



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Welches Blatt gewinnt: Womit man beim Schnapsen
rechnen kann“

verfasst von / submitted by

Sophie Erna Baschny

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geschichte,
Sozialkunde und Politische Bildung

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich allen, die mich während der Anfertigung dieser Diplomarbeit unterstützt und motiviert haben, danken.

Zuerst gebührt mein Dank Herrn Professor Raith, der meine Diplomarbeit betreut und begutachtet hat, für seine hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit.

Mein besonderer Dank gilt des Weiteren meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, die mir mein Studium ermöglicht und mich immer unterstützt haben. Ein großes Dankeschön an meine Mama auch für das Korrekturlesen, wobei sie wo manchen komplizierten Satz vereinfacht hat.

Für die Inspiration zur Themenfindung danke ich herzlich meiner Oma, die mir schon in jungen Jahren das Schnapsen beigebracht hat und sich auch heute noch gerne zu einem Spiel bereit erklärt, wodurch sie mich gemeinsam mit meiner Mama vor allem bei meinen Überlegungen und Berechnungen zum Dreierschnapsen unterstützt hat.

Für den Titel dieser Arbeit danke ich meinen guten Freunden, meinen Brüdern und meiner Cousine, die mir konstruktiv beim Brainstorming geholfen haben.

Abschließend möchte ich mich für die schönen Studienjahre bei meinen Kommilitonen bedanken, die mir immer hilfreich zur Seite standen.

Inhalt

1. Einleitung	7
2. Spielregeln	7
2.1 Das Kartendeck.....	7
2.2 Zweierschnapsen	8
2.3 Dreierschnapsen.....	9
2.4 Viererschnapsen.....	11
2.5 Punktesystem	11
3. Die Theorie	12
3.1 Die Laplace Wahrscheinlichkeit.....	12
3.2 σ -Algebra	12
3.3 Die bedingte Wahrscheinlichkeit.....	14
3.4 Das Baumdiagramm	16
3.5 Die Reihenfolge	18
3.6 Das Gegenereignis	19
3.7 Der Additionssatz	19
4. Ausgangssituationen	20
4.1 Fünf Karten gleicher Farbe - Das Ringerl	20
4.1a Viererschnapsen	20
4.1b Dreierschnapsen	21
4.2 Das Gangl	22
4.2.1 Vier Asse.....	22
4.2.2 Drei Asse.....	26
4.2.3 Zwei Asse.....	34
5. Die anderen Spieler.....	40
5.1 Gangl und ihre möglichen Fänger	41
5.1a Dreierschnapsen	41
5.1b Viererschnapsen	44
5.2 Der Mitspieler.....	48
6. Soll man überhaupt ein Gangl spielen?.....	56
6.1 Zweimal drei Karten gleicher Farbe	57
6.2 Vier Karten gleicher Farbe mit Ass und Zehner.....	60
6.3 Vier Asse und zwei Unter.....	61
6.3.1 Sicheres Gangl	61

6.3.2 Das Gangl mit Fänger	64
6.3.3 Verbesserungsmöglichkeiten des Gangls.....	69
7. Das Ausrufen	76
7.1 Ass und zwei Karten gleicher Farbe	76
7.1a Dreierschnapsen	76
7.1b Viererschnapsen	78
7.2 Drei verschiedene Farben	79
7.2a Dreierschnapsen	79
7.2b Viererschnapsen	82
8. Der Kontrabauer.....	84
8.1 Dreierschnapsen.....	85
8.1a Vier Asse und zwei Zehner	85
8.1b Drei Trumpfkarten und drei Asse	92
8.1c Drei Trumpfkarten und drei Karten gleicher Farbe	95
8.2 Viererschnapsen.....	99
8.2a Vier Asse und ein Zehner.....	99
8.2b Drei Trumpfkarten und zwei Asse	102
8.2c Drei Trumpfkarten und zwei Karten gleicher Farbe	105
9. Das Ringerl	107
9.1 Das Ringerl mit blankem Zehner.....	109
9.2 Das Ringerl mit blankem König.....	111
10. Schlussfolgerungen	118
11. Quellenverzeichnis	119
Abstract	121

1. Einleitung

In dieser Arbeit geht es um Spieltheorie beim Schnapsen. Ziel ist es, durch verschiedene Fragestellungen zu Ergebnissen kommen, mit deren Hilfe man in bestimmten Situationen beim Schnapsen durch die Wahrscheinlichkeit von gewissen Ausgängen, Entscheidungen treffen kann, um mit höherer Wahrscheinlichkeit zu gewinnen. Dazu wird damit begonnen, die Wahrscheinlichkeiten von verschiedenen Ausgangsszenarien zu berechnen und in weiterer Folge geht es insbesondere um Spezialfälle beim Schnapsen, da diese besonders interessant sind und auch beim Spielen selbst am schnellsten zum Sieg führen. Schnapsen ist ein sehr umfangreiches Kartenspiel, weshalb im Zuge dieser Arbeit natürlich nicht alle möglichen Spielsituationen bearbeitet werden können und deshalb der Fokus vor allem auf Spezialfällen, die besonders viele Punkte bringen, liegt. Es wird in dieser ganzen Arbeit davon ausgegangen, dass die Spieler erfahren sind und gewisse Basisregeln beim Spielverhalten kennen und einhalten, wobei es natürlich auch solche Spieler gibt, die total unvorhersehbar und zufällig spielen, was aber im Allgemeinen die Gewinnchancen für die anderen Spieler eher verbessern dürfte als verschlechtert. Wenn in Folgendem von einem Spieler die Rede ist, so kann es sich dabei sowohl um eine Spielerin als auch um einen Spieler handeln, da es für die Berechnungen keinen Unterschied macht, ob es sich um eine Spielerin oder einen Spieler handelt.

2. Spielregeln

2.1 Das Kartendeck

Da es verschiedene Varianten von Schnapsen gibt, wird zuerst festgelegt, auf welche Grundlage von Spielregeln sich die Berechnungen beziehen. Ein Kartendeck zum Schnapsen besteht aus 20 Karten. Dabei gibt es ein doppeldeutsches Blatt und ein französisches Blatt. Beim doppeldeutschen Blatt gibt es jeweils vier Farben, und zwar Eichel, Herz, Blatt und Schelle. In jeder Farbe gibt es jeweils ein Ass, einen Zehner, einen König, einen Ober und einen Unter, wobei diese von ihrer Wertigkeit her genau in dieser Reihenfolge richtig sind, wobei das Ass die höchste Karte ist und der Unter die niedrigste. Beim französischen Blatt gibt es ebenfalls vier Farben und zwar Herz, Karo, Pik und Kreuz. Hier gibt es ebenfalls in jeder Farbe fünf Karten und zwar ein Ass, einen Zehner, einen König, eine Dame und einen

Buben. Die Wertesysteme sind bei beiden Blättern gleich. Der einzige Unterschied ist, dass beim französischen Blatt die Dame das ist, was beim doppeldeutschen Blatt der Ober ist und der Bube ist das, was beim doppeldeutschen Blatt der Unter ist. Egal, mit welchem Blatt man spielt, ändern sich die Regeln natürlich nicht. In Folgendem wird aber zwecks einer Einheitlichkeit Bezug auf das doppeldeutsche Deck mit Ober und Unter genommen.

Man unterscheidet beim Schnapsen zwischen Zweier-, Dreier- und Viererschnapsen, wobei die Regeln in den Grundzügen gleich bleiben. Man gewinnt das Spiel immer dann, wenn man so viele Stiche macht, dass man insgesamt eine Punkteanzahl von 66 hat oder wenn man den letzten Stich macht. Beim Zählen der Stiche geht man so vor, dass ein Ass 11 Punkte wert ist, ein Zehner 10, ein König 4, ein Ober 3 und ein Unter 2. Man kann einen Stich entweder mit einer höheren Karte der gleichen Farbe machen, die ausgespielt wurde, oder mit einer Karte der Farbe, die in der jeweiligen Runde Trumpf ist. Beim Dreier- und Viererschnapsen bestimmt einer der Spieler auf Grundlage seiner ersten drei Karten, was Trumpf sein soll. Beim Zweierschnapsen wird eine Karte aufgedreht, die dann in der Runde Trumpf ist. Wichtig beim Stechen ist, dass man wirklich nur einen Stich mit der gleichen Farbe oder mit Trumpf machen kann. Wenn man zum Beispiel auf einen Herz Unter ein Grünes Ass gibt, sofern Grün nicht Trumpf ist, gewinnt der Herz Unter. Eine Karte in der Farbe, die gerade Trumpf ist, kann nur mit einer anderen Trumpfkarte mit einer höheren Wertigkeit gestochen werden. Das Ass der Trumpffarbe kann also von keiner anderen Karte gestochen werden. Ein weiterer Aspekt, der bei allen drei Spielarten gleich ist, besteht darin, dass man, wenn man einen König und einen Ober hat, 20 ansagen kann, beziehungsweise 40, wenn es sich bei den beiden Karten um Trumpfkarten handelt. Diese Punkte zählen nur, wenn man einen zusätzlichen Stich im Spiel macht. Bei jeder der drei Varianten spielt immer derjenige als nächstes aus, der den vorherigen Stich gemacht hat. Bei jedem neuen Spiel darf derjenige als Erster ausspielen, der Trumpf bestimmt hat.

2.2 Zweierschnapsen

Beim Zweierschnapsen bekommt jeder der beiden Spieler zu Anfang fünf Karten, wobei eine Karte aufgedeckt hingelegt wird, deren Farbe dann in dieser Runde Trumpf ist. Neun Karten bleiben verdeckt im Kartenstapel liegen. Es beginnt der Spieler, der nicht gegeben hat. Beim Zweierschnapsen darf man auf eine ausgespielte Karte jede Karte, die man will, geben. Es herrscht also weder Farb- noch Stichzwang. Man entscheidet selbst, ob man stechen will oder sich eine bestimmte Karte noch für später im Spiel aufheben will. Die Karte, die aufgedeckt

liegt und die Trumpffarbe angibt, kann durch den Unter in der gleichen Farbe ausgewechselt werden, wenn derjenige Spieler, der den Unter hat, gerade an der Reihe mit dem Ausspielen ist. Nach jedem Stich hebt jeder Spieler von dem Stapel mit den zu Anfang neun Karten eine Karte ab, wobei derjenige, der den Stich gemacht hat, zuerst abheben darf. Beim fünften Stich hebt derjenige, der den Stich gemacht hat, die letzte Karte ab und der andere Spieler bekommt die aufgedeckte Trumpfkarte. Sobald es keine Karten mehr zum Abheben gibt, herrscht sowohl Farb- als auch Stichzwang. Das bedeutet, dass man auf eine ausgespielte Karte entweder eine Karte in der gleichen Farbe oder eine Trumpfkarte geben muss. Besitzt man weder eine Trumpfkarte, noch eine Karte in der gleichen Farbe, so darf man geben, was man will. Gewonnen hat man, wenn man den letzten Stich macht oder 66 Punkte erreicht hat.

Ein Sonderfall beim Zweierschnapsen ergibt sich, wenn sich ein Spieler im Spielverlauf sicher ist, dass er gewinnt und zudreht. Das bedeutet, dass der Spieler die aufgedeckte Trumpfkarte umgedreht auf den Kartenstapel legt, wodurch keine Karte mehr gezogen werden kann. Außerdem muss dieser Spieler ab diesem Zeitpunkt alle Stiche machen. Sobald zudreht wurde, gilt sowohl Stich- als auch Farbwang. Schafft es der Spieler, innerhalb der letzten verblieben fünf Stiche 66 Punkte zu erreichen, hat er gewonnen. Macht er auch nur einen Stich nicht oder erreicht die Punkteanzahl nicht, hat er verloren. Sobald 66 Punkte erreicht wurden, muss er aber keinen weiteren Stich machen.

2.3 Dreierschnapsen

Beim Dreierschnapsen bekommt zu Anfang jeder der drei Spieler sechs Karten, wobei die übrigen zwei Karten verdeckt hingelegt werden. Der Spieler links von demjenigen, der ausgeteilt hat, ist immer derjenige, der Trumpf bestimmt, indem er sich auf Grundlage seiner ersten drei Karten eine Farbe aussucht. Diese ist dann in der ganzen Runde Trumpf. Derjenige, der Trumpf bestimmt, spielt in dieser Runde allein gegen die anderen beiden Spieler, die zusammen spielen. Ihre Stiche werden also auch zusammengezählt und sie gewinnen oder verlieren gemeinsam. Der Spieler, der Trumpf angesagt hat, darf sich in einer normalen Spielrunde auch die beiden verdeckten Karten ansehen und seine eigenen Karten durch Austausch verbessern. Beim Dreierschnapsen gilt von Anfang an Stich- und Farbwang. Kann ein Mitspieler nicht stechen, weil er keine höhere Karte hat, so darf er auch eine niedrigere Karte der Farbe oder der Trumpffarbe spielen. Wenn zum Beispiel ein König in Herz ausgespielt wurde und der nächste Spieler mit einer Trumpfkarte gestochen hat, dann muss der letzte Spieler, selbst wenn er das Herzass hat, dieses nicht geben, wenn er noch

beispielsweise einen Herunter hat. Man darf in diesem Fall auch nicht mit einer höheren Trumpfkarte stechen, da der Farbzwang immer stärker ist. Also kann man ein Ass zum Beispiel nur dann mit Trumpf stechen, wenn man keine Karte in der Farbe, die ausgespielt wurde, in der Hand hat.

Beim Dreierschnapsen gibt es aber auch besondere Spielarten, die man ansagen kann. Man kann, wenn man derjenige ist, der Trumpf bestimmt hat, auf Grundlage seiner sechs Karten einen Schnapser oder einen Bauer ansagen. Dann erst darf man sich die beiden verdeckten Karten ansehen und austauschen. Falls man einen Schnapser angesagt hat, so darf man diesen nach dem Ansehen der beiden Karten im Talon noch auf einen Bauern erhöhen, wenn sich das Blatt gebessert hat.

Bei einem Schnapser darf man nur vier Stiche machen und muss damit 66 Punkte bekommen. Wenn man nach dem vierten Stich weniger als 66 Punkte hat oder schon zuvor ein anderer Spieler einen Stich gemacht hat, hat man verloren. Wenn man 20 ansagt, so darf man davor drei Stiche machen. Wenn man 40 ansagt, so darf man davor zwei Stiche machen. Man darf aber auch mit dem Ober oder König der 40 noch einen Stich machen, sollte dies möglich sein.

Wenn man einen Bauer ansagt, dann muss man alle Stiche machen. Trumpf gilt. Sobald einer der anderen Spieler einen Stich macht, hat der Spieler, der den Bauern angesagt hat, verloren.

Die beiden Spieler, die nicht Trumpf bestimmt haben, können auf Grundlage ihrer sechs Karten ein Gangl oder einen Kontrabauern ansagen. Der Spieler, der ein Gangl oder einen Kontrabauern ansagt, darf sich anstatt des Rufers die beiden verdeckten Karten ansehen und austauschen.

Bei einem Gangl muss der Spieler, der es angesagt hat, alle Stiche machen. Trumpf gilt nicht. Sobald einer der anderen Spieler einen Stich macht, ist das Gangl verloren.

Bei einem Kontrabauern spielt derjenige aus, der Trumpf bestimmt hat. Trumpf gilt. Der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, muss den ersten Stich machen und spielt dann selbst aus. Er muss auch alle weiteren Stiche machen, um zu gewinnen. Macht einer der anderen beiden Spieler einen Stich, so ist der Kontrabauer verloren.

Eine Sonderform des Gangls ist das Ringerl. Dabei hat ein Spieler alle fünf Karten einer Farbe. Es wird wie ein Gangl gespielt, das heißt, man muss alle Stiche machen.

Eine Sonderform des Bauern ist der Herrengang. Dabei hat der Spieler alle fünf Karten in der Trumpffarbe. Der Herrengang wird wie ein Bauer gespielt.

2.4 Viererschnapsen

Beim Viererschnapsen bekommt am Anfang jeder der vier Spieler fünf Karten. Es spielen jeweils zwei Spieler zusammen, wobei sich die Zusammenspielenden jeweils gegenüber sitzen. Die Regeln sind gleich wie beim Dreierschnapsen. Es gilt auch hier Farb- und Stichzwang.

Es gibt wieder die Möglichkeiten Schnapser, Bauer, Gangl, Kontrabauer, Ringerl und Herrengang zu spielen. Wichtig dabei ist, dass man, obwohl man immer zu zweit gegen die anderen beiden spielt, auch von dem eigenen Partner gefangen werden kann. Also darf zum Beispiel wenn man ein Gangl angesagt hat, auch der Spieler, mit dem man eigentlich zusammen spielt, keinen Stich machen.

2.5 Punktesystem

Beim Schnapsen steht jeder Spieler zu Beginn bei 24. Für jeden Sieg bei einem normalen Spiel erhält man, je nachdem, wie viele Punkte der Gegner erreicht hat, einen, zwei oder drei Punkte Abzug. Man bekommt drei Punkte Abzug, wenn der Gegner bzw. die Gegner überhaupt keinen Punkt erreicht hat bzw. haben, zwei Punkte Abzug, wenn der Gegner bzw. die Gegner Stiche mit einer Wertigkeit unter 33 Punkte gemacht haben und einen Punkt Abzug, wenn der Gegner bzw. die Gegner Stiche mit einer Wertigkeit von 33 Punkten oder höher gemacht haben.

Für einen Schnapser erhält der Gewinner 6 Punkte Abzug, wenn er verliert erhalten die Gegner 6 Punkte Abzug. Bei einem Bauer sind es 12 Punkte Abzug. Ein Gangl ist 9 Punkte wert. Ein Kontrabauer zählt doppelt so viel wie ein Bauer, also 24 Punkte. Ein Herrengang ist 21, ein Ringerl 18 Punkte Abzug wert.

Ziel ist es, zuerst null Punkte zu erreichen. Damit ist man der Gewinner des Spiels. Beim Viererschnapsen schreiben die Zusammengehörigen immer gemeinsam. Beim Dreierschnapsen wird sich, nachdem einer der drei Spieler bei null angekommen ist, und damit gewonnen hat, das „Bummerl“, das der Verlierer bekommt, durch Zweierschnapsen ausgeschnapst. Einen „Schneider“ bekommt man, wenn man kein einziges Mal in einem Spiel gewinnt, also am Ende noch immer 24 Punkte hat.

3. Die Theorie

3.1 Die Laplace Wahrscheinlichkeit

Da im Folgenden sehr oft die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Karte gebraucht wird, ist die erste wichtige Grundlage die Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil. Diese lässt sich folgendermaßen definieren bzw. berechnen:

„Laplace Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E (klassische Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil): $P(E) = \frac{\text{Anzahl der für } E \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$ “¹

Das bedeutet, es handelt sich um das Verhältnis von günstigen Karten zu möglichen Karten. Ein Beispiel dazu wäre etwa die Wahrscheinlichkeit, dass eine Karte ein Ass ist. Es gibt 20 Karten, also 20 Mögliche in einem Kartendeck und davon sind 4 Karten Asse, weshalb es 4 Günstige gibt. Die Wahrscheinlichkeit wäre also $\frac{4}{20}$.

3.2 σ -Algebra

Alle möglichen Ergebnisse eines Vorgangs werden, wenn man davon ausgeht, dass diese alle bekannt sind, in der Grundmenge Ω zusammengefasst, die somit aus allen möglichen Versuchsausgängen besteht. Da es nicht immer möglich ist, für alle Teilmengen einer Grundmenge Ω Wahrscheinlichkeiten zu definieren, schränkt man sich auf sogenannte σ -Algebren ein.

„Definition: Es sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Teilmenge $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ -Algebra, falls

- (i) $\Omega \in \Sigma$.
- (ii) Falls $A \in \Sigma$, so ist auch $A^c = \Omega \setminus A \in \Sigma$.
- (iii) Sind $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, so ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Das Paar (Ω, Σ) heißt Messraum, eine Menge $A \in \Sigma$ messbar.“²

¹Blaha, Michael; Wahrscheinlichkeitsrechnung:
<https://www.mathe-online.at/nml/materialien/SkriptumBlaha/KAP-15.pdf>;
Stand vom 13.05.2019, S.117

²Kunze, Markus; Angewandte Stochastik I (2014):
https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ss14/AngSto_I/angewstoch.pdf; Stand vom 13.05.2019, S. 3

„Definition (Kolmogorov 1933): Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel (Ω, Σ, P) , bestehend aus einer Menge Ω , einer σ -Algebra Σ und einer Abbildung $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$, derart, dass

- (i) $P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)
- (ii) Sind $A_1, A_2, A_3, \dots$ Elemente von Σ und paarweise unvereinbar, so ist $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (σ -Additivität).

Eine Abbildung P mit diesen Eigenschaften heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf Σ .³

Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes wären zum Beispiel folgende:

„Proposition: Es sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \Sigma$.

- (1) $P(\emptyset) = 0$.
- (2) Ist $A \subset B$, so ist $P(A) \leq P(B)$. Weiter gilt $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$. Insbesondere ist $P(B^c) = 1 - P(B)$.
- (3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- (4) Seien nun $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$. Sind $A_1, \dots, A_n$ paarweise unvereinbar, so ist $P(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$ ⁴

Beweis: (1) Es sei $A_n := \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall sind die A_n paarweise unvereinbar. Außerdem ist ihre Vereinigung ebenfalls die leere Menge. Somit folgt aus der σ -Additivität, dass $P(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$. Dies impliziert, dass $P(\emptyset) = 0$.

(4) folgt nun aus der σ -Additivität, indem man $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ wählt.

(2) Ist $A \subset B$, so ist $B = A \cup (B \setminus A)$, wobei die letzten beiden Ereignisse unvereinbar sind. Also ist $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ und daher $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$. Weil $P(B \setminus A) \geq 0$ ist, folgt daraus $P(A) \leq P(B)$. Die Formel für das Komplement folgt weil $P(\Omega) = 1$ ist.

(3) Sei $C := A \cap B$. Dann ist $C \subset A$ und $C \subset B$ und $A \cup B = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \cup C$. Diese Ereignisse sind paarweise unvereinbar. Also gilt nach den bereits gezeigten Teilen (4) und (2) $P(A \cup B) = P(A \setminus C) + P(B \setminus C) + P(C) = P(A) - P(C) + P(B) - P(C) + P(C)$.⁵

Wenn es sich bei der Menge Ω um eine endliche Menge handelt, so wird meist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ als σ -Algebra genommen.

³ Kunze (2014) S.3

⁴ Ebd. S.4

⁵ vgl. Ebd. S.4

Satz Sei Ω eine nichtleere endliche Menge.

(1) Falls P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist, dann wird durch $\omega \mapsto P(\{\omega\})$ eine Funktion $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die $P(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ erfüllt.

(2) Wenn $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $P(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$ ist, dann wird durch $P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ für $A \subseteq \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ definiert.

Beweis (1) Weil P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt $P(\omega) = P(\{\omega\}) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Nachdem $\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} = \Omega$ gilt wegen $P(\Omega) = 1$ und der σ -Additivität, dass $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = P(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}) = P(\Omega) = 1$.

(2) Für jedes $A \subseteq \Omega$ ist $P(A) \in \mathbb{R}$ und $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \geq 0$. Weiters ist $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Falls $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Teilmengen ist, dann muss $A_n = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele n gelten. Jedes $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ kommt dann in genau einem der A_n vor. Deshalb ist $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} P(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_n} P(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. Also ist auch die σ -Additivität gezeigt und P ist daher ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\Omega)$. ■

3.3 Die bedingte Wahrscheinlichkeit

Beim Abwiegen von Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse kann der Informationsstand einen großen Unterschied machen. Beim Schnapsen zum Beispiel ist es so, dass man, wenn man selbst schon bestimmte Karten in der Hand hat, sicher sein kann, dass die anderen Spieler keine dieser Karten in der Hand haben können. Man hat also mehr Informationen, sobald man sich die Karten angesehen hat und das verändert auch die Wahrscheinlichkeit für die anderen Spieler, bestimmte Karten zu haben. Wenn es zum Beispiel darum geht, wie viele Trumpfkarten ein anderer Spieler noch hat, so macht es einen Unterschied, ob man selbst keine oder sogar vier Trumpfkarten in der Hand hält. Hat man keine, so ist die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Spieler, eine oder mehrere Trumpfkarten zu haben, natürlich höher, als wenn man selbst vier Trumpfkarten in Händen hält.

Das bedeutet, das Eintreten eines gewissen Ereignisses B (Anzahl der eigenen Trumpfkarten) verändert die Wahrscheinlichkeit. Die sogenannte bedingte Wahrscheinlichkeit wird folgendermaßen definiert:

„Definition: Es sei (Ω, Σ, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und B ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit. Für $A \in \Sigma$ ist bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ von A gegeben B ist definiert als

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ „}^6$$

Wenn ein bestimmtes Ereignis keine Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines anderen Ereignisses hat, so nennt man es unabhängig. Wenn man sechs Karten mehr kennt, so hat dies immer Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeiten, egal, was man erhält. Also wird dies nun mit Würfeln erklärt. Wenn man zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen will, eine Zwei oder eine Drei zu würfeln, so liegt diese bei $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Wenn man nun aber würfelt, ohne hinzusehen, und ein anderer einem sagt, dass es sich um eine gerade Zahl handelt, so hat man nur noch eine günstige, und zwar die Zwei, und drei Mögliche, weshalb sich wiederum eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ ergibt. Die Tatsache, dass man mehr wusste, hat also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis „würfelt Zwei oder Drei“ eintritt, nicht verändert. Die Ereignisse sind also unabhängig voneinander. Dies wird folgendermaßen definiert:

„Definition: Es sei (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum $A, B \in \Sigma$ Ereignisse. Dann heißen A und B unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Allgemeiner heißt eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Ereignissen unabhängig, falls für paarweise verschiedene Indices $i_1, \dots, i_n \in I$ stets $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_n})$ gilt.

Sind A und B unabhängig und ist $P(A) > 0$, so ist

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \text{ „}^7$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ereignis B eintritt unter der Voraussetzung, das Ereignis A eingetreten ist, und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B sind gleich. Ob Ereignis A eintritt oder nicht hat also keinerlei Auswirkungen darauf, ob Ereignis B eintritt.

⁶ Kunze (2014) S.11

⁷ Ebd. S.14

3.4 Das Baumdiagramm

Die Berechnungen werden des Weiteren meist auf Grundlage von Baumdiagrammen angestellt. Dafür muss man natürlich dessen Rechenregeln und die Logik dahinter kennen, damit es nicht nötig ist, für jede Rechnung vollständige Baumdiagramme aufzuzeichnen.

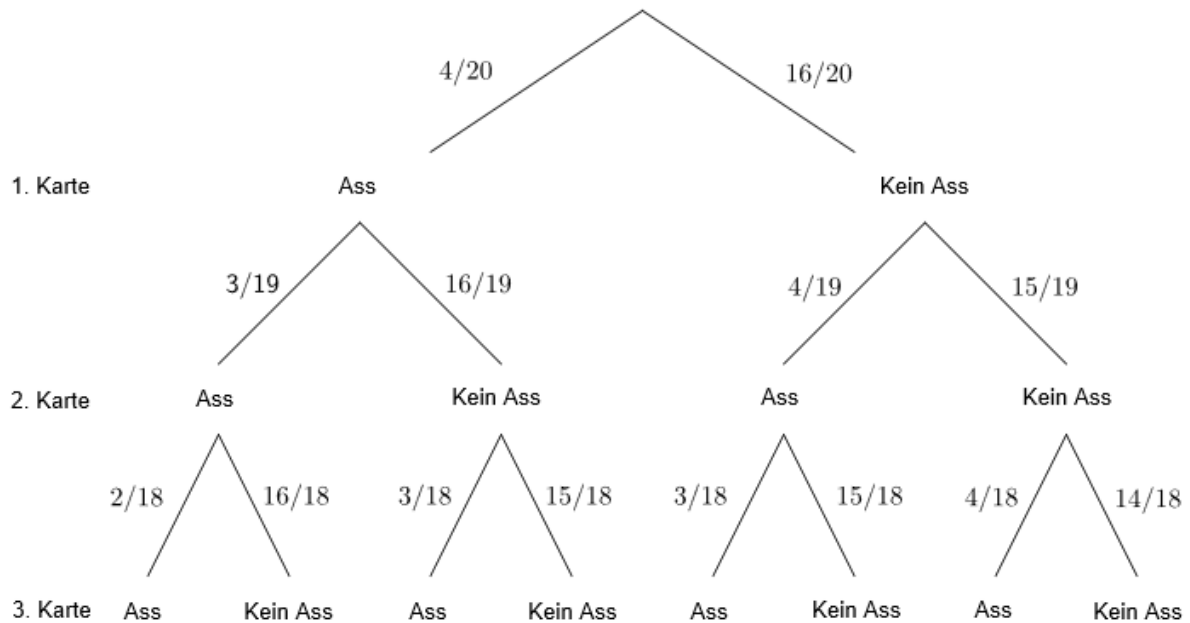
Wenn ein Versuch aus mehreren Teilversuchen besteht, so handelt es sich um einen mehrstufigen Versuch. Dabei kann es sehr nützlich sein, die Abläufe der Teilversuche in Form eines Baumdiagrammes graphisch darzustellen. Von einem Startpunkt aus weisen die Kanten eines Baumdiagramms zu den möglichen Ergebnissen (Ausfällen) eines Versuches, wobei jedem Ausfall des Versuchs ein Pfad in dem Baumdiagramm entspricht. Die Anzahl der Pfade geben auch gleichzeitig die Anzahl der möglichen Ausfälle des Versuchs an. Zu den einzelnen Teilversuchen werden jeweils die bedingten Wahrscheinlichkeiten angeschrieben.⁸

„Besteht ein Versuch aus k Teilversuchen, die tatsächlich oder in Gedanken nacheinander ausgeführt werden und seinen $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ die Anzahl der Ausfälle der Teilversuche, so hat der Gesamtversuch $n_1 * n_2 * n_3 * \dots * n_k$ Ausfälle.“⁹

Das bedeutet, wenn man zum Beispiel drei Karten hat, so gibt es sozusagen drei Teilversuche, die miteinander multipliziert werden müssen, um die Wahrscheinlichkeit auszurechnen. Wenn man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte ein Ass ist und die restlichen Karten keine Asse sind, ausrechnen möchte, so ergibt sich dies aus dem ersten Teilversuch, dass die erste Karte ein Ass ist, was bei $\frac{4}{20}$ liegt, da es vier Asse gibt und 20 Karten insgesamt, und den zweiten und dritten Teilversuchen, dass die Karte kein Ass ist, wofür die Wahrscheinlichkeiten für die zweite Karte bei $\frac{16}{19}$ liegt, da es nun noch 16 Karten gibt, die keine Asse sind und 19 Karten insgesamt, und für die dritte Karte bei $\frac{15}{18}$ liegt, da es nur noch 15 Karten gibt, die keine Asse sind und 18 Karten insgesamt. Das Baumdiagramm dazu sieht nun folgendermaßen aus:

⁸ vgl. Blaha S.132

⁹ Ebd. S.132



Es gibt in diesem Fall also acht mögliche Ausfälle.

Die Wahrscheinlichkeit davon, dass nur die erste der drei Karten ein Ass ist, lässt sich nun folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
 P(\text{nur erste Karte ist Ass}) &= P(\text{Ass}) * P(\text{nicht Ass}) * P(\text{nicht Ass}) = \frac{4}{20} * \frac{16}{19} * \frac{15}{18} = \\
 &= \frac{960}{6840} \approx 0,140351
 \end{aligned}$$

Die nächste Regel ist die Pfadregel.

„1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit einer geordneten Stichprobe (eines Ausfalls) ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.“¹⁰ Das ergibt sich sofort aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

„2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.“¹¹ Hierbei handelt es sich um eine unmittelbare Folge aus der σ -Additivität.

¹⁰ Blaha S.134

¹¹ Ebd. S.134

Das bedeutet, um beim vorherigen Beispiel zu bleiben, dass, wenn man nun zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit davon wissen will, dass nur eine der drei Karten ein Ass ist, aber unabhängig ihrer Reihenfolge, sich diese folgendermaßen ergibt:

$$\begin{aligned}
 P(\text{genau ein Ass}) &= \\
 &= P(\text{Ass}) * P(\text{kein Ass}) * P(\text{kein Ass}) + P(\text{kein Ass}) * P(\text{Ass}) * \\
 &\quad * P(\text{kein Ass}) + P(\text{kein Ass}) * P(\text{Ass}) * P(\text{kein Ass}) = \\
 &= \frac{4}{20} * \frac{16}{19} * \frac{15}{18} + \frac{16}{20} * \frac{15}{19} * \frac{4}{18} + \frac{16}{20} * \frac{4}{19} * \frac{15}{18} = \frac{960}{6840} + \frac{960}{6840} + \frac{960}{6840} = \\
 &= 3 * \frac{960}{6840} \approx 0,421053
 \end{aligned}$$

Auffällig ist hierbei nun, dass die Pfade, unabhängig von ihrer Reihenfolge, immer gleiche Wahrscheinlichkeit haben, was zur nächsten Regel führt.

3.5 Die Reihenfolge

„Wenn die Anzahl der Teilversuche sehr groß ist und auch die Zahl der Ausfälle der Teilversuche hoch ist, wird das Baumdiagramm recht unübersichtlich. Will man eine ganz bestimmte geordnete Stichprobe, so genügt es, nur diesen einen Pfad aufzuschreiben. Will man jedoch eine ungeordnete Stichprobe, so ergeben mehrere gleichwahrscheinliche Pfade das gewünschte Ergebnis. In solchen Fällen kann man sich oft mit kombinatorischen Methoden weiterhelfen und die Anzahl der Pfade mit demselben Ergebnis errechnen.“¹²

In unserem Fall bedeutet das, man muss überlegen, wie viele mögliche Reihenfolgen es gibt, in denen man ein Ass bekommen kann. Man kann sie entweder als erste, zweite oder dritte Karte bekommen, was also drei verschiedene mögliche Reihenfolgen ergibt. Auf die gleiche Weise funktioniert diese Regel auch, wenn man mehr als zwei Arten der Unterscheidung bei den Karten hat. Wären zum Beispiel alle drei Karten unterschiedlich, so gäbe es sechs mögliche Reihenfolgen. Je mehr Karten und Unterscheidungen es auch werden, desto komplizierter wird das Herausfinden der Anzahl der Reihenfolgen.

