



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Der Satz von Gauß-Bonnet für Flächen -
ein vollständiger Zugang“

verfasst von / submitted by

Carina Aschauer

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium
UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Roland Steinbauer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kurventheorie	3
2.1	Grundlegendes zu Kurven in der Ebene	3
2.2	Globale Eigenschaften von ebenen Kurven	8
3	Flächen im Raum	19
3.1	Reguläre Flächen	19
3.2	Glatte Abbildungen auf regulären Flächen	24
3.3	Tangentialebene einer regulären Fläche	32
3.4	Normalenfelder und Orientierbarkeit	36
3.5	Die erste Fundamentalform	40
3.6	Flächeninhalt und Integration auf regulären Flächen	46
3.7	Isometrien auf regulären Flächen	52
4	Krümmung regulärer Flächen	55
4.1	Die zweite Fundamentalform	55
4.2	Normal- und geodätische Krümmung	63
4.3	Gaußkrümmung	68
5	Der Satz von Gauß-Bonnet	76
5.1	Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Kurven	76
5.2	Gauß-Bonnet für Polygonzüge	81
5.3	Gauß-Bonnet auf kompakten Flächen	89
	Kurzzusammenfassung	101
	Literaturverzeichnis	102

1 Einleitung

Diese Arbeit gibt den Leserinnen und Lesern eine Einführung in die elementare Differentialgeometrie des \mathbb{R}^3 mit dem Ziel, am Ende der Abhandlung einen der wichtigsten Sätze der elementaren Differentialgeometrie zu verstehen: den Satz von Gauß-Bonnet. Dieser Satz ist deshalb so bemerkenswert, weil er ein wichtiges Bindeglied zwischen den Gebieten der Geometrie und Topologie ist. Der Satz von Gauß-Bonnet sagt im Grunde aus, dass die integrierte „gesamte Krümmung“, welche als Totalkrümmung bezeichnet wird, einer kompakten Fläche gleich bleibt, wenn man die Fläche durch Verformungen verändert. Die Totalkrümmung ist somit eine topologische Invariante und lässt dadurch im Weiteren eine Klassifizierung von Flächen zu. Die Arbeit richtet sich dabei vor allem an Studentinnen und Studenten der Mathematik, die bereits die Vorlesungsreihe zur Analysis, sowie zur linearen Algebra besucht haben. Aufbauend auf dieser Basis, führt die Arbeit die Leserinnen und Leser von ebenen Kurven, über reguläre Flächen zum Satz von Gauß-Bonnet. Dabei wird das nötige mathematische Hintergrundwissen mitgegeben, einerseits um den Beweis des Satzes zu verstehen, andererseits aber auch um seine weitreichende Bedeutung nachvollziehen zu können. Dabei hat die Arbeit den Anspruch, nicht nur mathematisch korrekt in die Thematik einzuführen, sondern den Leserinnen und Lesern auch die richtigen Bilder und Vorstellungen zu vermitteln. Es wird mit vielen anschaulichen Erklärungen, intuitiven Zugängen und Beispielen gearbeitet, um die Materie besser zugänglich zu machen.

Gegenstand der elementaren Differentialgeometrie sind vor allem Kurven und Flächen. Elementares Wissen über Kurven wird bereits im Analysiszyklus vermittelt. Wir wiederholen diese grundlegenden Ergebnisse über Kurven und stoßen dabei erstmals auf den *zentralen* Begriff der Differentialgeometrie: die Krümmung. Wir diskutieren dabei auch globale Resultate, in unserem Fall sind das Aussagen über die Gesamtgestalt von Kurven. Die Objekte, die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen, sind mit Sicherheit Flächen. Genauer gesagt studieren wir zweidimensionale Flächen im dreidimensionalen Raum, die durch einen bzw. mehrere Homöomorphismen beschrieben werden können, sogenannte reguläre Flächen. Ziel von Kapitel 3 ist es, die Eigenschaften von regulären Flächen genau zu untersuchen, um auf ihnen „Geometrie“ betreiben zu können. Dazu betrachten wir Funktionen die zwischen regulären Flächen abbilden hinsichtlich ihrer Differenzierbarkeit und lernen dabei auch die Tangentialebene, sowie das Differential von Funktionen zwischen regulären Flächen kennen. Dadurch sind wir in der Lage den Begriff der ersten Fundamentalform einzuführen, welche es uns erlaubt Längen- und Winkelmessungen auf regulären Flächen durchzuführen, womit wir den ersten Schritt in Richtung Geometrie getan haben. Die erste Fundamentalform versteht sich als Teil der inneren Geometrie. Mit Größen der inneren Geometrie meinen wir jene, für die nur Messungen innerhalb der Fläche benötigt werden. Im Gegensatz dazu steht die äußere Geometrie, denn sie berücksichtigt die Lage der Fläche im umgebenden Raum. Eine wichtige Größe der äußeren Geometrie ist die zweite

Fundamentalform. Die zweite Fundamentalform führt uns schließlich zum Schlüsselbegriff der Differentialgeometrie von Flächen, der Krümmung.

Das gesamte vierte Kapitel bearbeitet das Thema Krümmung. Wir werden herausfinden, dass sich für Flächen mehrere Krümmungsbegriffe beschreiben lassen und dass nicht immer sofort klar ist, ob diese der inneren oder äußeren Geometrie zuzuordnen sind. Als wichtige Größe der inneren Geometrie lernen wir die Gaußkrümmung kennen, die für den Satz von Gauß-Bonnet eine bedeutende Rolle spielt.

Dem Satz von Gauß-Bonnet wird ein ganzes Kapitel gewidmet. Sukzessive komplexer werdende Versionen des Satzes führen uns schließlich zum Satz von Gauß-Bonnet für kompakte Flächen. Auf diesem Weg führen wir den Begriff der Triangulierung ein, d.h. wir lernen wie man eine Fläche auf geeignete Art und Weise in Dreiecke zerlegt. Der Satz von Gauß-Bonnet sagt uns schließlich, dass die gesamte integrierte Gaußkrümmung einer Fläche durch das Abzählen der Ecken, Kanten und Dreiecksflächen einer solchen Triangulierung bestimmt werden kann. Im Zuge dessen, lernen wir eine topologische Invariante kennen, d.h. eine Größe, die sich unter Homöomorphismen nicht verändert.

Die Herangehensweise dieser Arbeit orientiert sich zu Beginn sehr stark am Buch von Christian Bär: *Elementare Differentialgeometrie*, Walter De Gruyter Verlag, Berlin 2010, zweite Auflage [1]. Im weiteren Verlauf ist dann die wohl wichtigste Quelle das Buch von Andrew Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Springer-Verlag, London 2010, zweite Auflage [20], sowie von Manfredo do Carmo: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg, Braunschweig, 1993, 3. Auflage [2].

2 Kurventheorie

In diesem Kapitel werden wir sowohl die fundamentalen Eigenschaften von Kurven, sowie auch ihr globales Verhalten studieren. Wir befassen uns mit glatten, d.h. beliebig oft differenzierbaren Kurven in der Ebene vor dem Hintergrund, diese Kurven später in Flächen betrachten zu können. Ziel dieses Kapitels ist es, das nötige Wissen über Kurven im \mathbb{R}^2 zu sammeln, um es in den folgenden Kapiteln als unser grundlegendes Werkzeug zu verwenden. Bereits in diesem Kapitel werden Verknüpfungen von topologischen mit geometrischen Eigenschaften nachvollziehbar, z.B. wenn wir über globale Eigenschaften von Kurven sprechen werden. Der Aufbau dieses Kapitels orientiert sich stark an Christian Bär in [1, §2, S. 26f].

2.1 Grundlegendes zu Kurven in der Ebene

Dieses Unterkapitel dient als Basis für die weiteren Überlegungen bezüglich Kurven und ist somit geprägt von vielen Definitionen und der Einführung neuer Begriffe. Wir beginnen mit der Definition einer Kurve um uns dann mit ihren Ableitungen und ihrem Normalvektor in jedem Punkt zu beschäftigen. Das geschieht mit der Absicht am Ende des Unterkapitels, den Begriff der Krümmung einer Kurve einzuführen, da dieser im weiteren Verlauf eine wichtige Rolle spielen wird.

Definition 2.1.1 (Reguläre parametrisierte Kurve). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *parametrisierte Kurve*. Eine parametrisierte Kurve, deren Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}$ nirgends verschwindet, d.h. $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ nennen wir *regulär*.

Anschaulich kann man sich unter einer Kurve ein in die Ebene gelegtes, in der Regel verbogenes Geradenstück vorstellen. Dazu ein einfaches Beispiel

Beispiel 2.1.2 (Kreislinie als Kurve). Wir betrachten eine Kreislinie in der Ebene um den Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius $r > 0$, die durch die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) &:= \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

parametrisiert wird.

Der Pfeil in Abbildung 2.1 gibt die Durchlaufrichtung der Kurve an. Wir haben hier \mathbb{R} als Definitionsmenge gewählt, was dazu führt, dass aufgrund der Periodizität $\gamma(t + 2\pi) = \gamma(t)$ jeder Punkt in der Bildmenge unendlich oft durchlaufen wird. Mehr dazu in Kapitel 2.2.

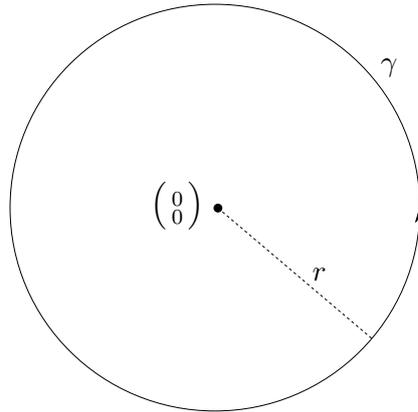


Abbildung 2.1: Kreislinie als Kurve

Die in Beispiel 2.1.2 gewählte Parametrisierung ist jedoch nicht die einzige, die einen Kreis als ihre Bildmenge besitzt. Auch z.B. die Kurve $\tilde{\gamma} : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} r \cdot \cos(2t) \\ r \cdot \sin(2t) \end{pmatrix}$ hat als Bildmenge einen Kreis mit Radius r um den Ursprung, $\tilde{\gamma}$ durchläuft ihn aber doppelt so schnell als jene in 2.1.2 und durch den eingegrenzten Definitionsbereich nur einmal. Um parametrisierte Kurven mit demselben Bild miteinander identifizieren zu können, benötigen wir folgende Definitionen:

Definition 2.1.3 (Parametertransformation, Umparametrisierung). Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve. Eine bijektive Abbildung $\varphi : I \rightarrow J$ heißt *Parametertransformation* von γ , wenn sowohl φ , als auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : J \rightarrow I$ unendlich oft differenzierbar sind. Die parametrisierte Kurve $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *Umparametrisierung* von γ .

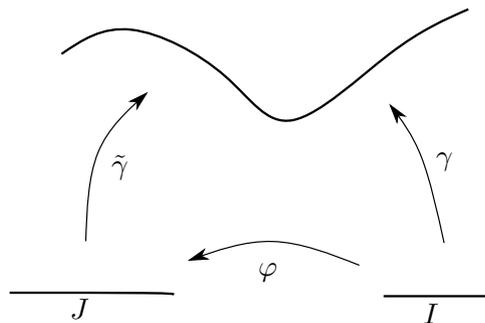


Abbildung 2.2: Umparametrisierung einer Kurve

Eine Kurve stellen wir uns gegeben durch eine parametrisierte Kurve vor, wobei es auf die konkrete Wahl der Parametrisierung nicht ankommt. Um das formal festzulegen geben wir folgende Definition.

Definition 2.1.4 (Kurven als Äquivalenzklasse). Eine *Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von regulären, parametrisierten Kurven. Diese werden als äquivalent zueinander angesehen, wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind.

Kurven haben keinen ausgewiesenen Durchlaufsinne, da man diesen stets durch Umparametrisierung ändern kann. Um eine Durchlaufrichtung festzulegen, setzen wir folgende Definitionen.

Definition 2.1.5 (Orientierungserhaltende und -umkehrende Parametertransformation). Eine Parametertransformation $\varphi : I \rightarrow J$, wobei $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle sind, heißt *orientierungserhaltend*, falls $\dot{\varphi}(t) > 0$ für alle $t \in I$ und *orientierungsumkehrend*, falls $\dot{\varphi}(t) < 0$ für alle $t \in I$.

Definition 2.1.6 (Orientierte Kurve). Eine *orientierte Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, die als äquivalent gelten, wenn sie aus orientierungserhaltenden Parametertransformationen hervorgehen.

Bemerkung. Jede Kurve hat genau zwei *Orientierungen*, d.h. es gibt genau zwei orientierte Kurven, die eine gegebene Kurve bestimmen.

Bevor wir uns nun speziellen Parametrisierungen von Kurven widmen, zuvor noch ein Wort zur Länge von Kurven.

Definition 2.1.7 (Länge einer Kurve). Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre, parametrisierte Kurve. Die *Länge* von γ ist definiert als

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Bemerkung. Warum $\mathcal{L}(\gamma)$ die Länge der Kurve angibt ist anschaulich klar, wenn man sich $\mathcal{L}(\gamma)$ als Grenzwert der Gesamtlänge eingeschriebener Polygonzüge vorstellt, wenn die Unterteilung beliebig fein wird.

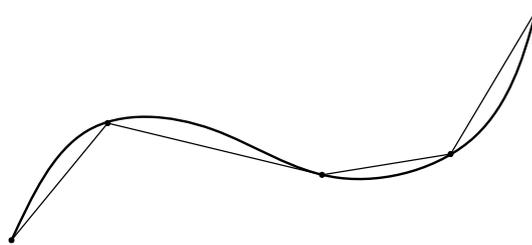


Abbildung 2.3: Länge einer Kurve interpretiert als Polygonzug

Die Länge einer Kurve ist unabhängig von der Wahl ihrer Parametrisierung, wie man in einem kurzen Beweis mithilfe der Substitutionsregel des Integrierens zeigen kann. Bildlich gesprochen hängt die Länge einer Straße auch nicht von der Geschwindigkeit, mit der sie befahren, wird ab.

Wir kommen nun zu einem wichtigen Begriff, mit dem wir in weiterer Folge viel arbeiten werden.

Definition 2.1.8 (Nach Bogenlänge parametrisierte Kurve). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Wir nennen γ eine *nach Bogenlänge parametrisierte Kurve*, falls $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

Nach Bogenlänge parametrisierte Kurven sind genau jene, die ihr Bild im \mathbb{R}^2 mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen. Eine Kurve kann, durch Parametertransformation, immer nach Bogenlänge parametrisiert werden.

Proposition 2.1.9 (Umparametrisierung nach Bogenlänge). *Zu jeder regulären, parametrisierten Kurve γ existiert eine Parametertransformation φ , sodass die Umparametrisierung $\gamma \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre, parametrisierte Kurve und $\varphi^{-1}(s) := \int_a^s \|\dot{\gamma}(t)\| dt$. Die Abbildung φ ist eine zulässige Parametertransformation da $\dot{\varphi}^{-1}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$. Sei weiters $\delta := \gamma \circ \varphi : [0, \mathcal{L}(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Umparametrisierung. Dann ist wegen dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion (vgl. [5, §15, S.159])

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{\dot{\varphi}^{-1}(\varphi(t))} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(\varphi(t))\|} > 0$$

und es gilt wegen der Kettenregel

$$\dot{\delta}(t) = (\gamma \circ \varphi)'(t) = \dot{\gamma}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\gamma}(\varphi(t))}{\|\dot{\gamma}(\varphi(t))\|},$$

woraus

$$\|\dot{\delta}(t)\| = 1$$

für alle $t \in [a, b]$ folgt. Somit ist δ eine Parametrisierung nach Bogenlänge. □

Kommen wir nochmals kurz auf den Begriff der Länge einer Kurve zurück. Ist eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisierbar, so bedeutet dass für jedes $t \in [a, b]$

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[a,t]}) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds = \int_a^t 1 ds = t - a \quad (2.1)$$

ist. Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist also gerade so lang, wie das Parameterintervall.

Wir haben nun die Möglichkeit für ebene Kurven ihren Normalvektor zu definieren, der uns im folgenden zum wichtigen Begriff der Krümmung führen wird.

Definition 2.1.10 (Einheitsnormalvektor einer Kurve). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Wir definieren den *Einheitsnormalvektor* von γ durch die Abbildung

$$n : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ n(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\gamma}(t).$$

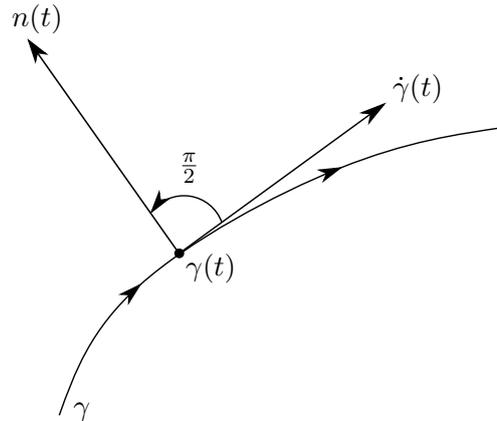


Abbildung 2.4: Normal- und Tangentialvektor an einer Kurve

Wie in Abbildung 2.4 zu sehen, wird der Normalvektor n durch eine Rotation des Tangentialvektors $\dot{\gamma}$ um $\frac{\pi}{2}$ (gegen den Uhrzeigersinn) gebildet. Da γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $\|n(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$ und somit konstituiert $\{n(t), \dot{\gamma}(t)\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 für jedes $t \in I$.

Die Kurve γ ist nach Bogenlänge parametrisiert, deshalb gilt

$$1 \equiv \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle.$$

Differentiation dieser Gleichung bringt

$$0 \equiv \langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle + \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 2\langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle.$$

Die Ableitungen $\dot{\gamma}$ und $\ddot{\gamma}$ stehen also normal aufeinander. Betrachten wir nochmals Definition 2.1.10, dann muss $\ddot{\gamma}$ ein Vielfaches des Einheitsnormalvektors n sein:

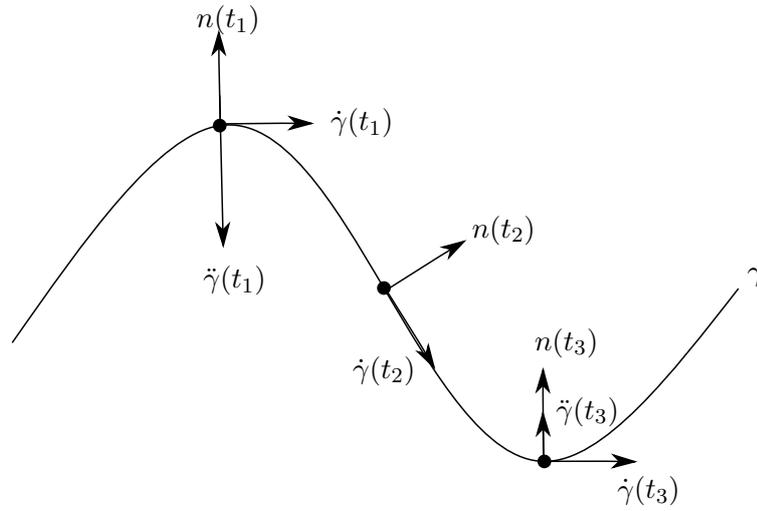
$$\ddot{\gamma}(t) = \kappa(t) \cdot n(t). \quad (2.2)$$

Der skalaren Abbildung κ geben wir nun einen Namen.

Definition 2.1.11 (Krümmung einer Kurve). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Die Abbildung $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$, wie in (2.2), heißt *Krümmung* der Kurve γ .

Die Krümmung einer Kurve können wir als Maß dafür verstehen, wie viel eine Kurve von einer Geraden abweicht. Stellen wir uns vor, wir fahren mit dem Fahrrad entlang der Kurve γ , dann gibt uns κ an, wie viel wir mit dem Lenker einschlagen müssen, um auf der Kurve zu bleiben.

Ist $\ddot{\gamma} \equiv 0$, dann ist auch $\kappa \equiv 0$ und somit handelt es sich dabei um eine Gerade. Ist $\kappa(t) > 0$ so sprechen wir von einer positiven Krümmung und $\kappa(t)$ deutet in Richtung des Normalvektors $n(t)$ von $\gamma(t)$, für $t \in I$. Die Kurve γ krümmt sich dabei in Durchlaufrichtung nach links. Umgekehrt sprechen wir für $\kappa(t) < 0$ von einer negativen Krümmung, γ krümmt sich dabei nach rechts, siehe Abbildung 2.5.



$$\kappa(t_1) < 0, \kappa(t_2) = 0, \kappa(t_3) > 0.$$

Abbildung 2.5: Krümmungen einer Kurve

2.2 Globale Eigenschaften von ebenen Kurven

Die Eigenschaften von Kurven, die wir bis jetzt diskutiert haben, waren alle lokaler Natur: Wir haben das Verhalten von Kurven nahe eines gegebenen Punktes studiert. Dabei ließen sich aber keine Rückschlüsse auf das globale Verhalten der Kurve machen. Wollen wir nun Aussagen über globale Eigenschaften ebener Kurven tätigen, kommen wir nicht umhin uns mit Konzepten aus der Topologie zu befassen. Wir werden in diesem Kapitel einige topologische Ideen im Zusammenhang mit Kurven diskutieren, detaillierte topologische Beweise würden an diesem Platz jedoch den Rahmen sprengen, weshalb wir an manchen Stellen nur die Beweisidee vorstellen. Dazu zunächst zwei wichtige Definitionen.

Definition 2.2.1 (T-periodisch; geschlossene Kurve). Eine reguläre Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *T-periodisch* für $T > 0$, falls

$$\gamma(t + T) = \gamma(t) \quad \forall t \in I.$$

Wir nennen T die *Periode* von γ , wenn es kein \tilde{T} mit $0 < \tilde{T} < T$ gibt, sodass ebenfalls $\gamma(t + \tilde{T}) = \gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Außerdem heißt γ *geschlossene Kurve*, falls γ nicht konstant ist.

Bemerkung. Eine geschlossene Kurve lässt sich nach Proposition 2.1.9 immer nach Bogenlänge parametrisieren. Für die Länge einer geschlossenen, nach Bogenlänge parametrisierten Kurve gilt dann, wenn wir von einem Intervall mit Periodenlänge T ausgehen, wie z.B. $0 \leq t \leq T$, nach (2.1)

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[0,T)}) = T. \tag{2.3}$$

Die Länge einer geschlossenen, nach Bogenlänge parametrisierten Kurve, ist also gerade ihre Periode.

Definition 2.2.2 (Einfach geschlossene Kurve im \mathbb{R}^2). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve mit Periode T . Wir nennen γ eine *einfach geschlossene Kurve*, wenn die Einschränkung

$$\gamma|_{[0, T)} : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

injektiv ist.

Eine einfach geschlossene Kurve kann sich, im Gegensatz zu einer nur geschlossenen Kurve, nicht selbst schneiden.

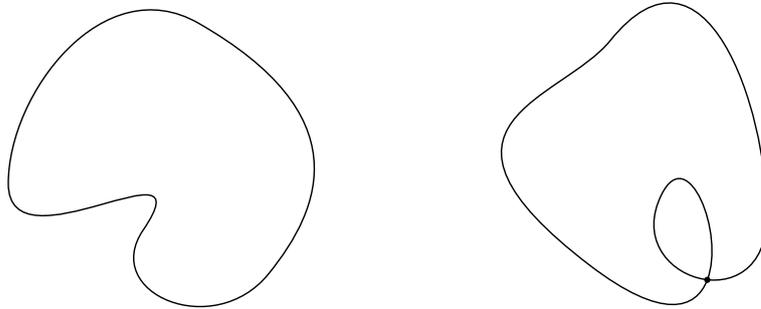


Abbildung 2.6: einfach geschlossene Kurve und (nicht einfach) geschlossene Kurve

Wir kommen nun kurz nochmals auf die Drehung des Tangentialvektors zurück, nur betrachten wir jetzt den Winkel genauer, um den der Tangentialvektor rotiert. Dieser Ansatz führt uns außerdem zu einer schönen geometrischen Interpretation der Krümmung einer Kurve und in Folge auch zu einem essentiellen Satz über die globalen Eigenschaften einer Kurve.

Lemma 2.2.3 (Existenz einer globalen Umlaufwinkelfunktion). Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann gibt es eine glatte Funktion $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \end{pmatrix}.$$

Sind ϑ_1 und ϑ_2 zwei solche Funktionen, dann unterscheiden sie sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π , also $\vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Außerdem ist $\vartheta(b) - \vartheta(a)$ eindeutig durch γ definiert. Wir nennen die Funktion ϑ Umlaufwinkel von γ .

Jeder Einheitsvektor kann als Vektor der Form $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ geschrieben werden. Die Zahl $\vartheta(t)$ gibt den Winkel zwischen dem Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t)$ und der x -Achse an, dieser Winkel

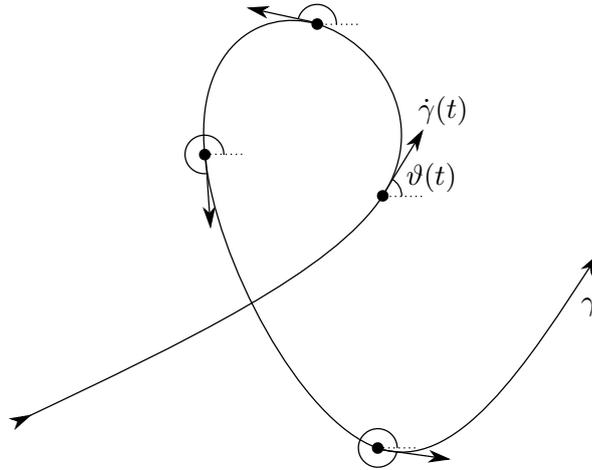


Abbildung 2.7: Kurve mit ihren Umlaufwinkeln

ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig. Die Hauptaussage dieses Lemmas ist es, dass der Winkel ϑ als glatte Funktion beschrieben werden kann. Würden wir uns für die Möglichkeit entscheiden ϑ auf $[0, 2\pi)$ einzuschränken und somit eindeutig festzulegen, hätte die Funktion nach einem Umlauf des Tangentialvektors jeweils einen Sprung an dieser Stelle und würde somit nicht einmal die Anforderung der Stetigkeit erfüllen.

Beweis von Lemma 2.2.3. a) Wir betrachten zuerst den Fall, dass das Bild von $\dot{\gamma}([a, b])$ ganz in einem der folgenden Halbkreise liegt:

$$S_R := \{(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \quad (\text{rechter Halbkreis})$$

$$S_L := \{(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid x < 0\} \quad (\text{linker Halbkreis})$$

$$S_O := \{(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \quad (\text{oberer Halbkreis})$$

$$S_U := \{(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid y < 0\} \quad (\text{unterer Halbkreis})$$

Angenommen, das Bild von $\dot{\gamma}([a, b])$ liegt ganz in S_R . Dann gilt für die erste Koordinate von $\dot{\gamma}$, dass $\dot{\gamma}_1 > 0$ ist. Für die Funktion ϑ bedeutet das

$$\frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = \frac{\sin(\vartheta(t))}{\cos(\vartheta(t))} = \tan(\vartheta(t)).$$

Woraus nach Umformung

$$\vartheta(t) = \arctan\left(\frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)}\right) + 2k\pi \quad (2.4)$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ folgt.

Dabei ist k konstant, ansonsten wäre ϑ nicht stetig. Betrachten wir nochmals (2.4), sehen

wir, dass ϑ sogar glatt ist. Wird $\vartheta(a)$ vorgegeben, so ist damit k und folglich auch ϑ eindeutig bestimmt. Die Fälle der anderen drei Halbkreise behandelt man ähnlich.

b) Im nächsten Schritt behandeln wir nun den Fall, dass das Bild von $\dot{\gamma}([a, b])$ nicht ganz in einem der Halbkreise liegt. Dazu unterteilen wir das kompakte Intervall $[a, b]$ durch $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ in kompakte Teilintervalle, sodass jedes $\dot{\gamma}([t_i, t_{i+1}])$ in einem der vier Halbkreis enthalten ist. Geben wir $\vartheta(a)$ vor, so erhalten wir nach a) ein glattes, eindeutiges $\vartheta : [a, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$. Dadurch ist $\vartheta(t_1)$ festgelegt und wir sind in der Lage erneut durch a) eine eindeutige glatte Fortsetzung $\vartheta : [a, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ zu beschreiben. Diesen Vorgang führen wir induktiv fort, bis wir schließlich $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten. Bis auf den Startwert $\vartheta(a)$ haben wir keine Annahmen getroffen. Dieser ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig ist. Deshalb ist auch ϑ insgesamt, bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π , eindeutig. \square

Wie angekündigt, können wir nun folgende geometrische Interpretation der Krümmung geben:

Proposition 2.2.4 (Krümmung als Winkeländerungsrate). *Sei γ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Umlaufwinkel ϑ . Dann gilt für die Krümmung κ von γ*

$$\kappa(t) = \dot{\vartheta}(t).$$

Die Krümmung einer Kurve gibt also die Winkeländerung des Tangentialvektors $\dot{\gamma}$ mit einer festen Achse an.

Beweis. Nach Lemma 2.2.3 gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \end{pmatrix},$$

woraus nach Differentiation

$$\ddot{\gamma}(t) = \dot{\vartheta}(t) \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta(t)) \\ \cos(\vartheta(t)) \end{pmatrix}$$

folgt.

Nach Definition 2.1.10 gilt für den Normalvektor n von γ , dass $n(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta(t)) \\ \cos(\vartheta(t)) \end{pmatrix}$ ist. Rufen wir uns Gleichung (2.2) mit $\dot{\gamma}(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$ in Erinnerung, bekommen wir

$$\kappa(t) \cdot n(t) = \dot{\vartheta}(t) \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta(t)) \\ \cos(\vartheta(t)) \end{pmatrix},$$

was zum gewünschten Resultat führt, dass $\kappa(t) = \dot{\vartheta}(t)$ gilt. \square

Aus dieser Proposition ergibt sich eine interessante Konsequenz für die gesamte Krümmung entlang einer geschlossenen Kurve.

Korollar 2.2.5 (Krümmung entlang einer geschlossenen Kurve). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, geschlossene Kurve mit Krümmung $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ und Länge \mathcal{L} . Dann gilt

$$\int_0^{\mathcal{L}} \kappa(t) dt = 2k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Da γ eine geschlossene Kurve ist, ist sie \mathcal{L} -periodisch (siehe (2.3)) und somit gilt

$$\gamma(t + \mathcal{L}) = \gamma(t),$$

und nach Differentiation

$$\dot{\gamma}(t + \mathcal{L}) = \dot{\gamma}(t),$$

insbesondere ist

$$\dot{\gamma}(\mathcal{L}) = \dot{\gamma}(0).$$

Verwenden wir nun Lemma 2.2.3, so gilt

$$\dot{\gamma}(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(\mathcal{L})) \\ \sin(\vartheta(\mathcal{L})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(0)) \\ \sin(\vartheta(0)) \end{pmatrix} = \dot{\gamma}(0).$$

Unter Verwendung der Eigenschaft der Periodizität von Sinus und Cosinus, gilt für $k \in \mathbb{Z}$

$$2k\pi = \vartheta(\mathcal{L}) - \vartheta(0)$$

und es folgt

$$\int_0^{\mathcal{L}} \kappa(t) dt = \int_0^{\mathcal{L}} \dot{\vartheta}(t) dt = \vartheta(\mathcal{L}) - \vartheta(0) = 2k\pi. \quad (2.5)$$

□

Definition 2.2.6 (Totalkrümmung einer Kurve). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, geschlossene Kurve mit Krümmung $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ und Länge \mathcal{L} . Die Zahl $\int_0^{\mathcal{L}} \kappa(t) dt$ nennen wir die *Totalkrümmung* von γ .

Da nach (2.5) für die Totalkrümmung einer geschlossenen Kurve $\vartheta(\mathcal{L}) - \vartheta(0)$ gilt, ist die Totalkrümmung also der Gesamtwinkel den der Tangentialvektor $\dot{\gamma}$ von 0 bis \mathcal{L} durchmisst. Ist die Zahl $|k|$ im oben formulierte Korollar 2.2.5 größer oder gleich zwei, drängt sich uns der Eindruck auf, dass die geschlossene Kurve Selbstschnitte haben muss, da ihr Tangentialvektor mehrmals um den Umlaufwinkel rotiert, bevor sie sich schließt. Es liegt nahe, dass der Tangentialvektor einer geschlossenen Kurve ohne Selbstschnitte genau einmal um $\pm 2\pi$ rotiert. Wir formulieren dazu den bereits angekündigten Satz.

Satz 2.2.7 (Hopf'scher Umlaufsatz). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, einfach geschlossene Kurve mit Krümmung $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ und Länge \mathcal{L} . Dann gilt

$$\int_0^{\mathcal{L}} \kappa(t) dt = \pm 2\pi.$$

Bevor wir mit dem Beweis des Satzes beginnen können, müssen wir noch etwas ausholen und benötigen eine Definition und ein Lemma.

Definition 2.2.8 (Sternförmige Menge). Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in X$. Wir nennen X *sternförmig* bezüglich x_0 , falls für jedes $x \in X$ auch die gesamte Strecke zwischen x und x_0 ganz in X enthalten ist, also

$$tx + (t - 1)x_0 \in X, \quad \forall t \in [0, 1].$$

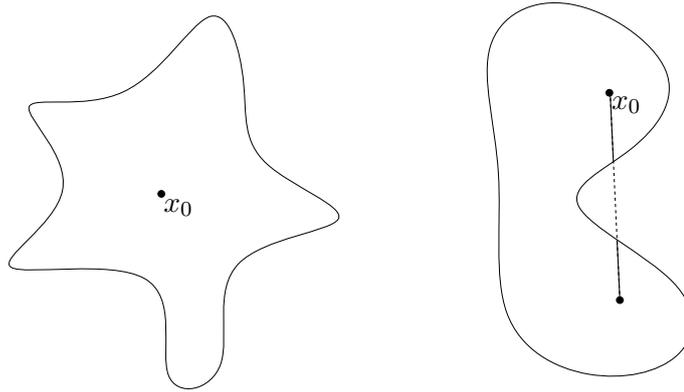


Abbildung 2.8: Sternförmige und nicht sternförmige Menge bezüglich x_0

Bevor wir uns nun dem angekündigten Lemma zuwenden, sei nochmal kurz auf die Tatsache aufmerksam gemacht, dass für die Umlaufwinkelfunktion unter Zuhilfenahme der Eulerschen Identität folgendes gilt:

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \end{pmatrix} = \cos(\vartheta(t)) + i \sin(\vartheta(t)) = e^{i\vartheta(t)}.$$

Nun aber endlich zum Lemma.

Lemma 2.2.9 (Liftungslemma). Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine sternförmige Menge bezüglich $x_0 \in X$ und sei weiters $e : X \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung, wobei S^1 der Einheitskreis ist. Dann existiert eine stetige Funktion $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$e(x) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(x)) \\ \sin(\vartheta(x)) \end{pmatrix} = e^{i\vartheta(x)},$$

für alle $x \in X$. Die Abbildung ϑ ist durch die Vorgabe $\vartheta(x_0) =: \vartheta_0$ eindeutig bestimmt.

Beweisidee. Wir werden an dieser Stelle nicht den genauen Beweis führen, sondern nur kurz auf die Idee der Beweisführung eingehen, da das Liftungslemma grundsätzlich eine Verallgemeinerung von Lemma 2.2.3 ist. Für einen ausführlichen Beweis siehe [1, §2.2, S.48]. Hier gilt es zu beweisen, dass ϑ nicht glatt, sondern stetig ist. Der Beweis des

Liftungslemma ist ähnlich aufgebaut, wie jener von Lemma 2.2.3, jedoch müssen wir aufgrund des „Liftens“ auf S^1 einige technische Überlegungen mehr anstellen. Außerdem nehmen wir hier e und ϑ nur als stetig an. Der Beweis wird in drei Abschnitten geführt.

a) Zunächst schränken wir die Menge X auf das Intervall $[0, 1]$ ein und anschließend beweisen wir – fast analog wie in 2.2.3 – Existenz, Stetigkeit und Eindeutigkeit von ϑ auf diesem kleinen Bereich.

b) Dann wird X , wie im Lemma gefordert als sternförmige Teilmenge des \mathbb{R}^n angenommen. Eine Abbildung vom Intervall $[0, 1]$ erhalten wir durch geschicktes ausnützen der Bedingung der Sternförmigkeit: da X sternförmig ist, liegt die Strecke von x nach x_0 ganz in X und wir bilden eine stetige Abbildung durch

$$\begin{aligned} e_x &: [0, 1] \rightarrow S^1, \\ e_x(t) &:= e(tx + (t-1)x_0) \end{aligned}$$

und somit befinden wir uns nun in einer Situation wie in a). Nach a) gibt es genau ein stetiges $\vartheta_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ bestimmt durch $e_x(t) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_x(t)) \\ \sin(\vartheta_x(t)) \end{pmatrix}$. Gibt es, wie im Liftungslemma gefordert, eine Abbildung ϑ , so muss wegen der Eindeutigkeit von ϑ_x gelten, dass

$$\vartheta_x(t) = \vartheta(tx + (t-1)x_0)$$

ist. So zeigen wir die Eindeutigkeit von ϑ (im exakten Beweis muss hier noch auf die Startwerte Rücksicht genommen werden).

c) Die Existenz von ϑ bekommen wir wiederum über die Existenz von ϑ_x . Um die Stetigkeit von $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{R}$ zu zeigen, unterteilen wir, wie in Lemma 2.2.3, das Intervall $[0, 1]$ in endlich viele Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$, sodass e_x auf diesen Teilintervallen immer ganz in einem der vier offenen Halbkreise verläuft. Weiters verwenden wir die Stetigkeitsbedingung von e um anschließend über die die Arcuswinkelfunktionen auch die Stetigkeit für ϑ zu zeigen.

