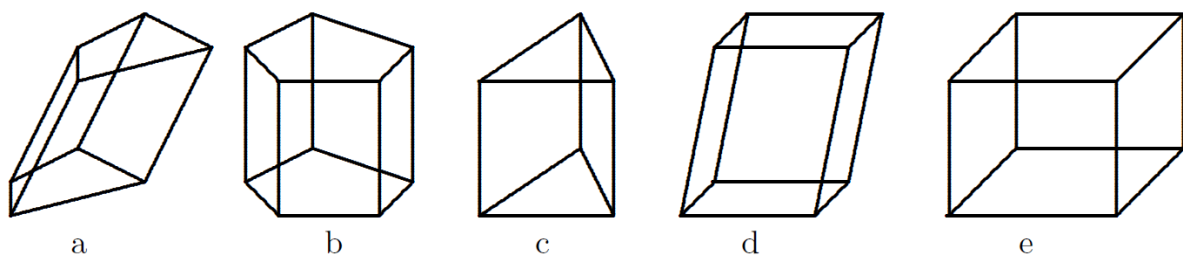


Abbildung 2.2: Prismen

Die Abbildung 2.2 zeigt mögliche Varianten für Prismen auf. Prisma (a) ist ein schiefes Prisma, die Grundfläche wurde hier also „schief“ verschoben. Wenn die Verschiebungsrichtung orthogonal zur Ebene des Polygons ist, dann erhalten wir ein gerades Prisma (b). Prisma (c) ist ein gerades Dreiecksprisma. Wenn die Seitenflächen und die Grundfläche des Prismas ebenfalls ein Parallelogramm sind, so nennt man den Körper Parallelepiped oder Spat (d). Der Quader ist der Sonderfall des Parallelepipeds. Dieses Prisma ist gerade und die Grundfläche bildet ein Rechteck (e). Schlussendlich bleibt nun der Würfel übrig zu nennen, er ist ein Sonderfall des Quaders und wird sowohl bei der Grundfläche als auch bei den Seitenflächen von einem Quadrat begrenzt.

Falls die Punkte der Polygonfläche nur mit einem Punkt S außerhalb der Ebene des Polygons verbunden werden, spricht man von einer Pyramide. Hierbei heißt die Polygonfläche Grundfläche und der Punkt S ist die Spitze der Pyramide. Die sogenannten Mantellinien sind die Verbindungsstrecken des Polygons mit der Spitze.

⁶⁹ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 59f

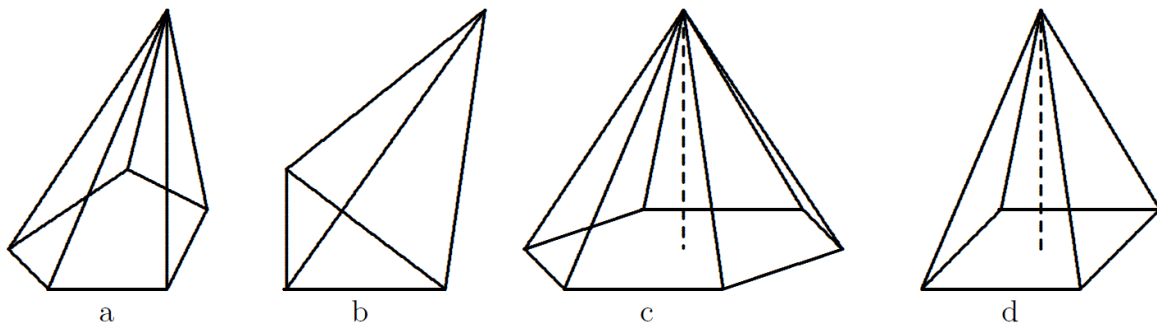


Abbildung 2.3: Verschiedene Typen von Pyramiden

In der Abbildung 2.3 sehen wir im Fall (a) eine allgemeine Ausführung, eine schiefe Pyramide. Wie oben bereits erwähnt, liegt im Fall (b) eine Dreieckspyramide vor. Wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Polygon ist und sich die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche befindet, so sprechen wir von einer geraden Pyramide (c). Eine quadratische Pyramide ist zumeist das, was im Alltag als Pyramide verstanden wird. Sie ist gerade und hat als Grundfläche ein Quadrat (d).⁷⁰

Im folgenden Unterkapitel wollen wir uns mit einigen speziellen Polyedern befassen.

⁷⁰ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 60 - 62

2.2 Zylinder und Kegel⁷¹

Wie oben bereits erwähnt, kann man ein ebenes Flächenstück in eine Richtung, welche nicht in der Ebene des Flächenstücks liegt, verschieben. Dadurch entsteht auch der Zylinder.

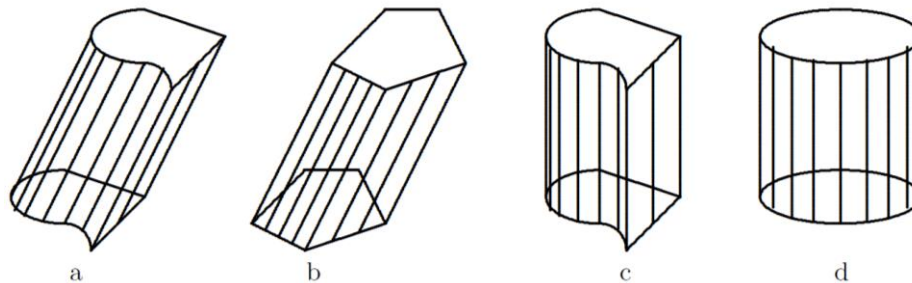


Abbildung 2.4: Verschiedene Arten von Zylindern

In der Abbildung 2.4 können wir unter dem Fall (a) den allgemeinen Fall betrachten, den schiefen Zylinder. Falls die Grundfläche des Zylinders ein Polygon ist, entsteht ein Prisma (b). Das bedeutet, dass Prismen spezielle Zylinder sind. Wenn die Verschiebungsrichtung zur Ebene orthogonal ist, dann sprechen wir von einem geraden Zylinder (c). Jedoch verstehen wir im Alltag zumeist unter Zylinder einen geraden Zylinder, der als Grundfläche einen Kreis hat. Dieser heißt Kreiszylinder (d).

Ebenfalls ist es möglich die Punkte der Grundfläche mit einem Punkt S, der außerhalb der Ebene des Flächenstücks liegt, zu verbinden. Dadurch gelangen wir zur nächsten Form, dem Kegel. S ist dabei die Spitze des Kegels.

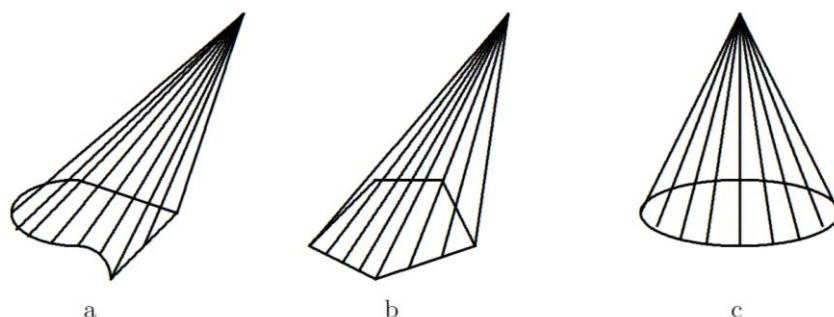


Abbildung 2.5: Verschiedene Typen von Kegeln

⁷¹ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 72

In der Abbildung 2.5 können wir im Fall (a) den allgemeinen Fall erkennen. Im Fall (b) sehen wir, dass die Grundfläche von einem Polygon gebildet wird. Diese Form ist uns bereits bekannt unter dem Namen Pyramide. Sie ist also ein spezieller Kegel. Falls die Grundfläche von einem Kreis gebildet wird und die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises liegt, dann handelt es sich um einen geraden Kreiskegel (c).

2.3 Die Kugel

Durch die Rotation eines Kreises in einem dreidimensionalen Raum entsteht eine Kugel.⁷²

Definition 2.3:⁷³ Eine (abgeschlossene) Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius R bezeichnet die Menge aller Punkte P eines Raumes, welche von M einen Abstand haben, der kleiner oder gleich R ist.

$$K = \{P: |MP| \leq R\}$$

2.4 Einblick platonische und archimedische Körper

Definition 2.4: Einen konvexen Polyeder nennt man regulär, falls alle Flächen zueinander kongruente, regelmäßige Vielecke sind und in jeder Ecke gleich viele dieser Vielecke zusammenstoßen.⁷⁴

Einige der platonischen Körper wurden bereits vor ca. 2500 Jahren entdeckt. Sie bestehen aus kongruenten Teilflächen und nehmen überall denselben Winkel zueinander ein.⁷⁵ Weiters sind die Beziehungen zwischen Ecken und Kanten wichtiger, als die Länge der Kanten. Die fünf platonischen Körper sind Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Dodekaeder, Oktaeder und Ikosaeder, welche in der Abbildung 2.6 dargestellt sind.⁷⁶

⁷² vgl. Lundy und Martineau (2017), S. 66

⁷³ vgl. Filler (1993), S. 2

⁷⁴ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 52

⁷⁵ vgl. Glaeser (2007), S. 75

⁷⁶ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 51 - 54

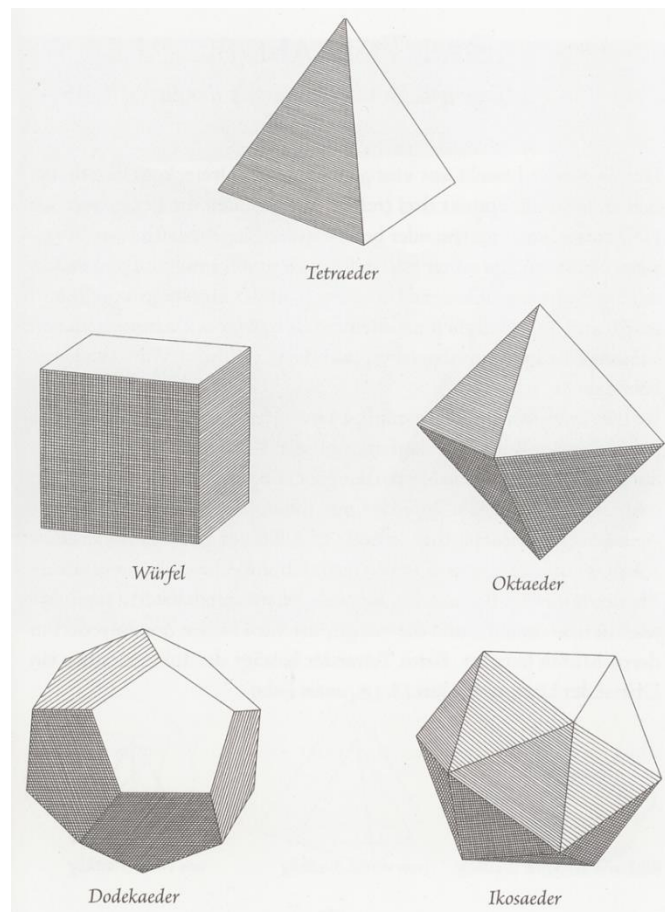


Abbildung 2.6. Die fünf platonischen Körper

Weiters haben die platonischen Körper eine besondere verbindende Eigenschaft. Werden die Mittelpunkte der benachbarten Würfel­flächen miteinander verbunden, entsteht ein Oktaeder. Daher bezeichnet man Oktaeder und Würfel als dual zueinander. Dieselbe Verbindung herrscht zwischen dem Dodekaeder und dem Ikosaeder. Einzig der Tetraeder ist zu sich selbst dual.⁷⁷

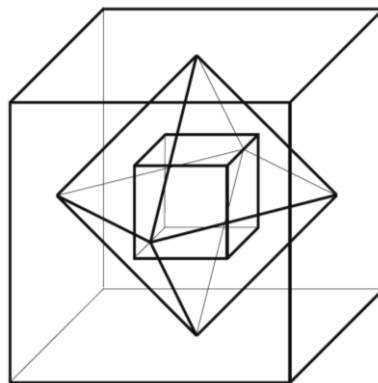


Abbildung 2.7: Dualität zwischen Oktaeder und Hexaeder

⁷⁷ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 57

Die Definition 2.4 kann in zweierlei Hinsicht abgeschwächt werden.

- Entweder kann auf kongruente Seitenflächen des konvexen Polyeders verzichtet werden, sofern weiterhin alle Eckenumgebungen kongruent sind,
- oder es wird auf die gleiche Anzahl an Flächen, die in einer Polyederecke zusammenstoßen, verzichtet, wobei aber weiterhin verlangt wird, dass alle Seitenflächen zueinander kongruent sind.

Solche konvexen Polyeder, die die oben beschriebenen Forderungen erfüllen, nennt man halbbreguläre Polyeder. Des Weiteren können nun die archimedischen Körper definiert werden.

Definition 2.5: Ein konvexes Polyeder, dessen Flächen verschiedene regelmäßige n -Ecke sind und dessen Eckumgebungen kongruent sind, nennt man archimedischer Körper.

Prismen über regelmäßige n -Ecken mit quadratischen Seitenflächen sind Beispiele für archimedische Körper. Ebenfalls ergeben sich solche, wenn man bei den platonischen Körpern die Ecken so abschneidet, dass die Schnittflächen ebenfalls regelmäßige n -Ecke ergeben und die restlichen Seitenflächen auch regelmäßige n -Ecke bilden. Führt man diesen Vorgang bei einem Würfel durch, so ergibt sich der Kuboktaeder, wie unten in Abbildung 2.8 zu sehen ist. Das Abtragen von Ecken kann auf beliebige Körper angewendet werden.

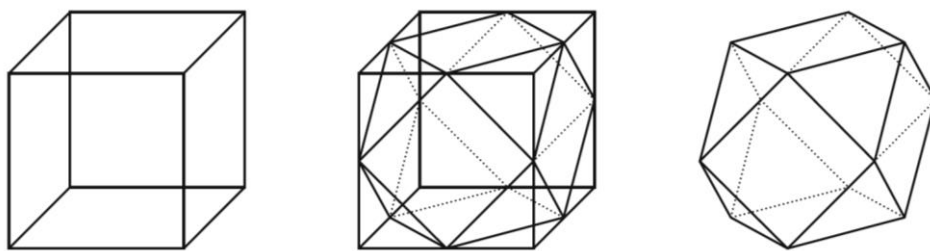


Abbildung 2.8: Vom Würfel zum Kuboktaeder

Aufgrund der Dualität gibt es 13 verschiedene dual-archimedische Körper und noch viele weitere Körpervariationen.⁷⁸ Eine vollständige Liste der Körpervariationen sowie Abbildungen und Netze sind im Werk von Roman Tiberiu von 1968 enthalten.

⁷⁸ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 58 - 61

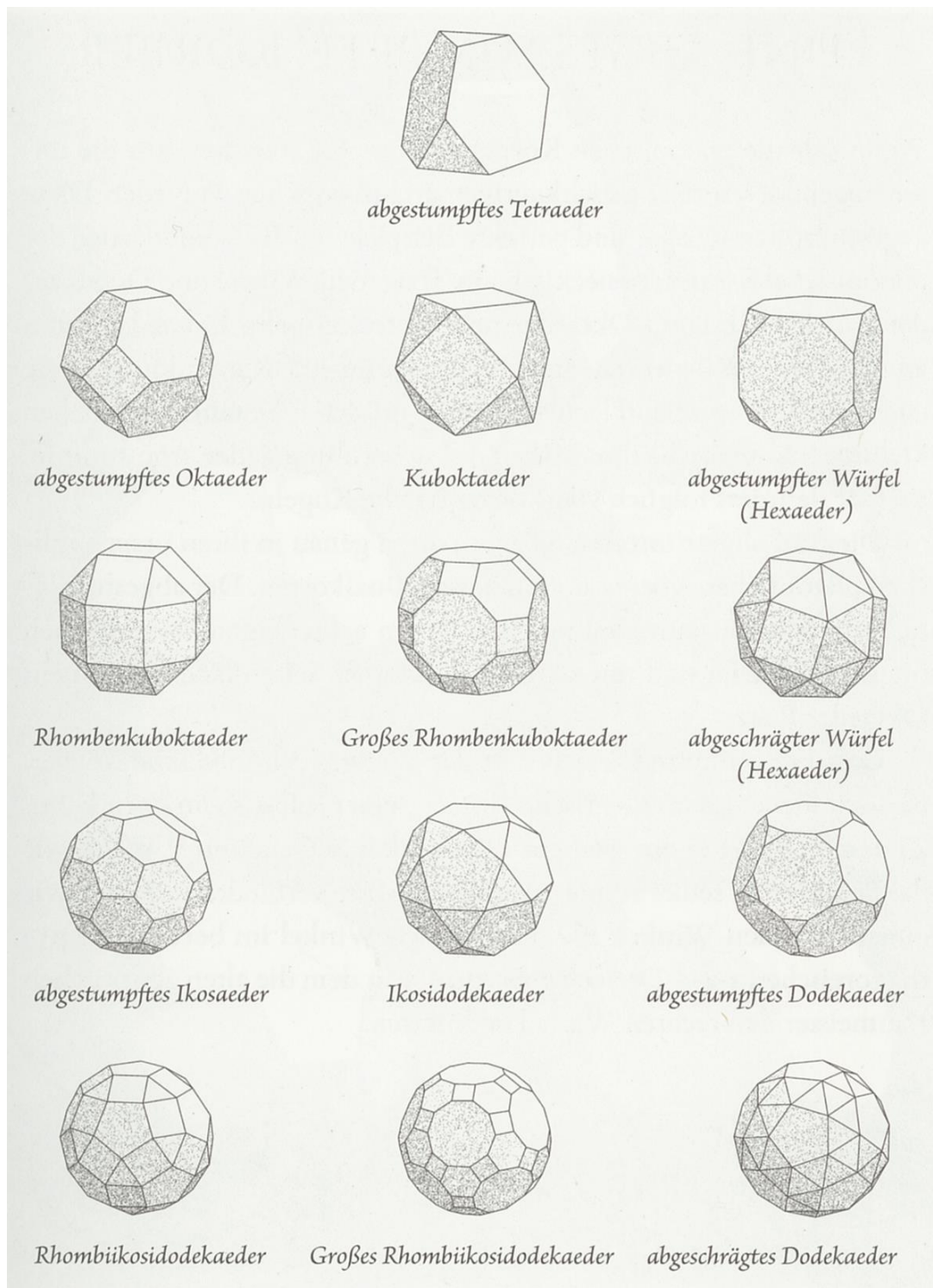


Abbildung 2.9: Die 13 archimedischen Körper

3 Ähnlichkeitsgeometrie

Die Ähnlichkeitsgeometrie behandelt vor allem die Eigenschaften von Figuren, welche unabhängig von ihrer Größe vorliegen. Solche Formen werden als Ähnlichkeitsabbildungen bezeichnet.⁷⁹ Die Abbildungsinvarianten, also jene geometrischen Figureigenschaften, die invariant bleiben, sind: Geradlinigkeit, Winkelgrößen, Flächeninhaltsverhältnisse, Parallelität, Streckenverhältnisse und Volumenverhältnisse.⁸⁰

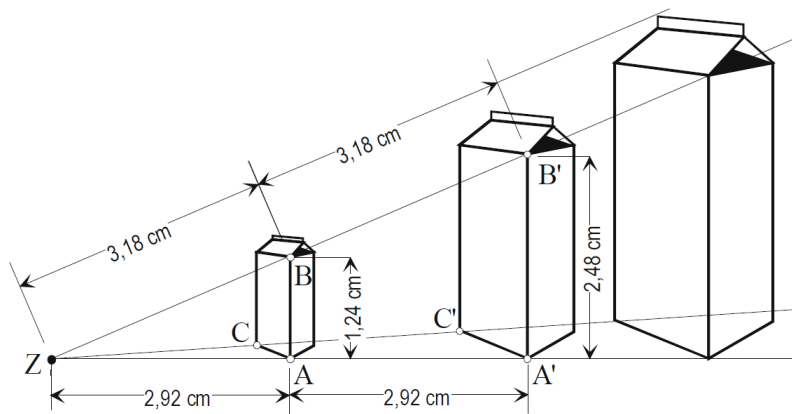


Abbildung 3.1: Ähnlichkeitsabbildung

⁷⁹ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 145

⁸⁰ vgl. ebd. (2013), S. 191

3.1 Die zentrische Streckung

Die zentrische Streckung gilt als eine der wichtigsten Vertreterinnen für die Abbildungsgeometrie. Doch bevor diese definiert werden soll, müssen zuerst noch andere wichtige Begriffe hinsichtlich ihrer Eigenschaften geklärt werden.⁸¹

Definition 3.1:⁸² Als Kollineationen einer Ebene bezeichnet man bijektive und geradentreue Punktabbildungen einer Ebene auf sich selbst.

