



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Klangspektren – Ein Zugang zur Fourieranalyse im Schulunterricht

verfasst von / submitted by

Johannes Jaksch

angestrebter akademischer Grad /

in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 412 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Physik
UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. Monika Dörfler, Privatdoz.



Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation.....	3
1.1 Danksagung	4
2 Hintergrundwissen zur Fourieranalyse für die Lehrperson	5
2.1 Harmonische Töne und Klänge	5
2.2 Sinus- und Kosinus-Anteil eines Tons	8
2.3 Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	10
2.4 Die Schnelle Fourier-Transformation (FFT)	16
2.5 Die Naive Fourier-Transformation (NFT)	17
2.6 Nyquist-Shannon-Abtasttheorem und Aliasing	23
3. Unterrichtssequenz zur Diskreten Fourieranalyse	27
3.1 Allgemeine Ziele der Unterrichtssequenz	27
3.2 Setting und Vorbereitung	27
3.3 Erste Einheit (100 Minuten Physik).....	29
3.4 Zweite Einheit (100 Minuten Mathematik).....	42
3.5 Dritte Einheit (100 Minuten Mathematik).....	56
4 Schlussworte	65
4.1 Zusammenfassung	65
4.2 Abstract	65
5 Quellenverzeichnis	66
5.1 Literaturverzeichnis.....	66
5.2 Internetquellen	67
5.3 Abbildungsverzeichnis	68
6 Anhang	69

1 Einleitung und Motivation

*„Musik ist die versteckte mathematische Tätigkeit der Seele,
die sich nicht dessen bewusst ist, dass sie rechnet.“¹*

Die erste Berührung mit der Fourieranalyse hatte ich in meinem zweiten Studiensemester, als wir in einem Laborversuch den Klang eines Instrumentes analysierten. Auf Knopfdruck wurde aus einem Druck-Zeit-Diagramm ein Klangspektrum mit klaren Peaks in regelmäßigen Abständen und unterschiedlichen Höhen. Die Funktion dieses Knopfes *Fourier-Analyse* war damals nur ein Mittel zum Zweck, dennoch faszinierte mich die Tatsache, dass sich selbst etwas derart Komplexes und Flüchtliges wie ein Klang durch die Mittel der Physik und der Mathematik erfassen und entschlüsseln lässt. Zwar ist diese Begeisterung mit der Zeit wieder in den Hintergrund getreten – nicht zuletzt, weil mir das Wissen darum fehlte, was es genau mit dieser Art der Datenanalyse auf sich hat – entzündete sich aber immer wieder bei weiteren Berührungspunkten im Studium. Nun, gegen Ende meiner Studienlaufbahn möchte ich die Gelegenheit nutzen, das notwendige Wissen in eine Form zu bringen, sodass diese Begeisterung, die ich erfahren habe, auch einem breiteren Publikum zuteilwerden kann. In der folgenden Arbeit befasse ich mich daher mit der Aufgabe, die Diskrete Fourieranalyse mit Mitteln der höheren Schulmathematik zu beschreiben und der AHS-Oberstufe zugänglich zu machen. Da dieses Thema im Lehrplan aber nicht abgedeckt ist und im Regelunterricht in den meisten Fällen die benötigte Zeit dafür fehlt, richtet sich mein Unterrichtskonzept an ein Mathematik-Physik-Labor, wie es in manchen allgemeinbildenden höheren Schulen angeboten wird. Aufgrund des geringeren physikalischen Anteils lässt sich die Sequenz auch in einem reinen Mathematik-Wahlpflichtfach durchführen. Vorgesehen sind dafür drei Einheiten zu je 100 Minuten.

¹Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

1.1 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meiner Betreuerin, Frau Mag. Dr. Monika Dörfler, bedanken, die mir viele Freiheiten beim Verfassen der Diplomarbeit gelassen hat, sodass ich meine Vorstellungen und Interessen verwirklichen und entsprechende Schwerpunkte setzen konnte. Durch kritische Fragen ihrerseits und spannende Diskussionen mit ihr konnte sie meinen Blick auf für mich bis dahin unbedachte Aspekte der Signalanalyse lenken und meine Begeisterung für dieses Fachgebiet der Mathematik entfachen.

Ferner gilt mein Dank meinen Freunden, Studienkolleginnen und Studienkollegen, die mich teilweise schon seit der frühen Schulzeit begleiten und die mich auch abseits des Studiums unterstützen. Durch unzählige anregende Diskussionen, auch zu Themen in ihren Studien- und Berufsfeldern, habe ich ihnen zu verdanken, dass ich mir ein breites Interesse aneignen und bewahren konnte.

Der größte Dank gebührt meiner Familie, meinen Eltern und meinen Schwestern, die mir immer Rückhalt geben und mich in schwierigen Phasen des Studiums unterstützt und motiviert haben, die mich aber auch immer wieder im positiven Sinne ablenken, wenn ich mich festgefahren habe. Außerdem danke ich meinen Eltern dafür, dass sie mir eine musikalische Ausbildung ermöglicht haben und so den Grundstein meiner Begeisterung für die Musik gelegt haben. Ganz besonders danke ich auch meiner großen Schwester, Viktoria, die viele meiner Arbeiten, so auch diese Zeilen, unentgeltlich in unzähligen Stunden korrekturgelesen hat und mit ihren Anmerkungen wesentlich zum Leseverständnis, auch für Fachfremde, beigetragen hat.

Ein letzter Dank gilt der Musik, die für mich in allen Lebenssituationen aufs Erstaunlichste immer die richtige Melodie bereithält.

2 Hintergrundwissen zur Fourieranalyse für die Lehrperson

In diesem Teil der Arbeit geht es darum, einige Fragen, die während der Unterrichtssequenz auftreten könnten, im Vorhinein für die Lehrperson zu klären und ein umfangreicheres Hintergrundwissen zu schaffen. Dazu wird ein tieferer Einblick in die Entstehung harmonischer Töne und Klänge sowie in den Algorithmus der Diskreten Fourier-Transformation geboten.

2.1 Harmonische Töne und Klänge

Bei jeder Tonerzeugung sind Kräfte im Spiel, die schließlich dafür verantwortlich sind, dass die Luft aus ihrem Gleichgewicht gebracht wird und in Schwingung versetzt wird. Bei einer Stimmgabel ist es die Kraft, die zur Deformierung der Zinken benötigt wird, bei einer Saite die Kraft, die zur Auslenkung der selbigen notwendig ist, und bei einer Luftsäule die Kraft, die dazu führt, dass die Luft lokal verdichtet wird. Gemäß dem zweiten Newton'schen Axiom können wir diese Kräfte in der Form

$$F = m \cdot a \quad (2.1.1)$$

anschreiben. All diesen Kräften entgegen wirkt eine Kraft, die dafür sorgt, dass das Gleichgewicht wieder hergestellt wird. Wir können diese als rückstellende Kraft bezeichnen. Sie ist gegen die ‚Störkraft‘ gerichtet und nimmt linear zur Auslenkung x zu. Im einfachsten Fall, wie z. B. im Fall der deformierten Stimmgabel, lässt sich die rückstellende Kraft in ihrer gewohnten Form

$$F_r = -k \cdot x \quad (2.1.2)$$

anschreiben (Hooke'sches Gesetz). Dabei ist k die Federkonstante, also eine Konstante, die vom Material, der Größe und der Form der Stimmgabel abhängig ist, und x die Auslenkung der Stimmgabelspitze. Aber auch in den komplizierteren Fällen, bei der ausgelenkten Saite und der komprimierten Luft, treten in ähnlicher, wenn auch etwas komplexererweise, rückstellende Kräfte auf. Auch diese Kräfte haben entsprechend dem zweiten Newton'schen Gesetz eine Beschleunigung zur

Folge, welche im Fall der Stimmgabel die Spitze des ausgelenkten Zinkens wieder in Richtung der Ruheposition beschleunigt.

$$m \cdot a = -k \cdot x \quad (2.1.3)$$

Ähnlich wie bei einem Federpendel ist nun aber in dieser Position die Geschwindigkeit maximal, sodass der Zinken hier nicht stoppt, sondern übers Ziel hinausschießt und auf die gegenüberliegende Seite ausschlägt. Beschreibt man nun die Beschleunigung als zweite Ableitung des Weges bzw. der Auslenkung nach der Zeit t , erhalten wir folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x \quad (2.1.4)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist also eine Funktion, die proportional zu ihrer zweiten Ableitung ist. Außerdem wissen wir, dass $-(k/m)$ eine negative Zahl ist. Als Lösungen kommen daher Sinus- und Kosinus-Funktionen in Frage, denn es gilt:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin(\omega t) = -\omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.1.5)$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) = -\omega^2 \cos(\omega t), \quad (2.1.6)$$

wobei die Kreisfrequenz ω der Sinus- bzw. Kosinus-Funktion ist. Des Weiteren kann man feststellen, dass der Proportionalitätsfaktor (k/m) dem Quadrat dieser Schwingungsfrequenz entspricht und somit

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (2.1.7)$$

gilt². Außerdem gilt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad (2.1.8)$$

wobei T die Periodendauer und ν die Frequenz in Hertz ist. Somit kann mit den Gleichungen (2.1.7) und (2.1.8) folgender Zusammenhang zwischen den

²vgl. Steiglitz 1996, S.2ff

physikalischen Eigenschaften der Stimmgabel und ihrer Eigenfrequenz f hergestellt werden:

$$\nu = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} \quad (2.1.9)$$

Die sinusförmige Gestalt der Darstellung eines Tons lässt sich somit durch physikalische Gesetze und mathematische Werkzeuge recht einfach erklären.

In der Musik wird der Begriff *Ton* oft dazu verwendet, eine einzelne vertonte Note zu beschreiben. Im Sinne der Akustik handelt es sich dabei aber um einen Klang, also das ‚Zusammenklingen‘ mehrerer Töne, nämlich des angespielten Grundtons und mehrerer, für jedes Instrument typischer, mitschwingender Obertöne. Wenn im Folgenden von einem (reinen) Ton die Rede ist, dann ist damit eine einzelne sinusförmige Schwingung gemeint. Ein Ton lässt sich mathematisch demnach wie folgt darstellen:

$$f_v(t) = a_v \sin(2\pi\nu t + \varphi) \text{ , bzw. } f_v(t) = a_v \cos(2\pi\nu t + \varphi) \quad (2.1.10)$$

Dabei beschreibt f_v die periodische Luftdruckschwankung mit der Frequenz ν und der Phasenverschiebung φ . Die mathematische und physiologische Bedeutung der Phasenverschiebung wird im folgenden Kapitel 2.2 näher erläutert. Von einem Klang sprechen wir in der Akustik erst, wenn mehrere Töne gemeinsam erklingen. Physikalisch betrachtet läuft das auf eine Überlagerung mehrerer periodischer Luftdruckschwankungen zu einem komplexeren Muster hinaus. Dieses entsteht durch positive und negative Interferenzen. Mathematisch lässt sich dieses Muster als Summe der einzelnen sinusförmigen Schwingungen beschreiben. Eine derartige Summe nennen wir im Folgenden ‚Klang-Funktion‘ $f(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + \\ & b_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + b_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Der Graph dieser Funktion hat nicht mehr die typische Sinusgestalt, sondern stellt ein periodisches Muster an Tälern und Gipfeln dar.

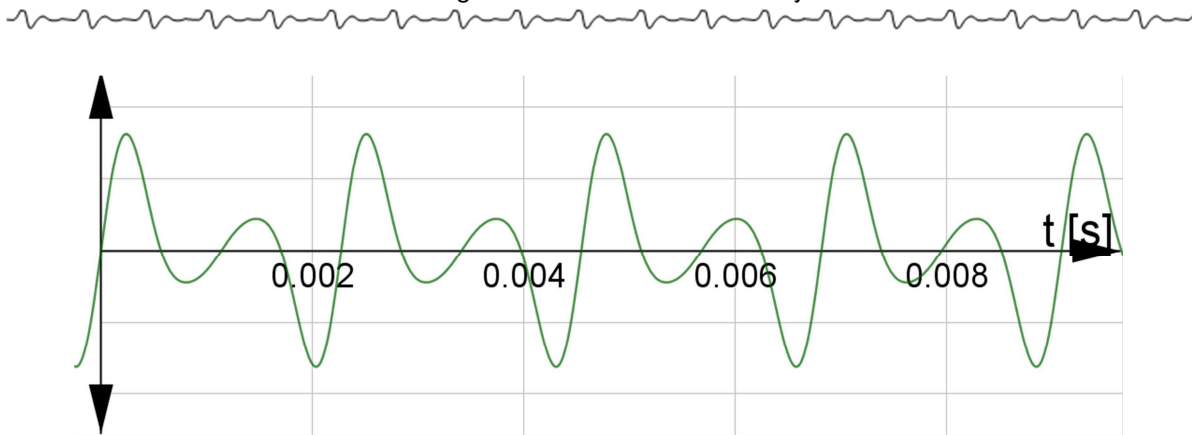


Abbildung 1: Graphische Darstellung der Klang-Funktion

$$f(t) = 0,4 \cdot \sin(2\pi t \cdot 440) + \sin(2\pi t \cdot 880) + 0,4 \cdot \sin(2\pi t \cdot 1320) + 0,1 \cdot \sin(2\pi t \cdot 1760)$$

2.2 Sinus- und Kosinus-Anteil eines Tons

Ein harmonischer Ton wird oft als sinusförmige Schwingung beschrieben. Dabei darf nicht vergessen werden, dass auch der Kosinus sinusförmig ist, denn die beiden Funktionen unterscheiden sich voneinander lediglich durch einen Phasenunterschied von $\pi/2$. Möchte man den Ton mit der Frequenz ν synthetisch erzeugen, ist es daher egal, ob man die Kosinus-Funktion

$$f_c = \cos(2\pi \nu t) \quad (2.2.1)$$

oder die Sinus-Funktion

$$f_s = \sin(2\pi \nu t) \quad (2.2.2)$$

in ein Audiosignal umwandelt. Theoretisch könnte man mit einem Messgerät einzig im Moment des Erklings feststellen, ob der Ton mit der maximalen Auslenkung startet (Kosinus-Funktion) oder ‚aus dem Nichts‘ anschwillt (Sinus-Funktion). Praktisch wird auch das nicht möglich sein, da sich der Luftdruck kontinuierlich und nicht sprunghaft ändert. Für den Menschen ist diese Zeitspanne, welche die beiden Funktionen voneinander unterscheidet und nur ein Viertel der Periodendauer anhält, nicht nur praktisch, sondern auch theoretisch zu kurz, um auszumachen, wie der Ton anfängt. Beim tiefsten für den Menschen wahrnehmbaren Ton (16 Hz) beträgt diese Zeitspanne nur rund 16 Tausendstel einer Sekunde. Verpasst man diesen Moment, ist es unmöglich zu sagen, ob man das Audiosignal der Sinus- oder der Kosinus-

Funktion hört. Auch bei einer Messung haben wir ein ähnliches Problem. Da wir das ‚Messfenster‘ in die Mitte eines langanhaltenden Tons setzten, haben wir im Allgemeinen keine Information über die Phasenlage des Tons zu einem bestimmten Zeitpunkt, insbesondere nicht zum Beginn der Messung, den wir üblicherweise mit t_0 bezeichnen. Somit weist unser aufgenommener Ton eine unbekannte Phasenverschiebung φ auf.

$$f_c = \cos(2\pi\nu t + \varphi), \text{ bzw. } f_s = \sin(2\pi\nu t + \psi),$$

$$\text{wobei } \psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \quad (2.2.3)$$

Will man nun aber einen Ton oder einen Klang mit mathematischen Mitteln und nicht bloß mit dem Gehör analysieren, muss man die Tatsache berücksichtigen, dass ein Ton nicht in einer reinen Sinus-Form bzw. einer reinen Kosinus-Form vorliegt, er also eine Phasenverschiebung aufweist. Wenn man daher die Intensität a_ν des Tons mit der Frequenz ν , bestimmen möchte, muss man zunächst davon ausgehen, dass er in seiner allgemeinsten Form

$$f_\nu = a_\nu \cos(2\pi\nu t + \varphi) = a_\nu \sin\left(2\pi\nu t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (2.2.4)$$

vorliegt. Wir können den Ton dann mit Hilfe der Summensätze als Summe eines Sinus-Anteils und eines Kosinus-Anteils darstellen. Es spielt dabei keine Rolle, ob wir von der Kosinus-Darstellung, wie das unten gemacht wurde, oder von der Sinus-Darstellung ausgehen.

$$a_\nu \cos(2\pi\nu t + \varphi) = a_\nu \cos(2\pi\nu t) \cos(\varphi) - a_\nu \sin(2\pi\nu t) \sin(\varphi) =$$

$$a_\nu \cos(\varphi) [\cos(2\pi\nu t)] - a_\nu \sin(\varphi) [\sin(2\pi\nu t)] \quad (2.2.5)$$

Der Faktor $a_\nu \cos(\varphi)$ entspricht dann der Intensität des Kosinus-Anteils. Würde man nun fälschlicherweise davon ausgehen, dass ein bestimmter Ton nur als Sinus-Funktion vorliegt, würde man bei der Analyse eine Intensität von $a_\nu \sin(\varphi)$ erhalten. Diese ist aber um den Faktor $\sin(\varphi)$ zu klein. Da wir φ nicht kennen, können wir somit auch keine brauchbare Aussage über die tatsächliche Intensität a_ν treffen. Besonders problematisch ist es dann, wenn die Phasenverschiebung φ fast null ist.