◇

Nach diesen technischen Vorbereitungen haben wir nun alle Mittel zur Verfügung um den Beweis des Umlaufsatzes zu führen. Für den Beweis wurden neben [1, §2.2, S.50], außerdem noch [22, §2.2, S.61] und [10, §1.3, S.11] verwendet.

Beweis des Hopf'schen Umlaufsatzes. Wir führen den Beweis in vier Abschnitten.

a) Im ersten Schritt schaffen wir alle Voraussetzungen, die wir für die Beweisführung benötigen. Wir verwenden außerdem die Tatsache, dass stetige Bilder von kompakten Mengen wiederum kompakt sind, siehe dazu O. Forster [6, §3, S.31]. Sei $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ eine periodische Parametrisierung mit Periode \mathcal{L} . Sei weiters $x_0 := \max \{\gamma_1(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Da das Bild $\gamma[0, \mathcal{L}]$ kompakt ist, wird das Maximum auch tatsächlich angenommen. Weiters definieren wir die Gerade $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_0\}$. Die Gerade H schneidet die Kurve in einem Punkt $p \in \mathbb{R}^2$, durch Umparametrisierung können wir außerdem erreichen, dass $\gamma(0) = p$ gilt.

Wir definieren weiters noch die Gerade $G := \{p + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$. Für $s > 0$ liegen keine

Punkte von γ mehr auf der Geraden G .

Für den Tangentialvektor der Kurve in p gilt $\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dies kann durch Umparametrisierung $t \mapsto -t$ immer erreicht werden. Die Umparametrisierung würde lediglich bewirken, dass γ von der anderen Richtung durchlaufen wird, was für den Beweis jedoch unerheblich ist.

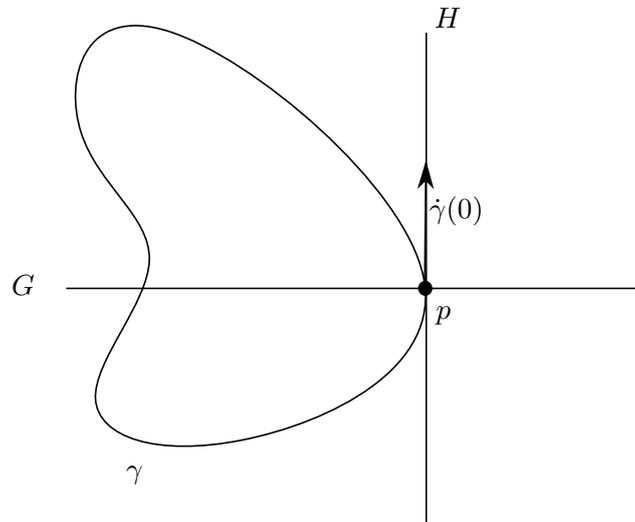


Abbildung 2.9: Kurve mit Voraussetzungen

b) Sei $X := \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \mathcal{L}\}$, dann ist X sternförmig bezüglich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

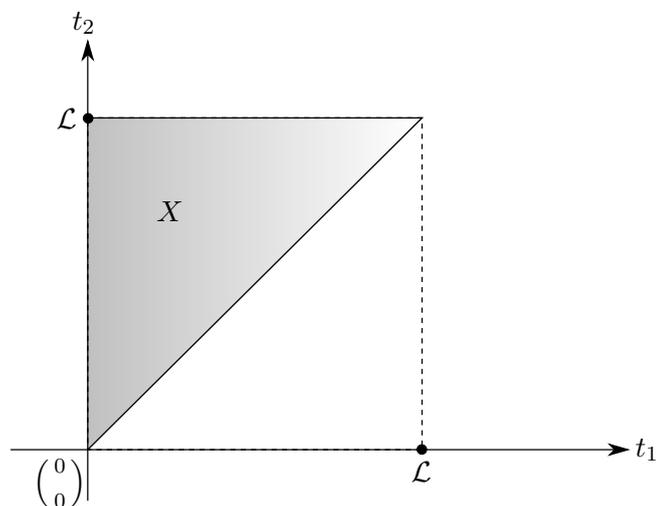


Abbildung 2.10: X ist sternförmig bzgl. des Ursprungs

Wir betrachten nun die stetige Abbildung

$$e : X \rightarrow S^1,$$

$$e(t_1, t_2) := \begin{cases} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|} & \text{für } t_2 > t_1 \text{ und } (t_1, t_2) \neq (0, \mathcal{L}) \\ \dot{\gamma}(t) & \text{für } t = t_1 = t_2 \\ -\dot{\gamma}(0) & \text{für } (t_1, t_2) = (0, \mathcal{L}) \end{cases}$$

Die Funktion e ist nur deshalb wohldefiniert, da γ als einfach geschlossen vorausgesetzt ist und wir somit keine Selbstschnitte haben, was die für die erste Zeile problematische Situation $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ verhindert. Für die meisten Werte die wir für (t_1, t_2) einsetzen, ist $e(t_1, t_2)$ der Einheitsvektor, der von $\gamma(t_1)$ in Richtung $\gamma(t_2)$ deutet. Die anderen Fälle stellen sicher, dass e stetig ist.

Aufgrund des Liftungslemmas 2.2.9 existiert zu e eine Funktion $\vartheta : X \rightarrow \mathbb{R}$, mit

$$e(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(t_1, t_2)) \\ \sin(\vartheta(t_1, t_2)) \end{pmatrix}.$$

Für den Fall $e(t, t) = \dot{\gamma}(t)$ lässt sich durch Lemma 2.2.3 die eine Umlaufwinkelfunktion $t \mapsto \vartheta(t, t)$ beschreiben und daher gilt, wie auch aus Beweis 2.2.5 hervorgeht

$$2\pi k = \vartheta(\mathcal{L}, \mathcal{L}) - \vartheta(0, 0) = \vartheta(\mathcal{L}, \mathcal{L}) - \vartheta(0, \mathcal{L}) + \vartheta(0, \mathcal{L}) - \vartheta(0, 0), \quad (2.6)$$

mit $k \in \mathbb{Z}$.

c) Für die Abbildung $t \mapsto \vartheta(0, t)$ gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $t \in [0, \mathcal{L}]$ gilt, dass $\vartheta(0, t) \in (2\pi l, 2\pi(l+1))$. Denn gäbe es angenommen ein $t^* \in (0, \mathcal{L}]$ mit $\vartheta(0, t^*) = 2\pi l$, so wäre

$$e(0, t^*) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta(0, t^*)) \\ \sin(\vartheta(0, t^*)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\gamma(t^*) - \gamma(0)}{\|\gamma(t^*) - \gamma(0)\|}.$$

Dies würde aber bedeuten, dass $\gamma(t^*)$ auf dem rechten Halbstrahl von G liegen würde, was im Widerspruch zu a) steht. Analog für $\vartheta(0, t^*) = 2\pi(l+1)$.

d) Aus c) und

$$e^{i\vartheta(0,0)} = e(0, 0) = \dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ und}$$

$$e^{i\vartheta(0,\mathcal{L})} = e(0, \mathcal{L}) = -\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{i\frac{3\pi}{2}},$$

folgt, dass

$$\vartheta(0, \mathcal{L}) - \vartheta(0, 0) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Analog erhält man für $t \mapsto \vartheta(t, \mathcal{L})$

$$\vartheta(\mathcal{L}, \mathcal{L}) - \vartheta(0, \mathcal{L}) = \pi.$$

Setzen wir das in (2.6) so erhalten wir

$$2\pi k = \pi + \pi = 2\pi,$$

woraus $k = 1$ folgt, was zu zeigen war. Durchläuft man γ in die andere Richtung, so erhält man $k = -1$. \square

Im Weiteren werden wir uns nicht nur mit den Kurven selbst beschäftigen, sondern auch mit zweidimensionalen Flächen, die von Kurven berandet werden. Um Aussagen über den Bereich innerhalb der Kurve machen zu können, führt uns unser Weg zu einem fundamentalen Theorem aus der Topologie des \mathbb{R}^2 , dem sogenannten *Jordanschen Kurvensatz*. Der Satz besagt, dass jede einfach geschlossene Kurve γ des \mathbb{R}^2 die Ebene in Punkte innerhalb und Punkte außerhalb von γ unterteilt. Dieses Resultat der Topologie scheint anschaulich sofort klar zu sein, der Satz ist jedoch nicht trivial und sein Beweis ist aufwendig und umfangreich, weshalb wir hier darauf verzichten. Eine ausführliche Version des Beweis des Jordanschen Kurvensatz findet sich von E. Ossa in [18, §1.3, S.14]. Nun aber zum ausformulierten Theorem.

Theorem 2.2.10 (Jordanscher Kurvensatz). *Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve. Das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(\gamma)$ von γ zerfällt in genau zwei disjunkte Teilmengen des \mathbb{R}^2 , bezeichnet mit dem Inneren $\text{int}(\gamma)$ und dem Äußeren $\text{ext}(\gamma)$. Für $\text{int}(\gamma)$ und $\text{ext}(\gamma)$ gelten folgende Eigenschaften:*

- (i) $\text{int}(\gamma)$ ist beschränkt,
- (ii) $\text{ext}(\gamma)$ ist unbeschränkt,
- (iii) Die Mengen $\text{int}(\gamma)$, und $\text{ext}(\gamma)$ sind wegzusammenhängend.

Bemerkung. Der Begriff des *Wegzusammenhangs* lässt sich anschaulich unmittelbar erklären. Eine Menge M heißt wegzusammenhängend, falls zwei beliebige Punkte in M mittels einer Kurve verbunden werden können, sodass diese ganz innerhalb M liegt. Da $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(\gamma)$ disjunkt ist, muss jede Verbindungskurve von einem Punkt aus $\text{int}(\gamma)$ zu $\text{ext}(\gamma)$ die Kurve γ schneiden.

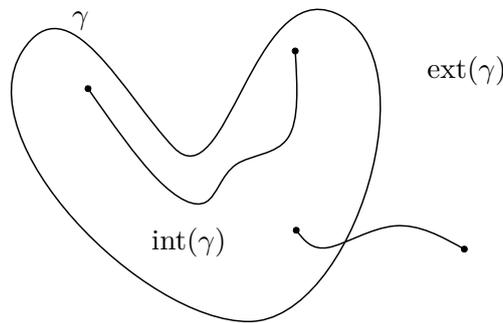


Abbildung 2.11: Inneres und Äußeres einer einfach geschlossenen Kurve

Beispiel 2.2.11 (Inneres und Äußeres einer Ellipse). Die Ellipse $\gamma(t) = (p \cos(t), q \sin(t))$, mit $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q \neq 0$, ist eine einfach geschlossene Kurve mit Periode 2π . Das Innere beziehungsweise Äußere von γ ist dann

$$\begin{aligned} \text{int}(\gamma) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} < 1 \right\} \quad \text{und} \\ \text{ext}(\gamma) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} > 1 \right\}. \end{aligned}$$

Die Tatsache, dass jede einfach geschlossene Kurve γ ein Inneres bzw. Äußeres hat, eröffnet uns die Möglichkeit zwischen zwei Orientierungen von γ zu unterscheiden.

Definition 2.2.12 (Positiv orientierte Kurve). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, einfach geschlossene Kurve. Wir nennen γ *positiv orientiert*, falls ihr Normalvektor n für alle $t \in I$ in das Innere $\text{int}(\gamma)$ zeigt. Ansonsten nennen wir γ *negativ orientiert*.

Der Begriff der positiven Orientierung von γ lässt sich anschaulich erklären. Stellen wir uns vor, wir fahren mit einem Fahrrad die Kurve γ entlang. Ist γ positiv orientiert, so liegt das begrenzte Flächenstück $\text{int}(\gamma)$ immer links von uns.

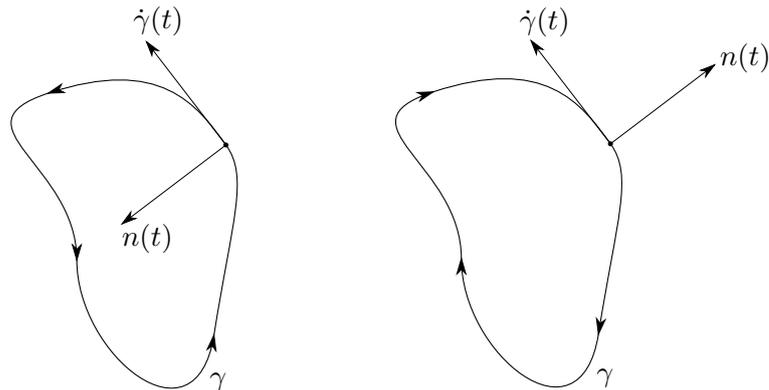


Abbildung 2.12: Positiv sowie negativ orientierte Kurve

Wie in Abbildung 2.12 zu sehen ist, kann durch Umparametrisierung der Kurve von t zu $-t$ immer eine positive Orientierung erreicht werden.

3 Flächen im Raum

Wir behandeln in diesem Kapitel Eigenschaften jener geometrischen Objekte, die im Fokus dieser Arbeit stehen, nämlich Flächen. Das Kapitel ist sehr umfassend und ausführlich, da wir hier den Grundstein für alle weiteren Überlegungen legen. Wir werden zu Beginn klären, wie Flächen formal definiert sind und was man sich unter Flächen vorstellen kann. Außerdem werden wir Fragen der Differenzierbarkeit von Funktionen auf Flächen nachgehen und in weiterer Folge auf den Begriff der Tangentialebene stoßen. Um wirklich Geometrie auf Flächen zu betreiben, werden wir ein Werkzeug der Längen- und Winkelmessung kennenlernen, nämlich die erste Fundamentalform. Mithilfe derer sind wir dann in der Lage uns mit dem Flächeninhalt auseinanderzusetzen. Auch in diesem Kapitel halten wir uns zunächst an Christian Bärs Zugang wie in [1, §3, S.92f]. Ab Unterkapitel 3.5 orientieren wir uns jedoch an Andrew Pressley in [20, §6, S.121f] und Manfredo do Carmo in [2, §2.5, S.76f].

3.1 Reguläre Flächen

In diesem Unterkapitel beschäftigen wir uns einerseits mit der formalen Definition von regulären Flächen, andererseits werden wir zwei Beispiele ausführlicher analysieren um eine Idee von diesen zu bekommen. Grundsätzlich kann man sich unter Flächen zweidimensionale Gebilde im dreidimensionalen Raum vorstellen. Ähnlich wie wir uns eine Kurve in Kapitel 2 als verbogenes Geradenstück gedacht haben, können wir uns reguläre Flächen als verformtes (gedehntes, verbogenes,...) Stück einer Ebene vorstellen, das ohne Selbstschnitte, Kanten und Spitzen zusammengefügt wird. Reguläre Flächen werden im Allgemeinen als Menge von Punkten definiert, die durch Parametrisierungen, d.h. Abbildungen, angegeben werden. Anders als bei Kurven lassen sich Flächen oftmals nur stückweise beschreiben, weshalb wir im Weiteren den Begriff der lokalen Parametrisierung einführen.

Bevor wir uns nun regulären Flächen widmen, betrachten wir noch kurz einen wichtigen Begriff aus der Topologie und der stetigen Abbildungen, den wir in weiterer Folge für die formale Definition regulärer Flächen benötigen: den des *Homöomorphismus*. Ein Homöomorphismus ist eine bijektive, stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Wir nennen zwei Mengen *homöomorph* zueinander, wenn ein Homöomorphismus zwischen den beiden Mengen existiert. Vom Blickpunkt der Topologie aus betrachtet, sind zueinander homöomorphe Mengen als gleich zu verstehen - d.h. die Mengen haben dieselben topologischen Eigenschaften. Homöomorphe Mengen lassen sich also nur durch stetige Verformungen ineinander überführen. Bildlich gesprochen heißt das, dass Deformationen jeglicher Art, wie Auseinanderziehen oder Eindrücken, dieselbe topologische Menge schaffen. Für das Zerreißen oder das Schneiden von Löchern, welche offensichtlich keine

stetige Verformung darstellen, gilt dies jedoch nicht.

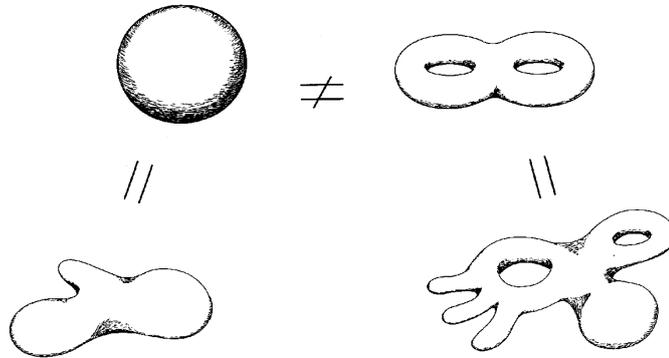


Abbildung 3.1: Homöomorphe und nicht homöomorphe Flächen, [23, §3, S.17]

Nun aber zum Kernbegriff dieses Kapitels.

Definition 3.1.1 (Reguläre Fläche). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. Wir nennen S eine *reguläre Fläche*, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung V von p im \mathbb{R}^3 gibt, sowie eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine glatte Abbildung $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, derart dass gilt

- (i) $\sigma(U) = S \cap V$ und $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ ist ein Homöomorphismus,
- (ii) die Jacobimatrix $D\sigma_{\mathbf{u}}$ hat für jeden Punkt $\mathbf{u} \in U$ Rang 2.

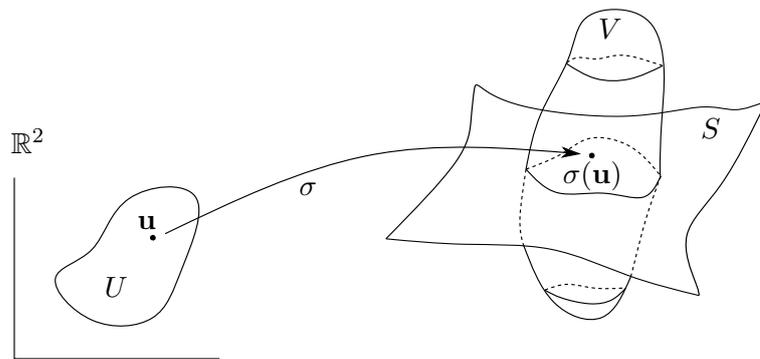


Abbildung 3.2: Der Homöomorphismus σ bildet \mathbf{u} in $S \cap V$ ab

Bedingung (i) stellt sicher, dass die topologische Struktur unter σ erhalten bleibt. Die Punkte in $S \cap V$ nahe p werden also gerade mit jenen zwei Parametern beschrieben, welche die Koordinaten der Punkte aus U sind.

Durch Bedingung (ii) ist gewährleistet, dass diese beiden Parameter auch linear unabhängig

voneinander sind. Die Möglichkeit, dass die betrachtete reguläre Fläche zu einer Kurve oder Spitze zuläuft und somit an dieser Stelle ihre „Zweidimensionalität“ einbüßt, ist dadurch ausgeschlossen.

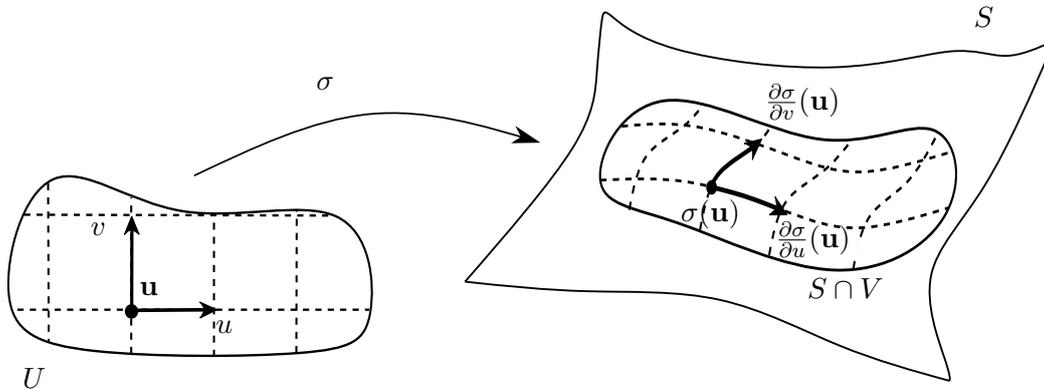


Abbildung 3.3: Erhaltung der Zweidimensionalität

Wie bereits erwähnt, werden reguläre Flächen, anders als Kurven, stückweise parametrisiert. Dazu folgende Definition.

Definition 3.1.2 (Lokale Parametrisierung einer regulären Fläche). Wir bezeichnen die Abbildung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ aus Definition 3.1.1 als *lokale Parametrisierung* von S um p . Die Menge $S \cap V$ nennen wir *Koordinatenumgebung* von p . Die Komponenten u und v von $\mathbf{u} = (u, v)$ nennen wir *Koordinaten* des Punktes $\sigma(\mathbf{u}) \in S$.

Wir betrachten im Weiteren zwei Beispiele für reguläre Flächen, wobei wir einerseits versuchen Parametrisierungen für diese zu finden und andererseits die Regularitätsbedingungen aus 3.1.1 überprüfen werden.

Beispiel 3.1.3 (Parametrisierung der affinen Ebene). Eines der simpelsten Beispiele für reguläre Flächen sind affine Ebenen. Die affine Ebene S durch einen Punkt p , aufgespannt durch zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch

$$S = \{p + u\mathbf{x} + v\mathbf{y} \mid u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Affine Ebenen sind eines der wenigen Beispiele, die mit nur einer Parametrisierung beschrieben werden können. Für die Parametrisierung setzen wir $V := \mathbb{R}^3, U := \mathbb{R}^2$ und $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\sigma(u, v) := p + u\mathbf{x} + v\mathbf{y}$. Die Bedingungen aus Definition 3.1.1 sind erfüllt, denn die Abbildung σ ist glatt und ein Homöomorphismus. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ hat auch die Jacobimatrix

$$D\sigma_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

Rang 2 und ist sogar unabhängig von (u, v) .

Beispiel 3.1.4 (Parametrisierung der Einheitssphäre). Die Menge

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

heißt *Einheitssphäre*, da sie Radius 1 hat.

Um S^2 zu parametrisieren und somit nachzuweisen, dass S^2 eine reguläre Fläche ist, benötigen wir zumindest zwei Parametrisierungen, aus folgendem Grund: S^2 ist eine kompakte Menge, U muss nach Definition jedoch offen sein. Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist nun aber wieder kompakt, was im Widerspruch dazu steht, dass U offen ist.

Es gibt viele Möglichkeiten die Sphäre mit Parametrisierungen zu überdecken, wir entscheiden uns für die Parametrisierung mithilfe von Kugelkoordinaten mit den Winkeln θ und φ .

Sei p ein Punkt der Sphäre. Wir ziehen eine Parallele zur z -Achse durch p , welche im Punkt q auf die xy -Ebene trifft (beachte dabei, dass q kein Punkt der Sphäre ist). Dann sei θ der Winkel zwischen der z -Achse und p , sowie φ der Winkel zwischen q und der positiven x -Achse.

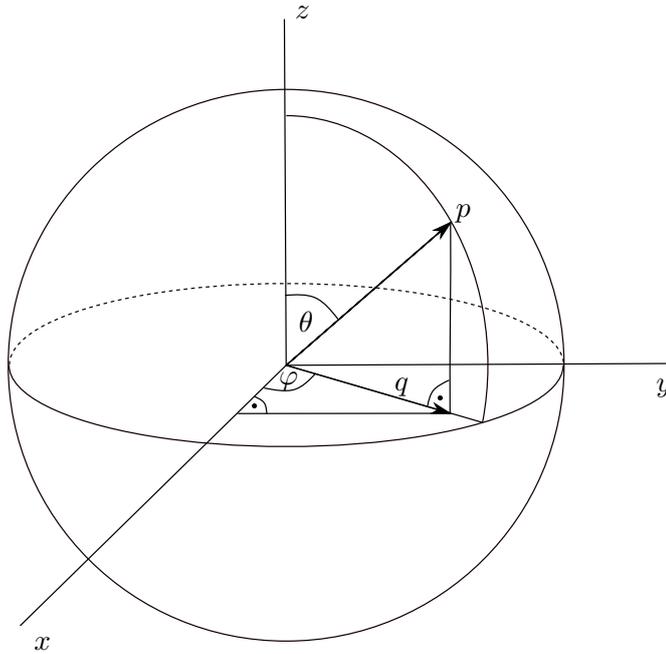


Abbildung 3.4: Konstruktion der Parametrisierung der Sphäre

Für das explizite Anschreiben der Parametrisierung müssen wir die Komponenten von p in Termen von θ und φ ausdrücken. Dazu betrachten wir das rechtwinkelige Dreieck, das p als Eckpunkt hat, sowie als Seiten den Radius ($=1$) und dem Anteil auf der z -Achse. Die z -Komponente von p ist folglich $\cos(\theta)$. Um die x - und y -Komponente von p zu erlangen, betrachten wir das rechtwinkelige Dreieck in der xy -Ebene mit den Eckpunkten

q , dem Nullpunkt und dem Anteil von p auf der x -Achse. Da $\|q\| = \sin(\theta)$ ist, ist die x -Komponente $\sin(\theta) \cos(\varphi)$, die y -Komponente $\sin(\theta) \sin(\varphi)$. Somit ist $p = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Das bedeutet für unsere Parametrisierung nun

$$\sigma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Da $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma(\theta, \varphi + 2\pi)$ gilt, müssen wir die Injektivität von σ durch geschickte Wahl von U sicherstellen:

$$U := \{(\theta, \varphi) \mid 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

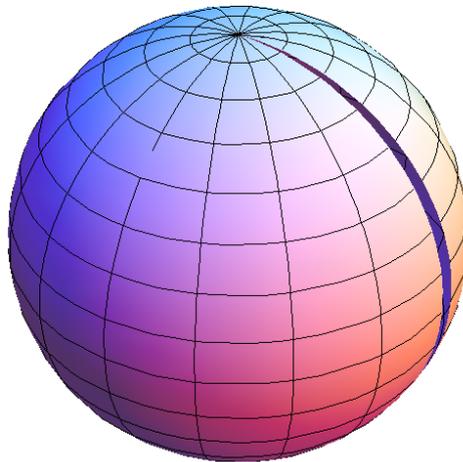


Abbildung 3.5: Sphäre mit Ausnahme eines vertikalen Halbkreis

Beachte, dass mit dieser Wahl von U nicht die ganze Sphäre abgebildet wird, dies würde man nur durch \leq statt $<$ erreichen. Dann wäre jedoch U nicht mehr offen. Die Abbildung $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bildet die gesamte Sphäre, bis auf den Halbkreis H der Form $H := \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geq 0, y = 0\}$, wie in Abbildung 3.5 zu sehen ist, ab. Um zu zeigen, dass die Sphäre eine reguläre Fläche ist, müssen wir zumindest noch eine Parametrisierung finden, die auch H überdeckt. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{\sigma} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \cos(\varphi) \\ -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Die offene Menge U ist dieselbe, wie für σ . Für die Abbildung $\tilde{\sigma}$ haben wir die Sphäre an der z -Achse gekippt und an der x -Achse gedreht. Das Bild von $\tilde{\sigma}$ spart genau den

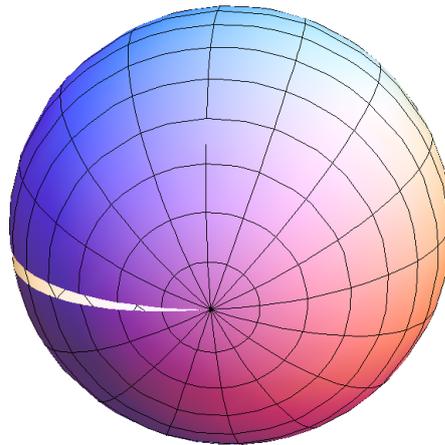


Abbildung 3.6: Sphäre mit Ausnahme eines horizontalen Halbkreis

Halbkreis $\tilde{H} := \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \leq 0, z = 0\}$ aus, vgl. Abbildung 3.6.

Da sich H und \tilde{H} nicht schneiden, parametrisieren σ und $\tilde{\sigma}$ die gesamte Sphäre. Die Bedingungen (i) aus Definition 3.1.1 ist für beide Parametrisierungen erfüllt, da σ und $\tilde{\sigma}$ sogar glatt sind, sowie auch deren Umkehrfunktionen. Bedingung (ii) ist ebenfalls erfüllt, da die Jacobimatrix von σ in $u \in U$

$$D\sigma_u = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

ist und Rang 2 besitzt. Analog wird die Jacobimatrix von $\tilde{\sigma}$ berechnet. Die Einheitskugel S^2 ist somit eine reguläre Fläche.

Bei den meisten regulären Flächen ist keine „globale“ Parametrisierung möglich, sondern wir beschreiben die Fläche Stück für Stück durch die Zusammensetzung mehrerer lokaler Parametrisierungen, wie in Beispiel 3.1.4. Um daher eine reguläre Fläche in ihrer Gesamtheit zu beschreiben führen wir den nachfolgenden Begriff ein.

Definition 3.1.5 (Atlas). Eine Familie von lokalen Parametrisierungen, wie in Definition 3.1.2, deren Bilder die gesamte reguläre Fläche S überdecken, nennen wir *Atlas*.

3.2 Glatte Abbildungen auf regulären Flächen

Aus der Analysis kennen wir mehrdimensionale Differentiation als Möglichkeit der linearen Bestapproximation einer Funktion. Dazu wiederholen wir kurz die Definition und beziehen uns dabei auf [17, §14.1, S.191f].

Definition 3.2.1 (Differenzierbarkeit auf \mathbb{R}^n). Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Die Funktion f heißt *differenzierbar in $x_0 \in G$* , falls eine lineare Abbildung

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

existiert, sodass die durch

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + r(h),$$

in einer Umgebung $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ definierte Restfunktion $r(h) : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ folgendes erfüllt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Die Funktion f heißt *differenzierbar auf G* , falls f differenzierbar in allen Punkten $x_0 \in G$ ist.

Bemerkung. Die lineare Funktion A kann als $m \times n$ -Matrix interpretiert werden. Die Matrix A ist eindeutig bestimmt und wird auch als das *Differential* von f an der Stelle x_0 bezeichnet, wir schreiben dafür Df_{x_0} . Die Matrix Df_{x_0} heißt Jacobi-Matrix im Punkt x_0 und es gilt

$$Df_{x_0} = \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0) \right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Wie wir hier sehen, haben die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

und ihr Differential, aufgefasst als Abbildung,

$$Df : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \text{Mat}(m \times n)$$

ihren Definitions- sowie Wertebereich in Vektorräumen. Wir stellen uns jetzt jedoch die Frage nach Differenzierbarkeit auf regulären Flächen, welche andere Voraussetzungen und Einschränkungen mit sich bringen als Vektorräume. Deshalb können wir Definition 3.2.1 nicht einfach auf Abbildungen zwischen regulären Flächen

$$f : S_1 \rightarrow S_2 \quad (S_1, S_2 \text{ reguläre Flächen})$$

umlegen, da weder Definitions- noch Wertebereich Vektorräume sind – geschweige denn wissen wir, wohin das Differential Df einer solchen Funktion abbilden soll. Da Differenzierbarkeit aber eine lokale Operation ist, stehen unsere Chancen gut, diese lokalen Eigenschaften auch auf reguläre Flächen umzulegen. Denn reguläre Flächen sehen lokal betrachtet wie offene Teilmengen des \mathbb{R}^2 aus. Diese Unterkapitel stellt sich die Frage nach Glattheit (glatt meint unendlich oft differenzierbar) von Funktionen, die ihren Definitions- und/oder Wertebereich auf regulären Fläche haben. Die Herangehensweise mag zunächst etwas eigenartig wirken, da wir zuerst den Begriff der Glattheit von Funktionen auf regulären Flächen klären und erst im nächsten Unterkapitel 3.3, was differenzieren zwischen Flächen konkret heißt.

Schritt für Schritt nähern wir uns nun der Thematik, indem wir zuerst Funktionen betrachten, die in S „hinein“ abbilden, d.h. die ihren Wertebereich auf einer regulären Fläche

haben und uns dann die Frage nach Glattheit, stellen. Im zweiten Schritt wollen wir Funktionen untersuchen, die ihren Definitionsbereich auf regulären Flächen haben, welche also von S „hinaus“ abbilden. Im letzten Punkt fügen wir die beiden vorherigen Schritte zusammen und analysieren Funktion und ihre Differenzierbarkeit, wenn sie *zwischen* zwei regulären Flächen abbilden.

Bevor wir nun diese Abbildungen auf Glattheit untersuchen, wenden wir uns noch kurz dem Begriff des *Diffeomorphismus* zu. Eine glatte, bijektive Funktion $f : U \rightarrow V$, wobei $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen sind, heißt Diffeomorphismus, falls ihre Umkehrabbildung ebenfalls glatt ist. Wir nennen U und V dann auch diffeomorph zueinander. Wie man sieht ist der Begriff des Diffeomorphismus eine Verstärkung der Bedingungen die für Homöomorphismen gelten. Vom Standpunkt der Differenzierbarkeit aus sind zwei zueinander diffeomorphe Mengen als gleich anzusehen.

Jetzt aber zu glatten Funktionen, die in S „hinein“ abbilden.

Proposition 3.2.2 (Glatte Abbildungen mit Wertebereich auf S). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung von S . Sei weiters $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit $\varphi(W) \subseteq S \cap V$. Dann ist φ genau dann glatt, wenn $\sigma^{-1} \circ \varphi : W \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$ glatt ist.*

Bemerkung. Beachte, dass wir die Funktion $\varphi : W \rightarrow S \cap V \subseteq \mathbb{R}^3$ im Sinne von Definition 3.2.1 differenzieren können. Grundsätzlich sagt diese Proposition, dass es für Fragen der Differenzierbarkeit nicht von Belangen ist, ob die Funktion φ gleich in die Fläche abbildet, oder ob sie den Umweg über die Koordinaten in U der lokalen Parametrisierung nimmt.

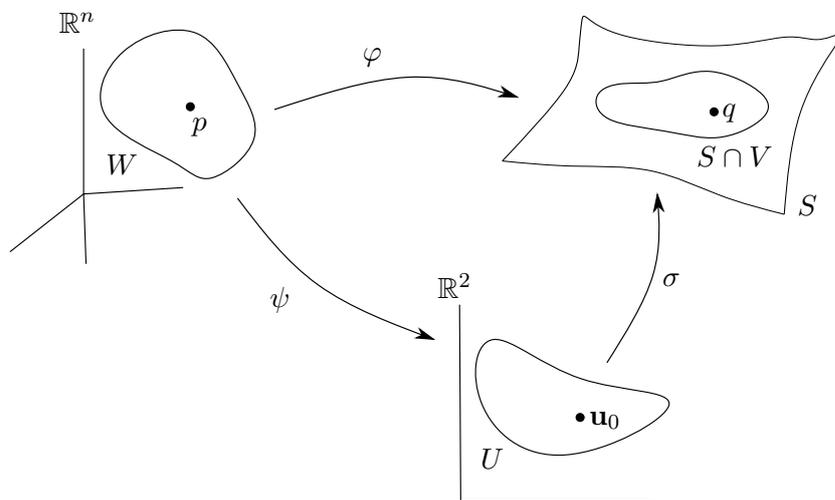


Abbildung 3.7: Abbildung φ nach S hinein

Beweis. Eine Beweisrichtung gestaltet sich einfach, denn ist $\psi := \sigma^{-1} \circ \varphi$ eine glatte Abbildung, so ist auch $\varphi : \sigma \circ \psi$ als Verkettung glatter Abbildungen ebenfalls glatt.