Bekannte Beispiele einer Kollineation sind alle Kongruenzabbildungen wie Drehungen, Achsenspiegelungen, Verschiebungen und Gleitspiegelungen.⁸³

Definition 3.2:⁸⁴ Eine Dilatation ist eine Kollineation, für die gilt: Jede Bildgerade ist parallel zu ihrer Originalgeraden.

Definition 3.3:⁸⁵ Ein Fixpunkt Z einer Abbildung heißt ein Zentrum, wenn jede durch ihn verlaufende Gerade eine Fixgerade ist, d.h. F bleibt sogar „geradenweise“ fix.

Nun ist es möglich die zentrische Streckung zu definieren und ihre wichtigsten Eigenschaften aufzugliedern.

Definition 3.4:⁸⁶ Gegeben sei ein Punkt Z , das Streckenzentrum, und eine reelle Zahl k , $k \neq 0$, der Streckfaktor. Die zentrische Streckung $Z_{Z,k}$ ist diejenige Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P seinen Bildpunkt P' nach folgender Vorschrift zuordnet:

a) Wenn $P = Z$, dann gilt $P = P'$ (Z ist Fixpunkt)

b) Wenn $P \neq Z$, dann gilt:

Wenn $k > 0$: P' so wählen, dass $P' \in \overrightarrow{ZP}$ und $l \cdot |\overrightarrow{ZP'}| = k \cdot l \cdot |\overrightarrow{ZP}|$.

Wenn $k < 0$: P' so wählen, dass $P' \in ZP$ und $P' \notin \overrightarrow{ZP}$ und $l \cdot |\overrightarrow{ZP'}| = |k| \cdot l \cdot |\overrightarrow{ZP}|$.

⁸¹ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 171

⁸² vgl. ebd. (2013), S. 171

⁸³ vgl. ebd. (2013), S. 171

⁸⁴ Krauter und Bescherer (2013), S. 172

⁸⁵ ebd. (2013), S. 173

⁸⁶ Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 216

Eigenschaften der zentrischen Streckung: ⁸⁷ und ⁸⁸

Die Abbildung durch die zentrische Streckung aus dem Zentrum Z mit dem Faktor k ($\neq 0$) ist bijektiv.

- 1) Bei der zentrischen Streckung bleiben die Winkelgrößen erhalten. Daher ist die zentrische Streckung winkeltreu.
- 2) Die zentrische Streckung ist längenverhältnistreu. Das bedeutet: Für jede Bildstrecke $\overline{A'B'}$ einer Strecke $\overline{AB}$ gilt: $l \cdot (\overline{A'B'}) = |k| \cdot l \cdot (\overline{AB})$.
- 3) Der einzige Fixpunkt ist das Zentrum Z .
- 4) Alle Geraden durch diesen Fixpunkt Z sind Fixgeraden.
- 5) Die zentrische Streckung ist geradentreu. Das bedeutet, dass Geraden wieder auf Geraden abgebildet werden.
- 6) Das Bild g' einer Geraden g ist zu sich selbst parallel.

Für die Gerade g durch Z gilt $g = g'$. Für Geraden, die nicht durch das Zentrum Z gehen, folgt das aus der Tatsache, dass Z der einzige Fixpunkt ist. Würden sich g und g' in einem anderen Punkt S schneiden, dann wäre S ein weiterer Fixpunkt.

Folglich ist die zentrische Streckung parallelentreu. Das bedeutet $g' \parallel g$, $g \parallel h$ und $h \parallel h'$ und draus folgt $g' \parallel h'$.

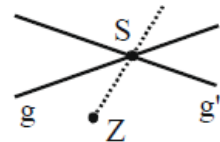


Abbildung 3.2: Bildgerade und zentrische Streckung

- 7) Falls $k = -1$, dann ist die zentrische Streckung eine Punktspiegelung mit Z als Spiegelzentrum.
- 8) Die Umkehrabbildung der zentrischen Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor k ist eine zentrische Streckung mit demselben Zentrum Z und dem Streckfaktor $\frac{1}{k}$.
- 9) Ist $k = 1$, so ergibt sich die identische Abbildung $Z_{Z,1} = \text{id}$.
- 10) Die Abbildung der zentrischen Streckung ist flächenverhältnistreu. Die entsprechenden Flächeninhalte verhalten sich im Original und Bild gleich und es gilt stets: $A' = k^2 \cdot A$. Dies folgt aus Eigenschaft 3.

⁸⁷ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 176

⁸⁸ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 217f

11) Die Abbildung der zentrischen Streckung ist volumenverhältnistreu. Das entsprechende Volumina verhält sich im Bild und im Urbild gleich. Es gilt daher $V' = |k^3| \cdot V$. Dies folgt aus der Eigenschaft 3.

3.2 Strahlensätze

Wie im vorigen Kapitel 3.1 behandelt, gibt es einen Fixpunkt Z , welcher von zwei sich schneidenden Geraden g und h festgelegt ist.

Satz 3.1:⁸⁹ Seien g und h zwei sich schneidende Geraden im Punkt Z . Weiters werden g und h von zwei parallelen Geraden AA^* und BB^* geschnitten. Dann gilt:

1. Strahlensatz: $\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{ZA^*} : \overline{ZB^*}$
2. Strahlensatz: $\overline{ZA} : \overline{ZB} = \overline{AA^*} : \overline{BB^*}$

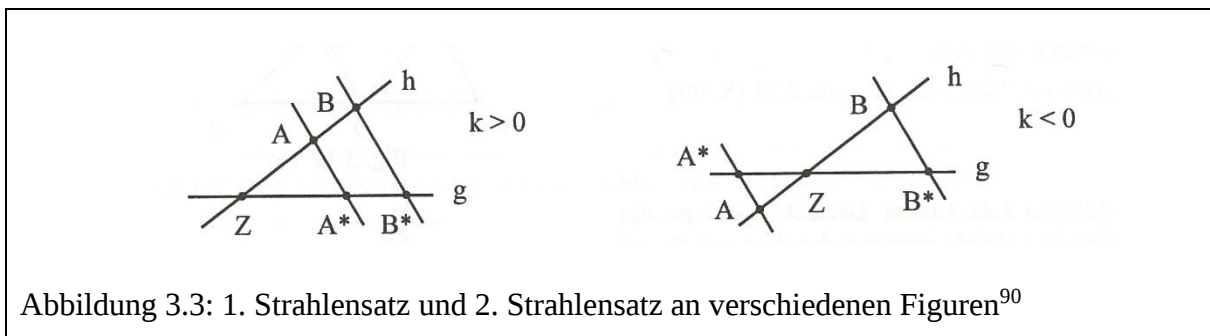


Abbildung 3.3: 1. Strahlensatz und 2. Strahlensatz an verschiedenen Figuren⁹⁰

Der erste Strahlensatz ist im Allgemeinen umkehrbar, der zweite Strahlensatz allerdings nicht.⁹¹

⁸⁹ vgl. Kirsche (2006), S. 102

⁹⁰ Kirsche (2006), S. 102

⁹¹ vgl. Agricola und Friedrich (2011), S. 8ff

3.3 Zentral- und Parallelprojektion

Im folgenden Teil wollen wir uns nun mit Abbildungen beschäftigen, die von dreidimensionalen Figuren ausgehen und auf eine Ebene abgebildet werden. Räumliche Figuren können grundsätzlich nicht in einer Ebene in wahrer Form oder Größe dargestellt werden. Von Vorteil wäre es, wenn der Körper in der Ebene möglichst anschaulich und weitgehend maßgerecht abgebildet wird, sodass man die Form und sämtliche Abmessungen aus der Zeichnung entnehmen kann. Jedoch können diese Forderungen nach Maßgerechtheit und Anschaulichkeit nur bedingt miteinander in Einklang gebracht werden.⁹²

Definition 3.5:⁹³ Eine Abbildung eines Objektes in eine Ebene nennt man Projektion.

Wenn die Darstellung möglichst anschaulich werden soll, dann verwendet man die Zentralprojektion.⁹⁴

Definition 3.6:⁹⁵ Eine Abbildung, bei der die Projektionsstrahlen aus einem Punkt kommen, wird als Zentralprojektion bezeichnet.

Wenn eine Abbildung durch Zentralprojektion entsteht, dann erweckt sie einen perspektivischen Eindruck. Dies hängt mit der Entstehung des Bildes auf unserer Netzhaut zusammen.⁹⁶

Die Nachteile bei diesem Abbildungsvorgang sind die konstruktiven Ansprüche der Projektionsart und der Verlust der Maßgerechtheit. Beispielsweise können parallele Geraden im Raum zu schneidenden werden, wie in Abbildung 3.4 zu sehen ist. Ebenfalls ist erkennbar, dass die Mitte einer Strecke durch die Projektion nicht immer die Mitte bleibt. Aufgrund dieses Mangels und den teils schwierigen Konstruktionen meiden Architekten und Architektinnen bzw. andere Berufsgruppen in ähnlichen Branchen diese Projektionsart, im Gegensatz zu den Künstlerinnen und Künstlern, die mithilfe der Zentralperspektive räumliche Eindrücke erzeugen wollen.

⁹² vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 3

⁹³ Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 328

⁹⁴ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 3

⁹⁵ Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 328

⁹⁶ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 328

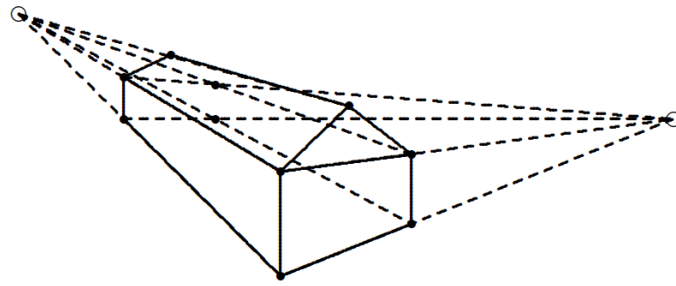


Abbildung 3.4: Zentralprojektion eines Hauses

Zusammengefasst ergeben sich folgende Eigenschaften für die Zentralprojektion: anschaulich, wenig maßgerecht, nicht teilverhältnistreu, nicht paralleltreue und konstruktiv aufwändig.⁹⁷

Für die Darstellung eines Körpers in eine Ebene kann auch die Parallelprojektion verwendet werden. Vereinfacht ausgedrückt werden die Punkte des Körpers durch parallele Strahlen auf die Projektionsebene abgebildet. Die parallelen Geraden gehen hierbei wieder in parallele Geraden über, wie die Abbildung 3.5 zeigt.⁹⁸

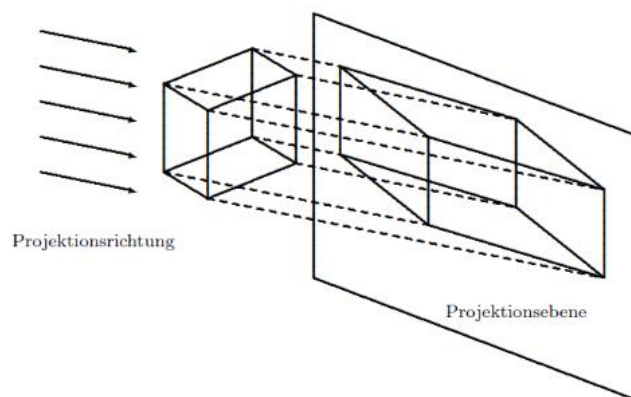


Abbildung 3.5: Parallelprojektion eines Quaders

Definition 3.7:⁹⁹ Eine Projektion, die dem Schattenbild bei parallel einfallendem Licht entspricht, heißt Parallelprojektion.

⁹⁷ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 3

⁹⁸ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 64

⁹⁹ Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 328

Der Vorteil der Parallelprojektion ist, dass die Abbildungen möglichst maßgerecht sind. Ebenfalls bleiben parallele Geraden auch in der Darstellung parallel und die Teilverhältnisse bleiben auch erhalten. Weiters ist die Parallelprojektion noch hinreichend anschaulich und zum Konstruieren einfach.

Zusammengefasst können der Parallelprojektion folgende Eigenschaften zugeordnet werden: Weniger anschaulich, weitgehend maßgerecht, parallelentreu, teilverhältnistreu und konstruktiv einfach. Ebenfalls werden alle zur Bildebene parallelen ebenen Figuren kongruent abgebildet.¹⁰⁰

¹⁰⁰ vgl. Krauter und Bescherer (2013), S. 7f

4 Geometrie als Thema der Kunst

4.1 Geschichtlicher Einblick

Die Mathematik und die Kunst begegneten sich immer wieder im Laufe der Geschichte indem sie miteinander verschmolzen oder strikt getrennt worden sind. Heute beschäftigen sich Künstlerinnen und Künstler nach wie vor mit Geometrie.

Für Leonardo da Vinci zählte die Geometrie zu den Kernelementen, da sie nicht nur die Natur verständlich machen würde, sondern auch ein wichtiger Ausgangspunkt für die Kunst sei. Leonardo schrieb sogar in eines seiner Notizbücher: *„Niemand, der nicht auch ein Mathematiker ist, soll meine Grundsätze lesen.“*¹⁰¹ Leonardo da Vinci befasste sich für seine Theorien über die Perspektive sehr viel mit der praktischen Geometrie und mit geometrischen Festkörpern. Er widmete ihnen viele Seiten in seinen Notizbüchern, eine davon ist in Abbildung 4.1 zu sehen.

Ebenfalls beschäftigte sich Leonardo da Vinci mit dem Satz des Pythagoras und entdeckte einen neuen Beweis dazu. Er versuchte sich auch an den Problemen der „Würfelverdopplung“ und der „Quadratur des Kreises“.¹⁰²

¹⁰¹ Wade (2017), S. 80

¹⁰² vgl. Wade (2017), S. 78-82

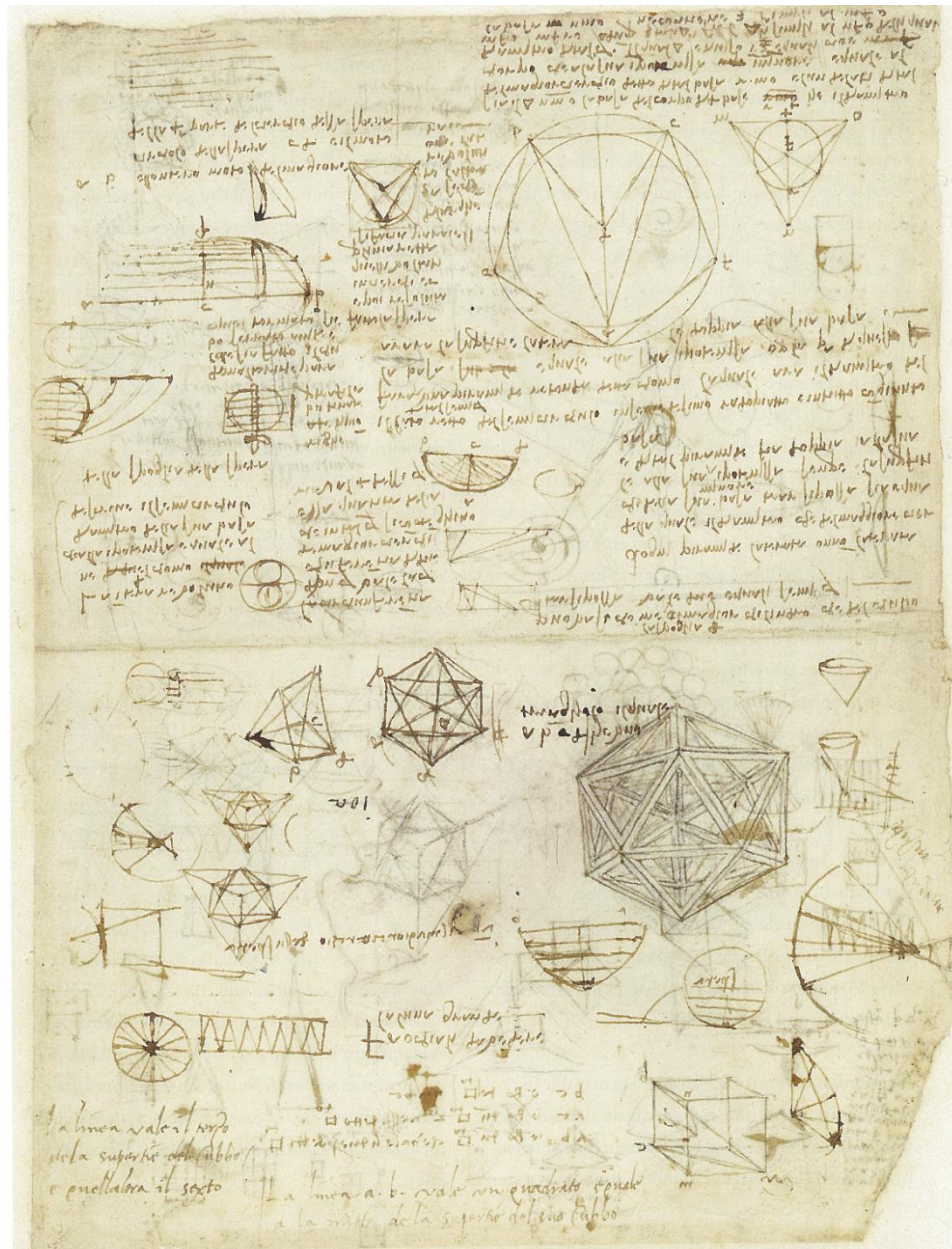


Abbildung 4.1: Notizbuchseite Leonardo

Doch nicht nur Leonardo da Vinci beschäftigte sich mit mathematischen Inhalten. In der Renaissance wurde auch die Zentralperspektive wiederentdeckt, welche die Mathematik und die Kunst wieder miteinander vereinte. Im 15. Jahrhundert befassten sich auch deutsche Künstlerinnen und Künstler mit verschiedensten Konstruktionen des Bildraumes und mit geometrischen Körpern. Albrecht Dürer, ein Künstler und Mathematiker, lernte diese Verfahren während seiner Italienreise kennen und nahm diese mit in den mitteleuropäischen Raum. Dieses

Phänomen der Darstellung eines dreidimensionalen Raumes hielt sich über Jahrhunderte, bis die Mathematik auf eine neue Thematik stieß: Die nichteuklidische Geometrie.¹⁰³

Durch diesen Anachronismus der Zentralperspektive im 20. Jahrhundert suchten die Künstlerinnen und Künstler wieder verstärkt die Nähe zur Mathematik. Sie waren besonders interessiert an Konstruktionen von nicht-euklidischen oder höherdimensionalen Räumen und reagierten mit der simultanen Darstellung mehrerer Sichtweisen im Kubismus und der Zerlegung des Raumes darauf. Weiters hatte die intensive Beschäftigung der Kunst mit der Mathematik zur Folge, dass die damit verbundene Abstraktion und gleichzeitige Loslösung von der Wirklichkeit sich neu in der Kunst definierte. Manche Künstler, wie beispielsweise Max Bill oder Georges Vantongerloo, sprachen sich für die Verwendung reiner Kunstformen, welche mathematische Formen sind, aus und behaupteten, dass nur so die Verdeckung durch Naturformen ausgeschaltet werden kann.¹⁰⁴

Ein Überbegriff für die Kunstformen im 20. Jahrhundert, die sich mit Mathematik und Kunst beschäftigten, ist die geometrische Abstraktion. Die Künstlerinnen und Künstler dieser Kunstrichtungen legten zu dieser Zeit erheblichen Wert darauf, dass ihre Werke große Rationalität und mathematische Berechenbarkeit aufweisen konnten. Die Formen wurden reduziert und geometrisch geordnet, um das Bild und seine gestalterischen Mittel autonom und aus dem gegenständlichen Form- und Gefühlszusammenhang heraus zu lösen. Es erfolgte eine große Konzentration auf harmonische Konstruktionen, in denen Farben, Linien und Flächen nach bestimmten Gesetzen und Ordnungssystemen zueinander in Verbindung gebracht wurden. Aus diesen genannten Forderungen entwickelten sich für die abstrakten Bilder die drei folgenden konkreten Vorgaben: Elementar, geometrisch und konstruierbar.