¹² Blaha S.136

3.6 Das Gegenereignis

„Beschreibt das Ereignis E_1 eine Teilmenge von Ω und ist die Teilmenge E_2 eines anderen Ereignisses gleich der Komplementärmenge von E_1 , dann heißt E_2 das Gegenereignis von E_1 , bzw. E_1 das Gegenereignis von E_2 . Es gilt: $E_2 = E_1'$; $E_1 \cup E_2 = \Omega$; $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ “¹³

Dabei ist es so, dass das Gegenereignis genau dann eintritt, wenn das Ereignis nicht eintritt. Somit können Ereignis und Gegenereignis auch niemals gleichzeitig eintreten.

Die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis lässt sich aus dem 3. Axiom von Kolmogorov folgendermaßen herleiten:

„Seine E und E' Ereignis und Gegenereignis mit $E \cap E' = \emptyset$: $P(E \cup E') = P(E) + P(E')$
Aus $E \cup E' = \Omega$ und $P(\Omega) = 1$ folgt dann $1 = P(E) + P(E')$ und somit: $P(E') = 1 - P(E)$ “¹⁴

Etwas mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit ausrechnen zu können kann sehr nützlich sein. Wenn man zum Beispiel, um bei vorherigem Beispiel zu bleiben, ausrechnen möchte, wie Wahrscheinlich es ist, mindestens ein Ass zu erhalten, was sehr umständlich werden würde, so kann man die Wahrscheinlichkeit dafür mit Hilfe des Gegenereignisses, kein Ass zu bekommen, berechnen. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, kein Ass zu erhalten, beträgt $\frac{16}{20} * \frac{15}{19} * \frac{14}{18}$. Mit Hilfe des Gegenereignisses kann nun folgendermaßen gerechnet werden:

$$P(\text{mindestens ein Ass}) = 1 - P(\text{kein Ass}) = 1 - \frac{16}{20} * \frac{15}{19} * \frac{14}{18} = 1 - \frac{28}{57} = \frac{29}{57} \approx \\ \approx 0,508772$$

3.7 Der Additionssatz

„Aus dem 3. Axiom von Kolmogorov ist bereits bekannt: Sind E_1 und E_2 einander ausschließende (d.h. unvereinbare) Ereignisse des selben Versuchs, dann gilt: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

In vielen Fällen sind die einzelnen Ereignisse jedoch nicht ausschließend und erfordern daher eine Verallgemeinerung der Additionsregel. Für die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis E_1 oder das Ereignis E_2 eintritt gilt: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ “¹⁵

¹³ Blaha S.122

¹⁴ Ebd. S.122

Das bedeutet, wenn man zwei verdeckte Karten hat, von denen man die Wahrscheinlichkeit wissen will, dass es sich um genau einen Zehner oder um genau ein Ass handelt, so kann man die Wahrscheinlichkeit von dem ersten Ereignis zwar mit der Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses zusammenzählen, muss dabei jedoch das Ereignis, dass es sich um Zehner und Ass handelt, abziehen.

$$P(\text{genau ein Zehner}) = \frac{4}{20} * \frac{16}{19} * 2 = \frac{32}{95}$$

$$P(\text{genau ein Ass}) = \frac{4}{20} * \frac{16}{19} * 2 = \frac{32}{95}$$

$$P(\text{Zehner} + \text{Ass}) = \frac{4}{20} * \frac{4}{19} * 2 = \frac{8}{95}$$

$$P(\text{ein Zehner oder ein Ass}) = \frac{32}{95} + \frac{32}{95} - \frac{8}{95} = \frac{56}{95} \approx 0,589474$$

4. Ausgangssituationen

Da nun die Regeln und die Theorie, auf Grundlage derer die folgenden Berechnungen durchgeführt werden, erklärt wurden, folgt nun die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten von besonderen Ausgangsszenarien. Dies ist vor allem beim Dreier- und Viererschnapsen interessant, weshalb auch nur darauf Bezug genommen wird.

4.1 Fünf Karten gleicher Farbe - Das Ringerl

4.1a Viererschnapsen

Als erstes wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, fünf Karten gleicher Farbe zu bekommen. In diesem Fall gewinnt man beim Viererschnapsen, je nachdem, ob man Trumpf bestimmt hat oder nicht, einen Herrengang oder ein Ringerl.

Beim Viererschnapsen machen fünf Karten der gleichen Farbe alle Karten aus, die man erhält. Es gibt insgesamt 20 Karten. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte eine bestimmte Farbe hat liegt, da man fünf günstige Karten und 20 Mögliche hat, bei $\frac{5}{20}$. Die zweite Karte

¹⁵ Blaha S.103

soll dieselbe Farbe haben, wobei es von dieser Farbe nur mehr vier Karten gibt, weshalb die Wahrscheinlichkeit, solch eine Karte zu erhalten, also bei $\frac{4}{19}$ liegt. Der Erhalt einer nächsten Karte gleicher Farbe hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{18}$, der Erhalt der vierten Karte gleicher Farbe $\frac{2}{17}$ und der Erhalt der fünften Karte gleicher Farbe $\frac{1}{16}$. Da es insgesamt aber vier verschiedene Farben und somit auch vier verschiedene Möglichkeiten gibt, fünf Karten der gleichen Farbe zu erhalten, multipliziert man die Wahrscheinlichkeit, fünf Gleiche einer bestimmten Farbe zu erhalten, mit Vier. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(5 \text{ Gleiche}) = \frac{5}{20} * \frac{4}{19} * \frac{3}{18} * \frac{2}{17} * \frac{1}{16} * 4 = \frac{480}{1860480} = \frac{1}{3876} \approx 0,000257998$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, gleich zu Beginn fünf Karten der gleichen Farbe zu erhalten, liegt bei rund 0,02580%.

4.1b Dreierschnapsen

Als nächstes folgt die Berechnung fünf Karten gleicher Farbe beim Dreierschnapsen zu erhalten. Hier ist es nun so, dass man, wenn man fünf Karten der gleichen Farbe bekommt, noch eine zusätzliche Karte in einer anderen Farbe in der Hand hält. Man beginnt, wie schon bei der Berechnung beim Viererschnapsen, mit $\frac{5}{20} * \frac{4}{19} * \frac{3}{18} * \frac{2}{17} * \frac{1}{16}$, um die Wahrscheinlichkeit für die ersten fünf Karten zu berechnen und multipliziert dann noch mit $\frac{15}{15}$ für die sechste Karte, die eine andere Farbe hat, wobei es im Kartendeck jetzt nur noch Karten anderer Farbe gibt. Es gibt sechs verschiedene Möglichkeiten, wann man die Karte mit der anderen Farbe erhält, also muss man mit Sechs multiplizieren. Außerdem gibt es vier verschiedene Farben und somit vier mögliche Wege, um fünf Karten der gleichen Farbe zu erhalten, weshalb man mit vier multiplizieren muss. Dadurch ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(5 \text{ Gleiche}) = \frac{5}{20} * \frac{4}{19} * \frac{3}{18} * \frac{2}{17} * \frac{1}{16} * \frac{15}{15} * 6 * 4 = \frac{43200}{27907200} = \frac{1}{646} \approx 0,00154799$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim Dreierschnapsen ein Ringerl zu bekommen, ist also mit rund 0,1550% etwas größer als beim Viererschnapsen. Beim Dreierschnapsen muss man aber bedenken, dass man mit diesen Karten nicht unbedingt gewinnen wird. Das entscheidet die Karte der anderen Farbe. Wenn es sich dabei um ein Ass handelt, so hat man ganz sicher gewonnen. Also wird als nächstes die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, fünf gleiche Karten einer Farbe und ein Ass in einer anderen Farbe zu erhalten. Unter den Karten mit den anderen Farben befinden sich insgesamt drei Assen, also liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, eine davon nach fünf Karten gleicher Farbe zu erhalten, bei $\frac{3}{15}$. Die restliche Rechnung läuft analog, also erhält man folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(5 \text{ Gleiche} + \text{Ass}) = \frac{5}{20} * \frac{4}{19} * \frac{3}{18} * \frac{2}{17} * \frac{1}{16} * \frac{3}{15} * 6 * 4 = \frac{8640}{27907200} = \frac{1}{3230} \approx \\ \approx 0,000309598$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit, beim Dreierschnapsen zu Beginn ein sicheres Ringerl zu bekommen, mit rund 0,03096% trotzdem etwas höher als beim Viererschnapsen.

4.2 Das Gangl

4.2.1 Vier Assen

4.2.1a Viererschnapsen

Als nächstes geht es um verschiedene Möglichkeiten, gleich beim Austeilen ein Gangl zu erhalten. Dazu wird als erstes die Wahrscheinlichkeit berechnet, zu Beginn vier Assen zu bekommen. Beim Viererschnapsen setzt sich dieses Blatt aus vier Assen und einer anderen Karte, die kein Ass ist, zusammen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, als erste Karte ein Ass zu erhalten, liegt bei $\frac{4}{20}$. Für die zweite Karte liegt die Wahrscheinlichkeit, da man nur mehr drei Assen und 19 Karten hat, bei $\frac{3}{19}$. Für die dritte Karte liegt die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{2}{18}$ und für die vierte Karte bei $\frac{1}{17}$. Die fünfte Karte, die kein Ass sein darf, hat eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{16}{16}$, da man nur mehr die Möglichkeit hat, eine solche zu erhalten. Da man die Karte, die

kein Ass ist, nicht an einer bestimmten Stelle erhalten muss, gibt es fünf Möglichkeiten, wann man diese erhält, also muss man mit Fünf multiplizieren für die fünf möglichen Reihenfolgen. Dadurch ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(4 \text{ Asse}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{1}{17} * \frac{16}{16} * 5 = \frac{1920}{1860480} = \frac{1}{969} \approx 0,00103199$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit davon, beim Viererschnapsen alle vier Asse zu erhalten, beträgt rund 0,1032%

Da man aber solch ein Gangl erst dann sicher gewinnt, wenn die fünfte Karte einer der vier Zehner ist, wird als nächstes die Wahrscheinlichkeit dieses Falles berechnet. Die Wahrscheinlichkeit, einen Zehner nach vier Assen zu bekommen, liegt bei $\frac{4}{16}$. Es gibt fünf mögliche Reihenfolgen, da man den Zehner als erste, zweite, dritte, vierte oder fünfte Karte erhalten kann, weshalb man mit Fünf multiplizieren muss. Darum ergibt sich folgende Rechnung:

$$P(4 \text{ Asse} + 1 \text{ Zehner}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{1}{17} * \frac{4}{16} * 5 = \frac{480}{1860480} = \frac{1}{3876} \approx 0,000257998$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim Viererschnapsen vier Asse und einen der vier Zehner zu bekommen, liegt also bei rund 0,02580%, ist aber interessanterweise gleich hoch, wie fünf Karten gleicher Farbe zu bekommen. Das ist gleichzeitig auch insgesamt die Wahrscheinlichkeit, beim Viererschnapsen mit vier Assen ein Gangl zu bekommen, das man nicht verlieren kann.

4.2.1 b Dreierschnapsen

Beim Dreierschnapsen setzt sich ein Blatt mit vier Assen aus vier Assen und zwei anderen Karten, die keine Asse sind, zusammen. Dadurch ergeben sich verschiedene Kombinationen, in denen die Karten erhalten worden sein könnten, und zwar:

A...Ass N...kein Ass

(AAA ANN), (AAA NAN), (AAA NNA), (AAN ANA), (AAN AAN), (AAN NAA),
(ANA AAN), (ANA ANA), (ANA NAA), (NAA AAN), (NAA ANA), (NAA NAA)
(ANN AAA), (NNA AAA), (NAN AAA)

Um keine Kombination zu vergessen, wurden die ersten drei Karten ohne N festgelegt und die anderen drei Karten auf ihre drei möglichen Arten angeordnet. Das sind also drei Möglichkeiten. Dann wurden die ersten drei Karten mit einem N festgelegt, wofür es drei mögliche Anordnungen gibt, und die jeweils zugehörigen drei Anordnungen der drei restlichen Karten. Das ergibt neun Möglichkeiten. Dann wurden die ersten drei Karten mit zwei N festgelegt, wofür es drei mögliche Anordnungen gibt, und die jeweils Zugehörige eine Anordnungen der anderen drei Karten. Das ergibt drei Möglichkeiten. Insgesamt sind es also 15 mögliche Kombinationen. Also ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, beim Dreierschnapsen vier Asse zu bekommen, folgendes:

$$P(4 \text{ Asse}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{1}{17} * \frac{16}{16} * \frac{15}{15} * 15 = \frac{86400}{27907200} \approx 0,00309575$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Dreierschnapsen vier Asse zu erhalten, beträgt also rund 0,3096%, was etwas höher ist als die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Viererschnapsen vier Asse zu erhalten.

Beim Dreierschnapsen ist eine Möglichkeit ein Gangl zu haben, das man sicher gewinnt, zusätzlich zu den vier Assen zwei Zehner zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit nach den vier Assen einen Zehner zu erhalten liegt bei $\frac{4}{16}$, das Ereignis, danach noch einen Zehner zu erhalten hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{15}$. Die restliche Rechnung verläuft analog zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, vier Asse beim Dreierschnapsen zu erhalten. Es gibt wieder 15 Anordnungsmöglichkeiten. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(4 \text{ Asse} + 2 \text{ Zehner}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{1}{17} * \frac{4}{16} * \frac{3}{15} * 15 = \frac{4320}{27907200} = \frac{1}{6460} \approx \\ \approx 0,000154799$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Gangl mit vier Assen und zwei Zehner zu erhalten, beträgt demnach rund 0,01548%.

Des Weiteren hat man aber auch noch die Möglichkeit, zu vier Assen einen Zehner und einen König, Ober oder Unter derselben Farbe zu erhalten, um ein sicheres Gangl in der Hand zu haben. Um diese Wahrscheinlichkeit auszurechnen, muss man sich die verschiedenen Kombinationen überlegen, in denen die Karten ausgeteilt werden könnten.

A...Ass Z...Zehner B...König, Ober oder Unter

(AAA AZB), (AAA ZAB), (AAA BAZ), (AAA ABZ), (AAA ZBA), (AAA BZA),
 (AAB AAZ), (AAB AZA), (AAB ZAA), (ABA AAZ), (ABA AZA), (ABA ZAA),
 (BAA AAZ), (BAA AZA), (BAA ZAA), (AAZ AAB), (AAZ ABA), (AAZ BAA),
 (AZA AAB), (AZA ABA), (AZA BAA), (ZAA AAB), (ZAA ABA), (ZAA BAA),
 (AZB AAA), (ZAB AAA), (BAZ AAA), (ABZ AAA), (ZBA AAA), (BZA AAA)

Um keine Anordnung zu vergessen, wurde analog zu vorherigem Beispiel vorgegangen.

Also hat man insgesamt 30 mögliche Kombinationen, in denen die sechs Karten ausgeteilt werden könnten. Die Wahrscheinlichkeit, einen Zehner in einer bestimmten Farbe zu erhalten, nachdem man bereits vier Assen hat, beträgt $\frac{1}{16}$. Die Wahrscheinlichkeit danach entweder einen Unter, Ober oder König in der gleichen Farbe zu erhalten, beträgt $\frac{3}{15}$. Für alle vier Farben wird mit Vier multipliziert und für die 30 möglichen Kombinationen mit 30. Darum ergibt sich für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit folgendes:

$$\begin{aligned}
 P(4 \text{ Asse} + 1 \text{ Zehner} + 1 \text{ König, Ober oder Unter der gleichen Farbe}) &= \\
 &= \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{1}{17} * \frac{1}{16} * \frac{3}{15} * 4 * 30 = \frac{8640}{27907200} = \frac{1}{3230} \approx \\
 &\approx 0,000309598
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim Dreierschnapsen ein Gangl mit vier Assen, einem Zehner und einem König, Ober oder Unter derselben Farbe zu erhalten, beträgt also etwa 0,03096%.

$$P(\text{sicheres Gangl mit vier Assen}) = \frac{1}{6460} + \frac{1}{3230} = \frac{3}{6460} \approx 0,000464396$$

Also liegt die Wahrscheinlichkeit insgesamt beim Dreierschnapsen zu Beginn ein sicheres Gangl mit vier Assen zu bekommen bei ca. 0,04644%.

4.2.2 Drei Asse

4.2.2a Viererschnapsen

Als nächstes wird die Wahrscheinlichkeit, zu Beginn drei Asse zu bekommen, berechnet. Beim Viererschnapsen liegt die Wahrscheinlichkeit, ein Ass zu erhalten, für die erste Karte bei $\frac{4}{20}$, für die zweite bei $\frac{3}{19}$ und für die dritte Karte bei $\frac{2}{18}$. Die Bedingung für die letzten beiden Karten ist, dass sie keine Asse sein dürfen, also haben sie die Wahrscheinlichkeiten $\frac{16}{17}$ und $\frac{15}{16}$. Es müssen aber wieder die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten mit einbezogen werden.

A...Ass N...Kein Ass

(AAA NN), (AAN NA), (AAN AN), (ANA NA), (ANA AN), (NAA NA), (NAA AN), (NNA AA), (ANN AA), (NAN AA)

Es gibt also insgesamt 10 Kombinationsmöglichkeiten. Dadurch ergibt sich folgende Rechnung für die Wahrscheinlichkeit:

$$P(3 \text{ Asse}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{16}{17} * \frac{15}{16} * 10 = \frac{57600}{1860480} = \frac{10}{323} = 0,0309598$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim Viererschnapsen drei Asse zu erhalten, beträgt also rund 3,096%

Man kann die Wahrscheinlichkeit, genau drei Asse zu erhalten, aber auch noch auf andere Art berechnen und zwar mit Günstige durch Mögliche und dem Binomialkoeffizienten. „Der

Binomialkoeffizient ist eine mathematische Funktion, mit der sich eine der Grundaufgaben der Kombinatorik lösen lässt. Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wie viele verschiedene Arten man k Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten auswählen kann. Der Versuch wird dabei ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge durchgeführt.¹⁶ Das bedeutet für unseren Fall, dass es $\binom{20}{5}$ Möglichkeiten gibt, die fünf Karten, die ausgeteilt werden, aus 20 auszuwählen. Wenn man genau drei Asse erhalten will, gibt es demnach $\binom{4}{3}$ Möglichkeiten, drei Asse aus vier Assen auszuwählen. Die restlichen zwei Karten werden aus den 16 Karten, die keine Asse sind, ausgewählt, weshalb sich dafür $\binom{16}{2}$ Möglichkeiten ergeben. Insgesamt ergibt dies $\binom{4}{3} * \binom{16}{2}$ günstige Kartenkombinationen für die drei Asse und die restlichen zwei Karten. Nun werden diese günstigen Kartenkombinationen durch die $\binom{20}{5}$ möglichen Kartenkombinationen dividiert, weshalb sich Folgendes ergibt:

$$P(\text{genau 3 Asse}) = \frac{\binom{4}{3} * \binom{16}{2}}{\binom{20}{5}} = \frac{4 * 120}{15504} = \frac{10}{323} \approx 0,0309598$$

Also liegt die Wahrscheinlichkeit, drei Asse zu bekommen, bei ca. 3,096%.

Warum es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt, aus n Karten k auszuwählen, lässt sich folgendermaßen erklären: In so einem Fall muss offensichtlich immer $k \leq n$ sein. Die Möglichkeiten, mit Beachtung der Reihenfolge, ergeben sich durch n Möglichkeiten für den ersten, $(n-1)$ Möglichkeiten für den zweiten, $(n-2)$ Möglichkeiten für den dritten usw. bis zu $(n-(k-1))$ Möglichkeiten für den k -ten. Das ergibt $n * (n-1) * (n-2) * ... * (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. Da man aber nun alle Möglichkeiten mehrfach gezählt hat, da es $k!$ verschiedene Möglichkeiten gibt, k Elemente anzuordnen, muss durch $k!$ dividiert werden, da die Reihenfolge egal ist. Das ergibt für den Binomialkoeffizienten beziehungsweise die Möglichkeiten, k Karten aus n Karten auszuwählen, folgendes:

¹⁶ Rudolph, Dennis; Binomialkoeffizient (2017):
<https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/binomialkoeffizient.html>;
 Stand vom 13.05.2019.

$$\binom{n}{k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}^{17}$$

Wenn man nun aus 20 Karten 5 auswählen will, so hat man $20*19*18*17*16=1860480$ Möglichkeiten, dies in einer bestimmten Reihenfolge zu tun. Da es aber $5*4*3*2*1=120$ Reihenfolgen gibt, muss durch 120 dividiert werden, weshalb es 15504 Möglichkeiten gibt. Zu der Formel kommt man, indem man mit 15! erweitert, was folgendermaßen aussieht:

$$\frac{20 * 19 * 18 * 17 * 16}{5 * 4 * 3 * 2 * 1} * \frac{15 * 14 * \dots * 2 * 1}{15 * 14 * \dots * 2 * 1} = \frac{20!}{5! * 15!} = \frac{20!}{5! * (20 - 5)!} = 15504$$

Ob man nun aber ein sicheres Gangl hat, hängt von den beiden unbekannten Karten ab. Darum wird als nächstes die Wahrscheinlichkeit berechnet, beim Viererschnapsen drei Asse und zwei dazu passende Zehner zu bekommen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte ein Ass ist, liegt wieder bei $\frac{4}{20}$, für die zweite bei $\frac{3}{19}$ und für die dritte bei $\frac{2}{18}$. Zugehörige Zehner zu den Assen gibt es nun insgesamt drei, weshalb die Wahrscheinlichkeit, einen davon zu bekommen, bei $\frac{3}{17}$ liegt. Die Wahrscheinlichkeit danach, noch einen der übrigen zwei passenden Zehner zu bekommen, liegt bei $\frac{2}{16}$. Es gibt analog zur vorherigen Berechnung 10 mögliche Kombinationen. Darum ergibt sich für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit folgendes:

$$P(3 \text{ Asse} + 2 \text{ Zehner}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{3}{17} * \frac{2}{16} * 10 = \frac{1440}{1860480} = \frac{1}{1292} \approx \\ \approx 0,000773994$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, drei Asse und zwei farblich passende Zehner zu erhalten, beträgt rund 0,07740%.

¹⁷ Vgl. Kunze (2014) S. 8

Um beim Viererschnapsen mit drei Assen ein sicheres Gangl zu haben, gibt es aber noch die Möglichkeit, einen zu einer der Assen passenden Zehner und entweder einen dazu passenden König, Ober oder Unter zu erhalten. Für diese Rechnung muss man sich wieder die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten ansehen.

A...Ass Z...Zehner B...König, Ober oder Unter

(AAA ZB), (AAA BZ), (AAB AZ), (AAB ZA), (ABA AZ), (ABA ZA), (BAA AZ), (BAA ZA), (BZA AA), (BAZ AA), (ZAB AA), (ZBA AA), (ABZ AA), (AZB AA), (AAZ AB), (AAZ BA), (AZA AB), (AZA BA), (ZAA AB), (ZAA BA)

Es gibt in diesem Fall also 20 Kombinationsmöglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, nach drei Assen einen passenden Zehner zu erhalten, liegt bei $\frac{3}{17}$. Die Wahrscheinlichkeit danach einen dazu passenden König, Ober oder Unter zu bekommen, beträgt $\frac{3}{16}$. Dadurch ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit folgende Rechnung:

$$P(3 \text{ Asse} + 1 \text{ passender Zehner} + 1 \text{ passender König, Ober oder Unter}) = \\ = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{3}{17} * \frac{3}{16} * 20 = \frac{4320}{1860480} = \frac{3}{1292} \approx 0,00232198$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit drei Asse, einen zu einer Ass passenden Zehner und einen König, Ober oder Unter derselben Farbe zu erhalten, beträgt rund 3,019%.

$$P(\text{sicheres Gangl mit drei Assen}) = \frac{1}{1292} + \frac{3}{1292} = \frac{4}{1292} \approx 0,00309598$$

Also liegt die Wahrscheinlichkeit beim Viererschnapsen zu Beginn mit drei Assen ein sicheres Gangl zu erhalten bei etwa 0,3793%.

4.2.2b Dreierschnapsen

Die Wahrscheinlichkeit, beim Dreierschnapsen drei Asse zu erhalten, setzt sich aus der Wahrscheinlichkeiten von $\frac{4}{20}$, dass die erste Karte ein Ass ist, $\frac{3}{19}$, dass die zweite Karte ein Ass ist und $\frac{2}{18}$, dass die dritte Karte ein Ass ist, zusammen. Sie setzt sich des Weiteren aus den Wahrscheinlichkeiten der vierten, fünften und sechsten Karte, kein Ass zu sein, zusammen, wobei diese bei $\frac{16}{17}$, $\frac{15}{16}$ und $\frac{14}{15}$ liegen. Des Weiteren braucht man die Anzahl aller möglichen Reihenfolgen.

A...Ass N...Kein Ass

(AAA NNN), (AAN ANN), (AAN ANA), (AAN NNA), (ANA ANN), (ANA ANA),
(ANA NNA), (NAA ANN), (NAA ANA), (NAA NNA), (ANN AAN), (ANN ANA),
(ANN NAA), (NAN AAN), (NAN ANA), (NAN NAA), (NNA AAN), (NNA ANA),
(NNA NAA), (NNN AAA)

Es gibt also insgesamt 20 mögliche Kombinationen. Darum ergibt sich für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit folgendes:

$$P(3 \text{ Asse}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{16}{17} * \frac{15}{16} * \frac{14}{15} * 20 = \frac{1612800}{27907200} = \frac{56}{969} \approx 0,0577915$$

Analog zu „genau drei Asse beim Viererschnapsen“ könnte man diese Wahrscheinlichkeit auch mit Hilfe des Binomialkoeffizienten ausrechnen. Es werden 6 Karten aus 20 Karten ausgewählt, weshalb es $\binom{20}{6}$ Mögliche gibt. Dafür, drei Asse aus vier Assen auszuwählen, gibt es $\binom{4}{3}$ Möglichkeiten und dafür, drei beliebige Karten aus 16 Karten auszuwählen, gibt es $\binom{16}{3}$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, genau drei Asse zu erhalten, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(\text{genau 3 Asse}) = \frac{\binom{4}{3} * \binom{16}{3}}{\binom{20}{6}} = \frac{4 * 560}{38760} = \frac{56}{969} \approx 0,0577915$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim Dreierschnapsen also genau drei Asse zu erhalten, beträgt rund 5,779%.

Um mit drei Assen ein Gangl zu haben, das man sicher gewinnt, gibt es für die drei anderen Karten verschiedene Möglichkeiten. Eine davon wäre, dass man zu den drei Assen noch drei Zehner in den gleichen Farben der Asse erhält. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeiten, dass man als erste drei Karten Asse erhält, betragen $\frac{4}{20}$, $\frac{3}{19}$ und $\frac{2}{18}$. Die nächsten drei Karten sollen die drei farblich dazu passende Zehner sein. Die Wahrscheinlichkeit, dass man als vierte Karte einen dieser Zehner erhält, beträgt $\frac{3}{17}$. Für die fünfte Karte, einer dieser Zehner zu sein, liegt die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{2}{16}$ und für die sechste Karte bei $\frac{1}{15}$. Außerdem gibt es genauso viele mögliche Reihenfolgen wie bei der Berechnung zu „drei Asse“, weshalb man noch mit 20 multiplizieren muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(3 \text{ Asse} + 3 \text{ Zehner}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{3}{17} * \frac{2}{16} * \frac{1}{15} * 20 = \frac{2880}{27907200} = \frac{1}{9690} \\ \approx 0,000103199$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, drei Asse und drei farblich dazu passende Zehner zu erhalten, beträgt rund 0,0103%.

Es gibt für ein sicheres Gangl beim Dreierschnapsen aber auch noch die Möglichkeit, zu den drei Assen zwei farblich passende Zehner und dann einen König, Ober oder Unter in der gleichen Farbe wie der Zehner zu erhalten. Für den Erhalt der drei Asse gilt dieselbe Wahrscheinlichkeit wie zuvor, also $\frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18}$. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, als vierte und fünfte Karte zwei dazu passende Zehner, von denen es drei gibt, zu erhalten betragen $\frac{3}{17}$ und $\frac{2}{16}$. Da es zu jedem der beiden Zehner jeweils einen König, Ober und Unter gibt, wären nun insgesamt 6 Karten günstig für die sechste Karte, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{15}$ ausmacht.

Nun muss man noch alle möglichen Reihenfolgen berücksichtigen und herausfinden, wie viele es sind.

A...Ass Z...Zehner B...Ober, Unter oder König

(AAA ZZZ), (AAA ZZZ), (AAA ZZZ), (AAZ ABZ), (AAZ AZB), (AAZ BAZ),
 (AAZ BZA), (AAZ ZAB), (AAZ ZBA), (AZA ABZ), (AZA AZB), (AZA BAZ),
 (AZA BZA), (AZA ZAB), (AZA ZBA), (ZAA ABZ), (ZAA AZB), (ZAA BAZ),
 (ZAA BZA), (ZAA ZAB), (ZAA ZBA), (AZZ AAB), (AZZ ABA), (AZZ BAA),
 (ZAZ AAB), (ZAZ ABA), (ZAZ BAA), (ZZA AAB), (ZZA ABA), (ZZA BAA),
 (AAB AZZ), (AAB ZAZ), (AAB ZZA), (ABA AZZ), (ABA ZAZ), (ABA ZZA),
 (BAA AZZ), (BAA ZAZ), (BAA ZZA), (ABZ AAZ), (ABZ AZA), (ABZ ZAA),
 (AZB AAZ), (AZB AZA), (AZB ZAA), (BAZ AAZ), (BAZ AZA), (BAZ ZAA),
 (BZA AAZ), (BZA AZA), (BZA ZAA), (ZAB AAZ), (ZAB AZA), (ZAB ZAA),
 (ZBA AAZ), (ZBA AZA), (ZBA ZAA), (ZZB AAA), (ZBZ AAA), (BZZ AAA)

Das ergibt also insgesamt 60 mögliche Reihenfolgen, in denen die Karten ausgeteilt werden könnten, weshalb man mit 60 multiplizieren muss. Das ergibt folgende Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

$$P(3 \text{ Asse} + 2 \text{ p. Zehner} + 1 \text{ zu einem der beiden passender König, Ober oder Unter}) \\ = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{3}{17} * \frac{2}{16} * \frac{6}{15} * 60 = \frac{51840}{27907200} = \frac{3}{1615} \approx 0,00185759$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, drei Asse, zwei farblich passende Zehner und einen König, Ober oder Unter derselben Farbe, die auch der Zehner hat, zu erhalten, beträgt rund 0,1858%.

Eine weitere Möglichkeit, beim Dreierschnapsen ein sicheres Gangl mit drei Assen zu haben, ergibt sich dadurch, zu einer der Asse drei Karten derselben Farbe zu bekommen, wobei es egal ist, um welche Karten es sich genau handelt. Man hat dafür, dass es sich bei den ersten drei Karten um Asse handelt, wieder die Wahrscheinlichkeiten $\frac{4}{20}$, $\frac{3}{19}$ und $\frac{2}{18}$. Die vierte Karte soll die Farbe einer der drei Asse haben. Das bedeutet jede Karte außer den fünf verbliebenen Karten in der vierten Farbe, von der man kein Ass bekommen hat, ist günstig, wodurch sich

für die nächste Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{12}{17}$ ergibt. Zu dieser Karte passend gibt es nun noch, da es von den drei Farben, die die Asse haben, zuvor noch jeweils vier Karten gab, drei Karten der gleichen Farbe, weshalb die Wahrscheinlichkeit, eine davon zu erhalten, bei $\frac{3}{16}$ und für die nächste Karte bei $\frac{2}{15}$ liegt.

Man muss auch die möglichen Reihenfolgen, in denen die Karten ausgeteilt werden könnten, berücksichtigen. Man hat dafür drei Asse und drei Karten gleicher Farbe, die keine Asse sind.

A...Ass N...Karte gleicher Farbe

(AAA NNN), (AAN ANN), (AAN NAN), (AAN NNA), (ANA ANN), (ANA NAN), (ANA NNA), (NAA ANN), (NAA NAN), (NAA NNA), (ANN AAN), (ANN ANA), (ANN NAA), (NAN AAN), (NAN ANA), (NAN NAA), (NNA AAN), (NNA ANA), (NNA NAA), (NNN AAA)

Das ergibt insgesamt 20 Möglichkeiten für die Reihenfolge. Also ergibt sich folgende Rechnung:

$$P(3 \text{ Asse} + 3 \text{ passende Gleiche}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{12}{17} * \frac{3}{16} * \frac{2}{15} * 20 = \frac{34560}{27907200} = \frac{2}{1615} \approx 0,00123839$$

Die Wahrscheinlichkeit, drei Asse und drei farblich zu einem der Asse passende Karten zu bekommen, beträgt rund 0,1238%.

$$P(\text{sicheres Gangl mit drei Assen}) = \frac{1}{9690} + \frac{3}{1615} + \frac{2}{1615} = \frac{1}{9690} + \frac{5}{1615} = \frac{1 + 30}{1615} = \frac{31}{9690} \approx 0,00319918$$

Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, beim Dreierschnapsen zu Beginn ein sicheres Gangl mit drei Assen zu erhalten bei rund 0,3199% liegt.

4.2.3 Zwei Asse

4.2.3a Viererschnapsen

Beim Viererschnapsen zwei Asse zu erhalten, lässt sich leicht berechnen. Die Wahrscheinlichkeit, als erste Karte eine der vier Asse zu erhalten, beträgt $\frac{4}{20}$. Das Ereignis, als zweite Karte eine der noch verbliebenen drei Asse zu erhalten, hat eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{19}$. Die restlichen drei Karten sollen keine Asse sein, wofür die Wahrscheinlichkeiten $\frac{16}{18}$, $\frac{15}{17}$ und $\frac{14}{16}$ betragen.