Die andere Beweisrichtung ist aufwendiger und technischer. Da wir für σ^{-1} mit Wertebereich in $S \cap V$ nicht genau definieren können, was Differenzierbarkeit in diesem Fall bedeutet, können wir nicht dieselbe Strategie wie für die erste Beweisrichtung anwenden. Sei nun $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatt. Sei weiters $p \in W$, sei $q := \varphi(p) \in S \cap V$ und sei schließlich $\mathbf{u}_0 := \sigma^{-1}(q) \in U$. Für $(u, v) \in U$ schreiben wir

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix des Differentials $D\sigma_{\mathbf{u}_0}$ hat nach Voraussetzung maximalen Rang, deshalb können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die 2x2-Matrix $\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\mathbf{u}_0)\right)$ invertierbar ist (Falls nicht, so müssen wir gegebenenfalls die x - oder y -Koordinate durch die z -Koordinate ersetzen).

Wir erweitern die Abbildung σ zu

$$\begin{aligned} \tau : U \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \tau(u, v, t) &:= \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) + t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $(u, v) \in U$ und $t \in \mathbb{R}$. Geometrisch bildet τ einen vertikalen Zylinder über U auf einen „vertikalen Zylinder“ über $\sigma(U) = S \cap V$ ab, (vgl.[9, §3.2, S.19]).

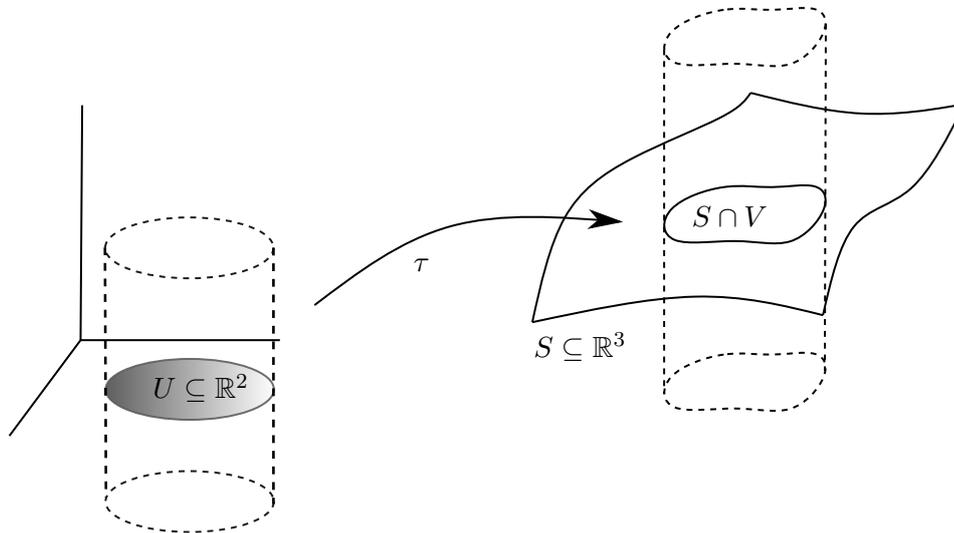


Abbildung 3.8: Konstruktion von τ

Wir berechnen nun das Differential von τ an der Stelle $(u_0, v_0, 0)$:

$$D\tau_{(u_0, v_0, 0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(\mathbf{u}_0) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(\mathbf{u}_0) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(\mathbf{u}_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir entwickeln die Determinante nach der letzten Spalte und bekommen so

$$\det D\tau_{(u_0, v_0, 0)} = \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(\mathbf{u}_0) \right) \neq 0.$$

Daraus folgt, dass $D\tau_{(u_0, v_0, 0)}$ invertierbar ist und wir können nach dem Umkehrsatz [6, §8, S.96] eine offene Umgebung $U_1 \subseteq U \times \mathbb{R}$ von $(u_0, v_0, 0)$ und eine offene Umgebung $V_1 \subseteq V$ von q finden, sodass

$$\tau|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$$

ein Diffeomorphismus ist. Beachte, dass wir nun eine Umgebung V_1 von $q \in S \cap V$ gefunden haben, auf der τ^{-1} differenzierbar ist. Setzen wir nun $W_1 := \varphi^{-1}(V_1)$, so ist W_1 eine offene Umgebung von p . Für $\tilde{p} \in W_1$ gilt

$$(\tau^{-1} \circ \varphi)(\tilde{p}) = ((\sigma^{-1} \circ \varphi)(\tilde{p}), 0), \quad (3.1)$$

denn $\tau|_{U \times \{0\}} = \sigma$. Da $\tau^{-1} \circ \varphi$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen wieder glatt ist, gilt dies auch für die linke Seite von (3.1), d.h. $\sigma^{-1} \circ \varphi$ ist glatt auf W_1 . Die Menge W_1 ist eine offene Menge des beliebig vorgegebenen Punktes p und somit ist die Aussage bewiesen. \square

Als direkte Konsequenz dieser Proposition, können wir jetzt die Parametertransformation zweier lokaler Parametrisierungen für eine reguläre Fläche formulieren und beweisen, dass diese ein Diffeomorphismus ist.

Korollar 3.2.3 (Parametertransformation). *Sei S eine reguläre Fläche, seien $\sigma_1 : U_1 \rightarrow S \cap V_1$ und $\sigma_2 : U_2 \rightarrow S \cap V_2$ lokale Parametrisierungen. Dann ist*

$$\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 : \sigma_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow \sigma_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

glatt.

Beweis. Wir verwenden dazu Proposition 3.2.2. Da σ_1 glatt ist, können wir die Abbildung φ aus 3.2.2 mit σ_1 identifizieren. Somit setzen wir $W = \sigma_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ und $\varphi = \sigma_1$. Die Verkettung $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 : \sigma_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow \sigma_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ ist somit glatt. \square

Bemerkung. Intuitiv haben wir uns wohl schon immer gedacht, dass mit unterschiedlichen Koordinaten der gleiche Flächenabschnitt beschrieben werden kann – und Recht behalten.

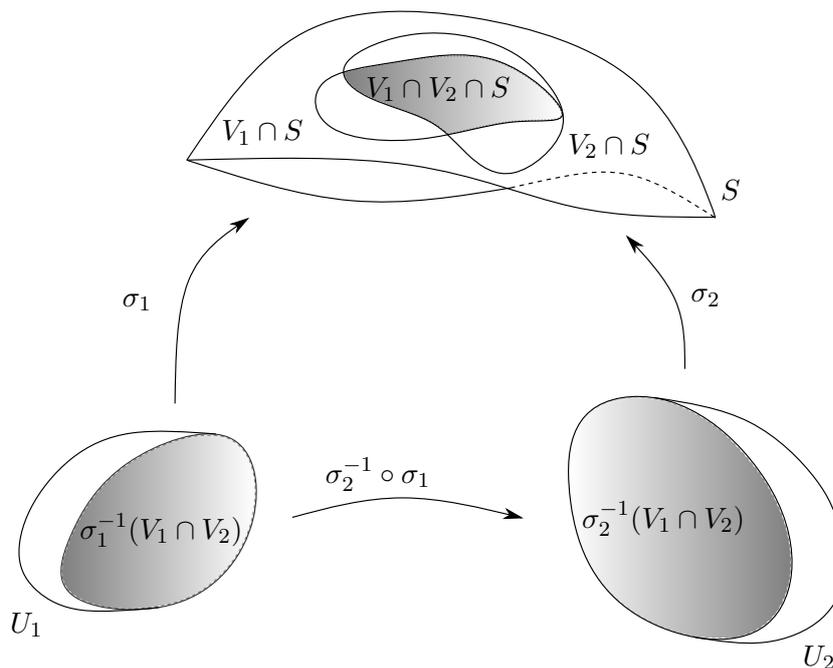


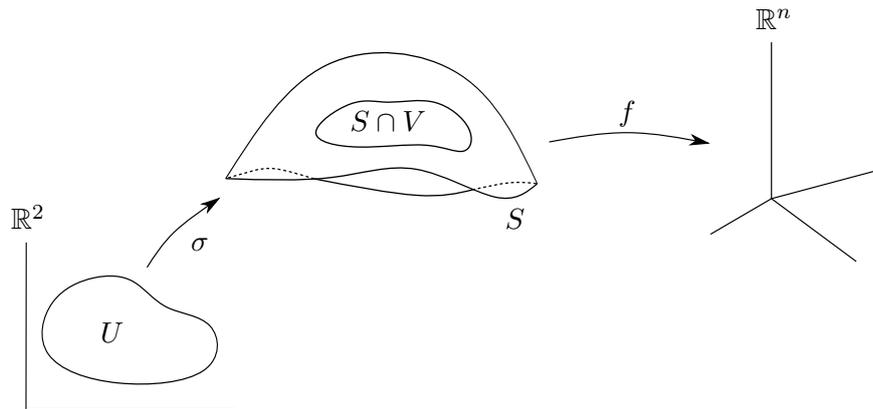
Abbildung 3.9: Parametertransformation

Als nächstes betrachten wir nun Funktionen und ihre Differenzierbarkeit, welche aus S „hinaus“ abbilden, also mit Definitionsbereich auf einer regulären Fläche. Anders als bei Funktionen „hinein“, haben wir nun nicht die Möglichkeit einfach die Definition von Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n auf reguläre Flächen umzulegen. Reguläre Flächen sind im Allgemeinen nicht offen, dies ist jedoch essentiell für die Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion, da wir eine kleine offene Umgebung um die differenzierbare Stelle legen müssen.

Damit eine Abbildung $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $p \in S$ differenzierbar ist, geht man üblicherweise wie folgt vor: Wir wählen eine Koordinatenumgebung um p mit Koordinaten u, v und sagen f ist differenzierbar in p , wenn ihre Darstellung in den Koordinaten u, v differenzierbar ist. Da ein und derselbe Punkt auf einer regulären Fläche zu mehreren Koordinatenumgebungen gehören und durch unterschiedliche Parametrisierungen beschrieben werden kann, müssen wir sicherstellen, dass die Frage der Differenzierbarkeit von f nicht vom gewählten Koordinatensystem abhängt. Wir werden zuerst definieren was es für f heißt differenzierbar zu sein und vergewissern uns im nächsten Schritt, dass die Definition nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt.

Definition 3.2.4 (Glatte Funktionen mit Definitionsbereich auf einer regulären Fläche). Es sei $f : S \cap V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion auf der offenen Teilmenge $S \cap V$ auf der regulären Fläche S . Wir nennen f *glatt* in $p \in S \cap V$, falls es eine lokale Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ gibt, sodass die Verkettung $f \circ \sigma : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt in $\sigma^{-1}(p)$ ist.

Durch Korollar 3.2.3 erhalten wir sofort, dass Definition 3.2.4 nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt: Sei f wie in 3.2.4 glatt mit der Parametrisierung $\sigma_1 : U_1 \rightarrow S_1 \cap V_1$

Abbildung 3.10: Abbildung f mit Definitionsbereich in S

um $p \in S \cap V_1$. Sei $\sigma_2 : U_2 \rightarrow S_2 \cap V_2$ eine weitere lokale Parametrisierung von S mit $p \in S \cap V_2$. Dann ist auch $f \circ \sigma_2 = f \circ \sigma_1 \circ \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$ glatt in p , denn $f \circ \sigma_1$ ist nach Definition glatt und $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$ nach Korollar 3.2.3.

Zuletzt wollen wir nun unsere Erkenntnisse bezüglich Differenzierbarkeit aus Abbildungen „hinein in“ und „hinaus aus“ Flächen kombinieren und Funktionen zwischen regulären Flächen betrachten.

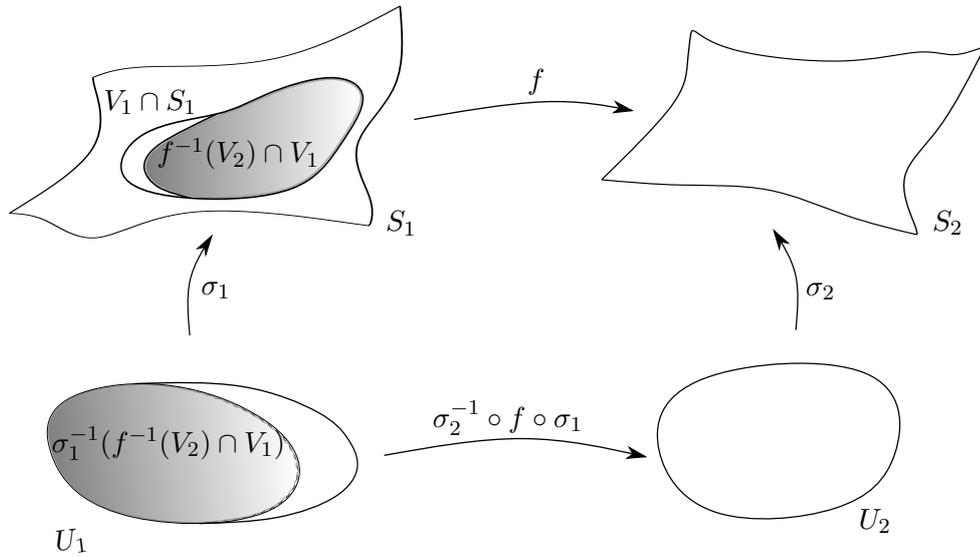
Definition 3.2.5 (Glatte Abbildungen zwischen regulären Flächen). Seien S_1, S_2 zwei reguläre Flächen, sei $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine Abbildung. Wir nennen f *glatt* in $p \in S_1$, falls es eine lokale Parametrisierung $\sigma_1 : U_1 \rightarrow S_1 \cap V_1$ um p und eine lokale Parametrisierung $\sigma_2 : U_2 \rightarrow S_2 \cap V_2$ um $f(p)$ gibt, sodass die Abbildung $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : \sigma_1^{-1}(f^{-1}(V_2) \cap V_1) \rightarrow U_2$ glatt in p ist.

Die Abbildung f zwischen zwei Flächen ist also – ähnlich wie jene mit Definitionsbereich auf einer Fläche – dann glatt, wenn sie ausgedrückt in Koordinaten glatt ist, was in Abbildung 3.11 dem unteren „Stock“ entspricht. Die Definition 3.2.5 ist wiederum wegen Korollar 3.2.3 unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierung. Denn seien neben σ_i auch $\tilde{\sigma}_i$ ($i = 1, 2$) Parametrisierungen von S_i , so ist mit $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ auch

$$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \sigma_1^{-1} \circ \tilde{\sigma}_1$$

als Verknüpfung glatter Abbildungen selbst glatt. Wir sind nun in der Lage den zu Beginn dieses Unterkapitels erwähnten Begriff des Diffeomorphismus auf reguläre Flächen zu definieren.

Definition 3.2.6 (Diffeomorphismus zwischen regulären Flächen). Seien $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen. Eine Abbildung $f : S_1 \rightarrow S_2$ heißt *Diffeomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} glatt sind. Existiert ein solcher Diffeomorphismus $f : S_1 \rightarrow S_2$, dann heißen die Flächen S_1 und S_2 *diffeomorph* zueinander.

Abbildung 3.11: Abbildung f zwischen S_1 und S_2

Beispiel 3.2.7 (Diffeomorphismus Kugel – Ellipsoid). Wir betrachten die Kugel

$$S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

und das Ellipsoid

$$S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}, \text{ mit } a, b, c > 0.$$

Die Abbildung

$$f : S_1 \rightarrow S_2$$

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}$$

abbildet die Kugel auf das Ellipsoid ab. Die Funktion ist bijektiv und glatt im Sinne von Definition 3.2.5. Auch die Umkehrabbildung f^{-1} mit

$$f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$$

$$f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{y}{b} \\ \frac{z}{c} \end{pmatrix},$$

welche das Ellipsoid auf die Kugel abbildet, ist glatt. Somit ist f ein Diffeomorphismus und wir nennen die Kugel und das Ellipsoid diffeomorph zueinander.

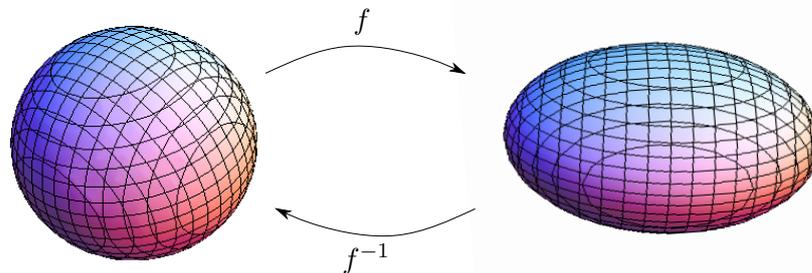


Abbildung 3.12: Diffeomorphismus zwischen Sphäre und Ellipsoid

Bei allen drei Arten der Abbildung („hinein, hinaus, zwischen“), sind wir einen geschickten Umweg über die Koordinaten gegangen. Wir haben also bewusst die Frage nach Glattheit von f auf regulären Flächen, auf die Frage nach Glattheit von Abbildungen auf Vektorräumen reduziert – auf denen wir ohne Probleme differenzieren können. Wie das Differential einer glatten Funktion zwischen Flächen konkret aussehen soll, klären wir nun.

3.3 Tangentialebene einer regulären Fläche

So wie Geraden die simpelsten Kurven sind, sind Ebenen die einfachsten regulären Flächen. Ähnlich wie wir Kurven mit Geraden approximieren, wollen wir mit den einfachsten regulären Flächen – sprich Ebenen – komplizierte Flächen lokal annähern. Dieses Konzept der linearen Bestapproximation ist nun aber keineswegs neu, wir brauchen uns nur die Definition von Differenzierbarkeit mehrdimensionaler Funktionen aus 3.2.1 in Erinnerung rufen. Das Differential einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U$ ist beschrieben durch

$$Df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

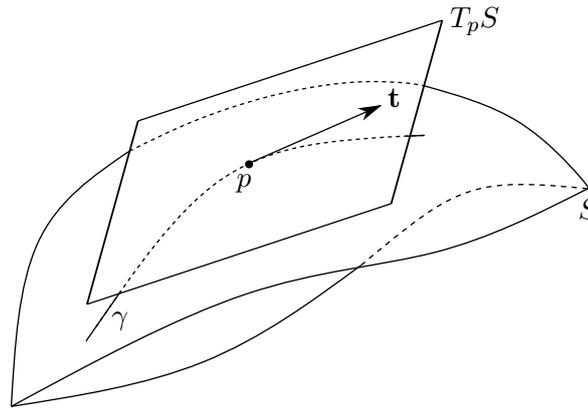
$$x \mapsto f(p) + Df_p(x - p)$$

und somit die erste lineare Näherung im Punkt $p \in U$. Analog zu dieser Vorgehensweise, versuchen wir in diesem Unterkapitel ein geometrisches Äquivalent zu Df_p für reguläre Flächen zu finden.

Definition 3.3.1 (Tangentialebene und Tangentialvektor einer regulären Fläche). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $p \in S$. Wir nennen die Menge

$$T_p S := \{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{es gibt ein } \epsilon > 0 \text{ und eine glatte parametrisierte Kurve} \\ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \text{ mit } \gamma(0) = p \text{ und } \dot{\gamma}(0) = \mathbf{t} \}$$

Tangentialebene von S in p . Die Elemente \mathbf{t} aus $T_p S$ heißen *Tangentialvektoren*.

Abbildung 3.13: Tangentialebene in p an S

Die Menge $T_p S$ wird also dadurch konstruiert, dass wir eine Kurve in die Fläche S legen, die durch $p = \gamma(0)$ verläuft. Betrachten wir ihren Tangentialvektor in p , dann ist er auch gleichzeitig tangential zu S . Aus Definition 3.3.1 geht aber noch nicht hervor, ob $T_p S$ tatsächlich eine Ebene, und somit ein Vektorraum ist, mithilfe dessen wir im Weiteren ein Differential definieren wollen. Dazu gehen wir wieder den Weg über die Koordinaten und versuchen die Tangentialebene mittels lokaler Parametrisierung zu beschreiben.

Proposition 3.3.2 (Tangentialebene als Vektorraum). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $p \in S$. Sei weiters $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung von S um p . Wir setzen $\mathbf{u}_0 := \sigma^{-1}(p) \in U$. Dann gilt*

$$T_p S = \text{Im}(D\sigma_{\mathbf{u}_0}) = D\sigma_{\mathbf{u}_0}(\mathbb{R}^2).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Inklusion $T_p S \supset \text{Im}(D\sigma_{\mathbf{u}_0})$. Sei dazu $\mathbf{t} \in \text{Im}(D\sigma_{\mathbf{u}_0})$, d.h. es gibt ein $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{t} = D\sigma_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{r}).$$

Um die Voraussetzungen für $T_p S$ zu schaffen, müssen wir eine Kurve γ konstruieren, die durch $p = \sigma(\mathbf{u}_0)$ geht und in Richtung \mathbf{r} weiterläuft. Dazu setzen wir $\gamma(t) := \sigma(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{r})$. Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ sind alle $(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{r}) \in U$, falls $|t| < \epsilon$, also ist γ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert. Damit folgt

$$\gamma(0) = \sigma(\mathbf{u}_0) = p$$

und

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt}\sigma(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{r})|_{t=0} = D\sigma_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{r}) = \mathbf{t}.$$

Somit gilt $\mathbf{t} \in T_p S$.

Nun zeigen wir die Inklusion $T_p S \subset \text{Im}D\sigma_{\mathbf{u}_0}$. Sei dazu $\mathbf{t} \in T_p S$, d.h. es existiert eine glatte

Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{t}$. Nach eventueller Verkleinerung von ϵ können wir annehmen, dass γ ganz in V verläuft. Gemäß Proposition 3.2.2 ist

$$(\sigma^{-1} \circ \gamma) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$$

eine glatte Abbildung, genauer gesagt eine glatte, ebene parametrisierte Kurve in U . Wir setzen $\mathbf{r} := \frac{d}{dt}(\sigma^{-1} \circ \gamma)|_{t=0} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$D\sigma_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{r}) = \frac{d}{dt}(\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \gamma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma|_{t=0} = \mathbf{t}.$$

Daher ist $\mathbf{t} \in \text{Im}(D\sigma_{\mathbf{u}_0})$.

Weil \mathbf{t} in beiden Inklusionsrichtungen beliebig gewählt war, gilt

$$T_p S = \text{Im}(D\sigma_{\mathbf{u}_0}) = D\sigma_{\mathbf{u}_0}(\mathbb{R}^2).$$

Da außerdem $D\sigma_{\mathbf{u}_0}$ maximalen Rang 2 hat, bildet $T_p S \subseteq \mathbb{R}^3$ einen zweidimensionalen Untervektorraum. \square

Nun sind wir endlich in der Lage, das Differential einer glatten Funktion zwischen regulären Flächen konkret zu definieren, mit folgenden Eigenschaften: Das Differential einer glatten Abbildung $f : S_1 \rightarrow S_2$ in einem Punkt $p \in S_1$ soll in der Lage sein, die Veränderung von $f(p) \in S_2$ zu messen, wenn sich p zu einem nahegelegenen Punkt q in S_1 bewegt. Liegen p und q sehr nahe beieinander, so ist ihre Verbindungsgerade annähernd tangential an S_1 in p . Vom Differential von f ist also zu erwarten, dass es einen Tangentialvektor in $p \in S_1$ auf einen Tangentialvektor in $f(p) \in S_2$ abbildet. Das Differential sollte also zwischen den Tangentialebenen $T_p S_1$ und $T_{f(p)} S_2$ abbilden.

Definition 3.3.3 (Differential einer glatten Abbildung zwischen regulären Flächen). Seien $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen, sei $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine glatte Abbildung und sei $p \in S$. Das *Differential* von f in p ist die Abbildung

$$df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2,$$

die gegeben ist durch folgende Vorschrift: Zu $\mathbf{t} \in T_p S_1$ wähle eine glatte parametrisierte Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{t}$ und setze

$$df_p(\mathbf{t}) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} \in T_{f(p)} S_2.$$

Da Tangentialebenen über Kurven definiert sind, macht es Sinn auch die Definition des Differentials über Kurven zu beschreiben, da dieses zwischen Tangentialebenen abbildet. So wie eine glatte Abbildung $f : S_1 \rightarrow S_2$ die Kurven dreht, so ist df_p die richtige Abbildung um deren Tangentialvektoren zu drehen.

Das Differential ist zwar unter anderem über parametrisierte Kurven definiert, hängt aber nicht von ihrer Wahl ab.

Proposition 3.3.4 (Unabhängigkeit von df_p von der Wahl der parametrisierten Kurve). Sei df_p wie in Definition 3.3.3. Das Differential df_p ist wohldefiniert, d.h. $df_p(\mathbf{t})$ hängt nur von \mathbf{t} ab und nicht von der Wahl der Kurve γ . Außerdem ist df_p linear.

Beweis. Wiederum werden wir den Beweis mithilfe lokaler Parametrisierung führen. Sei dazu $\sigma_1 : U_1 \rightarrow S_1 \cap V_1$ eine lokale Parametrisierung um $p \in S_1$ und $\sigma_2 : U_2 \rightarrow S_2 \cap V_2$ eine lokale Parametrisierung um $f(p) \in S_2$. Bei Bedarf verkleinern wir U_1 und V_1 und wir können annehmen, dass $f(S_1 \cap V_1) \subseteq V_2$ gilt. Wir setzen

$$\tilde{f} := \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

und $\mathbf{u}_0 := \sigma_1^{-1}(p) \in U_1$. Außerdem betrachten wir die Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{t}$ aus der Definition von df_p und setzen

$$\sigma_1^{-1} \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U_1.$$

Eventuell müssen wir auch hier ϵ verkleinern, sodass γ ganz in V_1 verläuft. Wie in Proposition 3.3.2 setzen wir $\mathbf{r} := \frac{d}{dt}(\sigma_1^{-1} \circ \gamma)|_{t=0}$ und es gilt $D\sigma_{1\mathbf{u}_0}(\mathbf{r}) = \mathbf{t}$. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} df_p &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \sigma_1 \circ \sigma_1^{-1} \circ \gamma)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\sigma_2 \circ \tilde{f} \circ \sigma_1^{-1} \circ \gamma)|_{t=0} \\ &= D(\sigma_2 \circ \tilde{f})_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{r}) \\ &= D(\sigma_2 \circ \tilde{f})_{\mathbf{u}_0} \circ (D\sigma_{1\mathbf{u}_0})^{-1}(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Die letzte Zeile hängt nur noch vom Tangentialvektor \mathbf{t} ab und nicht mehr von der Wahl der speziellen Kurve γ . Somit haben wir die Unabhängigkeit von df_p gezeigt.

Außerdem beschreibt die letzte Zeile eine Verkettung linearer Abbildungen von $D(\sigma_2 \circ \tilde{f})_{\mathbf{u}_0}$ und $(D\sigma_{1\mathbf{u}_0})^{-1}$, womit auch df_p selbst linear ist. \square

Der Beweis von Proposition 3.3.4 hat gezeigt, dass das Differential df_p auch über die Jacobimatrizen der Parametrisierungen bzw. der Funktion \tilde{f} beschrieben werden kann (also wiederum durch einen Umweg über die Koordinaten).

Genauer gesagt kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_p S_1 & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)} S_2 \\ \uparrow D\sigma_{1\mathbf{u}_0} & & \uparrow D\sigma_{2\tilde{f}(\mathbf{u}_0)} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{D\tilde{f}_{\mathbf{u}_0}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

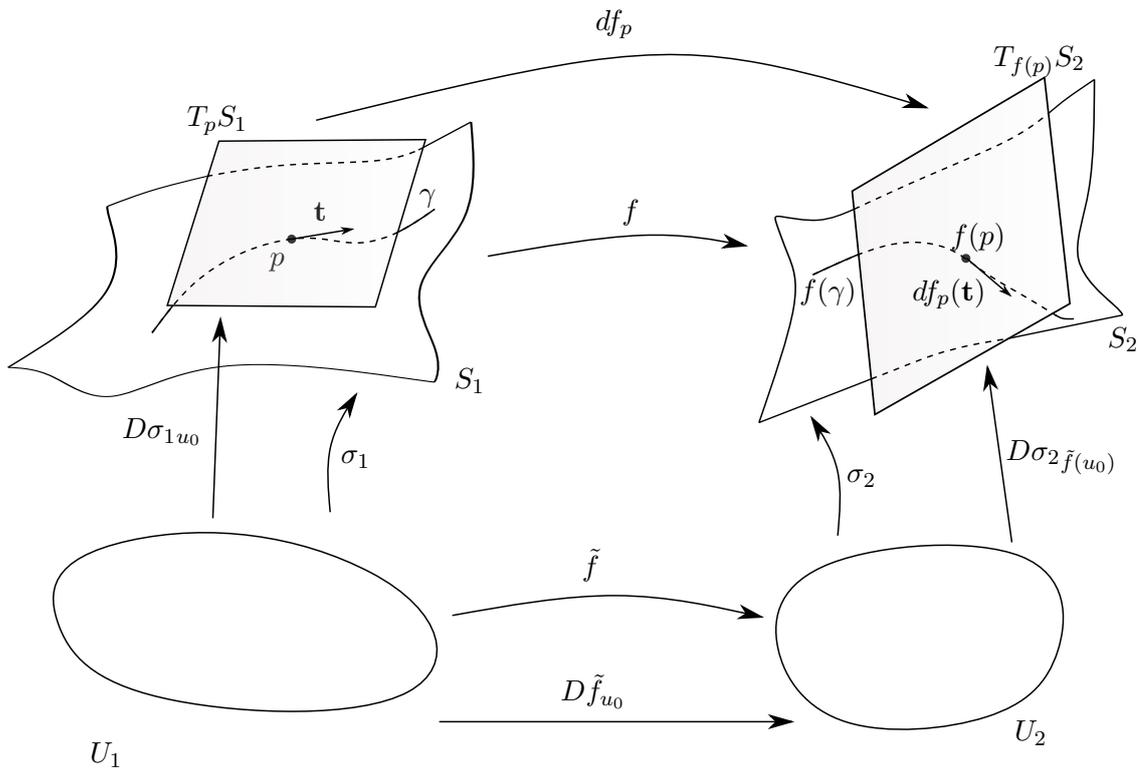


Abbildung 3.14: Differentiale und Abbildungen zwischen regulären Flächen

3.4 Normalenfelder und Orientierbarkeit

Wie für Kurven in Kapitel 2 können wir auch für reguläre Flächen Vektoren finden, die normal auf diese stehen. Dazu ist es geschickt sich die Tangentialebene in einem Punkt $p \in S$ anzuschauen, um dann den Normalvektor in p zu $T_p S$, und somit auch zu S , zu finden. Führt man dies auf ganz S durch, so erhalten wir eine Abbildung, die wir Normalenfeld nennen. Das Konzept des Normalenfelds erlaubt es uns in weiterer Folge über die Orientierbarkeit einer regulären Fläche zu sprechen - grob kann man sich unter Orientierbarkeit vorstellen, ob eine reguläre Flächen eine „Innen-“ und „Außenseite“ hat.

Definition 3.4.1 ((Einheits-)Normalenfeld). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Wir nennen die Abbildung

$$\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ sodass}$$

$$\mathbf{N}(p) \perp T_p S \quad \forall p \in S$$

Normalenfeld auf S . Gilt außerdem

$$\|\mathbf{N}(p)\| = 1 \quad \forall p \in S,$$

so nennen wir \mathbf{N} ein *Einheitsnormalenfeld* auf S .

Man beachte, dass nicht nur \mathbf{N} , sondern auch $-\mathbf{N}$ die Eigenschaften eines (Einheits-) Normalenfeldes erfüllt. Beachte außerdem, dass \mathbf{N} stetig sein kann, aber keineswegs sein muss. Um sich etwas unter dem Begriff des Normalenfeldes vorzustellen, illustrieren wir ihn mit Beispielen.

Beispiel 3.4.2. (Einheitsnormalenfeld der Ebene) Sei

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

die x - y -Ebene im \mathbb{R}^3 . Dann ist ein Einheitsnormalenfeld auf S gegeben durch

$$\mathbf{N}(x, y, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist \mathbf{N} sogar konstant.

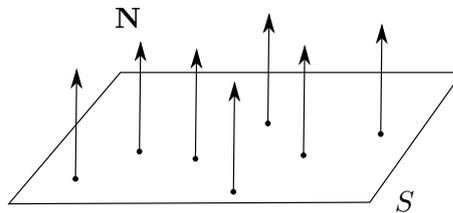


Abbildung 3.15: Normalenfeld der Ebene

Beispiel 3.4.3. (Einheitsnormalenfeld der Einheitssphäre) Sei S^2 die Einheitssphäre. Dann erhalten wir ein Einheitsnormalenfeld auf S^2 durch $\mathbf{N} = \text{Id}$.

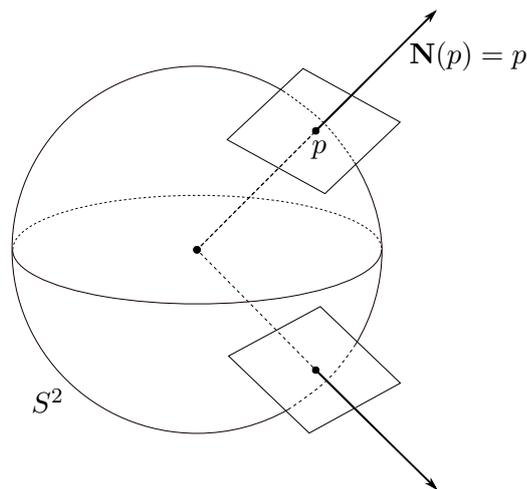


Abbildung 3.16: Normalenfeld der Einheitssphäre

Beispiel 3.4.4. (Normalenfeld des Möbiusbands) Sei S das Möbiusband. Wir erhalten das Möbiusband indem man einen Streifen Papier in sich selbst verdreht und anschließend an den Enden zusammenklebt.

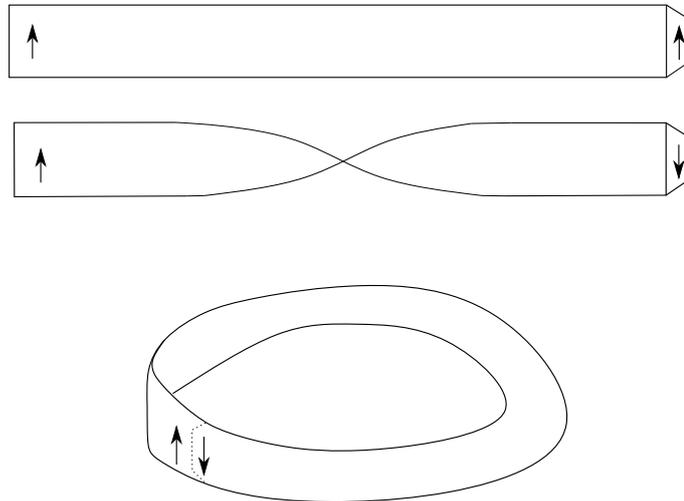


Abbildung 3.17: Konstruktion des Möbiusbands

Zeichnen wir das Einheitsnormalenfeld am Möbiusband ein, bemerken wir, dass dieses nicht stetig ist.

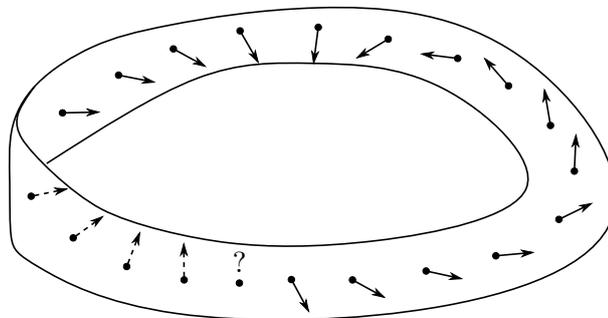


Abbildung 3.18: Normalenfeld des Möbiusbands

So gesehen, hat das Möbiusband keine „Innen-“ bzw. „Außenseite“. Fängt man irgendwo an das Möbiusband einzufärben, stellt man irgendwann fest, dass das Band auf seiner gesamten Fläche farbig wird.

Die angeführten Beispiele motivieren folgenden Begriff.

Definition 3.4.5 (Orientierbarkeit einer regulären Fläche). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Wir nennen S *orientierbar*, falls es ein glattes Einheitsnormalenfeld auf S gibt.