Wenn auf der einen Seite nun das „Ding“, also das Objekt selbst stand als sein eigenes magisches Zeichen, so stand auf der anderen Seite die von den Künstlerinnen und Künstlern selbst gewählte und reinste Form der Bildkonstruktion: Das Quadrat.¹⁰⁵ Die Mathematik bzw. die Geometrie waren in einigen Kunstströmungen aber nicht nur als Konstruktionsprinzip gemeint, sondern wurden auch als Erkenntnismethode verwendet.¹⁰⁶ Zusätzlich gilt es zu erwähnen, dass reine geometrische Formen, abgesehen von der Verwendung des Kreises oder

¹⁰³ vgl. Drechsler (2008), S.12

¹⁰⁴ vgl. ebd. (2008), S.12

¹⁰⁵ vgl. Christofori et al. (2005), S. 23

¹⁰⁶ vgl. Riese (2008), S. 40

Kreuzes als bestimmtes Symbolzeichen oder in ornamentalen Zusammenhängen, vor der Moderne nie als selbstständige Kunstwerke realisiert worden waren.¹⁰⁷

Ebenfalls wichtig für die Kunst der Moderne waren die Einflüsse der Avantgarde. Ein gemeinsamer Nenner für alle war die Darstellung der Gegenstandslosigkeit und die damit verbundene Auseinandersetzung mit dem eigentlichen Sinn der Kunst. Der russischen Avantgarde ging es vor allem darum, ein objektives Gesetz für die künstlerische Gestaltung zu finden. Jedoch waren sich die Künstlerinnen und Künstler der russischen Avantgarde nicht immer einig und so emigrierten einige, wie beispielsweise Wassily Kandinsky, und brachten somit ihr Gedankengut mit nach Europa.¹⁰⁸

Eines der Hauptthemen für die Entwicklungen in der Kunst, die weiter oben schon genannt wurde, war die nichteuklidische Geometrie, welche vor allem zu Beginn des 20. Jahrhunderts für die Kunst schlagend wurde. Doch nicht nur diese Entdeckung stiftete „Unruhe“ in der Mathematik, sondern auch die transfinite Mengenlehre von Georg Cantor und der Formalismus von David Hilbert.¹⁰⁹

Im Sinne dieser Arbeit ist vor allem die Entdeckung neuer Geometrien ein besonderer Punkt. Denn durch deren Vielzahl, sahen sich Künstlerinnen und Künstler in ihrer Annahme bestätigt, dass eine neue „Pluralität“ der Räumlichkeit existiere.¹¹⁰ Diese Vorstellung wirkte sich auf die Arbeitsweise und Denkweise der Künstlerinnen und Künstler im damaligen Zeitalter der Moderne aus. Obwohl in der Mathematik von n-dimensionalen Räumen die Rede ist, befassten sich Künstlerinnen und Künstler vor allem mit der vierten räumlichen Dimension und wie diese anschaulich dargestellt werden konnte. Oft gingen die Vorstellungen darüber weit über die eigentliche geometrische Bedeutung hinaus.¹¹¹

Verstärkt beschäftigten sich Künstlerinnen und Künstler in den 1960er Jahren wieder mit Mathematik und Kunst. Im Fokus von Sol LeWitt oder Donald Judd lagen häufig geometrische Primärstrukturen und Ruth Vollmer setzte sich mit geometrischen Gebilden und mathematischen Modellen auseinander, um hier nur einige Beispiele zu nennen. Mit dem Aufkommen des Computers entstand auch die frühe Computerkunst, die hier aus rahmentechnischen Gründen nicht weiter verfolgt wird.¹¹²

¹⁰⁷ vgl. Helfenstein (1984), S. 9

¹⁰⁸ vgl. Riese (2008), S. 59f

¹⁰⁹ vgl. Niederbudde (2006), S. 11ff

¹¹⁰ vgl. ebd. (2006), S. 215

¹¹¹ vgl. Drechsler (2008), S.44

¹¹² vgl. ebd. (2008), S.13

4.2 Geometrie als Thema in der Kunst vor der Moderne

Wie in Kapitel 4.1 bereits erwähnt, beschäftigten sich Künstlerinnen und Künstler mit der Verwendung der Geometrie für perspektivische Darstellungen oder Proportionslehre. Allerdings gab es eine kurzlebige Phase im 16. Jahrhundert, in der die Geometrie selbst als Bildthema aufkam. Drei deutsche Künstler, Wenzel Jamnitzer, Johannes Lencker und Lorenz Stoer waren sich der jüngsten Abhandlungen zur Geometrie und Perspektive im Klaren, verfolgten jedoch andere künstlerische Zielsetzungen, wie beispielsweise die Demonstration der Methoden der Geometrie und der Perspektive.

Weiters entwickelten die Künstler nie eine konkrete Theorie zu ihren Werken und verließen sich stattdessen auf die Aussagekraft ihrer Zeichnungen. Doch nicht nur eine fehlende Theorie macht die Rekonstruktion der Absichten und Ideen schwierig, sondern auch, dass über das Leben der Künstler nicht viel bekannt ist, da sie damals nicht viel Beachtung gefunden haben und das obwohl ihre Bücher zahlreich übersetzt, nachgedruckt und teilweise auch raubkopiert wurden.

Ein weiteres Problem ist, dass wichtige Informationen und Schriften aufgrund von Kriegen verloren gegangen sind und auch einige Künstler, wie beispielsweise Wenzel Jamnitzer oder Johannes Lencker der Pest zum Opfer gefallen sind.¹¹³

Jedoch bewahrten die drei Künstler ihre Vorliebe für das wesentlich Bildhafte trotz der Abstraktion. Sie bemühten sich künstlerisch um ein hintergründiges Spiel mit der Perspektive und gleichzeitig ein Gebilde von idealer und unwirklicher geometrischer Schönheit zu erschaffen.

Lorenz Stoer erschuf mit seinen elf Holzschnitten aus dem Band „Geometria et Perspectiva“ zwar den Anschein von bescheidenen perspektivischen Vorlagen, jedoch gilt er für die ein oder andere Person als ein Vorwegnehmer der bekanntesten Feststellung von Cezanne, dass alle Naturformen aus Kugel, Kegel, Kubus und Zylinder rekonstruierbar sind.¹¹⁴

Daher wird nun ein Einblick in seine Arbeiten getätigt werden.

¹¹³ vgl. Wade (2017), S. 142f

¹¹⁴ vgl. Prectl (1969), S. 4

4.2.1 Lorenz Stoer und die Geometrie

Wie bereits erwähnt, ist bis heute nicht viel über den Künstler Lorenz Stoer bekannt. Genaue Lebzeiten können nur geschätzt werden. Bekannt ist, dass er Maler und Zeichner war und sein Hauptwerk „Geometria et Perspectiva“ 1556 erschienen ist. Weiters gibt es Aufzeichnungen darüber, dass er 1621 noch am Leben war.¹¹⁵

Sein Hauptwerk „Geometria et Perspectiva“ besteht lediglich aus elf Holzschnitten und ist weder mit Text noch mit sonstigen Notizen verbunden.

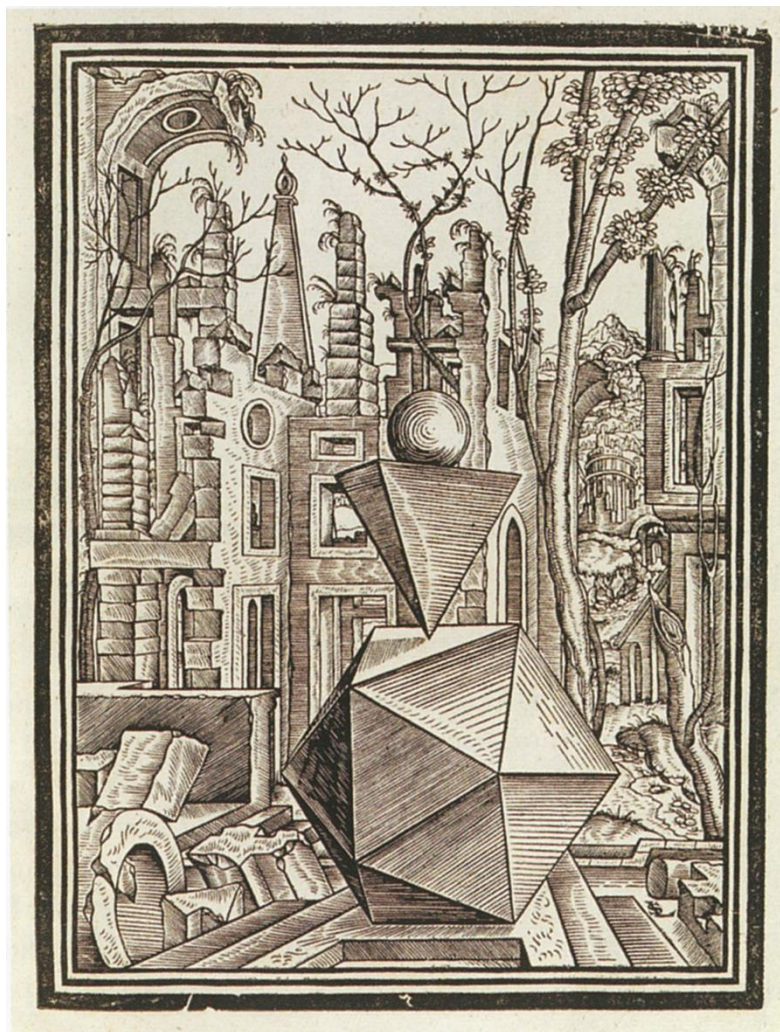


Abbildung 4.2: Bildtafel 4 von „Geometria et Perspectiva“

¹¹⁵ vgl. Precht (1969), S. 17

In Abbildung 4.2 sind drei geometrische Körper im Vordergrund, die übereinander ausbalanciert werden. In der Bildtafel 4 hat Stoer an oberster Stelle eine Kugel angebracht, die auf einer regelmäßigen Pyramide mit der Grundfläche eines Quadrats ruht. Die Spitze der Pyramide ist auf einer Dreiecksfläche positioniert.¹¹⁶ Diese Fläche gehört mit 19 weiteren Dreiecksflächen, die aus gleichseitigen Dreiecken bestehen, zur Figur des Ikosaeders.¹¹⁷

Diese drei geometrischen Formen stehen auf einem Podest und sind umgeben von einer Landschaft und Ruinen. Da keine Menschen abgebildet sind, versprüht das Werk eine post-apokalyptische Stimmung. Dies könnte ein Versuch von Stoer sein, auf die „ewigen“ Merkmale der abgebildeten geometrischen Körper hinzudeuten. Allerdings muss hier an dieser Stelle auch erwähnt werden, dass zu dieser Zeit ein großes Interesse an antiken Ruinen und deren Nachbildung vorherrschte.

Abgesehen von seinen elf Holzschnitten hat Lorenz Stoer noch zwei Folianten hinterlassen, die einige geometrische Figuren behandeln. Drei Seiten der Aquarellserie sind in Abbildung 4.3 zu sehen. Sie zeigen noch „einfachere“ geometrische Körper. Zu sehen sind verschiedenste Varianten der platonischen und archimedischen Körper.¹¹⁸

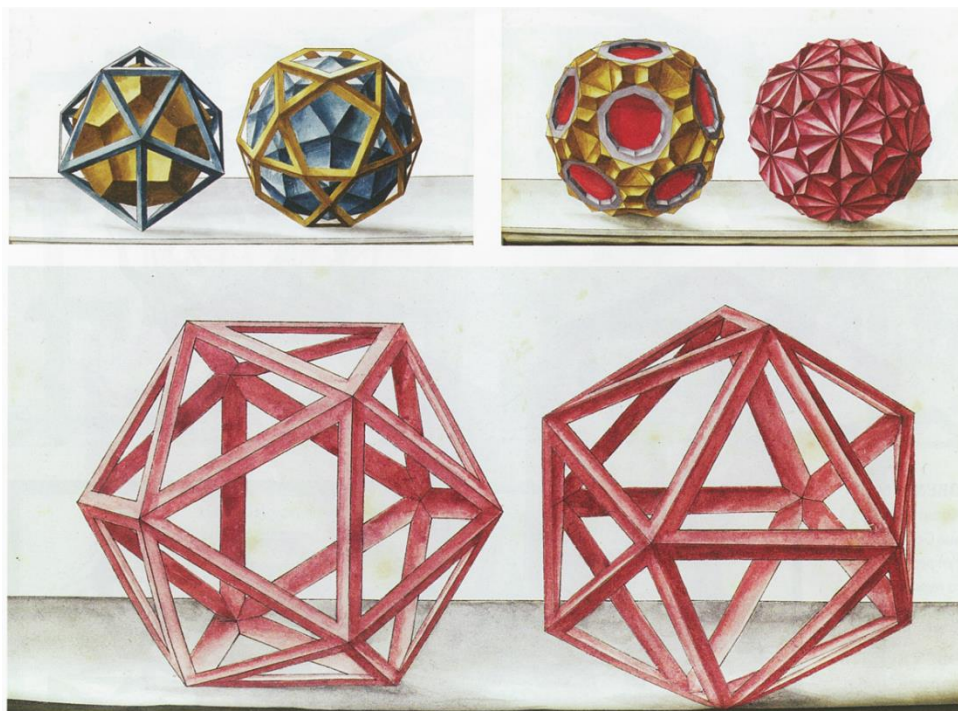


Abbildung 4.3: Drei Seiten aus Stoers Aquarellserie

¹¹⁶ vgl. Wade (2017), S. 152

¹¹⁷ vgl. Lundy und Martineau (2014), S. 138

¹¹⁸ vgl. Wade (2017), S. 156 - 160

Die untere Abbildung zeigt ein rotes „Gerüst“ für das Ikosaeder in zwei verschiedenen Perspektiven. Stoer variiert vielfach, stellt aber die Körper in derselben Farbe dar.¹¹⁹ Weiters bringt Stoer dieses Gerüst, nur in einer anderen Farbe, in Verbindung mit einem Dodekaeder als Inhalt (links oben). Er präsentiert somit die Körper in ihrer diaphanen Struktur, das bedeutet, er reduziert sie auf ihre Außenkanten.¹²⁰ Rechts oben ist ein Ikosidodekaeder zu erkennen, der durch das Aquarell eine eigene Struktur erhält. Dass die Variationen von Polyedern auch kompliziertere Formen annehmen können, ist in der nächsten Abbildung 4.4 zu erkennen.

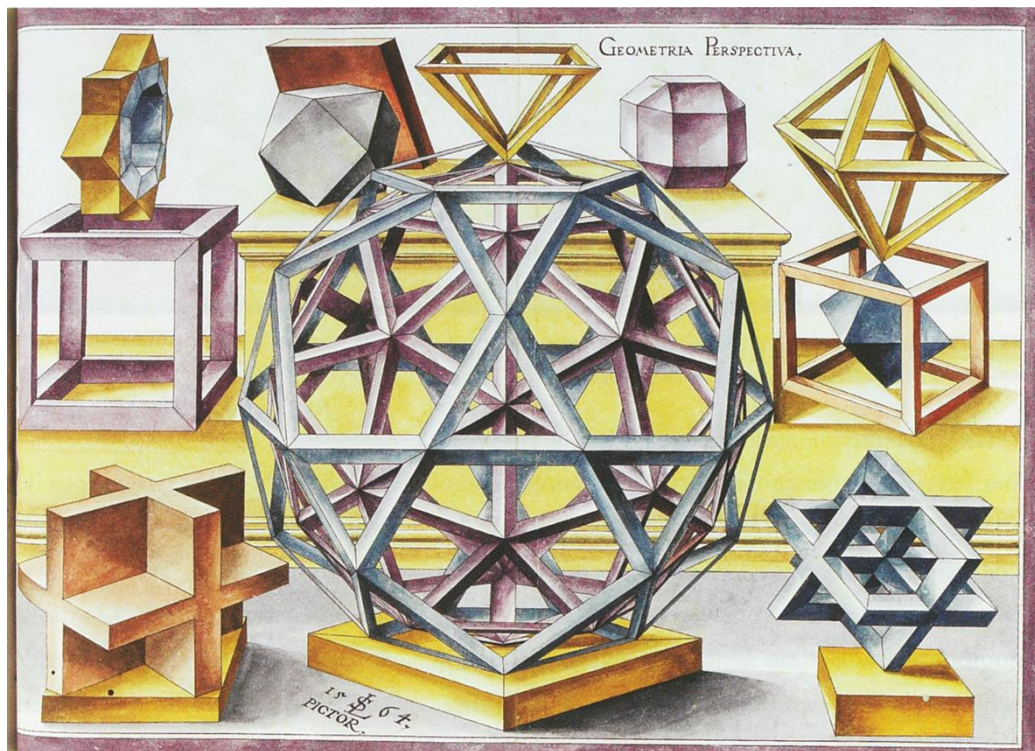


Abbildung 4.4: Weitere geometrische Aquarelle von Stoer

Hier finden sich nicht nur Körpergerüste von einem Würfel oder Quader, sondern auch wieder diaphane Strukturen von platonischen und archimedischen Körpern,¹²¹ deren Kombination für Stoer eine gewisse Faszination dargestellt haben muss. Ebenfalls hatte er eine bestimmte Einteilung der Körper vor Augen, da er seine Aquarelle mit „Corpora regulata et irregulata“ betitelte. Mithilfe der Aquarelltechnik gelingt ihm eine besondere räumliche Darstellung der Körper.¹²² In der Abbildung 4.4 sind aber nicht nur die regelmäßigen Körper wie Tetraeder und

¹¹⁹ vgl. Pfaff (1996), S. 14-15

¹²⁰ vgl. ebd. (1996), S. 15

¹²¹ vgl. Glaeser (2007), S. 75-81

¹²² vgl. Wade (2017), S. 157

Kubus abgebildet, sondern sie zeigt auch kugelförmige Gebilde, die mit diaphanen Strukturen durchzogen sind. Ebenfalls sind Sternengebilde in unterschiedlichsten Farben und Formen vertreten, wie im unteren Teil der Abbildung zu sehen ist.¹²³

Insgesamt fasst der kleinere Foliant 33 und der andere Foliant 336 Aquarelle. Die Entstehungsdauer wird auf 40 Jahre geschätzt. Welche Absichten hinter seinen Werken standen und was Stoer genau an den geometrischen Figuren faszinierte oder zu erforschen versuchte, kann aufgrund der fehlenden Informationen nicht eruiert werden.¹²⁴

Die oben angeführte Behauptung, dass er ein Vorwegnehmer von Cezanne sei, ist allerdings in Frage zu stellen.¹²⁵ Seine Werke vermitteln eher den Eindruck, als würde er lediglich eine Vorliebe für geometrische Körper und deren „schöne“ Darstellung hegen und weniger, welche „Botschaft“ oder zugrundeliegende Theorie er damit vermitteln wollte.