A...Ass K...Kein Ass

(KKK AA), (KKA AK), (KKA KA), (KAK AK), (KAK KA), (AKK AK), (AKK KA), (AAK KK), (KAA KK), (AKA KK)

Wegen der 10 Anordnungsmöglichkeiten muss mit 10 multipliziert werden, wodurch sich insgesamt folgende Rechnung ergibt:

$$P(2 \text{ Asse}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{16}{18} * \frac{15}{17} * \frac{14}{16} * 10 = \frac{1}{19} * \frac{1}{17} * \frac{7}{1} * 10 = \frac{70}{323} \approx 0,216718$$

Die Wahrscheinlichkeit beim Viererschnapsen genau zwei Asse zu erhalten, beträgt also rund 21,67%.

Alternativ könnte man dies auch mit Hilfe des Binomialkoeffizienten ausrechnen.

Es gibt $\binom{20}{5}$ Möglichkeiten, fünf Karten aus 20 Karten auszuwählen. Wenn man genau zwei Asse erhalten will, gibt es demnach $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, zwei Asse aus vier Assen auszuwählen. Die übrigen drei Karten werden aus den 16 Karten, die keine Asse sind, ausgewählt, weshalb sich dafür $\binom{16}{3}$ Möglichkeiten ergeben. Insgesamt ergibt dies $\binom{4}{2} * \binom{16}{3}$ günstige Kartenkombinationen für die zwei Asse und die restlichen drei Karten. Nun werden diese günstigen Kartenkombinationen durch die $\binom{20}{5}$ möglichen Kartenkombinationen dividiert, weshalb sich Folgendes ergibt:

$$P(\text{genau 2 Asse}) = \frac{\binom{4}{2} * \binom{16}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{6 * 560}{15504} = \frac{70}{323} \approx 0,216718$$

Damit es sich um ein Gangl handelt, das man sicher gewinnt, muss man aber die drei bisher beliebigen Karten betrachten. Eine Möglichkeit dafür, dass es sich um ein sicheres Gangl handelt, wäre, wenn die drei Karten dieselbe Farbe wie eine der beiden Asse hätten. Also wird als nächstes die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um eine der vier Asse handelt, beträgt $\frac{4}{20}$ und für die zweite Karte $\frac{3}{19}$. Die nächste Karte soll entweder eine Karte der einen Farbe oder der anderen Farbe, die die beiden Asse haben, sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{18}$ beträgt, da es von jeder Farbe noch jeweils vier Karten gibt. Da die vierte Karte und die fünfte Karte dieselbe Farbe haben sollen, wie die Karte zuvor, gibt es für die vierte Karte noch drei günstige Karten und für die fünfte Karte noch zwei günstige Karten, wofür die Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{17}$ und $\frac{2}{16}$ betragen. Analog zum vorherigen Beispiel gibt es 10 mögliche Reihenfolgen, weshalb mit 10 multipliziert werden muss. Das führt zu folgender Rechnung:

$$P(2 \text{ Asse} + 3 \text{ Gleiche}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{8}{18} * \frac{3}{17} * \frac{2}{16} * 10 = \frac{5760}{1860480} = \frac{1}{323} \approx 0,00309598$$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei Asse und drei dazu passende Karten gleicher Farbe zu erhalten, beträgt also rund 0,3096%.

Die nächste Möglichkeit, mit zwei Assen ein sicheres Gangl zu erhalten, besteht darin, dass es sich bei den drei weiteren Karten um zwei Zehner passend zu den Assen handelt und die letzte Karte ebenfalls eine der Farben der beiden Asse hat. Die Wahrscheinlichkeit lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, als erste Karte ein Ass zu erhalten, beträgt $\frac{4}{20}$ und für die zweite Karte liegt die Wahrscheinlichkeit dafür bei $\frac{3}{19}$. Die dritte Karte soll einer der beiden Zehner

farblich passend zu den Assen sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{18}$ beträgt. Die nächste Karte soll der zweite Zehner farblich passend zu den Assen sein, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{17}$ bedeutet. Die letzte Karte soll eine der sechs noch verbleibenden Karten in einer der Farben derASSE sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{16}$ beträgt.

Z...Zehner A...Ass K...Karte gleicher Farbe

(KAA ZZ), (AKA ZZ), (AAK ZZ), (ZAA KZ), (ZAA ZK), (AZA KZ), (AZA ZK), (AAZ KZ), (AAZ ZK), (ZZA KA), (ZZA AK), (ZAZ KA), (ZAZ AK), (AZZ KA), (AZZ AK), (KZZ AA), (ZKZ AA), (ZZK AA), (KAZ ZA), (KAZ AZ), (KZA ZA), (KZA AZ), (ZKA ZA), (ZKA AZ), (ZAK ZA), (ZAK AZ), (AKZ ZA), (AKZ AZ), (AZK ZA), (AZK AZ)

Es gibt also 30 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 30 multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(2 \text{ Asse} + 2 \text{ Zehner} + \text{passende Karte}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{1}{17} * \frac{6}{16} * 30 = \frac{4320}{1860480} = \frac{3}{1292} \approx 0,00232198$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 0,2322%.

$$P(\text{sicheres Gangl mit zwei Assen}) = \frac{1}{323} + \frac{3}{1292} = \frac{7}{1292} = 0,00541796$$

Die Wahrscheinlichkeit insgesamt, mit zwei Assen ein Gangl zu erhalten, das man sicher gewinnt, beträgt rund 0,5418%.

$$P(\text{sicheres Gangl beim Viererschnapsen}) = \frac{1}{3876} + \frac{4}{1292} + \frac{7}{1292} = \frac{1 + 4 * 3 + 3 * 7}{3876} = \frac{34}{3876} = \frac{17}{1938} \approx 0,00877193$$

Da man mit weniger als zwei Assen kein Gangl erhalten kann, das man sicher gewinnt, abgesehen vom Ringerl, das aber auch als solches gespielt wird, beträgt die Wahrscheinlichkeit insgesamt beim Viererschnapsen ein sicheres Gangl zu erhalten, rund 0,8772%.

4.2.3b Dreierschnapsen

Beim Dreierschnapsen genau zwei Assen zu erhalten, lässt sich mit Hilfe des Binomialkoeffizienten folgendermaßen berechnen:

Es gibt $\binom{20}{6}$ Möglichkeiten, 6 Karten aus 20 auszuwählen. Wenn man genau zwei Assen erhalten will, gibt es demnach $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, zwei Assen aus vier Assen auszuwählen. Die übrigen vier Karten werden aus den 16 Karten, die keine Assen sind, ausgewählt, weshalb sich dafür $\binom{16}{4}$ Möglichkeiten ergeben. Insgesamt ergibt dies $\binom{4}{2} * \binom{16}{4}$ günstige Kartenkombinationen für die zwei Assen und die restlichen vier Karten. Nun werden diese günstigen Kartenkombinationen durch die $\binom{20}{6}$ möglichen Kartenkombinationen dividiert, weshalb sich Folgendes ergibt:

$$P(\text{genau 2 Assen}) = \frac{\binom{4}{2} * \binom{16}{4}}{\binom{20}{6}} = \frac{6 * 1820}{38760} = \frac{91}{323} \approx 0,281734$$

Die Wahrscheinlichkeit, genau zwei Assen zu erhalten, beträgt also rund 28,17%

Eine Möglichkeit beim Dreierschnapsen ein sicheres Gangl zu erhalten, wäre, wenn man nun zu den beiden Assen noch jeweils die beiden farblich passenden Zehner erhalten würde und die restlichen beiden Karten nur Karten derselben Farben wie die Assen wären. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um ein Ass handelt, beträgt $\frac{4}{20}$. Dafür, dass die zweite Karte ebenfalls ein Ass ist, liegt die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{3}{19}$. Die nächste Karte soll einer der beiden günstigen Zehner sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{18}$

beträgt. Dafür, dass es sich bei der vierten Karte um den anderen passenden Zehner handelt, liegt die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{1}{17}$. Die beiden letzten Karten sollen Karten der sechs verbliebenen Karten in den Farben der Asse sein. Die Wahrscheinlichkeiten dafür betragen $\frac{6}{16}$ und $\frac{5}{15}$.

A...Ass Z...Zehner N...Karte in Farben der Asse

(AAZ ZNN), (AAZ NZN), (AAZ NNZ), (AZA ZNN), (AZA NZN), (AZA NNZ),
 (ZAA ZNN), (ZAA NZN), (ZAA NNZ), (ZZA ANN), (ZZA NAN), (ZZA NNA),
 (ZAZ ANN), (ZAZ NAN), (ZAZ NNA), (AZZ ANN), (AZZ NAN), (AZZ NNA),
 (ZZN NAA), (ZZN ANA), (ZZN AAN), (ZNZ NAA), (ZNZ ANA), (ZNZ AAN),
 (NZZ NAA), (NZZ ANA), (NZZ AAN), (AAN NZZ), (AAN ZNZ), (AAN ZZN),
 (ANA NZZ), (ANA ZNZ), (ANA ZZN), (NAA NZZ), (NAA ZNZ), (NAA ZZN),
 (NNZ ZAA), (NNZ AZA), (NNZ AAZ), (NZN ZAA), (NZN AZA), (NZN AAZ),
 (ZNN ZAA), (ZNN AZA), (ZNN AAZ), (NNA AZZ), (NNA ZAZ), (NNA ZZA),
 (NAN AZZ), (NAN ZAZ), (NAN ZZA), (ANN AZZ), (ANN ZAZ), (ANN ZZA),
 (NAZ NAZ), (NAZ AZN), (NAZ ANZ), (NAZ NZA), (NAZ ZNA), (NAZ ZAN),
 (NZA NAZ), (NZA AZN), (NZA ANZ), (NZA NZA), (NZA ZNA), (NZA ZAN),
 (ANZ NAZ), (ANZ AZN), (ANZ ANZ), (ANZ NZA), (ANZ ZNA), (ANZ ZAN),
 (AZN NAZ), (AZN AZN), (AZN ANZ), (AZN NZA), (AZN ZNA), (AZN ZAN),
 (ZNA NAZ), (ZNA AZN), (ZNA ANZ), (ZNA NZA), (ZNA ZNA), (ZNA ZAN),
 (ZAN NAZ), (ZAN AZN), (ZAN ANZ), (ZAN NZA), (ZAN ZNA), (ZAN ZAN),

Es gibt 90 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 90 multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(2 \text{ Asse} + 2 \text{ Zehner} + 2 \text{ passende Karten}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{1}{17} * \frac{6}{16} * \frac{5}{15} * 90 =$$

$$= \frac{64800}{27907200} = \frac{3}{1292} \approx 0,00232198$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 0,2322%.

Die letzte Möglichkeit, ein Gangl, das man sicher gewinnt, mit zwei Assen zu erhalten, liegt darin, einen Zehner in der einen zu den Assen passenden Farbe und drei weitere Karten, von denen keine ein Zehner ist, in der anderen zu den Assen passenden Farbe zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, als erste Karte ein Ass zu erhalten, beträgt $\frac{4}{20}$ und dass die zweite Karte ein Ass ist, hat eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{19}$. Die nächste Karte soll einer der beiden günstigen Zehner sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{18}$ beträgt. Die nächsten drei Karten sollen gleiche Farbe haben wie eine der Assen und keine Zehner sein, weshalb die Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{17}$, $\frac{2}{16}$ und $\frac{1}{15}$ betragen.

K...passende Karte A...Ass Z...Zehner

(KKK AAZ), (KKK AZA), (KKK ZAA), (KKA KZA), (KKA KAZ), (KKA ZKA),
 (KKA ZAK), (KKA AKZ), (KKA AZK), (KAK KZA), (KAK KAZ), (KAK ZKA),
 (KAK ZAK), (KAK AKZ), (KAK AZK), (AKK KZA), (AKK KAZ), (AKK ZKA),
 (AKK ZAK), (AKK AKZ), (AKK AZK), (KAA KKZ), (KAA KZK), (KAA ZKK),
 (AKA KKZ), (AKA KZK), (AKA ZKK), (AAK KKZ), (AAK KZK), (AAK ZKK),
 (KKZ KAA), (KKZ AKA), (KKZ AAK), (KZK KAA), (KZK AKA), (KZK AAK),
 (ZKK KAA), (ZKK AKA), (ZKK AAK), (KZA KKA), (KZA KAK), (KZA AKK),
 (KAZ KKA), (KAZ KAK), (KAZ AKK), (ZKA KKA), (ZKA KAK), (ZKA AKK),
 (ZAK KKA), (ZAK KAK), (ZAK AKK), (AKZ KKA), (AKZ KAK), (AKZ AKK),
 (AZK KKA), (AZK KAK), (AZK AKK), (AAZ KKK), (AZA KKK), (ZAA KKK)

Es gibt also 60 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 60 multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(2 \text{ Asse} + 1 \text{ Zehner} + 3 \text{ Gleiche}) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} * \frac{2}{18} * \frac{3}{17} * \frac{2}{16} * \frac{1}{15} * 60 = \frac{8640}{27907200} =$$

$$= \frac{1}{3230} \approx 0,000309598$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 0,03096%.

Die Wahrscheinlichkeit, zu den zwei Assen vier gleiche Karten zu bekommen, wird ausgenommen, da es sich dann nicht mehr um ein Gangl, sondern um ein Ringerl handeln würde. Darum ergibt sich für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Erhaltens eines sicheren Gangls mit genau zwei Assen folgendes:

$$P(\text{sicheres Gangl mit zwei Assen}) = \frac{3}{1292} + \frac{1}{3230} = \frac{17}{6460} \approx 0,00263158$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Dreierschnapsen ein sicheres Gangl mit nur zwei Assen zu erhalten, beträgt rund 0,2632%.

$$\begin{aligned} P(\text{sicheres Gangl beim Dreierschnapsen}) &= \frac{3}{6460} + \frac{31}{9690} + \frac{17}{6460} = \frac{31}{9690} + \frac{20}{6460} \\ &= \frac{31}{9690} + \frac{10}{3230} = \frac{31 + 30}{9690} = \frac{61}{9690} \approx 0,00629515 \end{aligned}$$

Da es sich analog zum Viererschnapsen mit weniger als zwei Assen um kein sicheres Gangl handeln kann, beträgt die Wahrscheinlichkeit insgesamt beim Dreierschnapsen ein sicheres Gangl zu erhalten, rund 0,6295%. Das ist etwas weniger als beim Viererschnapsen, aber durch die beiden verdeckten Karten, die man beim Dreierschnapsen zusätzlich bekommt, verbessern sich die Chancen, ein Gangl spielen und gewinnen zu können, noch.

5. Die anderen Spieler

Beim Schnapsen ist es immer relevant, welche Karten die anderen Spieler haben oder möglicherweise haben könnten. Darum ist es wichtig, dass man sich als erfolgreicher Spieler möglichst merkt, welche Karten bereits gespielt wurden und welche noch im Spiel sind, um abzuschätzen, ob ein Stich einem selbst gehören wird oder nicht. Was man weiß, verändert nämlich auch die Wahrscheinlichkeiten gewisser Ausgänge. Nach dem Austeilen hat man beim Dreierschnapsen sechs Karten in der Hand, von denen man ganz sicher sagen kann, dass, falls die Karten nicht gezinkt sind, keiner der anderen Spiele sie hat. Darum bleiben für

die anderen Spieler 14 beziehungsweise 15 Karten übrig, die sie möglicherweise haben könnten. Der Spieler allerdings, der sich zum Beispiel beim Dreierschnapsen die beiden verdeckten Karten ansehen darf, hat also eigentlich gegenüber den anderen beiden Spielern nicht nur deshalb einen Vorteil, weil er sich nun die besten sechs von den acht Karten aussuchen kann, sondern auch weil er mehr Informationen hat. Das ist vor allem beim Spielen eines Gangls hilfreich, worum es im nächsten Kapitel gehen wird.

5.1 Gangl und ihre möglichen Fänger

5.1a Dreierschnapsen

Die Wahrscheinlichkeit, mit der die anderen Spieler bestimmte Karten oder viel eher Kartenkombinationen haben, ist vor allem dann relevant, wenn man ein Gangl spielt. Beim Dreierschnapsen hat man wie gesagt acht Karten zur Verfügung, anhand derer man die Karten der anderen Mitspieler abschätzen kann. Dabei ist vor allem eines interessant: und zwar wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass einer der Mitspieler eine sogenannte Gabel hat. Eine Gabel hat man, wenn man zwei Karten derselben Farbe in Händen hält, von denen mindestens eine höher als ein Unter ist und von denen keine ein Ass ist. Zudem ist auch ein Unter in Kombination mit einem Ober keine Gabel. Wenn nun einer der Spieler ein Gangl spielt und ein Ass ausspielt, so kann der Spieler mit der Gabel auf diese die niedrigere Karte geben. Hat der Spieler, der das Gangl spielt, zu seinem Ass auch noch beispielsweise einen farblich passenden König, so macht der Spieler mit der Gabel mit seiner verbliebenen höheren Karte einen Stich und gewinnt. Gabeln können in den Kombinationen Zehner und König, Zehner und Ober, Zehner und Unter, König und Ober und König und Unter auftreten. Des Weiteren handelt es sich nicht um eine Gabel, sollte man noch zusätzlich das zugehörige Ass besitzen, da diese als Fänger selbst ausreicht. Außerdem darf man natürlich nicht noch zusätzlich die Karte in der Hand halten, die man mit der Gabel fangen könnte. Wenn man zum Beispiel König und Ober hat, darf man nicht auch noch den Unter derselben Farbe in der Hand halten, da es sich dann natürlich nicht um eine Gabel handelt.

Darum muss man sich als Spieler, wenn man ein Gangl spielt, genau überlegen, welche Karten man sich von den acht, wovon man sechs auswählen kann, behält. Eine Gabel muss es nämlich nicht unbedingt geben. Die Karten könnten ja auch zum Beispiel so verteilt sein, dass einer der anderen beiden Spieler den Zehner hat und der andere den Ober und den Unter in

der gleichen Farbe. In diesem Fall müsste der erste Spieler den Zehner, den man in diesem Fall „blank“ nennt, auf das Ass geben und der Spieler, der das Gangl spielt, kann seinen König ohne Probleme ausspielen, da ihn niemand mehr stechen kann.

Also wird als nächstes die Wahrscheinlichkeit einer Gabel berechnet, wenn man ein Ass und einen zugehörigen König bei einem Gangl in der Hand hat. In diesem Fall kann es nur die Zusammenstellung Zehner und Ober oder Zehner und Unter geben, damit es sich um eine Gabel handelt.

Darum ist es möglich, diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Überlegung, dass keine Gabel existiert, wenn einer der beiden anderen Spieler nur einen Zehner, aber weder Ober noch Unter in der Hand hat, zu berechnen. Die Gegenwahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist dann natürlich die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gabel existiert.

Die Berechnung funktioniert folgendermaßen: Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler den Zehner hat, liegt bei $\frac{1}{12}$, da man 8 Karten kennt. Alle weiteren Karten dürfen alle Karten außer dem Ober und Unter sein, haben also jeweils die Wahrscheinlichkeiten $\frac{9}{11}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{6}{8}$ und $\frac{5}{7}$. Es gibt für den Zehner sechs Möglichkeiten der Anordnung, weshalb man mit Sechs multiplizieren muss. So ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler den Zehner, aber weder Ober noch Unter hat, folgendes:

$$P(\text{hat Zehner, aber nicht Ober oder Unter}) = \frac{1}{12} * \frac{9}{11} * \frac{8}{10} * \frac{7}{9} * \frac{6}{8} * \frac{5}{7} * 6 = \frac{90720}{665280}$$

$$= \frac{3}{2 * 11} = \frac{3}{22} \approx 0,136364$$

Diese Wahrscheinlichkeit verdoppelt man nun, da entweder der erste oder der zweite Spieler diese Kartenkombination haben könnte.

$$\frac{3}{22} * 2 = \frac{3}{11} \approx 0,272728$$

Anschließend wird die Gegenwahrscheinlichkeit dieses Ereignisses berechnet.

$$P(\text{Gabel existiert/hat Ass + König}) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11} \approx 0,727273$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass also eine Gabel existiert, wenn man ein Ass und einen König hat, liegt also bei rund 72,73%.

Als nächstes ist interessant, ob es eine Gabel gibt, wenn der Spieler, der das Gangl spielt, ein Ass und einen Ober oder Unter in der Hand hat. Hier muss man sich nicht lange mit Berechnungen aufhalten, da es in diesem Fall zu 100% eine Gabel geben muss, da einer der Spieler auf jeden Fall eine der Kombinationen Zehner und Ober, Zehner und König oder König und Ober in der Hand haben muss. Also sollte man es sich gut überlegen, ob man auf so eine Kartenkombination spielen sollte. Zumindest wäre es ratsam, wenn man die Wahl hat, lieber auf Ass und König, als auf Ass und Ober oder Ass und Unter zu spielen.

Die dritte Möglichkeit der Kombinationen, bei denen man ein Gangl durch eine Gabel verlieren könnte, wäre es, drei Karten einer Farbe, von denen eine das Ass ist, ohne Zehner zu haben. Das wären die Kombinationen Ass, König und Ober, Ass, König und Unter oder Ass, Ober und Unter. Hier gibt es die Möglichkeit, dass einer der anderen Spieler den Zehner in Kombination mit König, Unter bzw. Ober in der Hand hält. Die Berechnung dafür, ob bei so einer Aufteilung eine Gabel existiert, erfolgt folgendermaßen: Es wird wie zuvor mit der Überlegung gearbeitet, dass keine Gabel existiert, wenn einer der beiden anderen Spieler nur den Zehner, aber nicht zusätzlich den König, Unter bzw. Ober in der Hand hat.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler den Zehner hat, beträgt $\frac{1}{12}$. Danach kann der Spieler jede Karte haben, außer Unter, Ober beziehungsweise König, wobei hierfür die Wahrscheinlichkeiten bei $\frac{10}{11}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$ und $\frac{6}{7}$ liegen, da es ja nur jeweils eine Karte gibt, die ungünstig wäre. Es ist egal, ob der Zehner die erste, zweite, dritte, vierte, fünfte oder sechste Karte ist, weshalb wegen der Reihenfolge mit Sechs multipliziert werden muss. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{hat Zehner} / \text{hat nicht Unter, Ober bzw. König}) = \frac{1}{12} * \frac{10}{11} * \frac{9}{10} * \frac{8}{9} * \frac{7}{8} * \frac{6}{7} * 6$$

$$= \frac{181440}{665280} = \frac{3}{11} \approx 0,272727$$

Diese Wahrscheinlichkeit muss nun verdoppelt werden, da es zwei Spieler gibt, die die Möglichkeit haben, diese Kartenkombination zu erhalten.

$$\frac{3}{11} * 2 = \frac{6}{11} \approx 0,545455$$

Und um nun die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, dass eine Gabel existiert, berechnet man nun noch die Gegenwahrscheinlichkeit.

$$P(\text{Gabel existiert} / \text{hat Ass, König und Ober bzw. Unter}) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} \approx 0,454546$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gabel existiert, liegt in diesem Fall also bei ca. 45,46%. Also stehen die Chancen, ein Gangl mit solch einer Kartenkombination und mit diesem möglichen Fänger zu gewinnen deutlich besser, als die Kombinationen zuvor.

5.1b Viererschnapsen

Nun ist als nächstes von Interesse, ob sich dies beim Viererschnapsen anders oder ähnlich verhält.

Beim Viererschnapsen kennt man nur fünf der Karten, wenn man ein Gangl ansagt. Wenn man hier nun ein Ass und einen König in der Hand hält, verhält sich die Wahrscheinlichkeit, dass einer der anderen Spieler eingeschlossen seinem eigenen Mitspieler, eine Gabel hat, folgendermaßen:

Man kann hier analog zum Dreierschnapsen vorgehen und die Überlegung anstellen, dass, wenn einer der Spieler nur den Zehner hat, aber weder Ober noch Unter, keine Gabel existiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte des einen Spielers um den Zehner

handelt, beträgt $\frac{1}{15}$. Die restlichen vier Karten sollen weder Ober noch Unter derselben Farbe wie der Zehner sein. Das bedeutet, die zweite Karte hat eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{12}{14}$ eine andere Karte zu sein, die dritte Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{11}{13}$, die vierte Karte hat eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{10}{12}$ und die fünfte Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{9}{11}$. Des Weiteren muss wegen der Reihenfolge mit fünf multipliziert werden, da der Zehner entweder die erste, zweite, dritte, vierte oder fünfte Karte sein kann. Außerdem gibt es drei Spieler, die nur den Zehner haben könnten. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{Gabel existiert nicht} / \text{hat Ass} + \text{König}) = \frac{1}{15} * \frac{12}{14} * \frac{11}{13} * \frac{10}{12} * \frac{9}{11} * 5 * 3 = \frac{178200}{360360}$$

$$= \frac{45}{91} \approx 0,494505$$

Die Gegenwahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gangl existiert. Daraus ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Gabel existiert} / \text{hat Ass} + \text{König}) = 1 - \frac{45}{91} = \frac{46}{91} \approx 0,505495$$

Das bedeutet mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 50,55% gibt es eine Gabel. Das heißt, beim Viererschnapsen stehen die Chancen besser, ein Gangl mit dieser Kartenkombination zu gewinnen als beim Dreierschnapsen. Man muss hier auch bedenken, dass man nicht allein spielt, sondern zu zweit. Wenn nun also der eigene Mitspieler diesen Fänger hat, gibt es auch die Möglichkeit, dass er die Gabel absichtlich zerreißt. Auf die Frage, wie die Gabel während des Spieles eingesetzt werden kann, wird später noch Bezug genommen.

Auch beim Viererschnapsen gibt es natürlich die Möglichkeit einer Gabel, wenn man die Kombination von Ass und Ober bzw. Unter in der Hand hält. Hierbei gibt es aber nicht hundertprozentig eine Gabel, da es die Möglichkeit gibt, dass Zehner, König und Ober bzw. Unter so unter den drei Mitspielern aufgeteilt wurden, dass jeder eine Karte davon bekommen

hat. Ist dies nicht der Fall, so existiert eine Gabel. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte des ersten Spielers eine der drei Karten bestimmter Farbe ist, beträgt $\frac{3}{15}$. Die folgenden drei Karten sollen Karten anderer Farbe sein, weshalb die Wahrscheinlichkeit für die zweite Karte, so eine Karte zu sein, bei $\frac{12}{14}$, für die dritte Karte bei $\frac{11}{13}$, für die vierte Karte bei $\frac{10}{12}$ und für die fünfte Karte bei $\frac{9}{11}$ liegt. Außerdem muss man mit Fünf multiplizieren, da die eine Karte bestimmter Farbe entweder die erste, zweite, dritte, vierte oder fünfte Karte sein könnte. Für den zweiten Spieler bleiben nun als erste Karte nur zwei Karten der bestimmten Farbe übrig, weshalb die Wahrscheinlichkeit, dass seine erste Karte diese ist, bei $\frac{2}{10}$ liegt. Die folgenden vier Karten sollen Karten anderer Farbe sein, wofür die Wahrscheinlichkeiten $\frac{7}{9}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{6}$ betragen. Auch hier muss wegen der Reihenfolge mit Fünf multipliziert werden. Der dritte Spieler hat automatisch alle Karten, die die anderen beiden Spieler nicht haben, also auch nur eine Karte der bestimmten Farbe und vier Karten anderer Farbe. Das ergibt für die Wahrscheinlichkeit folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} P(\text{jeder hat eine der Karten}) &= \frac{3}{15} * \frac{12}{14} * \frac{11}{13} * \frac{10}{12} * \frac{9}{11} * 5 * \frac{2}{10} * \frac{7}{9} * \frac{6}{8} * \frac{5}{7} * \frac{4}{6} * 5 = \\ &= \frac{1496880000}{10897286400} = \frac{25}{182} \approx 0,137363 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gabel existiert, ist nun die Gegenwahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

$$P(\text{Gabel existiert/hat Ass und Ober bzw. Unter}) = 1 - \frac{25}{182} = \frac{157}{182} \approx 0,862637$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gabel existiert, ist also mit 86,26% sehr hoch, jedoch immer noch geringer als beim Dreierschnapsen, weil es dort in diesem Fall zu 100% eine Gabel gibt.

Wie schon beim Dreierschnapsen gibt es auch beim Viererschnapsen als dritte Kartenkombination, bei der es eine Gabel geben könnte, ein Ass mit zwei weiteren Karten gleicher Farbe, von denen keine der Zehner ist. Wie schon zuvor wird die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Gabel gibt, mittels der Überlegung berechnet, dass, wenn einer der Spieler nur den Zehner, aber keine zugehörige Karte hat, keine Gabel existiert.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler als erste Karte den Zehner bestimmter Farbe erhält, beträgt $\frac{1}{15}$. Die übrigen vier Karten sollen Karten anderer Farbe sein, wofür die Wahrscheinlichkeit für die zweite Karte bei $\frac{13}{14}$, für die dritte Karte bei $\frac{12}{13}$, für die vierte Karte bei $\frac{11}{12}$ und für die fünfte Karte bei $\frac{10}{11}$ liegt. Außerdem muss wegen der Reihenfolge mit Fünf multipliziert werden. Des Weiteren gibt es drei verschiedene Spieler, die diese Kartenkombination haben könnten, weshalb mit drei multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{Gabel existiert nicht} / \text{hat Ass} + \text{zwei Karten}) = \frac{1}{15} * \frac{13}{14} * \frac{12}{13} * \frac{11}{12} * \frac{10}{11} * 5 * 3 = \\ = \frac{257400}{360360} = \frac{5}{7} \approx 0,714286$$

Die Gabel existiert also mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 71,43% nicht. Das Gegenereignis ist nun, dass eine Gabel existiert, und wird folgendermaßen berechnet:

$$P(\text{Gabel existiert} / \text{hat Ass} + \text{zwei Karten}) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \approx 0,285714$$

Ein Gangl zu spielen mit einem Ass und zwei weiteren dazu passenden niedrigeren Karten beim Viererschnapsen scheint durchaus das Risiko wert zu sein. Mit nur 28,57% Wahrscheinlichkeit eines möglichen Fängers ist es zumindest relativ sicher.

5.2 Der Mitspieler

Wie schon zuvor bei den Spielregeln erklärt, spielen beim Viererschnapsen immer jeweils zwei Spieler miteinander. So hat man bei einem Gangl nämlich den Vorteil, dass einer der anderen Spieler versuchen wird, keinen Stich zu machen und mögliche Fänger bereits vorzeitig spielen wird, sollte dies möglich sein. Zunächst wird hier von einem Gangl ausgegangen, bei dem der Spieler Ass und König hat und eine Gabel existieren könnte. Hierbei stellt die Gabel überhaupt kein Problem dar, sollte der Partner sie haben. Dieser kann nämlich zuerst die höhere Karte, in diesem Fall also den Zehner, auf das ausgespielte Ass geben, statt Unter oder Ober und somit den Fänger neutralisieren. Selbst wenn der Spieler drei Karten dieser Farbe haben sollte, wird dies nicht zum Problem werden, da Ober und Unter den König nicht mehr stechen könnten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass also der eigene Mitspieler die Gabel hat, die der Fänger ist, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Gabel kann nur durch Zehner und Ober oder Unter zusammengestellt werden, weshalb man auf jeden Fall den Zehner benötigt. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um den Zehner handelt, beträgt $\frac{1}{15}$. Die nächste Karte soll entweder Ober oder Unter sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{14}$ beträgt. Dann muss man zwei Fälle unterscheiden, nämlich den, dass man auch die übrige Karte der gleichen Farbe erhält, also Ober oder Unter, und den, dass man diese Karte nicht erhält. Im ersten Fall erhält man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{13}$ den Ober oder den Unter der Farbe der Gabel.

K...Beliebige Karte B...Ober oder Unter Z...Zehner

(ZBB KK), (BZB KK), (BBZ KK), (KBB ZK), (KBB KZ), (BKB ZK), (BKB KZ),
(BBK ZK), (BBK KZ), (KKB ZB), (KKB BZ), (KBK ZB), (KBK BZ), (BKK ZB),
(BKK BZ), (ZKK BB), (KZK BB), (KKZ BB), (ZBK KB), (ZBK BK), (ZKB KB),
(ZKB BK), (KZB KB), (KZB BK), (KBZ KB), (KBZ BK), (BZK KB), (BZK BK),
(BKZ KB), (BKZ BK)

Es gibt 30 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 30 multipliziert werden muss.

Beim zweiten Fall soll es sich bei den restlichen vier Karten nicht um die verbliebene Karte handeln, weshalb die Wahrscheinlichkeiten für diese bei $\frac{12}{13}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{10}{11}$ und $\frac{9}{10}$ liegen.

K...Beliebige Karte Z...Zehner B...Ober oder Unter

(KKK ZB), (KKK BZ), (KKB KZ), (KKB ZK), (KBK KZ), (KBK ZK), (BKK KZ), (BKK ZK), (BZK KK), (BKZ KK), (ZKB KK), (ZBK KK), (KBZ KK), (KZB KK), (KKZ KB), (KKZ BK), (KZK KB), (KZK BK), (ZKK KB), (ZKK BK)

Wegen der Reihenfolge muss mit 20 multipliziert werden. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} P(\text{Mitspieler hat Gabel/hat Ass} + \text{König}) &= \\ &= \frac{1}{15} * \frac{2}{14} * \frac{1}{13} * 30 + \frac{1}{15} * \frac{2}{14} * \frac{12}{13} * \frac{11}{12} * \frac{10}{11} * 20 = \\ &= \frac{2 * 3}{3 * 7 * 13} + \frac{1}{3} * \frac{1}{7} * \frac{4}{13} * 10 = \frac{46}{273} \approx 0,168498 \end{aligned}$$

Das bedeutet, mit einer Wahrscheinlichkeit von 16,85% erhält der eigene Mitspieler die Gabel, die der Fänger ist. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn man beim Viererschnapsen ein Gangl mit Ass und zugehörigem König spielt, einer der beiden Gegner die Gabel hat, die der Fänger ist, bei $\frac{46}{91} - \frac{46}{273} = \frac{92}{273}$ liegt, was rund 33,70% sind. Es dürfte sich also lohnen, ein Gangl mit solch einem Fänger beim Viererschnapsen zu riskieren.