Somit sind in den oben genannten Beispielen die Ebene und die Kugel orientierbar, nicht aber das Möbiusband.

Irgendein Einheitsnormalenfeld lässt sich immer für eine reguläre Fläche S finden, indem man für jedes $p \in S$ einen der beiden Einheitsnormalvektoren zu $T_p S$ auswählt und ihn mit $\mathbf{N}(p)$ bezeichnet. So ein Normalenfeld wird im Allgemeinen jedoch nicht stetig, geschweige denn glatt sein.

Bemerkung (Einheitsnormalenfeld in lokalen Koordinaten). Wir können vermuten, dass reguläre Flächen lokal stets orientierbar sind. Dazu betrachten wir eine reguläre Fläche S , mit lokaler Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$, im Punkt $p \in S$. Sei außerdem $\mathbf{u} \in U$ mit $\mathbf{u} = (u, v) := \sigma^{-1}(p)$. Ein Normalenfeld $\tilde{\mathbf{N}}$ auf $S \cap V$ ist dann gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}),$$

wobei $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u})$ und $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u})$ die partiellen Ableitungen in Koordinatenrichtungen sind. Da die Jacobimatrix $D\sigma_{\mathbf{u}}$ vollen Rang hat, sind die partiellen Ableitungen linear unabhängig und es gilt $\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ein glattes Einheitsnormalenfeld auf $S \cap V$ erhalten wir dann durch

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) := \frac{\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})}{\|\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})\|}. \quad (3.2)$$

Wie wir sehen hängt Gleichung (3.2) von dem Parameter \mathbf{u} ab. Der Einheitsnormalvektor wird jedoch durch die Parametrisierung σ genau an den gewünschten Punkt p angehängt. Deshalb können wir in allen Punkten $p = \sigma(\mathbf{u})$ definieren, dass

$$\mathbf{N}(p) = \mathbf{N}(\mathbf{u}) \quad (3.3)$$

ist.

In Gleichung (3.2) steckt, wie Definition 3.4.1 bereits vermuten lässt, eine gewisse Willkür. Für die Einheitsnormalenfelder hätten wir statt $\mathbf{N} : S \cap V \rightarrow \mathbb{R}^3$ auch $-\mathbf{N} : S \cap V \rightarrow \mathbb{R}^3$ wählen können. Verdeutlicht wird das, wenn man unterschiedliche Parametrisierungen für S betrachtet und wie oben jeweils ein Einheitsnormalenfeld konstruiert. Die zugehörigen Einheitsnormalvektoren der Parametrisierungen können entweder übereinstimmen, oder aber gerade negativ zueinander sein. Um diesen Umstand zu begegnen formulieren wir folgenden Satz über Parametertransformationen.

Satz 3.4.6 (Orientierbarkeit und Parametertransformation). *Eine reguläre Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist genau dann orientierbar, wenn S mit einem Atlas aus lokale Parametrisierungen überdeckt werden kann, sodass für alle Parametertransformationen φ zwischen zwei Parametrisierungen gilt*

$$\det(D\varphi) > 0.$$

Beweisidee. Wir geben an dieser Stelle eine Beweisidee und keinen vollständigen Beweis, da diese mit folgenden Überlegungen bereits illustriert werden kann. Einen vollständigen

Beweis finden die Leserinnen und Leser in [9, §5.2, S.52].

Wir betrachten zwei lokale Parametrisierungen $\sigma_i : U_i \rightarrow S \cap V_i$ ($i = 1, 2$) von S und die Parametertransformation $\varphi := \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$. Sei nun $p \in S \cap V_1 \cap V_2$ und $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i) := \sigma_i^{-1}(p)$. Sei weiters $\mathbf{N}_i(p)$ der zu σ_i gehörige Einheitsnormalvektor in p . Dann sind $\left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial u_i}(\mathbf{u}_i), \frac{\partial \sigma_i}{\partial v_i}(\mathbf{u}_i), \mathbf{N}_i(p) \right\}$ positiv orientierte Basen des \mathbb{R}^3 . Die Normalvektoren $\mathbf{N}_1(p)$ und $\mathbf{N}_2(p)$ stimmen genau dann überein, wenn die Basen $\left\{ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1}(\mathbf{u}_1), \frac{\partial \sigma_1}{\partial v_1}(\mathbf{u}_1) \right\}$ und $\left\{ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2}(\mathbf{u}_2), \frac{\partial \sigma_2}{\partial v_2}(\mathbf{u}_2) \right\}$ von $T_p S$ gleichorientiert sind. Daher gilt $\mathbf{N}_1(p) = \mathbf{N}_2(p)$ genau dann, wenn die Parametertransformation φ in \mathbf{u}_1 orientierungserhaltend ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Determinante der Matrix des Basiswechsels für $T_p S$ positiv ist, d.h. wenn $\det(D\varphi_{u_1}) > 0$ gilt. Andernfalls ist $\mathbf{N}_1(p) = -\mathbf{N}_2(p)$. Zusammengefasst heißt das

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1(p) = \mathbf{N}_2(p) &\Leftrightarrow \det(D\varphi_{u_1}) > 0 \\ \mathbf{N}_1(p) = -\mathbf{N}_2(p) &\Leftrightarrow \det(D\varphi_{u_1}) < 0 \end{aligned}$$

◇

Die Idee hinter Satz 3.4.6 ist es, Parametrisierungen mit lokal gleichem Einheitsnormalenfeld zu finden, und diese dann miteinander zu dem gewünschten Atlas zu „verkleben“. Existiert so ein Atlas ist S orientierbar. Dass das nicht immer der Fall ist, hat uns das Beispiel des Möbiusbands gezeigt.

3.5 Die erste Fundamentalform

In den vorhergegangenen Unterkapiteln haben wir uns viel mit Fragen der Differenzierbarkeit auf und zwischen regulären Flächen beschäftigt. Nun wollen wir geometrische Eigenschaften von Flächen untersuchen. Dabei ist wohl eines des wichtigsten Themen jenes der Längenmessung von Kurven auf Flächen, sowie die Winkelmessung zwischen z.B. Tangentialvektoren an Flächen.

Befinden wir uns im \mathbb{R}^3 würden wir für Längen- und Winkelmessungen üblicherweise das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ verwenden. Um nun die Länge einer Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow S$, die auf einer regulären Fläche ausgewertet wird zu messen, müssen wir uns fragen, wie wir den Term

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

(vgl. Definition 2.1.7) berechnen. Konkret stellt sich die Aufgabe die Länge der Tangentialvektoren von γ zu berechnen, ohne dass wir auf die gewohnte Vektorraumstruktur des \mathbb{R}^3 , die auf S im Allgemeinen nicht gegeben ist, zurückgreifen können. Da die Tangentialvektoren der Kurve jedoch gleichzeitig jene von S sind, bringen uns die Erkenntnisse aus Kapitel 3.3 zu folgenden Überlegungen: Für jeden Punkt $p \in S$ ist die Tangentialebene $T_p S$ ein zweidimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^3 , weshalb wir das Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^3 einfach auf $T_p S$ einschränken können - und wir erhalten ein euklidisches Skalarprodukt auf $T_p S$. In der Herangehensweise orientieren wir uns hier an Pressley [20, §6, S.121f] und do Carmo [2, §2.5, S.76f].

Definition 3.5.1. (Erste Fundamentalform) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und sei $p \in S$. Sei weiters $T_p S$ Tangentialebene an S in p . Wir nennen die Abbildung

$$I_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I_p(\mathbf{t}, \mathbf{s}) := \langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle|_{T_p S \times T_p S}$$

erste Fundamentalform von S in p . Wir bezeichnen sie im Weiteren auch mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

Die erste Fundamentalform ordnet also zwei Tangentialvektoren im Punkt p das Innere Produkt zu. Durch die erste Fundamentalform hat S sozusagen das Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^3 vererbt bekommen, weshalb I_p eine symmetrische Bilinearform bildet. Die größte Bedeutung der ersten Fundamentalform liegt wohl darin, dass wir metrischen Fragen auf einer regulären Fläche nachgehen können, ohne dass die Fläche selbst ein Vektorraum ist.

Bemerkung. (Traditionelle Darstellung der ersten Fundamentalform in lokalen Koordinaten) Üblicherweise wird die erste Fundamentalform auch über Parametrisierungen dargestellt. Sei dazu $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ mit $\mathbf{u} = (u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ eine lokale Parametrisierung von S und sei $\sigma(\mathbf{u}) = p \in S$. Dann können wir mithilfe von σ eine Basis von $T_p S$ beschreiben, nämlich $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\}$. Jeder Tangentialvektor $\mathbf{t} \in T_p S$ kann dann als Linearkombination der Basisvektoren von $T_p S$ ausgedrückt werden:

$$\mathbf{t} = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + \mu \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u})$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wir definieren die zu \mathbf{t} gehörigen Koeffizienten als Abbildungen

$$du : T_p S \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.4}$$

$$du(\mathbf{t}) = \lambda$$

und

$$dv : T_p S \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.5}$$

$$dv(\mathbf{t}) = \mu.$$

Die Abbildungen du und dv sind linear. Sie können als Ableitungen der Funktionen $(u, v) \mapsto u$ bzw. $(u, v) \mapsto v$ in U interpretiert werden (vgl. [22, §3.9, S.182]).

Wollen wir nun $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle_p$ berechnen verwenden wir die Tatsache, dass I_p eine symmetrische Bilinearform ist:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle_p &= \lambda^2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle_p + 2\lambda\mu \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle_p + \mu^2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle_p \\ &= du(\mathbf{t})^2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle_p + 2du(\mathbf{t})dv(\mathbf{t}) \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle_p + dv(\mathbf{t})^2 \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle_p. \end{aligned}$$

Wir definieren Abbildungen $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}) &:= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle_p = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\|_p^2, \\ F(\mathbf{u}) &:= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle_p, \\ G(\mathbf{u}) &:= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle_p = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\|_p^2, \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle_p = E(\mathbf{u})du(\mathbf{t})^2 + 2F(\mathbf{u})du(\mathbf{t})dv(\mathbf{t}) + G(\mathbf{u})dv(\mathbf{t})^2. \quad (3.6)$$

Traditionellerweise wird der Ausdruck

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

erste Fundamentalform der Parametrisierung σ genannt. Dabei ist zu beachten, dass die Koeffizienten(-funktionen) E, F, G von der Wahl der Parametrisierung abhängen, nicht jedoch die erste Fundamentalform selbst, wie durch Definition 3.5.1 nachvollziehbar ist. Wir werden für Berechnungen im Weiteren die Darstellung $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ verwenden. Geht aus dem Kontext hervor, dass wir uns auf S und Punkte $p \in S$ beziehen, so werden wir auf den Index p in der ersten Fundamentalform verzichten.

Wir betrachten einige Beispiele regulärer Flächen und ihre ersten Fundamentalformen.

Beispiel 3.5.2 (Die erste Fundamentalform der $(x - y)$ -Ebene). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ die $(x - y)$ -Ebene durch den Ursprung mit Parametrisierung

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \sigma(u, v) &= \mathbf{0} + u\mathbf{x} + v\mathbf{y}, \end{aligned}$$

mit orthogonalen Einheitsvektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \mathbf{x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \mathbf{y}.$$

Für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform erhalten wir

$$\begin{aligned} E &= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \right\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 = 1, \\ F &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \\ G &= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 = 1, \end{aligned}$$

womit die erste Fundamentalform durch

$$du^2 + dv^2$$

beschrieben wird.

Betrachten wir nun aber eine andere Parametrisierung $\tilde{\sigma}$ der Ebene durch Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \tilde{\sigma}(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Basisvektoren der Tangentialebene sind

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform

$$\begin{aligned} E &= \left\| \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial r}(r, \varphi) \right\|^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1, \\ F &= \left\langle \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial r}(r, \varphi), \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right\rangle = -r \sin(\varphi) \cos(\varphi) + r \sin(\varphi) \cos(\varphi) = 0, \\ G &= \left\| \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right\|^2 = r^2 \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi) = r^2, \end{aligned}$$

und die erste Fundamentalform lässt sich beschreiben als

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Anders als durch die Parametrisierung zuvor, haben wir hier einen nicht-konstanten Term, der von r abhängt, hinzubekommen.

Wie wir gesehen haben, hängt die Darstellung der ersten Fundamentalform stark von der Wahl der Parametrisierung ab. Je ungeschickter die Parametrisierung ist, desto komplizierter gestaltet sich in Folge die erste Fundamentalform.

Beispiel 3.5.3 (Erste Fundamentalform der Einheitssphäre). Sei S^2 die Einheitssphäre. Wir wählen die selbe Parametrisierung für S^2 wie in Beispiel 3.1.4, nämlich

$$\begin{aligned} \sigma &: (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow S^2 \\ \sigma(\theta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von σ sind

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform erhalten wir

$$\begin{aligned} E &= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \right\|^2 = 1, \\ F &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi), \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right\rangle = 0, \\ G &= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right\|^2 = \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

und die erste Fundamentalform von S^2 bezüglich σ ist

$$d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2.$$

Beispiel 3.5.4 (Erste Fundamentalform des Zylinders). Wir betrachten die Fläche eines Zylinders

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Eine Parametrisierung der Zylinderfläche ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma &: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ mit} \\ U &:= \{(\varphi, h) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \varphi < 2\pi, h \in \mathbb{R}\} \text{ und} \\ \sigma(\varphi, h) &:= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um die erste Fundamentalform zu berechnen, bemerken wir, dass

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\varphi, h) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial h}(\varphi, h) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform erhalten wir also

$$\begin{aligned} E &= \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1, \\ F &= 0, \\ G &= 1 \end{aligned}$$

und somit ist die erste Fundamentalform des Zylinders, in sogenannten Zylinderkoordinaten

$$d\varphi^2 + dh^2.$$

Wir bemerken, dass die Ebene (in kartesischen Koordinaten) und der Zylinder, dieselbe erste Fundamentalform haben. Dass es sich dabei um keinen Zufall handelt, klären wir in Unterkapitel 3.7.

Wir wollen uns nun nochmals der zu Beginn dieses Kapitel gestellten Frage zuwenden, wie wir die Länge einer Kurve auf S berechnen können. Dazu benötigen wir vorher noch die formale Definition, was es heißt, dass eine Kurve auf einer regulären Fläche verläuft.

Definition 3.5.5 (Kurve auf einer regulären Fläche). Sei S eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$. Sei weiters $\eta : (a, b) \rightarrow U$, ($a, b \in \mathbb{R}^3$), mit $\eta(t) = (u(t), v(t))$ eine glatte, parametrisierte Kurve. Wir nennen die Kurve

$$\begin{aligned}\gamma &: (a, b) \rightarrow S \\ \gamma(t) &:= \sigma(\eta(t)) = \sigma(u(t), v(t))\end{aligned}$$

eine *glatte, parametrisierte Kurve in S* .

Da wir wissen, wie man die erste Fundamentalform konkret mit der Wahl einer lokalen Parametrisierung beschreiben kann, formulieren wir folgendes Lemma.

Lemma 3.5.6. (Berechnung der Länge von Kurven auf regulären Flächen) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit lokaler Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$. Sei weiters $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ eine glatte parametrisierte Kurve. Dann gilt für die Länge von γ

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}(t)^2 + 2F\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G\dot{v}(t)^2} dt,$$

wobei E, F, G die Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Parametrisierung σ sind.

Beweis. Wähle $p \in \text{Im}(\gamma) \subseteq (S \cap V)$ und sei $T_p S$ die Tangentialebene von σ mit der Basis $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\}$, wobei $\mathbf{u} := \sigma^{-1}(p)$. Da die Kurve γ durch die Parametrisierung σ beschrieben wird, gilt für die Tangentialvektoren von γ wegen der Kettenregel

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{u}(t) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + \dot{v}(t) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}),$$

woraus wegen (3.6)

$$\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = E\dot{u}(t)^2 + 2F\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G\dot{v}(t)^2$$

folgt. Damit erhalten wir sofort

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}(t)^2 + 2F\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G\dot{v}(t)^2} dt.$$

□

Da wir im Weiteren oft Kurven auf ihrer gesamten Länge betrachten wollen macht es Sinn eine Notation für das offene Intervall $I := (0 - \epsilon, \mathcal{L}(\gamma) + \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ einzuführen, auf dem die Kurve definiert ist.

Das obige Resultat wollen wir gleich umsetzen um die Länge des Äquators auf der Sphäre zu berechnen.

Beispiel 3.5.7 (Länge des Äquators auf der Einheitssphäre). Sei S^2 die Einheitssphäre mit Parametrisierung σ wie in Beispiel 3.5.3. Wollen wir den Äquator durch eine Kurve beschreiben, so müssen wir in obiger Parametrisierung σ den Winkel θ bei $\frac{\pi}{2}$ festhalten und erhalten so die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma &: (0, 2\pi) \rightarrow S^2 \\ \gamma(t) &= \sigma\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Parametrisierung σ überdeckt die Sphäre bis auf den Halbkreis $H = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geq 0, y = 0\}$ wie wir in Beispiel 3.1.4 gesehen haben. Daher ist die Kurve γ nicht geschlossen, da sie im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht definiert ist. Da ein Punkt aber nichts zum Integral beiträgt, erhalten wir für die Länge von γ , unter Verwendung der ersten Fundamentalform bezüglich σ aus Beispiel 3.5.3,

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)(t')^2} dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

was vom Äquator der Einheitssphäre zu erwarten war.

3.6 Flächeninhalt und Integration auf regulären Flächen

In diesem Unterkapitel werden wir sehen, dass es nicht nur möglich ist, Längen von Kurven mithilfe der ersten Fundamentalform zu bestimmen, sondern auch Flächeninhalte von Teilmengen einer regulären Fläche. Wir werden uns zunächst auf sehr anschaulichem Weg der Thematik nähern, um dann zu verallgemeinern wie das Integral einer Funktion, die ihren Definitionsbereich in einer regulären Fläche hat, zu interpretieren ist. Vorerst benötigen wir noch folgende Definition.

Definition 3.6.1 (Gebiet, abgeschlossenes Gebiet). Wir nennen eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein *Gebiet*, falls Q offen und zusammenhängend ist. Ein *abgeschlossenes Gebiet* ist die Vereinigung von Q mit seinem Rand ∂Q .

Die Eigenschaft des Zusammenhangs wurde bereits in Kapitel 2 erwähnt und stellt sicher, dass unsere Kurven in einem $Q \subseteq S$ nicht „auseinandergerissen“ werden. Wichtig ist außerdem darauf hinzuweisen, dass das Bild eines Gebiet unter einem Homöomorphismus wieder ein Gebiet ist (siehe [14, §1.6, S.21]).

Jetzt aber zu den Überlegungen die uns zum Flächeninhalt führen:

Sei $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der regulären Fläche S . Wir betrachten sogenannte

Koordinatenkurven $u \mapsto \sigma(u, v_0)$ und $v \mapsto \sigma(u_0, v)$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ und (u_0, v_0) ein Punkt in U . Es ist üblich die Koordinatenkurve $u \mapsto \sigma(u, v_0)$ mit $v = v_0$ zu bezeichnen um zu verdeutlichen welche Koordinate festgehalten wird (analog bezeichnet man die Koordinatenkurve mit Fixierung von u mit $u = u_0$). In obigen Beispiel 3.5.7, haben wir den Breitenkreis bei $\frac{\pi}{2}$ fixiert und somit den Äquator erhalten, was der Koordinatenkurve $u = \frac{\pi}{2}$ entspricht.

Das Bild von σ auf S ist überdeckt von diesen beiden Arten von Parameterkurven. Wir können uns vorstellen, dass sie ein sehr feines Gitternetz auf $\sigma(U)$ beschreiben. Die Tangentialvektoren der Koordinatenkurven in $\sigma(u_0, v_0)$ sind gerade die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ und $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$. Für die Flächeninhaltsberechnung bedeutet das nun folgendes: Eine kleine Änderung in U von u zu Δu kann in $\sigma(U)$ näherungsweise mit $\Delta u \frac{\partial \sigma}{\partial u}$ angegeben werden; analog für eine kleine Änderung v zu Δv durch $\Delta v \frac{\partial \sigma}{\partial v}$. Die Koordinatenkurven $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$ und $v = v_0 + \Delta v$ spannen dann näherungsweise ein ebenes Parallelogramm auf mit den Seiten $\Delta u \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ und $\Delta v \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$.

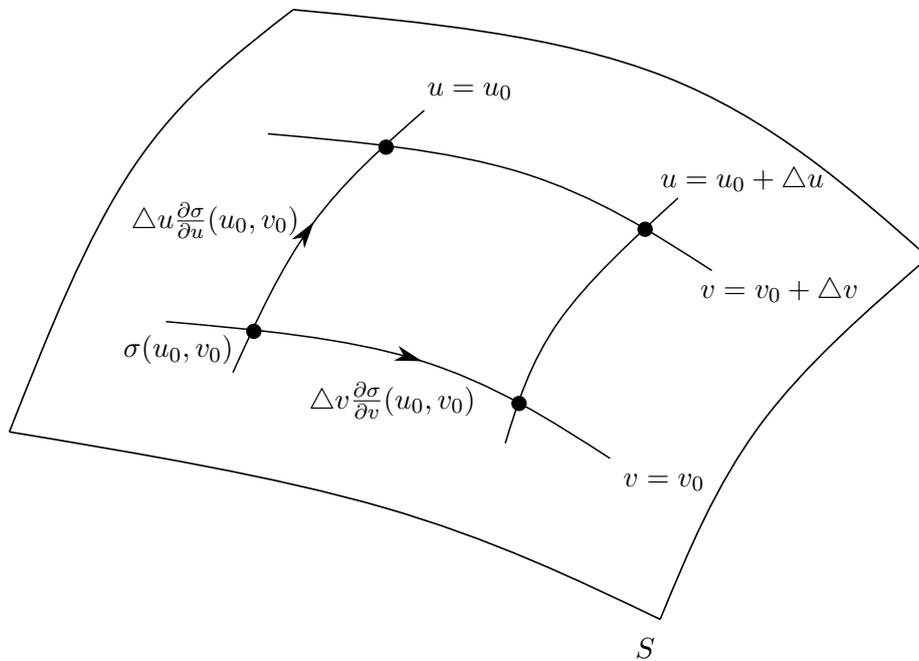


Abbildung 3.19: Konstruktion des Flächeninhalts

Erinnern wir uns an die Berechnung des Flächeninhalts eines Parallelogramms aus der linearen Algebra (z.B. in [13, §3.5, S.75]) in der Ebene mit Seiten a, b so ist der Flächeninhalt gegeben durch $\|a \times b\|$. Dieser Überlegung folgend, ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms auf der regulären Fläche S annähernd

$$\left\| \Delta u \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \Delta v \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| \Delta u \Delta v.$$

Das bringt uns zu folgender Definition.

Definition 3.6.2 (Flächeninhalt einer regulären Fläche). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ und sei $R \subseteq U$ ein Gebiet. Der *Flächeninhalt* von $\sigma(R)$ auf S ist definiert als

$$\mathcal{A}(\sigma(R)) := \int_R \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| dudv.$$

Da R in obiger Definition nicht beschränkt sein muss, besteht die Möglichkeit, dass das Integral des Flächeninhalts unendlich ist - man denke nur an den Flächeninhalt der Ebene. Das Integral wird jedoch endlich sein, wenn R Jordan-messbar ist (vgl. [12, §201, S.453]). Da für den Ausdruck $\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|$ den die Definition des Flächeninhalts beinhaltet, nur Terme aus der ersten Fundamentalform verwendet werden, formulieren wir folgende Proposition.

Proposition 3.6.3 (Kreuzprodukt der Tangentialvektoren in erster Fundamentalform). Sei $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ Parametrisierung der regulären Fläche S mit erster Fundamentalform $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$. Dann ist

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\| = \sqrt{(EG - F^2)},$$

mit $\mathbf{u} = (u, v) \in U$.

Beweis. Aus der linearen Algebra rufen wir uns den Verschiebesatz von Kreuzprodukt zum Skalarprodukt in Erinnerung (siehe [13, §3.5, S.73]): sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ dann gilt

$$\langle (a \times b), (c \times d) \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle, \quad (3.7)$$

Wenden wir dieses Resultat auf

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\|^2 = \left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right), \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right) \right\rangle$$

an, dann erhalten wir

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\|^2 = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle^2 = EG - F^2.$$

□

Für eine reguläre Fläche ist der Ausdruck $EG - F^2$ immer größer Null, da für eine reguläre Fläche der Ausdruck $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u})$ nie verschwindet, weil $D\sigma_{\mathbf{u}}$ stets vollen Rang hat. Damit gilt für unsere Definition des Flächeninhalts

$$\mathcal{A}(\sigma(R)) = \int_R \sqrt{EG - F^2} dudv =: \int_{\sigma(R)} d\mathcal{A}_{\sigma}, \quad (3.8)$$

wobei der Ausdruck $d\mathcal{A}_{\sigma} := \sqrt{EG - F^2} dudv$ das *Flächenelement* genannt wird. Wenn klar ist, welche Parametrisierung wir verwenden, werden wir den Index weglassen.

Beispiel 3.6.4 (Flächeninhalt der Sphäre). Sei S^2 die Sphäre mit Parametrisierung σ aus Beispiel 3.1.4 und erster Fundamentalform $d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$. Wir berechnen zunächst das Flächenelement durch

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\sin^2(\theta)}d\theta d\varphi = \sin(\theta)d\theta d\varphi.$$

Die Parametrisierung σ überdeckt die Sphäre bis auf den Halbkreis $H = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geq 0, y = 0\}$ wie wir in Beispiel 3.1.4 gesehen haben. Da der Halbkreis nichts zum Flächeninhalt beiträgt, gilt für den Flächeninhalt von S^2

$$\mathcal{A}(S^2) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\theta)d\varphi d\theta = 2\pi \int_0^\pi \sin(\theta)d\theta = 4\pi,$$

was wir aus der elementaren Geometrie bereits wussten.

Beispiel 3.6.5 (Flächeninhalt des Torus). Die Fläche des Torus erhält man geometrisch betrachtet dadurch, indem man entlang des Einheitskreis in der $(x - y)$ -Ebene einen Kreis mit Radius $0 < r < 1$ und Mittelpunkt am Einheitskreis, in der $(x - z)$ -Ebene rotieren lässt. Der Kreis mit Radius r steht also stets senkrecht auf den Einheitskreis.

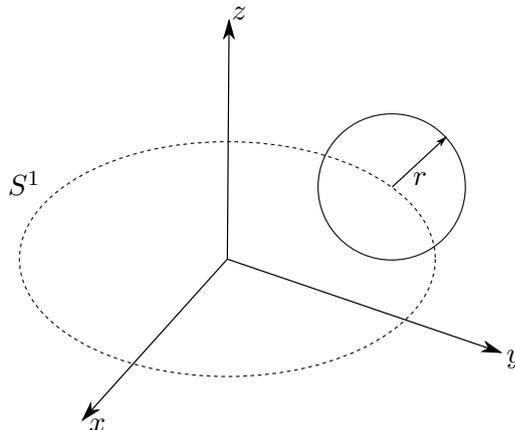


Abbildung 3.20: Konstruktion des Torus

Um den Torus zu beschreiben, wählen wir folgende Parametrisierung

$$\sigma : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} (1 + r \cos(\varphi)) \cos(\theta) \\ (1 + r \cos(\varphi)) \sin(\theta) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

die den Torus überdeckt bis auf einen Meridian und einen Breitenkreis, was aber für die Berechnung des Flächeninhalts unerheblich ist.

Der Torus ist eine reguläre Fläche, was mit der Wahl von insgesamt vier lokalen Parametrisierungen nachgerechnet werden kann. Das zu tun, sei an dieser Stelle den Leserinnen

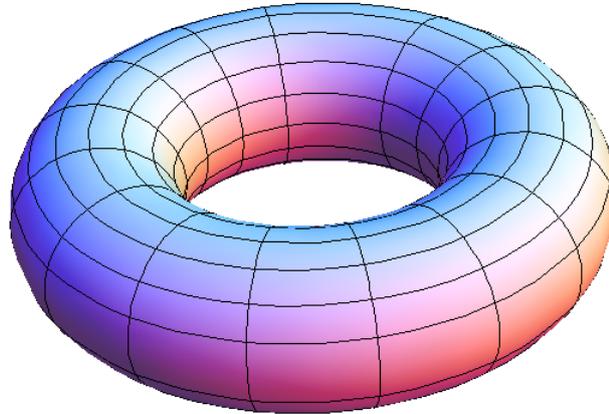


Abbildung 3.21: Torus

und Lesern selbst überlassen, mithilfe von [20, Bsp. 4.2.5, S.417].

Für den Flächeninhalt berechnen wir zunächst die Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -(1 + r \cos(\varphi)) \sin(\theta) \\ (1 + r \cos(\varphi)) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit die Koeffizienten der ersten Fundamentalform und erhalten

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (1 + r \cos(\varphi))^2.$$

Somit ist das Flächenelement

$$d\mathcal{A} = r(1 + r \cos(\varphi)).$$

Der Flächeninhalt des Torus mit $U := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ ist

$$\begin{aligned} A(\sigma(U)) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(1 + r \cos(\varphi)) d\theta d\varphi = 2\pi r \int_0^{2\pi} (1 + r \cos(\varphi)) d\varphi = 2\pi r (\varphi + r \sin(\varphi)) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 4\pi^2 r. \end{aligned}$$

Wir hätten für die Sphäre oder den Torus auch eine andere Parametrisierung wählen können. Es bleibt also zu überprüfen, ob die Definition des Flächeninhalts aus 3.6.2 unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ist, denn E, F und G ändern sich, wie wir gesehen haben, in Abhängigkeit von σ .

Proposition 3.6.6 (Unabhängigkeit des Flächeninhalts von der Wahl der Parametrisierung). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, parametrisiert durch $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Der Flächeninhalt $\mathcal{A}(\sigma(R))$ der Teilmenge $\sigma(R) \subseteq S$, wobei $R \subseteq U$ ein Gebiet ist, ist nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängig.*

Beweis. Sei $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine weitere Parametrisierung von S und sei $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$, mit $\varphi := \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$, eine Parametertransformation. Sei weiters $\varphi^{-1}(R) =: \tilde{R} \subseteq \tilde{U}$. Wir wollen nun zunächst den Ausdruck $\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v})$ berechnen. Da $(u, v) = \varphi(\tilde{u}, \tilde{v})$ gilt und aufgrund der Kettenregel, erhalten wir

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$$

und

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$$

woraus

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) \quad (3.9)$$

folgt. Die rechte Seite der Gleichung ist aber gerade die Determinante der Jacobimatrix der Parametertransformation

$$D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) & \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{pmatrix}$$

weshalb wir Gleichung (3.9) als

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \det(D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})}) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right)$$

schreiben können. Dieser Ausdruck ist insbesondere sinnvoll, da nach Korollar 3.2.3 die Parametertransformation φ glatt ist und nach Satz 3.4.6 die Determinante ungleich Null ist.

Für den Flächeninhalt bedeutet das nun

$$\int_{\tilde{R}} \left\| \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right\| d\tilde{u}d\tilde{v} = \int_{\tilde{R}} |\det(D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})})| \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| d\tilde{u}d\tilde{v}.$$

Aufgrund der Transformationsformel für Mehrfachintegrale (siehe unter [7, §9, S.104]) gilt

$$\int_{\tilde{R}} |\det(D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})})| \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| d\tilde{u}d\tilde{v} = \int_R \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| dudv,$$

also gilt zusammenfassend

$$\int_{\tilde{R}} \left\| \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right\| d\tilde{u}d\tilde{v} = \int_R \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| dudv,$$

womit gezeigt ist, dass der Flächeninhalt nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt. \square

Für unsere weiteren Überlegungen wird es wichtig sein zu wissen, was es bedeutet Funktionen, die auf Flächenstücken definiert sind, zu integrieren. Wir beziehen uns dabei unter anderem auf [16, §3A, S.41].

Definition 3.6.7 (Oberflächenintegral). Sei S eine reguläre Fläche mit Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ und sei $R \subseteq U$ ein Gebiet. Sei außerdem $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass f auf ganz $\sigma(U)$ definiert ist. Dann heißt

$$\int_{\sigma(R)} f d\mathcal{A} := \int_R f(\sigma(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

das *Oberflächenintegral* von f auf $\sigma(R)$.

Wir sehen, dass der Flächeninhalt \mathcal{A} einer regulären Fläche ein Spezialfall des Oberflächenintegrals ist, denn setzen wir $f \equiv 1$ so gilt $\int_{\sigma(R)} 1 d\mathcal{A} = \mathcal{A}(\sigma(R))$.

Bemerkung. Wir integrieren in Definition 3.6.7 also nicht nur die Funktion f oder $(f \circ \sigma)$, sondern wir fügen den Faktor $\sqrt{EG - F^2}$ hinzu, der uns bereits bei der Flächeninhaltsberechnung begegnet ist. Der Ausdruck $\sqrt{EG - F^2}$ korrigiert die Verzerrung der Fläche, die mit der Parametrisierung σ einhergeht. Das lässt uns vermuten, dass nicht nur der Flächeninhalt, sondern grundsätzlich das Oberflächenintegral unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ist. Tatsächlich gilt für Parametrisierungen σ und $\tilde{\sigma}$ und Gebieten R und \tilde{R} , so wie aus der Definition 3.6.7, dass

$$\int_{\sigma(R)} f d\mathcal{A}_\sigma = \int_{\tilde{\sigma}(\tilde{R})} f d\mathcal{A}_{\tilde{\sigma}}$$

ist. Für einen Beweis dieser Aussage reicht es den Beweis von Proposition 3.6.6 mit $(f \circ \sigma)$ statt mit $f \equiv 1$ zu führen.

3.7 Isometrien auf regulären Flächen

Wir haben in den Beispielen 3.5.2 und 3.5.4 festgestellt, dass obwohl Zylinder und Ebene unterschiedliche Flächen sind, ihre erste Fundamentalform übereinstimmt (im Fall der Ebene in kartesischen Koordinaten). Das bedeutet, dass diese beiden Flächen in inneren metrischen Fragen (Längen-, Winkel-, Flächeninhaltsmessungen) lokal gleich sind. Dass das kein Zufall ist, hat folgenden geometrischen Grund. Wir können ein Blatt Papier, ohne es zu zerknittern zu einem Zylinder zusammenrollen. Zeichnen wir vorweg eine Kurve auf unser Blatt, so ist die Kurve nach dem Zusammenrollen unverändert, sie ist also immer noch gleich lang. Anders gesagt, kann ein zweidimensionaler Bewohner, der nur Messungen innerhalb der Fläche vornehmen kann und dem keine Außensicht auf die Fläche möglich ist, nicht unterscheiden, ob er sich auf einem Zylinder oder auf der Ebene befindet.

Wollen wir nun das Blatt Papier zu einer Kugel „rollen“, so schaffen wir das nicht, ohne das Papier zu falten. Wir können für die Ebene und die Sphäre aber auch keine Parametrisierungen finden, sodass sie in ihrer ersten Fundamentalform übereinstimmen. Aus diesem Grund gibt es unterschiedliche Arten der metrische Messungen auf den beiden Flächen und unser zweidimensionaler Bewohner würde sofort den Unterschied zwischen

Ebene und Sphäre erkennen.

Es ist also nützlich zu formulieren, was man darunter versteht, wenn zwei Flächen dieselbe erste Fundamentalform haben.

Definition 3.7.1 (Lokale isometrische Abbildungen zwischen regulären Flächen). Seien S_1, S_2 reguläre Flächen im \mathbb{R}^3 . Eine glatte Abbildung $f : S_1 \rightarrow S_2$ heißt *lokale Isometrie*, falls für jeden Punkt $p \in S_1$ ihr Differential

$$df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

eine lokale Isometrie bezüglich der ersten Fundamentalform ist, also

$$\langle df_p(\mathbf{t}), df_p(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{r} \rangle,$$

für alle $\mathbf{t}, \mathbf{r} \in T_p S_1$.

Beispiel 3.7.2 (Lokale Isometrie zwischen Ebene und Zylinder). Sei $S_1 : \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die $x-y$ -Ebene im Raum und $S_2 : S^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung

$$f : S_1 \rightarrow S_2$$

$$f(x, y, 0) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ y \end{pmatrix}$$

eine lokale Isometrie bildet.