Jedoch kann gemutmaßt werden, dass Stoer das Ansehen von Kunst und Handwerk durch die Rückversicherung der Mathematik steigern wollte.¹²⁶

¹²³ vgl. Pfaff (1996), S. 15

¹²⁴ vgl. Wade (2017), S. 157

¹²⁵ vgl. Prechtel (1969), S. 4

¹²⁶ vgl. Wade (2017), S. 157

4.3 Der Kubismus und die Geometrie

Der Kubismus ist die erste große Kunstströmung, die sich mit abstrakten Darstellungsformen beschäftigt und gilt als der Wegbereiter der geometrischen Abstraktion. Vor allem durch den analytischen Kubismus glauben die dazugehörigen Künstlerinnen und Künstler, eine neue formale Lösung gefunden zu haben. Sie gehen von formalen Gegenständen aus und zerlegen diese in ein vielfältiges System aus geometrischen Flächen. Mithilfe dieser Konstruktionsweise werden die Gegenstände und der Raum, der sie umgibt wieder in die zweite Dimension zurück geführt. Dadurch wird der Bezug zur Realität bzw. der realen Darstellung gebrochen. Ein kubistisches Bild besteht daher aus zweidimensionalen, form- und farbreduzierten Konstruktionen.¹²⁷ Die Kubistinnen und Kubisten rechtfertigen ihre „Geometrisierung“ der Kunst dahingehend, dass alles was in der Natur vorkommt, mittels geometrische Formen modelliert werden kann.¹²⁸ Der Kubismus strebt nach der Gewinnung von Grundmaßen in jeglichen Formen, welche es möglich machen sollen, nicht nur mit der Realität zu brechen, sondern das Formanliegen der Künstlerinnen und Künstler und die damit verbundene innere Wirklichkeit des Lebens sichtbar zu machen. Diese Aufgabe erfüllen die uns bekannten Formen: Kubus, Würfel, Dreieck, Kegel, Kreis und Kugel.¹²⁹

Allerdings lösen sich die Kubistinnen und Kubisten nie völlig von der Gegenständlichkeit.¹³⁰ Der Kubismus verwendet in erster Linie die Kenntnisse über Maß, Volumen und Gewicht einer Form. Die Künstlerin oder der Künstler füllen den Bildraum durch das Zusammensetzen von Linien, Raumeinheiten, quadratischen und kubischen Gleichungen und Waagverhältnissen. Roger Allard, ein französischer Kritiker und Dichter, meint dazu, dass in das mathematische Chaos des Kubismus nur die Künstlerinnen und Künstler Ordnung bringen können. Der abgebildete Gegenstand wird nicht nur von einem Standpunkt dargestellt, sondern analysiert, in einzelne Bestandteile und verschiedene Ansichten zerlegt und wiedergegeben. Durch dieses analytische Vorgehen der Künstlerinnen und Künstler, dass der Gegenstand in seiner Gesamtheit untersucht wird, entsteht die Bezeichnung analytischer Kubismus.¹³¹

Durch das Aufsprengen des Bildraumes können die Einzelteile des abgebildeten Gegenstandes neu geordnet und kombiniert werden. Jedoch kann die Betrachterin oder der Betrachter

¹²⁷ vgl. Christofori et al. (2005), S. 22

¹²⁸ vgl. Drechsler (2008), 54

¹²⁹ vgl. Neue Galerie der Stadt Linz (1950), S. 3

¹³⁰ vgl. Christofori et al. (2005), S. 22

¹³¹ vgl. Drechsler (2008), S. 42

jederzeit den Gesamtgegenstand rekonstruieren.¹³² Schließlich stellen Künstlerinnen und Künstler fest, dass geometrische Formen mit den Grundelementen Kreis, Quadrat und Dreieck am besten geeignet sind, um den Bildinhalt aufzubauen. Somit ändert sich der analytische Kubismus zum synthetischen. Hierbei wird umgekehrt von der geometrischen Form, wie beispielsweise einem Zylinder ausgegangen und dieser im Bild als eine bestimmte Flasche übersetzt.¹³³ Dieser kommt wieder zurück auf das Thema der ästhetischen Illusion, im Gegensatz zum analytischen Kubismus, der den perspektivischen Scheinraum aufbrechen will.¹³⁴

4.3.1 Analytischer Kubismus und die Geometrie

Wie bereits erwähnt können sich die Künstlerinnen und Künstler des Kubismus nie ganz von der Gegenständlichkeit trennen. Zwei der bekanntesten Vertreter, Georges Braque und Pablo Picasso, bleiben trotzdem stets bestrebt, mithilfe von mathematischen Formen die zentralperspektivische Sicht aufzuheben. Jedoch können die Abbildungen aufgrund ihrer Einzelteile rekonstruiert werden. Ebenfalls werden diese Einzelstücke von Kritikerinnen und Kritikern als „figurative Partikel“ betrachtet im Vergleich zu der früheren Bildgestaltungsweise.¹³⁵

Im Gegensatz dazu sieht die Philosophie in dieser Zeit im Kubismus eine Anschauungsform der kantischen Erkenntnistheorie in Bezug auf die „Sehkategorien“. Die beinhalten die im menschlichen Bewusstsein gesenkten geometrischen Grundformen, wie beispielsweise die „Urlinie“ und die „Urform“ und diese wiederum sind eine Voraussetzung zur Wahrnehmung der „natürlichen Körperwelt“. Der Autor Daniel-Henry Kahnweiler sieht im Aufbrechen der Illusion durch den Kubismus den Blick auf die deutlichste Erläuterung und Begründung aller Formen freigesetzt. Somit macht der Kubismus die Gegenstände auf ihre Urform hin transparent.¹³⁶

¹³² vgl. Drechsler (2008), S. 42

¹³³ vgl. ebd. (2008), S. 48

¹³⁴ vgl. Schunck (1984), S. 21

¹³⁵ vgl. ebd. (1984), S. 19f

¹³⁶ vgl. ebd. (1984), S. 103

Weiters wird der Kubismus kritisiert, dass er alle Darstellungsinhalte, gleich ob es nun Menschen, Häuser oder ganze Landschaften sind, auf geometrische Schemata reduziere und somit die organische Form verachte. Der Künstler Georges Braque relativiert diese Aussage, in dem er feststellt, dass er keine Frau in ihrer ganzen Schönheit darstellen könne. „[...] *Ich muss deshalb eine neue Art von Schönheit schaffen, die Schönheit, die sich mir als Volumen, Linie, Masse, Gewicht zeigt.*“¹³⁷



Abbildung 4.5: „Frau mit Gitarre“ von Georges Braque 1913

¹³⁷ Drechsler (2008), S. 42

Georges Braque Bild „Frau mit Gitarre“ von 1913 zeigt deutlich, was er mit seiner Antwort auf die Kritik meint. Gleich auf den ersten Blick sieht man eine Frau mit ihrer Gitarre, obwohl sie nicht realistisch abgebildet ist. Erkennbar ist auch der flächenhafte Aufbau, der das Bild dominiert. Trotz dieses flächigen Aufbaus ist es möglich, das Motiv zu analysieren und zu rekonstruieren. Blickt man auf das braune Trapez, welches sich fast im Mittelpunkt des Bildes befindet, so erkennt man fünf Geraden, vier davon schneiden einen Kreis. Ebenfalls berühren die fünf Geraden beinahe ein weiteres kleineres Trapez. Mithilfe von zwei Wellenlinien oberhalb der bereits genannten Elemente lässt sich somit eine Gitarre rekonstruieren, obwohl sie nicht zur Gänze vorhanden ist.¹³⁸

Ebenfalls sind Linien bzw. Geraden im Bild, die die Fläche zusätzlich unterteilen, das Motiv durchschneiden oder/ und mit ihm vereint werden. Die Gerade, die die scheinbar rechte schwarze Schulter der Frau durchläuft, könnte in der „Schulterebene“ liegen und lediglich mit weißer Farbe hervorgehoben worden sein. Gleichzeitig durchschneidet sie die darunter liegende helle Fläche, für die wir einen Schnittpunkt berechnen könnten. Dies trifft aber nicht nur auf Ebenen und Geraden zu, sondern schließt auch Schnittpunkte zwischen Geraden und Geraden sowie Ebenen mit Ebenen mit ein. Jedoch gelingt es Georges Braque durch die Komposition der Flächigkeit Ruhe in das Bild zu bringen.¹³⁹

Ebenfalls finden sich nicht nur flächige und spitze Formen im Bild sondern auch abgerundete. Es lassen sich drei schwarze runde Flächen erkennen, die man als Schultern und Knie der Frau identifizieren könnte. Zusammen mit diesen sanft gerundeten Formen und einem weich atmosphärisch gestalteten Hintergrund erzeugen sie einen gelösten Eindruck, welcher zur ruhenden Ausstrahlung des Bildes beiträgt.¹⁴⁰

Um Genaueres über die Verwendung von Formen bzw. Figuren und deren Volumen auszusagen, betrachten wir nun ein weiteres Bild von Georges Braque, welches in Abbildung 4.6 zu sehen ist.

¹³⁸ vgl. Drechsler (2008), S. 42

¹³⁹ vgl. Benton et al. (1998), S. 84f

¹⁴⁰ vgl. ebd. (1998), S. 85



Abbildung 4.6: Georges Braque Violine und Krug (1909/10)

In der obigen Abbildung 4.6 begegnen uns bekannte Schemata, die wir vorher schon analysiert haben. Die dargestellten Objekte sind wieder in Flächen eingeteilt, können jedoch rekonstruiert werden. Durch die feine Textur der Striche und Schraffuren treten die geometrischen Facetten

sehr gut hervor und durch die Verwendung von wenigen Farben ist die Reduktion fast vollendet.¹⁴¹

Jedoch erweckt dieses Bild mehr den Eindruck eines dreidimensionalen Raumes bzw. kann die Betrachterin oder der Betrachter der Violine ein gewisses Volumen zugestehen. Braque zielt bei solchen Darstellungen mehr auf die Materialhaftigkeit ab. Er ist davon überzeugt, dass der Seh- und Tastsinn in engem Zusammenhang stehen und durch die Zertrümmerung des Raumes das physisch Reale greifbar gemacht werden kann. Tatsächlich wirkt es so, als würde die Violine aus dem Bildraum nach vor drängen, was durch den kristallinen Aufbau des Bildes unterstützt wird und als Projektion vom inneren des Bildes nach außen in den realen Raum gesehen werden kann.¹⁴² Im Kapitel 3.3 legten wir fest, dass eine Projektion ein Bild auf einer Ebene entspricht. In diesem Falle fällt die Projektion der Geige auf mehrere Ebenen, die auch nicht immer parallel zueinander sind.

Wie bereits erwähnt ist die „Greifbarmachung“ des Raumes ein besonderes Anliegen von Braque.¹⁴³ Wir könnten nun den Versuch wagen, das Volumen der Geige zu berechnen. Dafür müsste man sich aber zuerst auf eine geeignete Höhe für den Körper der Violine einigen. Allerdings gäbe es hier auf den ersten Blick nur zwei geeignete Stellen, an denen wir Maße für die Höhe entnehmen könnten. Zum einen Mal ist es möglich gleich unterhalb des Geigenhalses beim linken Geigenkörper-Zylinder anzusetzen. Zum anderen Mal würde sich der unterste rechte Teil der Violine anbieten. Jedoch lässt sich erkennen, dass es sich hier nicht um dieselbe Perspektive handelt. Somit ist festzustellen, dass es zwar möglich ist für einige Polyeder das Volumen zu bestimmen, aber es kann über die Größenverhältnisse oder sonstige Eigenschaften keine genaue Aussage getroffen werden.¹⁴⁴

Allerdings sind noch zwei weitere Gegenstände im Bild zu erkennen: Ein Krug und ein Nagel. Der Nagel ist von besonderem Interesse, da er als scheinbar einziger Gegenstand im Bild einen Schatten besitzt. Dieser Schatten deutet auf einen dreidimensionalen Raum hin und bildet somit einen Störfaktor innerhalb der kubistischen Komposition. Mithilfe des einfach dargestellten Schattens versucht Braque die Transformation vom realistisch gemalten Bild zum faktischen Objekt zu symbolisieren.¹⁴⁵ Dieser realen Darstellung des Nagels mit seinem Schatten können

¹⁴¹ vgl. Schmidt (1998), S. 106

¹⁴² vgl. Brugger (2008), S. 35

¹⁴³ vgl. ebd. (2008), S. 35

¹⁴⁴ vgl. Benton et al. (1998), S. 80

¹⁴⁵ vgl. Brugger (2008), S. 37f

wir durchaus zustimmen, da der Schatten auf der ebenen Fläche, in der der Nagel selbst „eingeschlagen“ wurde, projiziert wird.

4.3.2 Synthetischer Kubismus und geometrische Formen

Um nun einen Gesamteindruck des Frühkubismus zu erhalten, werfen wir noch einen Blick auf die „Umkehrung“ des analytischen Kubismus. Der sogenannte synthetische Kubismus geht von geometrischen Formen aus und kommt somit zu seiner Darstellungsform.¹⁴⁶ Juan Gris bezeichnet dieses Vorgehen als „deduktiv“ und meint, dass die mathematischen Formen ihn hin zur Darstellung eines bestimmten Gegenstandes führen würden.¹⁴⁷

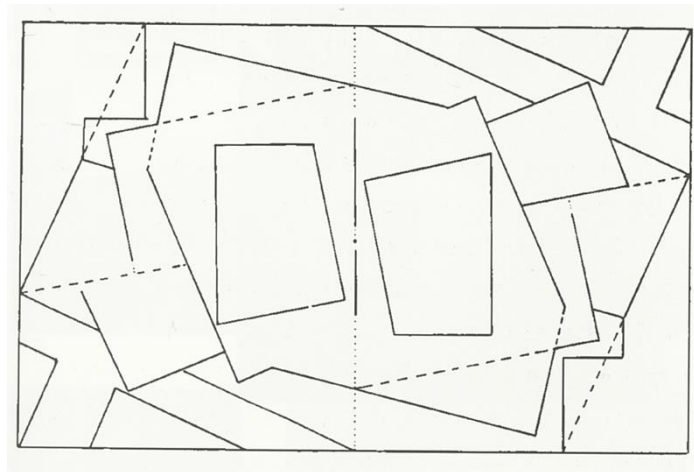


Abbildung 4.7: Schemazeichnung für „Glas und Zeitung“

¹⁴⁶ vgl. Drechsler (2008), S. 48

¹⁴⁷ vgl. Gris (1957), S. 23

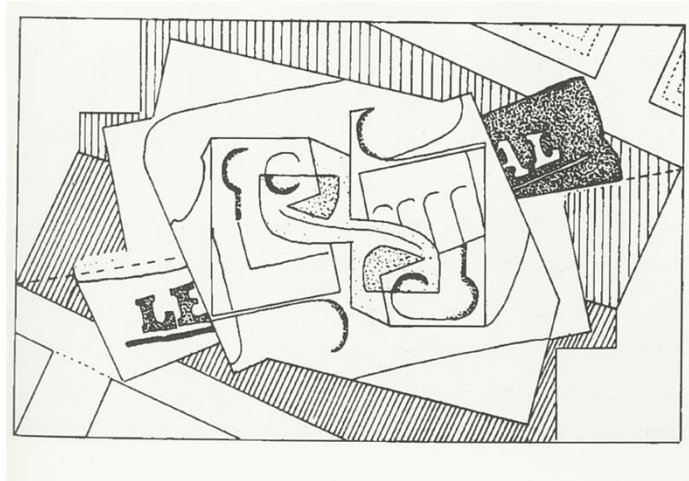


Abbildung 4.8: Weitere Schemazeichnung zu „Glas und Zeitung“ 1917

Die Abbildung 4.7 zeigt, wie der Künstler Juan Gris sein Bild „Glas und Zeitung“ von 1917 aufbaut. Er verwendet Vierecke und Trapeze und führt so seinen darzustellenden Inhalt auf geometrisch einfache Formen zurück. Mit der Abbildung 4.8 ist besser ersichtlich, welche Gegenstände aus den geometrischen Formen werden sollen. Betrachtet man nun nochmal die Abbildung 4.7, so ist das Glas als Viereck und die Zeitung als Trapez dargestellt. Die Schemazeichnung wurde in der Mitte geteilt und daher lassen sich fast immer dieselben Formen auf der linken und rechten Seite finden. Das Glas auf der rechten Seite wird links ebenfalls dargestellt, nur dreht der Künstler das Viereck um 180°. Zusätzlich für den Bildaufbau versetzt Gris die anderen Formen auch diagonal und die Flächen und Umrisse beziehen sich punktsymmetrisch auf den Mittelpunkt der Bildfläche, was vor allem durch die von der Zeitung ausgehenden strichlierten Linien besonders deutlich ist.¹⁴⁸ Gris macht hier im Gegensatz zu Braque keine gesamte „Zersplitterung“ der Gegenstände, sondern lässt Teile, wie beispielsweise das Glas zum Großteil unverändert. Ebenfalls gebraucht er Licht und Schatten um die Formen zu begrenzen.¹⁴⁹

Aber nicht nur die Form- sondern auch die Farbentsprechung richtet sich nach geometrischen Operationen.¹⁵⁰ So ist der Kern des Bildes mit helleren Farben versehen und von größeren dunkleren Flächen umschlossen, wie in Abbildung 4.9 zu sehen ist.

¹⁴⁸ vgl. Benton et al. (1998), S. 105-107

¹⁴⁹ vgl. Gris (1957), S. 21

¹⁵⁰ vgl. Benton et al. (1998), S. 106



Abbildung 4.9: „Glas und Zeitung“ von Juan Gris 1917

Durch diese Farbgebung ist das Bild im Gleichgewicht mit seinen geraden und runden Formen.¹⁵¹ Ebenfalls ist die Tischfläche hell, wodurch sie sich vom Untergrund abhebt. Der Schatten im Glas wird lediglich durch Konturen hervorgehoben. Allerdings bilden die Schriftzeichen hier die Ausnahme zum fast spiegelgleichen Links und Rechts des Bildes. Vom Wort „LE JOURNAL“, auf Deutsch „die Zeitschrift“, werden hier die beiden ersten Buchstaben und die beiden letzten nur angeschnitten und wiedersetzen sich somit der spiegelbildlichen Entsprechung.¹⁵²

¹⁵¹ vgl. Gris (1957), S. 27

¹⁵² vgl. Benton et al. (1998), S. 105-107

4.4 Suprematismus

Der Suprematismus findet seinen Ursprung in Russland mit Kasimir Malewitsch als Gründer. Er entsteht bereits sehr früh als Parallele zum Konstruktivismus, der in Kapitel 4.5 behandelt wird.¹⁵³ Im Gegensatz zum Kubismus und Futurismus löst der Suprematismus sich von der Gegenständlichkeit. Die radikale Distanzierung zur Gegenstandslosigkeit hin ist für die Kunst ein notwendiger Schritt und Kasimir Malewitsch ist der Erste, der diesen Schritt wagt. Er reduziert sein Formvokabular auf wenige Formen: Quadrat, Kreis und Kreuz.¹⁵⁴

Die Supremati bezeichnet die Vorherrschaft der reinen Empfindung und diese wird durch Kasimir Malewitsch in der Malerei als neue Ausdrucksform aufgegriffen. Er sieht den Suprematismus in der Malerei als den Triumph über die zweckhafte Form des schöpferischen Verstandes. Vor allem ist es wichtig, sich von der gegenständlichen Malerei zu trennen, um so den Spannungsträger, das Bild, für die Empfindung der Gegenstandslosigkeit zu erschaffen. Nur durch diese Gegenstandslosigkeit könne der Verstand unabhängig sein und das Bild als reine Empfindung wirken und sich von Naturformen losreißen.¹⁵⁵

4.4.1 Die Ikone: Das schwarze Quadrat auf weißem Hintergrund

Das Werk, das den Suprematismus begründet und die Loslösung von der gegenständlichen Welt markiert, ist das schwarze Quadrat auf weißem Hintergrund von Kasimir Malewitsch. Es soll sich zur damaligen Zeit gegen die visuelle Mimesis wenden und ein Contra sein zur praktisch-nützlichen Kunst. Ein genauer Entstehungszeitpunkt ist nicht bekannt, aber das Bild wird erstmals 1915 ausgestellt mit mehreren gegenstandslosen Werken, was auf einen längeren Arbeitsprozess hindeutet.¹⁵⁶

¹⁵³ vgl. Christofori et al. (2005), S. 24

¹⁵⁴ vgl. ebd. (2005), S. 23

¹⁵⁵ vgl. ebd. (2005), S. 23f

¹⁵⁶ vgl. Simmen (1998), S. 7

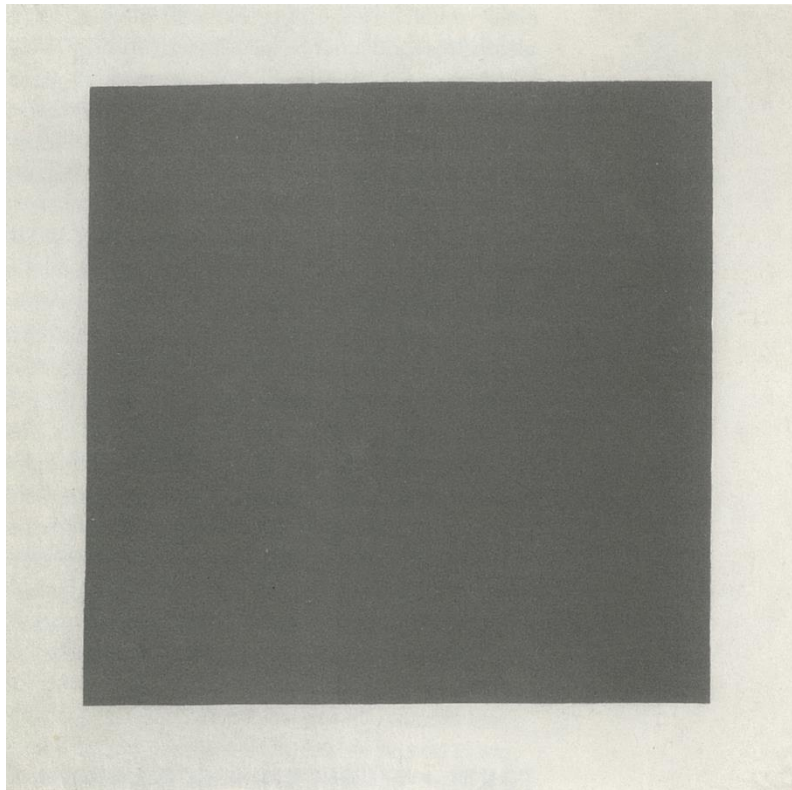


Abbildung 4.10: Schwarzes Quadrat auf weißem Hintergrund

Betrachtet man nun das schwarze Quadrat auf weißem Hintergrund lässt sich die Malweise und Intention des Künstlers erkennen. Tatsächlich handelt es sich nicht um ein exaktes Quadrat, sondern um ein Viereck im Viereck, welches bei genauerer Betrachtung der Abbildung 4.10 erkennbar ist. Das Viereck, welches sogar als das Urquadrat im Suprematismus bezeichnet wird, weist eine unregelmäßig gemalte schwarze Oberfläche auf.¹⁵⁷ Die schwarze Form wird zuerst vom Künstler angebracht und anschließend mit weißer Farbe umrahmt.¹⁵⁸