Eine weitere Möglichkeit für ein Gangl ist, ein Ass, den zugehörigen König und Ober oder Unter zu haben. In diesem Fall verhält es sich ähnlich zu vorherigem Beispiel. Auch hier wird das Zerreißen der Gabel kein Problem darstellen, da man zuerst den Zehner geben kann und dann nur noch Ober oder Unter in der Hand hält. Da man beide Karten braucht, um eine Gabel zu haben, liegt die Wahrscheinlichkeit, als erste Karte einen Teil der Gabel zu erhalten, bei $\frac{2}{15}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der zweiten Karte ebenfalls um einen Teil der Gabel handelt beträgt $\frac{1}{14}$. Die restlichen vier Karten sind beliebig.

K...beliebige Karte T...Teil der Gabel

(KK KTT), (KK TKT), (KK TTK), (KT KTK), (KT KKT), (KT TKK), (TK KKT), (TK KTK), (TK TKK), (TTK KK)

Wegen der Reihenfolge muss mit 10 multipliziert werden. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{Mitspieler hat Gabel/hat Ass, König und Ober oder Unter}) = \frac{2}{15} * \frac{1}{14} * 10 = \frac{2}{21} \approx 0,0952381$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 9,524% hat also der eigene Mitspieler die Gabel, wenn das Gangl mit Ass, König und Ober oder Unter gespielt wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der anderen Spieler in solch einem Fall die Gabel hat, beträgt also $\frac{2}{7} - \frac{2}{21} = \frac{4}{21}$, was rund 19,05% sind.

Nun kommen wir zu dem Fall, bei dem es tatsächlich passieren könnte, dass der eigene Mitspieler denjenigen, der das Gangl angesagt hat, fängt. Wenn der Spieler mit einem Ass und einem Ober das Gangl spielt, so wäre es nämlich möglich, dass der Mitspieler Zehner und König hätte und somit eventuell, wenn er zuvor nicht die Möglichkeit hat, diese Gabel zu zerreißen, denjenigen, der das Gangl spielt, fängt. Er hätte dann keine Möglichkeit, das Gangl nicht zu fangen, wenn er zum Beispiel Karten vieler verschiedener Farben in der Hand hätte. In diesem Fall müsste er eventuell ständig Farbe geben, wegen dem Farbzwang und würde nicht einmal dazu kommen, die Gabel zu zerreißen.

Als Erstes wird aber nun die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der eigene Mitspieler die Gabel überhaupt hat. Da es sich, um problematisch zu sein, um die Gabel mit Zehner und König handeln muss, hat die erste Karte dafür, eine dieser beiden Karten zu sein, eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{15}$. Für die nächste Karte beträgt die Wahrscheinlichkeit, der zweite Teil der Gabel zu sein, $\frac{1}{14}$. Wegen den 10 Anordnungsmöglichkeiten analog zum vorherigen Beispiel, lässt sich die Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnen:

$$P(\text{hat Gabel/Ass + Ober}) = \frac{2}{15} * \frac{1}{14} * 10 = \frac{2}{21} \approx 0,0952381$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler die Gabel hat, die gefährlich werden könnte, beträgt rund 9,524%.

Ähnlich dazu könnte es auch sein, dass der Spieler, der das Gangl spielt, alle vier Asse und einen zu einem davon passenden Unter hat. In diesem Fall wäre jede Kombination der drei

anderen Karten eine Gabel, die für den Mitspieler problematisch werden könnte. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Mitspieler eine Gabel hat, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um eine Karte in der Farbe des Unters handelt, beträgt $\frac{3}{15}$. Die nächste Karte soll die gleiche Farbe haben, weshalb die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{2}{14}$ liegt. Nun muss man zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Fall soll keine weitere Karte derselben Farbe folgen, wofür die Wahrscheinlichkeiten $\frac{12}{13}$, $\frac{11}{12}$ und $\frac{10}{11}$ betragen. Es gibt analog zu einem vorherigen Beispiel 10 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 10 multipliziert werden muss. Im zweiten Fall handelt es sich bei einer der drei Karten um eine Karte gleicher Farbe. Für die dritte Karte beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine Karte dieser Farbe zu sein, $\frac{1}{13}$. Die restlichen Karten sind beliebig. Es gibt wieder 10 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 10 multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(\text{Mitspieler hat Gabel} / \text{hat Ass} + \text{Unter}) &= \\ &= \frac{3}{15} * \frac{2}{14} * \frac{12}{13} * \frac{11}{12} * \frac{10}{11} * 10 + \frac{3}{15} * \frac{2}{14} * \frac{1}{13} * 10 = \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{22}{91} \approx \\ &\approx 0,241758 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass also der Mitspieler die Gabel hat, wenn der Spieler, der das Gangl spielt, eine Asse und den farblich passenden Unter hat, beträgt rund 24,18%.

Der dritte Fall, wo eine Gabel problematisch werden könnte, wäre, wenn der Spieler von einer Farbe Ass, Ober und Unter hätte. In diesem Fall könnte eine Gabel existieren, die sich aus Zehner und König zusammensetzen würde. Auch in diesem Fall könnte der Mitspieler, sollte er die Gabel erhalten, möglicherweise keine Möglichkeit dazu bekommen, diese zu zerreißen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der eigene Mitspieler diese Gabel erhält, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um einen Teil der Gabel handelt, beträgt $\frac{2}{15}$. Die nächste Karte wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{14}$ der zweite Teil der Gabel sein. Die restlichen vier Karten sind beliebig. Wegen der Reihenfolge muss analog zu

einem früheren Beispiel mit 10 multipliziert werden. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{Mitspieler hat Gabel hat Ass, Ober und Unter}) = \frac{2}{15} * \frac{1}{14} * 10 = \frac{2}{21} \approx 0,0952381$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Gabel, die sich aus Zehner und König zusammensetzt, der eigene Mitspieler hat, beträgt also analog zu einem vorherigen Beispiel rund 9,52%.

Nun muss allerdings genauer definiert werden, was derjenige, der das Gangl spielt, in der Hand hat. Da viele verschiedene Farben, wie bereits erwähnt, ungünstig sein könnten, wird im ersten Fall davon ausgegangen, dass der Spieler alle vier Asse und einen Ober zu einer der Asse hat.

Die Wahrscheinlichkeit, dass nun der Mitspieler die Gabel hat, die er nicht so leicht loswerden könnte, beträgt also 9,524%. Nun wäre der einzige Fall, bei dem er keine Chance hätte, die Gabel los zu werden, wenn er zusätzlich Karten jeder Farbe hätte. In diesem Fall müsste er nämlich jedes Mal aufgrund des Farbzwanges Farbe geben und könnte auch auf das Ass, in dessen Farbe er die Gabel hat, nur den Zehner oder den König geben. Beide Karten wären aber dann höher als der Ober, weswegen er somit unabwendbar einen Stich machen würde.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler genau solche Karten hat, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um den ersten Teil der Gabel handelt beträgt $\frac{2}{15}$ und dafür, dass es sich bei der zweiten Karte ebenfalls um einen Teil der Gabel handelt bei $\frac{1}{14}$. Die nächste Karte soll eine andere Farbe haben, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{13}$ beträgt. Die vierte Karte soll keine der Farben haben, die die vorherigen Karten haben, weshalb ihre Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{12}$ beträgt. Die fünfte Karte soll die Farbe haben, von der es noch keine Karten gibt, wofür die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{4}{11}$ liegt.

A...Teil der Gabel B...Karte zweiter Farbe C...Karte dritter Farbe D...Karte vierter Farbe

(AAB CD) für die ersten drei 3, für die anderen zwei 2, also $3 \times 2 = 6$

(ABC AD) für die ersten drei 6, für die anderen zwei 2, also $6 \times 2 = 12$

(ABD AC) für die ersten drei 6, für die anderen zwei 2, also $6 \times 2 = 12$

(AAC BD) für die ersten drei 3, für die anderen zwei 2, also $3 \times 2 = 6$

(AAD BC) für die ersten drei 3, für die anderen zwei 2, also $3 \times 2 = 6$

(ABD AC) für die ersten drei 6, für die anderen zwei 2, also $6 \times 2 = 12$

(BCD AA) für die ersten drei 6, für die anderen zwei 1, also $6 \times 1 = 6$

$4 * 6 + 3 * 12 = 60$ Möglichkeiten

Es gibt also insgesamt 60 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 60 multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{vier Farben} + \text{Gabel}) = \frac{2}{15} * \frac{1}{14} * \frac{12}{13} * \frac{8}{12} * \frac{4}{11} * 60 = \frac{128}{1001} \approx 0,127872$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 12,79% sind die Karten für denjenigen, der das Gangl angesagt hat, wenn er vier Asse hat, so ungünstig aufgeteilt, dass sein eigener Mitspieler ihn fangen muss.

Im nächsten Fall hat der Spieler, der das Gangl spielt, vier Asse und einen Unter. Hierbei ist nun wieder jede Kombination der drei Karten in der Farbe des Unters eine Gabel, die man schwer los wird, da jeder der drei Karten höher ist als der Unter. Analog zu vorherigem Fall hat der Mitspieler dann keine Möglichkeit, die Gabel zu zerreißen, wenn er zusätzlich zu der Gabel noch von jeder Farbe der blanken Asse eine Karte hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um eine Karte in der Farbe des Unters handelt, beträgt $\frac{3}{15}$. Für die nächste Karte dieselbe Farbe zu haben, beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{14}$. Die dritte Karte soll eine andere Farbe haben, weshalb ihre Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{13}$ beträgt. Bei der vierten Karte soll es sich um eine Karte einer anderen

Farbe als die ersten drei Karten handeln, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{12}$ beträgt. Die fünfte Karte soll die Farbe haben, von der man bisher keine Karte hat, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{11}$ beträgt. Analog zu vorherigem Beispiel gibt es 60 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 60 multipliziert werden muss. Es ergibt sich also folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Mitspieler hat Gabel/hat Ass + Unter}) = \frac{3}{15} * \frac{2}{14} * \frac{12}{13} * \frac{8}{12} * \frac{4}{11} * 60 = \frac{384}{1001} \approx 0,383616$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn der Spieler, der das Gangl spielt, vier Asse und einen Unter hat, sein Mitspieler die Gabel in der Hand hält, beträgt rund 38,36%.

Wenn der Spieler, der das Gangl angesagt hat, nur drei Asse, einen Zehner, der zu einem der Asse passt und einen Ober in einer anderen Farbe passend zu einem der Asse hat, so gibt es ebenfalls die Möglichkeit, dass die Karten so aufgeteilt sind, dass der Mitspieler es nicht verhindern kann, das Gangl zu fangen. Dafür müsste er eine Karte in der Farbe des blanken Asses haben, zwei Karten der Farbe des Zehners und die Gabel in Form von Zehner und König.

Die erste Karte hat eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{15}$, dass es sich um einen Teil der Gabel handelt. Die Wahrscheinlichkeit für die nächste Karte der andere Teil der Gabel zu sein, beträgt $\frac{1}{14}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der dritten Karte um eine Karte der Farbe des blanken Asses handelt, beträgt $\frac{4}{13}$. Die nächsten beiden Karten sollen Karten gleicher Farbe in der Farbe des Zehners sein, wofür die Wahrscheinlichkeiten bei $\frac{3}{12}$ und $\frac{2}{11}$ liegen.

Z...Karte der Farbe des Zehners T...Teil der Gabel A...Karte der Farbe des blanken Asses

(ATT ZZ), (TAT ZZ), (TTA ZZ), (ZTT AZ), (ZTT ZA), (TZT AZ), (TZT ZA),
 (TTZ AZ), (TTZ ZA), (ZZT AT), (ZZT TA), (ZTZ AT), (ZTZ TA), (TZZ AT),
 (TZZ TA), (AZZ TT), (ZAZ TT), (ZZA TT), (ATZ ZT), (ATZ TZ), (AZT ZT),
 (AZT TZ), (ZAT ZT), (ZAT TZ), (ZTA ZT), (ZTA TZ), (TAZ ZT), (TAZ TZ),
 (TZA ZT), (TZA TZ)

Das bedeutet, es gibt 30 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 30 multipliziert werden muss. Insgesamt ergibt das folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Mitspieler fängt}) = \frac{2}{15} * \frac{1}{14} * \frac{4}{13} * \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * 30 = \frac{4}{1001} \approx 0,00399600$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass die Karten so aufgeteilt sind, dass der Mitspieler denjenigen, der das Gangl spielt, fangen muss, beträgt rund 0,3996%.

Der Spieler, der das Gangl angesagt hat, könnte auch drei Assen, einen zu einer der Assen farblich passenden Zehner und einen Unter in der Farbe einer der anderen Assen haben. In diesem Fall wäre jede Kombination der drei Karten der Farbe des Unters eine Gabel, die für den Mitspieler problematisch wäre. Der Mitspieler würde in diesem Fall keine Möglichkeit haben, die Gabel zu zerreißen, wenn er zusätzlich zu dieser noch eine Karte in der Farbe des blanken Asses und zwei Karten in der Farbe des Zehners hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Für die erste Karte, eine der drei Karten in der Farbe des Unters zu sein, beträgt $\frac{3}{15}$ und für die zweite Karte, ebenfalls diese Farbe zu haben, $\frac{2}{14}$. Die nächste Karte soll die Farbe des blanken Asses haben, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{13}$ beträgt. Die restlichen beiden Karten sollen Karten der gleichen Farbe sein, die auch der Zehner hat, wofür die Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{12}$ und $\frac{2}{11}$ betragen. Es gibt analog zu vorherigem Beispiel 30 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 30 multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{Mitspieler fängt}) = \frac{3}{15} * \frac{2}{14} * \frac{4}{13} * \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * 30 = \frac{12}{1001} \approx 0,0119880$$

Das bedeutet, dass, wenn der Spieler, der das Gangl angesagt hat, drei Assen, einen farblich zu einer der Assen passenden Zehner und einen Unter anderer Farbe, der ebenfalls farblich zu einer der drei Assen passt, sein Mitspieler diesen fangen muss, beträgt 1,20%.

Bei weniger als drei Assen kann es nicht passieren, dass der Mitspieler des Spielers, der das Gangl angesagt hat, keine Möglichkeit dazu hat, die Gabel zu zerreißen, da er dazu von einer Farbe drei Karten haben müsste. Das würde nämlich bedeuten, dass der Mitspieler mindestens einmal keine Farbe geben muss, da er nicht ebenfalls drei Karten der Farbe haben kann.

6. Soll man überhaupt ein Gangl spielen?

Das Interessanteste beim Dreierschnapsen ist immer, ein Gangl zu spielen, da man hier die beiden Karten ansehen darf, die zu Beginn verdeckt sind. Die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass diese beiden Karten die bereits erhaltenen Karten so verbessern, dass man damit ein Gangl spielen und vielleicht sogar gewinnen kann, wird als nächstes behandelt.

Dabei wird mit dem trivialsten begonnen und zwar mit der Frage, wie wahrscheinlich es ist, dass es sich bei einer der beiden Karten oder gar bei zweien um Asse handelt.

Man kenne nur die sechs Karten, die man in der Hand hat, also hat das Ereignis, ein Ass zu bekommen, je nachdem, wie viele Asse man bereits in der Hand hat, eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{14}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{3}{14}$ oder $\frac{4}{14}$. Je mehr Asse man bereits in der Hand hat, desto unwahrscheinlicher ist logischerweise der Erhalt eines weiteren. Die Wahrscheinlichkeiten sehen also, unter Berücksichtigung dessen, dass die zweite Karte, wenn man nur ein Ass erhalten soll, kein Ass ist, folgendermaßen aus:

$$P(1 \text{ Ass} / \text{hat keine}) = \frac{4}{14} * \frac{10}{13} * 2 = \frac{80}{182} = \frac{40}{91} \approx 0,439560$$

$$P(1 \text{ Ass} / \text{hat eine}) = \frac{3}{14} * \frac{11}{13} * 2 = \frac{66}{182} = \frac{33}{91} \approx 0,362637$$

$$P(1 \text{ Ass} / \text{hat zwei}) = \frac{2}{14} * \frac{12}{13} * 2 = \frac{48}{182} = \frac{24}{91} \approx 0,263736$$

$$P(1 \text{ Ass} / \text{hat drei}) = \frac{1}{14} * 2 = \frac{1}{7} \approx 0,142857$$

So ähnlich funktioniert nun auch die Berechnung, wie wahrscheinlich es ist, dass es sich um zwei Asse handelt, wenn man bereits kein, ein oder zwei Asse hat und sieht folgendermaßen aus:

$$P(2 \text{ Asse} / \text{hat keine}) = \frac{4}{14} * \frac{3}{13} = \frac{12}{182} = \frac{6}{91} \approx 0,0659341$$

$$P(2 \text{ Asse} / \text{hat eine}) = \frac{3}{14} * \frac{2}{13} = \frac{6}{182} = \frac{3}{91} \approx 0,0329670$$

$$P(2 \text{ Asse} / \text{hat zwei}) = \frac{2}{14} * \frac{1}{13} = \frac{2}{182} = \frac{1}{91} \approx 0,0109890$$

Also liegt die Wahrscheinlichkeit, dass man ein Ass erhält, wenn man nur niedrige Karten und kein Ass hat, bei ziemlich hohen 43,96%. Auch die Wahrscheinlichkeit zu einem bereits erhaltenen Ass ein weiteres zu bekommen, ist mit 36,26% relativ hoch. Zu zwei Assen, die man bereits in der Hand hält, noch zwei weitere Asse zu bekommen ist hingegen mit gerade einmal 1,10% sehr unwahrscheinlich.

Für verschiedene Karten in der Hand gibt es aber auch verschiedene günstige Karten, die noch verdeckt liegen könnten. So ist zum Beispiel, wenn man ein Ass und einen zugehörigen Zehner hat, jede weitere der drei Karten dieser Farbe günstig. Je mehr Möglichkeiten es für den Spieler gibt, günstige Karten zu erhalten, desto wahrscheinlicher ist es natürlich, dass er am Ende ein Gangl erhält, bei dem es keinen Fänger gibt. In Folgendem werden nun verschiedene Fälle von Kartenkombinationen und ihre jeweiligen Verbesserungsmöglichkeiten behandelt.

6.1 Zweimal drei Karten gleicher Farbe

Im ersten Fall gehen wir davon aus, dass ein Spieler zwei Asse und jeweils die zugehörigen Unter und Ober hat. In diesem Fall könnte es zwei Gabeln geben. Die einzige Möglichkeit für den Spieler, solch ein Gangl sicher zu gewinnen, läge nun darin, dass es sich bei den verdeckten Karten um jeweils eine der gewünschten Farbe handelt. Man bräuchte also in diesem Fall zusätzlich je eine Karte in der einen und eine in der anderen Farbe oder zwei Karten derselben Farbe, die man bereits hat. Nicht einmal der Erhalt eines zusätzlichen Asses könnte solch ein Gangl retten. Wenn man Pech hat, existieren beide Gabeln und man kann nach dem zweiten Stich mit dem Ass nichts mehr ausspielen, das nicht gestochen werden würde. Die Wahrscheinlichkeit, dass man Karten erhält, die zu einem sicher gewonnenen Gangl führen, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, eine Karte der einen passenden Farbe zu erhalten, liegt bei $\frac{2}{14}$ und die Wahrscheinlichkeit, als nächste Karte eine der zweiten passenden Farbe zu erhalten dann bei $\frac{2}{13}$. Es gibt zwei mögliche Reihenfolgen, also wird mit Zwei multipliziert. Die zweite Möglichkeit ist, dass beide Karten dieselbe passende Farbe haben, wofür die erste Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{14}$ und die nächste Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{13}$ hat. Es gibt zwei mögliche Farben, weshalb mit Zwei multipliziert werden muss.

P(bekommt günstige Karten/hat je 3 Karten einer Farbe mit Assen)

$$= \frac{2}{14} * \frac{2}{13} * 2 + \frac{2}{14} * \frac{1}{13} * 2 = \frac{8}{182} + \frac{4}{182} = \frac{12}{182} = \frac{6}{91} \approx 0,0659341$$

Bei einer Wahrscheinlichkeit von lediglich 6,593%, dass das Gangl sicher gewonnen wird, sollte man es sich zweimal überlegen, es zu riskieren.

Es besteht aber natürlich auch die Möglichkeit, dass sich die Ausgangssituation zumindest verbessert und man zumindest solche Karten bekommt, dass man nur mehr einen Fänger hat anstatt gleich zwei.

Dafür würden in diesem Fall zwei Asse reichen, da man somit zwei zusammengehörige König, Ober bzw. Unter weglegen könnte und man damit nur mehr einen potentiellen Fänger hat. Auch der Erhalt nur einer weiteren Karte in einer der Farben, die man in der Hand hält, würde dazu führen, dass man nur mehr einen Fänger hat. Die dritte Möglichkeit wäre, ein Ass und den farblich passenden Zehner zu erhalten, weil man somit Ober und Unter einer Farbe ersetzen könnte. Die Wahrscheinlichkeit, nach dem Erhalt der zwei weiteren Karten nur mehr einen potentiellen Fänger zu haben, lässt sich also folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, wenn man bereits zwei Asse in der Hand hält, zwei weitere zu erhalten, liegt bei $\frac{2}{14} * \frac{1}{13}$. Die Wahrscheinlichkeit, eine Karte in einer der Farben zu erhalten, die man in der Hand hält, liegt bei $\frac{4}{14}$. Danach liegt die Wahrscheinlichkeit für die nächste Karte bei $\frac{10}{13}$, da diese eine der beiden verbliebenen Farben haben soll. Für die beiden möglichen Reihenfolgen wird mit Zwei multipliziert. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einer der verdeckten Karten um ein Ass handelt, beträgt $\frac{2}{14}$ und dafür, dass es sich bei der

anderen Karte um den Zehner gleicher Farbe handelt, liegt die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{1}{13}$. Wegen der Reihenfolge muss mit Zwei multipliziert werden. Daraus ergibt sich Folgendes:

$$P(\text{nur ein Fänger, zweimal 3 Gleiche mit Ass}) = \frac{2}{14} * \frac{1}{13} + \frac{4}{14} * \frac{10}{13} * 2 + \frac{2}{14} * \frac{1}{13} * 2 = \\ = \frac{86}{182} = \frac{43}{91} \approx 0,472527$$

Darum liegt die Wahrscheinlichkeit, insgesamt am Ende weniger als zwei Fänger zu haben, bei $\frac{49}{91}$, was etwa 53,85% sind, wobei der Fänger, also die Gabel, mit einer Wahrscheinlichkeit von 54,55% gar nicht existiert. Somit sind die Gewinnchancen in diesem Fall nicht schlecht.

Es bleibt natürlich immer noch die 46,15%ige Gefahr, am Ende ein Gangl mit zwei potentiellen Fängern spielen zu müssen. Wie würde man solch ein Gangl nun spielen? Wenn man zwei Asses hat und jeweils die zugehörigen Ober und Unter kann es folgendermaßen ablaufen. Für den ersten Stich wird man eine der beiden Asses wählen. Da es sich um Asses mit der gleichen Wahrscheinlichkeit einer möglichen Gabel handelt, ist es egal, mit welcher man beginnt. Nun wird man beim Ausspielen des Asses mit 54,55%iger Wahrscheinlichkeit beide Karten der jeweiligen Farbe von den anderen Spielern erhalten, wenn also die Gabel nicht existiert und die beiden Karten somit aufgeteilt sind. Nun wird man die restlichen Karten der Farbe ausspielen und hoffen, dass die anderen Mitspieler mehr als einen möglichen Fänger in der Hand haben, damit diese die zweite Gabel, sollte sie trotz einer Wahrscheinlichkeit von 45,45% existieren, zerreißen. Das bedeutet, dass eine oder beide Karten einer Gabel, die möglicherweise ein Fänger sein könnte, zu Gunsten eines anderen Fängers in Form eines Asses oder einer anderen Gabel auf die ausgespielte Karte gegeben wird bzw. werden. Das kann in dieser besonderen Kartenkombination leicht der Fall sein, da sich nun alle Karten der Farbe beim Spieler, der das Gangl spielt, befinden, nun für die anderen Spieler keinen Farbzwang mangels der ausgespielten Farbe mehr gibt. Also kann es nun passieren, dass sich einer der Spieler die falschen Karten behält, was dieser aber nicht wissen kann. Das Spiel ist nach dem vierten Stich entschieden, wenn der Spieler, der das Gangl spielt, sein zweites Ass spielt. Ist die Gabel nicht existent oder bereits zerrissen, so erhält er nun die restlichen beiden Karten der Farbe. Ist dies nicht der Fall, so wird seine nächste Karte gestochen und er hat

verloren. Das Spielen von Gabeln wird anhand eines späteren Beispiels noch genauer ausgeführt.

6.2 Vier Karten gleicher Farbe mit Ass und Zehner

Beim nächsten Fall hat man vier Karten gleicher Farbe in der Hand, von denen aber keine das Ass ist, und zusätzlich noch ein Ass und ihren Zehner. In diesem Fall würde der Erhalt des Asses dieser bestimmten Farbe, in der man die vier Karten hat, für den Spieler ein Ringerl ergeben. Das bedeutet aber auch, dass der Spieler, sollte er dieses Ass nicht erhalten, zu viele Fänger hat, um das Gangl noch gewinnen zu können. Es könnte allerdings verbessert werden, durch den Erhalt von zwei weiteren Assen anderer Farbe oder zwei Karten gleicher Farbe, wie das Ass und der Zehner.

Die Wahrscheinlichkeit, genau dieses eine Ass zu erhalten, welches benötigt werden würde, um das Gangl bzw. in diesem Fall das Ringerl sicher zu gewinnen, lässt sich folgendermaßen berechnen: Die Wahrscheinlichkeit, dass man dieses bestimmte Ass erhält, beträgt $\frac{1}{20}$. Die nächste Karte ist beliebig. Außerdem gibt es zwei Karten, die möglicherweise das Ass sein könnten, weshalb man also mit Zwei multiplizieren muss. Das ergibt folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{bestimmtes Ass}) = \frac{1}{14} * 2 = \frac{1}{7} \approx 0,142857$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Ass bestimmter Farbe zu erhalten, liegt also bei rund 14,29%. In einem von sieben Fällen wird man also dieses Gangl, wenn man sich traut, es zu spielen, mit Hilfe der zusätzlichen zwei Karten sicher gewinnen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man Karten bekommt, die das Gangl zumindest spielbar machen würden, sieht folgendermaßen aus:

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Karten Asse sind, wenn man bereits ein Ass hat, beträgt, wie schon am Beginn dieses Kapitels berechnet, $\frac{3}{91}$. Die zweite Möglichkeit der Verbesserung wäre, wenn zu dem Ass und dem Zehner gleicher Farbe noch zwei weitere

Karten derselben Farbe kommen würden. Für die erste Karte liegt hierfür die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{3}{14}$ und für die zweite Karte bei $\frac{2}{13}$. Das ergibt folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(2 \text{ Karten gleicher Farbe passend zu Ass und Zehner}) = \frac{3}{14} * \frac{2}{13} = \frac{6}{182} = \frac{3}{91} \approx 0,0329670$$

Die Wahrscheinlichkeit, zwei Karten gleicher Farbe passend zu dem Ass und dem Zehner zu erhalten, liegt also bei rund 3,297%. Das ergibt insgesamt eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{91}$, was rund 6,593% sind, dass man nach dem Erhalt der Karten ein Gangl mit nur einem Fänger, das man aber gewinnen könnte, in der Hand hält. Das bedeutet aber auch, wenn man noch den sicheren Gewinn mit einberechnet, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{72}{91}$, was etwa 79,12% ausmacht, nach dem Erhalt der zwei Karten immer noch ein Gangl in der Hand hält, das man nur schwer gewinnen kann. Wenn man also auf Sicherheit spielen möchte, so sollte man lieber von vorn herein kein Gangl ansagen. Wenn man allerdings bedenkt, dass ein Ringerl 18 Punkte wert ist, könnte es sich durchaus auszahlen, es zu riskieren.

6.3 Vier Asse und zwei Unter

6.3.1 Sicheres Gangl

Als nächstes wird der Fall behandeln, dass man alle vier Asse in der Hand hält, aber die beiden restlichen Karten zwei Unter sind. Die Unter müssen natürlich logischerweise zu den Assen passen. Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, dass solche Karten zu einem Gangl werden, das man sicher gewinnt.

Man könnte erstens einen Zehner in der Farbe erhalten, die auch einer der Unter hat, da man somit drei Karten einer Farbe in der Kombination Ass, Zehner und Unter hätte, wofür es keine Gabel geben kann und der zweite Unter durch den Zehner ersetzt wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Es gibt zwei Zehner, die in diesem Fall günstig wären, weshalb die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte einer dieser zwei Zehner ist, bei $\frac{2}{14}$ liegt. Die zweite Karte soll kein weiterer Zehner sein, weshalb die Wahrscheinlichkeit $\frac{10}{13}$ beträgt. Es gibt zwei Karten, also auch zwei Möglichkeiten, einen der Zehner zu erhalten, weshalb mit Zwei multipliziert werden muss. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{Zehner bestimmter Farbe}) = \frac{2}{14} * \frac{10}{13} * 2 = \frac{40}{182} = \frac{20}{91} \approx 0,219780$$

Die Wahrscheinlichkeit liegt also bei rund 21,98%.

Die zweite Möglichkeit, die Karten zu einem Gangl zu machen, das man sicher gewinnt, wäre, dass die beiden verdeckten Karten zwei beliebige Zehner wären. Mit diesen könnte man die beiden Unter austauschen, weshalb es keinen Fänger mehr geben würde. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um einen beliebigen Zehner handelt, liegt bei $\frac{4}{14}$ und für die zweite Karte bei $\frac{3}{13}$. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(2 \text{ Zehner beliebiger Farbe}) = \frac{4}{14} * \frac{3}{13} = \frac{12}{182} = \frac{6}{91} \approx 0,0659341$$

Das ergibt also eine Wahrscheinlichkeit von rund 6,593%.

Die dritte Möglichkeit, Karten dieser Art zu einem Gangl zu machen, das man sicher gewinnt, liegt darin, dass die zwei verdeckten Karten König und Ober in der Farbe, die auch einer der beiden Unter hat, sind. Somit hätte man nämlich vier Karten gleicher Farbe, wodurch keine Gabel existieren kann, da nur eine Karte dieser Farbe übrig bleiben würde. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte nun ein Ober oder König in der ersten oder der zweiten Farbe ist, liegt bei $\frac{4}{14}$. Die nächste Karte darf nur noch die Farbe haben, die auch die erste Karte hatte und sie kann nur noch entweder der Ober oder der König dieser Farbe sein, weshalb die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{1}{13}$ liegt. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{Ober und König in der Farbe eines Unters}) = \frac{4}{14} * \frac{1}{13} = \frac{4}{182} = \frac{2}{91} \approx 0,0219780$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 2,198%.

Die vierte Möglichkeit, die Karten durch die beiden verdeckten Karten zu einem Gangl zu machen, das man sicher gewinnt, wäre, dass es sich bei diesen um Zehner und König, Zehner und Ober oder Zehner und Unter in einer der Farben, die die beiden Unter, die der Spieler, der das Gangl spielt, in der Hand hat, nicht haben, handelt. Damit könnte man nämlich dann die beiden Unter austauschen und hätte, da man nun drei Karten einer Farbe, von denen zwei Ass und Zehner sind, keinen Fänger mehr. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um einen der beiden günstigen Zehner handelt, liegt bei $\frac{2}{14}$. Für die zweite Karte gibt es nur mehr drei mögliche Karten, die zu der ersten gezogenen Karte farblich passen könnten, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{13}$ ergibt. Da es zwei mögliche Reihenfolgen gibt, muss noch mit Zwei multipliziert werden. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{Zehner} + \text{König, Ober oder Unter}) = \frac{2}{14} * \frac{3}{13} * 2 = \frac{12}{182} = \frac{6}{91} \approx 0,0659341$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall liegt bei rund 6,593%.

Insgesamt ergibt das eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{34}{91}$, was etwa 37,36% sind, dass die beiden verdeckten Karten die ursprünglichen Karten zu einem Gangl machen, das man sicher gewinnt.

Diese Wahrscheinlichkeiten wurde alternativ mit Hilfe des Binomialkoeffizienten und den verschiedenen Möglichkeiten ausgerechnet. Es gibt 14 über 2 Möglichkeiten, zwei Karten aus 14 möglichen Karten auszuwählen. Das sind 91 mögliche Kombinationen. Im ersten Fall gibt es 20 verschiedene Kartenkombinationen, was bedeutet, die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{20}{91}$. Im zweiten Fall gibt es nur 6 mögliche Kartenkombinationen ($Za+Zb$, $Za+Zc$, $Za+Zd$, $Zb+Zc$,

Zb+Zd, Zc+Zd), weshalb die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{91}$ beträgt. Im dritten Fall gibt es zwei mögliche Kartenkombinationen, nämlich Ka+Oa und Kb+Ob, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{91}$ ergibt. Im vierten Fall gibt es ebenfalls sechs mögliche Kartenkombinationen (Zc+Kc, Zc+Oc, Zc+Uc, Zd+Kd, Zd+Od, Zd+Ud), womit die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{6}{91}$ liegt.

6.3.2 Das Gangl mit Fänger

Die Möglichkeit ein Gangl in der ursprünglichen Form mit vier Assen und zwei Untern zu gewinnen, ohne dieses zu verbessern, (d.h. kein Austauschen möglich bzw. man spielt es mit diesen Karten) besteht natürlich. Der einzige Fall, in dem sich die Chancen durch die zwei verdeckten Karten allerdings nicht zumindest verbessern, liegt darin, dass diese zwei Karten entweder beide Ober, beide Unter oder Ober und Unter unterschiedlicher Farben sind, die nicht die Farbe der Unter haben, die man bereits in der Hand hält.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden verdeckten Karten Ober oder Unter unterschiedlicher Farben sind, lässt sich folgendermaßen berechnen: Die erste Karte soll entweder Ober oder Unter der einen Farbe sein, hat also eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{14}$. Die zweite Karte soll entweder Ober oder Unter der anderen Farbe sein, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{13}$ bedeutet. Wegen der Reihenfolge muss noch mit Zwei multipliziert werden. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{Ober oder Unter verschiedener Farben}) = \frac{2}{14} * \frac{2}{13} * 2 = \frac{8}{182} = \frac{4}{91} \approx 0,0439560$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die ursprünglichen Karten durch die zwei unbekannten Karten nicht wenigstens verbessern, beträgt also rund 4,396%. Es müssen nun für das Gangl mit diesen Karten zwei Fänger in Form von Gabeln existieren. Zusätzlich existieren aber auch noch zwei potentielle Fänger für die beiden Karten, die man weggelegt hat. Für die Aufteilung der potentiellen Gabeln auf die Spieler, die das Gangl nicht angesagt haben, ergeben sich nun vier verschiedene Möglichkeiten.