Wir wählen zunächst eine lokale Parametrisierung der Ebene mit

$$\sigma : \mathbb{R}^2 =: U \rightarrow S_1$$

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um das Differential df_p zu berechnen, wählen wir außerdem eine Kurve

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$$

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $\epsilon \in \mathbb{R}$. Somit ist $\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \mathbf{t} \in T_p S_1$. Wir berechnen nun das Differential von f und erhalten

$$df_p(\mathbf{t}) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \right|_{t=0} = \left. \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rufen wir uns nun die Koeffizienten der ersten Fundamentalform für Ebene und Zylinder aus Beispiel 3.5.2 und 3.5.4 in Erinnerung

$$\begin{aligned} E_{S_1} &= 1 = E_{S_2}, \\ F_{S_1} &= 0 = F_{S_2}, \\ G_{S_1} &= 1 = G_{S_2}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 2 = \langle df_p(\mathbf{t}), df_p(\mathbf{t}) \rangle,$$

was wir zeigen wollten. Somit bildet die Funktion f eine lokale Isometrie zwischen Ebene und Zylinder.

Alles was innerhalb der Fläche gemessen werden kann, sprich die Länge einer Kurve, ein Teil des Flächeninhalts oder der Winkel zwischen zwei Tangentialvektoren, hängt von der ersten Fundamentalform ab. Falls es also eine lokale Isometrie f gibt, dann ist z.B. lokal die der Länge der Bildkurve gleich jener der ursprünglichen Kurve. „Kleine“ offene Teilmengen $R \subset S_1$ können durch derartige Messungen nicht von ihren isometrischen Bildern $f(R) \subset S_2$ unterschieden werden. Daher nennen wir geometrische Größen, die sich unter lokalen Isometrien nicht verändern *Größen der inneren Geometrie*.

Wir wollen nun klären, was es nicht nur für eine Abbildung heißt lokal isometrisch zu sein, sondern auch für Flächen.

Definition 3.7.3 (Isometrie). Seien S_1, S_2 reguläre Flächen im \mathbb{R}^3 . Eine lokale Isometrie $f : S_1 \rightarrow S_2$, die zusätzlich bijektiv ist, nennen wir *Isometrie*. Gibt es eine solche Isometrie $f : S_1 \rightarrow S_2$ dann nennen wir S_1 und S_2 *isometrisch* zueinander.

Definition 3.7.4 (Lokal isometrische Flächen). Seien S_1, S_2 reguläre Flächen im \mathbb{R}^3 . Die Flächen S_1 und S_2 heißen *lokal isometrisch*, falls es zu jedem $p \in S_1$ eine offenen Umgebung $R_1 \subset S_1$ von p , eine offene Teilmenge $R_2 \subset S_2$ und eine Isometrie $f : R_1 \rightarrow R_2$ gibt, sowie umgekehrt zu jedem $q \in S_2$ eine offene Umgebung $\tilde{R}_2 \subset S_2$ um q , eine offene Teilmenge $\tilde{R}_1 \subset S_1$ und eine Isometrie $\tilde{f} : \tilde{R}_2 \rightarrow \tilde{R}_1$.

Das Differential einer lokalen Isometrie hat immer vollen Rang, deswegen ist nach dem Umkehrsatz eine lokale Isometrie auch ein lokaler Diffeomorphismus. Im Allgemeinen ist so eine Abbildung aber nicht bijektiv, also kein globaler Diffeomorphismus. Betrachten wir das Beispiel 3.7.2 von Ebene und Zylinder, so sehen wir, dass die beiden Flächen zwar lokal isometrisch sind, aber nicht diffeomorph, ja sie sind nicht einmal homöomorph zueinander. Dagegen sind Flächen, die diffeomorph und lokal isometrisch zueinander sind auch (global) isometrisch, wie Definition 3.7.3 nahelegt.

Der Begriff der Isometrie ist eine natürliche Äquivalenz hinsichtlich der metrischen Eigenschaften regulärer Flächen. Genauso wie diffeomorphe Flächen vom Standpunkt der Differenzierbarkeit aus äquivalent sind, sind isometrische Flächen äquivalent aus metrischer Sicht [2, §4.2, S.171].

4 Krümmung regulärer Flächen

In diesem Kapitel stellen wir uns die Frage danach, wie „gebogen“ eine reguläre Fläche ist. Das führt uns zum zentralen Begriff der Differentialgeometrie und zwar zu jenem der Krümmung. Zunächst werden wir dazu die zweite Fundamentalform definieren, und feststellen, dass sie das richtige Mittel ist um Krümmung auf regulären Flächen zu messen. Grundsätzlich ist nicht von vornherein klar, ob der Krümmungsbegriff der inneren Geometrie, also der Geometrie der Fläche selbst, oder der äußeren Geometrie, sprich ihrer Lage im umgebenden Raum \mathbb{R}^3 , zuzuordnen ist. Um diese Frage zu klären werden wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels unterschiedliche Zugänge zum Thema Krümmung und verschiedene Krümmungsbegriffe kennenlernen. Kapitel 4 orientiert sich weitgehend ebenfalls an Andrew Pressleys Darstellung in [20, §7-9, S.159f], sowie auch an Manfredo do Carmos Zugängen in [2, §3.2-3.3, S.98f].

4.1 Die zweite Fundamentalform

Bereits bei Kurven in Kapitel 2 haben wir herausgefunden, dass die Krümmung einer Kurve direkt mit deren Normalvektor in Zusammenhang steht. Ähnlich diesem Zugang können wir nun auch Informationen über die Krümmung einer regulären Fläche S bekommen, wenn wir ihr Einheitsnormalenfeld \mathbf{N} betrachten. So wie sich \mathbf{N} entlang von S verändert, so ändert sich dort auch die Krümmung von S . Die Änderungsrate von \mathbf{N} ist groß nahe Punkten in denen S stark gekrümmt, klein in Punkten wo S wenig gekrümmt ist.

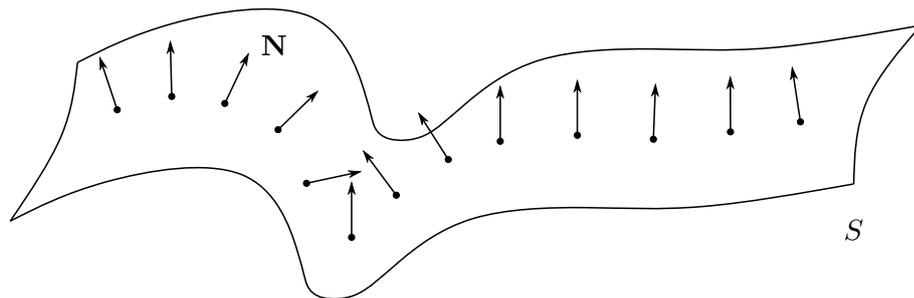


Abbildung 4.1: Änderung des Einheitsnormalenfeld \mathbf{N} auf S

Rufen wir uns das Normalenfeld der Ebene aus Beispiel 3.4.2 in Erinnerung, so verändert sich \mathbf{N} gar nicht, und ist also konstant. Das stimmt mit unserer Vorstellung überein, dass die Ebene nicht gekrümmt ist.

Um die Änderung des Normalenfeldes adequat beschreiben zu können, definieren wir

folgende Abbildung.

Definition 4.1.1 (Gaußabbildung). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare, reguläre Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld \mathbf{N} . Das Normalenfeld aufgefasst als Funktion

$$\mathbf{N} : S \rightarrow S^2$$

heißt *Gaußabbildung* von S , wobei S^2 die Einheitskugel ist.

Die Gaußabbildung identifiziert jeden Punkt $p \in S$ mit seiner Einheitsnormale $\mathbf{N}(p)$ aufgefasst als einen Punkt $\mathbf{N}(p) \in S^2$. Die Änderungsrate der Einheitsnormalen \mathbf{N} lässt

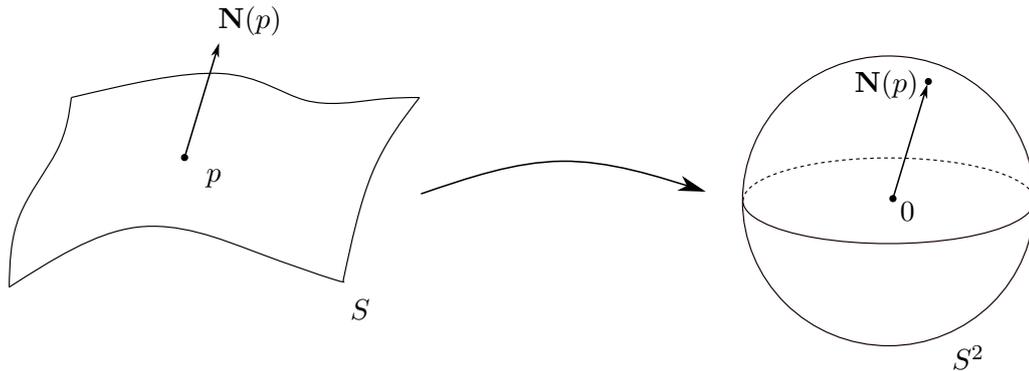


Abbildung 4.2: Gaußabbildung

sich jetzt gerade durch die Ableitung der Gaußabbildung in $p \in S$ beschreiben:

$$d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{N}(p)} S^2.$$

Nach Definition 3.4.1 gilt $T_{\mathbf{N}(p)} S^2 = \mathbf{N}(p)^\perp$, aber auch $T_p S = \mathbf{N}(p)^\perp$, woraus $T_p S = T_{\mathbf{N}(p)} S^2$ folgt. Das Differential der Gaußabbildung $d\mathbf{N}_p$ ist also ein Endomorphismus auf $T_p S$. Da dieses Differential für die zweite Fundamentalform von Bedeutung sein wird, geben wir ihm einen Namen.

Definition 4.1.2 (Weingartenabbildung). Sei S eine orientierbare Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld \mathbf{N} und $p \in S$. Die *Weingartenabbildung* W_p von S in p ist definiert als

$$\begin{aligned} W_p &: T_p S \rightarrow T_p S \\ W_p(\mathbf{t}) &:= -d\mathbf{N}_p(\mathbf{t}), \end{aligned}$$

wobei \mathbf{N} die Gaußabbildung von S ist.

Die Wahl des negativen Vorzeichen ist aus Konvention heraus entstanden. Vorsicht ist nur geboten, falls man $-\mathbf{N}$ statt \mathbf{N} als Einheitsnormalenfeld wählt, und sich somit in weiterer Folge auch die Vorzeichen der Gauß- und Weingartenabbildungen von S ändern.

Zum besseren Verständnis, was die Weingartenabbildung macht, untersuchen wir noch einmal $-W_p = d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$. Für jede glatte parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow S$ mit $\gamma(0) = p$ betrachten wir die glatte parametrisierte Kurve $\mathbf{N}(t) := \mathbf{N}(\gamma(t))$ in S^2 . Wir schränken also den Normalvektor auf die Kurve γ ein. Der Tangentialvektor $\dot{\mathbf{N}}(0) = d\mathbf{N}_p(\dot{\gamma}(0)) \in T_p S$ misst die Änderungsrate von \mathbf{N} eingeschränkt auf γ bei $t = 0$. Die Weingartenabbildung misst also wie sehr sich \mathbf{N} von $\mathbf{N}(p)$ „wegdreht“, in einer kleinen Umgebung von p . Oder anders gesagt, beschreibt die Weingartenabbildung die Änderung der Tangentialebene an S in einer kleinen Umgebung von p . Für Kurven haben wir dieses Maß mit einer Zahl, nämlich der Krümmung κ beschrieben. Im Fall von regulären Flächen ist dieses Maß eine lineare Abbildung (vgl. [2, §3.2, S.100]).

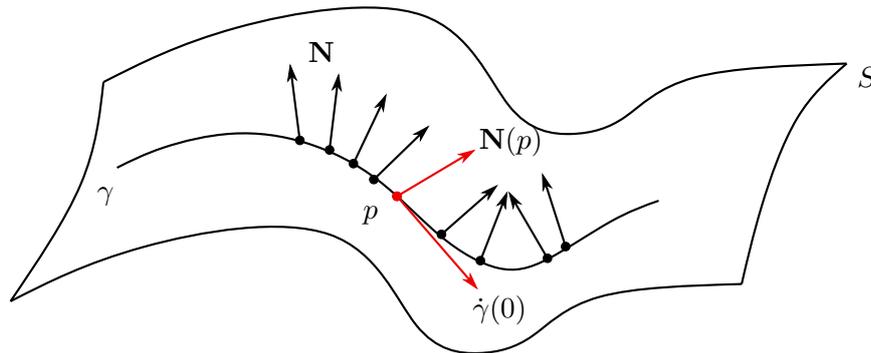


Abbildung 4.3: Weingartenabbildung

Proposition 4.1.3 (Die Weingartenabbildung ist linear und selbstadjungiert). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare, reguläre Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld \mathbf{N} und $p \in S$. Dann ist die Weingartenabbildung W_p von S linear und selbstadjungiert.*

Beweis. Da $-W_p = d\mathbf{N}_p$ ist, betrachten wir hier das Differential der Gaußabbildung. Aufgrund der Linearität von $d\mathbf{N}_p$, bleibt die Selbstadjungiertheit zu überprüfen. Dabei genügt es zu zeigen, dass $\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{t}_1), \mathbf{t}_2 \rangle = \langle \mathbf{t}_1, d\mathbf{N}_p(\mathbf{t}_2) \rangle$ für eine Basis $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$ von $T_p S$. Sei dazu $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung von S mit $\mathbf{u} = (u, v) \in U$ und $p = \sigma(\mathbf{u})$. Sei weiters $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\}$ eine Basis von $T_p S$. Für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow S$ mit $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ und $\gamma(0) = p$ gilt

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_p(\dot{\gamma}(0)) &= d\mathbf{N}_p\left(\dot{u}(0)\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + \dot{v}(0)\frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u})\right) \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{N}(\gamma(t))\Big|_{t=0} \\ &\stackrel{(3.3)}{=} \frac{d}{dt}\mathbf{N}(u(t), v(t))\Big|_{t=0} \\ &= \dot{u}(0)\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}) + \dot{v}(0)\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $d\mathbf{N}_p\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u})\right) = \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u})$ und $d\mathbf{N}_p\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u})\right) = \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u})$, wenn wir die Basisvektoren von T_pS als Tangentialvektoren an ihre Koordinatenkurven $v = v(0)$ und $u = u(0)$ betrachten. Daher bleibt für die Selbstadjungiertheit von $d\mathbf{N}_p$ zu zeigen, dass

$$\left\langle \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle$$

gilt.

Dazu betrachten wir die Gleichungen $\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \rangle = 0$ und $\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \rangle = 0$ und leiten diese nach v bzw. u ab:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle + \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle + \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial^2\sigma}{\partial v\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\left\langle \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = -\left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle.$$

Das letzte Gleichheitszeichen dürfen wir setzen, da es wegen dem Satz von Schwarz ([6, §5, S.55]) unerheblich ist, ob wir zuerst nach u und dann nach v , oder andersrum, ableiten. Da die erste Fundamentalform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform ist, können wir die Einträge innerhalb vertauschen und wir erhalten

$$\left\langle \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle,$$

womit die Selbstadjungiertheit von $d\mathbf{N}_p$ und somit auch von W_p bewiesen ist. \square

Beispiel 4.1.4 (Weingartenabbildung der Ebene). Sei $S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ die $x - y$ -Ebene mit Normalenfeld $\mathbf{N}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist die Weingartenabbildung konstant, nämlich $W_p = 0$ für alle $p \in S$.

Beispiel 4.1.5 (Weingartenabbildung der Sphäre). Sei S^2 die Sphäre mit dem in Beispiel 3.4.3 berechneten Einheitsnormalenfeld $\mathbf{N} = \text{Id}$. Dann ist $d\mathbf{N}_p = \text{Id}$ für alle $p \in S^2$. Für die Weingartenabbildung gilt dann

$$\begin{aligned} W_p &: T_pS^2 \rightarrow T_pS^2 \\ W_p &= -\text{Id}, \text{ d.h. also } W_p(\mathbf{t}) = -\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Ein selbstadjungierter Endomorphismus, wie es die Weingartenabbildung ist, steht, wie wir aus der linearen Algebra wissen, immer in einer eindeutigen Beziehung zu einer symmetrischen Bilinearform (nachzulesen in [4, §5.4, S.288f, §5.6, S.312f]). Jetzt befinden wir uns in der Lage die zweite Fundamentalform zu definieren.

Definition 4.1.6 (Die zweite Fundamentalform). Sei S eine reguläre, orientierbare Fläche mit Weingartenabbildung W_p , sei $p \in S$. Die *zweite Fundamentalform* von S in p ist die zur Weingartenabbildung gehörige symmetrische Bilinearform

$$II_p(\mathbf{t}, \mathbf{s}) := I_p(W_p(\mathbf{t}), \mathbf{s}) = \langle W_p(\mathbf{t}), \mathbf{s} \rangle_p,$$

mit $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in T_p S$.

Wenn klar ist in welchem Punkt wir uns befinden, werden wir den Index p in W_p und II_p oftmals weglassen und nur W bzw. II schreiben. Wie auch bei der ersten Fundamentalform, gibt es auch für die zweite Fundamentalform nicht nur eine allgemeine, sondern auch eine Darstellung in lokalen Koordinaten. Diese eignet sich besser für Berechnungen in weiterer Folge.

Bemerkung (Darstellung der zweiten Fundamentalform in lokalen Koordinaten). Wir betrachten dazu eine lokale Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ der regulären, orientierbaren Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$, sei $p = \sigma(\mathbf{u})$ ein Punkt in S mit $\mathbf{u} = (u, v) \in U$. Betrachten wir nun eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ auf S mit $\gamma(0) = p$. Dann gilt für den Tangentialvektor von γ in p

$$\dot{\gamma}(0) = \dot{u}(0) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u(0), v(0)) + \dot{v}(0) \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u(0), v(0)),$$

und, wie aus dem Beweis von 4.1.3 hervorgegangen ist

$$d\mathbf{N}_p(\dot{\gamma}(0)) = \dot{u}(0) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(u(0), v(0)) + \dot{v}(0) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(u(0), v(0)).$$

Aufgrund der besseren Lesbarkeit, werden wir im Folgenden $\dot{\gamma}$ anstatt $\dot{\gamma}(0)$ schreiben. Setzen wir das nun in die Definition der zweiten Fundamentalform ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} II_p(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) &= \langle W_p(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle \\ &= \langle -d\mathbf{N}_p(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle \\ &= - \left\langle \dot{u} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}) + \dot{v} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}), \dot{u} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + \dot{v} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle \\ &= - \left(\dot{u}^2 \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle + \dot{u} \dot{v} \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \dot{u} \dot{v} \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle + \dot{v}^2 \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Ähnlich wie bei der Berechnung der ersten Fundamentalform definieren wir Funktionen $L, M, N : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}) &:= - \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle \\ M(\mathbf{u}) &:= - \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle \\ N(\mathbf{u}) &:= - \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle, \end{aligned}$$

und erhalten für die zweite Fundamentalform

$$II_p(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = L(\mathbf{u})\dot{u}^2 + 2M(\mathbf{u})\dot{u}\dot{v} + N(\mathbf{u})\dot{v}^2. \quad (4.1)$$

Für allgemeine Berechnungen in den Koordinaten, fassen wir \dot{u} und \dot{v} wiederum als Funktionen du, dv der Ableitung der Koordinaten, wie in (3.4) und (3.5), auf. Dadurch erhalten wir, ähnlich wie für die erste Fundamentalform, den Ausdruck

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2, \quad (4.2)$$

den man traditionellerweise auch als zweite Fundamentalform in Koordinatendarstellung bezeichnet.

Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform, lassen sich außerdem noch auf andere Art und Weise darstellen und berechnen, was für später hilfreich sein wird.

Lemma 4.1.7 (Darstellungen für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform). *Sei S eine reguläre, orientierbare Fläche mit Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ mit $\mathbf{u} = (u, v) \in U$ und zweiter Fundamentalform wie in (4.2). Dann gelten für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform folgende Gleichungen*

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}) &= \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}(\mathbf{u}) \right\rangle, \\ M(\mathbf{u}) &= \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle, \\ N(\mathbf{u}) &= \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2}(\mathbf{u}) \right\rangle. \end{aligned}$$

Beweis. Da $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u})$ und $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u})$ Tangentialvektoren der Fläche sind gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle &= 0, \text{ sowie} \\ \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Differentiation nach u bzw. v dieser Gleichungen bringt

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}(\mathbf{u}) \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle = L(\mathbf{u}), \\ \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle = M(\mathbf{u}), \\ \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = M(\mathbf{u}), \\ \left\langle \mathbf{N}(\mathbf{u}), \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2}(\mathbf{u}) \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = N(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.1.8 (Zweite Fundamentalform der Ebene). Sei S die $(x - y)$ -Ebene im Raum mit Parametrisierung in kartesischen Koordinaten. Ein stetiges Einheitsnormalenfeld ist gegeben durch

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

und wir sehen, dass die zweite Fundamentalform der Ebene überall gleich 0 ist. Das passt mit Beispiel 4.1.4 zusammen, wo wir berechnet haben, dass die Weingartenabbildung der Ebene $W_p \equiv 0$ ist.

Beispiel 4.1.9 (Zweite Fundamentalform des Zylinders). Sei S die Zylinderfläche mit Parametrisierung σ wie aus Beispiel 3.5.4. Um die zweite Fundamentalform zu berechnen, betrachten wir das stetige Einheitsnormalenfeld

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

des Zylinders. In den Koordinaten der Parametrisierung σ gilt dann

$$\mathbf{N}(\sigma(\varphi, h)) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

So bekommen wir für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform

$$L = 1, \quad M = 0, \quad N = 0$$

und wir beschreiben die zweite Fundamentalform des Zylinders mit

$$d\varphi^2.$$

Bemerkung. Wir haben nun alle Erkenntnisse um nochmals kurz auf die Begriffe *innere* und *äußere Geometrie* einzugehen. Größen der inneren Geometrie können nur mithilfe von Messungen innerhalb der Fläche selbst berechnet werden. Sie werden mit der ersten Fundamentalform berechnet. Bildlich gesprochen heißt das, dass dies die Geometrie ist, welche eine intelligente zweidimensionalen Ameise, die auf einer Fläche herumkrabbelt, erkunden kann. Schauen wir eine Fläche hingegen von außen an, dann studieren wir sie als Objekt des umgebenden Raums. Diese Art der Betrachtung nennen wir *äußere Geometrie*. Unseren eigenen Lebensraum, die Erdoberfläche, konnten wir bis zum Start des Sputniks am 4.10.1957 nur mit Methoden der inneren Geometrie studieren. Erst ab dann war es möglich die Erdoberfläche von außen zu betrachten (vgl. [21, §9, S.107]). Größen der äußeren Geometrie lassen sich mithilfe der zweiten Fundamentalform berechnen.

Bevor wir uns nun mit unterschiedlichen Krümmungsbegriffen beschäftigen, führen wir noch auf, in welchem Zusammenhang die erste und zweite Fundamentalform, sowie die Weingartenabbildung stehen. Dazu wiederholen wir etwas Hintergrundwissen aus der linearen Algebra: Eine symmetrische Bilinearform, wie es die erste und zweite Fundamentalform sind, lässt sich, mit der richtigen Wahl einer Orthonormalbasis, als symmetrische Matrix darstellen (siehe [4, §5.4, S.289f]). Für unseren Fall wählen wir deshalb $\left\{\frac{\partial\sigma}{\partial u}, \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\}$ als Orthonormalbasis für T_pS und erhalten als Matrixdarstellung für erste und zweite Fundamentalform

$$\mathcal{F}_I := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \text{ sowie } \mathcal{F}_{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

weil die Koeffizienten E, F, G und L, M, N ja gerade aus den Basisvektoren berechnet werden. Nun sind wir in der Lage die Matrix der Weingartenabbildung zu bestimmen.

Proposition 4.1.10 (Matrixdarstellung der Weingartenabbildung). *Sei S eine reguläre, orientierbare Fläche mit Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$, mit Weingartenabbildung W_p ($p \in S$), sowie Matrizen der ersten und zweiten Fundamentalform \mathcal{F}_I und \mathcal{F}_{II} wie in (4.3). Dann gilt, in der Basis $\left\{\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u})\right\}$ von T_pS (mit $\mathbf{u} = (u, v) \in U$, $\sigma(\mathbf{u}) = p$), für die Matrix $(w_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ von W_p*

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II}.$$

Beweis. Aus dem Beweis von Proposition 4.1.3 geht hervor, dass $W\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u})\right) = -\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u})$, sowie $W\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u})\right) = -\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u})$ gilt. Da $\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u})$ und $\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u})$ in T_pS liegen, können wir die partiellen Ableitungen von \mathbf{N} als Linearkombination der Basisvektoren von T_pS beschreiben und wir erhalten für die Weingartenabbildung

$$\begin{aligned} W\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u})\right) &= -\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}) = w_{11}\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + w_{21}\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}), \\ W\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u})\right) &= -\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}) = w_{12}\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + w_{22}\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Somit gilt für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform

$$\begin{aligned} L &= \left\langle W\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u})\right), \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle = \left\langle w_{11}\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + w_{21}\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle = w_{11}E + w_{21}F, \\ M &= \left\langle W\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u})\right), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = \left\langle w_{11}\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + w_{21}\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = w_{11}F + w_{21}G, \\ M &= \left\langle W\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u})\right), \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle = \left\langle w_{12}\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + w_{22}\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle = w_{12}E + w_{22}F, \\ N &= \left\langle W\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u})\right), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = \left\langle w_{12}\frac{\partial\sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + w_{22}\frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = w_{12}F + w_{22}G. \end{aligned}$$

Fassen wir dieses lineare Gleichungssystem als Matrixmultiplikation auf, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix},$$

das heißt

$$\mathcal{F}_{II} = \mathcal{F}_I (w_{ij}).$$

Die Matrix \mathcal{F}_I ist symmetrisch und positiv definit, da sie ein auf $T_p S$ eingeschränktes euklidisches Skalarprodukt ist, und somit invertierbar. Deshalb erhalten wir, umgeformt nach $(w_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ für die Matrix von W_p

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II},$$

was zu zeigen war. □

Natürlich kann man nun die einzelnen Koeffizienten der Weingartenmatrix (w_{ij}) konkret berechnen und kommt somit zu folgender Darstellung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} LG - MF & MG - NF \\ ME - LF & NE - MF \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2 Normal- und geodätische Krümmung

Wir haben Kurven bereits öfters als Hilfsmittel verwendet, um Aussagen über die Eigenschaften und Beschaffenheiten von Flächen zu machen. In diesem Unterkapitel werden wir zwei Arten von Krümmung kennenlernen, die eng mit dem Krümmungsbegriff von Kurven verknüpft sind. Lässt man eine Kurve auf einer regulären Fläche S verlaufen, so nimmt die Form der Fläche Einfluss darauf, wie sehr sich eine Kurve in S krümmt. Denken wir an die Ebene, so ist es möglich, dass eine Kurve keine Krümmung hat, nehmen wir jedoch die Kugel, so muss sich die Kurve zumindest so sehr, wie die Kugel selbst krümmen um nicht aus ihr „rauszulaufen“. Wir können also durch die Krümmung der Kurve Rückschlüsse auf die Krümmung der Fläche selbst ziehen. Dazu werden wir zunächst unser Wissen aus Kapitel 2 erweitern und wir rufen uns nochmals die Definition der Krümmung κ einer ebenen Kurve in Erinnerung, nämlich $\dot{\gamma}(t) = \kappa(t)n(t)$. Da wir uns nun auf einer regulären Fläche im dreidimensionalen Raum befinden, müssen wir dieses Konzept weiterdenken und kommen somit zu folgenden Überlegungen.

Betrachten wir eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow S$ auf der orientierbaren, regulären Fläche S mit $\gamma(0) = p \in S$. Für den Tangentialvektor $\dot{\gamma}(0)$ der Kurve gilt $\|\dot{\gamma}\| \equiv 1$, außerdem ist $\dot{\gamma}(0)$ tangential zu S , d.h. es gilt $\dot{\gamma}(0) \in T_p S$. Deshalb ist $\dot{\gamma}(0)$ orthogonal zur Einheitsnormalen $\mathbf{N}(p)$ von S .

Somit bilden die Vektoren $\dot{\gamma}(0)$, $\mathbf{N}(p)$ und $(\mathbf{N}(p) \times \dot{\gamma}(0))$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 . Da wir γ nach Bogenlänge parametrisiert gewählt haben, steht $\ddot{\gamma}(0)$ normal auf $\dot{\gamma}(0)$. Daher lässt sich $\ddot{\gamma}(0)$ als eine Linearkombination von $\mathbf{N}(p)$ und $(\mathbf{N}(p) \times \dot{\gamma}(0))$ darstellen:

$$\ddot{\gamma}(0) = \kappa_n(0)\mathbf{N}(p) + \kappa_g(0)(\mathbf{N}(p) \times \dot{\gamma}(0)), \quad (4.5)$$

mit $\kappa_n(0), \kappa_g(0) \in \mathbb{R}$.

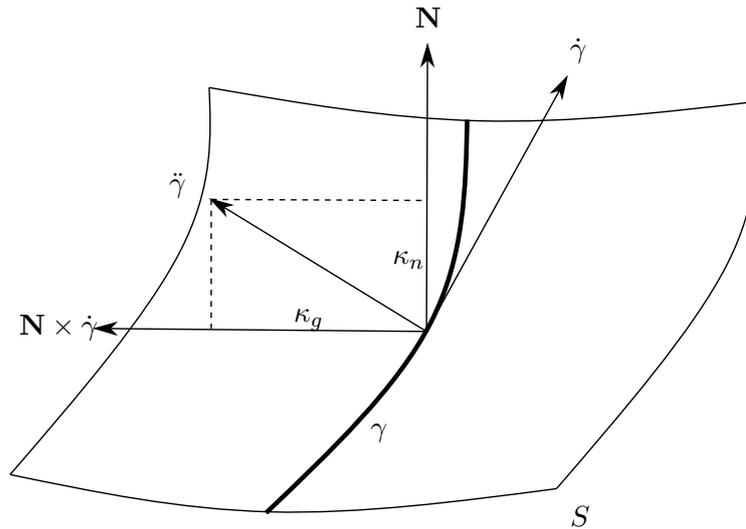


Abbildung 4.4: Normal- und geodätische Krümmung von γ

Die beiden Skalare κ_n und κ_g aus (4.5) lassen vermuten, ähnlich wie im zweidimensionalen Pendant aus (2.2), dass sie etwas damit zu tun haben, wie weit γ von einer Geraden abweicht.

Definition 4.2.1 (Normalkrümmung und geodätische Krümmung einer Kurve). Sei S eine orientierbare, reguläre Fläche und $\gamma : I \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann heißen die skalaren Abbildungen $\kappa_n, \kappa_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ aus (4.5) *Normalkrümmung* κ_n und *geodätische Krümmung* κ_g der Kurve γ .

Die Krümmung von γ setzt sich also aus zwei Teilen zusammen, nun bleibt zu klären, wie diese beiden Krümmungsbegriffe zu deuten sind. Die Normalkrümmung κ_n , spiegelt den Anteil der Krümmung wider, der von S selbst kommt, d.h. die Kurve γ muss sich zumindest im Maß von κ_n krümmen um auf S zu verlaufen. Im Gegensatz dazu ist die geodätische Krümmung κ_g jener Anteil, den die Kurve selbst zur Krümmung an dieser Stelle beiträgt, d.h. wie stark sich γ zusätzlich innerhalb von S krümmt. Wir konkretisieren die beiden Begriff in der nächsten Proposition.

Proposition 4.2.2 (Eigenschaften von Normal- und geodätischer Krümmung). Sei S eine orientierbare, reguläre Fläche mit Einheitsnormalenfeld \mathbf{N} . Sei $\gamma : I \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Für die Normalkrümmung κ_n und geodätische

Krümmung κ_g von γ gelten folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}\kappa_n(t) &= \langle \ddot{\gamma}(t), \mathbf{N}(\mathbf{u}(t)) \rangle, \\ \kappa_g(t) &= \langle \ddot{\gamma}(t), (\mathbf{N}(\mathbf{u}(t)) \times \dot{\gamma}(t)) \rangle.\end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus (4.5). \square

Die Normalkrümmung κ_n , die die Krümmungsinformationen von S selbst speichert, steht in direkten Zusammenhang mit der zweiten Fundamentalform.

Satz 4.2.3 (Meusnier). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre, orientierbare Fläche mit $p \in S$, Einheitsnormalenfeld \mathbf{N} und zweiter Fundamentalform II . Für die Normalkrümmung κ_n einer nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow S$ mit $\gamma(0) = p$ gilt dann*

$$\kappa_n(0) = II_p(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)).$$

Für eine Parametrisierung σ von S mit $\gamma(t) = \sigma((u(t), v(t)))$ gilt insbesondere

$$\kappa_n = Li^2 + 2Miv + Nv^2.$$

Der Satz von Meusnier sagt also aus, dass jede nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, die durch p in S verläuft und dort denselben Tangentialvektor hat, auch dieselbe Normalkrümmung an dieser Stelle besitzt. Die Normalkrümmung hängt also nicht von der Wahl der Kurve ab, sondern ist als Eigenschaft der Fläche S zu verstehen.

Beweis des Satz von Meusnier. Da $\dot{\gamma}$ ein Tangentialvektor zu S ist gilt

$$\langle \mathbf{N}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$$

für alle $t \in I$. Differentiation dieser Gleichung bringt

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt} \langle \mathbf{N}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle|_{t=0} = \langle \mathbf{N}(\gamma(0)), \ddot{\gamma}(0) \rangle + \langle d\mathbf{N}_p, \dot{\gamma}(0) \rangle = \kappa_n(0) - \langle W_p(\dot{\gamma}(0)), \dot{\gamma}(0) \rangle \\ &= \kappa_n(0) - II_p(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)),\end{aligned}$$

was zu zeigen war. Die zweite Aussage des Satzes folgt sofort aus (4.1). \square

Die Normalkrümmung ist also der äußeren Geometrie zuzuordnen, da wir ihre Berechnung durch den Satz von Meusnier auf die zweite Fundamentalform zurückführen konnten.

Ein wichtiger Spezialfall kommt nun Kurven zu, die sich nur in dem Mindestmaß krümmen, dass ihnen die Fläche vorgibt, sprich der tangential Anteil der Krümmung κ_g verschwindet. Diesen Kurven geben wir einen Namen.

Definition 4.2.4 (Geodäte). *Sei S eine reguläre Fläche und $\gamma : I \rightarrow S$ eine reguläre Kurve. Wir nennen γ Geodäte, falls für alle $t \in I$ der Vektor $\ddot{\gamma}(t)$ ein Normalvektor zu S in $\gamma(t)$ ist.*

Die Krümmung von γ ist also ausschließlich die Normalkrümmung von γ . Anschaulich betrachtet, sind die kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten auf einer regulären Fläche Geodäten, und zwar weil sie keine tangentialen „Umwege“ gehen. Aus der Definition folgt sofort folgende Proposition.

Proposition 4.2.5. *Sei S eine reguläre Fläche. Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow S$ ist genau dann eine Geodäte, falls für alle $t \in I$ gilt, dass $\kappa_g(t) = 0$.*

Beweis. Sei $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ eine Parametrisierung von S und $p = \sigma(\mathbf{u}) \in S$, sowie \mathbf{N} ein Einheitsnormalenfeld von S . Aufgrund von Proposition 4.2.2, können wir die geodätische Krümmung beschreiben durch $\kappa_g(t) = \langle \ddot{\gamma}(t), (\mathbf{N}(\mathbf{u}(t)) \times \dot{\gamma}(t)) \rangle$.

Angenommen γ ist eine Geodäte. Dann ist $\ddot{\gamma}(t)$ nach Definition 4.2.4 parallel zu $\mathbf{N}(\mathbf{u}(t))$ in allen Punkten $\gamma(t)$, welche die Kurve durchläuft. Daraus folgt, dass $\ddot{\gamma}(t)$ normal zu allen Vektoren der Art $(\mathbf{N}(\mathbf{u}(t)) \times \dot{\gamma}(t))$ ist, für alle $t \in I$. Somit gilt, dass

$$\kappa_g(t) = 0$$

für alle $t \in I$.

Sei andererseits angenommen, dass $\kappa_g(t) = 0$ für alle $t \in I$. Daraus folgt, dass die beiden Vektoren $\ddot{\gamma}(t)$ und $(\mathbf{N}(\mathbf{u}(t)) \times \dot{\gamma}(t))$ normal zueinander sein müssen für alle $t \in I$. Rufen wir uns die Diskussion zu Beginn dieses Kapitels in Erinnerung, so sind aber $\dot{\gamma}(t)$, $\mathbf{N}(p)$ und $(\mathbf{N}(p) \times \dot{\gamma}(t))$ orthonormale Basisvektoren. Da für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\dot{\gamma}(t)$ normal auf $\ddot{\gamma}(t)$ steht für alle $t \in I$, folgt, dass $\ddot{\gamma}(t)$ parallel zu $\mathbf{N}(\mathbf{u}(t))$ für alle $t \in I$ ist, und somit ein Normalvektor an S ist. Somit erfüllt γ die Definition einer Geodäte. \square

Beispiel 4.2.6 (Geodäten der Ebene). Sei S die $(x - y)$ -Ebene im \mathbb{R}^3 . Alle Geraden, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden, sind Geodäten in der Ebene.