Allerdings schuf Kasimir Malewitsch, wie bereits erwähnt, kein geometrisch und kein exakt bildmittiges Quadrat. In Kapitel 1.3.1 forderten wir für die Definition des Quadrats, dass alle vier Seiten gleichlang und die Gegenseitenpaare parallel verlaufen müssen. Jedoch sind diese Forderungen beim „schwarzen Quadrat“ nicht gegeben und die unterschiedliche Breite variiert einige Millimeter. Daher liegt hier aus mathematischer Sichtweise kein Quadrat vor.¹⁵⁹

Diese Tatsachen weisen darauf hin, dass das „Quadrat“ nicht mit einem Lineal, sondern nach Augenmaß angefertigt wurde. Kasimir Malewitsch meint zur Form des Werkes: „[die Form]

¹⁵⁷ vgl. Simmen (1998), S. 7

¹⁵⁸ vgl. ebd. (1998), S. 11

¹⁵⁹ vgl. Riese (2008), S. 110

*kennt keine einzige Linie, parallel zum geometrisch korrekten Leinwandquadrat, und wiederholt in sich selbst nicht die Parallelitäten der Seitenlinien. Das ist die Formel für das Gesetz vom Kontrast, der in der Kunst generell besteht.*¹⁶⁰ Anzumerken ist hier, dass das Werk im Ausstellungskatalog von 1915 korrekterweise als Viereck bezeichnet wird.¹⁶¹

Das Quadrat ist für Malewitsch die simpelste und ebenste Form mit der höchsten Homogenität. Ebenfalls ist es eine Form bei der oben und unten, links und rechts vertauschbar sind. Das hat zur Folge, dass das Quadrat keiner hierarchischen Gliederung unterliegt und weitgehend frei von Konnotationen ist, im Gegensatz zu anderen Formen wie beispielsweise das Dreieck.¹⁶² Daher stellt Malewitsch fest, dass das Quadrat eine nahezu anonyme Urform darstellt, welche jede Assoziation mit anderen Gegenständen vermeidet. Deshalb ist das „schwarze Quadrat auf weißem Hintergrund“ das Symbol der gegenstandslosen Kunst.¹⁶³

Für Malewitsch ist das „Schwarze Quadrat auf weißem Hintergrund“ die erste Ausdrucksform der gegenstandslosen Empfindung, denn das Quadrat ist die Empfindung selbst und das weiße Feld ist das Nichts außerhalb dieser.¹⁶⁴ Die schwarze Farbe ist die Impression eines Rhythmus, ein pulsierendes Element, ohne Sinn und ohne Zweck. Außerdem repräsentiert das Schwarz für Malewitsch den Schatten. Dieser ist das Unfassbare, Unstoffliche, Formlose, Leere und Nichtsseiende. Somit ist das „schwarze Quadrat“ der Gegensatz zu den Naturformen, denn es hält sich nicht an vorgegebene natürliche Formen oder imitiert sie, sondern entsteht als reine Form im Bild.¹⁶⁵

Weiters liegt das schwarze Viereck leicht schräg im ihn umgebenden weißen Farbfeld, was den Vorteil mit sich bringt, dass das Viereck nicht starr wirkt.¹⁶⁶ Das weiße Feld um das schwarze Viereck stellt für Malewitsch das „Nichts“ dar. Im Gegensatz zur Mathematik definiert er das weiße Umfeld auch als eine unbestimmbare Fläche, Leere oder Unendlichkeit. Durch diese für ihn undefinierbare weiße Fläche entsteht eine Tiefe, die keinen Halt im virtuellen dreidimensionalen Raum bietet, unbestimmbar bleibt und Transzendenz bietet. Der Künstler versteht die weiße Fläche als ein Umfeld der Empfindung und vergleicht dieses mit einem elektrischen oder magnetischen Feld, das keine feste Einheit ist.¹⁶⁷ In dieses „Nichts“ stürzt das

¹⁶⁰ vgl. Simmen (1998), S. 12

¹⁶¹ vgl. Drechsler (2008), S. 80

¹⁶² vgl. Simmen (1998), S. 13

¹⁶³ vgl. Riese (2008), S. 113

¹⁶⁴ vgl. Drechsler (2008), S. 55

¹⁶⁵ vgl. Simmen (1998), S. 14f

¹⁶⁶ vgl. ebd. (1998), S. 11

¹⁶⁷ vgl. ebd. (1998), S. 16

schwarze Quadrat, welches Thema, Motiv, Symbol und Form in sich vereint.¹⁶⁸ Aus der mathematischen Perspektive betrachtet, wäre es kein Problem die Fläche des „Nichts“ zu berechnen, da es sich um ein Viereck im Viereck handelt. Dafür müsste zuerst der Rand des Bildes abgemessen werden, sowie die Seitenlängen des schwarzen Quadrats. Eine anschließende Subtraktion der jeweiligen Flächeninhalte führt zum Ergebnis des Flächeninhalts des weißen Feldes.

El Lissitzky, ein russischer Künstler auf den im nächsten Kapitel eingegangen wird, bezeichnet die weiße Fläche als „0“ und spricht ihr eine Kontinuität in die Tiefe zu. Ebenfalls bewegt sich die Fläche in die Richtung der Betrachterin und des Betrachters. Diese Ausdehnungen der Wirkungsrichtung stellen für ihn „plus“ und „minus“ dar, wobei die Bewegungsrichtungen ausgetauscht werden können.¹⁶⁹

Aufgrund der Eigenschaften, die das „schwarze Quadrat“ liefert, bezeichnet der Künstler dieses als „Null-Form“, welche durchaus als die Ausgangsform für weitere Formen im Suprematismus zu verstehen ist. Vergleichbar wie mit dem „Haus der Vierecke“¹⁷⁰ aus Kapitel 1.3.1 bauen die Suprematistinnen und Suprematisten ihre mathematischen Formen aus der Veränderung des Quadrats auf. Ausgehend vom Quadrat kann ein Kreis erzeugt werden, wenn man das Quadrat dreht. Wird es geteilt, so entstehen zwei Rechtecke, aus denen man ein Kreuz anfertigen kann. Ebenfalls ist es möglich durch weitere Teilungen Dreiecke oder Trapezformen zu erhalten.¹⁷¹ Dieser Aufbau der Formen beeinflusste wesentlich die Ausstellungsweise von Kasimir Malewitsch. Wie in der Abbildung 4.11 zu sehen ist, hängt das „schwarze Quadrat auf weißem Hintergrund“ wie eine Ikone über den anderen Bildern. Es bildet das Zentrum, aus denen alle anderen Formen entstehen können.¹⁷²

¹⁶⁸ vgl. Helfenstein (1984), S. 9

¹⁶⁹ vgl. Riese (2008), S. 173

¹⁷⁰ vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 211f

¹⁷¹ vgl. Drechsler (2008), S. 55

¹⁷² vgl. Simmen (1998), S. 36f

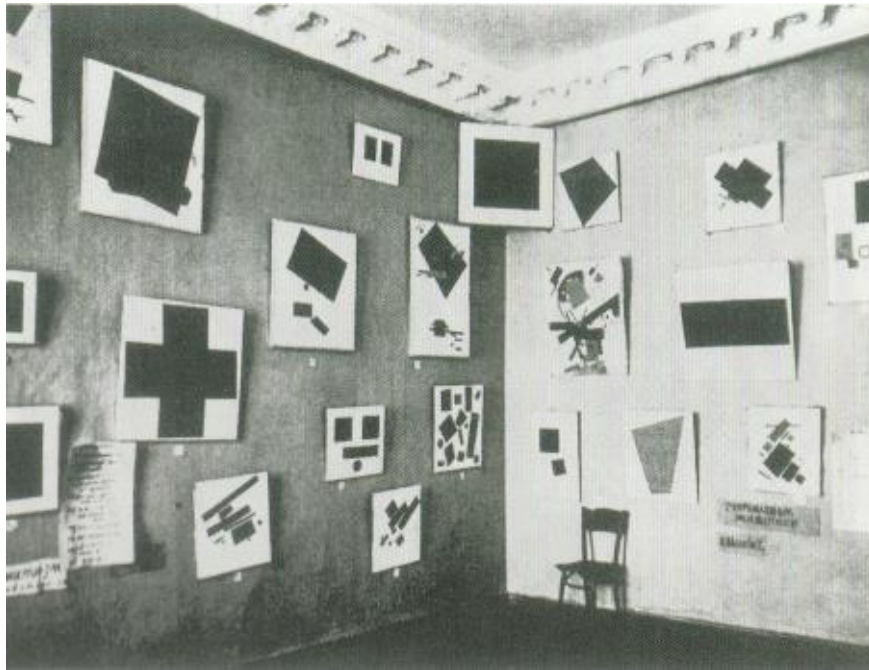


Abbildung 4.11: Ausstellung „Letzte Futuristische Bilderausstellung 0,10“
in St. Petersburg 1915

Auf der Abbildung 4.11 ist erkennbar, dass, wenn Malewitsch vom „Aufbau der Formen durch Teilung des Quadrats“ spricht, er auf mehrere mathematische Verfahren zurückgreift. Denn würde er nur von seinem Urquadrat ausgehen, dann müssten alle Werke, die in der Abbildung 4.11 zu sehen sind, zerlegungs- oder ergänzungsgleich zueinander sein oder zumindest flächeninhaltsgleich. Abgesehen von der perspektivischen Verzerrung durch die Fotografie können wir diese Eigenschaften am besten dem schwarzen Kreuz zuordnen, welches durchaus laut Definition 1.22 ergänzungsgleich sein könnte. Jedoch bildet das Werk darunter das Gegenbeispiel, denn die abgebildeten Rechtecke können niemals flächengleich mit dem Urquadrat sein. Malewitsch müsste an dieser Stelle zuerst das Quadrat zerlegen, vergrößern oder verkleinern, um die gewünschten Formen zu erhalten.¹⁷³

¹⁷³ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 84f

4.5 Der Konstruktivismus

Der Kubismus hinterlässt nicht nur in Europa seine Spuren, sondern beeinflusst auch die zukünftige russische Avantgarde.¹⁷⁴ 1921 entsteht die Stilbezeichnung „Konstruktivismus“ durch die Künstlergruppe der Konstruktivisten, zu denen die bekannten Künstler El Lissitzky, Alexander Rodtschenko, Jurij Annenkov und viele weitere zählen.¹⁷⁵ Der Konstruktivismus entsteht aus der Uneinigkeit der Avantgarde und als Gegenposition zum Suprematismus.¹⁷⁶ Die Basis bilden vor allem die Werke von Wladimir Tatlin.¹⁷⁷ Die Bestrebungen der Künstlerinnen und Künstler liegen darin konstruktive Prinzipien der industriellen Produktion auf die Kulturbereiche zu übertragen.¹⁷⁸

Die Konstruktivistinnen und Konstruktivisten fühlen sich der Technik verbunden, da sie in ihr die Loslösung von der Illusion, welche mit Farbe und Leinwand erzeugt wird, sehen. Daher arbeiten viele Künstlerinnen und Künstler vorwiegend direkt mit Materialien, wodurch der Konstruktivismus die Ausdehnung in die dritte Dimension erfährt.¹⁷⁹ Daher prägt der Konstruktivismus das Bild der Moderne in den verschiedensten Bereichen der Kunst, wie beispielsweise Architektur und bildende Kunst.¹⁸⁰

Ebenfalls sind die künstlerischen Arbeiten sehr vielfältig und breit gefächert. Daher ist es äußerst schwierig den Konstruktivismus genau zu definieren. Allerdings gibt es viele Aspekte, die die Stilrichtung kennzeichnen und Verbindungen zwischen den Werken schaffen. Solche verbindenden Elemente sind die Reduktion der Formsprache auf geometrische Elemente, Anspruch auf antisubjektive bzw. objektive Kunstwerke und das Ablehnen von einer nachahmenden Kunst. Ein weiterer wesentlicher Aspekt ist die Vereinigung von freier und angewandter Kunst. Dies ermöglicht den Künstlerinnen und Künstlern die Umsetzungen von künstlerischen Konzepten in verschiedenste Medien wie Plakat, Möbel, Architektur oder Bild zu verwirklichen. Dieses Ineinandergreifen von angewandter Gestaltung und künstlerischem Schaffen ist ein wesentliches Merkmal des russischen Konstruktivismus. Die Künstlerinnen und Künstler erhalten dadurch die Rolle der geistigen Vordenkerinnen und Vordenker in einem

¹⁷⁴ vgl. Riese (2008), S. 51

¹⁷⁵ vgl. Christofori et al. (2005), S. 24f

¹⁷⁶ vgl. Riese (2008), S. 70

¹⁷⁷ vgl. Christofori et al. (2005), S. 24f

¹⁷⁸ vgl. Grübel (1981), S. 12

¹⁷⁹ vgl. Christofori et al. (2005), S. 24f

¹⁸⁰ vgl. Hoffmann (2008), S. 9

gesellschaftlichen Kontext, da sie neue gestalterische Formen in vielen Lebensbereichen entwerfen und umsetzen.¹⁸¹

1922 kommt durch eine russische Ausstellung der Begriff „Konstruktivismus“ nach Deutschland. Der Autor Reiner Georg Grübel bezeichnet El Lissitzky als den Hauptvertreter, da er nicht nur bei der Einberufung des „Konstruktivisten – Dada – Kongresses“ mitwirkt, sondern auch bei der Herausgabe der dreisprachigen konstruktivistischen Zeitschrift „Vesc – Objet Gegenstand“ wesentlich beteiligt ist.¹⁸²

4.5.1 Konstruktivistische Formen

Die konstruktivistischen Formen werden, besonders in ihrer Urform, als reine Formen bezeichnet, da sie als abstrakte oder reine Konstruktionen im Raum gezeigt werden, ohne eine praktische oder zweckmäßige Aufgabe.¹⁸³ Das ist eine der Hauptbestrebungen des Konstruktivismus, die Abbildung der Wirklichkeit. Im Jahre 1919 erstellt Ljubov‘ Popova einen Beitrag für den Katalog der 10. staatlichen Ausstellung für „Gegenstandloses Schaffen und Suprematismus“ in Moskau. Dieser beinhaltet komprimiert die Konzeption des Konstruktivismus.

Als ersten Punkt nennt er die „Architektonik“ und teilt diese in den malerischen Raum, die Linie, die Farbe, die Energetik und die Faktur ein. Wobei er mit dem malerischen Raum den Kubismus, mit der Farbe den Suprematismus und mit der Energetik den Futurismus verbindet. Ebenfalls notiert er gleich daneben die „Akonstruktivität“, die er wieder in Illusionismus, Literarizität, Emotionen und Wiedererkennen unterteilt.

Besonders von Interesse ist der zweite Punkt, die Popova als „Notwendigkeit der Transformation“ bezeichnet. Diese bezieht er auf die oben genannte Architektonik. In Verbindung mit dem malerischen Raum soll das Weglassen von Formteilen, welches bereits im Kubismus begonnen hatte, zur Transformation beitragen. Der Aufbau in der Malerei wird als die Summe der Energie der Teile bezeichnet. Der Linie wird als Kontur und als Spur durchgehender Flächigkeit ein wesentlicher Anteil an der Konstruktion zugesprochen. Hierbei

¹⁸¹ vgl. Hoffmann (2008), S. 12ff

¹⁸² vgl. Grübel (1981), S. 14

¹⁸³ vgl. Hoffmann (2008), S. 72

ist die Definition für die Linie bzw. die Gerade zu erwähnen. Wenn wir uns nun an Kapitel 1.1 erinnern, in der festgelegt wurde, dass die Gerade eindimensional ist, dann stellt diese Definition die oben genannte Flächigkeit in Frage. Jedoch ist die Gerade für Konstruktionen vieler geometrischer Formen unersetzlich. Denn ohne sie kann eine Form nicht begrenzt werden und daher wäre es auch nicht möglich Fläche oder Umfang zu berechnen. (mit Ausnahme von Kreisformen) So kann die oben erwähnte Flächigkeit in diese Richtung interpretiert werden.

Weiters wird durch die Farbe und ihr „Gewicht“, welches durch die Farbintensität ausgestrahlt wird, die Verbindung zur Energetik hergestellt. Für die Energetik wird folgende Gleichung angegeben:

*Energetik = Richtung der Umfänge + Flächigkeit und Linien oder ihre Spuren +
alle Farben.*

Im Kontrast zu vorher wird in dieser Gleichung interessanterweise zwischen Flächigkeit und Linien unterschieden. Mit „Richtung der Umfänge“ kann in diesem Fall nur auf die Perspektive angespielt worden sein, da der Umfang im mathematischen Sinne keine Ausrichtung vorgibt, sondern die Begrenzung einer Form ist.

Schlussendlich wird die Faktur genannt, die den Inhalt der malerischen Oberfläche bildet. Mithilfe dieser Anhaltspunkte sollen vor allem Illusionen verhindert werden.¹⁸⁴

Als Grundelemente für den Konstruktivismus legt man anschließend die drei Begriffe Tektonik, Konstruktion und Faktur fest.¹⁸⁵

Da wir nun einen Einblick haben, wie die Konstruktionen bzw. die Formen im Konstruktivismus aufgefasst werden, betrachten wir anhand des bekanntesten Vertreters, El Lissitzky, die künstlerische Umsetzung und deren mathematische Inhalte.

¹⁸⁴ vgl. Gröbel (1981), S. 26

¹⁸⁵ vgl. ebd. (1981), S. 27

4.5.2 El Lissitzky und „Die Geschichte von den zwei Quadraten“

Wie bereits im Kapitel 4.3 angeschnitten, hat El Lissitzky Kontakt mit Kasimir Malewitsch und dem Suprematismus. Er inspiriert El Lissitzky, welcher sodann auf Basis der künstlerischen Position Malewitschs eine eigene Grundhaltung entwickelt.¹⁸⁶

„Die Geschichte von den zwei Quadraten“ ist ebenfalls von Malewitsch und seinem „schwarzen Quadrat“ sowie von seiner darauf folgenden Arbeit „rotes Quadrat“ inspiriert. Um nun El Lissitzky Werk genauer zu verstehen, muss an dieser Stelle der Hintergrund zu dem Werk erörtert werden. El Lissitzky war ein vielseitiges Talent und arbeitete als Architekt, Maler und Zeichner. Eine besondere Vorliebe hegte er für Illustrationen in Kinderbüchern. Nachdem er sich ab 1919 zur geometrischen Abstraktion hingezogen fühlte, versuchte er nun die Inhalte der Kindergeschichten mithilfe des neuen geometrischen Formvokabulars auszudrücken.¹⁸⁷

El Lissitzky selbst gibt zur Zeichenbedeutung des Kunstwerks eine Einführung. Darin hält er fest, dass jede gestaltete Fläche ein Zeichen ist, jedoch nicht als mystisches Symbol zu verstehen sei. Denn die gestaltete Fläche hat immer einen konkreten Grundriss. Das Zeichen dient als Form, durch die die Erscheinung ausgedrückt werden kann. Die Entstehungsmöglichkeit dafür ergibt sich entweder durch die Vereinbarung welche Bedeutung das Zeichen hat oder durch die Klärung des Sinnes dieser Fläche, welche sich erst im späteren Verlauf zeigen wird.