1. Es könnte nun ein Spieler drei potentielle Gabeln, von denen einer ein Fänger ist, haben, während der andere Spieler nur eine potentielle Gabel hat, die ein Fänger ist.
2. Es wäre aber auch möglich, dass ein Spieler drei potentielle Gabeln hat, von denen zwei Fänger sind, während der andere Spieler nur eine Gabel hat, die kein Fänger ist.
3. Der nächste Fall wäre, dass ein Spieler zwei potentielle Gabeln hat, von denen beide Fänger sind und der andere Spieler zwei potentielle Gabeln hat, die keine Fänger sind.
4. Der letzte Fall wäre, dass jeder der beiden Spieler je zwei potentielle Gabeln hat, von denen je eine ein Fänger ist.

Zuerst wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass die Gabeln wie im zweiten Fall aufgeteilt sind. Die Gabeln setzen sich zusammen aus Zehner, König oder Ober, wobei die Kombination egal ist. Für die erste Karte liegt also die Wahrscheinlichkeit, eine dieser drei Karten in einer der beiden Farben der Unter zu sein, bei $\frac{6}{12}$. Für die nächste Karte liegt die Wahrscheinlichkeit, eine der beiden verbliebenen zu der vorherigen Karte passenden Karte zu sein, bei $\frac{2}{11}$. Für die nächste Karte, die der erste Teil der zweiten Gabel ist, gibt es wieder drei Möglichkeiten, nämlich Zehner, König oder Ober der anderen Farbe der Unter zu sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{10}$ beträgt und für die vierte Karte farblich zur vorherigen Karte zu passen liegt die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{2}{9}$. Für die letzte Gabel ergeben sich wieder Wahrscheinlichkeiten von $\frac{3}{8}$ und $\frac{2}{7}$. Es gibt analog zu einem früheren Beispiel 90 mögliche Reihenfolgen, in denen man diese Karten erhalten kann. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{drei Gabeln, von denen zwei Fänger sind}) = \frac{6}{12} * \frac{2}{11} * \frac{3}{10} * \frac{2}{9} * \frac{3}{8} * \frac{2}{7} * 90 = \frac{9}{154} \approx \\ \approx 0,0584416$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,844% hat also einer der beiden Spieler drei potenzielle Gabeln, von denen zwei Fänger sind. Diese Wahrscheinlichkeit muss noch verdoppelt werden, da es zwei Spieler gibt, die diese Kartenkombination haben könnten, was insgesamt 11,69% ausmacht.

Als nächstes wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass die Gabeln wie im vierten Fall aufgeteilt sind. Dafür muss man sich lediglich die Wahrscheinlichkeit für einen der beiden Spieler, genau zwei Gabeln zu bekommen, ausrechnen, da der andere Spieler dann natürlich

zwangsläufig die anderen beiden Gabeln, da diese existieren müssen, erhält. Alle Gabeln setzen sich aus zwei Karten gleicher Farbe zusammen. Außerdem werden vier Gabeln aufgeteilt, weshalb jeder der Spieler mindestens eine Gabel sicher besitzen muss. Das bedeutet, es gibt nur noch vier unbekannte Karten, denn zwei der Karten sind bekannt und Karten gleicher Farbe, die zusammen eine Gabel bilden. Von dieser Farbe gibt es nun nur noch eine Karte, während es von den übrigen Farben nach wie vor drei Karten gibt. Egal, ob die Gabel, die der Spieler bereits in der Hand hält, ein Fänger ist oder nicht, verläuft die Berechnung der weiteren Gabeln analog. Man soll schließlich, wenn man bereits einen Fänger hat, eine der beiden Gabeln bekommen, die keine Fänger sind, oder umgekehrt, falls es sich noch nicht um einen Fänger handelt, als nächstes eine der beiden Gabeln, die Fänger sind, erhalten. In beiden Fällen gibt es noch sechs günstige Karten, weshalb die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{10}$ beträgt. Die nächste Karte soll farblich zur vorherigen passen, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$ beträgt. Die weiteren beiden Karten sind beliebig.

A..Teil der Gabel B...andere Karte

(AA BB), (AB AB), (AB BA), (BA BA), (BA AB), (BB AA)

Es gibt sechs mögliche Reihenfolgen für die vier Karten, weshalb mit Sechs multipliziert werden muss. Das führt insgesamt zu folgender Rechnung:

$$P(2 \text{ Gabeln} + 2 \text{ beliebige Karten}) = \frac{6}{10} * \frac{2}{9} * 6 = \frac{4}{5} = 0,8$$

Nun muss man noch bedenken, dass es sich nicht nur um zwei Gabeln handelt, wenn die restlichen beiden Karten zwei Karten gleicher Farbe sind, weshalb man diesen Fall ausnehmen muss. Darum wird als nächstes diese Wahrscheinlichkeit berechnet. Die Berechnung erfolgt analog zur vorherigen Rechnung, nur dass die beiden Karten, die zuvor beliebig waren, nun zwei Karten gleicher Farbe sein sollen. Es gibt noch zwei Farben, von denen man zwei Karten bekommen könnte, weshalb die Wahrscheinlichkeit für die nächste Karte, eine dieser sechs Karten zu sein, $\frac{6}{8}$ beträgt und für die darauffolgende Karte zu der vorherigen Karte zu passen, liegt die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{2}{7}$. Das ergibt insgesamt folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(2 \text{ Gabeln} + 2 \text{ Gleiche}) = \frac{6}{10} * \frac{2}{9} * \frac{6}{8} * \frac{2}{7} * 6 = \frac{6}{35}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der eine Spieler nur zwei Gabeln hat, von denen eine ein Fänger ist, und somit der andere Spieler ebenfalls solche Gabeln hat, kann man nun berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeit von zwei Gabeln und zwei Karten gleicher Farbe von der Wahrscheinlichkeit von zwei Gabeln und zwei beliebige Karten abzieht.

$$\begin{aligned} P(\text{nur 2 Gabeln}) &= P(2 \text{ Gabeln} + 2 \text{ beliebige Karten}) - P(2 \text{ Gabeln} + 2 \text{ Gleiche}) = \\ &= \frac{4}{5} - \frac{6}{35} = \frac{28}{35} - \frac{6}{35} = \frac{22}{35} \approx 0,628571 \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass die Gabeln so aufgeteilt sind, dass jeder der Spieler zwei potentielle Gabeln hat, von denen jeweils eine ein Fänger ist, beträgt rund 62,86%.

Weshalb es nun so wichtig ist, dass die anderen Spieler bei solch einer Kartenkombination mehr als eine potentielle Gabel haben müssen, damit das Gangl von dem, der es angesagt hat, auch gewonnen werden kann, ist ganz einfach zu erklären: Handelt es sich um erfahrene Spieler, so werden diese eine Gabel niemals zerreißen, es sei denn sie haben noch einen oder mehrere weitere mögliche Fänger in Form von Gabeln oder Assen, weshalb sie dazu gezwungen wären, sich zu entscheiden. Asse zum Fangen gibt es in diesem speziellen Fall nicht, da der Spieler, der das Gangl angesagt hat, alle Asse in der Hand hält.

Das bedeutet, im ersten und dritten Fall wäre das Gangl für den Spieler, der es angesagt hat, sicher verloren, da es für keinen der beiden anderen Spieler eine Möglichkeit gäbe, sich das Falsche zu behalten. Darum wurden auch nur die Wahrscheinlichkeiten für die relevanten Fälle berechnet.

Das bedeutet aber auch, je mehr potentielle Gabeln ein Spieler hat, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser die richtige Gabel behält. Für zwei Gabeln, von denen eine ein Fänger ist, hat er schließlich eine Chance von 50%, die richtige zu behalten. Hat er aber drei Gabeln, von denen nur eine ein Fänger ist, so muss er sich zweimal entscheiden, weshalb

die Wahrscheinlichkeit, dass er sich beim ersten Mal richtig entscheidet, bei $\frac{1}{3}$ liegt und beim zweiten Mal bei $\frac{1}{2}$. Das ergibt insgesamt nur eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$, also rund 16,67% dafür, dass der Spieler am Ende die richtige Gabel behalten hat. Hat er drei Gabeln, wovon allerdings zwei Fänger sind, so liegt die Wahrscheinlichkeit beim ersten Mal, eine der richtigen Gabeln zu behalten, bei $\frac{2}{3}$. Hat er sich beim ersten Mal mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ falsch entschieden, so hat er bei der nächsten Entscheidung eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ die richtige Gabel zu behalten. Das ergibt für die Wahrscheinlichkeit, dass er sich mindestens eine richtige Gabel behält, also das Gangl gewinnt, folgendes:

$$P(\text{Fängt}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0,833333$$

Also wenn man drei Gabeln, wovon zwei Fänger sind, hat, so liegt die Wahrscheinlichkeit bei rund 83,33%, dass man sich am Ende eine der richtigen Gabeln behalten hat und somit gewinnt.

Das bedeutet, dass im zweiten Fall der Spieler, der das Gangl angesagt hat, mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 83,33% gefangen wird.

Im vierten Fall müssten sich beide Spieler falsch entscheiden, damit der Spieler, der das Gangl angesagt hat, gewinnt. Jeder der beiden hat eine Wahrscheinlichkeit von 50% die richtige Gabel zu behalten. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich also beide für die falsche Gabel entscheiden, liegt bei 25%, da $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ist.

In obigen Berechnungen und Überlegungen wird davon ausgegangen, dass man im Laufe des Spiels dazu gezwungen ist, sich zu entscheiden und dies unabhängig davon tut, welche Karten bereits von den anderen Spielern gespielt wurden. Die Entscheidungskriterien, auf Grundlage derer die Spieler entscheiden, welche Gabel sie zerreißen und welche sie behalten, sind allerdings sehr vielfältig. Die meisten Entscheidungen trifft man als Spieler intuitiv und vor allem, wenn man ein Gangl mittels Gabel fangen will, geht es vielmehr um Glück, als um Können, aber natürlich nur, solange ein Spieler die Grundlagen des Spiels verstanden hat und zum Beispiel weiß, was eine Gabel ist und wie man sie anwendet.

Insgesamt kann man sich nun die Wahrscheinlichkeit, das Gangl mit diesen schlechten zusätzlichen Karten doch noch zu gewinnen, folgendermaßen ausrechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Gabeln so aufgeteilt sind, dass einer der Spieler drei potentielle Gabeln, wovon zwei Fänger sind, hat, beträgt $\frac{9}{154}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich derjenige Spieler, der diese Karten dann in der Hand hält, die falsche Gabel behält, beträgt $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler jeweils zwei potentielle Gabeln haben, von denen jeweils nur eine ein Fänger ist, beträgt $\frac{22}{35}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich hier nun keiner der Spieler die richtige Gabel behält, beträgt $\frac{1}{4}$. Das bedeutet, es ergibt sich folgende Rechnung:

$$P(\text{gewinnt das Gangl}) = 2 * \frac{9}{154} * \frac{1}{6} + \frac{22}{35} * \frac{1}{4} = \frac{2 * 9}{924} + \frac{11}{35 * 2} = \frac{90 + 726}{4620} = \frac{816}{4620} \\ = \frac{68}{385} \approx 0,176623$$

Das bedeutet, mit einer Wahrscheinlichkeit von 17,66% gewinnt man das Gangl mit der ursprünglichen Kartenkombination, wenn man keine Karten austauschen kann.

6.3.3 Verbesserungsmöglichkeiten des Gangls

Da nun der Fall behandelt wurde, in dem die Chance, das Gangl zu gewinnen, am geringsten ist, werden als nächstes die Wahrscheinlichkeiten zur Verbesserung des Gangls berechnet und inwiefern es jeweils verbessert wird.

Wenn nur eine weitere Karte in der Farbe eines der beiden Unter kommen würde, die nicht der Zehner ist, so könnte man diese mit dem anderen Unter ersetzen und hätte nun mit 54,54% keinen Fänger mehr, da die Gabel nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 45,46% existiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte eine dieser vier Karten ist, liegt bei $\frac{4}{14}$. Die nächste Karte soll weder ein Zehner sein, noch eine weitere Karte in der Farbe der Unter der ursprünglichen Karten, weshalb die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{13}$ beträgt. Wegen der Reihenfolge muss mit zwei multipliziert werden. Der zweite Fall ergibt sich daraus, dass es sich bei der ersten Karte um den König oder den Ober der einen Farbe handelt, was eine

Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{14}$ ergibt, und die zweite Karte entweder König oder Ober der zweiten Farbe ist, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{13}$ beträgt. Wegen der Reihenfolge muss mit Zwei multipliziert werden. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{König oder Ober in Farbe eines der Unter}) = \frac{4}{14} * \frac{6}{13} * 2 + \frac{2}{14} * \frac{2}{13} * 2 = \frac{56}{182} = \frac{28}{91} \\ \approx 0,351648$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei den beiden verdeckten Karten also noch um mindestens einen König oder Ober passend zu den bereits vorhandenen Untern handelt, beträgt also rund 35,16%.

Es könnte sich natürlich auch um zwei Karten gleicher Farbe handeln, die aber eine andere Farbe als die beiden Unter haben und keine Zehner sind. Durch diese könnte man nun Ober und Unter austauschen und hätte dann ein Gangl, das nur mit 45,46% überhaupt einen Fänger hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass als erste Karte eine Karte, die kein Zehner ist, in einer anderen Farbe als die beiden Unter kommt, liegt bei $\frac{6}{14}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Karte farblich zur ersten Karte passt, beträgt $\frac{2}{13}$. Das führt zu folgender Rechnung:

$$P(\text{zwei Karten gleicher Farbe}) = \frac{6}{14} * \frac{2}{13} = \frac{12}{182} = \frac{6}{91} \approx 0,0659341$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit liegt in diesem Fall bei 6,593%.

Die nächste Kombination, die das Gangl verbessern würde, wäre, wenn man einen Zehner in einer anderen Farbe als die der beiden ursprünglichen Unter erhalten würde. Das würde nämlich heißen, dass man nur mehr einen Unter, zu dem eine Gabel existiert, in der Hand behalten muss. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Karte einer dieser beiden Zehner ist, beträgt $\frac{2}{14}$. Die nächste Karte soll weder ein weiterer Zehner sein, noch die gleiche Farbe wie die erste Karte haben, darf aber auch eine Karte in der Farbe eines der Unter sein. Das

bedeutet, es bleiben noch sieben Karten übrig, weshalb die Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{13}$ beträgt. Man muss wegen der Vertauschung mit Zwei multiplizieren. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{Zehner}) = \frac{2}{14} * \frac{7}{13} * 2 = \frac{28}{182} = \frac{14}{91} \approx 0,153846$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um diese Kartenkombination handelt, beträgt also rund 15,38%.

Bei dieser Kartenkombination würde auf jeden Fall eine Gabel existieren, sofern es sich bei der zweiten Karte nicht um eine Karte in der Farbe eines der Unter handelt. In diesem Fall würde die Gabel, die der einzige Fänger wäre, nämlich wie schon zuvor nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 45,46% überhaupt existieren.

Wenn man nun davon ausgeht, dass es sich bei der zweiten Karte neben dem Zehner nicht um eine Karte in der Farbe eines der Unter handelt, so existiert eine Gabel für jeden der beiden Unter. Wie viele potentielle Gabeln es zusätzlich zu diesen beiden Gabel, wovon einer tatsächlich der Fänger ist, gibt, hängt von den weggelegten Karten ab. Die eine weggelegte Karte ist in diesem Fall nun sicher der andere Unter und die zweite weggelegte Karte muss eine der drei Karten sein, die weder Zehner, noch Karte gleicher Farbe, noch eine Karte der Farbe des weggelegten Unters ist. Die Karte muss also eine der drei Karten der übrigen vierten Farbe sein.

In dieser Farbe existiert eine potentielle Gabel sicher, wenn es sich zusätzlich bei der weggelegten Karte noch um Ober oder Unter dieser Farbe handeln würde. Ist es der König, so würde die Gabel nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 72,73% überhaupt existieren und man sollte von vornherein diesen behalten.

In der Farbe, in der man den Zehner hat, existiert eventuell ebenfalls eine potentielle Gabel, da es noch drei Karten dieser Farbe gibt, nämlich König, Ober und Unter. Es wäre möglich, dass diese Karten nun so auf die beiden anderen Spieler aufgeteilt sind, dass einer den König hat und der andere Ober und Unter oder dass einer alle drei dieser Karten hat. Wenn das der Fall wäre, so ist den Spielern sofort klar, dass es sich bei diesen Karten um keine potentiellen Fänger handelt. Die einzige Aufteilung, die für den Spieler, der das Gangl spielt, hier also günstig ist, wäre, dass ein Spieler nur den Ober beziehungsweise den Unter bekommt und der

andere Spieler König und Unter beziehungsweise Ober, die somit eine potentielle Gabel bilden würden. So eine Gabel wird aber normalerweise sofort durchschaut, da der Ober oder der Unter der Farbe im Spielverlauf schon sehr früh fallen würden. Diese Gabel wäre also nur relevant, wenn man durch sie drei Gabeln in der Hand hält, und sich somit schon in der ersten Runde für eine davon entscheiden müsste.

Wie bereits gesagt, existiert in der Farbe des Unters, der weggelegt wird, ganz sicher eine Gabel, ebenso existiert die Gabel, die tatsächlich der Fänger ist. Das bedeutet, dass man zwei potentielle Gabeln hat, die sicher existieren und für den Spieler, der das Gangl spielt, auch günstig aufgeteilt werden könnten. Nur wenn einer der beiden anderen Spieler beide potentielle Gabeln hat, gibt es für diesen auch die Möglichkeit, sich zu verwerfen und die falsche Gabel zu behalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, lässt sich nun folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte Teil der einen Gabel ist, liegt bei $\frac{3}{12}$. Für die nächste Karte beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{11}$, dass sie zur ersten Karte passt und mit dieser eine Gabel bildet. Die dritte Karte soll Teil der zweiten Gabel sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{10}$ beträgt und die vierte Karte soll dazu passen, weshalb die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{2}{9}$ liegt. Die beiden restlichen Karten sind beliebig.

T...Teil der einen Gabel, K...Teil der anderen Gabel, N...andere Karten

(KKT TNN), (KKT NTN), (KKT NNT), (KTK TNN), (KTK NTN), (KTK NNT),
 (TKK TNN), (TKK NTN), (TKK NNT), (TTK KNN), (TTK NKN), (TTK NNK),
 (TKT KNN), (TKT NKN), (TKT NNK), (KTT KNN), (KTT NKN), (KTT NNK),
 (TTN NKK), (TTN KNK), (TTN KKN), (TNT NKK), (TNT KNK), (TNT KKN),
 (NTT NKK), (NTT KNK), (NTT KKN), (KKN NTT), (KKN TNT), (KKN TTN),
 (KNK NTT), (KNK TNT), (KNK TTN), (NKK NTT), (NKK TNT), (NKK TTN),
 (NNT TKK), (NNT KTK), (NNT KKT), (NTN TKK), (NTN KTK), (NTN KKT),
 (TNN TKK), (TNN KTK), (TNN KKT), (NNK KTT), (NNK TKT), (NNK TTK),
 (NKN KTT), (NKN TKT), (NKN TTK), (KNN KTT), (KNN TKT), (KNN TTK),
 (NKT NKT), (NKT KTN), (NKT KNT), (NKT NTK), (NKT TNK), (NKT TKN),
 (NTK NKT), (NTK KTN), (NTK KNT), (NTK NTK), (NTK TNK), (NTK TKN),
 (KNT NKT), (KNT KTN), (KNT KNT), (KNT NTK), (KNT TNK), (KNT TKN),
 (KTN NKT), (KTN KTN), (KTN KNT), (KTN NTK), (KTN TNK), (KTN TKN),

(TNK NKT), (TNK KTN), (TNK KNT), (TNK NTK), (TNK TNK), (TNK TKN),
(TKN NKT), (TKN KTN), (TKN KNT), (TKN NTK), (TKN TNK), (TKN TKN)

Es gibt demnach 90 mögliche Reihenfolgen, weshalb mit 90 multipliziert werden muss. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{hat beide Gabeln}) = \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{3}{10} * \frac{2}{9} * 90 = \frac{3240}{11880} = \frac{3}{11} \approx 0,272727$$

Das bedeutet, mit einer Wahrscheinlichkeit von 27,27% hat einer der beiden anderen Spieler beide potentielle Gabeln, von denen eine der Fänger ist. Da es zwei Spieler gibt, die diese Kartenkombination haben könnten, muss diese Wahrscheinlichkeit noch verdoppelt werden, weshalb sich rund 54,55% ergeben.

Als nächstes wird davon ausgegangen, dass es sich bei der zweiten verdeckten Karte um Ober oder Unter der Farbe handelt, von der der Spieler, der das Gangl angesagt hat, ansonsten keine Karten hat und somit noch eine weitere Gabel sicher existiert. Somit könnte ein Spieler auch alle drei potentiellen Gabeln haben. Die Rechnung für die ersten vier Karten verläuft analog zum vorherigen Beispiel. Die fünfte Karte soll nun aber Teil der dritten Gabel sein, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{8}$ bedeutet und die letzte Karte soll dazu passen, weshalb die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7}$ beträgt. Es muss auch in diesem Fall wegen der Reihenfolge mit 90 multipliziert werden. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{hat drei Gabeln}) = \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{3}{10} * \frac{2}{9} * \frac{3}{8} * \frac{2}{7} * 90 = \frac{19440}{665280} = \frac{9}{308} \approx 0,0292208$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Spieler sogar drei Gabeln hat, von denen einer der Fänger ist, beträgt also nur rund 2,92%. Da es zwei Spieler gibt, die diese Kartenkombinationen haben könnten, muss diese Wahrscheinlichkeit noch verdoppelt werden, was eine Wahrscheinlichkeit von rund 5,844% ergibt.

Es gibt nun auch noch die Möglichkeit, dass es in der Farbe, die der Zehner hat, eine Gabel gibt. So könnte der Spieler auch noch auf andere Weise drei Gabeln haben. Die ersten vier Karten werden wieder analog zum vorherigen Beispiel berechnet. Die fünfte Karte muss der König der Farbe des Zehners sein, da sich nur mit ihm die Gabel bilden lässt. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{8}$, dass es sich tatsächlich um den König handelt. Die nächste Karte soll entweder Ober oder Unter der gleichen Farbe sein, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{7}$ ergibt.

A...Teil erste Gabel B...Teil zweite Gabel C...König D...Ober oder Unter

(AAB BCD) für die ersten drei 3, für die anderen drei 6, also $3 \times 6 = 18$

(AAC BBD) für die ersten drei 3, für die anderen drei 3, also $3 \times 3 = 9$

(AAD BBC) für die ersten drei 3, für die anderen drei 3, also $3 \times 3 = 9$

(ABB ACD) für die ersten drei 3, für die anderen drei 6, also $3 \times 6 = 18$

(ABC ABD) für die ersten drei 6, für die anderen drei 6, also $6 \times 6 = 36$

(ABD ABC) für die ersten drei 6, für die anderen drei 6, also $6 \times 6 = 36$

(ACD ABB) für die ersten drei 6, für die anderen drei 6, also $6 \times 6 = 36$

(CBB AAD) für die ersten drei 3, für die anderen drei 3, also $3 \times 3 = 9$

(DBB AAC) für die ersten drei 3, für die anderen drei 3, also $3 \times 3 = 9$

Insgesamt ergibt das $4 \cdot 9 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 36 = 180$ Möglichkeiten, weshalb mit 180 multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{hat drei Gabeln}) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot 180 = \frac{12960}{665280} = \frac{3}{154} \approx 0,0194805$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 1,948%, dass einer der Spieler drei Gabeln hat. Da es zwei Spieler gibt, die diese Kartenkombination haben könnten, muss mit Zwei multipliziert werden. Das ergibt rund 3,896%.

Die letzte Möglichkeit wäre, dass es sich bei den beiden verdeckten Karten um König und König oder König und Ober oder Unter in den verschiedenen beiden Farben, die die Unter des ursprünglichen Blattes nicht haben, handelt. In diesem Fall wäre die Verbesserung der Chance zu gewinnen sehr klein. Man könnte den Unter gegen einen König austauschen, weshalb man nun in diesem Fall nur eine 72,73%ige Wahrscheinlichkeit hätte, dass es zwei Gabeln gibt. Eine Gabel müsste wegen dem zweiten Unter existieren, sofern die zweite Karte nicht ebenfalls ein König ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei den beiden Karten um König und König oder König und Ober oder Unter in der gewünschten Farbe handelt, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um den König der einen Farbe handelt, liegt bei $\frac{2}{14}$. Die zweite Karte soll weder ein Zehner, noch eine Karte gleicher Farbe sein und auch keine Karte der Farbe der Unter der ursprünglichen Karten. Im ersten Fall soll es sich auch nicht um den zweiten König handeln. Das ergibt nur mehr zwei günstige Karten, weshalb die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{2}{13}$ liegt. Außerdem muss wegen der Reihenfolge mit Zwei multipliziert werden. Separat wird nun der Fall berechnet, dass es sich um die beiden Könige handelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte einer der beiden Könige ist, beträgt $\frac{2}{14}$. Für die zweite Karte liegt die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{1}{13}$, dass es sich um den zweiten König handelt. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 P(\text{König} + \text{König, Ober oder Unter verschiedener Farbe}) &= \frac{2}{14} * \frac{2}{13} * 2 + \frac{2}{14} * \frac{1}{13} \\
 &= \frac{10}{182} = \frac{5}{91} \approx 0,0549451
 \end{aligned}$$

Das ergibt für die letzte Möglichkeit eine Wahrscheinlichkeit von 5,50%.

Damit wären alle möglichen Fälle erklärt und ihre Wahrscheinlichkeit berechnet. Insgesamt liegt die Wahrscheinlichkeit bei 58,24%, dass sich das Gangl mit den ursprünglich zwei Fängern zumindest noch verbessert.

7. Das Ausrufen

Beim Dreier- und Viererschnapsen ist es so, dass Trumpf nicht zufällig durch das Aufdecken einer Karte bestimmt wird, sondern einer der Spieler bestimmt auf Grundlage seiner ersten drei erhaltenen Karten, welche Farbe in dieser Runde Trumpf sein soll. Hierbei sollte der Spieler so vorgehen, dass er die Farbe möglichst zu seinem Vorteil bestimmt. In Folgendem geht es um die Frage, welche Farbe man bei verschiedenen Kartenkonstellationen am besten zu Trumpf bestimmt.

7.1 Ass und zwei Karten gleicher Farbe

Es wird ganz einfach begonnen. Wenn man drei Karten einer Farbe in der Hand hält, so wird man diese Farbe zu Trumpf machen und steht mit den Karten gut da. Hat man zwei Karten einer Farbe, so ist es ebenfalls sinnvoll, diese Farbe zu Trumpf zu bestimmen, falls die dritte Karte kein Ass ist. Sollte die dritte Karte ein Ass sein, so stellt dies eine Zwickmühle dar. Nun wird anhand dieses Beispiels analysiert, ob es sinnvoller wäre, die Farbe des Asses zu rufen oder die Farbe, von der man zwei Karten hat.

7.1a Dreierschnapsen

Zu einem Ass gibt es potenziell vier weitere Karten, die man noch bekommen könnte. Mit dem Trumpf Ass kann man alles stechen, weshalb man einen sicheren Stich hätte, wenn man diese besitzt. Nun werden die Wahrscheinlichkeiten berechnet, dass zu dem Ass noch weitere Karten derselben Farbe kommen.

$$P(\text{eine weitere Trumpfkarte}) = \frac{4}{17} * \frac{13}{16} * \frac{12}{15} * 3 = \frac{1872}{4080} = \frac{39}{85} \approx 0,458824$$

$$P(\text{zwei weitere Trumpfkarten}) = \frac{4}{17} * \frac{3}{16} * \frac{13}{15} * 3 = \frac{468}{4080} = \frac{39}{340} \approx 0,114706$$

$$P(\text{drei weitere Trumpfkarten}) = \frac{4}{17} * \frac{3}{16} * \frac{2}{15} = \frac{24}{4080} = \frac{1}{170} \approx 0,00588235$$

$$P(\text{keine weitere Trumpfkarte}) = \frac{13}{17} * \frac{12}{16} * \frac{11}{15} = \frac{1716}{4080} = \frac{143}{340} \approx 0,420588$$

Bei dem Fall, dass man die Farbe zu Trumpf gemacht hat, von der man zwei Karten hat, sieht die Wahrscheinlichkeit, dass man das Ass dazu bekommt, folgendermaßen aus:

$$P(\text{bekommt Trumpf Ass, aber keine weitere Trumpfkarte}) = \frac{1}{17} * \frac{14}{16} * \frac{13}{15} * 3 = \\ = \frac{273}{2040} \approx 0,133824$$

$$P(\text{bekommt eine weitere Trumpfkarte, nicht Ass}) = \frac{2}{17} * \frac{14}{16} * \frac{13}{15} * 3 = \frac{1092}{4080} \approx \\ \approx 0,267647$$

$$P(\text{bekommt zwei weitere Trumpfkarten, nicht Ass}) = \frac{2}{17} * \frac{1}{16} * \frac{14}{15} * 3 = \frac{84}{4080} \approx \\ \approx 0,0205882$$

$$P(\text{bekommt drei weitere Trumpfkarten}) = \frac{3}{17} * \frac{2}{16} * \frac{1}{15} = \frac{6}{4080} \approx 0,00147059$$

A...Ass T...Trumpf N...andere Karte

(ATN), (ANT), (TAN), (TNA), (NTA), (NAT)

$$P(\text{bekommt Ass + eine weitere Trumpfkarte}) = \frac{1}{17} * \frac{2}{16} * \frac{14}{15} * 6 = \frac{168}{4080} \approx \\ \approx 0,0411764706$$

$$P(\text{keine weitere Trumpfkarte/hat zwei Trumpfkarten}) = \frac{14}{17} * \frac{13}{16} * \frac{12}{15} = \frac{2184}{4080} \approx \\ \approx 0,5352941176$$

Durch die oberen Berechnungen kann man argumentieren, dass die Wahrscheinlichkeit, zu dem Ass mindestens eine weitere Trumpfkarte zu erhalten, bei 57,94% liegt, also relativ hoch, wohingegen die Wahrscheinlichkeit, zu zwei Karten noch das passende Ass zu erhalten bei lediglich bei 17,65% liegt. Die Wahrscheinlichkeit, eine oder mehrere weitere Trumpfkarten zu erhalten, liegt auch allgemein, wenn man schon zwei Trumpfkarten hat, nur bei 26,76%. Wenn man nur das Ass hat, liegt die Wahrscheinlichkeit, zwei weitere Trumpfkarten zu erhalten hingegen nur bei 11,47%. Die Wahrscheinlichkeit, am Ende das Trumpf Ass und

zwei weitere Karten zu haben, ist also eigentlich bei der Variante mit den zwei ursprünglichen Karten höher. Man muss aber auch sagen, dass die Wahrscheinlichkeit, wenn man zwei Trumpfkarten hat, keine weitere Trumpfkarte zu bekommen, bei 53,53% liegt, wohingegen die Wahrscheinlichkeit, eine weitere Trumpfkarte zu erhalten, wenn man nur ein Ass hat, bei 57,94% liegt. Das bedeutet, dass man, wenn man auf das Ass ruft, eine 57,94%ige Wahrscheinlichkeit hat, am Ende das Ass und eine weitere Trumpfkarte zu haben, wohingegen bei der anderen Variante man eine 46,47%ige Wahrscheinlichkeit hat, am Ende drei Trumpfkarten zu haben.

7.1b Viererschnapsen

Beim Viererschnapsen bekommt man, wenn man auf Grundlage der ersten drei Karten gerufen hat, nur zwei weitere Karten. Wenn man sich nun beim Ausrufen zwischen einem Ass und zwei Karten gleicher Farbe, von denen keine ein Ass ist, entscheiden muss, so ist es interessant zu wissen, wie wahrscheinlich weitere Karten der jeweiligen Farbe sind.

Wenn man das Ass gerufen hat, so ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten für den Erhalt weiterer Trumpfkarten:

$$P(1 \text{ weitere Trumpfkarte}) = \frac{4}{17} * \frac{13}{16} * 2 = \frac{13}{34} \approx 0,382353$$

$$P(2 \text{ weitere Trumpfkarten}) = \frac{4}{17} * \frac{3}{16} = \frac{3}{68} \approx 0,0441176$$

$$P(\text{keine weitere Trumpfkarte}) = \frac{13}{17} * \frac{12}{16} = \frac{39}{68} \approx 0,573529$$

Hat man sich für die zwei Karten gleicher Farbe entschieden, so ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten für den Erhalt weiterer Trumpfkarten beziehungsweise des Trumpf Asses:

$$P(\text{Trumpf Ass, aber keine weitere Trumpfkarte}) = \frac{1}{17} * \frac{14}{16} * 2 = \frac{7}{68} \approx 0,102941$$

$$P(1 \text{ weitere Trumpfkarte, nicht Ass}) = \frac{2}{17} * \frac{14}{16} * 2 = \frac{7}{34} \approx 0,205882$$

$$P(2 \text{ weitere Trumpfkarten, nicht Ass}) = \frac{2}{17} * \frac{1}{16} = \frac{1}{136} \approx 0,00735294$$

$$P(\text{Ass} + \text{Trumpfkarte}) = \frac{1}{17} * \frac{2}{16} * 2 = \frac{1}{68} \approx 0,0147059$$

$$P(\text{keine weitere Trumpfkarte}) = \frac{14}{17} * \frac{13}{16} = \frac{91}{136} \approx 0,669118$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, zu zwei Trumpfkarten das Trumpf Ass zu erhalten, beträgt 10,29%, während die Wahrscheinlichkeit, zu dem Trumpf Ass noch zwei weitere Trumpfkarten zu bekommen, lediglich bei 4,41% liegt. Dafür beträgt aber die Wahrscheinlichkeit mindestens eine weitere Trumpfkarte zu erhalten, wenn man auf das Ass gerufen hat, 42,65%, während man, wenn man sich für die zwei Trumpfkarten entschieden hat, mit 66,91%iger Wahrscheinlichkeit keine weitere Trumpfkarte erhält. Zu dem Ass erhält man allerdings mit 57,35%iger Wahrscheinlichkeit keine weitere Trumpfkarte, weshalb man dann nur eine Trumpfkarte insgesamt in der Hand hätte. Also wäre es spieltechnisch insgesamt besser, wenn man die zwei Karten gleicher Farbe zu Trumpf macht, da es vor allem beim Viererschnapsen immer besser ist, mehr Trumpfkarten zu haben.