Beispiel 4.2.7 (Geodäten der Sphäre). Sei S^2 die Einheitskugel und $p \in S^2$. Wir erinnern uns an ihr nach außen zeigendes Einheitsnormalenfeld $\mathbf{N}(p) = p$ aus Beispiel 3.4.3. Die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ mit

$$\gamma(t) = \cos(t)p + \sin(t)\mathbf{t},$$

mit $\mathbf{t} \in T_p S^2$ ist eine Geodäte, denn es gilt für alle $t \in \mathbb{R}^3$, dass $\ddot{\gamma}(t) = -\gamma(t) = -\mathbf{N}(\gamma(t))$ ist. Betrachten wir das Bild von γ so sehen wir, dass γ gerade einen Großkreis durch p auf S^2 beschreibt.

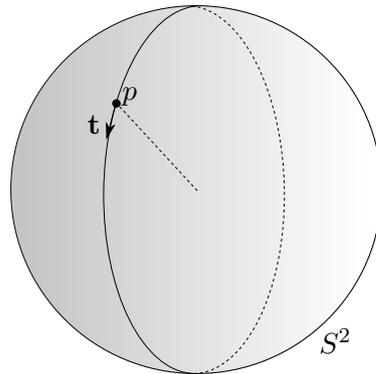


Abbildung 4.5: Geodäte durch p auf S^2

Wählen wir p als den Nordpol von S^2 , so sehen wir, dass zwischen Nord- und Südpol unendlich viele Geodäten existieren, wie Abbildung 4.6 zeigt.

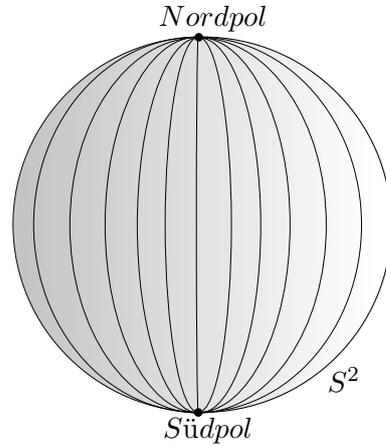


Abbildung 4.6: Geodäten durch Nord- und Südpol

Wir haben weiter oben erwähnt, dass Geodäten lokal die kürzesten Verbindungslinien auf regulären Flächen sind. Dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt und das global nicht immer zutrifft, illustriert Abbildung 4.7. Ist auf der Sphäre ein Großkreis länger als π , so ist er zwar noch immer eine Geodäte, jedoch nicht mehr die kürzeste Verbindungskurve zwischen den gewählten Punkten.

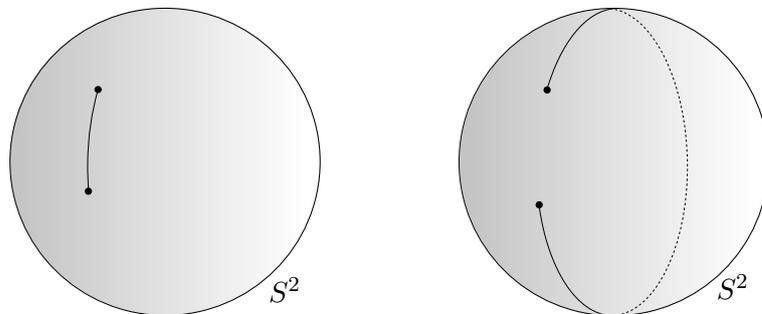


Abbildung 4.7: Zwei Geodäten verbinden zwei Punkte auf S^2

Im Allgemeinen gilt für eine kompakte reguläre Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $p, q \in S$, dass es eine kürzeste Verbindungskurve γ zwischen zwei Punkten p und q auf der Fläche gibt. Diese Kurve ist dann eine Geodäte. Umgekehrt sehen wir, wie in obigen Beispiel 4.2.7, dass Geodäten, wenn sie zu lang werden, aufhören die kürzesten Verbindungskurven zu sein. Lokal trifft die Umkehrung jedoch zu.

Um zu beweisen, dass die kürzeste Verbindung zweier Punkte eine Geodäte ist, konstruiert man, in einer kleinen Umgebung um die Punkte, eine Familie von Kurven, die durch p

und q verlaufen, siehe Abbildung 4.8. Daraus resultiert, dass die Kurve mit minimaler Länge einer Geodäte entspricht. Die interessierten Leserinnen und Leser finden dazu eine detaillierte Abhandlung in [20, §9.4, S.236].

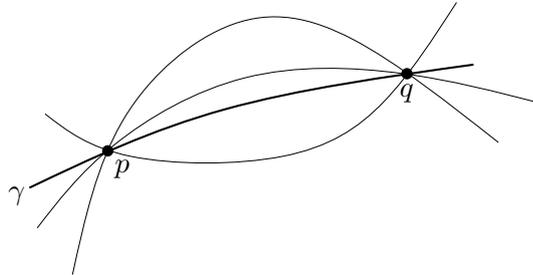


Abbildung 4.8: Verbindungskurven zwischen p und q

4.3 Gaußkrümmung

Die Weingartenabbildung, die das Differential der Gaußabbildung ist, kodiert viel geometrische Information der Fläche. Anders als im Unterkapitel zuvor, wollen wir nun nicht den Umweg über Kurven gehen, sondern werden direkt über die Weingartenabbildung, und somit auch zwangsläufig über die zweite Fundamentalform, Aussagen über die Krümmung von regulären Flächen machen.

Definition 4.3.1 (Gaußkrümmung). Sei S eine reguläre Fläche mit $p \in S$ und Weingartenabbildung W . Die *Gaußkrümmung* von S in p ist definiert als

$$K := \det(W).$$

Die Determinante von W kann über die Matrixdarstellung (w_{ij}) aus 4.1.10 berechnet werden. Diese hängt nur von der linearen Abbildung selbst und nicht von der Wahl der Basis von $T_p S$ ab. Wir haben in obiger Definition außerdem S nicht als orientierbar vorausgesetzt und zwar mit folgendem Grund: Ändern wir das Vorzeichen der Einheitsnormalen \mathbf{N} von S , so haben wir festgestellt, dass sich auch das Vorzeichen der Weingartenabbildung ändert (vgl. 4.1.2). Die Determinante von W bleibt jedoch bei Vorzeichenwechsel von W unverändert (vgl. [4, §3.1, S.179]). Somit ist die Gaußkrümmung K für orientierbare, sowie nicht-orientierbare, reguläre Flächen definiert. Bevor wir uns der geometrischen Interpretation der Gaußkrümmung zuwenden, zeigen wir, wie man K konkret berechnet.

Korollar 4.3.2 (Berechnung der Gaußkrümmung). Sei S eine reguläre Fläche mit $p \in S$ und Weingartenabbildung W . Dann gilt für die Gaußkrümmung K von S in p

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

wobei E, F, G die Koeffizienten der ersten Fundamentalform und L, M, N die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform von S in p sind.

Beweis. Wir brauchen nur die konkrete Matrixdarstellung von (w_{ij}) aus (4.4) verwenden und erhalten sofort

$$K = \det(w_{ij}) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

□

Beispiel 4.3.3 (Gaußkrümmung der Kugel). Sei S^2 die Kugel mit Parametrisierung wie in Beispiel 3.5.3 und Einheitsnormalenfeld $\mathbf{N} = \text{Id}$. Dann gilt für die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform $E = L = 1$, $F = M = 0$ und $G = N = \sin^2(\theta)$. Das bedeutet, die Kugel hat konstante Gaußkrümmung $K \equiv 1$.

Ebene und Zylinder sind, wie wir in Kapitel 3.7 über (lokale) Isometrien festgestellt haben, im Aufbau ihrer inneren Geometrie äquivalent. Die Frage, ob sie nun auch in ihrer Gaußkrümmung übereinstimmen, lässt sich nicht von vornherein beantworten, da wir für die Berechnung von K sowohl die erste als auch die zweite Fundamentalform verwenden. Wir berechnen also die Gaußkrümmung beider Flächen.

Beispiel 4.3.4 (Gaußkrümmung der Ebene). Sei S die $(x - y)$ -Ebene im \mathbb{R}^3 . Wir wählen dieselbe Parametrisierung σ wie in Beispiel 3.5.2 und erhalten für die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform $E = G = 1$, $F = 0$, sowie $L = M = N = 0$. Dann gilt für die Gaußkrümmung $K \equiv 0$ für alle Punkte der Ebene. Das passt mit unserer Vorstellung überein, dass sich die Ebene nirgends verbiegt und krümmt.

Beispiel 4.3.5 (Gaußkrümmung des Zylinders). Sei S die Zylinderfläche mit Parametrisierung σ wie aus Beispiel 3.5.4 mit Einheitsnormalenfeld $\mathbf{N}(r, \varphi, h) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt für die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform $E = G = 1$, $F = 0$, sowie $L = -1$, $N = M = 0$. Dann erhalten wir für die Gaußkrümmung $K \equiv 0$ für alle Punkte des Zylinders.

Die Ebene und der Zylinder haben also tatsächlich dieselbe Gaußkrümmung, nämlich $K \equiv 0$. Wir haben bereits herausgefunden, dass die beiden Flächen ebenfalls die gleiche erste Fundamentalform haben. Beides hat nun damit zu tun, dass die Flächen, wie wir in Beispiel 3.7.2 nachgewiesen haben, lokal isometrisch sind. Wir haben in Kapitel 3.7 festgestellt, dass Flächen, die lokal isometrisch sind, den gleichen Aufbau ihrer inneren Geometrie haben – dies führt uns zur Frage, ob die Gaußkrümmung ebenfalls Teil der inneren Geometrie ist. Nach Korollar 4.3.2 könnte man meinen, dass diese Frage nicht eindeutig zu beantworten ist, da wir für die Berechnung der Gaußkrümmung sowohl Hilfsmittel der inneren Geometrie (die Koeffizienten der ersten Fundamentalform), als auch der äußeren Geometrie (die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform) verwenden. Es gibt jedoch einen wichtigen Satz aus der Differentialgeometrie, das Theorema Egregium von Gauß, das besagt, dass die Gaußkrümmung ausschließlich über die erste Fundamentalform berechnet werden kann und somit der inneren Geometrie zuzuordnen ist. Ein Beweis dieses Satzes würde in dieser Arbeit den Rahmen sprengen, die interessierten Leserinnen und Leser finden in [20, §10, S.247f] eine detaillierte Ausführung darüber.

Als Größe der inneren Geometrie, bleibt die Gaußkrümmung somit unter lokalen Isometrien erhalten und erklärt den Umstand, dass Zylinder und Ebene gleiche Gaußkrümmung haben. Es gilt im Allgemeinen sogar die Aussage, dass zwei reguläre Flächen S_1 und S_2 mit derselben konstanten Gaußkrümmung lokal isometrisch sind (vgl. [1, §4.6, S.206]).

Diese Überlegungen bringen nun zwei interessante Schlussfolgerungen mit sich: für „zweidimensionale Bewohner“ von Flächen, sind zwei Flächen mit selber Gaußkrümmung nicht zu unterscheiden. Andererseits gibt es zwischen Flächen, mit unterschiedlicher Gaußkrümmung, keine lokalen Isometrien. Konkret heißt das z.B., dass es zwischen der Ebene und der Sphäre keine Möglichkeit gibt, die Längen- und Flächeninhaltsverhältnisse verzerrungsfrei zu übertragen. Diese Problematik ist vor allem bei der Bestimmung von Landkarten ein Thema. Es ist unmöglich eine verzerrungsfreie Landkarte der Erde zu finden; je größer der betrachtete Ausschnitt, desto mehr Verzerrung der Längen gehen mit der Karte einher.

In den obigen Beispielen sind uns nur Flächen begegnet, die konstante Gaußkrümmung haben. Das ist aber nicht immer der Fall. Grundsätzlich können wir in jedem Punkt der Fläche sagen, auf welche Art und Weise sie gekrümmt ist.

Definition 4.3.6 (Klassifizierung von Flächenpunkten). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit $p \in S$. Man nennt den Punkt p

- (i) *elliptisch*, falls $K(p) > 0$,
- (ii) *hyperbolisch*, falls $K(p) < 0$,
- (iii) *parabolisch*, falls $K(p) = 0$, aber $W_p \neq 0$
- (iv) *Flachpunkt*, falls $W_p = 0$.

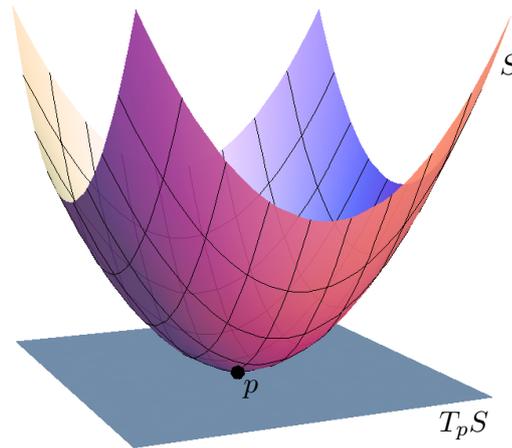


Abbildung 4.9: Tangentialebene am elliptischen Punkt p

Wir können uns die Idee hinter dieser Definition folgendermaßen vorstellen: Betrachten wir die Tangentialebene in einen Punkt $p \in S$, so „biegt“ sich S auf bestimmte Art und

Weise von der Tangentialebene weg. Betrachten wir einen elliptischen Punkt, so biegt sich S in allen Richtungen von der Tangentialebene weg, wie Abbildung 4.9 zeigt. In einem parabolischen Punkt allerdings, gestaltet sich die Situation folgendermaßen:

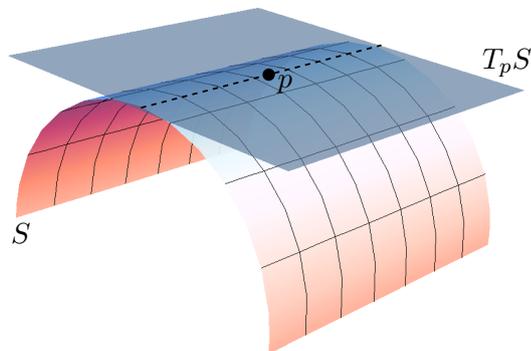


Abbildung 4.10: Tangentialebene am parabolischen Punkt p

Zuletzt betrachten wir noch die Tangentialebene an einen hyperbolischen Flächenpunkt.

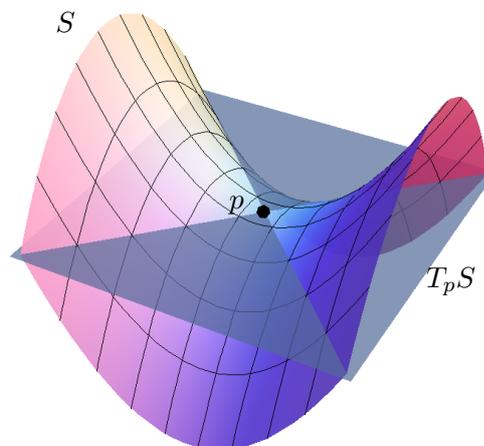


Abbildung 4.11: Tangentialebene am hyperbolischen Punkt p

So sehen wir, dass in unseren vorherigen Beispielen die Ebene aus lauter Flachpunkten besteht, da $K \equiv 0$ und $W \equiv 0$. Der Zylinder aber mit Matrix der Weingartenabbildung $(w_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ ist in allen Punkten somit parabolisch. Die Kugel ist mit konstanter Gaußkrümmung $K \equiv 1$ in allen Punkten elliptisch. Wir wollen nun eine Fläche untersuchen,

die keine konstante Gaußkrümmung besitzt.

Beispiel 4.3.7 (Gaußkrümmung des Torus). Wir verwenden die Parametrisierung σ aus Beispiel 3.6.5. Wir haben in diesem Beispiel bereits die Koeffizienten der ersten Fundamentalform berechnet und erhielten

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (1 + r \cos(\varphi))^2.$$

Um die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform zu berechnen benötigen wir ein glattes Einheitsnormalenfeld \mathbf{N} , das wir mithilfe von (3.2) folgendermaßen beschreiben:

$$\mathbf{N}(\varphi, \theta) = - \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform also

$$L = r, \quad M = 0, \quad N = \cos(\varphi)(1 + r \cos(\varphi)).$$

Damit folgt für die Gaußkrümmung

$$K(\varphi, \theta) = \frac{\cos(\varphi)}{r(1 + r \cos(\varphi))}.$$

Wie wir sehen ist K nicht konstant, hängt aber lediglich von φ ab. Für Punkte mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ verschwindet die Gaußkrümmung, also $K(\frac{\pi}{2}, \theta) = K(\frac{3\pi}{2}, \theta) = 0$. Die Punkte am „nördlichsten“ und „südlichsten“ Breitenkreis sind somit parabolisch.

In dem durch $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ gegebenen Bereich ist $K(\varphi, \theta) < 0$ und die Punkte dieses Bereichs sind hyperbolisch. Beachte, dass wir uns dabei im „inneren“ Bereich des Torus befinden, welcher in Abbildung 4.12 rötlich eingefärbt ist.

Für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ befinden wir uns im „äußeren“ Bereich mit $K(\varphi, \theta) > 0$. In diesem Bereich sind alle Punkte elliptisch.

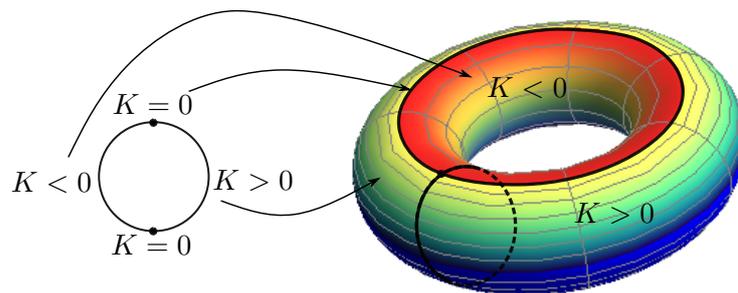


Abbildung 4.12: Torus und seine Gaußkrümmung

Zum Ende dieses Unterkapitels wollen wir noch eine geometrische Interpretation der Gaußkrümmung in Termen der Gaußabbildung $\mathbf{N} : S \rightarrow S^2$ geben. Übrigens hat Gauß über diesen Zugang die Gaußkrümmung eingeführt. Vorab benötigen wir dazu noch folgende Definition.

Definition 4.3.8 (Orientierungserhaltende und -umkehrende Abbildungen zwischen regulären Flächen). Seien S_1, S_2 zwei orientierbare, reguläre Flächen. Sei $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine differenzierbare Abbildung. Sei außerdem $\det(df_p) \neq 0$ für $p \in S_1$. Wir nennen f *orientierungserhaltend* bei p , falls für eine positive Basis $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$ von $T_p S_1$ auch die Basis $\{df_p(\mathbf{t}_1), df_p(\mathbf{t}_2)\}$ von $T_{f(p)} S_2$ positiv ist. Ist $\{df_p(\mathbf{t}_1), df_p(\mathbf{t}_2)\}$ keine positive Basis, so nennen wir f *orientierungsumkehrend*.

Nun können wir folgende Überlegungen anstellen: Sei S eine orientierbare reguläre Fläche mit Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$. Wir betrachten die Gaußabbildung $\mathbf{N} : S \rightarrow S^2$ hinsichtlich obiger Definition. Eine Orientierung \mathbf{N} von S induziert somit eine Orientierung \mathbf{N} von S^2 . Für ein $\sigma(\mathbf{u}) = p \in S$ mit $\det(d\mathbf{N}_p) \neq 0$ und einer Basis $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\}$ von $T_p S$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}) &\stackrel{4.1.10}{=} \left(w_{11} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + w_{21} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right) \times \left(w_{12} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) + w_{22} \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right) \\ &= (w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right) \\ &= \det(w_{ij}) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right) \\ &= K \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dabei ist hervorzuheben, dass $\det(w_{ij})_p = \det(d\mathbf{N}_p) = K(p)$ ist. Mit etwas Hintergrundinformationen aus der linearen Algebra wissen wir, dass eine Basis positiv orientiert ist, falls ihre Determinante größer Null ist (vgl. [15, §4.2, S.70f]). In unserem Fall bedeutet das nun, dass die Gaußabbildung orientierungserhaltend in p ist, falls $K(p) > 0$ und orientierungsumkehrend in p ist, wenn $K(p) < 0$ ist. Intuitiv können wir das folgenderweise interpretieren: Eine Orientierung von $T_p S$ induziert eine Orientierung kleiner geschlossener Kurven in S um p . Das Bild dieser Kurven unter \mathbf{N} hat dieselbe Orientierung wie die ursprüngliche, falls p ein elliptischer Punkt ist, siehe Abbildung 4.13, oder die entgegengesetzte Orientierung falls p ein hyperbolischer Punkt ist, wie in Abbildung 4.14 zu sehen ist.

Wir formen obige Gleichung (4.6) um durch

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\| = |K| \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\|$$

und erhalten

$$|K| = \frac{\left\| \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\|}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\|}. \quad (4.7)$$

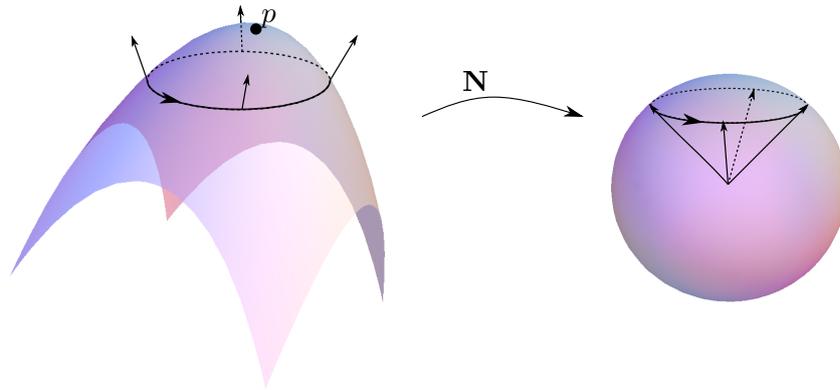


Abbildung 4.13: Kurve um den elliptischen Punkt p ; die Gaußabbildung ist orientierungserhaltend

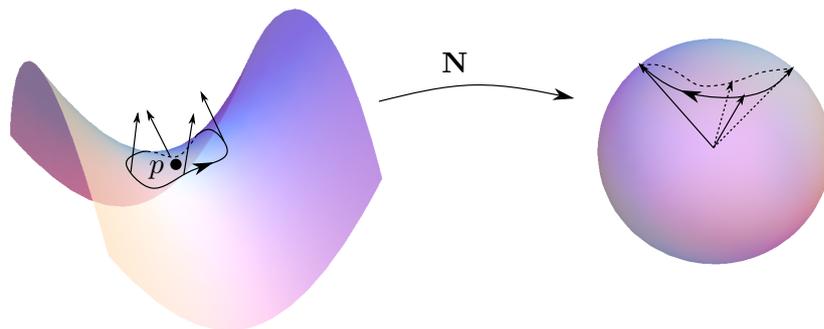


Abbildung 4.14: Kurve um den hyperbolischen Punkt p ; die Gaußabbildung ist orientierungsumkehrend

Rufen wir uns 3.6.2 in Erinnerung, so beinhaltet der Bruch auf der rechten Seite der Gleichung genau die beiden Terme, die zur Flächeninhaltsberechnung verwendet werden. Betrachten wir nun einen kleinen Bereich $R \subseteq S$ mit $p \in R$. Grob gesagt ist die Gaußkrümmung in einem Punkt p mit $K(p) \neq 0$ ungefähr

$$|K(p)| \approx \frac{\text{Flächeninhalt}(\mathbf{N}(R))}{\text{Flächeninhalt}(R)},$$

wenn sich R zum Punkt p „zusammenzieht“.

Diese Interpretation ist eng mit der Vorstellung der Krümmung von Kurven verknüpft. Die Krümmung einer Kurve haben wir uns in 2.2.4 so vorgestellt, dass sie als Maß verstanden wird, um wie viel sich der Tangentialvektor der nach Bogenlänge parametrisierten Kurve drehen muss. In unserem Fall hier misst das Einheitsnormalenfeld \mathbf{N} in welchem Maß sich die Tangentialebene von S bewegt, so können wir im Analogon zu den Kurven annehmen,

dass die Krümmung eines parametrisierten Flächenstücks $\sigma(R)$ die „die Änderungsrate von \mathbf{N} pro Einheitsfläche“ ist.

Um diese Überlegungen zu präzisieren formulieren wir folgendes Theorem.

Theorem 4.3.9 (Gaußkrümmung als Grenzwert des Flächeninhalts). *Sei S eine orientierbare, reguläre Fläche mit Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$. Sei $(u_0, v_0) \in U$ und sei $\delta > 0$, sodass R_δ die abgeschlossene Kreismenge*

$$R_\delta := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leq \delta^2\} \subseteq U,$$

mit Mittelpunkt (u_0, v_0) und Radius δ , ist .

Dann gilt

$$|K| = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\mathbf{N}(R_\delta))}{\mathcal{A}(\sigma(R_\delta))},$$

wobei K die Gaußkrümmung in $\sigma(u_0, v_0)$ ist.

Beweis. Nach Definition 3.6.2 ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(\mathbf{N}(R_\delta))}{\mathcal{A}(\sigma(R_\delta))} &= \frac{\int_{R_\delta} \left\| \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\| dudv}{\int_{R_\delta} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\| dudv} \\ &\stackrel{(4.6)}{=} \frac{\int_{R_\delta} |K| \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\| dudv}{\int_{R_\delta} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\| dudv}. \end{aligned}$$

Wir lassen nun δ gegen 0 gehen und verwenden in nachfolgender Rechnung unter anderem den Mittelwertsatz von Doppelintegralen (siehe [11, §85, S.477]). Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\mathbf{N}(R_\delta))}{\mathcal{A}(\sigma(R_\delta))} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(\mathbf{N}(R_\delta))/\mathcal{A}(R_\delta)}{\mathcal{A}(\sigma(R_\delta))/\mathcal{A}(R_\delta)} = \frac{\lim_{\delta \rightarrow 0} (1/\mathcal{A}(R_\delta)) \int_{R_\delta} |K| \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\| dudv}{\lim_{\delta \rightarrow 0} (1/\mathcal{A}(R_\delta)) \int_{R_\delta} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\| dudv} \\ &= \frac{|K| \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\|}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\|} = |K|, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

5 Der Satz von Gauß-Bonnet

Der Satz von Gauß-Bonnet ist einer der bemerkenswertesten Sätze über Flächen in der Differentialgeometrie, ist er doch das Bindeglied zwischen Geometrie und Topologie. Wenn wir von der Geometrie einer Fläche sprechen, so haben wir im letzten Kapitel gesehen, dass diese weitgehend durch ihre Krümmung bestimmt ist. Was ist nun hier mit topologischen Eigenschaften einer Fläche gemeint? Dazu holen wir etwas aus: Halten wir uns an K. Jänich, so versteht man unter algebraischer Topologie die Suche, Berechnung und Anwendung von *Invarianten* (vgl. [14, §5.6, S.87f]). Wir nennen eine Zuordnung χ eine Invariante, falls sie zu jedem geometrischen Objekt X aus einer gewissen Klasse eine Zahl $\chi(X)$ angibt, die sich unter Isomorphie nicht verändert, sprich aus X ist isomorph zu Y folgt $\chi(X) = \chi(Y)$. Um welche Objekte und Isomorphie es sich handelt, hängt von der bestimmten Situation ab. Für unseren Fall heißt das, dass wir für reguläre Flächen solch eine Invariante unter Homöomorphie finden wollen, die es uns erlaubt, Flächen danach zu kategorisieren. So eine Invariante, die sogenannte Euler-Charakteristik, liefert uns im weiteren Folge der Satz von Gauß-Bonnet.

Um den Satz von Gauß-Bonnet in seiner elementargeometrischen Form zu begreifen, nähern wir uns der Materie mit einfacheren, sukzessiv komplexer werdenden Versionen des Satzes und orientieren uns dabei weitgehend an Pressleys Vorgehensweise in [20, §13, S.335f].

5.1 Der Satz von Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Kurven

In der ersten lokalen Version des Satzes von Gauß-Bonnet betrachten wir Teilbereiche von Flächen, die von einfach geschlossenen Kurven begrenzt werden. Der Satz von Gauß-Bonnet setzt die geodätische Krümmung der Kurve mit der Gaußkrümmung innerhalb des Teilbereichs in Verbindung und besagt im Grunde folgendes: Verformen wir die Fläche nur innerhalb der Kurve, so bleibt die Gaußkrümmung im Mittel dieselbe. Andererseits kann die Randkurve als eine Art „Messwerkzeug“ verstanden werden, die selbst kleinste, lokale Veränderungen im besagten Flächenteilbereich registriert.

Verdeutlicht wird nochmals, wie sehr topologische und geometrische Eigenschaften in diesem Teilgebiet verwoben sind, wenn wir uns in Erinnerung rufen, dass wir bereits in Kapitel 2 die globalen, sprich topologischen, Eigenschaften von Kurven im \mathbb{R}^2 studiert haben und nun wieder auf diese zurückgreifen. Bevor wir also nun die erste Version des Satzes von Gauß-Bonnet beweisen, müssen wir zuvor noch die genauen Bedingungen für die Raumkurve, sowie für den begrenzten Teilbereich der Fläche festlegen.

Definition 5.1.1 (Einfach geschlossene Kurve auf einer Fläche). Sei $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung einer regulären, orientierbaren Fläche S . Sei weiters $\gamma : I \rightarrow S$ mit $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ eine Kurve in S . Wir nennen γ eine *einfach geschlossene Kurve* mit

Periode T , falls $\eta(t) = (u(t), v(t))$ eine einfach geschlossene Kurve im \mathbb{R}^2 mit Periode T ist, sodass die Region $\text{int}(\eta) \subseteq \mathbb{R}^2$ ganz in U liegt.

Wir nennen γ positiv orientiert, wenn η positiv orientiert ist. Das Innere $\text{int}(\gamma)$ von γ ist definiert als das Bild von $\text{int}(\eta)$ unter σ , d.h. $\text{Im}_\sigma(\text{int}(\eta)) =: \text{int}(\gamma)$.

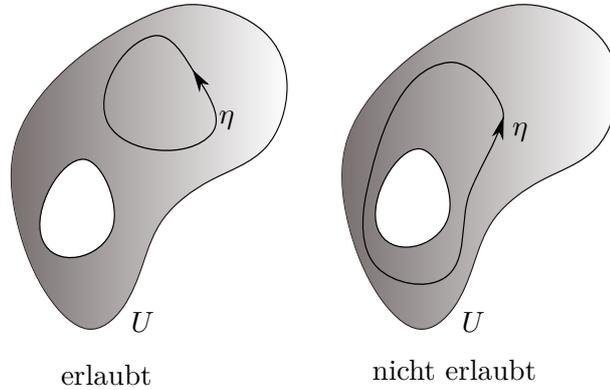


Abbildung 5.1: einfach geschlossene Kurve in U

Geschickt sind wir wiederum den Umweg über die Koordinaten gegangen und haben dort eine Kurve mit allen Eigenschaften konstruiert, die wir auf der Fläche benötigen. Beachte, dass das Innere der positiv orientierten Kurve η aufgrund des Jordan'schen Kurvensatzes 2.2.10 ein Gebiet wie in Definition 3.6.1 ist. Da wir S als orientierbar angenommen haben, ändert sich auch die Orientierung der Bildkurve γ in S nicht und wir konnten somit das Innere von γ definieren. Da ein Gebiet unter Abbildung eines Homöomorphismus ein Gebiet bleibt, ist $\text{int}(\gamma)$ als Bildmenge unter σ wiederum ein Gebiet. Dadurch ist sichergestellt, dass $\text{int}(\gamma)$ keine „Löcher“ hat. Durch diese lokale Beschreibung können außerdem Fälle ausgeschlossen werden, wie z.B. ein Kreis der um einen Zylinder gezeichnet wird: Betrachten wir Abbildung 5.2, so ist γ zwar eine einfach geschlossene Kurve, aber wo sollten wir ihr Inneres bzw. Äußeres annehmen? Die Kurve η erfüllt aber nicht unsere gewünschten Voraussetzungen und kommt daher nicht in Frage.

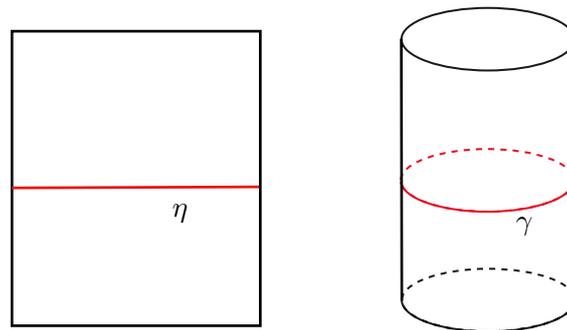


Abbildung 5.2: Wo befindet sich das Innere von γ ?

Bevor wir den Satz formulieren, klären wir noch kurz eine Begrifflichkeit.

Definition 5.1.2 (Totalkrümmung). Sei $\sigma : U \rightarrow S \cap V$ eine Parametrisierung der regulären Fläche S mit Gaußkrümmung K . Sei weiters $\gamma : I \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, einfach geschlossene Kurve. Wir nennen den Ausdruck

$$\int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}$$

Totalkrümmung des Bereichs $\text{int}(\gamma)$, wobei $\text{int}(\gamma)$ das Innere der Kurve γ und $d\mathcal{A}$ das Flächenelement von σ ist.

Die Totalkrümmung ist also nichts anderes als die integrierte Gaußkrümmung über einen ausgewählten Teil der Fläche, der hier von der Kurve γ begrenzt wird. Die Frage, wie die geodätische Krümmung der Randkurve und die Totalkrümmung genau im Zusammenhang stehen, beantwortet die erste lokale Version des Satz von Gauß-Bonnet, welchen wir nun endlich in der Lage sind zu formulieren.

Theorem 5.1.3 (Der Satz von Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Kurven - erste lokale Version). *Sei S eine orientierbare, reguläre Fläche mit Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$. Sei $\gamma : I \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, einfach geschlossene Kurve mit $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ und Länge $\mathcal{L}(\gamma)$. Außerdem sei γ positiv orientiert. Dann gilt*

$$\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \kappa_g(t) dt + \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A} = 2\pi,$$

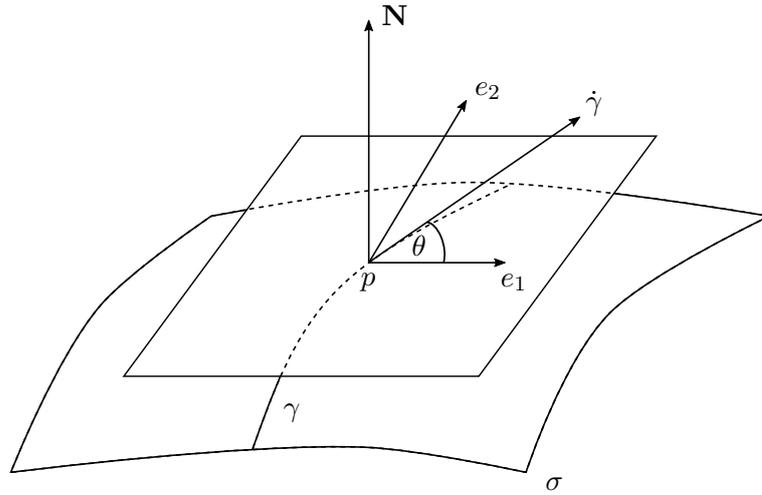
wobei κ_g die geodätische Krümmung von γ ist, K die Gaußkrümmung und $d\mathcal{A}$ das Flächenelement von σ .

Ganz erstaunlich an diesem Theorem ist, dass die geodätische Krümmung und die Gaußkrümmung zusammen eine Konstante ergeben. Würden wir S innerhalb der Kurve verändern (die geodätische Krümmung der Kurve bleibt also unverändert), so wird sich auch die Gaußkrümmung ändern. Die Totalkrümmung bleibt jedoch gleich! Die Gaußkrümmung ändert sich also in dem Maß, dass gerade so viel positive wie negative Krümmung hinzukommt. Nun aber zum Beweis.