Weiters beschäftigt sich El Lissitzky mit der Darstellung von Räumlichkeit in der Fläche des Bildes. Damit ist das Verfahren der Parallelprojektion gemeint, in der die bildliche Fläche als Fläche erhalten wird und für semantische Kompositionen alle Möglichkeiten freihält.¹⁸⁸

Die „Geschichte von den zwei Quadraten“ erzählt auf mehreren Seiten die Geschichte eines roten und eines schwarzen Quadrats, welche durch das unendliche Universum fliegen und auf die von Chaos und Unordnung beherrschte Erde treffen. Die Elementarformen befreien mit einem Schlag die Erde vom Chaos und auf der Basis des roten Quadrats wird anschließend eine neue Ordnung gegründet. In der Abbildung 4.12 „Studie zur Schlusszene der Geschichte“ wird das Ende der Geschichte gezeigt.¹⁸⁹

¹⁸⁶ vgl. Riese (2008), S. 170

¹⁸⁷ vgl. Christofori et. al (2005), S. 192

¹⁸⁸ vgl. Grübels (1981), S. 39

¹⁸⁹ vgl. Christofori et. al (2005), S. 192

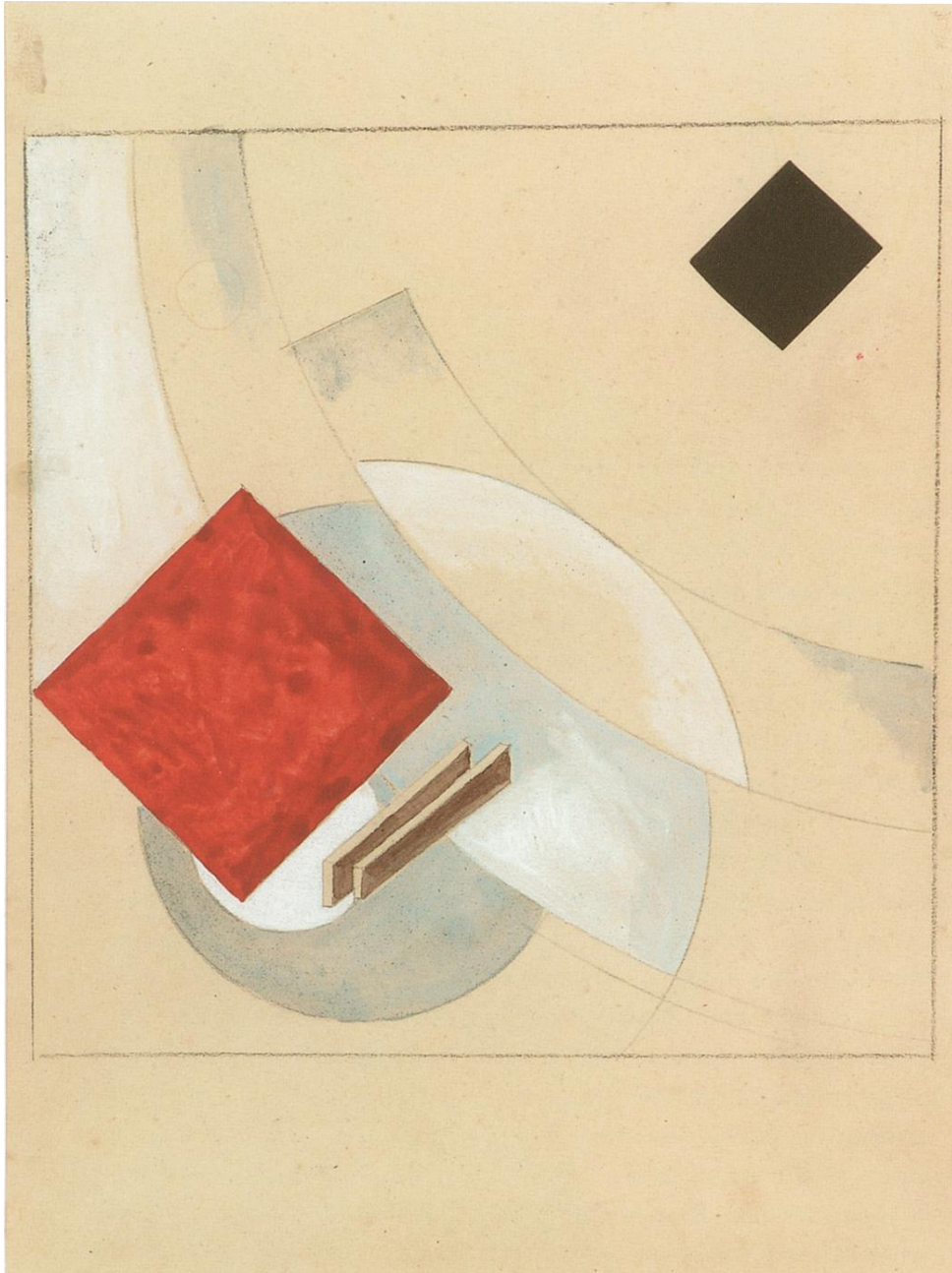


Abbildung 4.12: Blatt zur Vorstudie für die Schlusszene

Auf dem Blatt sind eindeutig das schwarze und das rote Quadrat zu erkennen. Das rote Quadrat ist, nachgemessen, tatsächlich ein Quadrat, im Gegensatz zum schwarzen Quadrat, welches nachgemessen die Eigenschaften eines Rechtecks erfüllt. Da das schwarze „Quadrat“ in der Geschichte das rote zurücklässt und in die Richtung des Universums flüchtet, eignet sich das Rechteck für die Gestaltung des Moments.¹⁹⁰ Hier kann ebenfalls an die oben genannte „Richtung der Umfänge“ hingewiesen werden.¹⁹¹ Es wird hier für die perspektivische

¹⁹⁰ vgl. Christofori et. al (2005), S. 192

¹⁹¹ vgl. Grübels (1981), S. 26

Verzerrung nicht die zentrische Streckung angewandt, um das wegfliegende schwarze Quadrat darzustellen, sondern die Form verändert. Vom Quadrat ausgehend, verzichtet der Künstler auf die Orthogonalität der Diagonalen und gelangt so zum Rechteck, welches dem Inhalt der Szene gerecht wird.¹⁹² Würde sich El Lissitzky an der zentrischen Streckung orientieren, so müsste er mehrere Eigenschaften berücksichtigen. Der Künstler müsste die Erhaltung der Winkelgrößen erfüllen. Allerdings wird durch die Umwandlung des Quadrats in ein Rechteck die Orthogonalität der Diagonalen nicht mehr gewährleistet und somit kommt es hier zu einem Widerspruch. Dies gilt auch für die Eigenschaften „längenverhältnistreu“ und „flächeninhaltenstreu“. Anhand dieser „Verstoße“ ist bereits erkennbar, dass es sich nicht um eine zentrische Streckung handeln kann. Weitere Widersprüche können dem Kapitel 3.1 entnommen werden.¹⁹³

Das rote Quadrat bleibt der Geschichte nach zurück und konzentriert sich ganz auf die Kreisform. Diese soll laut El Lissitzky eine Andeutung auf die Welt darstellen. Die klar umrissenen Formen kombiniert El Lissitzky geschickt mit einer eigenen perspektivischen Darstellung und gelangt so zu einem Gleichgewicht der beiden Quadrate. Mithilfe von Kreissegmenten gelingt es dem Künstler die gewaltige Kraft der Quadrate auszudrücken und verleiht dem Blatt damit einen dynamischen Ausdruck.¹⁹⁴

¹⁹² vgl. Gorski und Müller-Philipp (2014), S. 211f

¹⁹³ vgl. Krauter und Bescherer (2014), S. 176f

¹⁹⁴ vgl. Christofori et. al (2005), S. 192

4.6 Das Bauhaus

Das Bauhaus ist in den 1920er Jahren eines der erfolgreichsten Zentren in Deutschland für moderne Gestaltung. Da der Bekanntheitsgrad sich rasant steigert, spricht man sehr schnell von einem „Bauhausstil“, auch wenn damit eigentlich die Gestaltung der Moderne gemeint ist. Dazu zählt die gestalterische Formsprache, die mit geometrischen Elementen arbeitet und diese konsequent auf Kunst, Design und Architektur anwendet.¹⁹⁵

Das Bauhaus steht unter dem Einfluss des Konstruktivismus und der De Stijl Gruppe aus Holland.¹⁹⁶ Vor allem die russischen Künstlerinnen und Künstler stehen im engen Austausch mit dem Bauhaus, was mit der Veranstaltung „ERSTE RUSSISCHE KUNSTAUSSTELLUNG“ 1922 deutlich wird. Unter anderem stellen hier El Lissitzky und Alexander Rodtschenko aus. Aber auch Theo van Doesburg, der zur Gruppe De Stijl gehört, beeinflusst die Künstlerinnen und Künstler des Bauhauses.¹⁹⁷ Dennoch ist das Bauhaus stets bestrebt eigenständig zu bleiben, auch wenn sich die künstlerischen Ansätze und Ideen zur Gruppe De Stijl und zum Konstruktivismus ähneln.¹⁹⁸

Viele künstlerische Konzepte und Überlegungen schlagen sich in der Architektur nieder. Es werden nicht nur Gebäude, wie das Haus Lewin von Walter Gropius, verwirklicht, sondern auch funktional gestaltete Siedlungen umgesetzt.¹⁹⁹ An dieser Stelle möchte ich an das Buch „Bauhausstil oder Konstruktivismus: Aufbruch der Moderne in den Zentren“ von Hoffmann Tobias verweisen, welches sich mit den künstlerischen Konzepten im dreidimensionalen Raum beschäftigt.²⁰⁰

¹⁹⁵ vgl. Hoffmann (2008), S. 11

¹⁹⁶ vgl. ebd. (2008), S. 12

¹⁹⁷ vgl. ebd. (2008), S. 31

¹⁹⁸ vgl. ebd. (2008), S. 62

¹⁹⁹ vgl. ebd. (2008), S. 31

²⁰⁰ Verweis: Hoffmann, Tobias (2008): Bauhausstil oder Konstruktivismus? Aufbruch der Moderne in den Zentren Berlin, Hannover, Stuttgart, Frankfurt. Ausstellung des Museums für Konkrete Kunst Ingolstadt. 12. Oktober 2008 bis 11. Januar 2009. Hoffmann, Tobias und Museum für Konkrete Kunst (Hrsg.), Wienand Verlag. Köln.

4.6.1 Konstruktion und Form im Bauhaus

Der Konstruktivismus beeinflusst zwei der Bauhausmeister: Wassily Kandinsky und Paul Klee. Beide setzen sich mit der Stilrichtung auseinander und entwickeln eigene künstlerische Positionen und Formensprachen dazu. Paul Klee warnt vor einer bevorstehenden Schematisierung der Kunst und meint, dass es demnach zu Konstruktionen in der Kunst um ihrer Selbstwillen kommen wird. Er bezeichnet algebraische und geometrische Aufgaben zwar als Schulungsmomente, die in die Richtung des Wesentlichen führen würden, jedoch gelange man seiner Meinung nach nicht zur Totalisation. Er verweist darauf, dass man das „Geheimnis“ selbst nicht konstruieren könne und auch durch den Konstruktivismus nie erreichen werde.²⁰¹ Klee hält am Bauhaus einige Vorträge über die Geometrie und sphärische Trigonometrie.²⁰² An dieser Stelle verweise ich auf sein Buch „Kunst-Lehre: Aufsätze, Vorträge, Rezensionen und Beiträge zur bildnerischen Formlehre“ in dem seine Originalnotizen, Ansichten und sogar ein Kapitel, dass er über seinem Kollegen Wassily Kandinsky verfasst. Beide Künstler verbindet damals eine Freundschaft und Klee hatte großen Respekt gegenüber Kandinsky.²⁰³

Für Wassily Kandinsky und sein Verständnis von Malerei ist die Geometrie von großer Bedeutung.²⁰⁴ Im Gegensatz zu Klee geht Kandinsky von der Natur aus und leitet von ihr die Grundelemente ab. Mit der Natur als Vorbild können nicht nur freie Konstruktionen entstehen, sondern auch geometrisch-abstrakte Formen. Als konkretes Beispiel führt Kandinsky hier das Netz einer Spinnerin an. Andere Vergleiche sind von „freier“ Natur, wodurch freie Linien entstehen können, welche aber keiner exakten geometrischen Konstruktionsweise unterliegen.²⁰⁵ Für Kandinsky sind Natur und Geometrie kein Gegensatz. Die geometrischen Grundelemente sind für ihn die Primärformen des Lebens und der Malerei.²⁰⁶

Ebenfalls ist Wassily Kandinsky der Ansicht, dass die geometrischen, also die Primärformen, und die „ungeometrischen“ Konfigurationen lediglich Elemente des Übergangs darstellen. Eine Malerei nur mit Primärformen käme also einer primitiven Entwicklungsstufe gleich, allerdings ist sie für die Entwicklung unumgänglich. In seinen Schriften setzt er sich mit Elementen

²⁰¹ vgl. Hoffmann (2008), S. 69ff

²⁰² vgl. Riese (2008), s. 127

²⁰³ vgl. Klee (1991), S. 85f

Verweis: Klee, Paul (1991): Kunst-Lehre. Aufsätze, Vorträge, Rezensionen und Beiträge zur bildnerischen Formlehre. 2. (veränderte) Auflage, Regel, Günther (Hrsg.), Reclam Verlag Leipzig. Stuttgart.

²⁰⁴ vgl. Haldemann (2001), S. 236

²⁰⁵ vgl. Hoffmann (2008), S. 72f

²⁰⁶ vgl. Haldemann (2001), S. 236

auseinander, die einen schematischen oder mathematischen Charakter haben und die bis zu geometrischen Elementen reichen, die sehr frei verwendet werden.²⁰⁷

Wassily Kandinsky befasst sich also auch mit geometrischen Aspekten auf theoretischer Ebene. Dazu veröffentlicht er auch Beiträge in den Bauhausbüchern. Eines der bekanntesten theoretischen Werke ist „Punkt und Linie zu Fläche“. Kandinsky argumentiert sehr rational und sieht seinen Beitrag als Methode, um in der Kunstwissenschaft eine Forschung zu finden. Ausgehend von malerischen Aspekten versucht Kandinsky die Malerei aus ihrem früheren Kontext zu lösen und nun wissenschaftlich einzuordnen.²⁰⁸ Daher gilt es nun die geometrischen Elemente, die er in seinem Buch verwendet, genauer zu betrachten.

4.6.2 Punkt und Linie zu Fläche

Im Buch greift er die wichtigsten Gestaltungselemente des Konstruktivismus den Punkt, die Linie und die Fläche auf und untersucht ihre Verhältnisse zueinander. Wichtig ist hierbei die theoretische Auseinandersetzung, welche zur Voraussetzung der wissenschaftlichen Objektivierbarkeit der Formen zählt.²⁰⁹

Zunächst unterscheidet Kandinsky zwischen den Grundelementen und Nebenelementen. Die Grundelemente sind jene, ohne die ein Kunstwerk nie zustande kommen würde. Alle weiteren sind als Nebenelemente einzustufen.²¹⁰

²⁰⁷ vgl. Haldemann (2001), S. 237

²⁰⁸ vgl. Hoffmann (2008), S. 71

²⁰⁹ vgl. ebd. (2008), S. 73

²¹⁰ vgl. Kandinsky (1955), S. 18

4.6.2.1 Der Punkt

Im Gegensatz zu Malewitsch nennt Kandinsky den Punkt als das Urelement der Malerei.²¹¹ „Der geometrische Punkt ist ein unsichtbares Wesen. Er muß [sic!] also ein unmaterielles Wesen definiert werden. Materiell gedacht gleicht der Punkt einer Null.“²¹²

Weiters entspricht die Vorstellung dieser Null bzw. des geometrischen Punktes der höchsten Knappheit. Jedoch kann der Punkt, wenn man ihn aus seiner ursprünglichen Umgebung herauslöst, zu einem lebendigen Wesen werden, das seine Kräfte dann frei entfalten kann.²¹³

Der Punkt ist für Kandinsky das Resultat des ersten Zusammenstoßes des Werkzeuges mit der materiellen Fläche, also mit der Grundfläche des Werkes. Weiters meint Kandinsky, dass der geometrische Punkt auf dieser Fläche eine gewisse Größe benötigt und Umrisse, die ihn von der Umgebung abtrennen. Bevor hier zu vorzeitig auf die mathematischen Definitionen von Punkt und Kreis hingewiesen wird, gilt es zu erwähnen, dass Kandinsky sich auch mit der Frage beschäftigt hat, wo die Grenze zwischen Punkt und Fläche ist. Er stellt dazu zwei Bedingungen auf. Die Erste ist, dass das Verhältnis zwischen Punkt und Grundfläche in Bezug auf die Größe berücksichtigt werden muss. Die zweite Bedingung ist das Miteinbeziehen der Größenverhältnisse der übrigen Formen zum Punkt auf der Grundfläche. Der Punkt muss nach Kandinsky als Fläche bezeichnet werden, wenn eine sehr dünne Linie zur Grundfläche hinzukommt. Würde der Punkt ohne diese Linie existieren, könnte er durchaus weiter als Punkt bezeichnet werden. Kandinsky meint in weiterer Folge, dass der Punkt und seine malerische Größe nur gefühlsmäßig abgewogen werden kann und der genaue Zahlenausdruck dafür fehlt. Es gäbe aber eine gewisse Grenze, wann der Punkt vor den eigenen Augen zu einer Fläche wird.²¹⁴

In weiterer Folge geht Kandinsky nochmal auf die „äußere Grenze“ des Punktes ein, die seine äußere Form bestimmt. Er bezeichnet den Punkt als „ideellklein“, „ideellrund“ und nennt ihn schlussendlich als ideellkleinen Kreis, dessen Grenzen unendlich viele Gestalten annehmen können.

²¹¹ vgl. Kandinsky (1955), S. 18

²¹² Kandinsky (1955), S. 21

²¹³ vgl. Kandinsky (1955), S. 21f

²¹⁴ vgl. ebd. (1955), S. 25-27

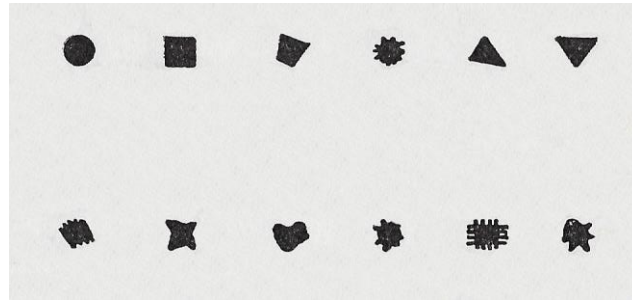


Abbildung 4.13: Der Punkt und seine Grenzen nach Kandinsky

Abbildung 4.13 macht deutlich, welche möglichen Grenzen er für den Punkt bzw. Kreis vorgesehen hat. Zu sehen sind ein Kreis, ein Quadrat, zwei Dreiecke, aber auch komplexere Formen mit zackigen oder runden Ecken. Kandinsky meint dazu, dass das „Reich der Punkte“ keine Grenzen hat und die Größe und die Form des Punktes stets variabel bleiben.²¹⁵

Vergleicht man nun dazu die mathematischen Eigenschaften, die dem Punkt im Kapitel 1.1 zugeschrieben werden, zeigt sich eine wesentliche Differenz. Zwar bezeichnet Kandinsky den Punkt als die kleinste mögliche Form, allerdings spricht er sich auch für eine individuelle Größe des Punktes aus, sowie für eine individuelle Darstellungsweise seiner Grenzen. Dagegen bezeichnet die Geometrie den Punkt als „null-dimensional“, was bedeutet, dass der Punkt weder Fläche noch Länge besitzt. Schließlich gelangt Kandinsky zur Erkenntnis, dass es sich bereits um einen „ideellkleinen“ Kreis handelt. Die Definition des Kreises aus Kapitel 1.6 besagt, dass der Kreis bzw. sein Mittelpunkt jener geometrischer Ort ist, von dem alle Punkte der Kreislinie denselben Abstand haben.²¹⁶ Wird der Punkt vergrößert, so können Mittelpunkt und Radius bestimmt werden, wodurch sich die Möglichkeit einer Flächenberechnung ergibt. Jedoch kann aus einem Kreis, beispielsweise durch Rotation um die eigene Achse, im dreidimensionalen Raum eine Kugel entstehen, wie im Kapitel 2.3 erläutert wurde.²¹⁷ Alle anderen Formen würden einen klaren Verstoß gegen die Abstandsbestimmung hervorrufen.

Dennoch bleibt unumstritten, dass der Punkt für Kandinsky ein wesentliches Urelement bildet. Der Künstler betont die Wichtigkeit des Punktes bei der Komposition und welche innere Spannung er erzeugen kann. Kandinsky betrachtet auch die Auswirkungen, falls der Punkt als

²¹⁵ vgl. Kandinsky (1955), S. 28f

²¹⁶ vgl. Berchtold (2017), S. 34

²¹⁷ vgl. Lundy und Martineau (2017), S. 66

Zentrum eingesetzt wird oder welchen „Charakter“ der Punkt durch seine gewählte Materialität erfährt.²¹⁸

„Der Punkt ist eine kleine Welt (...). Seine Verschmelzung mit der Umgebung ist minimal (...). Andererseits behauptet er sich fest auf seinem Platze und zeigt nicht die geringste Neigung zur Bewegung in irgendwelcher Richtung, weder horizontal noch vertikal. Nur die konzentrische Spannung offenbart seine innere Verwandtschaft mit dem Kreis (...).“²¹⁹

4.6.2.2 Die Linie

Nachdem sich Kandinsky ausführlich mit dem Punkt und seinen Gestaltungsvariationen beschäftigt hat, widmet er sich der geometrischen Linie. Diese bezeichnet er als unsichtbares Wesen, da diese nur die Bewegung eines Punktes, also sein Erzeugnis darstelle. Gleichzeitig erzeugt die Linie eine Dynamik und bildet somit den größten Gegensatz zum statischen Punkt. Wird nun dieser Punkt nur in eine bestimmte Richtung bewegt, so entsteht die Gerade. Weiters bezeichnet Kandinsky die Gerade als knappste Form, die die unendlichen Bewegungsmöglichkeiten aufzeigt und zusätzlich ins Unendliche läuft.²²⁰ Im Vergleich zu Kapitel 1.1 gibt es hier eine Überschneidung mit den mathematischen Aspekten der Geraden. Denn dort wurde auch die Gerade als Aneinanderreihung von Punkten oder als die Bewegung eines Punktes festgelegt. Wenn man die Gerade als eindimensionale Figur oder Form erfasst, dann ist sie die kleinste, die in unendlich viele Richtungen weisen kann.²²¹ Ebenfalls wurde festgelegt, dass die Gerade in der Geometrie weder Anfang- noch Endpunkt besitzt.²²²

Aufbauend auf die Bewegung und Richtung der Geraden unterscheidet Kandinsky zwischen Horizontale, Vertikale und Diagonale.