7.2 Drei verschiedene Farben

Ein besonders ungünstiger Fall für den Spieler, der Trumpf wählen muss, ist, wenn er drei Karten verschiedener Farben hat, wovon keine ein Ass ist. Hier kann der Spieler von der Möglichkeit des Aufdrehens Gebrauch machen. Dabei wird Trumpf bestimmt, indem die oberste der weiteren Karten des Spielers aufgedeckt wird. Die Farbe dieser Karte ist dann Trumpf. Nun stellt sich also die Frage, ob es in dem geschilderten Fall eine gute Idee ist, aufzudrehen oder ob es besser wäre, sich eine der drei Karten auszusuchen, was in Folgendem behandelt wird.

7.2a Dreierschnapsen

Der unglücklichste Fall beim Aufdrehen tritt ein, wenn die vierte Farbe aufgedreht wird. Das bedeutet, dass man auf keine der Farben in seiner Hand ruft, sondern die vierte Farbe ist nun Trumpf. Das kann insbesondere dann problematisch werden, wenn der Spieler keine weiteren Karten dieser Farbe erhält.

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um eine Karte der vierten Farbe handelt, beträgt $\frac{5}{17}$, da es noch fünf Karten dieser Farbe gibt und insgesamt noch 17 Karten.

Die nächsten beiden Karten sollen Karten anderer Farbe sein, weshalb ihre Wahrscheinlichkeiten $\frac{12}{16}$ und $\frac{11}{15}$ betragen. Die erste Karte muss die Karte vierter Farbe sein, weil diese aufgedreht werden soll, weshalb nicht mit Drei wegen der Reihenfolge multipliziert werden muss. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{Karte der vierten Farbe, keine weitere}) = \frac{5}{17} * \frac{12}{16} * \frac{11}{15} = \frac{11}{68} \approx 0,161765$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man also eine Karte einer Farbe aufdreht, die man nicht in der Hand hat und von der man auch keine weitere Karte erhält, beträgt rund 16,18%.

Die Wahrscheinlichkeiten, die vierte Farbe aufzudrehen und ein oder zwei weitere Karten derselben Farbe zu erhalten, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(\text{Karte der vierten Farbe} + \text{eine weitere}) = \frac{5}{17} * \frac{4}{16} * \frac{12}{15} * 2 = \frac{2}{17} \approx 0,117647$$

$$P(\text{Karte der vierten Farbe} + 2 \text{ weitere}) = \frac{5}{17} * \frac{4}{16} * \frac{3}{15} = \frac{1}{68} \approx 0,0147059$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafür, dass man eine Karte in einer Farbe aufdreht, von der man bereits eine Karte hat, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(\text{eine der drei anderen Farben}) = \frac{12}{17} \approx 0,705882$$

Wenn man nun drei verschiedene Farben in der Hand hält, dreht man also mit 70,59%iger Wahrscheinlichkeit eine zu einer der Karten passende Karte auf und hat somit schon einmal mindestens zwei Trumpfkarten. Es kann natürlich auch sein, dass zu der aufgedrehte Karte, selbst wenn es die vierte Farbe ist, noch etwas dazu kommt. Theoretisch könnte es ja sein, dass alle drei Karten die gleiche Farbe haben, nämlich die vierte Farbe. In diesem Fall wäre es sehr ungünstig, die Farbe einer der drei Karten, die man in der Hand hält, zu Trumpf zu

machen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu der vierten Karte noch mindestens eine weitere Karte dazukommt, beträgt allerdings nur rund 13,24%.

Nun ist es noch interessant, sich auszurechnen, wie Wahrscheinlich es ist, dass man, wenn man aufdreht, noch weitere Karten in der so bestimmten Trumpffarbe erhält.

$$P(\text{eine der drei Farben} + \text{noch eine Karte dieser Farbe}) = \frac{12}{17} * \frac{3}{16} * \frac{13}{15} * 2 = \frac{39}{170} \approx 0,229412$$

$$P(\text{eine der drei Farben} + \text{weitere 2 Karten der Farbe}) = \frac{12}{17} * \frac{3}{16} * \frac{2}{15} = \frac{3}{170} \approx 0,0176471$$

$$P(\text{eine der drei Farben} + \text{keine weitere Karte der Farbe}) = \frac{12}{17} * \frac{13}{16} * \frac{12}{15} = \frac{39}{85} \approx 0,458824$$

Wenn man also aufdreht, so hat man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{17} + \frac{39}{85} = \frac{49}{85} = 0,576471$, also rund 57,65% genau zwei Trumpfkarten in der Hand. Die Wahrscheinlichkeit, genau drei Trumpfkarten zu haben, beträgt $\frac{1}{68} + \frac{39}{170} = \frac{83}{340} = 0,244118$, also rund 24,41%. Man kann auch vier Trumpfkarten haben, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{170}$, was rund 1,76% sind, beträgt. Mit 16,18%iger Wahrscheinlichkeit kann es aber beim Aufdrehen auch sein, dass man am Ende nur eine Trumpfkarte in der Hand hält.

Wenn man sich nun für eine der drei Farben, von denen man bereits jeweils eine Karte hat, entscheidet, so sehen die Wahrscheinlichkeiten, weitere Karten dieser Farbe zu bekommen, folgendermaßen aus:

$$P(\text{entscheidet sich für eine Karte, bekommt keine weitere}) = \frac{13}{17} * \frac{12}{16} * \frac{11}{15} = \frac{143}{340} \approx 0,420588$$

$$P(\text{entscheidet sich für eine Karte, bekommt drei weitere}) = \frac{4}{17} * \frac{3}{16} * \frac{2}{15} = \frac{1}{170} \approx 0,00588235$$

$$P(\text{entscheidet sich für eine Karte, bekommt zwei weitere}) = \frac{4}{17} * \frac{3}{16} * \frac{13}{15} * 3 = \frac{39}{340} \\ \approx 0,114706$$

$$P(\text{entscheidet sich für eine Karte, bekommt eine weitere}) = \frac{4}{17} * \frac{13}{16} * \frac{12}{15} * 3 = \frac{39}{85} \approx \\ \approx 0,458824$$

Das bedeutet, wenn man sich für eine der drei Karten, die man in der Hand hält, entscheidet, hat man mit einer Wahrscheinlichkeit von 45,88% am Ende zwei Trumpfkarten. Die Wahrscheinlichkeit, drei Trumpfkarten zu haben, beträgt demnach 11,47% und die Wahrscheinlichkeit, am Ende sogar vier Trumpfkarten zu haben, beträgt rund 0,5882%. Die Wahrscheinlichkeit, dass man allerdings am Ende nur eine Trumpfkarte hat, beträgt 42,06%.

Wenn man diese Werte nun mit den zuvor berechneten Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl an Trumpfkarten beim Aufdrehen vergleicht, so fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeit beim Aufdrehen am Ende mehr Trumpfkarten zu haben, viel größer ist, als wenn man sich für eine der Karten in seiner Hand entscheidet. Also ist es sinnvoller, wenn man drei Karten unterschiedlicher Farben in der Hand hält, von denen keine ein Ass ist, aufzudrehen, um Trumpf zu bestimmen.

7.2b Viererschnapsen

Wenn man beim Viererschnapsen drei Karten zum Ausrufen bekommt, die unterschiedliche Farben haben und keine Asse sind, so bleiben einem noch zwei weitere Karten, von denen man die erste aufdrehen könnte, um Trumpf zu bestimmen. Es ist nun interessant, ob man beim Viererschnapsen zum selben Ergebnis kommt, wie beim Dreierschnapsen was die Frage danach betrifft, ob man lieber ausrufen oder aufdrehen sollte, oder ob es sich hier anders verhält

Wie schon beim Dreierschnapsen, wäre es sehr ungünstig, wenn es sich bei der aufgedrehten Karte um eine Karte in der Farbe handelt, von der man keine Karte in der Hand hat, und es sich außerdem bei der zweiten Karte um eine Karte anderer Farbe handeln würde. Dann hätte man nämlich am Ende nur eine Trumpfkarte. Die Wahrscheinlichkeit dafür wird folgendermaßen berechnet:

$$P(\text{vierte Farbe} + \text{keine weitere Trumpfkarte}) = \frac{5}{17} * \frac{12}{16} = \frac{15}{68} \approx 0,220588$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man die vierte Farbe aufdreht und zusätzlich noch eine Karte gleicher Farbe erhält, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(\text{vierte Farbe} + \text{eine weitere Trumpfkarte}) = \frac{5}{17} * \frac{4}{16} = \frac{5}{68} \approx 0,0735294$$

Wenn es sich bei der aufgedrehten Karte um eine Karte einer der Farben, von denen man bereits jeweils eine Karte in der Hand hat, handelt, so werden die Wahrscheinlichkeiten, zusätzlich noch eine oder keine Trumpfkarte zu erhalten, folgendermaßen berechnet:

$$P(\text{eine der drei Farben} + \text{keine weitere Trumpfkarte}) = \frac{12}{17} * \frac{13}{16} = \frac{39}{68} \approx 0,573529$$

$$P(\text{eine der drei Farben} + \text{eine weitere Trumpfkarte}) = \frac{12}{17} * \frac{3}{16} = \frac{9}{68} \approx 0,132353$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, wenn man aufdreht, am Ende nur eine Trumpfkarte zu haben, beträgt rund 22,05%. Die Wahrscheinlichkeit, sogar zwei Trumpfkarten zu haben, beträgt $\frac{5}{68} + \frac{39}{68} = \frac{44}{68}$, also rund 64,71% und die Wahrscheinlichkeit, am Ende drei Trumpfkarten zu besitzen, beträgt rund 13,24%.

Wenn man sich nun anstatt aufzudrehen für eine der drei Farben, von denen man jeweils eine Karte in der Hand hat, entscheidet, so sehen die Wahrscheinlichkeiten dafür, noch eine, zwei oder keine weitere Trumpfkarten zu erhalten, folgendermaßen aus:

$$P(1 \text{ Trumpfkarte} / \text{entscheidet sich für eine Farbe}) = \frac{4}{17} * \frac{13}{16} * 2 = \frac{13}{34} \approx 0,382353$$

$$P(2 \text{ Trumpfkarten} / \text{entscheidet sich für eine Farbe}) = \frac{4}{17} * \frac{3}{16} = \frac{3}{68} \approx 0,0441176$$

$$P(\text{keine Trumpfkarten/entscheidet sich für eine Farbe}) = \frac{13}{17} * \frac{12}{16} = \frac{39}{68} \approx \\ \approx 0,573529$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass man also, wenn man ausgerufen hat, am Ende insgesamt nur eine Trumpfkarte besitzt, beträgt rund 57,35%. Die Wahrscheinlichkeit, am Ende zwei Trumpfkarten zu haben, beträgt etwa 38,24% und die Wahrscheinlichkeit, sogar drei Trumpfkarten zu besitzen, beträgt rund 4,412%.

Wenn man nun wieder die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl an Trumpfkarten beim Ausrufen mit denen des Aufdrehens vergleicht, so fällt die Entscheidung sogar noch eindeutiger zu Gunsten des Aufdrehens aus. Sieht man sich nur die Wahrscheinlichkeit in beiden Fällen an, dass man genau zwei Trumpfkarten besitzt, so ist diese beim Aufdrehen um rund 26,47% höher als beim Ausrufen. Die Wahrscheinlichkeit, drei Trumpfkarten zu besitzen, ist beim Aufdrehen sogar über dreimal so groß, als beim Ausrufen.

Also ist es sowohl beim Dreier- als auch beim Viererschnapsen günstiger, aufzudrehen, wenn man drei Karten verschiedener Farben, von denen keine ein Ass ist, in der Hand hat, anstatt selbst eine Karte zu bestimmen, die Trumpf sein soll.

8. Der Kontrabauer

Ein weiterer Spezialfall beim Schnapsen ist der Kontrabauer. Gespielt wird dieser so ähnlich wie ein Bauer, nur dass nicht der Spieler, der Trumpf gewählt hat, sondern einer der anderen beiden Spieler das Spiel ansagt. Das Besondere dabei ist nun, dass im Gegensatz zum Gangl Trumpf gilt. Außerdem spielt der Spieler, der Trumpf bestimmt hat, beim ersten Mal aus, wobei der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, stechen muss und dann selber ausspielen darf. Die Wahrscheinlichkeiten für Gabeln in diesem Fall lassen sich analog zu den Gabeln beim normalen Gangl berechnen, wobei es jedoch Unterschiede gibt, da man nun eine Karte mehr kennt, weil derjenige, der gerufen hat, sicher eine Karte der Farbe haben muss, die er gerufen hat. Was hier aber auch interessant ist, wäre, was als erste Karte ausgespielt wird, da die Spieler, die den Kontrabauern nicht angesagt haben, diesen, selbst wenn es keine Gabel gibt, so doch noch gewinnen könnten.

8.1 Dreierschnapsen

8.1a Vier Asse und zwei Zehner

Man sollte, wenn man beim Dreierschnapsen einen Kontrabauern spielen will, mindestens zwei Trumpfkarten haben, wovon eine das Trumpf Ass ist, weil ansonsten auf jeden Fall im Laufe des Spieles einer der anderen Spieler mit Trumpf stechen würde. Das macht es auch so schwer, diesen zu gewinnen oder überhaupt Karten in der Hand zu halten, mit denen man einen Kontrabauern spielen könnte, da es ja noch den Spieler gibt, der gerufen hat, und dieser mindestens eine wenn nicht mehr Trumpfkarten besitzt. Der Spieler, der gerufen hat, muss mindestens eine Trumpfkarte besitzen, da er, egal ob er ausgerufen oder aufgedreht hat, auf dessen Basis Trumpf bestimmt hat. In Folgendem werden nun mögliche Spielabläufe analysiert, wenn der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, nur zwei Trumpfkarten hat, ansonsten aber keinen Fänger in der Hand hält.

Im ersten Fall hat der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, alle vier Asse und zwei Zehner. Die beiden Trumpfkarten müssen demnach das Ass und der Zehner sein. In diesem Fall, bei dem es keine Gabeln gibt, könnten einem nur die drei übrigen Trumpfkarten Probleme bereiten, da eine Trumpfkarte alle Karten anderer Farbe sticht.

Wenn einer der Spieler mehr als zwei Trumpfkarten in der Hand hält, hat der Spieler, der den Kontrabauer angesagt hat, unabhängig davon, was als erstes ausgespielt wird, oder wie das Spiel abläuft, verloren. Der Spieler würde nämlich zwar auf Ass und Zehner der Trumpffarbe jeweils eine Trumpfkarte geben müssen, ihm würde aber dann noch eine Trumpfkarte übrig bleiben, mit der er sicher irgendwann stechen wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass das passiert, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Man kennt als Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, die sechs Karten, die man in der Hand hat, ebenso die beiden Karten, die weggelegt wurden und weiß außerdem, dass der Spieler, der gerufen hat, eine Trumpfkarte hat, weshalb nur 11 unbekannte Karten übrig bleiben. Da also der Spieler, der gerufen hat, sicher eine Trumpfkarte in der Hand hält, kann nur er drei Trumpfkarten haben. Nun gibt es für den Spieler, der gerufen hat, nur mehr fünf unbekannte Karten. Die Wahrscheinlichkeit, dass zusätzlich zur ersten, auch die zweite Karte eine Trumpfkarte ist, liegt bei $\frac{2}{11}$, da es noch zwei übrige Trumpfkarten gibt und 11 mögliche Karten. Für die dritte Karte liegt die Wahrscheinlichkeit, eine Trumpfkarte zu erhalten, bei $\frac{1}{10}$. Die restlichen drei Karten sind beliebig.

T...Trumpf A...andere Karte

(AAA TT), (AAT TA), (AAT AT), (ATA TA), (ATA AT), (TAA TA), (TAA AT), (TTA AA), (ATT AA), (TAT AA)

Es gibt also 10 mögliche Reihenfolgen, in denen die fünf Karten ausgeteilt werden könnten, also muss mit 10 multipliziert werden. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{drei Trumpfkarten, anderer Spieler hat 2}) = \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * 10 = \frac{2}{11} \approx 0,181818$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass der Kontrabauer von vorn herein verloren ist, liegt bei 18,18%.

Das heißt aber auch, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die drei Trumpfkarten aufgeteilt sind, bei 81,82% liegt. Einer der beiden Mitspieler hat in diesem Fall zwei Trumpfkarten und der andere nur eine. Hier kommt es nun darauf an, was der Spieler, der gerufen hat, als erstes ausspielt, denn das wäre die einzige Art für den Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, diesen zu verlieren. Spielt der Spieler, der ausgerufen hat, nämlich eine Karte in einer Farbe, die sein Mitspieler nicht hat, so muss dieser, vorausgesetzt, er besitzt eine Trumpfkarte, mit Trumpf stechen. Da aber in diesem Fall der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, wegen dem Farbzwang das Ass der Farbe geben muss, sticht derjenige mit dem Trumpf. Also ist nun interessant, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Spieler, der weder gerufen, noch den Kontrabauern angesagt hat, eine Farbe überhaupt nicht hat und somit möglicherweise den ersten Stich macht.

Dafür muss man die Karten des Spielers, der Trumpf angesagt hat, genauer betrachten. Eine Möglichkeit wäre, dass dieser vier Asse und zwei passende Zehner hat. Das bedeutet, dass in diesem Fall von einer Farbe nur noch drei Karten da sind. Außerdem muss man die zwei weggelegten Karten berücksichtigen, die der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, natürlich kennt. Im ersten Fall sind diese in der gleichen Farbe wie der ursprüngliche Zehner, der nicht Trumpf ist, weshalb es von zwei Farben, die nicht Trumpf sind, noch jeweils vier Karten gibt und von der dritten Farbe, die nicht Trumpf ist, noch eine.

Wie groß nun die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Spieler, der ausspielt, diese eine Karte bekommt, was ja zu dem Ereignis führt, dass der andere Spieler keine Karte dieser Farbe

haben kann, wird folgendermaßen berechnet: Der Spieler hat bereits sicher eine Trumpfkarte, weshalb nur die weiteren fünf Karten von Interesse sind. Die Wahrscheinlichkeit, als erstes die Karte jener Farbe zu erhalten, die nicht Trumpf ist und von der es auch nur mehr eine Karte gibt, liegt bei $\frac{1}{11}$, da es noch 11 mögliche Karten gibt und eine günstige. Die nächste Karte soll eine Trumpfkarte sein, wofür die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{2}{10}$ liegt. Die nächsten drei Karten sollen keine Trumpfkarten sein, da der Spieler nicht mehr als eine Trumpfkarte erhalten darf, damit der Mitspieler eine Trumpfkarte hat, weshalb die Wahrscheinlichkeiten für diese bei $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$ und $\frac{6}{7}$ liegen. Die zweite Möglichkeit wäre, dass die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um die Karte der Farbe handelt, von der es nur mehr eine Karte gibt, wieder bei $\frac{1}{11}$ liegt und dann die nächsten vier Karten keine Trumpfkarten mit Wahrscheinlichkeiten von $\frac{8}{10}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{6}{8}$ und $\frac{5}{7}$ sind. Wegen der Reihenfolge muss in diesem Fall mit Fünf multipliziert werden.

K...Keine Trumpfkarte Z...Karte bestimmter Farbe T...Trumpfkarte

(KKK ZT), (KKK TZ), (KKT KZ), (KKT ZK), (KTK KZ), (KTK ZK), (TKK KZ), (TKK ZK), (TZK KK), (TKZ KK), (ZKT KK), (ZTK KK), (KTZ KK), (KZT KK), (KKZ KT), (KKZ TK), (KZK KT), (KZK TK), (ZKK KT), (ZKK TK)

Im ersten Fall gibt es also 20 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 20 multipliziert werden muss.

Das ergibt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Spieler, der ruft, hat bestimmte Karte} + 1 \text{ oder } 2 \text{ Trumpf Karten}) &= \\
 &= \frac{1}{11} * \frac{2}{10} * \frac{8}{9} * \frac{7}{8} * \frac{6}{7} * 20 + \frac{1}{11} * \frac{8}{10} * \frac{7}{9} * \frac{6}{8} * \frac{5}{7} * 5 = \frac{13440}{55440} + \frac{8400}{55440} \\
 &= \frac{21840}{55440} = \frac{13}{33} = 0,393940
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Ausspielende diese eine Karte hat, mit der gewinnt, wenn er sie tatsächlich ausspielt, liegt also bei rund 39,40%.

Eine weitere für den Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, ungünstige Aufteilung wäre, wenn der Spieler, der gerufen hat, vier Karten einer Farbe in der Hand hält und sein

Mitspieler mindestens eine Trumpfkarte besitzt. Somit hätte nämlich der andere Spieler wieder keine Karten dieser Farbe in der Hand und könnte mit Trumpf stechen.

Man weiß schon sicher, dass der Spieler, der gerufen hat, eine Trumpfkarte hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Karte eine Karte bestimmter Farbe ist, von der es noch vier Karten gibt, liegt bei $\frac{4}{11}$, die dritte bei $\frac{3}{10}$, die vierte bei $\frac{2}{9}$ und die fünfte bei $\frac{1}{8}$. Die nächste Karte soll im ersten Fall eine Trumpfkarte sein mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{7}$ und im zweiten Fall keine, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{7}$ beträgt. Im ersten wie auch im zweiten Fall gibt es fünf mögliche Reihenfolgen, weshalb mit Fünf multipliziert werden muss. Das ergibt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Spieler hat 4 Karten gleicher Farbe} + 1 \text{ oder } 2 \text{ Trumpf Karten}) &= \\
 &= \frac{4}{11} * \frac{3}{10} * \frac{2}{9} * \frac{1}{8} * \frac{2}{7} * 5 + \frac{4}{11} * \frac{3}{10} * \frac{2}{9} * \frac{1}{8} * \frac{5}{7} * 5 = \frac{240 + 600}{55440} = \frac{840}{55440} \\
 &= \frac{1}{66} = 0,0151515
 \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall liegt bei gerade einmal 1,515%, ganz zu schweigen davon, dass in diesem Fall der Spieler, der gerufen hat, ein sehr ungünstiges Händchen für das Ausrufen bewiesen hat. Insgesamt ergibt das eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{13}{33} + 2 * \frac{1}{66} = \frac{14}{33}$, was rund 42,42% sind, dass der Ausspielende die Möglichkeit hat, eine Karte auszuspielen, womit er den Kontrabauern gewinnt. Wenn er tatsächlich vier Karten einer Farbe in der Hand hält, so wird er mit großer Wahrscheinlichkeit eine dieser Karten ausspielen. Je mehr Karten einer Farbe, von der man nicht das Ass hat, ein Spieler selbst in der Hand hält, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mitspieler keine Karte dieser Farbe hat.

Es besteht auch die Möglichkeit, dass die beiden weggelegten Karten unterschiedliche Farben haben, keine Trumpfkarten sind und auch farblich nicht zu dem weiteren Zehner passen. Das bedeutet, dass es nun von jeder der vier Farben noch drei Karten gibt. Also muss der Spieler, der ausspielt, nur drei Karten der gleichen Farbe haben und sein Mitspieler mindestens eine Trumpfkarte, damit die beiden den Kontrabauer fangen könnten.

Der Spieler, der ausgerufen hat, besitzt bereits sicher eine Trumpfkarte, weshalb nur die fünf weiteren Karten von Interesse sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass er drei Karten einer bestimmten Farbe bekommt, wenn es noch drei Karten der Farbe gibt, liegt bei $\frac{3}{11}$ für die erste Karte, $\frac{2}{10}$ für die zweite und $\frac{1}{9}$ für die dritte Karte. Die nächste Karte soll eine Trumpfkarte mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{8}$ sein und die übrige Karte soll keine Trumpfkarte sein, wofür die Wahrscheinlichkeiten $\frac{6}{7}$ beträgt. Im zweiten Fall sollen die beiden letzten Karten keine Trumpfkarten sein, weshalb sich Wahrscheinlichkeiten von $\frac{6}{8}$ und $\frac{5}{7}$ ergeben. Analog zu vorheriger Berechnung gibt es im ersten Fall 20 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 20 multipliziert werden muss.

K...Karten gleicher Farbe T...keine Trumpfkarte

(KKK TT), (KKT TK), (KKT KT), (KTK TK), (KTK KT), (TKK TK), (TKK KT), (TTK KK), (KTT KK), (TKT KK)

Im zweiten Fall gibt es also 10 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 10 multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Spieler hat drei gleiche Karten} + 1 \text{ oder } 2 \text{ Trumpfkarten}) \\
 &= \frac{3}{11} * \frac{2}{10} * \frac{1}{9} * \frac{2}{8} * \frac{6}{7} * 20 + \frac{3}{11} * \frac{2}{10} * \frac{1}{9} * \frac{6}{8} * \frac{5}{7} * 10 = \frac{1440 + 1800}{55440} \\
 &= \frac{3240}{55440} = \frac{9}{154} \approx 0,0584416
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Ausspielende also drei Karten der gleichen bestimmten Farbe und ein oder zwei Trumpfkarten hat, liegt bei ca. 5,844%. Da es aber drei Farben gibt, mit denen dies passieren könnte, liegt die Wahrscheinlichkeit insgesamt, dass der Spieler drei Karten gleicher Farbe und ein oder zwei Trumpfkarten, und somit etwas zum Ausspielen hat, mit dem er gewinnen könnte, bei rund 17,53%.

Wenn nun eine der Karten, die man weggelegt hat, zu dem Zehner passen würde und die andere nicht, dann hätte man noch drei Trumpfkarten, zwei Karten der einen Farbe, drei Karten der anderen Farbe und vier Karten der letzten Farbe auf die anderen Spieler aufzuteilen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler der ausspielt in diesem Fall drei Karten einer Farbe hat, wurde bereits berechnet, wobei die Tatsache, dass nun andere Karten weggelegt wurden, das Ergebnis nicht verändert. Die Wahrscheinlichkeit liegt also auch in diesem Fall bei 5,844%. Ebenso unverändert bleibt die Wahrscheinlichkeit, dass er in so einem Fall vier Karten einer Farbe hat, wobei diese bei 1,515% liegt.

Der Fall, der noch nicht behandelt wurde, ist der, dass der Spieler, der ausspielt, die zwei übrigen Karten gleicher Farbe hat. Dabei ergibt sich auch der Spezialfall, dass der Spieler sowohl die drei Karten der einen Farbe als auch die zwei Karten der anderen Farbe und eine Trumpfkarte hat. Das wäre ein besonders ungünstiger Fall für den Spieler, der den Kontrabauern spielt, da der Rufer, der zuerst ausspielt, gewinnt, sofern er nicht seine Trumpfkarte ausspielt, was ein erfahrener Spieler auch nicht tun würde.

Zuerst wird die Wahrscheinlichkeit, die zwei verbliebenen Karten einer Farbe zu erhalten, berechnet. Der Spieler hat bereits sicher eine Trumpfkarte, weshalb nur die anderen fünf Karten unbekannt sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte eine dieser beiden Karten bestimmter Farbe ist, liegt bei $\frac{2}{11}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Karte ebenfalls die gleiche Farbe hat, liegt bei $\frac{1}{10}$. Die restlichen drei Karten sollen im ersten Fall keine Trumpfkarten sein und im zweiten Fall soll eine davon eine Trumpfkarte sein und die beiden anderen keine. Das ergibt im ersten Fall Wahrscheinlichkeiten von $\frac{7}{9}$, $\frac{6}{8}$ und $\frac{5}{7}$ und im zweiten Fall Wahrscheinlichkeiten von $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{8}$ und $\frac{6}{7}$.

Es gibt im ersten Fall analog zu vorhin 10 mögliche Reihenfolgen.

K...Karte einer bestimmten Farbe, T...Trumpfkarte, N...keine Trumpfkarte

(KKT NN), (KTK NN), (TKK NN), (KKN TN), (KKN NT), (KNK TN), (KNK NT), (NKK TN), (NKK NT), (NNT KK), (NTN KK), (TNN KK), (TKN KN), (TKN NK), (TNK KN), (TNK NK), (NKT KN), (NKT NK), (NTK KN), (NTK NK), (KNT KN), (KNT NK), (KTN KN), (KTN NK), (NNK TK), (NNK KT), (NKN TK), (NKN KT), (KNN TK), (KNN KT)

Das ergibt im zweiten Fall 30 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 30 multipliziert werden muss.

Insgesamt ergibt das folgende Rechnung:

$P(\text{Spieler hat 2 Karten gleicher Farbe} + 1 \text{ oder 2 Trumpfkarten})$

$$= \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * \frac{7}{9} * \frac{6}{8} * \frac{5}{7} * 10 + \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * \frac{2}{9} * \frac{7}{8} * \frac{6}{7} * 30 = \frac{4200 + 5040}{55440}$$

$$= \frac{9240}{55440} = \frac{1}{6} \approx 0,166667$$

Das bedeutet insgesamt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{9}{154} + \frac{1}{66} + \frac{1}{6} = \frac{222}{924} = \frac{37}{154}$, was rund 24,03% sind, der Spieler, der ausspielt, eine Karte hat, bei der der Mitspieler mit Trumpf stechen muss und die beiden somit den Kontrabauern gewinnen könnten. Die Frage danach, ob eine dieser Karten auch gespielt wird, lässt sich mathematisch nicht wirklich beantworten.

Nun wird noch die Wahrscheinlichkeit des zuvor beschriebenen Spezialfalles berechnet. Das verläuft sehr ähnlich zur vorherigen Rechnung. Die erste der fünf unbekannten Karten soll eine der Karten der Farbe sein, von der es nur mehr zwei Karten gibt, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{11}$ ergibt. Die nächste Karte soll farblich zur ersten passen, weshalb die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ beträgt. Die nächste Karte soll in der Farbe sein, von der es noch drei Karten gibt, weshalb die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{3}{9}$ liegt. Die nächsten beiden Karten sollen dieselbe Farbe haben wie die vorherige, weshalb ihre Wahrscheinlichkeiten $\frac{2}{8}$ und $\frac{1}{7}$ betragen. Es gibt analog zu einem vorherigen Beispiel 10 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 10 multipliziert werden muss. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(2 \text{ Gleiche} + 3 \text{ Gleiche} + \text{Trumpf}) = \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * \frac{3}{9} * \frac{2}{8} * \frac{1}{7} * 10 = \frac{120}{55440} = \frac{1}{462} \approx$$

$$\approx 0,00216450$$

Die Wahrscheinlichkeit liegt also gerade einmal bei 0,2165%, dass die Karten für den Spieler, der den Kontrabauern spielt, so ungünstig aufgeteilt sind, dass er auf diese Weise sofort verloren hätte, wenn der Spieler, der ausgerufen hat, nicht Trumpf ausspielt.

Das waren alle möglichen Fälle, wenn man beim Dreierschnapsen einen Kontrabauern mit vier Assen und zwei Zehner spielt.

8.1b Drei Trumpfkarten und drei Asse

Im nächsten Fall will ein Spieler einen Kontrabauern spielen, der drei Trumpfkarten, von denen eine das Ass ist, und drei weitere Asse hat. Wenn sich die Trumpfkarten aus den Kombinationen Ass, Zehner und König, Ass, Zehner und Ober oder Ass, Zehner und Unter zusammensetzen, so gibt es keine Gabel in der Trumpffarbe. Hat man allerdings Trumpf Ass mit Ober und Unter, mit König und Ober oder mit König und Unter, so könnte es eine Gabel in der Trumpffarbe geben. In so einem Fall hat der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, unabhängig davon, was zuerst ausgespielt wird oder wie das Spiel verläuft, auf jeden Fall verloren, sofern der Spieler mit der Gabel auch weiß, wie er diese einsetzen muss. Wenn das Trumpf Ass gespielt wird, so muss man die niedrigere Karte der Gabel geben, um dann mit der höheren Karte noch stechen zu können. In diesem Fall, wo die höhere Karte der Trumpf Zehner ist, wird dieser nun zur höchsten Karte des Spiels und ein sicherer Stich für den Spieler, der diese Karte hat, womit der Kontrabauer für den Spieler, der ihn angesagt hat, verloren ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Gabel tatsächlich existiert, lässt sich leicht berechnen. Da der Spieler, der gerufen hat, sicher eine Trumpfkarte besitzt, kann nur er möglicherweise die Gabel haben. Dazu muss er nur noch eine weitere Trumpfkarte erhalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, als erste Karte diese Trumpfkarte zu erhalten, beträgt $\frac{1}{11}$. Die restlichen vier Karten sind beliebig. Wegen der fünf möglichen Reihenfolgen muss mit Fünf multipliziert werden. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{Gabel existiert}) = \frac{1}{11} * 5 \approx 0,454545$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Gabel existiert, beträgt also, unabhängig davon, dass es nun eine unbekannte Karte weniger gibt, wie schon im Kapitel „Gangl und ihre Fänger“ 45,46%.

Nun geht es aber um den Fall, dass es keine Gabel gibt, egal, aus welcher Kombination die Trumpfkarten bestehen. Da man als Spieler, wenn man einen Kontrabauern spielt, wie schon zuvor, auch die beiden Karten kennt, die weggelegt wurden, verändert dieser Umstand und vor allem, um welche Karten es sich dabei handelt, die Wahrscheinlichkeit davon, was die anderen Spieler möglicherweise haben.