Beweis des Satz von Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Kurven. Zunächst berechnen wir κ_g von γ . Sei dazu $p = \gamma(0) = \sigma(\mathbf{u})$ ein Punkt in S , wobei \mathbf{u} mit $\mathbf{u} = (u, v) \in U$ die Koordinaten von p sind. Wir betrachten eine glatte Orthonormalbasis $\{e_1(\mathbf{u}), e_2(\mathbf{u})\}$ der Tangentialebene $T_p S$ für jeden Punkt p der Parametrisierung σ , mit den glatten Abbildungen $e_1, e_2 : U \rightarrow T_p S$. Das Einheitsnormalenfeld \mathbf{N} von σ sei angenommen als $\mathbf{N}(\mathbf{u}) = e_1(\mathbf{u}) \times e_2(\mathbf{u})$. Dann ist für jeden Punkt p die Menge $\{e_1(\mathbf{u}), e_2(\mathbf{u}), \mathbf{N}(\mathbf{u})\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 . Weiters betrachten wir den orientierten Winkel $\theta(\mathbf{u}) := \angle_{e_1(\mathbf{u})\dot{\gamma}(0)}$ zwischen dem Einheitsvektor $e_1(\mathbf{u})$ und dem Tangentialvektor $\dot{\gamma}(0)$ in p . Wir werden im weiteren anstatt $\theta(\mathbf{u})$ nur θ schreiben. Das liefert

$$\dot{\gamma}(0) = \cos(\theta)e_1(\mathbf{u}) + \sin(\theta)e_2(\mathbf{u}), \quad (5.1)$$

da $\dot{\gamma}$ als Linearkombination der Basisvektoren der Tangentialebene dargestellt werden kann.


 Abbildung 5.3: Vektoren der Orthonormalbasis mit Winkel θ in p

Mithilfe einer Verschiebung von Kreuz- zu Skalarprodukt [13, §3.5, S.73] folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}(\mathbf{u}) \times \dot{\gamma}(0) &= (e_1(\mathbf{u}) \times e_2(\mathbf{u})) \times \dot{\gamma}(0) \\
 &= \langle e_1(\mathbf{u}), \dot{\gamma}(0) \rangle e_2(\mathbf{u}) - \langle e_2(\mathbf{u}), \dot{\gamma}(0) \rangle e_1(\mathbf{u}) \\
 &= \langle e_1(\mathbf{u}), (\cos(\theta)e_1(\mathbf{u}) + \sin(\theta)e_2(\mathbf{u})) \rangle e_2(\mathbf{u}) \\
 &\quad - \langle e_2(\mathbf{u}), (\cos(\theta)e_1(\mathbf{u}) + \sin(\theta)e_2(\mathbf{u})) \rangle e_1(\mathbf{u}) \\
 &= (\cos(\theta)\langle e_1(\mathbf{u}), e_1(\mathbf{u}) \rangle + \sin(\theta)\langle e_1(\mathbf{u}), e_2(\mathbf{u}) \rangle) e_2(\mathbf{u}) \\
 &\quad - (\cos(\theta)\langle e_2(\mathbf{u}), e_1(\mathbf{u}) \rangle + \sin(\theta)\langle e_2(\mathbf{u}), e_2(\mathbf{u}) \rangle) e_1(\mathbf{u}) \\
 &= \cos(\theta)e_2(\mathbf{u}) - \sin(\theta)e_1(\mathbf{u}).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Wir differenzieren (5.1) und erhalten

$$\ddot{\gamma}(0) = \cos(\theta)\dot{e}_1(\mathbf{u}) + \sin(\theta)\dot{e}_2(\mathbf{u}) + \dot{\theta}(-\sin(\theta)e_1(\mathbf{u}) + \cos(\theta)e_2(\mathbf{u})).$$

Nun haben wir alle Informationen die wir brauchen um κ_g wie in 4.2.2 zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 \kappa_g(0) &= \langle (\mathbf{N}(\mathbf{u}) \times \dot{\gamma}(0)), \ddot{\gamma}(0) \rangle \\
 &= \dot{\theta} \langle (-\sin(\theta)e_1(\mathbf{u}) + \cos(\theta)e_2(\mathbf{u})), (-\sin(\theta)e_1(\mathbf{u}) + \cos(\theta)e_2(\mathbf{u})) \rangle \\
 &\quad + \langle (-\sin(\theta)e_1(\mathbf{u}) + \cos(\theta)e_2(\mathbf{u})), (\sin(\theta)\dot{e}_2(\mathbf{u}) + \cos(\theta)\dot{e}_1(\mathbf{u})) \rangle \\
 &= \dot{\theta} + \cos^2 \theta \langle \dot{e}_1(\mathbf{u}), e_2(\mathbf{u}) \rangle - \sin^2 \theta \langle \dot{e}_2(\mathbf{u}), e_1(\mathbf{u}) \rangle \\
 &\quad + \sin(\theta) \cos(\theta) (\langle \dot{e}_2(\mathbf{u}), e_2(\mathbf{u}) \rangle - \langle \dot{e}_1(\mathbf{u}), e_1(\mathbf{u}) \rangle).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Die Basisvektoren $e_1(\mathbf{u})$ und $e_2(\mathbf{u})$ sind orthonormal zueinander, deshalb gilt

$$\langle e_1(\mathbf{u}), \dot{e}_1(\mathbf{u}) \rangle = \langle e_2(\mathbf{u}), \dot{e}_2(\mathbf{u}) \rangle = 0,$$

außerdem folgt aus Differentiation der Gleichung $\langle e_1(\mathbf{u}), e_2(\mathbf{u}) \rangle = 0$, dass

$$\langle \dot{e}_1(\mathbf{u}), e_2(\mathbf{u}) \rangle = -\langle e_1(\mathbf{u}), \dot{e}_2(\mathbf{u}) \rangle.$$

Daraus ergibt sich für κ_g nach einsetzen in (5.3)

$$\kappa_g(0) = \dot{\theta} - \langle e_1(\mathbf{u}), \dot{e}_2(\mathbf{u}) \rangle. \quad (5.4)$$

Um das Integral über κ_g entlang γ zu berechnen, müssen wir die Integrale über $\dot{\theta}$ und $\langle e_1(\mathbf{u}), \dot{e}_2(\mathbf{u}) \rangle$ berechnen. Für die Berechnung von $\int \langle e_1(\mathbf{u}), \dot{e}_2(\mathbf{u}) \rangle$ benötigen wir noch folgendes Lemma.

Lemma 5.1.4. *Sei σ Parametrisierung mit erster und zweiter Fundamentalform*

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \text{ und } Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Dann gilt

$$\left\langle \frac{\partial e_1}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial e_2}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial e_2}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial e_1}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (5.5)$$

Beweis. An dieser Stelle führen wir den Beweis nicht, für einen detaillierten Beweis siehe [20, §13.1, S.340f]. Der Beweis ist formal aufwendig, aber nicht schwierig. Um zu den Einträgen der Fundamentalformen zu kommen wird die Darstellung von \mathbf{N} aus 3.3 und Proposition 3.6.3 verwendet, dann wird eingesetzt.

◇

Weiter in unserem Beweis des Satz von Gauß-Bonnet. Unter der Verwendung des Satz von Green (siehe [7, §15, S.189]) erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \langle e_1(\mathbf{u}(t)), \dot{e}_2(\mathbf{u}(t)) \rangle dt &= \int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \left\langle e_1(\mathbf{u}(t)), \left(\dot{u}(t) \frac{\partial e_2}{\partial u}(\mathbf{u}(t)) + \dot{v}(t) \frac{\partial e_2}{\partial v}(\mathbf{u}(t)) \right) \right\rangle dt \\ &= \int_{\eta} \left\langle e_1(\mathbf{u}), \frac{\partial e_2}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle du + \left\langle e_1(\mathbf{u}), \frac{\partial e_2}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle dv \\ &= \int_{\text{int}(\eta)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\langle e_1(\mathbf{u}), \frac{\partial e_2}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle - \frac{\partial}{\partial v} \left\langle e_1(\mathbf{u}), \frac{\partial e_2}{\partial u}(\mathbf{u}) \right\rangle \right] dudv \\ &= \int_{\text{int}(\eta)} \left\langle \frac{\partial e_1}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial e_2}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial e_2}{\partial u}(\mathbf{u}), \frac{\partial e_1}{\partial v}(\mathbf{u}) \right\rangle dudv \\ &\stackrel{(5.5)}{=} \int_{\text{int}(\eta)} \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG - F^2}} dudv \\ &= \int_{\text{int}(\eta)} \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Jetzt gilt es nur noch Überlegungen zu $\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \dot{\theta}(t) dt$ anzustellen. Nach Proposition 2.2.4 gilt, dass die Krümmung einer Kurve als ihre Winkeländerungsrate zu interpretieren ist.

Da unsere Kurve sogar einfach geschlossen ist, können wir den Hopf'schen Umlaufsatz 2.2.7 anwenden und erhalten

$$\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \dot{\theta}(t) dt = \int_0^T \dot{\theta}(t) dt = 2\pi. \quad (5.7)$$

Rufen wir uns nun (5.4) in Erinnerung so bekommen wir nach Einsetzen von (5.6) und (5.7)

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \kappa_g(t) dt &= \int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \dot{\theta}(t) dt - \int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \langle e_1(\mathbf{u}(t)), \dot{e}_2(\mathbf{u}(t)) \rangle dt \\ &= 2\pi - \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A} \end{aligned}$$

woraus nach Umformung

$$\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \kappa_g(t) dt + \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A} = 2\pi$$

folgt, was die Behauptung des Satz von Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Kurven liefert. \square

5.2 Der Satz von Gauß-Bonnet für Polygonzüge

Wir wollen den Satz von Gauß-Bonnet im Folgenden ein Stück weit verallgemeinern und formulieren die zweite lokale Version des Satzes. Dazu verändern wir die Randkurve, die das zu betrachtende Flächenstück begrenzt, dahingehend, dass wir der Kurve nun auch erlauben „Ecken“ zu besitzen. Daher beschäftigen wir uns in diesem Unterkapitel mit einfach geschlossenen Polygonzügen, als Randkurve für das Flächenstück. Im Grunde wird sich das Vorgehen für den Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Polygonzüge nicht weitgehend anders gestalten, als jenes für einfach geschlossene Kurven – allerdings müssen wir uns genauer mit den zugelassenen Ecken, und den dadurch aufgeworfenen Änderungen beschäftigen. Dazu benötigen wir folgende Definition.

Definition 5.2.1 (Einfach geschlossener Polygonzug). Sei $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Sei weiters $T \in \mathbb{R}$ und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ($t_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$). Wir nennen η einen *einfach geschlossenen Polygonzug* wenn gilt:

- (i) $\eta(t) = \eta(\tilde{t})$ genau dann, wenn $(t - \tilde{t})$ ein ganzzahliges Vielfaches von T ist, ansonsten folgt aus $t \neq \tilde{t}$, dass $\eta(t) \neq \eta(\tilde{t})$ ist,
- (ii) η ist glatt auf den offenen Intervallen $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n)$,
- (iii) die einseitigen Ableitungen

$$\dot{\eta}^+(t_i) = \lim_{t \searrow t_i} \frac{\eta(t) - \eta(t_i)}{t - t_i}, \quad \dot{\eta}^-(t_i) = \lim_{t \nearrow t_i} \frac{\eta(t) - \eta(t_i)}{t - t_i}$$

existieren für $i = 1, \dots, n$ und sind nicht Null und nicht parallel.

Die Punkte $\eta(t_i)$ für $(1 \leq i \leq n)$ heißen *Eckpunkte* des Polygonzug η und die Segmente $\eta[(t_{i-1}, t_i)]$ heißen *Kanten*.

In Anlehnung an das Konzept von einfach geschlossenen Kurven bedeutet die Definition intuitiv, dass der Polygonzug η einfach geschlossen ist (Bedingung (i)). Bedingung (ii) sagt, dass die Kanten des Polygonzugs als reguläre Kurven zu verstehen sind. Bedingung (iii) stellt sicher, dass es nur an endlich vielen Stellen (nämlich an den Ecken) keine eindeutige Tangente gibt. Für einfach geschlossene Polygonzüge gilt ebenfalls der Jordan'sche Kurvensatz und sie sind, wie einfach geschlossene Kurven, positiv orientierbar. Intuitiv können wir uns vorstellen, dass es, wie für einfach geschlossene Kurven, in all jenen Punkten, die keine Ecken von η sind, möglich ist, dass der Normalvektor n ins Innere $\text{int}(\eta)$ zeigt.

Definition 5.2.2 (Einfach geschlossener Polygonzug auf einer Fläche). Sei S eine orientierbare, reguläre Fläche mit Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S$, sowie $\eta : \mathbb{R} \rightarrow U$ ein einfach geschlossener Polygonzug in U . Dann nennen wir $\gamma(t) := \sigma(\eta(t))$ einen *einfach geschlossenen Polygonzug auf S* . Den Bereich innerhalb des Polygonzugs γ bezeichnen wir als das Innere von γ und wir schreiben $\text{int}(\gamma) := \text{Im}_\sigma(\text{int}(\eta))$. Die *Eckpunkte* von γ sind $\gamma(t_i)$ für $(1 \leq i \leq n)$ und die *Kanten* sind die Segmente $\gamma[(t_{i-1}, t_i)]$. Außerdem existieren die rechtsseitige Ableitung

$$\dot{\gamma}^+(t_i) = \lim_{t \searrow t_i} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_1)}{t - t_i},$$

sowie die linksseitige Ableitung

$$\dot{\gamma}^-(t_i) = \lim_{t \nearrow t_i} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_1)}{t - t_i}$$

und sind nicht parallel.

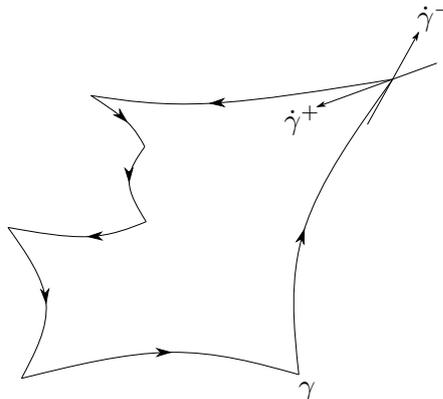


Abbildung 5.4: einfach geschlossener Polygonzug

Es bleibt nun noch die Frage zu klären, wie wir mit den Ecken des Polygonzugs umgehen. Dazu stellen wir folgende Überlegungen an. Sei θ_i^\pm der Winkel zwischen $\dot{\gamma}^\pm(t_i)$ und

$e_1(\gamma(t_i))$ (siehe 5.1.3), sei $\delta_i := \theta_i^+ - \theta_i^-$ der Außenwinkel beim Eckpunkt $\gamma(t_i)$ und sei $\alpha_i := \pi - \delta_i$ der Innenwinkel.

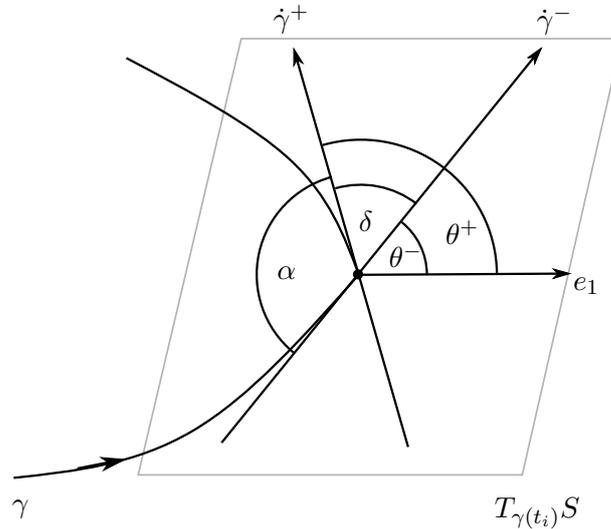


Abbildung 5.5: Innen- und Außenwinkel im Eckpunkt $\gamma(t_i)$

Da die Tangentialvektoren $\dot{\gamma}^+(t_i)$, $\dot{\gamma}^-(t_i)$ nicht parallel sind, ist δ_i kein Vielfaches von π . Alle Innen- sowie Außenwinkel sind eindeutig bestimmt, mit Ausnahme von Vielfachen von 2π . Daher nehmen wir ab jetzt $0 < \alpha_i < 2\pi$ für $(1 \leq i \leq n)$ an. Ein Polygonzug heißt nach Bogenlänge parametrisiert, falls $\|\dot{\gamma}\| \equiv 1$, wann immer $\dot{\gamma}$ definiert ist, d.h. für alle t , in denen $\gamma(t)$ kein Eckpunkt ist. Die Länge $\mathcal{L}(\gamma)$ des einfach geschlossenen Polygonzugs ist die Summe der Länge der Kanten von γ . Die Periode von γ ist, wie bei einfach geschlossenen Kurven, gleich der Länge $\mathcal{L}(\gamma)$. Nun aber endlich zum Satz.

Theorem 5.2.3 (Der Satz von Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Polygonzüge – zweite lokale Version). *Sei S eine orientierbare, reguläre Fläche mit Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow S \cap V$. Sei weiters $\gamma : I \rightarrow S$ mit $\gamma(t) = \sigma(\mathbf{u}(t))$ ein positiv orientierter, nach Bogenlänge parametrisierter, einfach geschlossener Polygonzug mit n Kanten, außerdem seien α_i ($1 \leq i \leq n$) die Innenwinkel an den Eckpunkten. Dann gilt*

$$\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \kappa_g(t) dt + \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi. \quad (5.8)$$

Bemerkung. Verwenden wir für die Gleichung (5.8) nicht die Schreibweise mit den Innenwinkeln α_i , sondern mit den Außenwinkeln δ_i dann erhalten wir nach Umformung die Gleichung

$$\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \kappa_g(t) dt + \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A} + \sum_{i=1}^n \delta_i = 2\pi.$$

Wir sehen also wiederum, dass die Totalkrümmung und die integrierte geodätische Krümmung in Summe 2π ergeben. Im Unterschied zum Satz von Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Kurven, kommt jedoch noch der Ausdruck $\sum_{i=1}^n \delta_i$ hinzu. Das ist aus folgendem Grund so: Wir haben durch den Hopf'schen Umlaufsatz 2.2.7 gesehen, dass die Krümmung entlang einer nach Bogenlänge parametrisierten, einfach geschlossenen Kurve, 2π ist. Dabei haben wir unter anderem verwendet, dass die Krümmung als Änderungsrate des Umlaufwinkels interpretiert werden kann. Welchen Winkel nehmen wir aber nun her, wenn wir uns in einem Eckpunkt befinden? Grundsätzlich gibt es die Möglichkeit den Beweis über eine verallgemeinerte Form des Hopf'schen Umlaufsatz für einfach geschlossene Polygonzüge zu führen. Wir entscheiden uns jedoch für eine andere Möglichkeit und werden im Laufe des Beweis herausfinden, dass die „Störung“ an der i -ten Ecke, gerade der „Schwenk“ der Tangente um den Außenwinkel δ_i ist (vgl. [16, §4F, S.123]).

Die Darstellung von (5.8) mit den Innenwinkeln ist durchaus sinnvoll, wird sie sich später als praktischer erweisen. Wir brauchen nur an n -Ecke jeglicher Art denken, wo man üblicherweise Berechnungen mit den Innenwinkeln oder mit der Summe der Innenwinkel durchführt, anstatt die Außenwinkel dafür zu verwenden.

Beweis des Satz von Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Polygonzüge. Die selbe Argumentation wie im Beweis für den Satz von Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Kurven 5.1.3 liefert

$$\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \kappa_g(t) dt = \int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \dot{\theta}(t) dt - \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}. \quad (5.9)$$

Als erstes wollen wir zeigen, dass

$$\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \dot{\theta}(t) dt = 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta_i$$

ist. Dazu stellen wir uns eine „in den Ecken abgerundete“ Kurve $\tilde{\gamma}$ von γ vor.

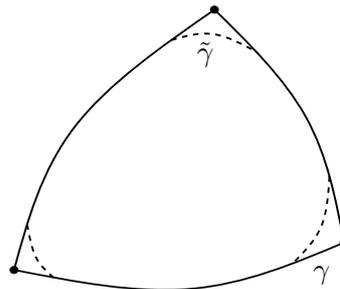


Abbildung 5.6: Polygonzug γ und abgerundete Kurve $\tilde{\gamma}$

Wir nehmen die abgerundete Kurve $\tilde{\gamma}$ glatt an, dann ist

$$\int_0^{\mathcal{L}(\tilde{\gamma})} \dot{\theta}(t) dt = 2\pi.$$

Der Polygonzug γ und die Kurve $\tilde{\gamma}$ sind in allen Punkten gleich, außer in jenen nahe der Eckpunkte von γ . Der Unterschied zwischen dem Polygonzug γ und der abgerundeten Kurve $\tilde{\gamma}$ ist also

$$\Delta := \int_0^{\mathcal{L}(\tilde{\gamma})} \dot{\theta}(t) dt - \int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \dot{\theta}(t) dt.$$

Der Gesamtunterschied Δ setzt sich aus n Differenzen nahe jeder Ecke zusammen. Nahe eines Eckpunktes $\gamma(t_i)$ ergibt sich folgendes Bild.

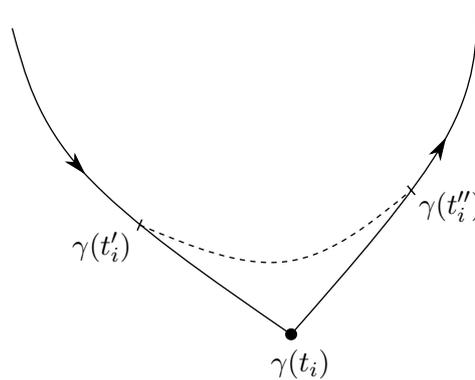


Abbildung 5.7: Polygonzug γ und die abgerundete Kurve $\tilde{\gamma}$ nahe einer Ecke

Konkret heißt das, dass γ und $\tilde{\gamma}$ nur im Intervall (t'_i, t''_i) nicht übereinstimmen, welches für den Polygonzug den Eckpunkt $\gamma(t_i)$ beinhaltet. Die Differenz nahe der i -ten Ecke ist

$$\Delta_i := \int_{t'_i}^{t''_i} \dot{\theta}(t) dt - \int_{t'_i}^{t_i} \dot{\theta}(t) dt - \int_{t_i}^{t''_i} \dot{\theta}(t) dt.$$

Nach Definition ist das erste Integral die Winkeländerung zwischen $\dot{\tilde{\gamma}}(t''_i)$ und $\dot{\tilde{\gamma}}(t'_i)$. Lässt man t'_i und t''_i gegen t_i konvergieren, wird dieser Winkel zu jenem zwischen $\dot{\gamma}^+(t_i)$ und $\dot{\gamma}^-(t_i)$, also gerade δ_i (wir rufen uns in Erinnerung, dass $\delta_i = \theta_i^+ - \theta_i^-$ ist). Andererseits ist γ glatt auf den Intervallen (t'_i, t_i) und (t_i, t''_i) für alle i . Die beiden letzteren Integrale von Δ_i gehen gegen Null, wenn t'_i und t''_i gegen t_i gehen.

Daraus folgt, dass Δ_i gegen δ_i konvergiert, für $t'_i, t''_i \rightarrow t_i$. Der Gesamtunterschied Δ in n Ecken ist dann

$$\Delta = \int_0^{\mathcal{L}(\tilde{\gamma})} \dot{\theta}(t) dt - \int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \dot{\theta}(t) dt = \sum_{i=1}^n \delta_i$$

und daher gilt

$$\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \dot{\theta}(t) dt = 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta_i. \quad (5.10)$$

Um nun die Behauptung (5.8) zu beweisen, brauchen wir nur noch in (5.9) einsetzen:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \kappa_g(t) dt &= \int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \dot{\theta}(t) dt - \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A} \\
 &\stackrel{(5.10)}{=} 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta_i - \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A} \\
 &= 2\pi - \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) - \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A} \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi - \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}.
 \end{aligned}$$

Nach einfachem Umformen erhalten wir

$$\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} \kappa_g(t) dt + \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi,$$

was zu zeigen war. \square

Aus dem Satz von Gauß-Bonnet für einfach geschlossene Polygonzüge gehen einige schöne Resultate hervor.

Korollar 5.2.4 (Anwendung für geodätische, einfach geschlossene Polygonzüge). *Sei $\gamma : I \rightarrow S$ ein einfach geschlossener Polygonzug mit n Kanten, wobei jede dieser Kanten eine Geodäte (vgl. Definition 4.2.4) ist. Dann gilt für die Innenwinkel α_i ($1 \leq i \leq n$) des Polygonzugs*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi + \int_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}. \quad (5.11)$$

Beweis. Folgt sofort aus dem Satz von Gauß-Bonnet für geschlossene Polygonzüge, da $\kappa_g \equiv 0$ für Geodäten gilt. \square

Bevor wir nun Beispiele anführen, wollen wir kurz den Begriff des n -Ecks klären.

Definition 5.2.5 (n -Eck auf einer Fläche). Sei S eine orientierbare, reguläre Fläche. Unter einem n -Eck verstehen wir ein abgeschlossenes Gebiet, dessen Rand ein einfach geschlossener Polygonzug mit n Ecken bzw. Kanten ist. Sind die Kanten des Polygonzugs Geodäten, so nennen wir das abgeschlossene Gebiet *geodätisches n -Eck*.

Je nachdem auf welcher Fläche wir uns also befinden, müssen wir uns überlegen, wie die Geodäten darzustellen sind.

Beispiel 5.2.6 (Winkelsumme für geodätische n -Ecke in der Ebene). Ein Spezialfall des obigen Korollars ist jener eines n -Ecks in der Ebene mit Geraden als Kanten. Da in der Ebene $K \equiv 0$ ist, gilt

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi. \quad (5.12)$$

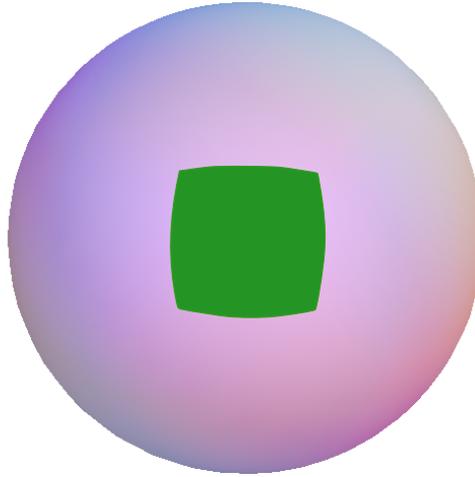


Abbildung 5.8: Geodätisches Viereck auf der Sphäre

Für ein Dreieck ($n = 3$) in der Ebene erhalten wir durch Einsetzen in (5.12) sofort, den aus der Elementargeometrie bekannten Satz über die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = (3 - 2)\pi = \pi.$$

Im Fall eines Vierecks ($n = 4$) erhalten wir für die Summe der Innenwinkel

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i = (4 - 2)\pi = 2\pi,$$

was ebenfalls ein wichtiges Resultat aus der elementaren Geometrie der Ebene darstellt. Hier jedoch, wie im Fall des Dreiecks, ist die Winkelsumme eines Vierecks ein einfacher Spezialfall der Anwendung des Satzes von Gauß-Bonnet für Polygonzüge.

Beispiel 5.2.7 (Winkel und Flächen auf der Sphäre). Betrachten wir nun ein geodätisches n -Eck auf der Sphäre S^2 mit Großkreisen als Kanten, wobei γ der Polygonzug ist, der das Vieleck berandet. Da für die Gaußkrümmung der Sphäre $K \equiv 1$ gilt, bekommen wir nach Einsetzen in (5.11)

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n - 2)\pi + \int_{\text{int}(\gamma)} d\mathcal{A} = (n - 2)\pi + \mathcal{A}(\text{int}(\gamma)).$$

Im Vergleich zu einem n -Eck in der Ebene, verändert sich auf S^2 die Summe der Innenwinkel also gerade um den Flächeninhalt des n -Ecks.

Betrachten wir dafür den konkreten Fall eines sphärischen Dreiecks ($n = 3$) mit den Winkeln α, β, γ und Großkreisen als Kanten. Wir bekommen für die Innenwinkelsumme

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \mathcal{A}_\Delta > \pi$$

bzw. für den Flächeninhalt

$$\mathcal{A}_\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Was hier ein Spezialfall des Satz von Gauß-Bonnet ist, ist ein wichtiges Resultat der sphärischen Geometrie. Die Innenwinkelsumme eines sphärischen Dreiecks wächst also mit seinem Flächeninhalt. Im Gegensatz zur Ebene, haben wir auf der Sphäre außerdem die Möglichkeit ein Zweieck zu konstruieren, da sich auf der Sphäre zwei Großkreise - im Gegensatz zu zwei Geraden in der Ebene- sehr wohl zweimal schneiden können. Wir erhalten für die Innenwinkel α, β folgende Aussage

$$\alpha + \beta = \mathcal{A}(\text{int}(\gamma)).$$

Die Winkelsumme entspricht also gerade dem Flächeninhalt des Zweiecks.

Aus Korollar 5.2.4 ergibt sich im Allgemeinen die folgende Schlussfolgerung.

Korollar 5.2.8. *Die Innenwinkelsumme in einem geodätischen Dreieck ist genau*

$$\left\{ \begin{array}{l} > \pi \\ = \pi \\ < \pi \end{array} \right\}, \quad \text{falls} \quad \left\{ \begin{array}{l} K > 0 \\ K = 0 \\ K < 0 \end{array} \right\}$$

im Inneren des Dreiecks ist.

Beweis. Die Aussage folgt sofort durch Einsetzen von $n = 3$ und $K > 0$, $K = 0$ oder $K < 0$ in 5.2.4. \square

Wichtig ist, dass das Innere des Dreiecks wirklich in dem betrachteten Flächenstück enthalten ist, es reicht nicht aus drei Geodäten im Dreieck anzuordnen.

Durch das Korollar ergeben sich unterschiedliche Bilder für geodätische Dreiecke, wie in Abbildung 5.9 zu sehen ist, je nachdem ob das Innere des Dreiecks elliptisch, flach oder hyperbolisch ist.

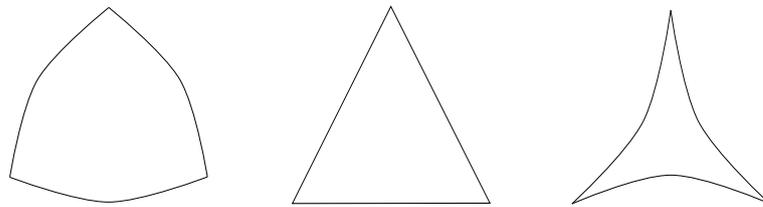


Abbildung 5.9: Innenwinkelsumme im geodätischen Dreieck mit $K > 0$, $K = 0$ und $K < 0$

Betrachten wir geodätische Dreiecke am Torus, so hat ein Dreieck im inneren, hyperbolischen Teil des Torus Winkelsumme $< \pi$ und am äußeren, elliptischen Bereich des Torus Winkelsumme $> \pi$, wie in Abbildung 5.10 zu sehen ist.

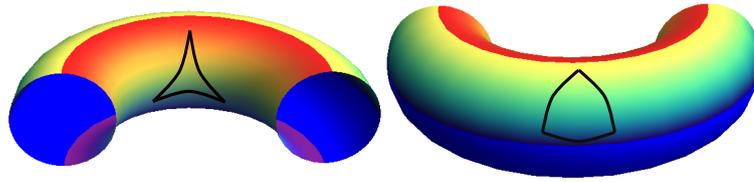


Abbildung 5.10: Geodätische Dreiecke am Torus

5.3 Der Satz von Gauß-Bonnet auf kompakten Flächen

Die wichtigste Form des Satzes von Gauß-Bonnet, ist die auf kompakten Flächen. Wir betrachten nun nicht nur lokal Flächenausschnitte, sondern formulieren den Satz global für ganz S . In diesem Unterkapitel werden wir auch der bereits angekündigten Invarianten, nämlich der Euler-Charakteristik begegnen, die es uns in weiterer Folge erlaubt, eine Klassifikation kompakter Flächen vorzunehmen.

Bevor wir uns dem Satz zuwenden, bedarf es noch einiger Vorüberlegungen. Zunächst wollen wir uns in Erinnerung rufen, was mit Kompaktheit gemeint ist. Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt*, genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Für unsere Belangen, also der Betrachtung von Flächen im \mathbb{R}^3 , ist diese Definition völlig ausreichend, für allgemeinere Räume greift sie jedoch zu kurz. Wir haben in unserer Auseinandersetzung mit regulären Flächen bereits kompakte Flächen kennengelernt, so sind die Kugel sowie der Torus kompakt. Nicht kompakt, weil unbeschränkt, ist zum Beispiel die Ebene oder der Zylinder. Wir betrachten hier kompakte, reguläre Flächen im \mathbb{R}^3 , die randlos sind, wie z.B. die Kugel oder den Torus. Dass wir den Satz von Gauß-Bonnet nun gerade auf kompakten Flächen studieren wollen, ist kein Zufall. Denn aus topologischer Sichtweise, haben kompakte Teilmengen die äußerst nützliche Eigenschaft, dass man auf oftmals von lokalen auf globale Eigenschaften der Menge schließen kann. Für eine nähere Ausführung dazu verweisen wir auf [14, §1.8, S.24f]. Somit stehen unsere Chancen gut, dass wir die lokalen Versionen des Satzes von Gauß-Bonnet zu einer globalen verallgemeinern können. Dazu überdecken wir die Fläche mit der simpelsten Form an einfach geschlossenen Polygonzügen, nämlich dreieckigen. Wir beginnen also mit der Definition der Triangulierung.

Definition 5.3.1 (Triangulierung). Sei S eine kompakte, reguläre Fläche mit Atlas bestehend aus Parametrisierungen $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha \in A$ (A beliebige Indexmenge). Sei \mathcal{T} eine endliche Familie von geodätischen Dreiecken mit $\mathcal{T} := \{T_1, \dots, T_n\}$, wobei $T_i \subseteq \mathbb{R}^3$ ($i = 1, \dots, n$) ist, mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Zwei Dreiecke T_i, T_j ($i \neq j$) sind entweder disjunkt oder
- (ii) T_i, T_j ($i \neq j$) schneiden einander genau in einer gemeinsamen Kante bzw. in genau einer Ecke;
- (iii) jede Kante ist genau die Kante von zwei Dreiecken.

Wir setzen $|\mathcal{T}| := \bigcup_{i=1}^n T_i$. Wir nennen \mathcal{T} eine *Triangulierung* von S , falls es einen Homöomorphismus $\psi : |\mathcal{T}| \rightarrow S$ gibt, sodass jedes $\psi(T_i)$ ganz in einer Parametrisierung $\sigma_\alpha(U_\alpha)$ enthalten ist. Die Fläche S heißt dann *triangulierbar*.

In einer Triangulierung ist es also möglich zwei Dreiecke auf S folgendermaßen anzuordnen,

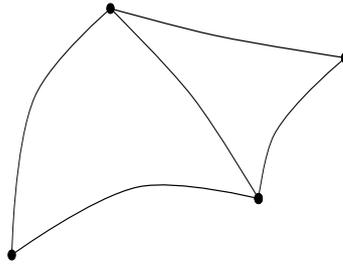


Abbildung 5.11: Triangulierung

und folgendermaßen nicht:

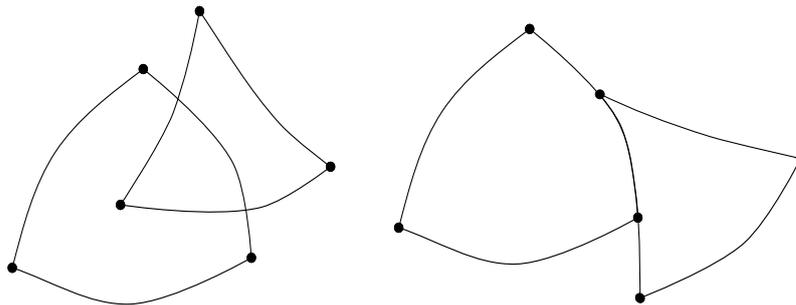
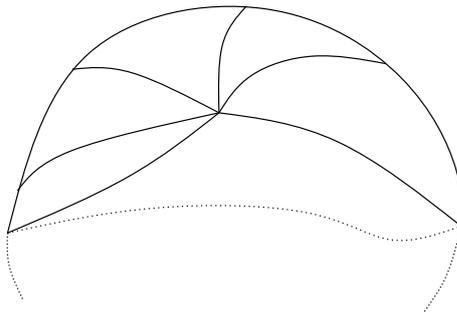


Abbildung 5.12: keine Triangulierung

Die einzelnen Dreiecke der Triangulierung teilen sich also sowohl Eckpunkte, als auch Kanten. Die Fläche S wird also von gekrümmten Dreiecken $\psi(T_i)$ ($1 \leq i \leq n$) überdeckt, d.h. $\bigcup_{i=1}^n \psi(T_i) = S$, wie in Abbildung 5.13 zu sehen ist.