²¹⁸ vgl. Kandinsky (1955), S. 31-56

²¹⁹ Kandinsky (1955), S. 30

²²⁰ vgl. Kandinsky (1955), S. 57f

²²¹ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 2

²²² vgl. Lundy und Martineau (2017), S. 64

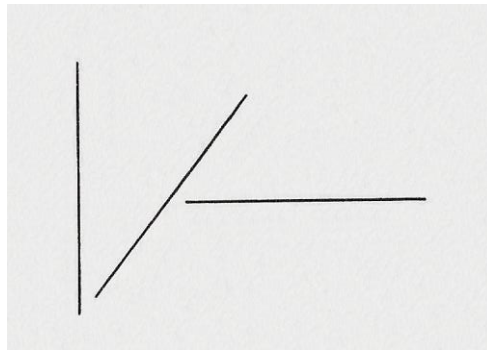


Abbildung 4.14: Horizontale, vertikale und diagonale Linie nach Kandinsky

Die Horizontale ist jene Linie, auf der sich der Mensch bewegt. Sie ist also die tragende Basis, auf der man sich in verschiedenste Richtungen bewegen kann. Die Vertikale steht im rechten Winkel zur Horizontalen und steht für Wärme und Höhe. Kandinsky definiert die Diagonale als eine schematische Form, die denselben Winkel zwischen Horizontale und Vertikale einnimmt. Sie bildet somit eine Kombination aus den beiden. Diese drei Typen von Geraden bezeichnet der Künstler als die reinsten Formen der Geraden und verknüpft sie anschließend mit der Temperatur. Daher bezeichnet er die Horizontale als kalte Form, die Vertikale als warme Form und die Diagonale als kaltwarme Form.

Diese Ergebnisse wirken sich maßgeblich auf die Farbgebung der geometrischen Formen aus. Doch zunächst sei hier noch erwähnt, dass alle weiteren Geraden als „freie Geraden“ bezeichnet werden, die von einem gemeinsamen Zentrum ausgehen können, jedoch nicht müssen.²²³ Vergleicht man nun die Definition der „freien“ Geraden mit den Eigenschaften der mathematisch-geometrischen Geraden aus dem Kapitel 1.1, so ist festzustellen, dass eine „freie Gerade“ nicht existiert bzw. als „normale“ Gerade bezeichnet werden würde, da sie die Voraussetzungen erfüllt.²²⁴

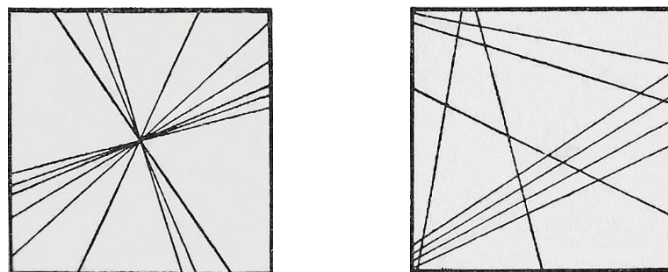


Abbildung 4.15: Zentrale und azentrale freie Geraden nach Kandinsky

²²³ vgl. Kandinsky (1955), S. 57-63

²²⁴ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 2

Kandinsky erklärt seine Vorgehensweise und Farbzuoordnung sehr genau und macht so seine künstlerische Forschung transparent, was ihm Objektivität verleiht.²²⁵

Anschließend zeigt Kandinsky auf, dass es durch Krafteinwirkung zur Bildung von zwei Arten von Linien kommen kann. Wenn der Punkt von zwei abwechselnden Kräften bewegt wird, so entstehen zwei eckige Linien. Wenn zwei Kräfte ihn gleichzeitig bewegen, so entsteht eine gebogene Linie. Mithilfe seiner eckigen Linien definiert Kandinsky seine Einteilung der Winkelgrößen. Der spitze Winkel beträgt laut Kandinsky 45° , der rechte Winkel 90° und der stumpfe Winkel 135° . Alle weiteren Winkelgrößen definiert er als freie Winkel. Als Besonderheit hebt der Künstler den rechten Winkel hervor, da durch das Zusammenstoßen von vier rechten Winkeln ein Kreuz oder im regelmäßigen Fall ein Quadrat entstehen kann.²²⁶ Vergleicht man nun die Winkeleinteilung mit jener aus dem Kapitel 1.1 so ist festzustellen, dass die Definition der „freien“ Winkel nicht existent ist und diese je nach Lage zum rechten Winkel, entweder zu den stumpfen oder spitzen Winkel zu zählen sind.²²⁷

Wie bereits oben erwähnt, verknüpft Kandinsky seine Farbgebung mit der Temperatur. In weiterer Folge verbindet er die geometrischen Formen mit Farben. Dies basiert auf der Farbvergebung der entsprechenden Winkelgrößen.²²⁸ Der spitze Winkel besitzt laut Kandinsky die größte Spannung und ist daher auch der „wärmste“, der stumpfe Winkel ist „kalt“ und daher blau.²²⁹

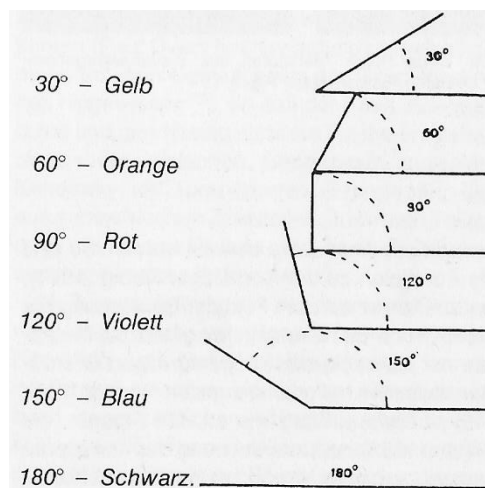


Abbildung 4.16: Zuordnung der Farbe zum entsprechenden Winkel

²²⁵ vgl. Hoffmann (2008), S. 74

²²⁶ vgl. Kandinsky (1955), S. 71-73

²²⁷ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 11

²²⁸ vgl. Kandinsky (1955), S. 79

²²⁹ vgl. Wick (1982), S. 200

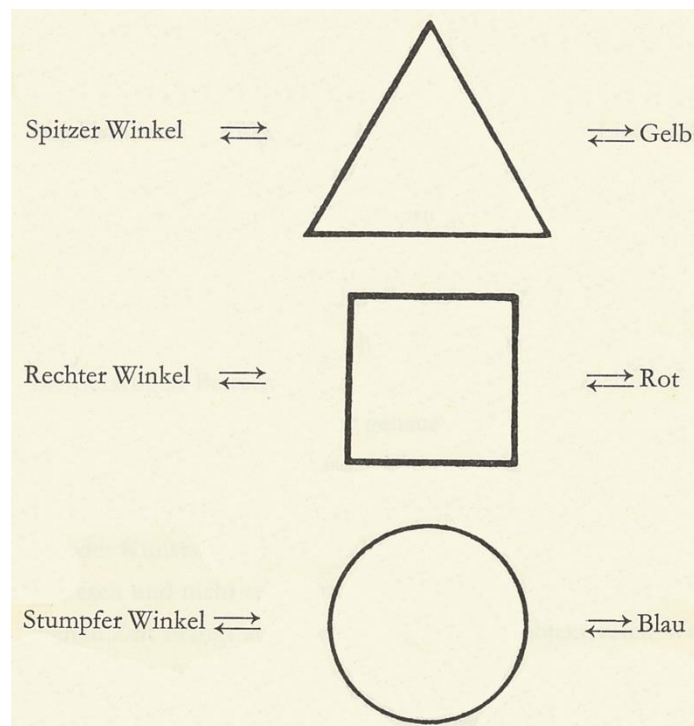


Abbildung 4.17: Kandinskys Farbzuoordnung zu Dreieck, Quadrat, Kreis

In der Abbildung 4.17 zeigt der Künstler, welche Primärfarben er den geometrischen Formen zuschreibt. Weiters meint er dazu, dass die jeweilige Form Eigenschaften besitzt, die die anderen nicht besitzen.²³⁰ Durch seine Forschung ordnet er gewissen geometrischen Elementen eine bestimmte Primärfarbe zu. Der Kreis ist Blau, das Quadrat Rot und das Dreieck Gelb.²³¹ Der Kreis ist laut Kandinsky blau, da der stumpfe Winkel mit dem Kreis als geometrischer Form in Verbindung gebracht werden kann. Für ihn reicht dabei die Vorstellung völlig aus, dass ein sukzessiv anwachsender Winkel von 0° nach 135° einen Kreissektor markiert, der zu einem Kreis ergänzt werden kann. Da der rechte Winkel als „wärmster“ Winkel von ihm definiert wurde, ist es durchaus plausibel, dass das Quadrat rot und das Dreieck mit den spitzen Winkeln gelb ist.²³²

Ebenfalls vertritt Kandinsky, dass Objektivität stets angestrebt werden sollte, allerdings immer nur im begrenzten Maße wahrgenommen und nie gänzlich erreicht werden könne.²³³

²³⁰ vgl. Kandinsky (1955), S. 79

²³¹ vgl. Hoffmann (2008), S. 74

²³² vgl. Wick (1982), S. 200

²³³ vgl. Hoffmann (2008), S. 73

4.6.2.3 Die Grundfläche

Die Grundfläche ist für Kandinsky die materielle Fläche, die den Inhalt des Werks trägt. Ebenfalls legt der Künstler genau fest, dass das Format von zwei vertikalen und zwei horizontalen Linien begrenzt wird.²³⁴ Aufgrund des Formates bezeichnet Kandinsky das Quadrat als die objektivste Form, da seiner Meinung nach die Paare der Grenzlinien die gleiche „Kraft“ besitzen. Jedoch sieht er in dieser Form auch eine gewisse Kälte, die er mit dem Tod vergleicht. Dabei bezieht er sich auf das „schwarze Quadrat auf weißem Hintergrund“ von Malewitsch, welches bereits zuvor behandelt wurde.²³⁵ Jedoch meint Kandinsky auch, dass die objektive Form des Quadrates auch wieder relativ ist, da sie einer subjektiven Empfindung unterliegt.²³⁶ Weiters geht er auf verschiedenste Formatvariationen ein, die er aber in weiterer Folge als kompliziert erachtet, da in einem Kreisgrundformat die Winkel fehlen würden.²³⁷

Kandinsky setzt seine Forschung dahingehend fort, dass er die Beziehung zwischen den Formen und der Grundfläche untersucht. Diese unterscheidet er in zwei Fälle. Im ersten sind die Formen parallel zu den Bildkanten und der Künstler nennt dieses Vorkommen „äußere Parallelität“. Der zweite Fall, die sogenannte „innere Parallelität“, wird von Formen gebildet, die parallel zu den beiden Grundformatdiagonalen angeordnet werden können.²³⁸

Weiters bringt Kandinsky den Aspekt der Entfernung der Form von den Grenzen der Grundfläche ein. Er bezieht sich auf die „Spannung“, die durch die Positionierung der Form zur Grenze entstehe und ihre Auflösung, sobald die Form mit der Grundflächengrenze in Berührung kommt.

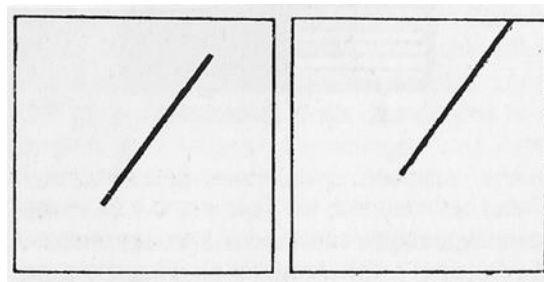


Abbildung 4.18: Die Spannung zur Grundfläche nach Kandinsky

²³⁴ vgl. Kandinsky (1955), S. 129

²³⁵ vgl. Hoffmann (2008), S. 73

²³⁶ vgl. Kandinsky (1955), S. 130

²³⁷ vgl. ebd. (1955), S. 161

²³⁸ vgl. Wick (1982), S. 208

In Abbildung 4.18 ist eine Gerade zu sehen, die die „innere Parallelität“ erfüllt und verschieden zur Grenze des Formats gesetzt wurde.²³⁹ Anzumerken ist hier, dass Kandinsky in seinem Werk „Punkt und Linie zu Fläche“ lediglich Beispiele mit einfachen Formen bringt, wie eine Linie, die in Abbildung 4.18 zu erkennen ist. Komplizierte Formen spart er aus. Allerdings ist in seiner Definition von „innerer“ und „äußerer Parallelität“ aus mathematischer Sicht nicht alles abgedeckt. Nicht alle Linien, die auf einer Grundfläche oder Ebene möglich sind verlaufen parallel zu den diagonalen, zu einer horizontalen oder vertikalen Linien, sondern haben mit ihnen einen Schnittpunkt gemeinsam. Weitert man seine Definition der Parallelität auf die geometrischen Formen Kreis, Dreieck und Quadrat aus, so stellt sich die Frage, wo die Gerade, die ausschlaggebend für die Parallelität ist, anzubringen wäre. Je nach Ausgangspunkt wäre die Form dann mit „innere“ oder „äußere“ Parallelität zu versehen. Weiters gilt es zu erwähnen, dass in der Geometrie nur von der einen Parallelität gesprochen wird und weder eine „äußere“ noch eine „innere“ Parallelität existieren.²⁴⁰

Abschließend kommt Kandinsky zum Kreis, den er dieselbe „Spannung“ zugesteht wie einem Quadrat. Durch das Einzeichnen zweier Diagonalen, die durch das Zentrum des Kreises verlaufen, können an deren Ende zwei vertikale und zwei horizontale Linien eingezeichnet werden. Dadurch ergibt sich folgende Figur, die in Abbildung 4.19 zu sehen ist.

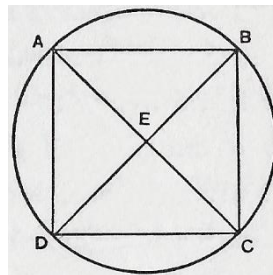


Abbildung 4.19: Zusammenführung der Wurzeln von Kunst und Zahlensystemen durch Kandinsky

Kandinsky verknüpft diese Figur mit der Behauptung von Alexander Sergejewitsch Puschkin, dass das Dreieck, das Quadrat und der Kreis die Urquelle der arabischen und römischen Zahlen seien. Kandinsky ist der Auffassung, dass wenn diese Behauptung zutreffen würde, sich dann

²³⁹ vgl. Kandinsky (1955), S. 156

²⁴⁰ vgl. Scheid und Schwarz (2017), S. 2

in der Abbildung 4.19 die Wurzeln zweier Zahlensysteme und die Wurzeln der Kunstformen begegnen müssten. Der Künstler sieht auch eine Notwendigkeit darin gemeinsame Wurzeln zwischen Mathematik und Kunst zu finden und meint, dass auf längere Sicht weder die „Berechnung“ noch die Intuition ohne einander auskommen würden.²⁴¹

²⁴¹ vgl. Kandinsky (1955), S. 162-164

5 Zusammenfassung

Zu Beginn der Arbeit werden im Kapitel 1 die wesentlichen Darstellungen der Ebene vorgestellt, die mit einfachen Hilfsmitteln wie Zirkel und Lineal gezeichnet werden können. Dabei kommen den Elementen „Punkt“ und „Gerade“ eine wesentliche Bedeutung zu, da mit ihnen sehr viele Formen in der Mathematik und in der Kunst erzeugt werden können.

Anschließend werden die geometrischen Formen wie Dreieck, Viereck und Vieleck beleuchtet. Zusammen mit einigen wesentlichen Sätzen und Eigenschaften soll die Bedeutung und Verbindung zwischen den Formen deutlich gemacht werden.

Danach betrachten wir im Kapitel 2 die Figuren im dreidimensionalen Raum, der zahlreiche Variationsmöglichkeiten aufweist. Beginnend mit der allgemeinsten Figur, dem Polyeder, soll der Versuch gewagt werden, den weiterführenden Aufbau bis hin zur Komplexität der archimedischen und platonischen Körper und darüber hinaus aufzuzeigen.

In Voraussicht auf den Vergleich mit der Kunst, wird in Kapitel 3 die Ähnlichkeit als eine der wesentlichsten Eigenschaften für die Abbildung von Formen behandelt. Mithilfe der zentrischen Streckung, des Strahlensatzes, der Zentralprojektion und der Parallelprojektion wird der Versuch unternommen, mögliche Veränderungen, die die Erscheinungsformen betreffen, aufzuzeigen.

Das letzte Kapitel befasst sich mit den Zusammenhängen zwischen Kunst und geometrischen Formen. Anfangs wird ein geschichtlicher Einblick gegeben, der zu einem besseren Verständnis des Kontextes beitragen soll. Danach wird anhand einiger Kunstströmungen der Moderne die Geometrie als Thema in der Kunst beleuchtet und ein Vergleich gezogen. Diese Arbeit soll nicht nur die Verwendung von geometrischen Formen in der Kunst darlegen, sondern auch die bedeutende Verbindung und Beziehung zwischen Kunst und Mathematik aufzeigen.

6 Abstract

This paper describes the connection between mathematics, geometric figures in particular, and art. Starting with the most simple forms “point” and “line” the first chapter shows the easiest ways to draw shapes with compass and straightedge. By doing so, it can be seen that these forms can be used to create more complex forms.

Subsequently, triangle, rectangle and polygon are discussed by using their mathematical characteristics. This should illustrate the connection between the figures.

Furthermore, in chapter 2 the figures will be discussed in the three-dimensional room. First, we will look at general figures, like the polyhedron, and eventually deal with the Archimedean and Platonic solids. In Addition, we will look at the complexity of these figures.

In preparation for the next part, chapter 3 includes the most important aspect for regarding illustrations in mathematics: similarity. This part includes uniform scaling, intercept theorems, the central projection and the orthogonal projection. With these operations the appearance of the shape can be changed in a special way.

In a final step the focus is on the connection between art and geometric forms. First, a historical insight should help to understand the context. Then, geometry itself as a theme in art will be discussed with the focus on art of the 20th century. The aim of this paper is not only to illustrate how geometric shapes are used in art, but rather to show the connection and relation between mathematics and art.

7 Schlusswort

Die Verbindung zwischen Mathematik und Kunst ist eine besondere, die sich für manche nicht auf den ersten Blick erschließen lässt. Als ich zum ersten Mal nach den Zusammenhängen gefragt wurde, musste ich selbst trotz des Studiums dieser Gegenstände länger darüber nachdenken. Schließlich fielen mir der Goldene Schnitt und die Kunst der Renaissance ein, die mathematische Formeln verwenden, um zu einer realistischen und „schönen“ Abbildung der Wirklichkeit zu kommen.

Durch meine Recherche stieß ich relativ bald auf das Thema der „geometrischen Abstraktion“. Hierbei faszinierten mich die künstlerischen Konzepte und die mathematischen Aspekte die nicht nur dahinter stehen, sondern auch abgebildet werden. Durch die Kunst der Moderne wurden die geometrischen Formen nicht nur als Konstruktionshilfsmittel verwendet, sondern erlangten durch das Einbauen in das künstlerische Kalkül neue Bedeutungen, Auffassungen und Neuinterpretationen, die sie in der reinen Mathematik nicht erhalten könnten.

Der Sinn dieser Arbeit lag für mich nie darin zu beweisen, dass die Kunst die Mathematik nicht „richtig“ verwendet, sondern was aus mathematischen Formen werden kann, wenn sie nicht an ihren Ursprung gebunden sind und somit „freier“ gedacht werden können.