Im ersten Fall werden die verdeckten Karten als Karten gleicher Farbe passend zu einer der Asse gewählt. Das bedeutet, dass für die anderen beiden Spieler zwei Karten der einen Farbe, die nicht Trumpf ist, übrig bleiben und je vier Karten der beiden anderen Farben, die nicht Trumpf sind. Weiters gibt es noch zwei Trumpfkarten, die in diesem Fall, da keine Gabel existieren soll, auf beide Spieler aufgeteilt sein sollen. Der Spieler, der ausgerufen hat, muss schon sicher eine dieser beiden Trumpfkarten besitzen.

Um nun auszurechnen, wie wahrscheinlich es ist, dass der Spieler, der gerufen hat, eine Karte hat, die er ausspielen kann, sodass sein Mitspieler mit Trumpf stechen kann, muss berechnet werden, wie wahrscheinlich es ist, dass der Spieler, der weder gerufen noch den Kontrabauern angesagt hat, von einer Farbe keine einzige Karte und eine Trumpfkarte hat.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler keine Karten der Farbe, von der es nur mehr zwei Karten gibt, erhält, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um eine Trumpfkarte handelt, liegt bei $\frac{1}{11}$. Die verbliebenen fünf Karten dürfen nun keine Karten der Farbe sein, von der es nur mehr zwei Karten gibt, weshalb ihre Wahrscheinlichkeiten dafür $\frac{8}{10}, \frac{7}{9}, \frac{6}{8}, \frac{5}{7}$ und $\frac{4}{6}$ betragen. Es gibt sechs mögliche Reihenfolgen, weshalb mit Sechs multipliziert werden muss. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{keine Karten bestimmter Farbe} + \text{Trumpf}) = \frac{1}{11} * \frac{8}{10} * \frac{7}{9} * \frac{6}{8} * \frac{5}{7} * \frac{4}{6} * 6 = \frac{120}{990} = \\ = \frac{4}{33} \approx 0,121212$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der gerufen hat, etwas ausspielen kann, womit er gewinnt, liegt also bei 12,12%. In diesem Fall ist es so, dass, wenn der Spieler der den Kontrabauern angesagt hat, sich anstatt der beiden blanken Asse die zwei Karten gleicher Farbe, falls es sich bei einer von ihnen um einen Zehner handeln würde, behält, so hätte er insgesamt nur eine Wahrscheinlichkeit von 12,12%, dass er den Kontrabauern möglicherweise verliert. Behält er die beiden Asse jedoch, so gibt es noch weitere für ihn ungünstige Kartenkombinationen, wie zum Beispiel folgende:

Von zwei der Farben, die nicht Trumpf sind, gibt es noch jeweils vier Karten. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der weder gerufen hat, noch den Kontrabauern angesagt hat, als erste Karte eine Trumpfkarte hat, liegt bei $\frac{1}{11}$. Die nächsten fünf Karten sollen keine der vier Karten bestimmter Farbe sein, wofür die zweite Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{10}$, die dritte Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{9}$, die vierte Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{8}$, die fünfte Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{7}$ und die sechste Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{6}$ hat. Es gibt sechs mögliche Reihenfolgen, weshalb mit sechs multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{keine Karten bestimmter Farbe} + 1 \text{ Trumpf}) = \frac{1}{11} * \frac{6}{10} * \frac{5}{9} * \frac{4}{8} * \frac{3}{7} * \frac{2}{6} * 6 = \\ = \frac{4320}{332640} = \frac{1}{77} \approx 0,0129870$$

Das bedeutet, dass insgesamt die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der gerufen hat, eine Karte ausspielen kann, mit der er gewinnen wird, falls er die beiden blanken Asse behält, bei $\frac{4}{33} + 2 * \frac{1}{77} = \frac{34}{231}$ liegt, was rund 14,72% sind.

Im nächsten Fall handelt es sich bei den beiden weggelegten Karten um Karten verschiedener Farben, die nicht Trumpf sind, von denen natürlich beide zu den Assen passen. Das bedeutet, es gibt von einer Farbe, die nicht Trumpf ist, noch vier weitere Karten und von den anderen beiden Farben, die nicht Trumpf sind, noch drei weitere Karten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der gerufen hat, die vier Karten gleicher Farbe und eine Trumpfkarte hat, liegt, wie schon zuvor berechnet, bei $\frac{1}{77}$. An dieser Wahrscheinlichkeit verändern die weggelegten Karten nämlich nichts.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der weder gerufen hat, noch den Kontrabauern angesagt hat, von einer Farbe, wovon es noch drei Karten gibt, keine Karten hat, lässt sich folgendermaßen berechnen: Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte eine Trumpfkarte ist, liegt bei $\frac{1}{11}$. Die restlichen fünf Karten sollen keine Karten der Farbe sein, wovon es noch drei Karten gibt, wofür die Wahrscheinlichkeiten $\frac{7}{10}, \frac{6}{9}, \frac{5}{8}, \frac{4}{7}$ und $\frac{3}{6}$ betragen. Da es sechs

Anordnungsmöglichkeiten gibt, muss man mit Sechs multiplizieren. Das ergibt insgesamt folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{keine Karten bestimmter Farbe} + 1 \text{ Trumpf}) = \frac{1}{11} * \frac{7}{10} * \frac{6}{9} * \frac{5}{8} * \frac{4}{7} * \frac{3}{6} * 6 = \frac{360}{7920} = \frac{1}{22} \approx 0,0454545$$

Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit insgesamt, dass der Spieler, der gerufen hat, eine Karte ausspielen kann, mit der er, wenn er sie ausspielt, gewinnen wird, bei $\frac{1}{77} + 2 * \frac{1}{22} = \frac{8}{77}$ liegt, was rund 10,39% sind.

Das bedeutet, dass es insgesamt besser für den Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, wäre, wenn es sich bei den beiden weggelegten Karten um zwei Karten ungleicher Farbe handeln würde, da es in diesem Fall unwahrscheinlicher ist, dass der Spieler, der gerufen hat, eine Karte ausspielen kann, die der dritte Spieler mit Trumpf stechen müsste. Mit einer Wahrscheinlichkeit von lediglich 10,39% ist es nämlich fraglich, ob der Spieler, der ausgerufen hat, solch eine Karte überhaupt hat, geschweige denn, sie wirklich ausspielt.

8.1c Drei Trumpfkarten und drei Karten gleicher Farbe

Im nächsten Fall sagt ein Spieler einen Kontrabauern mit drei Trumpfkarten und drei Karten gleicher Farbe, wovon eine das Ass ist, an. Bei den Trumpfkarten gibt es wieder, abhängig davon, um welche Kartenkombination es sich handelt, mit 45,46% die Möglichkeit eines Fängers, wobei diese in der folgenden Rechnung nicht relevant ist. Ebenfalls könnte eventuell ein Fänger für die drei Karten gleicher Farbe existieren, wobei hierfür die Wahrscheinlichkeit sehr einfach berechnet werden kann.

Der Spieler, der gerufen hat, und schon sicher eine Trumpfkarte besitzt, hat noch fünf unbekannte Karten. Die Wahrscheinlichkeiten, dass die erste und die zweite Karte die zwei Teile der Gabel, die der Fänger wäre, sind, betragen $\frac{2}{11}$ und $\frac{1}{10}$, da es in dieser Farbe nur mehr zwei Karten gibt. Die restlichen drei Karten sind beliebig.

B...beliebige Karte N...Karte bestimmter Farbe

(BBB NN), (BBN NB), (BBN BN), (BNB NB), (BNB BN), (NBB NB), (NBB BN),
(NNB BB), (BNN BB), (NBN BB)

Es gibt 10 mögliche Reihenfolgen, weshalb mit 10 multipliziert werden muss.

Der Spieler, der weder den Kontrabauern angesagt, noch gerufen hat, hat die gleichen Wahrscheinlichkeiten von $\frac{2}{11}$ und $\frac{1}{10}$, dass es sich bei den ersten beiden Karten um die zwei Teile der Gabel handelt. Seine restlichen vier Karten sind beliebig.

B...beliebige Karte N...Karte bestimmter Farbe

(BBB BNN), (BBB NBN), (BBB NNB), (BBN BNB), (BBN BBN), (BBN NBB),
(BNN BBB), (NNB BBB), (NBN BBB), (BNB BBN), (BNB BNB), (BNB NBB),
(NBB BBN), (NBB BNB), (NBB NBB)

Es gibt 15 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 15 multipliziert werden muss.

Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{Gabel existiert}) = \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * 15 + \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * 10 = \frac{30 + 20}{110} = \frac{5}{11} \approx 0,454545$$

Es gibt also wieder eine 45,46%ige Chance, dass die Gabel existiert. Auch diese Überlegung wird für die folgende Rechnung nicht von Bedeutung sein.

Die verdeckten Karten beeinflussen wieder die Frage danach, ob der Spieler, der gerufen hat, etwas ausspielen kann, mit dem er gewinnt. Im ersten Fall handelt es sich bei den beiden weggelegten Karten um zwei Karten, die keine Trumpfkarten sind und beide eine andere Farbe haben als die drei Karten gleicher Farbe in der Hand des Spielers, der den Kontrabauern angesagt hat. Das bedeutet, dass es noch zwei Karten gibt, die relevant sind, und zwar die beiden Karten in der Farbe der drei Karten gleicher Farbe. Nur, wenn der Spieler, der gerufen hat, eine Karte in dieser Farbe ausspielt, kann nämlich der nächste Spieler mit Trumpf stechen und der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, darf wegen dem Farbzwang den Stich nicht selbst mit Trumpf machen. Er muss eine seiner anderen drei Karten geben, womit der Stich nicht ihm gehört und er verloren hat. Das bedeutet, dass der Spieler, der gerufen hat, die

restlichen beiden Karten der Farbe haben muss und nur eine der beiden übrigen Trumpfkarten haben darf, damit er gewinnen kann. Damit dies der Fall ist, muss der Spieler, der weder der Kontrabauern angesagt, noch gerufen hat, eine Trumpfkarte besitzen und darf keine der beiden Karten der Farbe haben.

Diese Wahrscheinlichkeit wurde aber bereits berechnet und liegt bei 12,12%.

Ein weiterer Fall wäre, wenn die beiden verdeckten Karten die gleiche Farbe wie die drei Karten hätten, die der Spieler, der den Kontrabauern spielt, in der Hand hat, die aber keine Trumpfkarten sind,. So hätte dieser Spieler nämlich ein Ringerl aber weiters auch keinen Fänger, wenn er einen Kontrabauern spielt. Der Spieler, der gerufen hat, kann nun ausspielen, was er will. Er hat keine Chance zu gewinnen, außer er hat die Gabel in der Trumpffarbe, was aber ohnehin ein sicherer Weg ist, sowohl einen Kontrabauern als auch einen Bauern zu gewinnen und auch nur dann möglich, wenn keine der drei Trumpfkarten, von denen eine das Ass sein muss, der Zehner ist.

Die dritte Möglichkeit für die beiden weggelegten Karten ist es, dass eine davon die Farbe der drei Gleichen hat. In diesem Fall bleibt nur eine Karte dieser Farbe übrig für die anderen beiden Mitspieler. Einer der beiden muss die Karte haben. Wenn der Spieler, der gerufen hat, diese und nur eine Trumpfkarte hat, so gewinnt er, wenn er diese Karte ausspielt, da der nächste Spieler, da er keine Karte dieser Farbe haben kann, mit Trumpf stechen müsste, und der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, Farbe geben müsste. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der gerufen hat, nun diese Karte und nur eine Trumpfkarte hat, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Der Spieler hat bereits sicher eine Trumpfkarte, weshalb für die Berechnung nur die fünf weiteren Karten von Bedeutung sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste dieser fünf Karten nun diese Karte bestimmter Farbe ist, liegt bei $\frac{1}{11}$. Die nächsten vier Karten sollen keine Trumpfkarten sein, weshalb deren Wahrscheinlichkeiten bei $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$ und $\frac{6}{7}$ liegen. Es gibt fünf mögliche Reihenfolgen der Karten, weshalb mit Fünf multipliziert werden muss. Darum ergibt sich folgende Rechnung:

$$P(\text{bestimmte Karte} + 1 \text{ Trumpf}) = \frac{1}{11} * \frac{9}{10} * \frac{8}{9} * \frac{7}{8} * \frac{6}{7} * 5 = \frac{15120}{55440} = \frac{3}{11} \approx 0,272727$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass also der Spieler, der gerufen hat, eine Karte hat, mit der er gewinnen kann, liegt bei rund 27,27%.

Jetzt wäre es natürlich interessant die Situation aus der Perspektive des Spielers, der gerufen hat, zu betrachten. Dieser hat verschiedene Karten in der Hand. Mit großer Wahrscheinlichkeit hat er mindestens eine Trumpfkarte. Diese sofort auszuspielen wäre in jedem Fall ein Fehler, selbst wenn er die Gabel hätte. Dabei könnte nämlich der Fehler passieren, dass er den Unter zuerst ausspielt und dieser dann mit dem König anstatt des Asses niedrig gestochen werden könnte. Wie nun schon aus den vorgegangenen Berechnungen ersichtlich wurde, war es in den meisten Fällen ratsam, möglichst eine Karte einer Farbe auszuspielen, von der man viele Karten, aber nicht das Ass, hat. Hat man mehr als eine Trumpfkarte, so ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass man mit dem ersten Stich gar nicht fangen kann und es egal ist, was man als erstes ausspielt, da der Partner mit großer Wahrscheinlichkeit ohnehin nicht mit Trumpf stechen können würde. Hat man drei Trumpfkarten, so hat man das Spiel schon gewonnen. Ebenso, wenn man zwei Trumpfkarten hat, die eine Gabel bilden, vorausgesetzt, eine der beiden Karten ist der Trumpf Zehner. Hat man nämlich zum Beispiel König und Unter, so wäre es nur eine Gabel, wenn der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, nur Ass und Ober hätte. Doch mit solchen Karten würde man ohnehin keinen Kontrabauern spielen. Was natürlich auch interessant ist, sind alle anderen Fänger, außer den Trumpf Fängern. Es ist nämlich durchaus möglich, dass der Spieler, der den Kontrabauern spielt, auch noch andere Fänger in Form von Gabeln oder gar Assen hat. Darum sollte man keine Karte ausspielen, wenn sie Teil einer Gabel ist, die zum Beispiel aus Zehner und Unter besteht. Dies käme dem Zerreißen der Gabel gleich. Ist es eine Gabel, die aus Zehner und König besteht, so ist es in Ordnung, sie als erstes auszuspielen, da beide Karten nur mit dem Ass und somit nicht niedrig gestochen werden könnten. Manche Kartenkombinationen sind auch wahrscheinlicher als andere, was aber kaum ins Gewicht fällt, da es prinzipiell schon sehr unwahrscheinlich ist, überhaupt einen Kontrabauern zu erhalten. Also sollte man als Spieler logisch überlegen, was man ausspielen könnte, um zu gewinnen.

Wenn man nun tatsächlich vier Karten gleicher Farbe bekommen hat, von denen keine ein Ass ist, und nur eine Trumpfkarte, so sollte man auf alle Fälle eine von ihnen ausspielen, da die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der den Kontrabauern spielt, dieses Ass hat und auch behalten hat, größer ist, als die, dass der andere Spieler dieses Ass hat. Manchmal kommt es natürlich auch vor, dass der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, vier Trumpfkarten hat, womit er, falls er nicht noch zusätzlich auf einer Gabel hängt, auf jeden Fall gewinnt.

Dann wäre es aber auch egal, was man ausspielt. Es geht hier vor allem darum, wie man, falls es eine richtige Karte zum Ausspielen gibt, damit man gewinnt, diese auch findet.

Hat man drei Karten gleicher Farbe und nur eine Trumpfkarte, so sollte man wieder eine dieser Karten ausspielen. Es wäre natürlich auch möglich, dass eine der einzelnen Karten die richtige ist. Aber die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der gerufen hat, genau dieses Ass besitzt, ist einfach höher als die Wahrscheinlichkeit, dass er vier Karten gleicher Farbe in der Hand hält.

8.2 Viererschnapsen

Beim Viererschnapsen einen Kontrabauern zu spielen funktioniert genauso wie beim Dreierschnapsen. Der einzige Unterschied ist, dass man keinen Kontrabauern spielen kann, wenn sein eigener Partner ausgerufen hat. Es werden nun wie schon beim Dreierschnapsen verschiedene Fälle analysiert.

8.2a Vier Asse und ein Zehner

Im ersten Fall hat ein Spieler vier Asse und einen zugehörigen Zehner. Eine der Assen und der Zehner sind Trumpfkarten. Das Fangen solch eines Kontrabauern verhält sich so, wie auch beim Dreierschnapsen. Einer der Spieler muss den ersten Stich machen, indem er mit Trumpf stechen darf, weil er keine Karte der ausgespielten Farbe hat. Wenn der Spieler, der den Kontrabauern spielt, alle vier Asse und einen zugehörigen Zehner in Trumpffarbe hat, so gibt es noch jeweils vier Karten in den Farben, die nicht Trumpf sind und drei Trumpfkarten, die aufgeteilt sein müssen, weil ansonsten der Kontrabauer bereits sicher verloren ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Spieler drei Trumpfkarten hat, lässt sich leicht berechnen:

Da der Spieler, der gerufen hat, sicher eine Trumpfkarte hat, hat auch nur er die Möglichkeit, drei Trumpfkarten zu haben. Es gibt vier unbekannte Karten. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten davon um eine Trumpfkarte handelt, beträgt $\frac{2}{14}$. Dass die zweite Karte eine Trumpfkarte ist, hat eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{13}$. Die restlichen zwei Karten können beliebig gewählt werden.

T...Trumpf B...beliebige Karte

(TT BB), (TB TB), (TB BT), (BT BT), (BT TB), (BB TT)

Es gibt also sechs Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit Sechs multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(\text{drei Trumpfkarten}) = \frac{2}{14} * \frac{1}{13} * 6 = \frac{12}{182} = \frac{6}{91} \approx 0,0659341$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der gerufen hat, drei Trumpfkarten in der Hand hält, liegt also bei rund 6,60%. In diesem Fall wäre der Kontrabauer für denjenigen, der ihn angesagt hat, sicher verloren.

Nun wird berechnet, wie wahrscheinlich es ist, dass einer der beiden Spieler, die nicht gerufen haben, von einer der vier Farben keine Karte hat. Es gibt noch vier Karten pro Farbe, die nicht Trumpf sind. Das bedeutet, ein Spieler kann höchstens zwei Farben nicht haben. Das wäre der Fall, wenn er vier Karten einer Farbe und eine Trumpfkarte hätte oder drei Karten einer Farbe und zwei Trumpfkarten. In diesem Fall könnte der Spieler alles, was ausgespielt werden würde, mit Trumpf stechen. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte eine Trumpfkarte ist, beträgt $\frac{2}{14}$. Für die zweite Karte liegt die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{1}{13}$, eine Trumpfkarte zu sein. Die nächsten drei Karten sollen Karten gleicher Farbe sein, weshalb ihre Wahrscheinlichkeiten bei $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{11}$ und $\frac{2}{10}$ liegen. Analog zu einer vorherigen Rechnung gibt es 10 Anordnungsmöglichkeiten. Des Weiteren gibt es drei verschiedene Farben, die die drei Karten haben könnten, weshalb mit Drei multipliziert werden muss. Im zweiten Fall soll die erste Karte eine Trumpfkarte sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{14}$ beträgt. Die nächsten vier Karten sollen Karten gleicher Farbe sein, wofür die Wahrscheinlichkeiten bei $\frac{4}{13}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{11}$ und $\frac{1}{10}$ liegen. Es gibt Fünf Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit Fünf multipliziert werden muss. Des Weiteren gibt es drei verschiedene Farben, die die vier Karten haben könnten, weshalb mit Drei multipliziert werden muss. Außerdem gibt es in beiden Fällen zwei Spieler, die diese Kartenkombination haben könnten, weshalb insgesamt mit Zwei multipliziert werden muss. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{nur eine Farbe} + \text{Trumpf}) =$$

$$= \left(\frac{2}{14} * \frac{1}{13} * \frac{4}{12} * \frac{3}{11} * \frac{2}{10} * 10 * 3 + \frac{2}{14} * \frac{4}{13} * \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * 5 * 3 \right) * 2 =$$

$$= \frac{1440 + 720}{240240} * 2 = \frac{4320}{240240} = \frac{18}{1001} \approx 0,0179820$$

Das bedeutet, mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1,798% verliert der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, durch diese Kartenkombination beim ersten Stich, wenn der Spieler, der ausgerufen hat, keine Trumpfkarte ausspielt.

Die zweite Möglichkeit ist, dass einer der beiden Spieler, die weder gerufen noch den Kontrabauern angesagt haben, nur eine Farbe nicht in der Hand hat. Das bedeutet, er hat nur Karten der anderen zwei Farben, die nicht Trumpf sind und ein oder zwei Trumpfkarten. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um eine Trumpfkarte handelt, beträgt $\frac{2}{14}$. Die nächsten vier Karten sollen im ersten Fall weder Trumpfkarten, von denen es noch eine gibt, noch Karten einer bestimmten Farbe sein, von der es noch vier Karten gibt. Das bedeutet, es gibt fünf Karten, die ungünstig sind. Die Wahrscheinlichkeit für die zweite Karte, keine dieser fünf Karten zu sein, liegt also bei $\frac{8}{13}$, für die dritte bei $\frac{7}{12}$, für die vierte bei $\frac{6}{11}$ und für die fünfte bei $\frac{5}{10}$. Es gibt fünf Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit Fünf multipliziert werden muss. Außerdem gibt es drei verschiedene Farben, die nicht kommen könnten, weshalb mit Drei multipliziert werden muss. Im zweiten Fall ist die zweite Karte, so wie die erste, eine Trumpfkarte mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{13}$. Da es nun keine Trumpfkarten mehr gibt, sind es nun nur noch die vier Karten gleicher Farbe, die ungünstig sind. Das bedeutet, die dritte Karte hat eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{8}{12}$, keine dieser ungünstigen Karten zu sein, die vierte Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{7}{11}$ und die fünfte Karte eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{10}$. Es gibt analog zu vorhin 10 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 10 multipliziert werden muss. Des Weiteren gibt es wieder drei verschiedene Farben, die nicht kommen könnten, weshalb mit Drei multipliziert werden muss. Außerdem gibt es zwei Spieler, die diese Kartenkombination haben könnten, weshalb mit Zwei multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$P(\text{ein Spieler hat eine Farbe nicht}) =$

$$= \left(\frac{2}{14} * \frac{8}{13} * \frac{7}{12} * \frac{6}{11} * \frac{5}{10} * 5 * 3 + \frac{2}{14} * \frac{1}{13} * \frac{8}{12} * \frac{7}{11} * \frac{6}{10} * 10 * 3 \right) * 2$$

$$= \frac{50400 + 20160}{240240} * 2 = \frac{141120}{240240} = \frac{84}{143} \approx 0,587413$$

Das bedeutet, mit einer Wahrscheinlichkeit von 58,74% kann der Spieler, der gerufen hat, etwas ausspielen, das einer der anderen Spieler mit Trumpf stechen kann, wodurch derjenige, der den Kontrabauern angesagt hat, verloren hätte. Das für den Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, beim Viererschnapsen ungünstig ist, dass selbst wenn sein eigener Partner den Kontrabauern sticht, der Kontrabauer für beide verloren wäre. Der Mitspieler kann manchmal gar nichts dagegen tun, dass er den eigenen Partner fängt.

Das sind alle möglichen Fälle bei diesem Beispiel. Am Wahrscheinlichsten wird es also sein, dass der Spieler, der gerufen hat, tatsächlich etwas zum Ausspielen hat, womit er gewinnen könnte. Auffällig ist hierbei, dass die Wahrscheinlichkeit, beim Viererschnapsen einen Kontrabauern zu gewinnen, geringer zu sein scheint, als beim Dreierschnapsen.

8.2b Drei Trumpfkarten und zwei Asse

Im nächsten Fall wird der Kontrabauer mit drei Trumpfkarten, von denen eine das Ass ist, und zwei zusätzlichen Assen gespielt. Um welche Kombination es sich dabei handelt, ist nicht von Bedeutung. Je nachdem könnte eine Gabel existieren oder nicht. Wenn zwei der drei Trumpfkarten Ass und Zehner sind, so existiert definitiv keine Gabel. Wenn nicht, so gäbe es zumindest die Möglichkeit. Ob eine Gabel in diesem Fall existiert, was nur der Fall sein kann, wenn es sich bei keiner der Trumpfkarten um den Zehner handelt, lässt sich sehr leicht berechnen.

Es gibt nur einen Spieler, der die Gabel möglicherweise haben könnte, und zwar derjenige, der bereits sicher eine Trumpfkarte hat. Der Spieler, der ausgerufen hat, müsste also nur noch eine weitere Trumpfkarte haben, und hätte somit eine Gabel und sicher gewonnen. Die Wahrscheinlichkeit, dass er eine weitere Trumpfkarte hat, liegt bei $\frac{1}{14}$. Die nächsten vier Karten sind beliebig. Wegen der fünf möglichen Reihenfolgen muss mit Fünf multipliziert werden. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(\text{Gabel existiert}) = \frac{1}{14} * 5 \approx 0,357143$$

Die Gabel existiert also mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 35,71%. In Folgendem gehe ich aber immer davon aus, dass die Gabel nicht existiert.

Der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, besitzt drei Trumpfkarten, weshalb es noch zwei aufzuteilen gilt, wobei eine davon sicher dem Spieler gehört, der ausgerufen hat. Auch gibt es von zwei Farben, die nicht Trumpf sind, noch jeweils vier Karten und von der letzten Farbe, die nicht Trumpf ist, noch alle fünf Karten.

Da die Trumpfkarten aufgeteilt sein sollen und es eigentlich auch sein müssen, da derjenige, der gerufen hat, mindestens eine Trumpfkarte hat, können die beiden Spieler, die weder gerufen noch den Kontrabauern angesagt haben, nur höchstens eine Trumpfkarte haben. Das bedeutet, es gibt wieder den Fall, bei dem ein Spieler von zwei Farben keine Karten hat, und zwar indem er eine Trumpfkarte und vier Karten gleicher Farbe hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür wird folgendermaßen berechnet:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte eine Trumpfkarte ist, liegt bei $\frac{1}{14}$. Die nächsten vier Karten sollen Karten gleicher Farbe sein. Es muss nun zwischen zwei Fällen unterschieden werden. Von zwei Farben gibt es noch vier Karten, weshalb die Wahrscheinlichkeiten, dass diese vier hintereinander kommen, bei $\frac{4}{13}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{11}$ und $\frac{1}{10}$ liegen. Man muss wegen der Reihenfolge mit Fünf multiplizieren und wegen der zwei verschiedenen Farben mit Zwei. Da der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, von einer Farbe keine Karten hat, muss der Spieler, der ausgerufen hat, nun mindestens eine Karte der beiden Farben, von denen der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, jeweils die Ass hat, haben, damit er etwas ausspielen kann, mit dem er gewinnt. Das bedeutet, er darf zu seiner Trumpfkarte nicht vier Karten der Farbe bekommen, die derjenige, der den Kontrabauern spielt, nicht hat. Das bedeutet, man muss das Gegenereignis davon ausrechnen, dass der Spieler diese vier Karten gleicher Farbe erhält. Die Wahrscheinlichkeiten, dass es sich bei den vier Karten um Karten dieser Farbe handelt, betragen $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{6}$. Die Gegenwahrscheinlichkeit davon lässt sich folgendermaßen berechnen: $1 - \frac{5}{9} * \frac{4}{8} * \frac{3}{7} * \frac{2}{6} = \frac{121}{126}$.

Im zweiten Fall gibt es noch fünf Karten einer Farbe, weshalb die Wahrscheinlichkeiten, dass diese vier nach dem Erhalt der Trumpfkarte hintereinander kommen, $\frac{5}{13}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{11}$ und $\frac{2}{10}$

betragen. Wegen der Reihenfolge muss mit Fünf multipliziert werden. In diesem Fall kann der Spieler, der gerufen hat, nur mehr höchstens eine Karte in der Farbe, die der Spieler, der den Kontrabauern spielt, nicht hat, haben, weshalb ihm mindestens drei Karten bleiben, die er ausspielen kann, um zu gewinnen.

Es gibt zwei Spieler, die die Kartenkombinationen haben könnten, weshalb insgesamt mit Zwei multipliziert werden muss. Das ergibt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 P(4 \text{ Karten gleicher Farbe} + 1 \text{ Trumpf}) &= \\
 &= \left(\frac{1}{14} * \frac{4}{13} * \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * 5 * 2 * \frac{121}{126} + \frac{1}{14} * \frac{5}{13} * \frac{4}{12} * \frac{3}{11} * \frac{2}{10} * 5 \right) * 2 = \\
 &= \frac{240 * 121 + 600 * 126}{240240 * 126} * 2 = \frac{209280}{30270240} = \frac{436}{63063} \approx 0,00691372
 \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler, der ausgerufen hat, etwas ausspielen kann, womit er gewinnt, beträgt in diesem Fall rund 0,6914%.

Eine weitere Möglichkeit, dass der Spieler, der gerufen hat, etwas ausspielen kann, womit er gewinnt, wäre, dass einer der anderen beiden Spieler, die den Kontrabauern nicht angesagt haben, nur von einer Farbe keine Karten und eine Trumpfkarte hätten. Das lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte eine Trumpfkarte ist, beträgt $\frac{1}{14}$. Von den zwei Farben, in denen derjenige, der den Kontrabauern angesagt hat, die Asse hat, gibt es noch jeweils vier Karten, weshalb es also vier ungünstige Karten sind. Die Wahrscheinlichkeiten, dass die nächsten vier Karten keine dieser ungünstigen Karten sind, liegen also bei $\frac{9}{13}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{7}{11}$ und $\frac{6}{10}$. Für die Reihenfolge muss mit Fünf multipliziert werden. Außerdem gibt es zwei mögliche Farben für diesen Fall, weshalb mit Zwei multipliziert werden muss. Der Spieler, der gerufen hat, muss, damit er etwas ausspielen kann, um zu gewinnen, mindestens eine Karte der Farbe haben, die der Spieler, der die zweite Trumpfkarte hat, nicht hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine erste Karte diese Farbe hat, beträgt $\frac{4}{9}$. Die restlichen drei Karten sollen keine Karten dieser Farbe sein, weshalb ihre Wahrscheinlichkeiten $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{7}$ und $\frac{3}{6}$ betragen. Wegen der Reihenfolge muss mit Vier multipliziert werden. Die

Wahrscheinlichkeiten dafür, dass es sich sogar bei zwei der Karten um Karten dieser Farbe handelt, betragen $\frac{4}{9}$ und $\frac{3}{8}$, wobei die nächsten zwei Karten mit Wahrscheinlichkeiten von $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{6}$ keine Karten dieser Farbe sein sollen. Wegen der Reihenfolge muss mit Sechs multipliziert werden. Die Wahrscheinlichkeiten davon, dass es sich bei drei der Karten um Karten dieser Farbe handelt, betragen $\frac{4}{9}, \frac{3}{8}$ und $\frac{2}{7}$, wobei die vierte Karte eine andere Farbe haben soll, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ beträgt. Wegen den vier Anordnungsmöglichkeiten muss mit Vier multipliziert werden. Die Wahrscheinlichkeiten davon, dass es sich sogar um vier Karten dieser Farbe handelt, liegen bei $\frac{4}{9}, \frac{3}{8}, \frac{2}{7}$ und $\frac{1}{6}$. Es gibt zwei Spieler, die die erste Kartenkombination haben könnten, weshalb mit Zwei multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

P(ein Spieler hat eine Farbe nicht)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{14} * \frac{9}{13} * \frac{8}{12} * \frac{7}{11} * \frac{6}{10} * 5 * 2 * \\
 &* \left(\frac{4}{9} * \frac{5}{8} * \frac{4}{7} * \frac{3}{6} * 4 + \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * \frac{5}{7} * \frac{4}{6} * 6 + \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * \frac{2}{7} * \frac{5}{6} * 4 + \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * \frac{2}{7} * \frac{1}{6} \right) * 2 \\
 &= \frac{60480}{240240} * \frac{2904}{3024} = \frac{36}{143} * \frac{121}{126} = \frac{2}{13} * \frac{11}{7} = \frac{22}{91} \approx 0,241758
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der gerufen hat, etwas ausspielen kann, um zu gewinnen, liegt also bei rund 24,18%.

8.2c Drei Trumpfkarten und zwei Karten gleicher Farbe

Im nächsten Fall wird ein Kontrabauer mit drei Trumpfkarten, von denen eine das Ass ist, und zwei Karten gleicher Farbe gespielt, wobei es sich hierbei um Ass und Zehner handelt. Die Kombination der Trumpfkarten ist analog zum vorherigen Fall nicht relevant. Es könnte eventuell eine Gabel mit 35,71%iger Wahrscheinlichkeit existieren, falls es sich nicht bei einer der Trumpfkarten um den Zehner handelt, jedoch wird in Folgendem davon ausgegangen, dass sie nicht existiert.

Wenn der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, drei Trumpfkarten und zwei Karten gleicher Farbe hat, so ist die einzige Möglichkeit, für den Spieler, der ausgerufen hat, etwas ausspielen zu können, um zu gewinnen, dass dieser mindestens eine Karte derselben Farbe wie die zwei Karten gleicher Farbe hat und der Spieler, der eine Trumpfkarte hat, keine Karte dieser Farbe besitzt. Der Spieler, der gerufen hat, besitzt bereits eine Trumpfkarte. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte seiner vier unbekannten Karten, eine Karte der bestimmten Farbe ist, liegt bei $\frac{3}{14}$. Die restlichen drei Karten sollen im ersten Fall weder Trumpfkarten, noch weitere Karten derselben Farbe sein, weshalb es drei ungünstige Karten gibt. Das bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dass man als zweite Karte keine dieser Karten hat, liegt bei $\frac{10}{13}$, für die dritte Karte bei $\frac{9}{12}$ und für die vierte Karte bei $\frac{8}{11}$. Da es vier Anordnungsmöglichkeiten gibt, muss mit Vier multipliziert werden. Der zweite Spieler soll eine Trumpfkarte haben, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ beträgt. Er soll des Weiteren eine Karte der gleichen Farbe haben, wovon der Spieler, der den Kontrabauern spielt, Ass und Zehner hat, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$ beträgt. Die restlichen Karten sollen im ersten Fall nicht derselben Farbe sein, weshalb es eine ungünstige Karte gibt. Deshalb haben die restlichen drei Karten Wahrscheinlichkeiten von $\frac{7}{8}$, $\frac{6}{7}$ und $\frac{5}{6}$. Außerdem gibt es 20 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 20 multipliziert werden muss.