Man würde dann den Eindruck erhalten, dass diese Frequenz in unserem Spektrum kaum auftaucht, obwohl ihr Kosinus-Anteil möglicherweise sehr groß ist, nämlich dann, wenn auch a_v groß ist. Um dieses Problem der unbekannten Phasenverschiebung in den Griff zu bekommen, bedarf es eines einfachen Tricks. Man bestimmt die Intensitäten beider Anteile, quadriert sie und zieht aus der Summe die Wurzel.

$$\sqrt{(a_v \cos(\varphi))^2 + (a_v \sin(\varphi))^2} = a_v \sqrt{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2} = a_v \quad (2.2.6)$$

Bei der naiven Form der Fourier-Transformation, die im Unterricht eingesetzt wird und in Kapitel 2.5 eingehender behandelt wird, kommt dieser Trick ebenfalls zum Einsatz, da dort einzeln nach Sinus- und Kosinus-Anteilen gesucht wird. Die eigentliche Diskrete Fourier-Transformation (DFT) macht sich aber einen anderen Trick zu nutze. Da hier mit komplexen Exponentialfunktionen gearbeitet wird, die beide Anteile in einer Funktion kombinieren, ist das spätere Zusammenfassen der Intensitäten nicht mehr notwendig. Die naive Form hat aber den Vorteil, dass sie ohne komplexe Zahlen und ohne Exponentialfunktionen auskommt und intuitiver, wenn auch etwas rechenaufwendiger als die DFT ist. Die beiden Transformationen hängen über die Euler'sche Formel aber untrennbar zusammen:

$$\cos(2\pi vt) + i \sin(2\pi vt) = e^{i2\pi vt} \quad (2.2.7)$$

Ein Ton kann somit als Überlagerung eines Kosinus-Anteils und eines komplexen Sinus-Anteils dargestellt werden. Die Intensität eines realen Tons entspricht dann dem Betrag dieser komplexen Zahl. Alternativ können wir den Ton aber auch als komplexe Exponentialfunktion auffassen.

2.3 Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Wenn man nun einen Klang aufnimmt, der sich aus endlich vielen Sinus- und Kosinus-Tönen mit unterschiedlichen Intensitäten zusammensetzt, erhält man bei digitalen Aufnahmeverfahren nur diskrete Punkte, die den Verlauf der Klangkurve andeuten, wie in Abbildung 2 dargestellt. Wir wollen hier generell voraussetzen, dass

je zwei aufeinanderfolgende dieser (sagen wir) N Punkte – meist wählt man N von der Gestalt 2^n – einen (konstanten) zeitlichen Abstand T_s zueinander aufweisen. Den Kehrwert r_s dieses Abstands nennen wir Samplingrate $r_s = \frac{1}{T_s}$, sie beschreibt also die Anzahl der Messpunkte pro Sekunde. Die Samplingrate kann dabei wesentlich höher sein als die Anzahl an Messpunkten. Gemessen wird dann eben nur für einen Bruchteil einer Sekunde. Messdauer T_M , Samplingrate r_s und Umfang N des Samples hängen daher wie folgt zusammen:

$$T_M = \frac{N}{r_s} = NT_s \quad (2.3.1)$$

An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass streng genommen auch die Messwerte, quantisiert sind und nicht beliebige reelle Werte aufweisen können, da uns schließlich nur ein Computer mit endlich viel Speicherplatz zur Verfügung steht. Diese Tatsache wollen wir hier aber außer Acht lassen und uns auf die Diskretisierung der Zeitdimension beschränken.

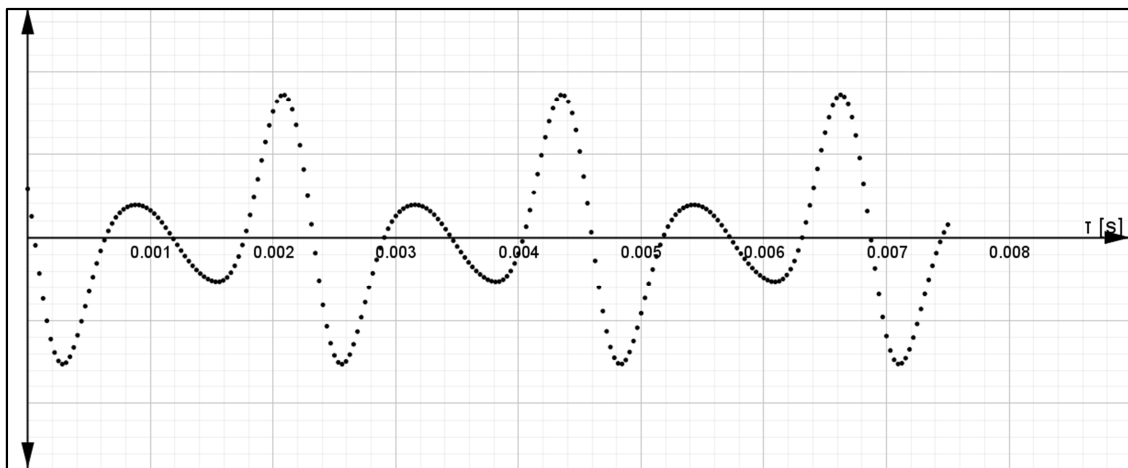


Abbildung 2: Darstellung des diskreten Messsignals eines Klangs mit Grundton 440 Hz und Obertönen;

Samplingrate 32 kHz; Umfang des Samples: $N = 256$

Bei einer Messung mit N Messpunkten können wir grundsätzlich auch nach N beteiligten Frequenzen Ausschau halten. Entsprechend unserer Messparameter haben diese die Gestalt $k/(N \cdot T_s)$, wobei $k = 0, 1, 2, \dots, N-2, N-1$. Für $k = 1$ erhalten wir die Frequenz der Grundschwingung im Fourier-Bild, deren Periodendauer dann $N \cdot T_s = T_M$ beträgt. Die Messdauer legt also die Dauer dieser

‚Fourier-Grundschiwingung‘ fest. Bei einer Messung mit 2048 Messpunkten und einer Samplingrate $r_s = 48 \text{ kHz}$, spricht $T_s \approx 2,0833 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, hat die Fourier-Grundschiwingung somit eine Frequenz von 23,4375 Hz. Die Frequenzen der ‚Fourier-Oberschiwingungen‘ sind dann ganzzahlige Vielfache der Frequenz der Grundschiwingung. Das Messsignal x lässt sich dann im Fourier-Bild als Summe dieser Schwiwingungen darstellen.

$$x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\tau k 2\pi / (N \cdot T_s)} \quad (2.3.2)$$

Der Ausdruck $x(\tau)$ beschreibt dann die Signalstärke (Elongation) zum Zeitpunkt der t -ten Messung, also zum Zeitpunkt $\tau = t \cdot T_s$. Somit lässt sich diese Summe noch etwas vereinfachen:

$$x(\tau) = x(t \cdot T_s) = x_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{itk 2\pi / N} \quad (2.3.3)$$

X_k beschreibt dabei den Anteil der Schwiwingung mit der Frequenz k am Messsignal x . Der Messwert (Abweichung vom Normaldruck) x_t lässt sich also darstellen als Summe der Elongationen der einzelnen Fourier-Schiwingungen zu diesem Zeitpunkt. Der Faktor $\frac{1}{N}$ vor der Summe ist notwendig, damit bei der Transformation später kein entsprechender Faktor auftritt³.

Die obige Formel (2.3.3) wird Inverse Fourier-Transformation genannt, weil sie aus einem Klang mit bekannten Tönen und bekannten Intensitäten das entsprechende Sample erzeugt. Nun wollen wir aber umgekehrt aus einem Sample eines unbekannten Klangs die Intensitäten einzelner Töne auslesen, also die eigentliche Fourier-Transformation vollziehen. Dazu macht man sich die Tatsache zu Nutze, dass das innere Produkt des Messwertevektors x mit den entsprechenden normierten Elongationen eines bestimmten Tons dessen Intensität liefert. Also

³vgl. Steiglitz 1996, S.152

$$X_k = \langle x, e^{itk2\pi/N} \rangle = \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-itk2\pi/N} \quad (2.3.4)$$

Das negative Vorzeichen ist der Tatsache geschuldet, dass beim Bilden des inneren Produkts mit dem komplex konjugierten Vektor multipliziert werden muss⁴. Dass die Gleichung (2.3.4) stimmt, lässt sich mit ein paar Tricks rasch beweisen. Nimmt man zunächst die rechte Seite der Gleichung und setzt für x_t die Inverse Fourier-Transformation ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$\sum_{t=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{itm2\pi/N} e^{-itk2\pi/N} \quad (2.3.5)$$

Nach Umordnen der Summe und Zusammenfassen der Exponenten erhält man⁵

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m \sum_{t=0}^{N-1} e^{it(m-k)2\pi/N} \quad (2.3.6)$$

Formt man den Exponenten weiter um, kann man erkennen, dass man die innere Summe als endliche geometrische Summe auffassen kann.

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m \sum_{t=0}^{N-1} (e^{i(m-k)2\pi/N})^t \quad (2.3.7)$$

Für $m = k$ ist

$$e^{i(m-k)2\pi/N} = e^0 = 1 \quad (2.3.8)$$

und somit auch

$$(e^{i(m-k)2\pi/N})^t = 1^t = 1 \quad (2.3.9)$$

Für $m \neq k$ gilt aber

⁴vgl. Steiglitz 1996, S.152

⁵vgl. <https://www.eit.hs-karlsruhe.de/>

$$e^{i(m-k)2\pi/N} \neq 1 \quad (2.3.10)$$

und man kann die Summenformel für die endliche geometrische Reihe anwenden:

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (2.3.11)$$

In unserem Fall ist

$$q = e^{i(m-k)2\pi/N}, \quad m \neq k \quad (2.3.12)$$

und

$$n = N - 1 \quad (2.3.13)$$

Daher folgt⁶

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{N-1} \left(e^{\frac{i(m-k)2\pi}{N}} \right)^t &= \frac{\left(e^{\frac{i(m-k)2\pi}{N}} \right)^{N-1+1} - 1}{e^{\frac{i(m-k)2\pi}{N}} - 1} = \\ &= \frac{\left(e^{\frac{i(m-k)2\pi}{N}} \right)^N - 1}{e^{\frac{i(m-k)2\pi}{N}} - 1} = \frac{e^{i(m-k)2\pi} - 1}{e^{\frac{i(m-k)2\pi}{N}} - 1} \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Da $m - k \in \mathbb{Z}$ wird der erste Term im Zähler 1 und somit der gesamte Zähler 0, somit ist die endliche geometrische Summe 0⁷. Das bedeutet, nur wenn $m = k$, erhalten wir $X_m \cdot 1 = X_k \cdot 1$, sonst $X_m \cdot 0 = 0$.

Nebenbei bemerkt haben wir mit (2.3.8) bis (2.3.14) gezeigt, dass diese komplexen Exponentialfunktionen eine Orthonormalbasis bilden, da sie eben die Bedingungen

⁶vgl. <https://www.dsprelated.com/>

⁷vgl. <https://math.stackexchange.com/>

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} e^{itk2\pi/N}, \frac{1}{\sqrt{N}} e^{itm2\pi/N} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} e^{itk2\pi/N} e^{-itm2\pi/N} = 0, \quad (2.3.15)$$

für $k, m = 0, 1, \dots, N-1$ und $k \neq m$

(Orthogonalität) und

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ik2\pi t/N} \right\| = 1, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

wobei $\left\| \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ik2\pi t/N} \right\| = \left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ik2\pi t/N}, \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ik2\pi t/N} \right\rangle^{1/2}$ (2.3.16)

(Normiertheit) erfüllen⁸.

Wir können nun den Term (2.3.7) stark vereinfachen:

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m \sum_{t=0}^{N-1} (e^{i(m-k)2\pi/N})^t = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_k \quad (2.3.17)$$

Diese Summe, die nun nicht mehr von m abhängt, kann man schließlich noch berechnen:

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_k = \frac{1}{N} \cdot X_k \cdot N = X_k \quad (2.3.18)$$

□

Mit der Gleichung (2.3.4) kann man somit zunächst für beliebige Frequenzen $k \in \mathbb{Z}$ bestimmen, wie groß ihr Anteil am Sample und damit am aufgenommenen Klang ist. Schließlich will man aber ein Spektrum erstellen, also die Intensitäten von N Tönen bestimmen. Dazu wären aber sehr viele Berechnungen notwendig. Alleine für eine Frequenz benötigt man bereits $2N$ Multiplikationen (für jeden der N Summanden wird der entsprechende reale Messwert jeweils mit dem Realteil und dem Imaginärteil der Testfrequenz zu dem entsprechenden Zeitpunkt multipliziert). Dazu kämen noch $N-1$ Additionen, die aber aufgrund des geringeren Rechenaufwands vernachlässigt werden können. Für ein Sample mit N Messpunkten ergeben sich somit $2N^2$ Multiplikationen⁹.

⁸vgl. Liesen/ Mehrmann 2011 S. 158f

⁹vgl. Steiglitz 1996, S.155f

2.4 Die Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Die Schnelle Fourier-Transformation, im Englischen ‚Fast Fourier Transformation‘ genannt und daher auch FFT abgekürzt, ist ein Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten der Diskreten Fourier-Transformation. Er kommt mit weit weniger Rechenschritten aus als die ‚straight-forward‘-Methode und arbeitet daher wesentlich schneller. In diesem Abschnitt wird dieser Algorithmus kurz umrissen. In der Unterrichtssequenz werden die Koeffizienten aber mit einer weniger effizienten, dafür aber etwas anschaulicheren Methode bestimmt. Bei einem einfachen Klangspektrum sind außerdem nicht so viele Berechnungen notwendig wie bei anderen Verfahren, bei denen die DFT verwendet wird. Eine ineffiziente Berechnung eines Spektrums in einem Tabellenkalkulationsprogramm ist daher mit heutigen PCs problemlos durchführbar.

Die FFT macht sich zu Nutze, dass durch geschicktes Umsortieren und Zusammenfassen der Summanden der DFT Rechenoperationen mehrfach vorkommen, die dann aber nur einmal durchgeführt werden müssen. Im ersten Schritt des Algorithmus werden die Summanden der DFT in zwei Summen aufgespalten. Zuerst werden alle Summanden mit geradem Index aufsummiert, danach jene mit ungeradem Index.

$$X_k = \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-itk2\pi/N} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} e^{-i2mk2\pi/N} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} e^{-i(2m+1)k2\pi/N} \quad (2.4.1)$$

Aus der Summe der Summanden mit ungeraden Indizes kann noch herausgehoben werden, sodass man folgenden Ausdruck erhält:

$$X_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} e^{-i4mk\pi/N} + e^{-ik2\pi/N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} e^{-i4mk\pi/N} \quad (2.4.2)$$

Für ein einzelnes X_k hat man nun aber noch keinen Rechenaufwand eingespart, da sich die Anzahl der Multiplikationen nicht geändert hat. Wir haben jetzt $2 \cdot \frac{2N}{2}$ und somit wieder $2N$ Multiplikationen. Der entscheidende Schritt ist nun, dass wir schließlich alle X_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$ berechnen wollen. Für die ersten $N/2 - 1$

verwenden wir die obige Formel, aber für alle $k \geq N/2$ können wir k durch $k - N/2$ ersetzen.

$$X_{k-\frac{N}{2}} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} e^{-i2m(k-\frac{N}{2})2\pi/N} + e^{-i(k-\frac{N}{2})2\pi/N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} e^{-i2m(k-\frac{N}{2})2\pi/N} \quad (2.4.3)$$

Formen wir diesen Ausdruck um, erhalten wir für $X_{k-\frac{N}{2}}$ einen sehr ähnlichen Ausdruck wie für X_k .

$$\begin{aligned} X_{k-\frac{N}{2}} &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} e^{-i2m(k-\frac{N}{2})2\pi/N} + e^{-i(k-\frac{N}{2})2\pi/N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} e^{-i2m(k-\frac{N}{2})2\pi/N} \\ &= \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} e^{-\frac{i4mk\pi}{N}} e^{i2m\pi} + e^{-ik2\pi/N} e^{i\pi} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} e^{-\frac{i4mk\pi}{N}} e^{i2m\pi} = \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m} e^{-\frac{i4mk\pi}{N}} - e^{-ik2\pi/N} \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2m+1} e^{-\frac{i4mk\pi}{N}} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Die beiden Summen stimmen mit jenen von X_k überein und müssen daher nicht neu berechnet werden. Einzig das Vorzeichen zwischen den Summen hat sich geändert, sodass im Allgemeinen $X_k \neq X_{k-\frac{N}{2}}$ gilt. Wir haben somit die Anzahl der Rechenoperationen praktisch halbiert, da für die X_k mit $k = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1$ bereits der Großteil des Rechenaufwands erledigt ist. Die FFT endet aber nicht hier, sondern setzt diese ‚Fast-Halbierung‘ durch sukzessives Aufspalten der Summanden fort. Lässt sich die Anzahl der Messwerte N als Zweierpotenz $N = 2^n$ darstellen, so kann der obige Schritt n -mal vollzogen werden. Die Anzahl der Rechenoperationen liegt dann im Größenbereich $N \log(N)$, was für große N wesentlich kleiner als N^2 ist und somit einen weitaus geringeren Rechenaufwand darstellt¹⁰.