Umgekehrt kann die Mathematik der Kunst auch wesentliche Aspekte vermitteln. Beispielsweise ist das Kunstwerk ohne Zutun eines Publikums für sich autonom und gewinnt erst dann an Wert, wenn es im Zuge der Wahrnehmung enthüllt wird. Vergleicht man diese Behauptung mit der Mathematik, so fällt einem folgende Ähnlichkeit auf: Der Zählprozess ist für sich autonom. Jedoch liegt es im Wesen des Prozesses, dass die einzelnen Zahlen für sich selbst gesehen wertlos erscheinen. Daraus ist erschießbar, dass ein Thema für Künstlerinnen und Künstler erst dann interessant wird, wenn seine erschöpfende Darstellung aussichtslos ist.

Aus dem oben genannten Aspekt kam ich dann schließlich auf meinen Titel meiner Diplomarbeit „Genau und doch anders“. Ich bin nach wie vor der Auffassung, dass Kunst und Mathematik im Prinzip dasselbe machen, denselben Anfangspunkt teilen, gemeinsam in eine Richtung gehen, aber die Wege sich dann trennen, da sich die Kunst nicht an mathematische Grundregeln halten will. Die Kunst beschäftigt sich immer wieder mit mathematischen Gegebenheiten und ich bin mir sicher, dass es auch einige Mathematikerinnen und Mathematiker gibt, die sich von der Kunst inspirieren lassen und so über neue Wege in der Mathematik nachdenken.

Gleichzeitig ist erkennbar, dass die Mathematik in jedem Bereich des Lebens steckt und auch die Kunst hier keine Ausnahme darstellt. Etwas Unsichtbares sichtbar zu machen, war stets mein Bestreben in dieser Arbeit. Abschließen möchte ich daher mit einem Zitat von Josef Albers und um das Verhältnis zwischen Mathematik und Kunst zu lockern, plädiere ich hier an dieser Stelle an die Leserinnen und Leser: Ersetzen Sie selbst das Wort „Kunst“ durch „Mathematik“ und erleben Sie selbst, was „Genau und doch anders“ bedeuten kann.

*„Kunst vorerst
ist nicht zum Ansehen
denn Kunst sieht uns an

Was andern Kunst ist
ist es nicht ebenso für mich
oder aus demselben Grunde
und umgekehrt

Was früher für mich
Kunst war oder nicht
mag solchen Wert wechseln
verlieren oder gewinnen
und beides wiederholen

So ist Kunst nicht Gegenstand
sondern Erlebnis

Wir nehmen Kunst wahr
wenn wir empfänglich sind

Darum ist Kunst dort
wo Kunst uns ergreift“

(Josef Albers)*

Abbildung 7.1: Zitat von Josef Albers

8 Literaturverzeichnis

Agricola, Ilka und Friedrich, Thomas (2011): Elementargeometrie. Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht. 3. Auflage, Vieweg Teubner Verlag und Springer Fachmedien Wiebaden GmbH. Berlin - Heidelberg.

Benton, Tim; Daix, Pierre; Ducros, Françoise; Fischer, Hartwig; Forster, Kurt W.; Gee, Malcom; Lichtenstern, Christa; Michaud, Eric; Meyer, Franz; von Moos, Stanislaus; Roskill, Mark; Schmidt, Katharina; Schulmann, Didier (1998): Ein Haus für den Kubismus. Die Sammlung Raoul La Roche. Picasso, Braque, Leger, Gris – Le Corbusier und Ozenfant. Schmidt, Katharina und Fischer, Hartwig (Hrsg.), Verlag Gerd Hatje. Basel.

Berchtold, Florian (2017): Geometrie. Von Euklid bis zur hyperbolischen Geometrie mit Ausblick auf angrenzende Gebiete. Springer-Verlag GmbH Deutschland. Konstanz.

Brugger, Ingrid (2008): Georges Braque. Brugger, Ingrid, Eipeldauer, Heike und Messensee, Caroline (Hrsg.) Hatje Cantz Verlag. Ostfildern.

Christofori, Ralf; Hoppe-Ritter, Marli; Lund, Cornelia; Lund, Holger; Pinczewski, Andreas; Prügel, Roland; Ridler, Gerda; Stather, Martin; Täuber, Rita und Willert, Barbara (2005): Square. Museum Ritter (Hrsg.), Verlag Das Wunderhorn. Heidelberg.

Drechsler, Wolfgang (Hrsg.) (2008): Ausstellung Genau und Anders. Mathematik in der Kunst von Dürer bis Sol LeWitt. MUMOK – Museum Moderner Kunst Stiftung Ludwig Wien. Nürnberg.

Filler, Andreas (1993): Euklidische und nichteuklidische Geometrie. B.I- Wissenschaftsverlag. Mannheim; Wien.

Glaeser, Georg (2007): Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. 2. Auflage, Elsevier GmbH. München.

Gris, Juan (1957): Juan Gris und die Geschichte des Kubismus. Der Silberne Quell Band 56. Woldemar Klein Verlag. Baden – Baden

Grübel, Rainer Georg (1981): Russischer Konstruktivismus. Künstlerische Konzeptionen, literarische Theorie und kultureller Kontext. Band 1 (VI). Wiesbaden.

Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden.

Haldemann, Matthias (2001): Kandinskys Abstraktion. Die Entstehung und Transformation seines Bildkonzepts. Wilhelm Fink Verlag. München.

Helfenstein, Josef (1984): Die Sprache der Geometrie. Kunstmuseum Bern (Hrsg.), Benteli Verlag. Bern.

Hoffmann, Tobias (2008): Bauhausstil oder Konstruktivismus? Aufbruch der Moderne in den Zentren Berlin, Hannover, Stuttgart, Frankfurt. Ausstellung des Museums für Konkrete Kunst Ingolstadt. 12. Oktober 2008 bis 11. Januar 2009. Hoffmann, Tobias und Museum für Konkrete Kunst (Hrsg.), Wienand Verlag. Köln.

Kandinsky, Wassily (1955): Punkt und Linie zu Fläche. Beitrag zur Analyse der malerischen Elemente. 3. Auflage, Benteli-Verlag. Bern-Bümplitz.

Kirsche, Peter (2006): Einführung in die Abbildungsgeometrie. Kongruenzabbildungen, Ähnlichkeiten und Affinitäten. 2. Auflage, B. G. Teubner Verlag und GWV Fachverlage GmbH. Wiesbaden.

Klee, Paul (1991): Kunst-Lehre. Aufsätze, Vorträge, Rezensionen und Beiträge zur bildnerischen Formlehre. 2. (veränderte) Auflage, Regel, Günther (Hrsg.), Reclam Verlag Leipzig. Stuttgart.

Krauter, Siegfried und Bescherer, Christine (2013): Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken. 2. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.

Lundy, Miranda und Martineau, Jason (2017): Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste: Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie. Librero IBP. Köln.

Marder, Lisa (2018): The Life and Art of Paul Klee. Online unter:
<https://www.thoughtco.com/paul-klee-biography-4156407> (Stand: 3.6.2018)

Neue Galerie der Stadt Linz (1950): Klassiker des Kubismus : Pablo Picasso, Georges Braque, Juan Gris, Fernand Léger ; Neue Galerie der Stadt Linz ; Juli - September 1950. Wolfgang-Gurlitt-Museum. Neue Galerie. Linz.

Niederbudde, Anke (2006): Mathematische Konzeptionen in der russischen Moderne. Florenskij – Chlebnikov – Charms. Rehder, Peter (Hrsg.), Band 446, Otto Sagner Verlag. München.

Pfaff, Dorothea (1996): Lorentz Stöer. Geometria et Perspectiva. Online unter: https://epub.ub.uni-muenchen.de/702/1/Pfaff_Dorothea_Lorentz_Text.pdf (Stand: 30.5.2018)

Precht, Michael Mathias (1969): Jamnitzer, Lencker, Stöer drei Nürnberger Konstruktivisten des 16. Jahrhunderts ; Ausstellung der Albrecht-Dürer-Gesellschaft im Fembohaus vom 20. April bis 1. Juni 1969. Katalog 11. Albrecht Dürer Gesellschaft e.V. (Hrsg.), Druckhaus Nürnberg. Nürnberg.

Riese, Hans-Peter (2008): Kunst konstruktiv – konkret gesellschaftliche Utopien der Moderne. Deutscher Kunstverlag. München – Berlin.

Schmidt, Katharina (Hrsg.) (1998): Cézanne, Picasso, Braque. Der Beginn des kubistischen Stillebens. Verlag Gerd Hatje. Ostfildern-Ruit.

Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.

Schunck, Volker (1984): Das provozierte Sehen. Ironie und Reflexion im Kubismus von Picasso, Braque und Juan Gris (1907 – 1914). ADAG Administration & Druck AG. Zürich.

Simmen, Jeannot (1998): Kasimir Malewitsch. „Das schwarze Quadrat“. Fischer Taschenbuch Verlag GmbH. Frankfurt am Main.

Wade, David (2017): Geometrie und Kunst. Der Einfluss antiker Mathematik auf die Kunst der Renaissance. Librero IBP. Kerkdriel.

Wick, Rainer K. (1982): Bauhaus Pädagogik. DuMont Buchverlag. Köln.

9 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1: *Vollwinkel, gestreckter Winkel und rechter Winkel*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 11

Abbildung 1.2: *Spitzer, stumpfer und überstumpfer Winkel*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 11

Abbildung 1.3: *Innen- und Außenwinkel eines Dreiecks*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 276

Abbildung 1.4: *Thaleskreis*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 298

Abbildung 1.5: *Hilfszeichnung zum Beweis des Thaleskreises*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 299

Abbildung 1.6: *Umkreis eines Dreiecks*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 258

Abbildung 1.7: *Mittendreieck*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 20

Abbildung 1.8: *Schwerpunkt und Schwerlinien eines Dreiecks ABC*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 257

Abbildung 1.9: *Hilfszeichnung für Beweis des Schwerpunkts*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 280

Abbildung 1.10: *Hilfszeichnung zum Beweis des Schwerpunkts*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 281

Abbildung 1.11: *Inkreis eines Dreiecks*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 259

Abbildung 1.12: *Eulersche Gerade*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 285

Abbildung 1.13: *Neunpunktekreis und Feuerbachkreis*. Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 286

Abbildung 1.14: *rechtwinkeliges Dreieck mit Bezeichnungen für den Satz des Pythagoras*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 31

Abbildung 1.15: *Anordnung 1*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 32

Abbildung 1.16: *Anordnung 2*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 32

Abbildung 1.17: *Das Haus der Vierecke*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 212

Abbildung 1.18: *Strecken zug*. In: Kirsche, Peter (2006): Einführung in die Abbildungsgeometrie. Kongruenzabbildungen, Ähnlichkeiten und Affinitäten. 2. Auflage, B. G. Teubner Verlag und GWV Fachverlage GmbH. Wiesbaden. S. 18

Abbildung 1.19: *Scherungsbeweis Kathetensatz*. In: Krauter, Siegfried und Bescherer, Christine (2013): Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken. 2. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 112

Abbildung 1.20: *Höhensatz*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 310

Abbildung 1.21: *Ergänzungsgleiche Figuren*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 84

Abbildung 1.22: *Wegscheren des Punktes P*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 85

Abbildung 1.23: *Kreis mit Passante, Tangente, Sekante und Zentrale*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 52

Abbildung 1.24: *Kreis mit Kreissektor, Kreisbogen und Kreis mit Kreissegment und Kreissehne*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 98

Abbildung 2.1: *Konvexe und nicht-konvexe Körper*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 59

Abbildung 2.2: *Prismen*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): Elemente der Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 61

Abbildung 2.3: *Verschiedene Typen von Pyramiden*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): *Elemente der Geometrie*. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 62

Abbildung 2.4: *Verschiedene Arten von Zylindern*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): *Elemente der Geometrie*. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 72

Abbildung 2.5: *Verschiedene Typen von Kegeln*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): *Elemente der Geometrie*. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 72

Abbildung 2.6: *Die fünf platonischen Körper*. In: Lundy, Miranda und Martineau, Jason (2017): *Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste: Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie*. Librero IBP. Köln. S. 133

Abbildung 2.7: *Dualität zwischen Oktaeder und Hexaeder*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): *Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter*. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 57

Abbildung 2.8: *Vom Würfel zum Kuboktaeder*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): *Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter*. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 60

Abbildung 2.9: *Die 13 archimedischen Körper*. In: Lundy, Miranda und Martineau, Jason (2017): *Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste: Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie*. Librero IBP. Köln. S. 163

Abbildung 3.1: *Ähnlichkeitsabbildung*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): *Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter*. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 215

Abbildung 3.2: *Bilgerade und zentrische Streckung*. In: Gorski, Hans-Joachim und Müller-Philipp, Susanne (2014): *Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter*. 6. Auflage, Springer Fachmedien. Wiesbaden. S. 217

Abbildung 3.3: *1. Strahlensatz und 2. Strahlensatz an verschiedenen Figuren*. In: Kirsche, Peter (2006): *Einführung in die Abbildungsgeometrie. Kongruenzabbildungen, Ähnlichkeiten und Affinitäten*. 2. Auflage, B. G. Teubner Verlag und GWV Fachverlage GmbH. Wiesbaden. S. 102

Abbildung 3.4: *Zentralprojektion eines Hauses*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): *Elemente der Geometrie*. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 64

Abbildung 3.5: *Parallelprojektion eines Quaders*. In: Scheid, Harald und Schwarz, Wolfgang (2017): *Elemente der Geometrie*. 5. Auflage, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. S. 64

Abbildung 4.1: *Notizbuchseite Leonardo*. In: Wade, David (2017): *Geometrie und Kunst. Der Einfluss antiker Mathematik auf die Kunst der Renaissance*. Librero IBP. Kerkdriel. S. 79

Abbildung 4.2: *Bildtafel 4 von „Geometria et Perspectiva“*. In: Wade, David (2017): Geometrie und Kunst. Der Einfluss antiker Mathematik auf die Kunst der Renaissance. Librero IBP. Kerkdriel. S. 154

Abbildung 4.3: *Drei Seiten aus Stoers Aquarellserie*. In: Wade, David (2017): Geometrie und Kunst. Der Einfluss antiker Mathematik auf die Kunst der Renaissance. Librero IBP. Kerkdriel. S. 157

Abbildung 4.4: Weitere geometrische Aquarelle von Stoer. In: Wade, David (2017): Geometrie und Kunst. Der Einfluss antiker Mathematik auf die Kunst der Renaissance. Librero IBP. Kerkdriel. S. 160

Abbildung 4.5: *„Frau mit Gitarre“ von Georges Braque 1913*. In: Benton, Tim; Daix, Pierre; Ducros, Françoise; Fischer, Hartwig; Forster, Kurt W.; Gee, Malcom; Lichtenstern, Christa; Michaud, Eric; Meyer, Franz; von Moos, Stanislaus; Roskill, Mark; Schmidt, Katharina; Schulmann, Didier (1998): Ein Haus für den Kubismus. Die Sammlung Raoul La Roche. Picasso, Braque, Leger, Gris – Le corbusier und Ozenfant. Schmidt, Katharina und Fischer, Hartwig (Hrsg.), Verlag Gerd Hatje. Basel. S. 69

Abbildung 4.6: *Georges Braque Violine und Krug (1909/10)*. In: Brugger, Ingrid (2008): Georges Braque. Brugger, Ingrid, Eipeldauer, Heike und Messensee, Caroline (Hrsg.) Hatje Cantz Verlag. Ostfildern. S. 35

Abbildung 4.7: *Schemazeichnung für „Glas und Zeitung“*. In: Benton, Tim; Daix, Pierre; Ducros, Françoise; Fischer, Hartwig; Forster, Kurt W.; Gee, Malcom; Lichtenstern, Christa; Michaud, Eric; Meyer, Franz; von Moos, Stanislaus; Roskill, Mark; Schmidt, Katharina; Schulmann, Didier (1998): Ein Haus für den Kubismus. Die Sammlung Raoul La Roche. Picasso, Braque, Leger, Gris – Le corbusier und Ozenfant. Schmidt, Katharina und Fischer, Hartwig (Hrsg.), Verlag Gerd Hatje. Basel. S. 107

Abbildung 4.8: *Weitere Schemazeichnung zu „Glas und Zeitung“ 1917*. In: Benton, Tim; Daix, Pierre; Ducros, Françoise; Fischer, Hartwig; Forster, Kurt W.; Gee, Malcom; Lichtenstern, Christa; Michaud, Eric; Meyer, Franz; von Moos, Stanislaus; Roskill, Mark; Schmidt, Katharina; Schulmann, Didier (1998): Ein Haus für den Kubismus. Die Sammlung Raoul La Roche. Picasso, Braque, Leger, Gris – Le corbusier und Ozenfant. Schmidt, Katharina und Fischer, Hartwig (Hrsg.), Verlag Gerd Hatje. Basel. S. 107

Abbildung 4.9: *„Glas und Zeitung“ von Juan Gris 1917*. In: Gris, Juan (1957): Juan Gris und die Geschichte des Kubismus. Der Silberne Quell Band 56. Woldemar Klein Verlag. Baden – Baden. S. 49

Abbildung 4.10: *Schwarzes Quadrat auf weißem Hintergrund*. In: Simmen, Jeannot (1998): Kasimir Malewitsch. „Das schwarze Quadrat“. Fischer Taschenbuch Verlag GmbH. Frankfurt am Main. S. 12

Abbildung 4.11: *Ausstellung „Letzte Futuristische Bilderausstellung 0,10“ in St. Petersburg 1915*. In: Christofori, Ralf; Hoppe-Ritter, Marli; Lund, Cornelia; Lund, Holger; Pinczewski, Andreas; Prügel, Roland; Ridler, Gerda; Stather, Martin; Täuber, Rita und Willert, Barbara (2005): Square. Museum Ritter (Hrsg.), Verlag Das Wunderhorn. Heidelberg. S. 25

Abbildung 4.12: *Blatt zur Vorstudie für die Schlusszene*. In: Christofori, Ralf; Hoppe-Ritter, Marli; Lund, Cornelia; Lund, Holger; Pinczewski, Andreas; Prügel, roland; Ridler, Gerda; Stather, Martin; Täuber, Rita und Willert, Barbara (2005): Square. Museum Ritter (Hrsg.), Verlag Das Wunderhorn. Heidelberg. S. 192

Abbildung 4.13: *Der Punkt und seine Grenzen nach Kandinsky*. In: Kandinsky, Wassily (1955): Punkt und Linie zu Fläche. Beitrag zur Analyse der malerischen Elemente. 3. Auflage, Benteli-Verlag. Bern-Bümplitz. S. 29

Abbildung 4.14: *Horizontale, vertikale und diagonale Linie nach Kandinsky*. In: Kandinsky, Wassily (1955): Punkt und Linie zu Fläche. Beitrag zur Analyse der malerischen Elemente. 3. Auflage, Benteli-Verlag. Bern-Bümplitz. S. 60

Abbildung 4.15: *Zentrale und azentrale freie Geraden nach Kandinsky*. In: Kandinsky, Wassily (1955): Punkt und Linie zu Fläche. Beitrag zur Analyse der malerischen Elemente. 3. Auflage, Benteli-Verlag. Bern-Bümplitz. S. 63

Abbildung 4.16: *Zuordnung der Farbe zum entsprechenden Winkel*. In: Wick, Rainer K. (1982): Bauhaus Pädagogik. DuMont Buchverlag. Köln. S. 202

Abbildung 4.17: *Kandinskys Farbzuordnung zu Dreieck, Quadrat, Kreis*. In: Kandinsky, Wassily (1955): Punkt und Linie zu Fläche. Beitrag zur Analyse der malerischen Elemente. 3. Auflage, Benteli-Verlag. Bern-Bümplitz. S. 79

Abbildung 4.18: *Die Spannung zur Grundfläche nach Kandinsky*. In: Kandinsky, Wassily (1955): Punkt und Linie zu Fläche. Beitrag zur Analyse der malerischen Elemente. 3. Auflage, Benteli-Verlag. Bern-Bümplitz. S. 157

Abbildung 4.19: *Zusammenführung der Wurzeln von Kunst und Zahlensystemen durch Kandinsky*. In: Kandinsky, Wassily (1955): Punkt und Linie zu Fläche. Beitrag zur Analyse der malerischen Elemente. 3. Auflage, Benteli-Verlag. Bern-Bümplitz. S. 163

Abbildung 7.1: *Zitat von Josef Albers*. Bearbeitet von Bianca Prenner In: Christofori, Ralf; Hoppe-Ritter, Marli; Lund, Cornelia; Lund, Holger; Pinczewski, Andreas; Prügel, roland; Ridler, Gerda; Stather, Martin; Täuber, Rita und Willert, Barbara (2005): Square. Museum Ritter (Hrsg.), Verlag Das Wunderhorn. Heidelberg. S. 35.

„Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.“