Im zweiten Fall hat der Spieler, der gerufen hat, zwei Karten jener Farbe, von der der Spieler, der den Kontrabauern angesagt hat, Ass und Zehner hat, weshalb die Wahrscheinlichkeiten für die ersten beiden Karten $\frac{3}{14}$ und $\frac{2}{13}$ betragen. Die restlichen Karten sollen keine Trumpfkarten und auch keine weiteren Karten dieser Farbe sein, weshalb sie Wahrscheinlichkeiten von $\frac{10}{12}$ und $\frac{9}{11}$ haben. Es gibt analog zu einem früheren Beispiel sechs mögliche Reihenfolgen, weshalb mit Sechs multipliziert werden muss. Der zweite Spieler soll wieder eine Trumpfkarte und eine Karte der bestimmten Farbe haben, wofür die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{9}$ betragen. Die restlichen drei Karten sind beliebig. Es gibt 20 Kombinationsmöglichkeiten, weshalb mit 20 multipliziert werden muss.

Im dritten Fall bekommt der Spieler, der gerufen hat, eine Karte bestimmter Farbe, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{14}$ bedeutet. Die restlichen drei Karten sollen keine Trumpfkarten und auch keine weitere Karten der bestimmten Farbe sein, weshalb es drei ungünstige Karten gibt. Darum liegt die Wahrscheinlichkeit bei der zweiten Karte bei $\frac{10}{13}$, bei der dritten bei $\frac{9}{12}$ und bei

der vierten bei $\frac{8}{11}$. Es gibt vier mögliche Reihenfolgen, weshalb mit Vier multipliziert werden muss. Der zweite Spieler hat eine Trumpfkarte, wofür die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{1}{10}$ liegt und zwei Karten der bestimmten Farbe, wofür die Wahrscheinlichkeiten $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{8}$ betragen. Die restlichen zwei Karten sind beliebig.

T...Trumpfkarte B...Karte bestimmter Farbe K...andere Karten

(TBB KK), (BTB KK), (BBT KK), (KBB TK), (KBB KT), (BKB TK), (BKB KT), (BBK TK), (BBK KT), (KKB TB), (KKB BT), (KBK TB), (KBK BT), (BKK TB), (BKK BT), (TKK BB), (KTK BB), (KKT BB), (TBK KB), (TBK BK), (TKB KB), (TKB BK), (KTB KB), (KTB BK), (KBT KB), (KBT BK), (BTK KB), (BTK BK), (BKT KB), (BKT BK)

Es gibt also 30 mögliche Reihenfolgen, weshalb mit 30 multipliziert werden muss.

Es gibt auch zwei Spieler, bei denen die Kartenkombinationen auftreten können, weshalb insgesamt mit Zwei multipliziert werden muss. Das ergibt nun folgende Rechnung:

$P(\text{hat Karte zum Ausspielen}) =$

$$= \left(\frac{3}{14} * \frac{10}{13} * \frac{9}{12} * \frac{8}{11} * 4 * \frac{1}{10} * \frac{2}{9} * \frac{7}{8} * \frac{6}{7} * \frac{5}{6} * 20 + \frac{3}{14} * \frac{2}{13} * \frac{10}{12} * \frac{9}{11} * 6 * \frac{1}{10} * \frac{1}{9} * 20 + \frac{3}{14} * \frac{10}{13} * \frac{9}{12} * \frac{8}{11} * 4 * \frac{1}{10} * \frac{2}{9} * \frac{1}{8} * 30 \right) * 2$$

$$= \frac{1728000 + 518400 + 518400}{17297280} * 2 = \frac{5529600}{17297280} = \frac{8640}{27027} \approx 0,319680$$

Das bedeutet, mit einer Wahrscheinlichkeit von 31,97% hat der Spieler, der gerufen hat, eine Karte, mit der er, wenn er sie ausspielt, gewinnt.

9. Das Ringerl

Beim Dreier- und Viererschnapsen gibt es die Möglichkeit, ein Ringerl zu spielen. Das bedeutet, man hat alle fünf Karten gleicher Farbe. Im Gegensatz zum Viererschnapsen, wo diese fünf Karten alle Karten in der Hand ausmachen, ist es beim Dreierschnapsen nicht

sicher, dass man auch gewinnt. Das kommt auf die sechste Karte an. Wenn es sich dabei von vornherein um kein Ass handelt, so kann man noch darauf hoffen, dass eine der beiden verdeckten Karten ein Ass ist. Da die Wahrscheinlichkeit dafür, wenn man bereits ein Ass hat, genau ein weiteres zu erhalten, bei 36,26% liegt und die Wahrscheinlichkeit dafür, sogar genau zwei weitere zu bekommen, bei 3,30% liegt, beträgt die Wahrscheinlichkeit insgesamt am Ende mindestens ein Ass in der Hand zu halten, 39,56%. Ist das mit einer Wahrscheinlichkeit von 60,44% nicht der Fall, so muss man das Ringerl auf eine blanken Karte spielen und hat also genau einen Fänger.

Wenn man ein Ringerl spielt, dann ist es so, dass, wenn die anderen Spieler aufmerksam sind und gut kombinieren können, selbst, wenn man es nicht angesagt hat, diese gleich nach dem ersten Stich wissen, dass man fünf Karten einer Farbe in der Hand hält. Wenn man nämlich das Ass des Ringerls ausspielt, so wird keiner der Mitspieler Farbe geben können. Das bedeutet aber auch, dass in so einem Fall die Spieler sofort wissen, dass nicht eine Gabel der Fänger sein wird, sondern ein Ass. Diese sollte man sich in so einem Fall dann auch behalten. Hat man nur ein Ass, so ist die Sache eindeutig. Hat man allerdings mehrere Asses in der Hand, wobei man natürlich bis zu drei Asses haben kann, so wird es schon schwieriger zu entscheiden, welche Karte die richtige ist. In diesem Fall ist es wirklich Glückssache, ob man am Ende stechen kann oder nicht. Es gibt zwar Indizien dafür, wenn man zum Beispiel genau darauf achtet, welche Karten bereits gefallen sind, oder wie viele Karten einer Farbe es noch gibt, doch ganz sicher kann man sich nie sein, auf welche blanken Karte derjenige, der das Ringerl angesagt hat, nun spielen wird, da es ja auch noch die zwei Karten gibt, die weggelegt wurden. Diese haben aber auch einen nicht unbedeutenden Einfluss auf den Spielverlauf.

Was man hier nun noch bedenken kann, sind Gründe dafür, warum sich ein Spieler nicht für eine der Asses, die keine Fänger sind, entscheiden würde. Das wäre dann der Fall, wenn zum Beispiel sämtliche Karten in der Farbe eines Asses bereits gefallen wären, bevor man zum Ende des Spieles kommt. Dafür müsste aber der Spieler, der das Ringerl spielt, in der Farbe des Asses keine einzige Karte haben. Dann würden nämlich zwangsläufig im Laufe des Spieles alle Karten dieser Farbe fallen. Man kann sagen, es ist insgesamt besser für den Spieler, der das Ringerl spielt, wenn er drei Karten unterschiedlicher Farben zu seinen fünf Karten gleicher Farbe bekommt, weil dann die anderen Spieler, selbst wenn sie sich merken, was bereits gespielt wurde, nicht sicher sagen können, welches Ass der Fänger ist. Am schlechtesten ist es demnach für den Spieler, der das Ringerl angesagt hat, wenn er zusätzlich zu den fünf Karten gleicher Farbe noch drei Karten gleicher Farbe, von denen keine das Ass

oder der Zehner ist, hat. Dann würden nämlich im Laufe des Spieles alle Karten der beiden Asse, die nicht der Fänger sind, fallen und die Spieler wüssten, welches das richtige Ass ist. Das würde aber auch bedeuten, dass es in diesem Fall, wenn die Spieler von Anfang an genau schauen, welche Karten bereits gefallen sind, sehr schwer für den Spieler, der das Ringerl angesagt hat, ist, dieses auch zu gewinnen. Die folgenden Rechnungen werden mit der Vorgabe gemacht, dass es sich bei den beiden weggelegten Karten um Karten verschiedener Farben handelt, die nicht die Farbe der blanken Karte haben, die man behalten hat.

9.1 Das Ringerl mit blankem Zehner

Im ersten Fall handelt es sich bei der Karte, auf die gespielt wird, um einen Zehner. In diesem Fall wäre es für denjenigen, der das Ringerl spielt, am besten, wenn einer der beiden anderen Spieler drei Asse in der Hand hält, von denen natürlich eines der Fänger sein muss. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Es gibt noch drei Asse, weshalb die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um ein Ass handelt, $\frac{3}{12}$ beträgt. Die beiden folgenden Karten sollen ebenfalls Ass sein, weshalb sie Wahrscheinlichkeiten von $\frac{2}{11}$ und $\frac{1}{10}$ haben. Die restlichen Karten sind beliebig.

A...Ass N...Kein Ass

(AAA NNN), (AAN ANN), (AAN ANA), (AAN NNA), (ANA ANN), (ANA ANA), (ANA NNA), (NAA ANN), (NAA ANA), (NAA NNA), (ANN AAN), (ANN ANA), (ANN NAA), (NAN AAN), (NAN ANA), (NAN NAA), (NNA AAN), (NNA ANA), (NNA NAA), (NNN AAA)

Es gibt also 20 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 20 multipliziert werden muss. Außerdem gibt es zwei Spieler, die diese Kartenkombination haben könnten, weshalb mit Zwei multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(3 \text{ Asse}) = \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * 20 * 2 = \frac{2}{11} \approx 0,181818$$

Alternativ die Berechnung mit Hilfe des Binomialkoeffizienten:

$$P(3 \text{ Asse}) = \frac{\binom{3}{3} * \binom{9}{3}}{\binom{12}{6}} * 2 = \frac{84}{924} * 2 \approx 0,181818$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass also einer der beiden anderen Spieler drei Asse hat, beträgt rund 18,18%.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich dieser Spieler nun am Ende das richtige Ass behält, beträgt $\frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, da er sich als erstes zwischen drei Karten entscheiden muss und eine davon günstig ist, und beim zweiten Mal nur mehr zwischen zwei Karten, wovon wiederum eine günstig ist.

Die zweite für den Spieler, der das Ringerl spielt, günstige Möglichkeit der Aufteilung der Asse wäre, dass einer der Spieler ein Ass hat, das nicht der Fänger ist und der andere Spieler zwei Asse, von denen eines der Fänger ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Der Spieler, der nur ein Ass hat, darf nicht den Fänger haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte ein Ass ist, aber nicht der Fänger, beträgt $\frac{2}{12}$. Die weiteren fünf Karten sollen keine Asse sein, weshalb ihre Wahrscheinlichkeiten bei $\frac{9}{11}, \frac{8}{10}, \frac{7}{9}, \frac{6}{8}$ und $\frac{5}{7}$ liegen. Wegen der sechs Anordnungsmöglichkeiten muss noch mit Sechs multipliziert werden und da es zwei Spieler gibt, die diese Kartenkombination haben könnten, auch noch mit Zwei. Das ergibt folgende Rechnung:

$$P(1 \text{ Ass, das nicht Fänger ist}) = \frac{2}{12} * \frac{9}{11} * \frac{8}{10} * \frac{7}{9} * \frac{6}{8} * \frac{5}{7} * 6 * 2 = \frac{6}{11} \approx 0,545455$$

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass einer der beiden Spieler ein Ass, das kein Fänger ist, und damit der andere Spieler zwei Asse, von denen eines der Fänger ist, hat, beträgt rund 54,55%.

Sollte derjenige, der das Ass hat, das der Fänger ist, kein weiteres Ass haben, so hat der Spieler, der das Ringerl spielt, so gut wie verloren, da sich jeder erfahrene Spieler dieses bis zum Schluss aufheben würde. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich analog berechnen.

$$P(1 \text{ Ass, das Fänger ist}) = \frac{1}{12} * \frac{9}{11} * \frac{8}{10} * \frac{7}{9} * \frac{6}{8} * \frac{5}{7} * 6 * 2 = \frac{3}{11} \approx 0,272727$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt also rund 27,27%.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man sich, wenn man zwei Asse hat, von denen eines der Fänger ist, die richtige Karte behält, beträgt 50%, da man sich nur einmal zwischen zwei Karten entscheiden muss.

Die Wahrscheinlichkeit, das Ringerl insgesamt zu gewinnen, wenn es sich bei der blanken Karte um einen Zehner handelt, und die beiden weggelegten Karten unterschiedliche Farben haben, von denen keine die Farbe des Zehners ist, lässt sich also folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der beiden Spieler alle drei Asse hat, beträgt $\frac{2}{11}$ und dass er sich dann das falsche Ass behält $\frac{5}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Spieler zwei Asse hat, von denen einer der Fänger ist, beträgt $\frac{6}{11}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass er sich das falsche Ass behält, liegt bei $\frac{1}{2}$. Insgesamt ergibt das folgende Rechnung:

$$P(\text{gewinnt Ringerl}) = \frac{2}{11} * \frac{5}{6} + \frac{6}{11} * \frac{1}{2} = \frac{5}{33} + \frac{3}{11} = \frac{14}{33} \approx 0,424242$$

Die Wahrscheinlichkeit das Ringerl also zu gewinnen, wenn man auf einen blanken Zehner spielt und es sich bei den beiden weggelegten Karten um Karten unterschiedlicher Farben handelt, wovon keine die Farbe des Zehners ist, beträgt rund 42,42%.

9.2 Das Ringerl mit blankem König

Es wird auch im nächsten Fall davon ausgegangen, dass es sich bei den beiden weggelegten Karten um Karten unterschiedlicher Farben handelt. Wenn es sich nun bei der Karte, auf die man spielt, um einen König anderer Farbe handelt, so ändert sich die Lage etwas, da man somit auch mit einem Zehner gefangen werden könnte. Nun wäre ein günstiger Fall, wie

schon zuvor, dass ein Spieler ein Ass hat, das nicht der Fänger ist und der andere Spieler zwei Assen, von denen eines der Fänger ist. In den meisten Fällen wird sich nämlich dann der erste Spieler zwischen den beiden Assen entscheiden und der zweite Spieler, falls er wirklich die Wahl zwischen dem Zehner, der ein Fänger ist, und Ass hätte, das Ass behalten. Es ist also egal, wer den Zehner, der ein Fänger ist, hat, weshalb er in der Berechnung auch nicht berücksichtigt werden muss. Die Wahrscheinlichkeit für diese Aufteilung der drei Assen wurde bereits berechnet und beträgt $\frac{6}{11}$. Auch die Wahrscheinlichkeit, dass sich derjenige mit den zwei Assen das richtige Ass behält, beträgt analog zu vorherigem Fall $\frac{1}{2}$.

Hat in diesem Fall ein Spieler drei Assen, so könnte der andere Spieler den Zehner haben, der ebenfalls ein Fänger ist. Also wäre es günstig für den Spieler, der das Ringerl spielt, wenn beide Fänger in den Händen desselben Spielers wären, vorausgesetzt, dieser hat noch mindestens ein weiteres Ass. Die Chancen zu gewinnen stünden also für den Spieler, der das Ringerl hat, am besten, wenn einer der Spieler drei Assen und den Zehner, der ein Fänger ist, hätte. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um ein Ass handelt, beträgt $\frac{3}{12}$, für die zweite Karte $\frac{2}{11}$ und für die dritte Karte $\frac{1}{10}$. Die nächste Karte soll der Zehner, der ein Fänger ist, sein, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$ beträgt. Die restlichen Karten sind beliebig.

A...Ass B...beliebige Karte Z...Zehner

(AAA BBZ), (AAA BZB), (AAA ZBB), (AAB AZB), (AAB ABZ), (AAB ZAB),
 (AAB ZBA), (AAB BAZ), (AAB BZA), (ABA AZB), (ABA ABZ), (ABA ZAB),
 (ABA ZBA), (ABA BAZ), (ABA BZA), (BAA AZB), (BAA ABZ), (BAA ZAB),
 (BAA ZBA), (BAA BAZ), (BAA BZA), (ABB AAZ), (ABB AZA), (ABB ZAA),
 (BAB AAZ), (BAB AZA), (BAB ZAA), (BBA AAZ), (BBA AZA), (BBA ZAA),
 (AAZ ABB), (AAZ BAB), (AAZ BBA), (AZA ABB), (AZA BAB), (AZA BBA),
 (ZAA ABB), (ZAA BAB), (ZAA BBA), (AZB AAB), (AZB ABA), (AZB BAA),
 (ABZ AAB), (ABZ ABA), (ABZ BAA), (ZAB AAB), (ZAB ABA), (ZAB BAA),
 (ZBA AAB), (ZBA ABA), (ZBA BAA), (BAZ AAB), (BAZ ABA), (BAZ BAA),
 (BZA AAB), (BZA ABA), (BZA BAA), (BBZ AAA), (BZB AAA), (ZBB AAA),

Das ergibt 60 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb man mit 60 multiplizieren muss. Außerdem gibt es zwei Spieler, die diese Kartenkombination haben könnten, weshalb mit Zwei multipliziert werden muss.

Das führt zu folgender Rechnung:

$$P(3 \text{ Asse} + 1 \text{ Zehner}) = \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * \frac{1}{9} * 60 * 2 = \frac{2}{33} \approx 0,060606$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also gerade einmal rund 6,06%, dass ein Spieler alle drei Assen und den Zehner, der ein Fänger ist, hat.

Die Wahrscheinlichkeit davon, ob sich der Spieler das richtige Ass behält, wird von dem Zehner nicht unbedingt beeinflusst. Hat man ein Ass und den zugehörigen Zehner, so wird dieser ohnehin schon früher fallen, da man ihn nicht braucht, um das Ringerl zu fangen, wenn man sowieso das Ass derselben Farbe hat. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, sich zu verwerfen, wenn man drei Asse hat, von denen eines ein Fänger ist, beträgt analog zu vorherigem Fall $\frac{5}{6}$.

Doch auch für den Fall, dass der Spieler, der drei Asse hat, den Zehner nicht hat, sondern der Spieler, der kein Ass hat, gibt es die Möglichkeit, dass der Spieler, der das Ringerl angesagt hat, gewinnt. Das ist deswegen der Fall, weil man im Allgemeinen nur auf einen blanken König spielen würde, wenn man keinen Zehner hat. Das bedeutet aber auch, dass alle vier Zehner auf die anderen beiden Spieler aufgeteilt sein müssen. Der Spieler, der kein Ass hat, könnte also nun zusätzlich zu dem Zehner, der der Fänger ist, noch bis zu drei weitere Zehner haben, was die Wahrscheinlichkeit, dass er sich den richtigen Zehner behält, sehr verringert. Also wird als nächstes die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass ein Spieler alle vier Zehner, aber kein Ass hat, was dann der Fall ist, wenn der andere Spieler also drei Asse und keinen Zehner hat.

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um ein Ass handelt, beträgt $\frac{3}{12}$, für die zweite Karte $\frac{2}{11}$ und für die dritte Karte $\frac{1}{10}$. Die nächsten drei Karten sollen keine Zehner sein, weshalb ihre Wahrscheinlichkeiten $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{8}$ und $\frac{3}{7}$ betragen.

A...Ass N...Kein Ass

(AAA NNN), (AAN ANN), (AAN ANA), (AAN NNA), (ANA ANN), (ANA ANA),
(ANA NNA), (NAA ANN), (NAA ANA), (NAA NNA), (ANN AAN), (ANN ANA),
(ANN NAA), (NAN AAN), (NAN ANA), (NAN NAA), (NNA AAN), (NNA ANA),
(NNA NAA), (NNN AAA)

Es gibt 20 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 20 multipliziert werden muss. Außerdem gibt es zwei Spieler, die diese Kartenkombination haben könnten, weshalb mit Zwei multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(3 \text{ Asse} + \text{kein Zehner}) = \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * \frac{5}{9} * \frac{4}{8} * \frac{3}{7} * 20 * 2 = \frac{5}{231} \approx 0,0216450$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der beiden Spieler kein Ass, aber vier Zehner hat, beträgt also rund 2,165%.

Wenn er sich also nun dazu entschließt, weil es am klügsten ist, einen der vier Zehner zu behalten, so muss er sich dreimal entscheiden. Die Wahrscheinlichkeit, dass er sich beim ersten Mal richtig entscheidet, beträgt $\frac{1}{4}$, da es vier Zehner gibt und nur einer ein Fänger ist. Beim zweiten Mal gibt es nur mehr drei Zehner, weshalb die Wahrscheinlichkeit, sich richtig zu entscheiden, bei $\frac{1}{3}$ liegt und beim dritten Mal bei $\frac{1}{2}$, dass man sich für den richtigen Zehner entscheidet. Insgesamt beträgt also die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler am Ende den Zehner noch hat, der der Fänger ist, $\frac{1}{4} * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er sich falsch entscheidet, liegt also bei $\frac{23}{24}$. Zusätzlich hat aber auch noch der andere Spieler drei Asse in der Hand, von denen eines ein Fänger ist, wobei sich dieser mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{6}$ die falsche Karte behält. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich also beide Spieler falsch entscheiden, beträgt $\frac{23}{24} * \frac{5}{6} = \frac{115}{144}$, was rund 79,90% sind.

Als nächstes wird die Wahrscheinlichkeit davon berechnet, dass einer der Spieler drei Zehner, von denen einer der Fänger ist, aber kein Ass hat, was nur dann der Fall sein kann, wenn der andere Spieler drei Asse und einen Zehner, der kein Fänger ist, hat.

Die Wahrscheinlichkeiten für die ersten drei Karten Ass zu sein, betragen wie schon zuvor $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{11}$ und $\frac{1}{10}$. Die nächste Karte soll einer der drei Zehner sein, die keine Fänger sind, wofür die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{3}{9}$ liegt. Die restlichen zwei Karten sollen keine Zehner, von denen es noch drei gibt, sein, weshalb ihre Wahrscheinlichkeiten $\frac{5}{8}$ und $\frac{4}{7}$ betragen. Es gibt analog zu einem früheren Beispiel 60 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb mit 60 multipliziert werden muss. Außerdem gibt es zwei Spieler, die diese Kartenkombination haben könnten, weshalb mit Zwei multipliziert werden muss. Das führt zu folgender Rechnung:

$$P(3 \text{ Ass} + 1 \text{ Zehner}) = \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{1}{10} * \frac{3}{9} * \frac{5}{8} * \frac{4}{7} * 60 * 2 = \frac{5}{77} \approx 0,0649351$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also rund 6,49%, dass einer der beiden Spieler kein Ass aber drei Zehner, wovon einer ein Fänger ist, hat.

In diesem Fall müsste sich der Spieler, der drei Zehner hat, nur zweimal zwischen den Zehnern entscheiden, weshalb er mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ am Ende den richtigen Zehner behalten hat. Der andere Spieler hat ebenfalls eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ sich das richtige Ass zu behalten. In beiden Fällen beträgt also die Wahrscheinlichkeit, die falsche Karte zu behalten, $\frac{5}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich keiner der beiden die richtige Karte behält beträgt also $\frac{5}{6} * \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$, was 69,44% sind.

Die letzte günstige Möglichkeit wäre, wenn der Spieler, der kein Ass, aber einen Fänger in Form eines Zehners hat, noch einen weiteren Zehner hätte. Die Wahrscheinlichkeit dafür lässt sich folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der ersten Karte um den Zehner handelt, der ein Fänger ist, beträgt $\frac{1}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Karte ein weiterer Zehner ist, liegt bei $\frac{3}{11}$. Die nächsten vier Karten sollen weder weitere Zehner, von denen es noch zwei gibt, noch Ass, von denen es noch drei gibt, sein, weshalb es fünf ungünstige Karten gibt. Da es 10 Karten insgesamt sind, gibt es auch fünf günstige Karten für die dritte Karte, was eine

Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{10}$ bedeutet. Für die vierte Karte beträgt die Wahrscheinlichkeit, keine der ungünstigen Karten zu sein, $\frac{4}{9}$, für die fünfte Karte $\frac{3}{8}$ und für die sechste Karte $\frac{2}{7}$.

G...günstige Karte Z...Zehner B...Zehner, der Fänger ist

(GGG GZB), (GGG ZGB), (GGG BGZ), (GGG GBZ), (GGG ZBG), (GGG BZG),
 (GGB GGZ), (GGB GZG), (GGB ZGG), (GBG GGZ), (GBG GZG), (GBG ZGG),
 (BGG GGZ), (BGG GZG), (BGG ZGG), (GGZ GGB), (GGZ GBG), (GGZ BGG),
 (GZG GGB), (GZG GBG), (GZG BGG), (ZGG GGB), (ZGG GBG), (ZGG BGG),
 (GZB GGG), (ZGB GGG), (BGZ GGG), (GBZ GGG), (ZBG GGG), (BZG GGG)

Es gibt also 30 Anordnungsmöglichkeiten, weshalb man mit 30 multiplizieren muss. Außerdem gibt es zwei Spieler, die diese Kartenkombination haben könnten, weshalb mit Zwei multipliziert werden muss. Das ergibt insgesamt folgende Rechnung:

$$P(2 \text{ Zehner, wovon einer Fänger} + \text{kein Ass}) = \frac{1}{12} * \frac{3}{11} * \frac{5}{10} * \frac{4}{9} * \frac{3}{8} * \frac{2}{7} * 30 * 2 = \frac{5}{154}$$

$$\approx 0,0324675$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Spieler kein Ass, aber zwei Zehner hat, von denen einer ein Fänger ist, beträgt also rund 3,247%.

In diesem Fall muss sich der Spieler, der kein Ass hat, also nur zwischen zwei Zehnern entscheiden, weshalb die Wahrscheinlichkeit, dass er sich falsch entscheidet $\frac{1}{2}$ beträgt. Der andere Spieler entscheidet sich wieder mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{6}$ für das falsche Ass. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am Ende keiner der beiden Spieler die richtige Karte behalten hat, beträgt $\frac{1}{2} * \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$, was rund 41,67% sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dieses Ringerl mit einem blanken König und weggelegten Karten in verschiedenen Farben, zu gewinnen, lässt sich also folgendermaßen berechnen:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Karten so aufgeteilt sind, dass einer der Spieler zwei Asse hat, von denen einer ein Fänger ist und der andere Spieler nur ein Ass hat, das kein Fänger ist, beträgt $\frac{6}{11}$ und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler sich das falsche Ass behält, liegt

bei $\frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Spieler drei Asse hat und den Zehner, der ein Fänger ist, beträgt $\frac{2}{33}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass er sich das falsche Ass behält, beträgt $\frac{5}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Spieler drei Asse hat, während der andere Spieler einen Fänger in Form eines Zehners hat, aber auch noch drei weitere Zehner, beträgt $\frac{5}{231}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler die falsche Karte behalten, liegt bei $\frac{115}{144}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Spieler drei Asse hat und der zweite Spieler drei Zehner, von denen einer ein Fänger ist, beträgt $\frac{5}{77}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass sich beide Spieler für die falsche Karte entscheiden liegt bei $\frac{25}{36}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Spieler drei Asse und der andere Spieler zwei Zehner hat, von denen einer ein Fänger ist, beträgt $\frac{5}{154}$, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler die falsche Karte behalten, bei $\frac{5}{12}$ liegt. Insgesamt ergibt das folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 P(\text{gewinnt Ringerl}) &= \frac{6}{11} * \frac{1}{2} + \frac{2}{33} * \frac{5}{6} + \frac{5}{231} * \frac{115}{144} + \frac{5}{77} * \frac{25}{36} + \frac{5}{154} * \frac{5}{12} \\
 &= \frac{9072 + 1680 + 575 + 1500 + 450}{33264} = \frac{13277}{33264} \approx 0,399140
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Ringerl mit einem blanken König zu gewinnen, wenn es sich bei den beiden weggelegten Karten um zwei Karten unterschiedlicher Farbe handelt, die farblich auch nicht zu dem König passen, beträgt also rund 39,91%.

Für die anderen Spieler bedeutet das, man sollte, wenn man bereits beim ersten Stich erkannt hat, dass es sich um ein Ringerl handelt, genau aufpassen, welche Karten gespielt werden. In den meisten Fällen ist es einfach eine Glückssache, ob man die richtige Karte behält, vor allem dann, wenn, wie in oben berechnetem Fall, noch zwei weitere blanke Karten weggelegt wurden. Dann kann man nämlich als Spieler wirklich nur raten, welche Karte der Spieler, der das Ringerl angesagt hat, wohl behalten hat. Gibt es aber tatsächlich die Möglichkeit, dass die Karten einer Farbe alle ausgespielt werden, so weiß man zumindest schon einmal von einem Ass, dass es ganz sicher keine weitere Karte dieser Farbe geben kann und dieses Ass demnach nicht der Fänger ist, was einem einen Vorteil verschafft.

10. Schlussfolgerungen

Im Endeffekt kann man sagen, dass Schnapsen trotz der wenigen Karten, ein sehr vielfältiges Spiel ist und viele Spielzüge nicht wirklich berechenbar sind, da man oft auch das Spielverhalten der Spieler selbst nicht vorhersehen kann. Es wurden verschiedene Umstände berechnet, die relevant und interessant erschienen, doch beim Spielen selbst geht es vielmehr um Intuition und Glück als um Berechnungen. Ich habe auch praktisch versucht, meine Erkenntnisse anzuwenden, doch je mehr ich über die Berechnungen nachgedacht habe, desto schlechter habe ich im Endeffekt gespielt. Schnapsen ist eben immer noch ein Glücksspiel. Die einfachen logischen Regeln sollte man aber trotzdem anwenden, wie die Tatsache, dass man sich eine Gabel behalten sollte oder wie man beim Kontrabauern überhaupt eine Chance hat, zu gewinnen. In dieser Arbeit lag der Fokus vor allem auf Spezialfällen, weil diese doch besser zu berechnen sind und gewisse Vorgehensweisen der Spieler auch vorhersehbar sind. Es hat sich oft gezeigt, dass Berechnungen von recht einfachen Sachverhalten recht kompliziert werden konnten und dass vieles nicht so allgemein berechenbar war, wie gedacht. Das Ergebnis bei den Ausgangssituationen hat gezeigt, dass der Erhalt eines Gangls, das man sicher gewinnt, sehr unwahrscheinlich ist. Trotzdem wird beim Spielen, vor allem beim Dreierschnapsen, sehr oft ein Gangl angesagt, da es noch die Möglichkeit gibt, auf einen Fänger zu spielen oder mit den beiden verdeckten Karten ein sicheres Gangl zu erhalten. Darum ist es auch eher beim Viererschnapsen selten, dass jemand ein Gangl spielt. Wie wahrscheinlich es ist, ein Gangl mit bestimmten Kartenkombinationen zu gewinnen, behandelt ebenfalls ein Kapitel, bei dem man sehen konnte, warum man Gangl doch so oft verliert. Beim der Entscheidung, ob man ein Gangl spielen sollte, kann dies auch durchaus hilfreich sein.

11. Quellenverzeichnis

Kunze, Markus; Angewandte Stochastik I (2014):

[https://www.uni-](https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ss14/AngSto_I/angewstoch.pdf)

[ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ss14/AngSto_I/angewstoch.pdf](https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ss14/AngSto_I/angewstoch.pdf);

Stand vom 13.05.2019.

Rudolph, Dennis; Binomialkoeffizient (2017):

<https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/binomialkoeffizient.html>;

Stand vom 13.05.2019.

Blaha, Michael; Wahrscheinlichkeitsrechnung:

<https://www.mathe-online.at/nml/materialien/SkriptumBlaha/KAP-15.pdf>;

Stand vom 13.05.2019.

Abstract

In dieser Diplomarbeit geht es um Spieltheorie beim Schnapsen. Durch verschiedene Fragestellungen werden bestimmte Situationen analysiert und Wahrscheinlichkeiten von möglichen Ausgängen berechnet. Es wird ausschließlich Vierer- und Dreierschnapsen behandelt, insbesondere werden die Wahrscheinlichkeiten berechnet, bei bestimmten Spielformen zu verlieren oder zu gewinnen, wobei vor allem das Gangl, das Ringerl und der Kontrabauer im Fokus stehen. Die Wahrscheinlichkeiten sollen einem eventuell dabei helfen, bei bestimmten Spielszenarien Entscheidungen zu treffen, wobei es sich natürlich um ein Glücksspiel handelt und für nichts garantiert werden kann. In erster Linie handelt es sich um eine Sammlung von Berechnungen zu möglichen Spielverläufen, wobei auch sehr viel argumentiert und logisch überlegt wird. Es wird des Weiteren davon ausgegangen, dass die Spieler sich beim Schnapsen auskennen und eine kluge Spielweise an den Tag legen. Unter anderem wird in dieser Arbeit auch die Bestimmung von Trumpf auf zwei Arten behandelt und argumentiert, wann es sinnvoller ist, auszurufen und wann das Aufdrehen höhere Chancen bringt. Auch die Berechnung von Ausgangsszenarien wird in einem Kapitel behandelt, wobei es hier vor allem darum geht, wie wahrscheinlich es ist, sichere Gangl, die sich aus verschiedenen Karten zusammensetzen können, zu erhalten.

This diploma thesis is about game theory at the card game “Schnapsen”. Various questions are used for analyzing certain situations and for calculating probabilities of possible outcomes. It deals exclusively with that type of this card game, in which three or four players participate. It also deals in particular with calculations of the probabilities of losing or winning at certain forms of play, with the so called “Gangl”, the “Ringerl” and the “Kontrabauer” in focus. The probabilities should help you to make decisions in certain game scenarios, which of course is a game of chance, so nothing is for sure. First and foremost it is a collection of calculations of different scenarios, that could happen when you play this card game. There is also a lot of reasoning and logic involved and furthermore it is assumed that the players are familiar with how to play and show a clever style of play. In this diploma thesis the two methods of determining “Trumpf” are also dealt with and argued when it makes more sense to declare and when it is better to just rely on luck to turn up a higher chance. Also, the calculation of baseline scenarios is discussed in a chapter, the main issue here is how likely it is to obtain a “Gangl”, with which you will win certainly.