2.5 Die Naive Fourier-Transformation (NFT)

In der Unterrichtssequenz wird nicht der formale, sondern ein etwas intuitiver, dafür ein wenig aufwendigerer Zugang zur Fourieranalyse gewählt. Daher nennen wir

¹⁰vgl. Steiglitz 1996, S.162f

diese Form im Folgenden die Naive Fourier-Transformation (NFT). Ähnlich wie die FFT ist sie nur ein Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten und keine eigenständige Transformation. Sie hat aber nicht den Zweck, Rechenzeit einzusparen, sondern vielmehr einen anschaulicheren Einstieg in die Fourier-Transformation zu ermöglichen. Für reelle Messwerte besteht folgender Zusammenhang zwischen DFT und NFT, wie später gezeigt wird:

$$|X_k| = N_k \quad (2.5.1)$$

Dabei ist X_k das Ergebnis der Diskreten Fourier-Transformation und N_k das Ergebnis der Naiven Fourier-Transformation. Zunächst betrachten wir aber eine Vorstufe, die allerdings schon alle wesentlichen Merkmale der NFT aufweist. Im Unterricht kann mit dieser Vorstufe schon ein aussagekräftiges Spektrum erstellt werden.

$$N_v = \sqrt{\left(\sum_{t=0}^{N-1} x_t \cos\left(\frac{2\pi vt}{r_s}\right)\right)^2 + \left(\sum_{t=0}^{N-1} x_t \sin\left(\frac{2\pi vt}{r_s}\right)\right)^2} \quad (2.5.2)$$

Dabei ist x_t der t -te Messwert (Unterschied zum Normaldruck). Die Zeit, die bis zu diesem Zeitpunkt vergangen ist, beträgt $\tau_t = t \cdot T_s = t/r_s$ Sekunden. Daher können wir statt x_t auch $x(t/r_s)$ schreiben. Auf den ersten Blick wirkt diese Transformation möglicherweise komplizierter als die DFT, allerdings wird sie in mehreren Schritten aufgebaut, von denen jeder einzelne auf höherem Schulmathematikniveau nachvollziehbar sein sollte, da weder komplexe Zahlen noch Exponentialfunktionen benötigt werden. Wir werden die NFT daher von innen nach außen aufbauen und uns vergewissern, dass sie dieselben Resultate wie die DFT für reelle Signale liefert. Betrachten wir zunächst folgenden Ausdruck:

$$c(v) = \sum_{t=0}^{N-1} x_t \cos\left(\frac{2\pi vt}{r_s}\right) \quad (2.5.3)$$

Dieser Term gibt an, wie groß der Anteil der Frequenz v Hz, genauer gesagt der Kosinus-Anteil der Frequenz v Hz, am aufgenommenen Klang ist. Leicht

veranschaulichen lässt sich das, wenn man annimmt, dass man einen Ton mit beispielsweise 20 Hz gesampelt hat. Also

$$x_{c_t} = x_c\left(\frac{t}{r_s}\right) = \cos\left(\frac{2\pi 20t}{r_s}\right) \quad (2.5.4)$$

Die obige Summe (2.5.3) besteht dann für $\nu = 20$ nur aus positiven Summanden und weist folgende Gestalt auf:

$$\cos^2\left(\frac{2\pi 20t}{r_s}\right) \quad (2.5.5)$$

Graphisch kann man sich leicht überzeugen, dass die Summe also dann maximal ist, wenn die Testfrequenz ν genau der Frequenz des aufgenommenen Klangs entspricht. Bei anderen Testfrequenzen treten auch negative Summanden auf, die Summe bleibt daher im Allgemeinen klein. Die unten dargestellte Graphik zeigt die erste Stufe der NFT. Für ein künstlich erzeugtes Sample liegt der Peak an der zu erwartenden Stelle.

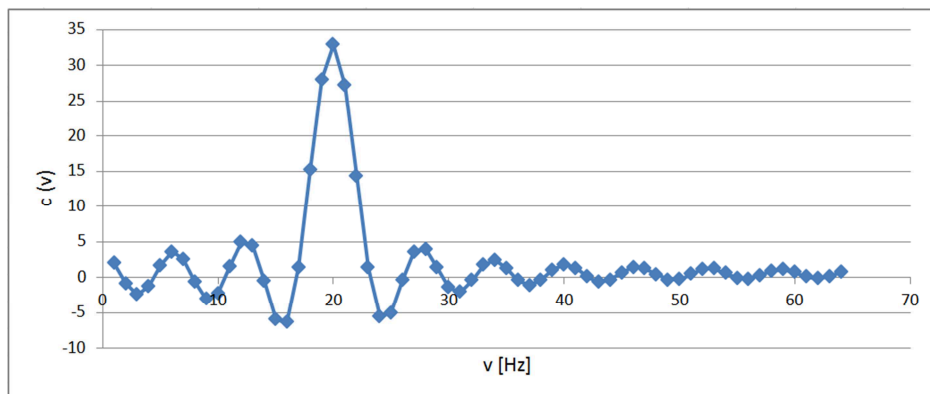


Abbildung 3: $c(\nu)$ -Analyse des künstlichen Samples x_{c_t} , aufgetragen gegen die Testfrequenzen $\nu \in \mathbb{N}$;

Samplingrate 400 Hz, Umfang des Samples $N = 64$

Liegt der Ton aber im Sample in seiner Sinus-Form vor, also

$$x_{s_t} = x_s\left(\frac{t}{r_s}\right) = \sin\left(\frac{2\pi 20t}{r_s}\right), \quad (2.5.6)$$

liefert die Funktion $c(\nu)$ ein unbefriedigendes Ergebnis:

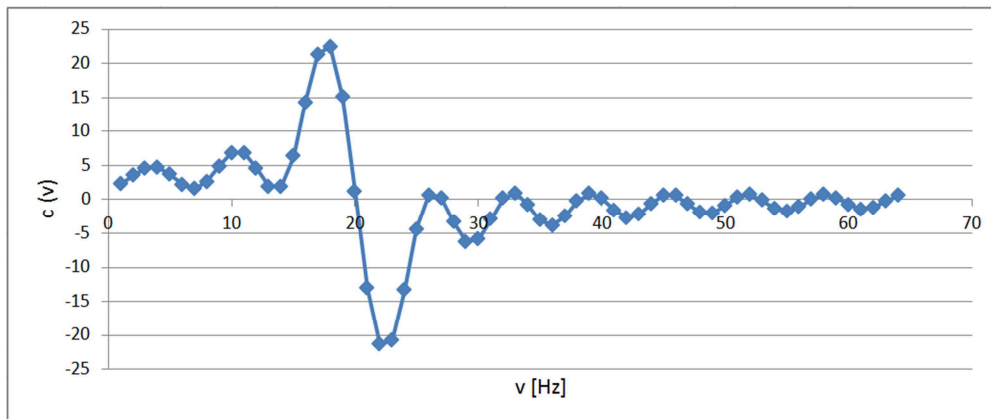


Abbildung 4: $c(v)$ -Analyse des künstlichen Samples x_{st} , aufgetragen gegen die Testfrequenzen $v \in \mathbb{N}$;
Samplingrate 400 Hz, Umfang des Samples $N = 64$

Sieht man sich aber stattdessen die Funktion

$$s(v) = \sum_{t=0}^{N-1} x_t \sin\left(\frac{2\pi vt}{r_s}\right) \quad (2.5.7)$$

an, die durch ähnliche Überlegungen wie $c(v)$ aufgestellt werden kann, erhält man wieder ein sehr ähnliches Ergebnis, wie die untere Abbildung zeigt.

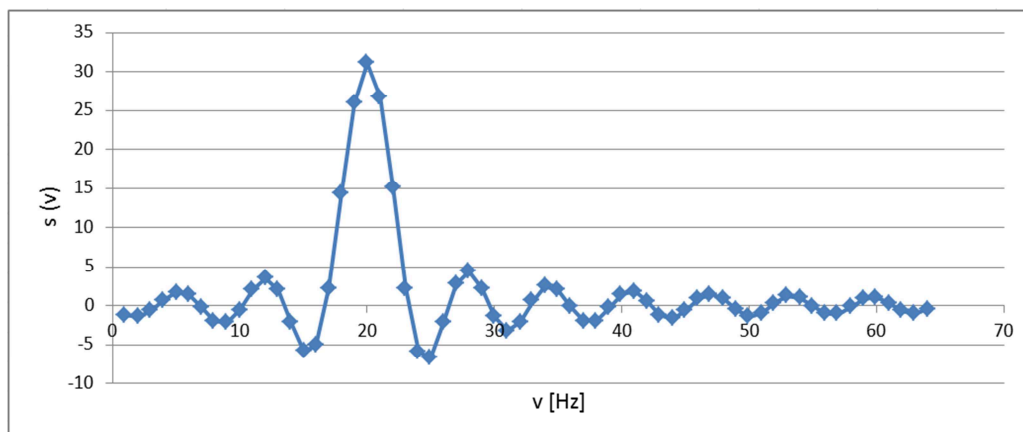


Abbildung 5: $s(v)$ -Analyse des künstlichen Samples x_{st} , aufgetragen gegen die Testfrequenzen $v \in \mathbb{N}$;
Samplingrate 400 Hz, Umfang des Samples $N = 64$

Wie bereits in Kapitel 2.2 besprochen, kann man aber bei einem realen Sample im Vorhinein nicht feststellen, zu welchen Teilen eine bestimmte Frequenz in Kosinus-, bzw. in Sinus-Form vorliegt. Daher muss man eine Funktion finden, die $c(v)$ und $s(v)$ kombiniert und entsprechend normiert. Wie sich herausstellt, haben wir diese

Funktion mit (2.5.2) schon gefunden. In etwas anderer Form angeschrieben lautet sie:

$$N_v = \sqrt{c(v)^2 + s(v)^2} \quad (2.5.8)$$

Wendet man diese Funktion N_v nun an einem realen Sample an, liefert sie schon ein recht brauchbares Spektrum, das einem DFT-Spektrum schon in den wesentlichen Merkmalen gleicht.

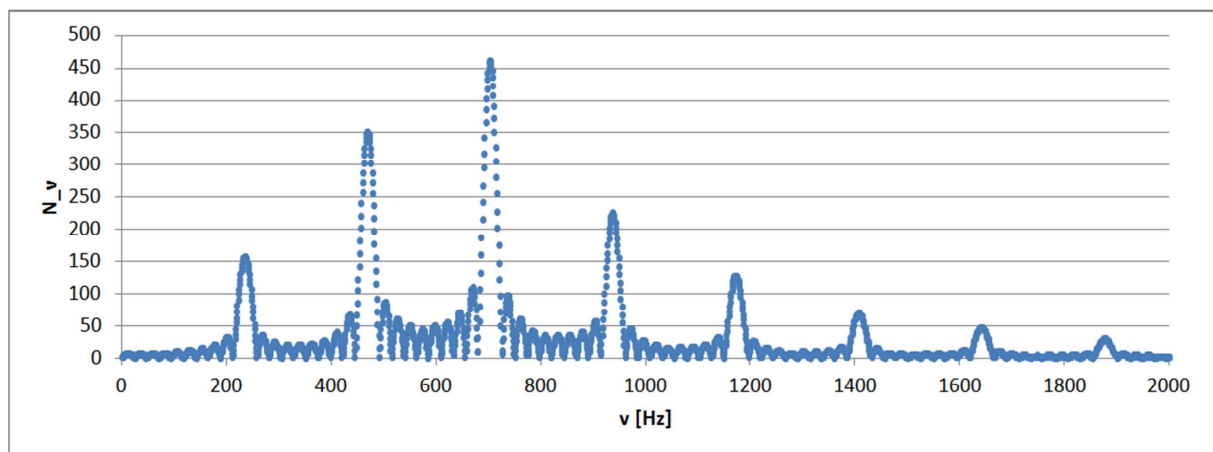


Abbildung 6: N_v -Analyse eines realen Samples, aufgetragen gegen die Testfrequenzen $v \in \mathbb{N}$;
Samplingrate 48 kHz, Umfang des Samples $N = 2048$

Was jetzt noch auffällt, sind die merkwürdigen Zwischenpeaks. Bei genauerer Betrachtung bemerkt man, dass alle Peaks eine Breite von r_s/N haben, bis auf die Hauptpeaks, die eine Breite von $2r_s/N$ aufweisen. Das bedeutet, dass die Funktionswerte an den Stellen $k \cdot \frac{r_s}{N}$, $k \in \mathbb{N}$ nahe bei null liegen, mit Ausnahme jener Stellen, die bei den Hauptpeaks liegen; dort weisen sie ein lokales Maximum auf. Wählt man nun also als Testfrequenzen v nicht willkürlich die natürlichen Zahlen, sondern Frequenzen der Art $k \cdot \frac{r_s}{N}$, $k \in \mathbb{N}$, wie in Kapitel 2.3 beschrieben, erhält man ein Spektrum, das außer bei den tatsächlichen Peaks sehr flach ist.

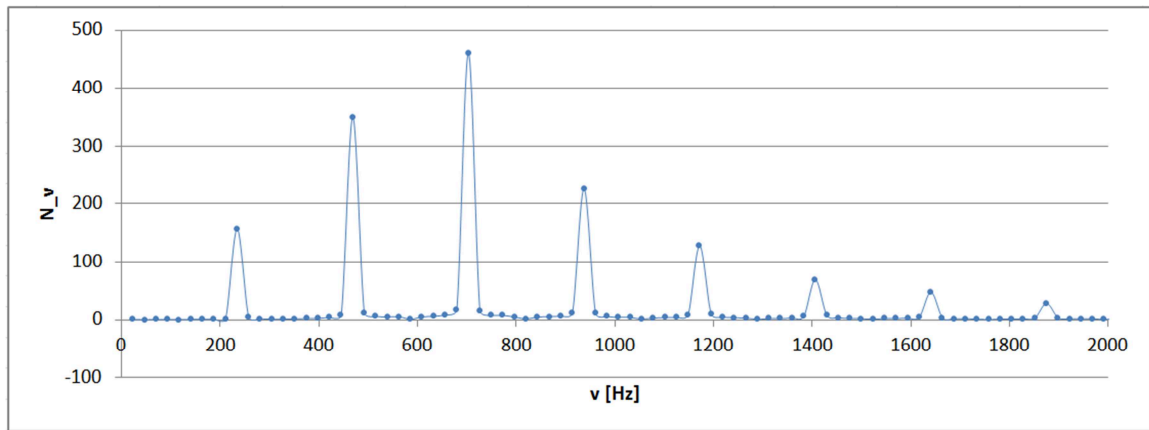


Abbildung 7: N_v -Analyse eines realen Samples, aufgetragen gegen die Testfrequenzen $v_k = k \cdot \frac{r_s}{N}$, $k \in \mathbb{N}$; Samplingrate 48 kHz, Umfang des Samples $N = 2048$

Setzt man nun für die neuen Frequenzen $v_k = k \cdot \frac{r_s}{N}$, $k \in \mathbb{N}$ in die ursprüngliche Formel (2.5.2) bzw. (2.5.8) ein, ist der Zusammenhang mit der DFT schon deutlicher zu erkennen.

$$\begin{aligned}
 N_{v_k = k \cdot \frac{r_s}{N}} &= \sqrt{\left(\sum_{t=0}^{N-1} x_t \cos\left(\frac{2\pi k \frac{r_s}{N} t}{r_s}\right) \right)^2 + \left(\sum_{t=0}^{N-1} x_t \sin\left(\frac{2\pi k \frac{r_s}{N} t}{r_s}\right) \right)^2} \\
 &= \\
 &= \sqrt{\left(\sum_{t=0}^{N-1} x_t \cos\left(\frac{tk2\pi}{N}\right) \right)^2 + \left(\sum_{t=0}^{N-1} x_t \sin\left(\frac{tk2\pi}{N}\right) \right)^2} =: N_k \quad (2.5.9)
 \end{aligned}$$

Bildet man nun den Betrag der DFT, erhält man die NFT:

$$\begin{aligned}
 |X_k| &= \left| \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-\frac{itk2\pi}{N}} \right| = \left| \sum_{t=0}^{N-1} x_t \left[\cos\left(\frac{tk2\pi}{N}\right) - i \sin\left(\frac{tk2\pi}{N}\right) \right] \right| = \\
 &= \left| \sum_{t=0}^{N-1} x_t \cos\left(\frac{tk2\pi}{N}\right) + (-i) \sum_{t=0}^{N-1} x_t \sin\left(\frac{tk2\pi}{N}\right) \right| =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\sum_{t=0}^{N-1} x_t \cos\left(\frac{2\pi kt}{N}\right)\right)^2 + \left((-i) \sum_{t=0}^{N-1} x_t \sin\left(\frac{2\pi kt}{N}\right)\right)^2} = \\
&= \sqrt{\left(\sum_{t=0}^{N-1} x_t \cos\left(\frac{2\pi kt}{N}\right)\right)^2 + \left(\sum_{t=0}^{N-1} x_t \sin\left(\frac{2\pi kt}{N}\right)\right)^2} = N_k \quad (2.5.10)
\end{aligned}$$

□

2.6 Nyquist-Shannon-Abtasttheorem und Aliasing

Mit einem entsprechenden Programm könnten wir nun die Diskrete Fourier-Transformation, die formal einer Matrixmultiplikation entspricht, programmieren und so die Intensitäten für ein ganzes Spektrum an Tönen bestimmen. Bevor das aber tatsächlich durchführbar ist, müssen noch Überlegungen darüber angestellt werden, welche Frequenzen man in einem Sample überhaupt suchen und finden kann. Rein intuitiv scheint schon klar zu sein, dass bei einer zu geringen Abtastrate nicht genug Messpunkte vorhanden sein werden, um qualitative Aussagen über sehr hochfrequente Töne treffen zu können. Die Samplingrate und die höchste Frequenz eines Klangs müssen also in einem bestimmten Verhältnis stehen. Nach dem Nyquist-Shannon-Abtasttheorem (auch Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon-Theorem, benannt nach seinen vier unabhängigen Autoren¹¹) kann ein Ton dann eindeutig rekonstruiert werden, wenn die Samplingrate mindestens doppelt so groß ist, wie seine Frequenz¹². Um den Kammerton a mit 440 Hz eindeutig zu sampeln, bedarf es daher mindestens einer Abtastrate von 880 Hz. Der Mensch nimmt Frequenzen bis rund 20 kHz wahr¹³, weshalb eine Samplingrate von mindestens 40 kHz notwendig ist, um Klänge so aufzuzeichnen, dass sie verlustfrei wieder rekonstruiert werden können. Tatsächlich wird bei vielen Medien, wie zum Beispiel der Audio-CD, eine Abtastrate von 44,1 kHz verwendet¹⁴. Der Schluss, dass ein

¹¹vgl. Dokuchaev 2016, S.1

¹²vgl. Shannon 1948, S.627f

¹³vgl. Schweizer 2012, S.8

¹⁴vgl. Bharitkar/Kyriakakis, S.22

Sample mit einer Samplingrate von 40 kHz nur Frequenzen bis 20 kHz beinhaltet, ist nicht zulässig. Betrachtet man beispielsweise das in Abbildung 8 dargestellte Sample, das mit einer Samplingrate von 48 kHz aufgenommen wurde, wäre man schnell dazu verleitet, zu sagen, dass die Frequenz des aufgenommenen Tons 6 kHz betragen haben muss.