In der obigen Definition der Triangulierung setzen wir bereits voraus, dass S kompakt ist. Grundsätzlich sind auch reguläre, in der Regel nicht kompakte, Flächen triangulierbar. Im Gegensatz zu kompakten Flächen, muss dabei jedoch im Allgemeinen eine Triangulierung mit abzählbar unendlich vielen Dreiecken gewählt werden. Da wir im weiteren ausschließlich mit kompakten Flächen arbeiten, wird die Triangulierbarkeit regulärer Flächen in diesem Kontext nicht genauer studiert.

Bemerkung. Dem aufmerksamen Leser ist wahrscheinlich nicht entgangen, dass wir S plötzlich nicht mehr als orientierbar angenommen haben. Dies wäre im Grunde auch

Abbildung 5.13: Triangulierung von S

überflüssig, da kompakte, reguläre Flächen im \mathbb{R}^3 stets orientierbar sind. Das liegt daran, dass kompakte Flächen den \mathbb{R}^3 in zwei Teile zerlegen, das Innere und das Äußere der Fläche. In jedem Punkt der Fläche zeigt einer der beiden Einheitsnormalvektoren ins Innere, der andere ins Äußere. Das äußere und das innere Einheitsnormalenfeld sind beide glatt, also ist die Fläche orientierbar (siehe auch [1, §6.2, S.279]).

Nun kommen wir zu einem erstaunlichen Resultat über kompakte Flächen und Triangulierungen.

Theorem 5.3.2 (Triangulierbarkeit kompakter Flächen). *Jede kompakte Fläche ist mit endlich vielen Dreiecken triangulierbar.*

Beweis. Wir führen den Beweis dieses wichtigen Theorems hier nicht, da er sehr komplex ist und die Anforderungen dieser Arbeit übersteigt. Einen überraschend kurzen Beweis finden die Leserinnen und Leser von Doyle und Moran in [3]. \square

Wir wenden unsere Erkenntnisse auf kompakte Flächen an.

Beispiel 5.3.3 (Triangulierung der Sphäre). Sei S^2 die Einheitssphäre. Eine Möglichkeit der Triangulierung erfolgt durch den Schnitt mit den drei Koordinatenebenen. Dadurch ergeben sich acht Dreiecke von denen S^2 überdeckt wird, wie in Abbildung 5.14 zu sehen ist.

Eine andere Triangulierung der Einheitssphäre S^2 erhalten wir, wenn wir uns vorstellen einen Tetraeder „aufzublasen“. Die Sphäre wird dabei in vier Dreiecke zerlegt, vergleiche dazu Abbildung 5.15.

Eine Triangulierung der Sphäre ist also keineswegs eindeutig. Die Triangulierungen haben eine unterschiedliche Anzahl sowohl von Dreiecken, als auch von Ecken und Kanten. Eine Gemeinsamkeit der Triangulierungen können wir jedoch finden, betrachten wir folgende Summen:

$$\text{Koordinatenebenen: } \# \text{Ecken} - \# \text{Kanten} + \# \text{Dreiecke} = 6 - 12 + 8 = 2 \text{ und}$$

$$\text{Tetraeder: } \# \text{Ecken} - \# \text{Kanten} + \# \text{Dreiecke} = 4 - 6 + 4 = 2.$$

Das legt die Idee nahe, einer invariante Größe für unterschiedliche Triangulierungen von S^2 gefunden zu haben. Tatsächlich gilt dies nicht nur für die Sphäre, sondern auch für andere Flächen. Zunächst geben wir dieser Zahl einen Namen.

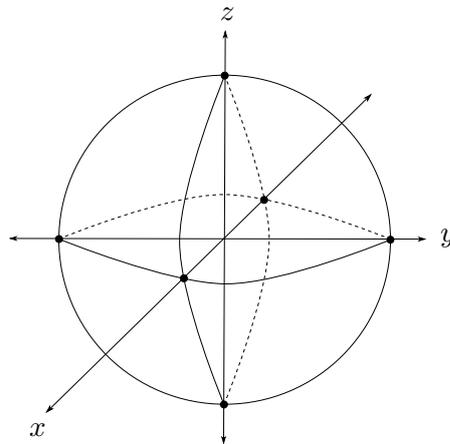


Abbildung 5.14: Triangulierung der Sphäre durch Schnitt der Koordinatenebenen

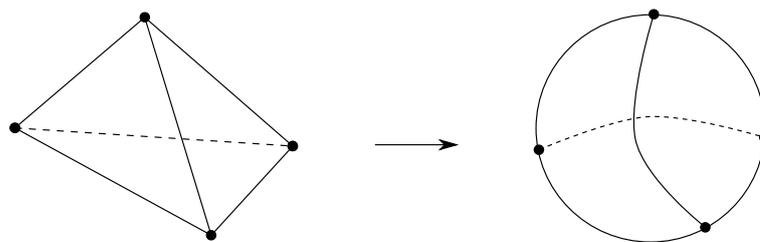


Abbildung 5.15: Zu einer Sphäre aufgeblasener Tetraeder

Definition 5.3.4 (Euler-Charakteristik einer Triangulierung). Die *Euler-Charakteristik* χ einer Triangulierung \mathcal{T} einer kompakten Fläche S ist definiert als

$$\chi(\mathcal{T}) := e - k + f,$$

wobei

$e :=$ Gesamtanzahl der Eckpunkte der Triangulierung,

$k :=$ Gesamtanzahl der Kanten der Triangulierung,

$f :=$ Gesamtanzahl der Dreiecke (Flächen) der Triangulierung

ist.

Die Euler-Charakteristik beider Triangulierungen der Sphäre ist also $\chi(S^2) = 2$. Wir berechnen nun die Euler-Charakteristik für den Torus.

Beispiel 5.3.5 (Triangulierung des Torus). Sei T der Torus wie aus Beispiel 3.6.5. Um eine Triangulierung des Torus zu finden, „verkleben“ wir zunächst das Einheitsquadrat zu einem Torus, und zwar indem wir die gegenüberliegenden Kanten miteinander verkleben, siehe Abbildung 5.16. Für die Triangulierung von T unterteilen wir das Quadrat in Dreiecke,

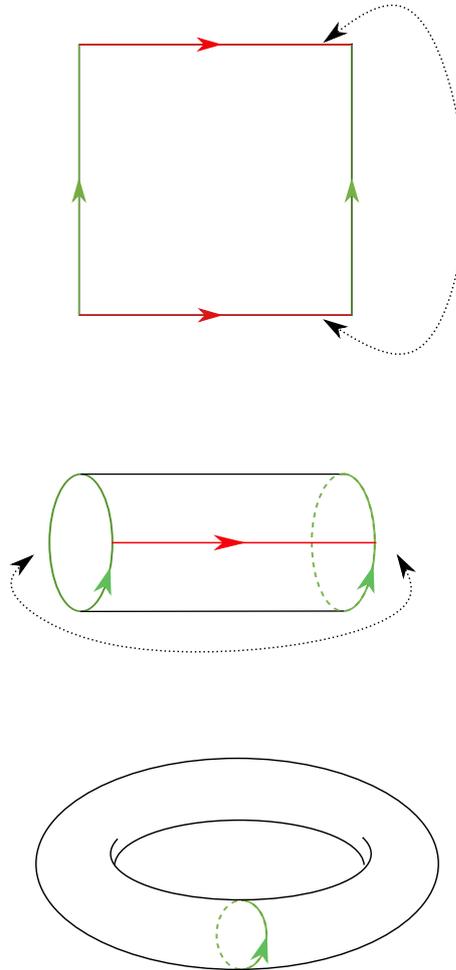


Abbildung 5.16: Einheitsquadrat wird zu Torus verklebt

siehe Abbildung 5.17. Beim Zählen der Ecken und Kanten müssen wir aufpassen diese nicht mehrfach zu zählen, so sind z.B. die rot eingekreisten Ecken in Abbildung 5.17 ein Eckpunkt am Torus. Die Triangulierung des Torus hat also $e = 9$, $k = 27$, $f = 18$ was bedeutet, dass für die Euler-Charakteristik der Triangulierung gilt $\chi = 0$.

Wir können jedoch nicht einfach irgendeine Unterteilung des Quadrates wählen. Die Unterteilung in Abbildung 5.18 bringt keine Triangulierung in unserem Sinne, da sich nach dem Verkleben der Kanten die beiden eingefärbten Dreiecke, zwar zwei Ecken teilen, jedoch keine gemeinsame Kante haben, was für eine Triangulierung nicht erlaubt ist.

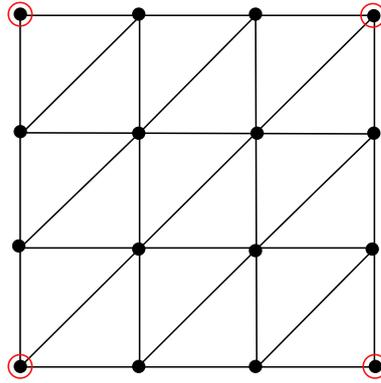


Abbildung 5.17: Unterteilung in Dreiecke

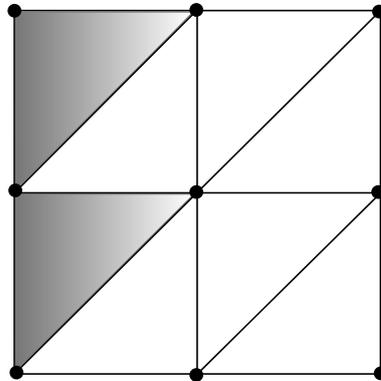


Abbildung 5.18: keine Triangulierung des Torus

Das Beispiel 5.3.3, der Triangulierung der Sphäre, wirft die Frage auf, ob die Euler-Charakteristik χ nicht viel mehr von der Beschaffenheit der Fläche an sich, als von einer Triangulierung abhängt. Der Satz von Gauß-Bonnet wird im Folgenden darauf eine Antwort geben und somit formulieren wir nun endlich die Version für kompakte Flächen.

Theorem 5.3.6 (Der Satz von Gauß-Bonnet auf kompakten Flächen). *Sei S eine kompakte, reguläre Fläche und \mathcal{T} eine Triangulierung von S . Dann gilt*

$$\int_S K d\mathcal{A} = 2\pi\chi. \quad (5.13)$$

Beweis. Sei $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Atlas von S . Wir wählen eine Triangulierung $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_f\}$ mit $\psi : |\mathcal{T}| \rightarrow S$ von S , sodass für jedes Dreieck $\psi(T_i) = \sigma_i(R_i)$, mit $R_i \subseteq U_i$, ($1 \leq i \leq f$) ist. Nach dem Satz von Gauß-Bonnet für geschlossene Polygonzüge (5.8) gilt

$$\int_{\psi(T_i)} K d\mathcal{A}_{\sigma_i} = \angle_i - (n_i - 2)\pi + \int_0^{\mathcal{L}(\gamma_i)} \kappa_g(t) dt, \quad (5.14)$$

wobei n_i die Anzahl der Kanten von T_i ist, γ_i ist der einfach geschlossene Polygonzug, welcher den Rand von $\psi(T_i)$ bildet, $\mathcal{L}(\gamma_i)$ ist die Länge des Polygonzugs und \angle_i ist die Summe der Innenwinkel $\sum_{j=1}^3 \alpha_j^i$ von jedem Dreieck, wobei α_j^i der j -te Innenwinkel von $\psi(T_i)$ ist.

Die Idee des Beweis ist es nun die Dreiecke T_i , für die der Satz von Gauß-Bonnet lokal gilt, zu S „zusammenzubauen“ und dadurch die globale Aussage zu beweisen. Wir betrachten zunächst die rechte Seite der Gleichung (5.14), die aus drei Termen besteht. Wir wollen nun jeden Term nicht nur für ein Dreieck, sondern für alle Dreiecke der Triangulierung berechnen und summieren diese somit über alle $\psi(T_i)$'s auf. Da sich die Dreiecke der Triangulierung jedoch Kanten sowie Eckpunkte teilen, müssen wir dies in unseren Überlegungen berücksichtigen.

Wir beginnen mit dem ersten Term. Die Summe $\sum_{i=1}^f \angle_i$ ist jene von allen Innenwinkel, aller Dreiecke. In jedem Eckpunkt treffen sich mehrere Dreiecke, die Summe der Innenwinkel an einem Eckpunkt ist jedoch immer 2π , deshalb ist

$$\sum_{i=1}^f \angle_i = 2\pi e, \quad (5.15)$$

wobei e die Gesamtanzahl von Eckpunkten der Triangulierung \mathcal{T} ist.

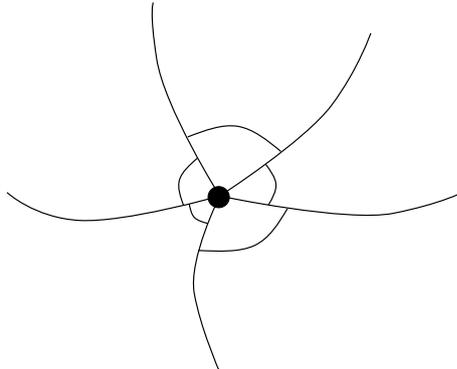


Abbildung 5.19: Winkelsumme an einem Eckpunkt

Betrachten wir nun die Summe des zweiten Terms aus (5.14). Die Anzahl der Kanten n_i ist für jedes Dreieck 3, somit bekommen wir den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^f (n_i - 2)\pi = 3\pi f - 2\pi f = 2\pi k - 2\pi f, \quad (5.16)$$

wobei f die Gesamtanzahl der Dreiecke der Triangulierung ist und k die Gesamtanzahl der Kanten.

Bemerkung. Wie kommt der Ausdruck $2\pi k$ zustande? Jede Fläche $\psi(T_i)$ hat 3 Kanten, also möchte man meinen, dass $3f = k$ gilt. Jede Kante ist aber die Kante von zwei Dreiecken und wird deshalb doppelt gezählt, was in Abbildung 5.20 illustriert ist. Das liefert den Ausdruck $3f = 2k$.

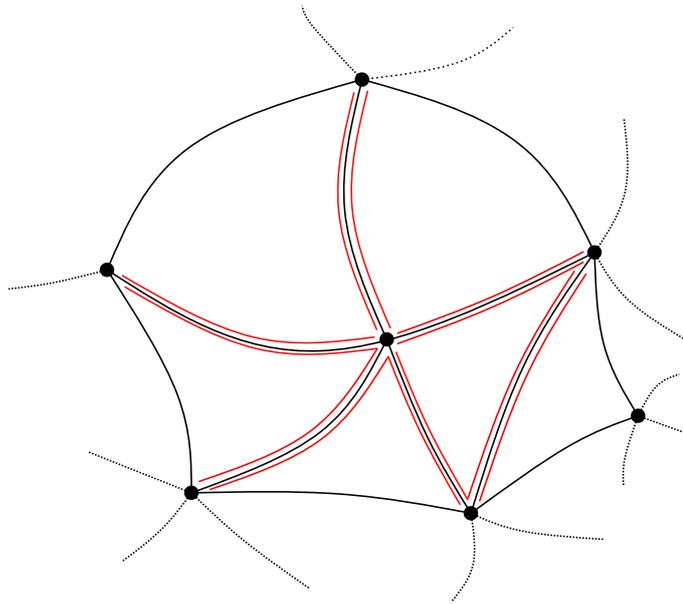


Abbildung 5.20: Doppelzählung der Kanten

Die Summe der ersten beiden Terme aus (5.15) und (5.16) liefern bereits alle „Zutaten“ für die Euler-Charakteristik $\chi(\mathcal{T}) = e - f + k$, deshalb müssen wir nun folgende Behauptung argumentieren:

$$\sum_{i=1}^f \int_0^{\mathcal{L}(\gamma_i)} \kappa_g(t) dt = 0. \quad (5.17)$$

In dieser Summe wird zweimal entlang jeder Kante integriert, jeweils in die entgegengesetzte Richtung.

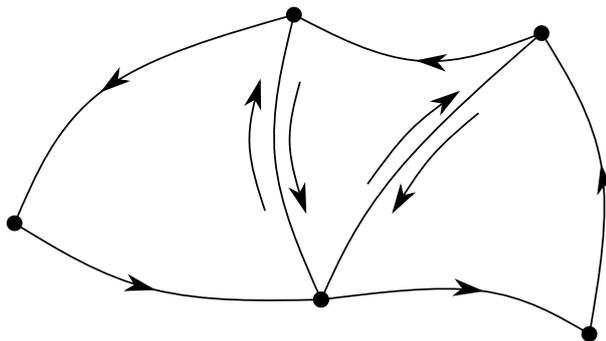


Abbildung 5.21: Entgegengesetzte Integration entlang der Kanten

Für die geodätische Krümmung κ_g einer Kurve $\gamma : I \rightarrow S$ gilt nach Proposition 4.2.2, dass

$\kappa_g(t) = \langle \dot{\gamma}(t), (\mathbf{N}(p) \times \dot{\gamma}(t)) \rangle$, für $t \in I$ ist. Betrachten wir exemplarisch eine Kante eines Dreiecks näher. Da alle Dreiecke positiv orientiert sind, wird eine gemeinsame Kante der Dreiecke jeweils in beiden Richtungen durchlaufen, siehe Abbildung 5.21. Je nachdem in welche Richtung die Kante durchlaufen wird, ändert sich das Vorzeichen von $\dot{\gamma}$ und somit folglich auch das von κ_g . Daher subtrahieren sich die Integrale in (5.17) entlang jeder Kante weg. Alle Beiträge in der Summe kürzen sich somit weg und daher gilt tatsächlich

$$\sum_{i=1}^f \int_0^{\mathcal{L}(\gamma_i)} \kappa_g(t) dt = 0.$$

In unserem Beweis fehlt nun nur noch die Gaußkrümmung K über die ganze Fläche S zu betrachten, sprich $\int_S K d\mathcal{A}$. Da sich S aus den einzelnen Dreiecken der Triangulierung \mathcal{T} „zusammenbauen“ lässt, ist die Gaußkrümmung der gesamten Fläche gerade die Summe der Gaußkrümmungen der einzelnen Dreiecke, sprich die Summe über alle Dreiecke der linken Seite aus (5.14). Dabei wird kein Flächenanteil „doppelt gezählt“, denn die Dreiecke überlappen sich, wenn dann nur in den Kanten bzw. Ecken, was nichts zum Integral beiträgt.

Fügen wir nun alle Argumente aus (5.15), (5.16) und (5.17) zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_S K d\mathcal{A} &= \sum_{i=1}^f \int_{\psi(T_i)} K d\mathcal{A}_{\sigma_i} = \sum_{i=1}^f \angle_i - \sum_{i=1}^f (n_i - 2)\pi + \sum_{i=1}^f \int_0^{l(\gamma_i)} \kappa_g(t) dt \\ &= 2\pi e - (2\pi k - 2\pi f) + 0 = 2\pi\chi, \end{aligned}$$

was den Satz von Gauß-Bonnet für kompakte Flächen beweist. \square

Aus dem Satz von Gauß-Bonnet folgt sofort eine wichtige Aussage über die Euler-Charakteristik χ .

Korollar 5.3.7 (Unabhängigkeit χ 's von Triangulierungen). *Ist S eine kompakte, reguläre Fläche, so ist die Euler-Charakteristik nicht von der Wahl der Triangulierung für S abhängig. Wir nennen $\chi(S)$ mit*

$$\chi(S) := \chi(\mathcal{T})$$

Euler-Charakteristik von S , wobei \mathcal{T} eine beliebige Triangulierung von S ist.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus dem Satz von Gauß-Bonnet für kompakte Flächen, da die linke Seite aus Gleichung (5.13) unabhängig von der Wahl der Triangulierung ist. \square

Die Euler-Charakteristik, ist also, wie vermutet, eine sogenannte topologische Invariante einer kompakten Fläche. Diese Tatsache eröffnet nun die Möglichkeit einer Klassifikation kompakter Flächen im \mathbb{R}^3 . Um zu illustrieren, wie bemerkenswert es ist, eine topologische Invariante wie die Euler-Charakteristik gefunden zu haben, betrachten wir das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 5.3.8 (Gauß-Bonnet für die Sphäre). Wir wenden den Satz von Gauß-Bonnet auf die Einheitssphäre S^2 an. Wie in 5.3.3 berechnet ist $\chi_{S^2} = 2$. Daraus folgt

$$\int_{S^2} K_{S^2} d\mathcal{A} = 4\pi.$$

Diese Erkenntnis per se ist nun nicht besonders erstaunlich, da $K_{S^2} \equiv 1$ und somit ist $\int_{S^2} K_{S^2} d\mathcal{A}$ gerade der Oberflächeninhalt der S^2 . Stellen wir uns nun aber vor, wir verformen S^2 durch drücken und ziehen, jedoch nicht durch reißen (es sind keine Löcher erlaubt). Wir schaffen dadurch eine neue, kompakte Fläche S .

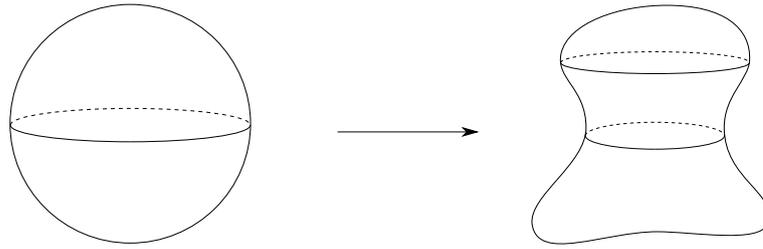


Abbildung 5.22: Diffeomorphismus der Sphäre

Die Gauß-Krümmung K_S der neuen Fläche wird nicht konstant sein und somit wird sich eine direkte Berechnung des Integrals $\int_S K_S d\mathcal{A}$ als schwierig herausstellen.

Betrachten wir allerdings die Triangulierung der Sphäre S^2 , so wird diese auch eine Triangulierung von S sein, denn nach der Deformation weist sie noch immer dieselbe Anzahl an Eckpunkten, Kanten und Dreiecken auf, wie das Original vor der Verformung. Somit ist die Euler-Charakteristik von S dieselbe, wie jene von S^2 , sprich $\chi_S = 2$, woraus

$$\int_S K_S d\mathcal{A} = 4\pi$$

folgt.

Was wir in Beispiel 5.3.8 mit „Deformation“ bezeichnet haben, ist eigentlich ein Homöomorphismus $f : S^2 \rightarrow S$, wie wir ihn zu Beginn von Kapitel 3.1 besprochen haben. Das bringt uns zu folgendem Theorem, das unter anderem in [19, S.8] nachzulesen ist.

Theorem 5.3.9 (Kompakte, homöomorphe Flächen haben die gleiche Euler-Charakteristik). *Seien $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ zwei kompakte, reguläre Flächen. Sind S_1 und S_2 homöomorph zueinander, dann haben sie die gleiche Euler-Charakteristik d.h. es gilt $\chi(S_1) = \chi(S_2)$.*

Beweis. Sei $f : S_1 \rightarrow S_2$ ein Homöomorphismus und seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Triangulierungen von S_1 bzw. S_2 mit den homöomorphen Abbildungen $\psi_1 : |\mathcal{T}_1| \rightarrow S_1$ und $\psi_2 : |\mathcal{T}_2| \rightarrow S_2$, wobei $|\mathcal{T}_j| = \bigcup_{i=1}^n T_i^j$ ($j = 1, 2$). Die Abbildung $f \circ \psi_1 : |\mathcal{T}_1| \rightarrow S_2$ ist als Verkettung homöomorpher Funktionen wiederum homöomorph und somit ist \mathcal{T}_1 auch eine Triangulierung von S_2 . Daher gilt für die Euler-Charakteristik

$$\chi(S_1) = \chi(\mathcal{T}_1) = \chi(S_2).$$

□

Bemerkung. Im Allgemeinen gilt auch die Umkehrung von Theorem 5.3.9, nämlich: Haben zwei kompakte, reguläre Flächen S_1, S_2 dieselbe Euler-Charakteristik, gilt also $\chi(S_1) = \chi(S_2)$, dann sind die beiden Flächen zueinander homöomorph. Für den Beweis der Rückrichtung wird jedoch sehr viel mehr Hintergrundwissen über Triangulierungen benötigt, weshalb wir hier nur die Idee diskutieren. Für einen ausführlichen Beweis verweisen wir die Leserinnen und Leser auf [24, §8.4-8.6, S.172f] bzw. [8, §6.1-6.3, S.78f].

Die Idee hinter dem Beweis ist grundsätzlich folgende: Salopp gesprochen, lässt sich jede Triangulierung auf eine äquivalente Normalform \mathcal{C} bringen, welche eine Mindestzahl an Dreiecken, Kanten und Ecken hat und für die außerdem $\chi(\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{C})$ gilt. Seien nun S_1, S_2 zwei kompakte, reguläre Flächen mit Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$, die nun die gleiche Euler-Charakteristik $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ haben. Die Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ der Flächen sind äquivalent zu den Triangulierungen in Normalform $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$. Da die beiden Triangulierungen in Normalform dieselbe Eulercharakteristik haben, folgt, dass sie ident sein müssen, d.h. $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}_2|$. Es gibt also für die Flächen homöomorphe Abbildungen $\psi_1 : |\mathcal{C}_1| \rightarrow S_1$ und $\psi_2 : |\mathcal{C}_2| \rightarrow S_2$. Die Funktion $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : S_1 \rightarrow S_2$ ist ein Homöomorphismus zwischen den beiden Flächen und somit sind S_1 und S_2 homöomorph zueinander.

Beispiel 5.3.10 (Sphäre und Torus sind nicht diffeomorph). In Beispiel 5.3.3 haben wir die Euler-Charakteristik der Sphäre berechnet mit $\chi(S^2) = 2$ und in Beispiel 5.3.5 jene des Torus mit $\chi(T) = 0$. Offensichtlich ist $\chi(S^2) \neq \chi(T)$ und wir können sofort schlussfolgern, dass es keinen Homöomorphismus und somit auch keinen Diffeomorphismus zwischen Sphäre und Torus gibt.

Tatsächlich ist die Anzahl der kompakten, regulären Flächen des \mathbb{R}^3 , die nicht diffeomorph zueinander sind, überschaubar. Die nicht-diffeomorphen, kompakten Flächen unterscheiden sich durch die Anzahl von Löchern, die sie aufweisen. So hat die Sphäre gar kein Loch, der Torus eines, der Doppeltorus zwei, usw. Indem wir g Tori aneinanderhängen schaffen wir eine neue kompakte Fläche mit g Löchern, siehe Abbildung 5.23. Wir spezifizieren das in folgendem Korollar.

Korollar 5.3.11 (Die Euler-Charakteristik von Tori). *Sei T_g ein Torus mit g Löchern ($g \in \mathbb{N}_0$). Die Euler-Charakteristik der kompakten Fläche T_g ist*

$$\chi(T_g) = 2 - 2g.$$

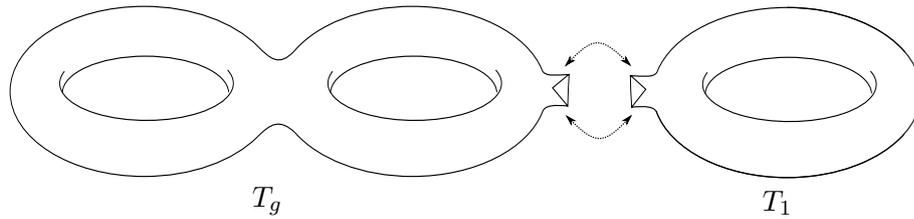
Beweis. Wir führen den Beweis induktiv nach g . Dazu überprüfen wir im Induktionsanfang zunächst die Aussage $g = 0$, also für die Sphäre. Die Formel stimmt, da

$$\chi(S^2) = 2 = \chi(T_0).$$

Als nächstes betrachten wir den Torus T_1 . Aus Beispiel 5.3.5 haben wir für die Euler-Charakteristik berechnet, dass

$$\chi(T_1) = 0 = 2 - 2 \cdot 1,$$

also stimmt die Formel ebenfalls für $g = 1$. Um die Aussage für T_{g+1} zu beweisen, „kleben“ wir einen Torus T_1 an T_g . Das Verkleben machen wir folgendermaßen: wir entfernen ein

Abbildung 5.23: Konstruktion von T_{g+1}

Dreieck aus T_g und T_1 und verbinden hier die zugehörigen Kanten. Wir bezeichnen mit e_g, k_g, f_g die Anzahl der Ecken, Kanten und Dreiecke in der Triangulierung für T_g und mit e_1, k_1, f_1 jene von T_1 . Dann gilt für $e_{g+1}, k_{g+1}, f_{g+1}$ von T_{g+1}

$$\begin{aligned} e_{g+1} &= e_g + e_1 - 3, \\ k_{g+1} &= k_g + k_1 - 3, \\ f_{g+1} &= f_g - 1 + f_1 - 1 = f_g + f_1 - 2. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Ecken e_{g+1} ist die gerade Summe der Ecken von T_g und T_1 , bis auf das Dreieck an dem T_g und T_1 verklebt sind. Um die Doppelzählung zu vermeiden, bekommen wir für die Eckenanzahl von T_{g+1} , dass $e_{g+1} = e_g + e_1 - 3$ gilt. Die selbe Überlegung führt zur Anzahl der Kanten für T_{g+1} . Die Anzahl der Dreiecke von T_{g+1} ergibt sich daraus, dass die „herausgeschnittenen“ Dreiecke aus T_g und T_1 nicht mehr Teil der Triangulierung von T_{g+1} sind. Wir führen den Induktionsschritt $g \rightarrow (g+1)$ durch. Es gilt für die Euler-Charakteristik von T_{g+1}

$$\begin{aligned} \chi(T_{g+1}) &= e_{g+1} - k_{g+1} + f_{g+1} = (e_g + e_1 - 3) - (k_g + k_1 - 3) + (f_g + f_1 - 2) \\ &= e_g - k_g + f_g + e_1 - k_1 + f_1 - 2 = \chi(T_g) + \chi(T_1) - 2 = 2 - 2g + 0 - 2 \\ &= 2 - 2(g+1), \end{aligned}$$

was die Formel für $(g+1)$ zeigt. □

Bemerkung (Klassifikation von Flächen). Wie wir festgestellt haben, sind kompakte, reguläre Flächen mit selber Euler-Charakteristik homöomorph zueinander. Vom topologischen Standpunkt aus, können wir sie somit als gleich betrachten. In Korollar 5.3.11 haben wir außerdem noch herausgefunden, wie diese kompakten Flächen genau auszusehen haben, nämlich als aneinandergereihte Tori. Dies erlaubt nun eine Klassifikation von kompakten, regulären Flächen im \mathbb{R}^3 , da es bis auf Homöomorphie, keine anderen kompakten Flächen mehr geben kann. Wir können also die Topologie jeder kompakten, orientierbaren Fläche des \mathbb{R}^3 explizit beschreiben bzw. auf einen Torus mit g Löchern zurückführen.

Werfen wir außerdem nochmals einen genaueren Blick auf die Euler-Charakteristiken kompakter Flächen. Die einzig positive Euler-Charakteristik besitzt die Sphäre mit $\chi(S^2) = 2$. Setzen wir das mit dem Satz von Gauß-Bonnet in Verbindung, so erhalten wir, dass die Totalkrümmung von S^2 positiv sein muss. Im Gegensatz dazu, erhalten wir für kompakte, reguläre Flächen mit $g \geq 2$ immer einen negativen Wert für ihre Totalkrümmung.

Kurzzusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Diplomarbeit ist es Studentinnen und Studenten der Mathematik ohne einschlägiges Vorwissen aus der Differentialgeometrie zum Satz von Gauß-Bonnet zu führen. Der Satz von Gauß-Bonnet sagt im Grunde aus, dass die integrierte Gaußkrümmung, welche als Totalkrümmung bezeichnet wird, einer Fläche gleich bleibt, wenn man die Fläche durch stetige Verformungen verändert. Die Totalkrümmung ist somit eine topologische Invariante und lässt dadurch im Weiteren eine Klassifizierung von Flächen zu.

Um zu diesem Resultat zu kommen beginnen wir, nach einer kurzen Einleitung, in Kapitel 2 zunächst bei Kurven. Wir klären grundlegende Eigenschaften und erweitern unser Wissen über Kurven schließlich mit globalen Aussagen, auf die wir im Schlusskapitel wieder zurückgreifen werden.

Das Objekt, das wir vorrangig in dieser Arbeit studieren, sind zweidimensionale Flächen im dreidimensionalen Raum. In Kapitel 3 klären wir dazu den Begriff der regulären Fläche und werden Funktionen, die ihren Werte- und Definitionsbereich auf regulären Flächen haben auf Differenzierbarkeit untersuchen. In diesem Zuge stoßen wir auf den Begriff der Tangentialebene und sind in der Lage ein Differential von Funktionen zwischen regulären Flächen zu definieren. Außerdem führen wir die erste und im nächsten Kapitel die zweite Fundamentalform ein, welche essentiell sind um „geometrische Messungen“ auf regulären Flächen durchführen zu können.

In Kapitel 4 kommen wir zum zentralen Begriff der Differentialgeometrie, dem der Krümmung. Wir lernen verschiedene Krümmungsbegriffe kennen, und den insbesondere für diese Arbeit so wichtigen Begriff der Gaußkrümmung. Das fünfte und letzte Kapitel der Arbeit widmet sich ganz dem Satz von Gauß-Bonnet. Dabei gehen zwei lokale Versionen des Satzes, dem globalen Resultat voraus. Am Ende des Kapitels sind wir schließlich in der Lage eine Klassifizierung von kompakten Flächen zu geben.

Literaturverzeichnis

- [1] C. Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, 2. Auflage. Berlin: Walter De Gruyter, 2010.
- [2] M. P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, 3. Auflage. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1993.
- [3] P. Doyle und D. Moran, „A Short Proof that Compact 2-Manifolds Can Be Triangulated“, *Inventiones math.* **5**, S. 160-162, 1968.
- [4] G. Fischer, *Lineare Algebra*, 18. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2014.
- [5] O. Forster, *Analysis 1*, 9. Auflage. Wiesbaden: Vieweg, 2008.
- [6] O. Forster, *Analysis 2*, 8. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.
- [7] O. Forster, *Analysis 3*, 8. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2017.
- [8] J. Gallier und D. Xu, *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. Berlin/Heidelberg: Springer, 2013.
- [9] J. Gruber, *Elementare Flächentheorie*, Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik, Universität Wien, 2013.
- [10] M. Gubisch, *Differenzialgeometrie*, Vorlesungsskript, gehalten von M. Geißert, Universität Konstanz, 2009.
- [11] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis Teil 1*, 15. Auflage. Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: Teubner, 2003.
- [12] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, 13. Auflage. Wiesbaden: Teubner, 2004.
- [13] K. Jänich, *Lineare Algebra*, 10. Auflage. Berlin/Heidelberg: Springer, 2004.
- [14] K. Jänich, *Topologie*, 8. Auflage. Berlin/ Heidelberg: Springer, 2004.
- [15] K. Jänich, *Vektoranalysis*, 5. Auflage. Berlin/Heidelberg: Springer, 2005.
- [16] W. Kühnel, *Differentialgeometrie, Kurven-Flächen-Mannigfaltigkeiten*, 4. Auflage. Wiesbaden: Vieweg, 2008.
- [17] R. Lasser und F. Hofmaier, *Analysis 1+2*. Berlin/Heidelberg: Springer, 2012.
- [18] E. Ossa, *Topologie*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1992.
- [19] D. Platt, *Seminarvortrag über die Euler-Charakteristik einer Fläche*, Seminar, betreut von C. Stadtmüller, Humboldt-Universität zu Berlin, 2013.
- [20] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, 2. Auflage. London: Springer, 2010.
- [21] H. Reckziegel, M. Kriener und K. Pawel, *Elementare Differentialgeometrie mit Maple*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1998.

- [22] K. Tapp, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Switzerland: Springer, 2016.
- [23] J. R. Weeks, *The Shape of Space*, 2. Auflage. New York/Basel: Marcel Dekker, 2002.
- [24] M. Yan, *Introduction to Topology*. Berlin/Boston: Higher Education Press und Walter de Gruyter, 2016.