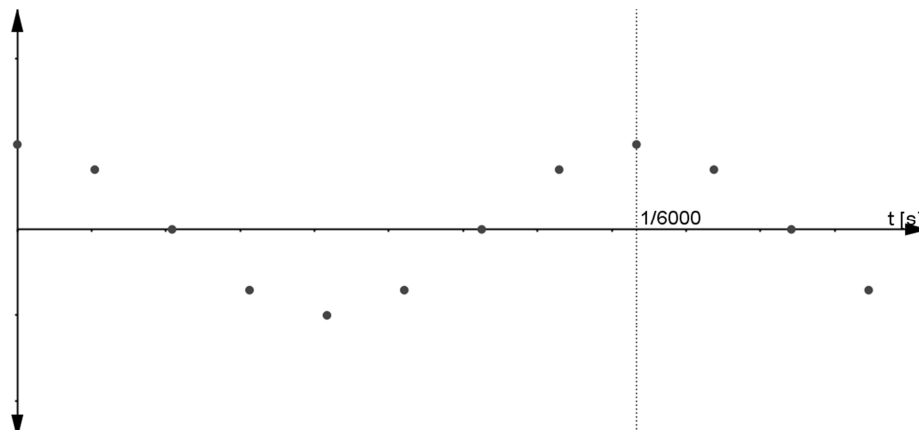


Abbildung 8: Scheinbarer 6 kHz Ton, aufgenommen mit einer Samplingrate von 48 kHz

Auch die Fourieranalyse würde bei dieser Frequenz einen scharfen Peak zeigen. Allerdings wäre auch bei 42 kHz ein ebenso hoher Peak zu erkennen und das berechtigterweise, wie Abbildung 9 zeigt. Bei dem gesampelten Ton könnte es sich nämlich ebenso um den hochfrequenten Ton mit 42 kHz handeln, der bei dieser verhältnismäßig zu geringen Samplingrate dasselbe Sample wie der Ton mit 6 kHz liefert. Es ist daher im Nachhinein unmöglich, mit Gewissheit zu sagen, welcher Ton diesen Peak verursacht hat, wenn sonst keine Informationen über das Sample vorliegen.

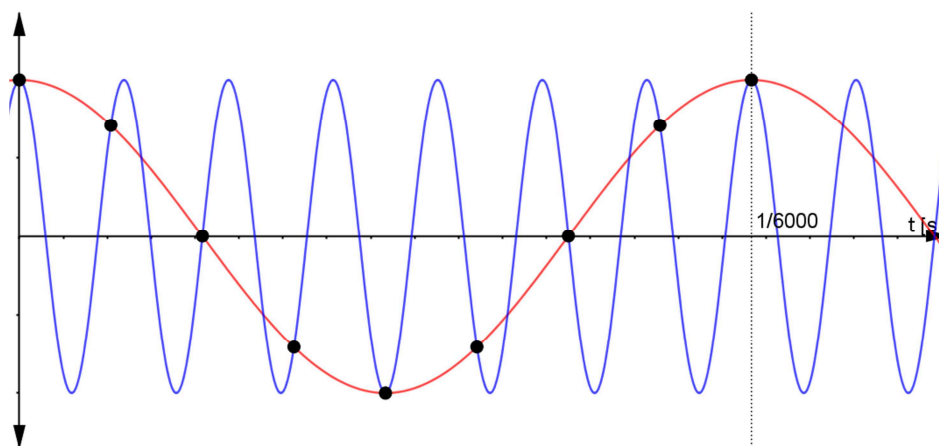


Abbildung 9: 6-kHz-Ton und 42-kHz-Ton liefern bei einer Samplingrate von 48 kHz identische Samples

Frequenzen, die bei einer bestimmten Samplingrate dasselbe Sample erzeugen, werden Aliases genannt. Zu jedem Ton mit der Frequenz ν lassen sich unendlich viele Aliases mit den Frequenzen $\pm\nu \pm kr_s$, $k \in \mathbb{Z}$ finden, die bei der Samplingrate r_s dasselbe Sample liefern. Im Spektrum können Aliases folglich später nicht mehr voneinander unterschieden werden. Im folgenden Beweis wird nur für den Kosinus-Anteil des Samples gezeigt, dass Töne dieser Gestalt dasselbe Sample liefern. Für den Sinus-Anteil gelten analoge Überlegungen, nur wird dann anstatt des Kosinus-Summensatzes der Sinus-Summensatz verwendet. Die Messwerte x_t , $t = 1, 2, \dots, N-1$ des Tons mit der Frequenz $\pm\nu \pm kr_s$ können wie folgt dargestellt werden:

$$x_t = \cos\left(\frac{2\pi t(\pm\nu \pm kr_s)}{r_s}\right) \quad (2.6.1)$$

wobei $1/r_s$ die Zeit ist, die zwischen zwei Messungen liegt. Wendet man den zweiten Summensatz an, lässt sich die obige Darstellung aufspalten:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi t(\pm\nu \pm kr_s)}{r_s}\right) &= \\ &= \cos\left(\pm\frac{2\pi t\nu}{r_s}\right)\cos(\pm 2\pi tk) - \sin\left(\pm\frac{2\pi t\nu}{r_s}\right)\sin(\pm 2\pi tk) \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Da $k \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{N}$ gilt $\cos(-2\pi tk) = \cos(2\pi tk) = 1$ und $\sin(\pm 2\pi tk) = 0$. Daher bleibt nur noch der erste Kosinus-Term übrig. Somit gilt:

$$x_t = \cos\left(\frac{2\pi t(\pm\nu \pm kr_s)}{r_s}\right) = \cos\left(\pm\frac{2\pi t\nu}{r_s}\right) \quad (2.6.3)$$

□

Für das Spektrum der Fourieranalyse bedeutet das, dass alle Peaks im Intervall $[0, N/2]$ an der $N/2$ -Hz-Horizontalen und an der 0-Hz-Horizontalen gespiegelt erscheinen. Für die Spiegelbilder gilt dies ebenfalls, sodass man diese Geraden als parallele Spiegel auffassen kann, die das Muster zwischen 0 und $N/2$ unendlich fortsetzen.

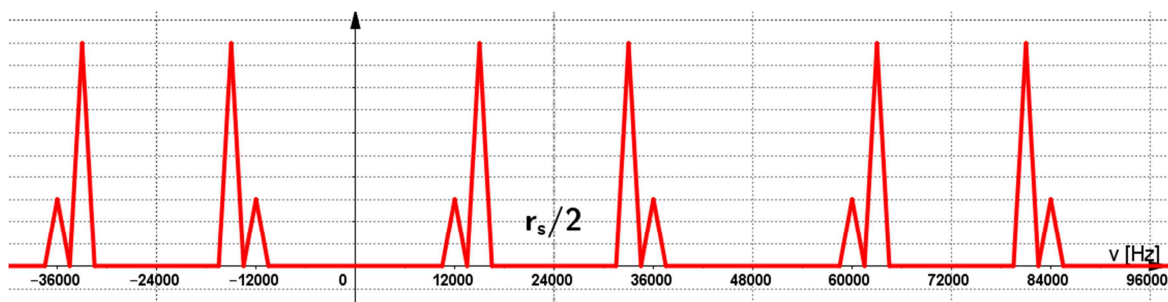


Abbildung 10: Aliasing bei einer Samplingrate von 48 kHz

Daher ist es auch nur sinnvoll, Frequenzen von $v = 0$ bis $v = r_s/2$ zu plotten, da in diesem Intervall schon die gesamte Information der Fourieranalyse steckt, auch wenn man nicht mit Sicherheit sagen kann, welcher der Peaks tatsächlich dem realen Ton entspricht. Der kleinere Peak, der in der obigen Graphik bei 12 kHz erscheint, könnte bei der Aufnahme demnach auch durch einen nicht hörbaren Ultraschallton mit 60 kHz, 84 kHz usw. verursacht worden sein. Auch möglich wäre ein Auftürmen mehrerer Töne mit entsprechenden Frequenzen zu einem Peak. In der Regel wird aber eine Samplingrate von 44,1 kHz genügen, da bei einer Aufnahme selten damit zu rechnen ist, dass Ultraschalltöne mitschwingen, die dann als hörbare Aliases im Spektrum auftauchen. Will man aber auf Nummer sicher gehen, muss man eine höhere Samplingrate wählen.

3. Unterrichtssequenz zur Diskreten Fourieranalyse

3.1 Allgemeine Ziele der Unterrichtssequenz

- Die Schülerinnen und Schüler erhalten Einblicke in die höhere Mathematik.
- Sie erleben Mathematik als angewandte Wissenschaft, die über ihren Selbstzweck hinausgeht und Sachverhalte aus Natur, Gesellschaft und Technik beschreiben und Probleme lösen kann.
- Die Schüler und Schülerinnen erkennen Mathematik als einen Prozess, der ausgehend von Bekanntem Neues schafft. Sie sind in der Lage, mit Vorwissen und geleiteten Überlegungen komplexe neue Welten zu erschließen.
- Sie werfen einen Blick hinter die Kulissen der computergestützten Messdatenanalyse und können diese im Detail nachvollziehen.
- Sie erleben Freude daran, ihr Wissen an neuen Herausforderungen anzuwenden und zu vermehren.

3.2 Setting und Vorbereitung

Die Unterrichtssequenz ist in erster Linie für einen Unterricht in einer AHS-Oberstufe (Realgymnasium) konzipiert, der über den Regelmathematikunterricht hinausgeht. Das ideale Setting wäre ein Mathematik-Physik-Labor, in dem Mathematik- und Physikeinheiten beliebig kombiniert werden können. Im besten Fall kann der Inhalt in drei aufeinanderfolgenden Wochen behandelt werden. In der ersten Woche wird in einer Doppelstunde (100 Minuten) Physik die Diskrete Fourier-Transformation motiviert und in der zweiten und dritten Woche jeweils in einer Doppelstunde Mathematik der theoretische Aspekt erarbeitet. Da für die Durchführung der Sequenz ein Tabellenkalkulationsprogramm notwendig ist, wäre es von Vorteil, wenn die Klasse über Laptops verfügt. Alternativ können die zweite und dritte Einheit auch in einem EDV-Saal durchgeführt werden. Außerdem wäre es günstig, wenn die Mathematiklehrkraft und die Physiklehrkraft dieselbe Person sind. Eine Zusammenarbeit mit einer Kollegin oder einem Kollegen ist selbstverständlich möglich, wenn vor und während der Durchführung die Koordination gut funktioniert. Die Einheiten sind zwar so geplant, dass sie jeweils abgeschlossen sind, dennoch läuft nicht immer alles nach Plan, sodass einzelne Aspekte vorgegriffen werden können oder in der folgenden Einheit nachgeholt werden müssen.

Diese Vorgaben sind freilich sehr speziell und werden sich nicht an jedem Standort vorfinden lassen. Alternativ kann das Projekt daher auch in einem reinen Mathematik-Wahlpflichtfach durchgeführt werden, wie es an vielen allgemeinbildenden höheren Schulen angeboten wird. Da die erste Einheit aber eher als Physikeinheit konzipiert ist, wäre es wichtig, dass die Lehrperson auch ein grundlegendes Wissen über Schallquellen, Klangentstehung bei unterschiedlichen Instrumenten und Schallausbreitung besitzt. Zu diesem Zweck findet sich unter dem Punkt 2.1 das nötige physikalische Hintergrundwissen. Für die Durchführung der ersten Einheit sind zwar physikalische Gerätschaften, wie ein Oszilloskop, nicht zwingend notwendig, wenn aber die Möglichkeit besteht, diese aus der Physiksammlung auszuborgen, wäre das zu empfehlen. Das Projekt soll schließlich den Anwendungscharakter von Mathematik unterstützen und glaubhaft vermitteln. Eine Sequenz, die komplett auf den physikalischen Aspekt verzichtet, könnte diesem Anspruch schwer gerecht werden. Ein Vorteil dieser Mathematik-Wahlpflicht-Variante wäre, dass das Projekt auch Gymnasiumschülerinnen und -schülern zugänglich werden würde. Allgemein sind bei einem solchen, doch komplexeren und speziellen Thema auch die Interessensgebiete, Stärken und Schwächen der Klasse zu berücksichtigen. Zu Interessen, die bei der Erarbeitung dieses Themas sicherlich von Vorteil sind, gehören Musik, Tontechnik oder Informatik.

Eine dritte Variante wäre die Durchführung im Regelunterricht. Diese ist aber sicherlich organisatorisch die schwierigste, da hier einige Faktoren mitspielen müssen. Die größte Schwierigkeit liegt wohl im zeitlichen Rahmen, der für dieses Projekt anberaumt ist. Außerdem muss eine Zusammenarbeit mit der Mathematik- bzw. Physiklehrkraft möglich sein, in dem Sinn, dass beide zur selben Zeit die Möglichkeit haben, dieses Thema in ihrem Unterricht unterzubringen. Ist das Interesse dazu da, aber die Zeit etwas knapp, kann sicherlich auch eine komprimierte Version der folgenden Unterrichtssequenz durchgeführt werden. Auch ein fächerübergreifender Unterricht mit Informatik wäre denkbar. Hier würden dann aber eher der Algorithmusaspekt und der Programmieraspekt in den Vordergrund rücken. Schließlich sei noch gesagt, dass die Sequenz auch in adaptierter Art an einer HTL

durchgeführt werden könnte, da hier die Fourierreihen in einigen Fachrichtungen im Lehrplan stehen¹⁵ und so ein fließender Übergang zur Fourieranalyse möglich ist.

3.3 Erste Einheit (100 Minuten Physik)

In dieser ersten Doppelstunde soll die Fourieranalyse motiviert werden, die dann in den darauffolgenden Mathematikeinheiten durchgeführt wird. Die Schülerinnen und Schüler werden an das Thema herangeführt. Sie wiederholen einige Aspekte der Akustik, nehmen verschiedene Töne und Klänge auf und analysieren mit einer entsprechenden Software die zugehörigen Frequenzspektren. In den späteren Einheiten wird dieser Schritt ‚händisch‘ vollzogen, sodass klar wird, wie ein Klang mathematisch in seinen Grundton und seine Obertöne zerlegt werden kann. Der folgende Unterrichtsentwurf beinhaltet Ziele, Vorbereitungen, Materialien, Methoden sowie einen detaillierten Unterrichtsverlauf. Natürlich können und sollen in der Durchführung Abweichungen auftreten, sodass spontane Änderungen notwendig werden. Der Verlauf soll daher dazu dienen, einen möglichen Ablauf der ersten Doppelstunde zu skizzieren.

Feinziele der ersten Einheit

- Die Schüler und Schülerinnen erhalten ein tieferes Verständnis von der Entstehung und Ausbreitung von Schall, insbesondere von Tönen und Klängen.
- Sie können Töne und Klänge durch mathematische Formeln und Graphen beschreiben.
- Sie können Klänge mit der App phyphox® aufnehmen und qualitativ analysieren.

Materialien

Idealerweise findet die erste Einheit im Physiksaal statt, da einige Materialien aus der Physiksammlung benötigt werden. Dazu gehören:

- eine lange, weiche Spiralfeder
- ein Oszilloskop mit Mikrophon
- zwei Stimmgabeln unterschiedlicher Eigenfrequenz

¹⁵vgl. RIS 2020, Anlage 1.16: Lehrplan der höheren Lehranstalt für Maschinenbau, Angewandte Mathematik, Kompetenzmodul 7

Jedenfalls sollte der Unterrichtsraum mit einem Beamer ausgestattet sein, da so wichtige Graphiken projiziert und die verwendeten Funktionen der kostenlosen App phyphox® vorgestellt werden können. Diese sollte auch zumindest bei der Hälfte der Klasse auf dem Smartphone installiert sein. Die Schülerinnen und Schüler sollen nach Möglichkeit eigene Instrumente mitnehmen. Zusätzlich wäre es gut, wenn Instrumente aus der Musiksammlung ausgeborgt werden könnten. Außerdem bekommen die Schülerinnen und Schüler eine Versuchsanleitung und am Ende eine Zusammenfassung, welche die wichtigsten Überlegungen dieser Einheit ersichtlich macht. Beides sollte die Lehrkraft in Klassenstärke ausgedruckt mitbringen. Vorschläge, wie diese Handouts aussehen könnten, finden sich im Anhang unter dem Titel ‚Versuchsanleitung: Klangspektren aufnehmen‘ und ‚Schritt 1 auf dem Weg zur Fourieranalyse: Töne und Klänge‘.

Vorbereitung

Nachdem die Schülerinnen und Schüler selbst wichtige Utensilien in den Unterricht mitnehmen sollen, muss zunächst abgeklärt werden, ob diese überhaupt vorhanden sind. Falls dem so ist, müssen die Jugendlichen rechtzeitig darüber informiert werden, wann diese mitzubringen sind. Die Sequenz kann natürlich auch in einer sehr ‚unmusikalischen‘ Klasse durchgeführt werden. Wenn aber gänzlich Interesse an diesem Thema fehlt, wäre es sinnvoller, ein anderes Projekt zu verfolgen. Wenn noch nie mit der App gearbeitet wurde, wäre eine kurze Einführung günstig. Die App ist zwar praktisch selbsterklärend, ein kurzes Kennenlernen vorab erleichtert aber später die Handhabung.

Zeittafel

Dauer	Inhalt	Methode	Materialien
15 min	Ausbreitung von Schallwellen	L-S-Gespräch, Experiment	Buch (Knallerzeuger); lange, weiche Spiralfeder
35min	Ton und Klang	L-S-Gespräch, Experiment	Stimmgabeln unterschiedlicher Eigenfrequenz, Oszilloskop, Mikrophon, GeoGebra-Dokument ‚positive und negative Interferenz dynamisch‘, Smartphone mit phyphox®



50 min	Klänge aufnehmen und qualitativ untersuchen	Partnerarbeit, Experiment	Versuchsanleitung: Klangspektren aufnehmen, Smartphone mit phyphox®, Instrumente, Handout: Schritt 1 auf dem Weg zur Fourieranalyse
--------	---	---------------------------	---

Unterrichtsverlauf

Zu Beginn der Unterrichtssequenz wird die Frage ‚Wie breitet sich Schall aus?‘ in den Raum gestellt. Diese Frage soll einerseits dazu dienen, die Schülerinnen und Schüler zum Nachdenken anzuregen und andererseits dazu, bereits Gelerntes aufzufrischen. Gemeinsam mit den Jugendlichen erarbeitet man dann ein tragfähiges Modell, wie es auch im Regelunterricht vorgestellt werden könnte. Am einfachsten lässt sich die Ausbreitung wohl bei einem Knall erklären. Dieser besteht aus einer einzelnen Druckwelle und darauffolgendem Unterdruckbereich und beinhaltet somit auch schon die wesentlichen Merkmale, die zur Beschreibung eines Tons notwendig sind.

Als Schallquelle genügt beispielsweise schon ein Schlag mit einem Buch auf die ebene Tischoberfläche. Die Luftmoleküle über dem Tisch müssen im Bruchteil einer Sekunde dem Buch weichen. Dabei stoßen sie heftig an benachbarte Luftmoleküle. Diese Nachbarmoleküle stoßen in der Folge wiederum an Luftmoleküle und so wird der Ruck mit Schallgeschwindigkeit weitergegeben. Die darauf folgende ‚Unterdruckwelle‘ lässt sich bei diesem einfachen Versuch ebenfalls sehr leicht plausibel begründen. Nachdem beim Schlag auf den Tisch über dem Buch ein Sog, also ein Unterdruck, entsteht, können die Luftteilchen nach dem Auftreffen des Buchs auf den Tisch wieder an ihren ursprünglichen Platz zurückkehren. Das gleiche gilt für ihre Nachbarn und deren Nachbarn. Somit breitet sich auch die Unterdruckwelle unmittelbar nach der Druckwelle mit Schallgeschwindigkeit im Raum aus, bis wieder ein Gleichgewicht eingetreten ist.

Diese Schockwelle mit darauffolgendem Unterdruckbereich kann mit einer langen und weichen Spiralfeder verdeutlicht werden. Diese liegt leicht gespannt auf einer ebenen Oberfläche und ist an einem Ende fixiert. Durch einen raschen Stoß am anderen Ende und ein ebenso schnelles Rückstellen der Feder entsteht das folgende Bild.

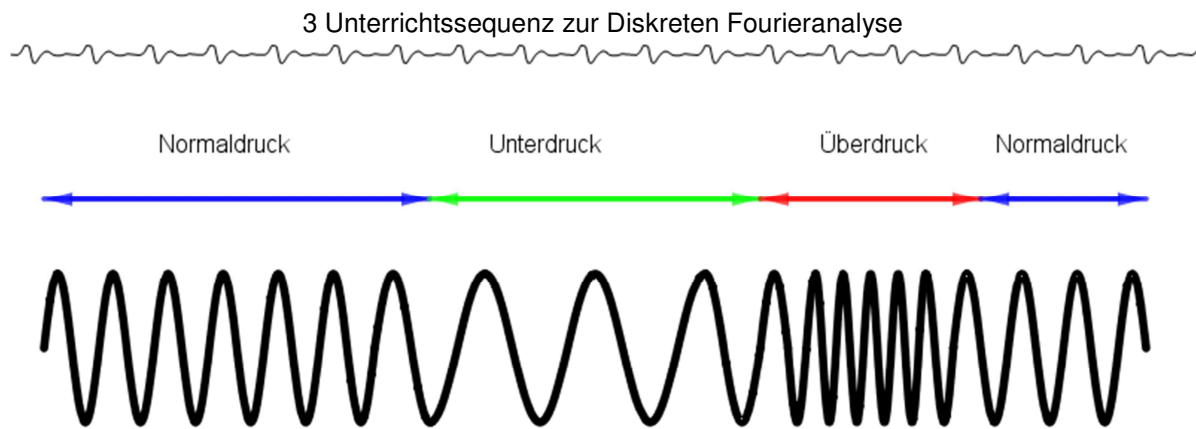


Abbildung 11: graphische Darstellung des Demonstrationsexperiments zur Ausbreitung von Schallwellen in Luft; Ausbreitung Richtung rechts

Die engen Windungen entsprechen dem Überdruck, der beim Knall entsteht, die folgenden geweiteten Windungen entsprechen dem Unterdruckbereich, der unmittelbar darauf folgt. Da sich aber eine Longitudinalwelle schwer graphisch darstellen lässt, geht man dazu über, die Schallwellen als Transversalwellen darzustellen. Befindet sich der Graph unter der Zeit-Achse, sagen wir, dass Unterdruck herrscht, liegt der Graph darüber, herrscht Überdruck.

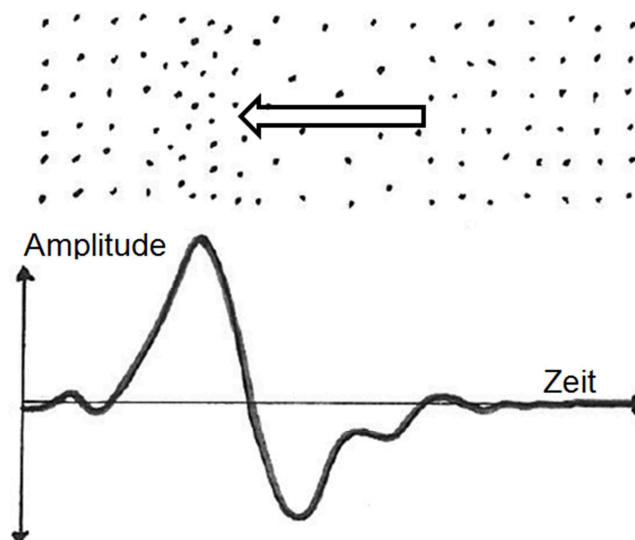


Abbildung 12: oben: schematische Darstellung der Ausbreitung eines Knalls in Luft (Ausbreitung von rechts nach links); unten: Darstellung eines Klangs in einem Druck-Zeit-Diagramm;

Ausgehend vom Knall, welcher einer einzelnen Schallwelle entspricht, können nun Töne besprochen werden. Ähnlich wie beim Knall gibt es lokale Über- und Unterdruckbereiche. Allerdings folgen diese in periodischen Abständen aufeinander und

gehen gleichmäßig ineinander über, sodass am Oszilloskop eine Sinus-Schwingung sichtbar wird. Steht kein Oszilloskop zur Verfügung, kann auch die App phyphox®, die später genauer vorgestellt wird, verwendet werden.

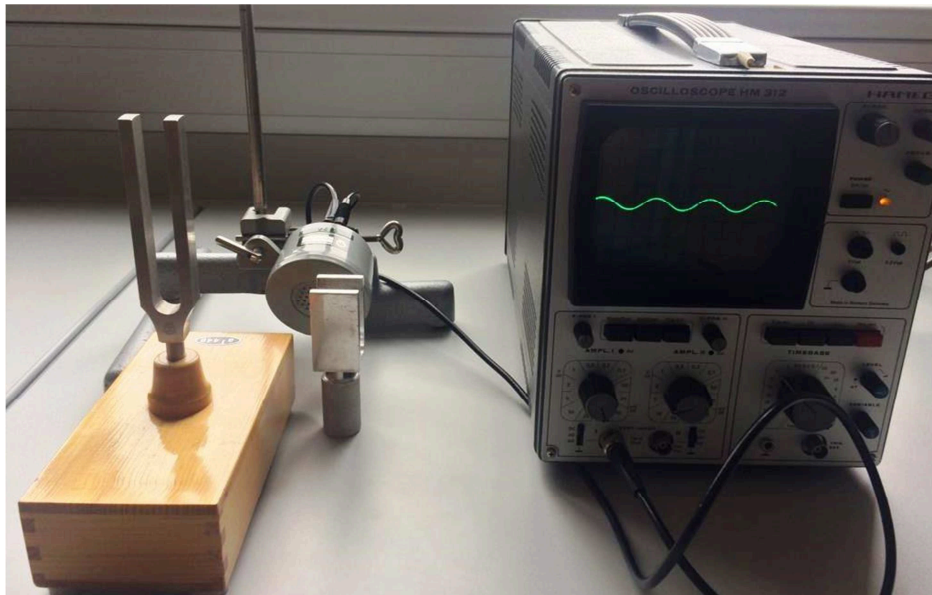


Abbildung 13: Sichtbarmachen der Schallwellen mit dem Oszilloskop (nur die linke Stimmgabel mit 440 Hz schwingt)

Im Gegensatz zu dem Buch, das auf den Tisch knallt, schwingt die Stimmgabel deutlich öfter, gleichmäßig und ruckfrei hin und her. Je nach Größe und Material schwingt sie dabei mehr oder weniger oft pro Sekunde auf und ab. Zum Vergleich werden die Töne zweier Stimmgabeln am Oszilloskop sichtbar gemacht. Diese sollten sich deutlich in ihrer Frequenz voneinander unterscheiden. Es wird besonders die Eigenfrequenz der Stimmgabel als deren zentrale Eigenschaft hervorgehoben. Eine Stimmgabel mit einer Eigenfrequenz von 440 Hz schwingt demnach 440 Mal in der Sekunde hin und her. Entsprechend werden auch die Luftmoleküle 440 Mal in der Sekunde weggeschoben und angesaugt.

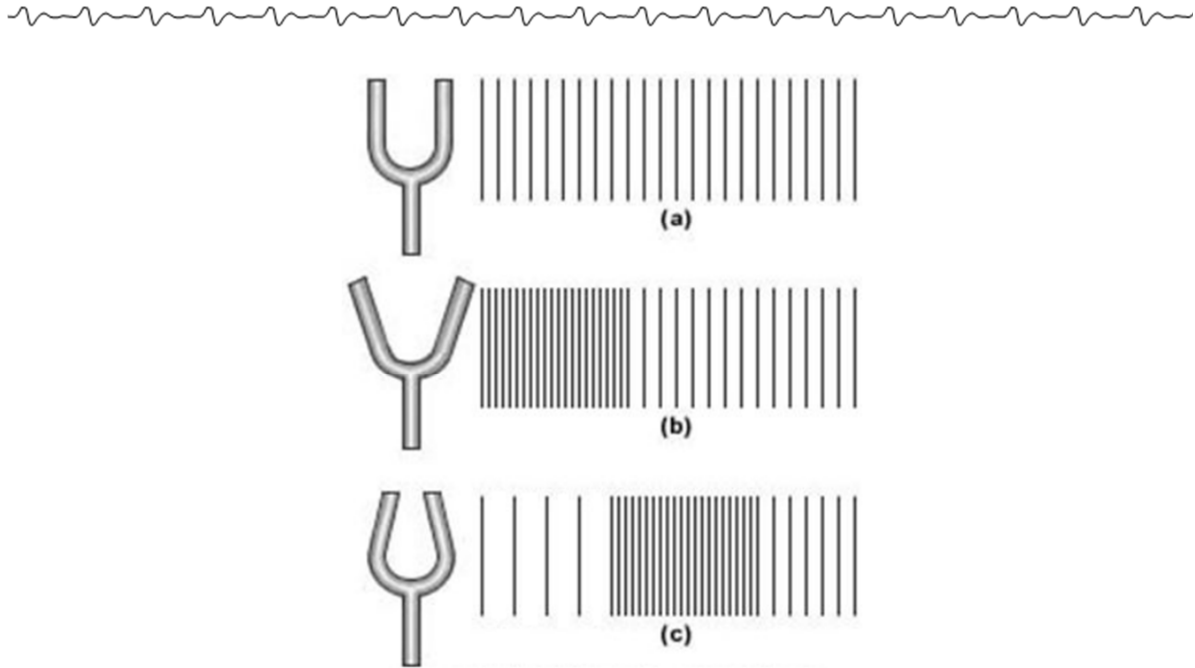


Abbildung 14¹⁶: (a) Stimmgabel klingt nicht;

(b) Zinken der Stimmgabel schwingen nach außen und verdichten dabei die umgebende Luft;

(c) Zinken schwingen nach innen, außen entsteht ein Sog oder Unterdruck;

Das Oszilloskop kann die hohe Anzahl an Schwingungen durch eine entsprechende Zeitauflösung sichtbar machen. Da aber meistens nicht direkt die Frequenz bestimmt wird, muss man sie über die Periodendauer berechnen. Den Schülerinnen und Schülern soll diese Problematik durchaus aufgezeigt werden, ohne, dass sie gleich geklärt wird. Wurde die Ausbreitung von Schall bereits im Regelunterricht besprochen, sollten die Jugendlichen rasch zu einer Lösung gelangen, wenn man ihnen sagt, dass man festlegen kann, wie groß die Zeitspanne ist, welche man auf dem Oszilloskop angezeigt bekommt. Aber selbst wenn das Thema noch nicht behandelt wurde, ist diese Fragestellung den Schülern und Schülerinnen durchaus zuzutrauen. Darüber hinaus kann noch die physikalische Bedeutung der Amplitude besprochen werden, wobei hier eine qualitative Betrachtung genügt. Eine exakte Bestimmung der Lautstärke wäre ohnehin schwer möglich, weil dazu das Oszilloskop kalibriert werden müsste. Deutlich wird die Auswirkung, wenn man die Stimmgabel näher zum Mikrophon stellt während sie klingt. Die Anzahl der Schwingungen bleibt gleich, aber die Amplituden werden größer. Lässt man den Ton dagegen ausklingen oder entfernt die Stimmgabel vom Mikrophon, werden die Amplituden kleiner.

¹⁶<https://thefactfactor.com/>

Bis hierher wurde praktisch kein Stoff behandelt, der nicht auch im Lehrplan zu finden ist. Sollte das Thema Akustik also erst kürzlich im Regelunterricht behandelt worden sein, kann dieser Teil der Sequenz durchaus kürzer gehalten werden oder gar übersprungen werden.

Nachdem nun zwei Stimmgabeln neben dem Oszilloskop stehen, kann die Frage in den Raum gestellt werden, was zu erwarten ist, wenn wir beide Stimmgabeln anschlagen und ihre Töne gemeinsam über das Mikrophon an das Oszilloskop weiterleiten. Auch hier bietet sich eine längere Diskussion an, bevor der Versuch durchgeführt wird. Beim Experiment selbst ist es sicherlich sinnvoll, die Jugendlichen miteinzubinden, da beide Töne möglichst laut erklingen sollten. Muss man selbst beide Stimmgabeln anschlagen und an das Mikrophon halten, kann es sein, dass bereits die zuerst angeschlagene Stimmgabel so leise ist, dass sie keinen merklichen Beitrag zum Klang liefert. Als Alternative zu Stimmgabeln kann auch jederzeit einer der zahlreichen Online-Frequenzgeneratoren verwendet werden, die einen oder mehrere Töne mit gleichbleibender Intensität wiedergeben. Die Gefahr, dass ein Ton verklingt bevor er gemessen werden kann, ist somit gebannt.

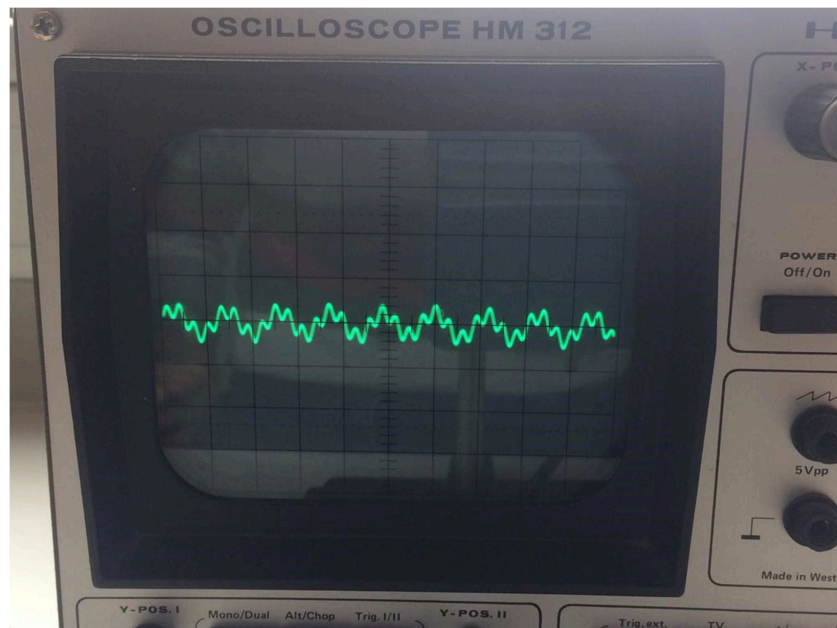


Abbildung 15: Klangbild am Oszilloskop, wenn beide Stimmgabeln schwingen (440 Hz und 1700 Hz)

Entsprechend den Lautstärken und Frequenzen der Stimmgabeln erscheint nun ein für einen Klang typischer Graph am Oszilloskop. Jetzt kann die Frage gestellt



werden, ob aus dem Graphen am Oszilloskop die Frequenzen der beiden Stimmgabeln bestimmt werden können. Nach der Untersuchung der ‚Quasiperiodendauer‘ der modulierten Welle sollte auffallen, dass diese der Periodendauer des tieferen Tons entspricht. ‚Quasiperiodendauer‘ deshalb, weil sich bei genauerer Betrachtung die Sequenz mit der Länge der Periodendauer des tieferen Tons nicht exakt wiederholt, da durch die Modulation, welche durch den höheren Ton verursacht wird, in jedem Abschnitt ein leicht anderes Bild entsteht. Erst beim kleinsten gemeinsamen Vielfachen der beiden Periodendauern wiederholt sich die Sequenz exakt. Wenn später der Klang eines Instruments aufgenommen wird, entsteht dieses Problem nicht mehr, da die Frequenzen von Obertönen ganzzahlige Vielfache der Grundtonfrequenz sind. Die Periodendauer des Grundtons ist somit schon das kleinste gemeinsame Vielfache aller beteiligten Periodendauern. Die Frequenz der höheren Stimmgabel kann nicht mehr so einfach abgeschätzt werden.

Nun kann die Frage in den Raum gestellt werden, wie diese neue Schwingung zustande kommt. Die beiden Einzeltöne der zwei Schallquellen mischen sich zu einem Klang. Dieser hat entsprechend der Einzelfrequenzen und deren Intensitäten ein einmaliges Muster am Oszilloskop. Mathematisch lässt sich der Klang durch die Addition der beiden Sinus-Schwingungen darstellen. Treffen zwei Überdruckbereiche oder zwei Unterdruckbereiche aufeinander, sprechen wir von positiver Interferenz; die resultierende Elongation (Entfernung zur Zeit-Achse oder Abweichung vom Normaldruck) ist größer als die beiden Einzelelongationen zu diesem Zeitpunkt. Trifft ein Unterdruckbereich auf einen Überdruck, wird die kleinere Elongation von der größeren subtrahiert; die resultierende Elongation ist zumindest kleiner als die größere der beiden Einzelelongationen; wir sprechen von negativer Interferenz. Hier gilt sicherlich das Sprichwort ‚ein Bild bzw. eine Animation sagt mehr als tausend Worte‘. Daher wäre es sinnvoll, diese Argumente anhand einer Graphik, wie sie beispielsweise leicht in GeoGebra erstellt werden kann, zu untermauern.

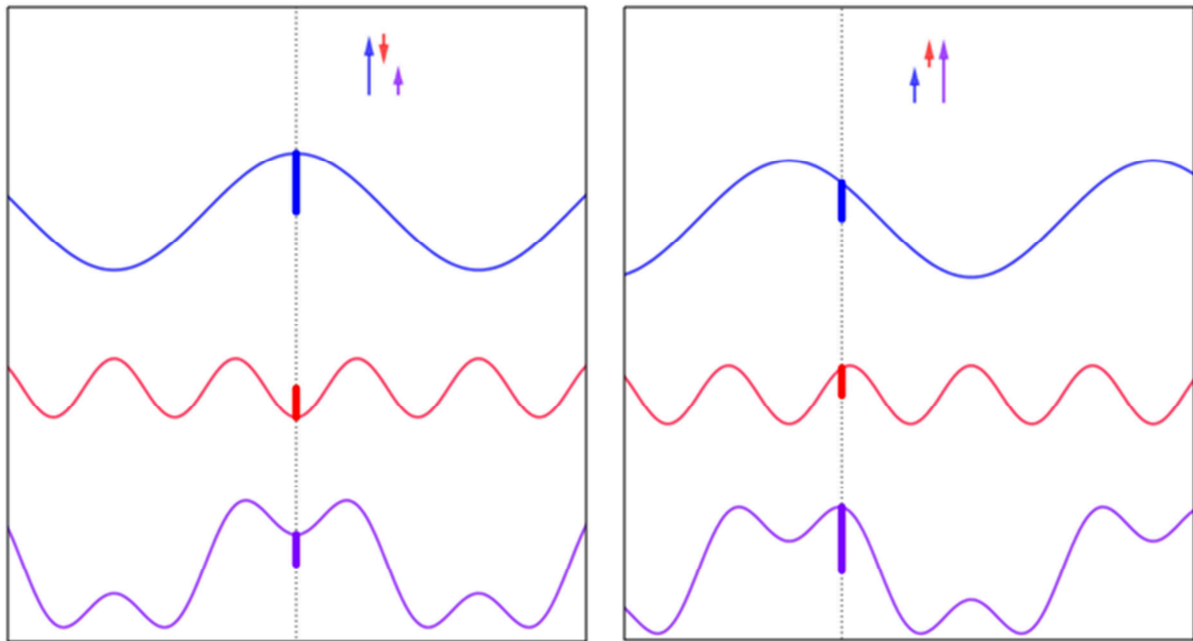


Abbildung 16: links: negative Interferenz; rechts positive Interferenz;

Diese Graphik könnte dann auch als Kopie ausgeteilt werden, damit diese einem etwaigen Protokoll beigelegt werden kann. Nun sollte noch geklärt werden, wie dieses mathematische Modell in der Realität zu deuten ist. Auch hier gilt, dass die Luftdruckschwankungen der beiden Stimmgabeln einander lokal verstärken (positive Interferenz) oder einander teilweise oder gänzlich auslöschen (negative Interferenz).

Nachdem nun klar ist, wie die Vermischung mehrerer Töne zu einem Klang zu Stande kommt, kann die Frage gestellt werden, ob es möglich ist, die beteiligten Töne mit ihren Intensitäten zu bestimmen, wenn nur der Klang bekannt ist. Hier kommt nun zum ersten Mal die Fourieranalyse ins Spiel.

Mit der App phyphox® wird das Smartphone entsprechend der vorhandenen Sensoren zum universalen Messgerät. Für das Experiment *Audio Spektrum*, welches die Fourieranalyse durchführt, wird allerdings nur der Zugriff auf das Mikrophon benötigt¹⁷. Daher sollte dieses Experiment auf allen Geräten durchführbar sein. Ist der Fernzugriff aktiviert, kann das Smartphone die Messdaten in Echtzeit auf einem PC in einem beliebigen Browser anzeigen. Diese Funktion ist eher für die Lehrperson interessant, da sie so die App und die Messung für alle sichtbar erklären und

¹⁷vgl. <https://phyphox.org/wiki/>

vorzeigen kann. Für die Schülerinnen und Schüler genügt dann die Verwendung am Smartphone. Mit der *Start-Taste* kann nun wieder der Klang der zwei Stimmgabeln aufgenommen werden.

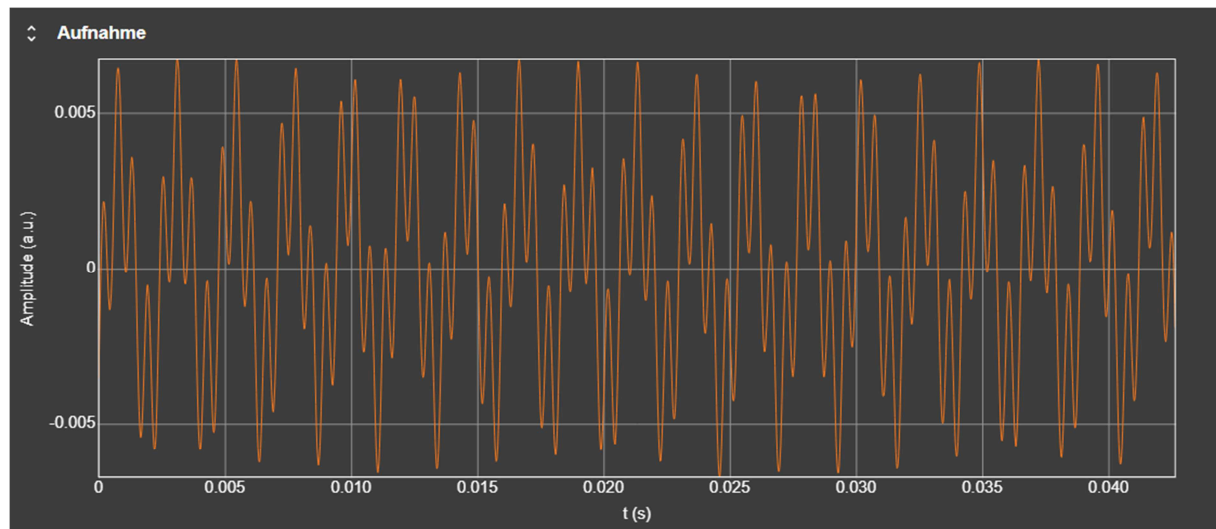


Abbildung 17: phyphox®-Interface: Experiment *Audio Spektrum*, Ansicht *Rohdaten*

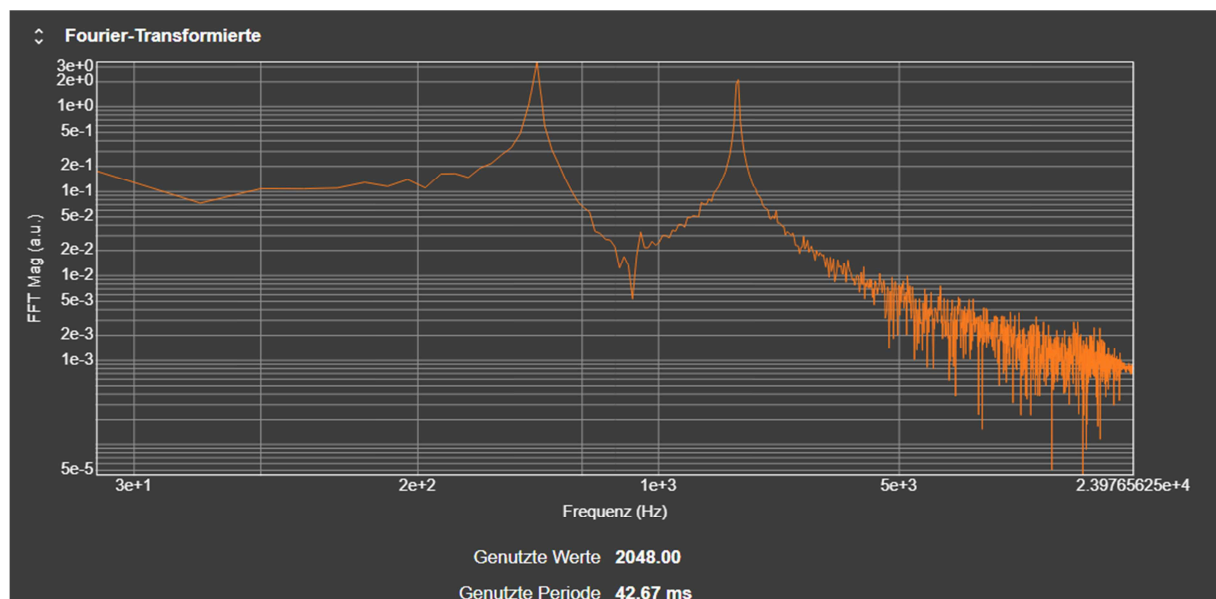


Abbildung 18: phyphox®-Interface: Experiment *Audio Spektrum*, Ansicht *Spektrum*

Dieses phyphox®-Experiment hat im Wesentlichen zwei für uns interessante Oberflächen. In dem Fenster *Rohdaten* (Abbildung 17) wird das Elongation-Zeit-Diagramm angezeigt. Werden wieder dieselben Stimmgabeln gemessen, sollte also ein sehr ähnliches Bild wie zuvor am Oszilloskop sichtbar sein. Wie bereits angesprochen, empfiehlt es sich, diesen Versuch mit dem Smartphone der

Lehrperson durchzuführen und über den Fernzugriff und den Beamer an die Wand zu projizieren. In dem Fenster *Spektrum* (Abbildung 18) kann nun das Klangspektrum angezeigt werden. Auf einige Eigenschaften und Eigenheiten der App und speziell bei diesem Experiment sollte aber hingewiesen werden. Beispielsweise wird bei der Messung die Fourieranalyse standardmäßig in einem doppellogarithmischen Koordinatensystem angezeigt. Dies kann aber über die Funktion *Mehr Werkzeuge* umgestellt werden. Die App gibt neben der Fourieranalyse auch gleich die Frequenzspitze aus und ordnet dieser einen musikalischen Ton zu: z. B. A4. Dabei sollte unbedingt angemerkt werden, dass diese der Frequenz mit der größten Intensität entspricht und nicht dem Grundton. Die Angabe des Tons kann daher verwirren, weil damit eben nicht zwingend der angespielte Ton, sondern möglicherweise der intensivste Oberton angegeben wird. Vor allem für die folgende Arbeitsphase ist diese Information wichtig, weil hier unterschiedliche Instrumente und musikalische Töne untersucht werden sollen. Bei dem Demonstrationsversuch sollten also im Spektrum zwei deutliche Peaks zu sehen sein, die den Frequenzen der beiden Stimmgabeln entsprechen. Diese können durch entsprechendes Zoomen und Auswählen der Punkte sehr genau bestimmt werden. Der niedrigere der beiden Töne, später der Grundton eines Klangs, kann also über den ersten deutlichen Peak bestimmt werden. Ist dieser nicht allzu deutlich, lässt sich der tiefste Ton auch aus der Graphik zu den *Rohdaten* auslesen, ähnlich, wie das auch zuvor beim Oszilloskop gemacht wurde. Hier ist wiederum darauf zu achten, dass nicht unbedingt eine ganzzahlige Anzahl an Schwingungen dargestellt wird, auch wenn das auf den ersten Blick so wirkt. Über die Funktion *Punkt wählen* können aber einzelne Punkte im Koordinatensystem ausgelesen werden. Es empfiehlt sich, möglichst viele Periodendauern zu messen, da so der Messfehler minimiert werden kann. Diese Tatsache kann auch zur Sprache gebracht und plausibel begründet werden. Als Analogon kann auf die Periodendauer eines Pendels verwiesen werden, die diese Überlegung möglicherweise besser veranschaulicht. Als erster Messpunkt bietet sich der erste Schnittpunkt der Klangkurve mit der Zeitachse an, als letzter jener Schnittpunkt mit der Zeitachse, der das größtmögliche Vielfache der Periodendauer darstellt.

So wird beispielsweise für die Dauer von neun Schwingungen die entsprechende Zeitspanne T_9 abgelesen. Die Frequenz lässt sich dann einfach berechnen.

$$v = \frac{9}{T_9}$$

Schließlich wird noch gezeigt, wie die Daten gesichert und exportiert werden können. Dies erfolgt über die Funktion *Daten exportieren*. Dabei werden verschiedene Dateiformate zur Auswahl gestellt. Die getroffene Vorauswahl *Excel* empfiehlt sich hier, da in den darauffolgenden Einheiten mit einem Tabellenkalkulationsprogramm weitergearbeitet werden soll.

Nach dieser längeren und intensiven Input-Phase sind nun die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, selbst mit der App Experimente durchzuführen und Messdaten auszulesen. Hier kommen auch die mitgebrachten Instrumente zum Einsatz. Die Jugendlichen sollen nun in Partnerarbeit oder in Dreiergruppen möglichst ‚schöne‘ Klänge aufzeichnen und analysieren, wobei mit ‚schön‘ ein Klang mit möglichst vielen Obertönen gemeint ist. Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei den Grundton auf die beiden oben besprochenen Arten bestimmen sowie die Anzahl und relativen Intensitäten der Obertöne. Eine Versuchsanleitung mit Leitfragen in ausgedruckter oder projizierter Form empfiehlt sich (siehe Anhang). Mögliche Leitfragen wären:

- **Welche Frequenz hat der Grundton?**
- Ist der Grundton auch jener Ton mit der größten Intensität?
- Kannst du die Anzahl der Obertöne durch die Anspielweise beeinflussen?
- Wie ändern sich die Klangspektren, wenn man einen tiefen und einen hohen Ton auf einem Instrument anspielt?
- Hat derselbe Grundton bei unterschiedlichen Instrumenten die gleichen Obertöne?
- **Was fällt dir auf, wenn du die Frequenz des Grundtons mit den Frequenzen der Obertöne vergleichst?**
- **Notiere dir die Frequenzen und Intensitäten des Grundtons und mindestens der ersten vier Obertöne.**
- Was könnte hinter der Bezeichnung *Fourier-Transformierte* stecken? Wie könnte diese Entschlüsselung funktionieren?

Darüber hinaus sollen die Schülerinnen und Schüler eigene Vermutungen aufstellen und Fragen formulieren, die sie selbst untersuchen können. Die Zusammenarbeit mehrerer Gruppen ist dann natürlich sinnvoll, vor allem, wenn mehrere Instrumente verglichen werden sollen.

Am Ende der Experimentierphase und damit am Ende dieser ersten Doppelstunde sollten alle Schüler und Schülerinnen eine Tabelle erstellt haben, in der Frequenzen und Intensitäten des Grundtons und der Obertöne festgehalten sind. Außerdem benötigen sie einen gespeicherten Datensatz, da dieser für die nächsten Einheiten benötigt wird. Neben diesen Grundvoraussetzungen für die Folgeeinheiten sollten die Schülerinnen und Schüler aber nun ein weitreichendes Verständnis der physikalischen Aspekte der Klangentstehung und Ausbreitung erworben haben. Unterstützend dazu bekommen sie das Handout ‚Schritt 1 auf dem Weg zur Fourieranalyse: Töne und Klänge‘, welches die wichtigsten Überlegungen dieser Einheit zusammenfasst und im Anhang zu finden ist.

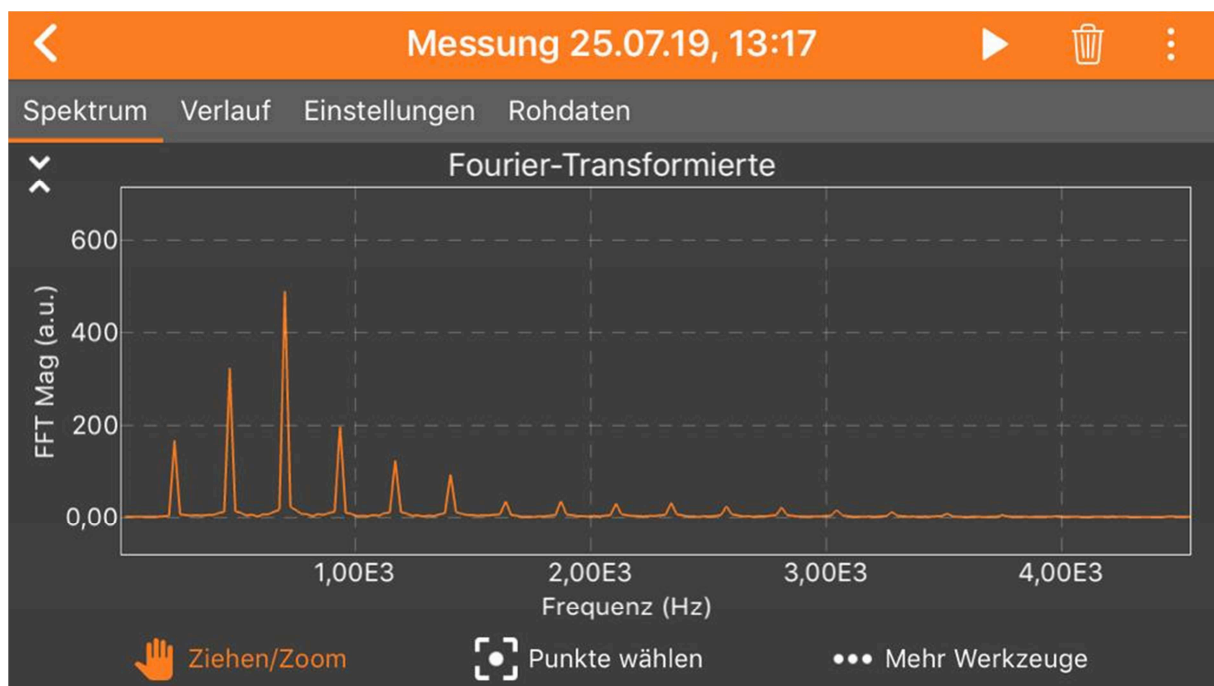


Abbildung 19: Screenshot phyphox®: Klangspektrum einer Tenorposaune; Grundton b 234,375Hz

	Frequenz [Hz]	Intensität		Frequenz [Hz]	Intensität
0	234,375	164,850	14	3515,625	7,805
1	468,75	320,903	15	3750	3,947
2	703,125	487,700	16	3984,375	1,967
3	937,5	195,994	17	4218,75	1,193
4	1171,875	121,501	18	4476,5625	0,986
5	1406,25	91,535	19	4687,5	1,704
6	1640,625	33,984	20	4921,875	2,575
7	1875	34,574	21	5156,25	3,306
8	2109,375	29,526	22	5390,625	3,860
9	2343,75	31,049	23	5625	3,205
10	2578,125	23,723	24	5859,375	2,862
11	2812,5	21,003	25	6093,75	2,047
12	3046,875	15,672	26	6328,125	1,075
13	3281,25	11,228	27	6562,5	0,702

Tabelle 1: Grundton b 234,375Hz und 27 Obertöne mit entsprechenden Intensitäten

3.4 Zweite Einheit (100 Minuten Mathematik)

Nachdem in der vorigen Einheit die Fourieranalyse eines Instrumentenklangs durch eine Software vorgenommen wurde, sollen sich die Schüler und Schülerinnen zunächst davon überzeugen, dass aus dem Klangspektrum wieder der Klang rekonstruiert werden kann. Im Anschluss werden dann die Grundlagen gelegt, die den Schülerinnen und Schülern in der letzten Einheit ermöglichen sollen, aus den aufgenommenen Rohdaten selbst die Fourieranalyse durchzuführen. Im größeren Teil der Doppelstunde geht es also darum, sich mit entsprechenden Fragestellungen und Überlegungen an die Fourieranalyse heranzutasten. Zu diesen Fragen gehören unter anderem: ‚Welche Frequenz können wir sofort bestimmen?‘, ‚Welche weiteren Frequenzen vermuten wir aufgrund der Ergebnisse der letzten Einheit?‘ und ‚Welche Frequenzen können wir theoretisch in unserem Datensatz überhaupt ausmachen?‘. Die letzte Frage bezieht sich auf das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem, welches auch in dieser Doppelstunde angeschnitten werden soll. Es ergänzt die Einheit um einen weiteren Aspekt und bietet somit einen zusätzlichen Einblick in die wissenschaftlichen Arbeitsweisen der Mathematik. Die Schülerinnen und Schüler sollen am Ende dieser Einheit nachvollziehen können, wie der Algorithmus der Fourieranalyse im Prinzip funktioniert. Das ‚Programmieren‘ und Testen anhand der in der ersten Einheit gesammelten Daten erfolgt dann in der letzten Einheit.

Feinziele der zweiten Einheit

- Die Schülerinnen und Schüler können das Klangspektrum lesen und daraus eine *Klang-Funktion* generieren.
- Sie erkennen, dass das Aufstellen von Klangspektren aus diskreten *Klangkurven* reversibel ist.
- Die Schülerinnen und Schüler können die Überlegungen, die hinter dem Nyquist-Shannon-Abtasttheorem stecken, nachvollziehen und kennen praktische Anwendungen. Sie können diese Überlegungen auch später bei ihren Analysen anwenden.
- Sie erhalten erste Einblicke in den Algorithmus der Fourieranalyse und können diesen anhand des ‚Schablonenmodells‘ beschreiben.

Vorbereitung und Materialien

Findet der Unterricht nicht in einem EDV-Saal statt, benötigen die Schülerinnen und Schüler eigene Laptops. Das kann natürlich nur bei einer Laptop-Klasse vorausgesetzt werden. Auf diesen Geräten muss das Programm GeoGebra installiert sein, welches aber in vielen Schulen ohnehin als Standardprogramm im Mathematikunterricht eingesetzt wird. Außerdem wäre es von Vorteil, wenn die Schüler und Schülerinnen wieder ihre Smartphones mit den gespeicherten Experimenten der letzten Einheit mitbringen würden. Obwohl sie die wichtigsten Daten – die Höhe und Position der Peaks – bereits schriftlich festgehalten haben sollten, können sie hier notfalls nochmals auf die elektronischen Daten zurückgreifen. Die Lehrperson benötigt in dieser Einheit einige Dokumente und Graphiken zur Veranschaulichung der Inhalte. Diese sind im folgenden Unterrichtsverlauf an den jeweiligen Stellen beschrieben und auch im Anhang ersichtlich bzw. zum Teil auch über entsprechende Links abrufbar. Des Weiteren empfiehlt es sich, wieder eine Versuchsanleitung vor der Einzelarbeitsphase sowie eine Zusammenfassung am Ende der Einheit auszuteilen. Auch diese Dokumente befinden sich im Anhang.

Zeittafel

Dauer	Inhalt	Methode	Materialien
25 min	Klangrekonstruktion	L-S-Gespräch, Einzelarbeit	GeoGebra, Smartphones mit phyphox®, Versuchsanleitung: Klänge rekonstruieren
30 min	Vorüberlegungen zur Fourieranalyse	L-S-Gespräch	Handout ‚Graphische Darstellung Nyquist-Shannon-Abtasttheorem‘
45 min	‚Schablonenmodell‘ zur Fourieranalyse	L-S-Gespräch	GeoGebra: ‚Veranschaulichung Schablonenmodell‘, Handout: ‚Schritt 2 auf dem Weg zur Fourieranalyse‘

Unterrichtsverlauf

Wie in der ersten Einheit gezeigt, setzt sich ein Klang aus mehreren Tönen unterschiedlicher Frequenzen und Intensitäten zusammen. Die Jugendlichen sollen nun ihren aufgenommenen Klang mathematisch rekonstruieren und sich überzeugen, dass aus dem Klangspektrum wieder der Klang erzeugt werden kann. Dazu werden die Frequenzen der Peaks mit ihren entsprechenden Intensitäten herangezogen. Obwohl formal der Flächeninhalt repräsentativer wäre, werden ihre Höhen verwendet. Eine weitere Möglichkeit zur Optimierung der Rekonstruktion wäre, anstatt der Frequenz der Peak-Spitze den Mittelwert der Frequenzen auf Halbwertshöhe zu verwenden. Schließlich kann das tatsächliche Maximum zwischen zwei Messwerten liegen. Dies lässt sich vor allem bei Peaks vermuten, die schräg abgeschnitten wirken, also jene, die aus zwei benachbarten Frequenzen bestehen, die sich nicht maßgeblich in ihrer Intensität unterscheiden.

Diese beiden Optimierungsmöglichkeiten können durchaus in einer anschließenden Fehlerdiskussion besprochen werden, wenn sich rekonstruierte Klänge stärker als erwartet vom ursprünglichen Klang unterscheiden. Sie von Haus aus anzuwenden, würde hier aber sicherlich zu weit gehen.

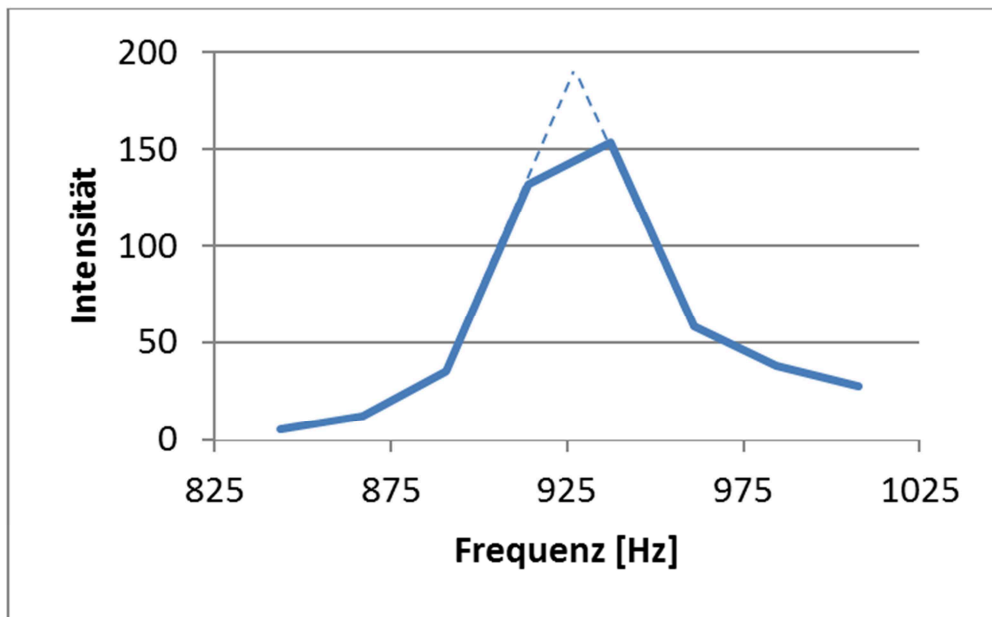


Abbildung 20: ‚Abgeschnittener‘ Peak; das tatsächliche Maximum liegt vermutlich zwischen 914 Hz und 937 Hz (eher bei 937 Hz)

Da die Schüler und Schülerinnen in dieser Phase selbständig arbeiten sollen, empfiehlt es sich, eine Arbeitsanweisung auszuteilen, in der in groben Zügen die Vorgehensweise geschildert wird. Ein Beispiel für eine solche Versuchsanleitung befindet sich im Anhang.

Ein einzelner Ton lässt sich nun als Sinus-Funktion der folgenden Form darstellen:

$$v_n(t) = -a_n \sin(2\pi v_n t)$$

Dabei ist a_n die Intensität und v_n die Frequenz. Der Index n steht dabei für den n -ten Oberton. Wobei $n = 0$ den Parametern des Grundtons zugeordnet wird. Das negative Vorzeichen ist der Tatsache geschuldet, dass in der App jeweils der Wellenberg dem Wellental vorausleitet. Bei der positiven Sinus-Funktion ist das umgekehrt. Die Summe dieser Sinus-Funktionen entspricht im Wesentlichen unserem ursprünglichen Klang. Neben den oben genannten Fehlerquellen, ist natürlich noch zu erwähnen, dass die Rekonstruktion umso besser wird, je mehr Obertöne verwendet werden. Außerdem darf nicht vergessen werden, dass auch jene Frequenzen, die nicht in einem Peak auftauchen, zum Klang beitragen, wenn

auch in geringerem Ausmaß. Bisher wurde nicht näher darauf eingegangen, wie die absolute Intensität der Frequenzen zu verstehen ist. Um ihr eine Bedeutung geben zu können, müsste eine Kalibrierung vorgenommen werden. Da uns hier aber ohnehin nur die relativen Intensitäten interessieren, können wir darauf verzichten. Stattdessen könnten die Intensitäten auf jene des Grundtons oder auf jene des intensivsten Tons normiert werden. Aber auch das ist nicht zwingend notwendig. Es würde lediglich verdeutlichen, dass es nur auf die relativen Intensitäten ankommt.

In einem entsprechenden Algebra-Programm kann dann die Funktion visualisiert und mit der ursprünglichen Funktion in phyphox® verglichen werden. Hier bietet sich die benutzerfreundliche Freeware GeoGebra an, die mittlerweile an vielen Schulen standardmäßig im Mathematikunterricht eingesetzt wird.

Im Anschluss kann noch besprochen werden, was es für einen Sinn haben kann, eine Fourieranalyse durchzuführen, um dann daraus wieder einen Klang zu generieren. In diesem Fall wurde das hauptsächlich deshalb gemacht, damit die Schülerinnen und Schüler sehen, dass eine Umkehrung möglich ist, und um ihnen den Zusammenhang zwischen dem Fourier-Spektrum und dem Klangdiagramm zu verdeutlichen. Tatsächlich wird diese Methode, wenn auch in automatisierter Form, in der Tontechnik angewendet. Beispielsweise können so unerwünschte Frequenzen, die während einer Aufnahme aus verschiedensten Gründen auftreten, nachträglich entfernt werden.

Ab jetzt geht es um die zentrale Frage dieser Unterrichtssequenz: ‚Was steckt hinter dem Begriff *Fourieranalyse* und können wir mit unseren Mitteln Licht in die Sache bringen?‘ Obwohl zu diesem Zeitpunkt noch nicht klar ist, wie die Analyse funktioniert, können wir bereits eine Frequenz aus den Rohdaten bestimmen, nämlich jene des Grundtons. Dies gelingt über die Dauer mehrerer, sich wiederholender Schwingungen.

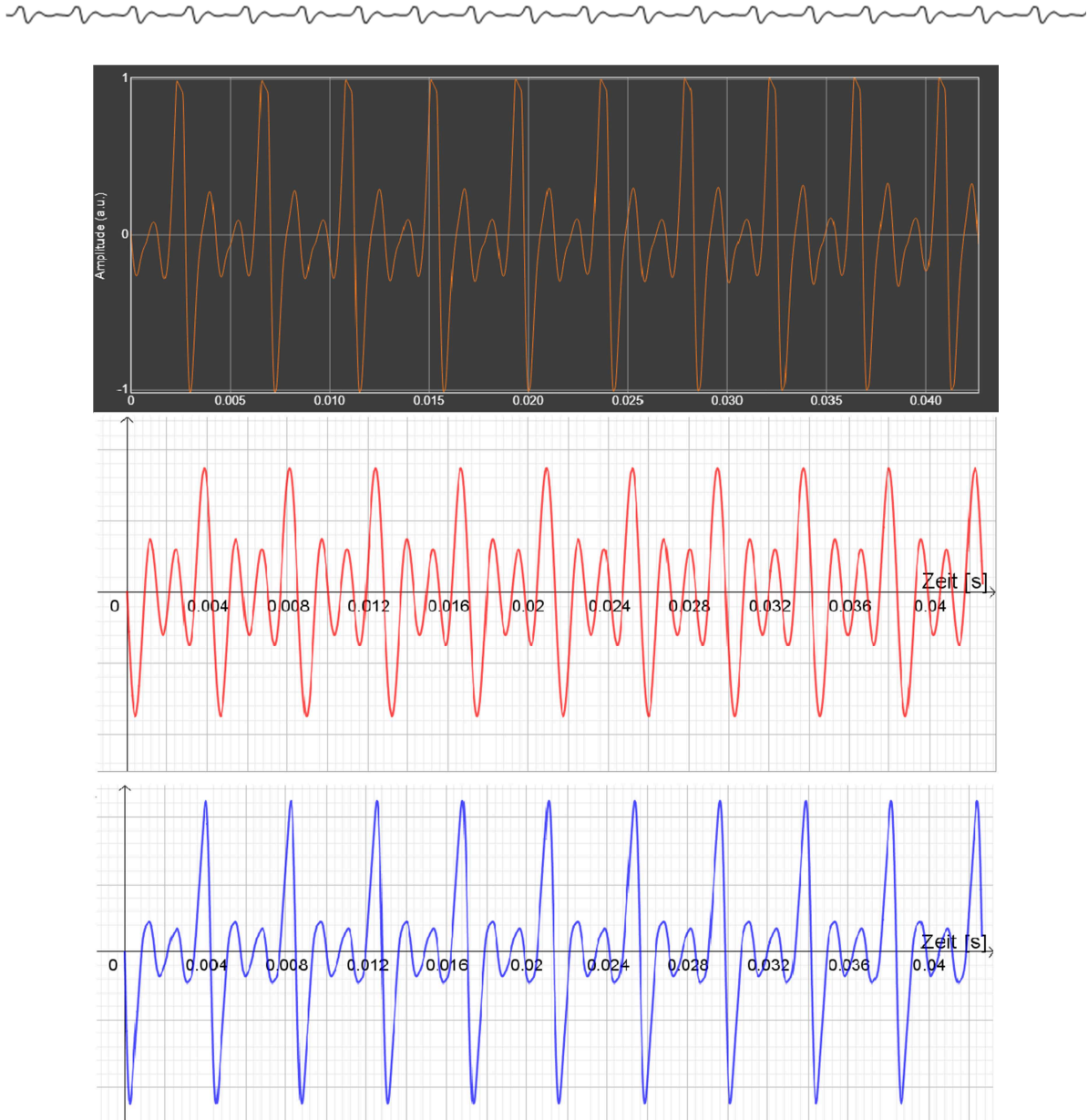


Abbildung 21: oben: Klangdarstellung in der App phyphox®; Mitte: rekonstruierter Klang mit zwei Obertönen; unten: rekonstruierter Klang mit acht Obertönen;

Weiß man zusätzlich, dass es sich bei den Daten um einen harmonischen Klang handelt, können weitere Frequenzen vermutet werden und zwar jene der Obertöne. Somit kann man auch bereits ohne Fourieranalyse eine Reihe von Überlegungen anstellen. Einzig die Intensitäten dieser vermuteten Töne sind vorerst gänzlich unbekannt. Aber auch hier kann man sich ein wenig helfen. Ähnlich wie zuvor bei der Klangrekonstruktion, kann eine Funktion aufgestellt werden, die den Grundton und beispielsweise die ersten fünf Obertöne beinhaltet. Die jeweiligen Intensitäten sind dabei aber Variablen. Gibt man diese Funktion in GeoGebra ein, so kann man für die Unbekannten sogenannte Schieberegler erstellen. Mittels ‚Try and Error‘ kann so die

Form der Schwingung ‚nachgebaut‘ werden. Dies erfordert freilich etwas Zeit und Geduld. Erhält man durch dieses Probieren einen Graphen, der dem Original ähnelt, liest man die eingestellten Werte ab und erhält zum Grundton und den Obertönen die entsprechenden Intensitäten. Da diese Methode aber, wie gesagt, viel Zeit kostet und dabei noch recht ungenau ist, kann sie zwar diskutiert werden, die Durchführung selbst ist aber nicht notwendig.

Nun kann man die Frage in den Raum stellen: ‚Macht es Sinn, nach beliebig hohen Frequenzen zu suchen?‘ Weiterführend kann man die Schülerinnen und Schülern dazu anleiten, sich zu fragen, ob es sinnvoll wäre, bei hundert Messungen pro Sekunde nach Frequenzen im Bereich von 10.000 Hz zu suchen. Dabei könnte schon intuitiv klar werden, dass diese Frage mit ‚Nein‘ zu beantworten ist.

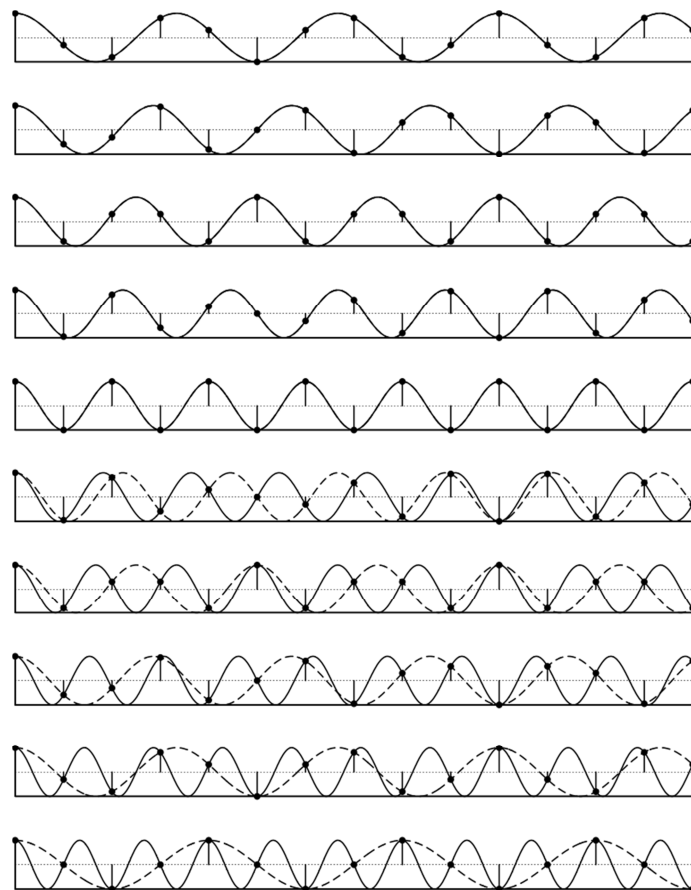


Abbildung 22¹⁸: Zunehmende Signalfrequenz bei gleichbleibender Abtastrate; überschreitet die Signalfrequenz die halbe Abtastrate, ist eine eindeutige Rekonstruktion nicht mehr möglich;

¹⁸<https://de.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon-Abtasttheorem>

Bleibt man bei den hundert Messungen pro Sekunde, kann man dann danach fragen, was die niedrigste Frequenz ist, nach der man sinnvollerweise noch suchen kann. Eine Antwort darauf gibt das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem. Es besagt, dass ein harmonisches Signal eindeutig rekonstruiert werden kann, wenn die Abtastrate doppelt so hoch ist wie die höchste vorkommende Signalfrequenz¹⁹. Auch hier gilt: ein Bild sagt mehr als tausend Worte.

Salopp gesprochen könnte man sagen, dass es, um eine Sinus-Funktion festzumachen, zwei Punkte in einer Periodendauer benötigt, da die Funktion im Grunde zwei Unbekannte hat, ähnlich einer quadratischen Funktion. Hier sind es eben die Frequenz und die Intensität. Die Verschiebungen in x- und y-Richtung sind praktisch von keiner physikalischen Bedeutung, weshalb diese Parameter nicht beachtet werden müssen. Hat man nun zwei Punkte, kann man zwar unendlich viele Sinus-Funktionen finden, die durch diese Punkte verlaufen, aber nur eine mit minimaler (positiver) Frequenz. Die Periodendauer dieser speziellen Funktion ist demnach doppelt so lange, wie der Abstand der Messpunkte. Mit anderen Worten: Die Abtastrate muss doppelt so hoch sein wie die höchste vorkommende Frequenz. Um auf unser Gedankenexperiment mit hundert Messungen pro Sekunde zurückzukommen, würde es hier also Sinn machen, Frequenzen bis zu 50 Hz zu suchen (mehr dazu in Kapitel 2.6). Eine praktische Anwendung dieser zunächst rein mathematischen Überlegung ist die Abtastrate bei Tonträgern. Bei Audio-CDs wird beispielsweise eine Abtastrate von 44,1 kHz verwendet²⁰. Somit können Frequenzen bis zu 22.500 Hz aufgenommen und abgespielt werden. Diese Frequenz ist nicht zufällig gewählt, denn der menschliche Hörbereich reicht bis rund 20.000 Hz. Die Abtastrate bei unserem phyphox®-Experiment liegt etwas über 44,1k Hz, nämlich bei 48 kHz. Daher könnten wir theoretisch auch nach Obertönen über dem menschlichen Hörbereich suchen.

Nachdem in etwa klar ist, wonach man sinnvollerweise sucht, gilt es nun, den Algorithmus der Fourieranalyse zu motivieren. Ausgangspunkt ist der Gedanke, dass man für viele Frequenzen gleichzeitig testen möchte, wie groß ihr Anteil an dem Klang ist. Dazu kann man sich vorstellen, dass man ein Set von Schablonen erstellt,

¹⁹vgl. Shannon 1948, S.627f

²⁰vgl. Bharitkar/Kyriakakis, S.22



diese über den Klang legt und testet, wie gering oder groß ihre Abweichung von diesem ist bzw. wie groß ihr Anteil an dem Klang ist. Um mit dieser Analogie weiterarbeiten zu können, müssen nun zunächst drei Fragen geklärt werden:

Wie sieht so eine Schablone aus?

Was bedeutet ‚über den Klang legen‘?

Wie messen wir die Abweichung vom Klang?

Eine Schablone ist nichts anderes als die Sinus- oder Kosinus-Funktion des reinen Tons, den man in einem Klang nachweisen will. Wollen wir beispielsweise wissen, welchen Anteil an unserem Klang der Ton mit der Frequenz 440 Hz ausmacht, brauchen wir die folgenden zwei Schablonen:

$$s_{440}(t) = \sin(2\pi \cdot 440 \cdot t) \text{ und } c_{440}(t) = \cos(2\pi \cdot 440 \cdot t)$$

Warum beide Funktionen zur vollständigen Beschreibung verwendet werden müssen, wird in Kapitel 2.2 näher erläutert. Eine etwas anschaulichere Erklärung für die Schülerinnen und Schüler könnte wie folgt lauten: Da man die Sinus-Funktion durch Phasenverschiebung der Kosinus-Funktion erhält und wir bei unserer Messung nur einen Ausschnitt des Klangs messen, wissen wir nicht, ob der Ton, den wir suchen, in seiner Sinus-Form oder seiner Kosinus-Form vorliegt. Daher müssen wir beide Varianten testen. Tatsächlich liegt er aber zu bestimmten Anteilen in beiden Formen vor. Im Folgenden beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Sinus-Anteil. Für den Kosinus-Anteil gelten analoge Überlegungen. Wenn also im Folgenden von einer Schablone die Rede ist, dann wird damit nur der Sinus-Anteil bezeichnet.

Nun wird die Schablone ‚über den Klang gelegt‘. Im Prinzip geschieht dabei auf dem Papier etwas sehr Ähnliches wie in der ersten Einheit bei den beiden Stimmgabeln. Die beiden Schwingungen werden verknüpft. Allerdings werden nun die Funktionswerte nicht addiert, sondern multipliziert. Außerdem werden hier nicht zwei reine Töne verknüpft, sondern die Schablone, also ein reiner Ton, mit dem Klang, der sich bereits aus den verschiedensten Tönen zusammensetzt. Da nur eine endliche



Anzahl von Messpunkten des Klangs aber nicht die gesamte kontinuierliche Funktion vorliegt, müssen wir unsere Schablonen ebenfalls diskretisieren. Das bedeutet, dass wir sie auf endlich viele, diskrete Punkte reduzieren, ähnlich, als würde man den Ton mit derselben Samplingrate wie den Klang messen. Zu jedem Zeitpunkt unserer Messung haben wir somit auch einen Funktionswert der Schablone. Zu all diesen Zeitpunkten wird jetzt die Elongation der Schablone mit der Elongation des Klangs (Messwert) multipliziert. Dabei können im Prinzip drei Fälle eintreten:

Erster Fall: Sind das Vorzeichen der Schablonenelongation und das der Klangelongation verschieden, ergibt sich ein negatives Produkt. Das bedeutet, dass an dieser Stützstelle die Schablone schlecht mit dem Klang übereinstimmt.

Zweiter Fall: Die beiden Elongationen haben das gleiche Vorzeichen, aber eine der Elongationen oder beide sind zwischen null und eins. Das Produkt ist kleiner als die einzelnen Faktoren. Auch hier stimmen Klang und Schablone nicht gut überein.

Dritter Fall: Die beiden Elongationen haben dasselbe Vorzeichen und sind beide betragsmäßig größer als eins. Somit ist das Produkt größer als die einzelnen Faktoren.

Addiert man nun alle diese Produkte, erhält man, je nachdem welche Fälle am häufigsten auftreten, ein anderes Ergebnis. Eine Schablone passt demnach ‚gut‘, wenn oft der dritte Fall eintritt und die Summe somit groß wird. Die Frequenz dieser Schablone ist also maßgeblich am Klang beteiligt. Tritt der zweite oder gar der erste Fall häufig ein, wird die Summe nahe bei null oder gar im negativen Bereich liegen. Die Schablone passt demnach nicht gut und die getestete Frequenz ist am Klang nicht oder kaum beteiligt. Bis jetzt wurde aber nur eine Frequenz getestet. Möchte man den Klang auf eine weitere Frequenz untersuchen, muss eine neue Schablone angefertigt werden. Es werden also wieder die Funktionswerte der entsprechenden Sinus-Funktion an den Stützstellen der Messung berechnet, bevor diese mit den entsprechenden Messwerten multipliziert werden. Die Produkte werden schließlich wieder addiert. Da man diese Operationen für mehrere hundert oder tausend Frequenzen durchführen muss, wird klar, dass man hier ohne

Computerunterstützung nicht mehr auskommt. Man testet dann beispielsweise die Frequenzen von 5 Hz bis 20.000 Hz in 5-Hz-Schritten. Werden diese Produktsummen schließlich nach aufsteigender Frequenz geordnet, erhält man das Klangspektrum.

Die Folgende Veranschaulichung soll das Schablonenmodell anhand eines einfachen, konstruierten Klangs verdeutlichen. Nachdem dieser aus nur zwei sinusförmigen Tönen besteht, genügen als Schablonen auch jeweils nur die Sinus-Anteile. Der Klang lässt sich als folgende Funktion a darstellen.

$$a(t) = \sin(2\pi t) + 0.5 \sin(2\pi 3t)$$

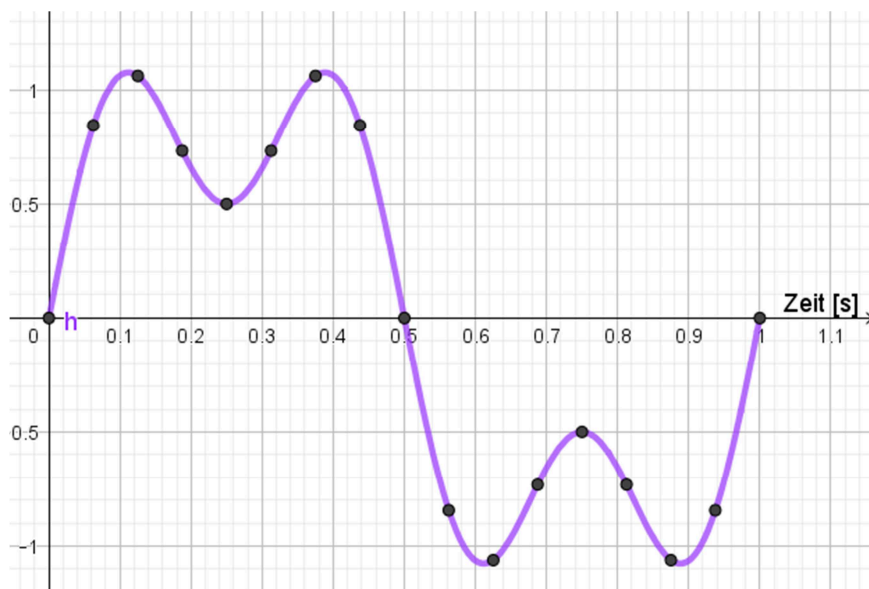


Abbildung 23: Klangkurve des Klangs $a(t)$;
Samplingrate von 16 Hz liefert das entsprechende Sample;

Der Klang besteht also aus den Tönen mit den Frequenzen 1 Hz und 3 Hz, wobei der höhere Ton nur die halbe Intensität des 1-Hz-Tons aufweist. Da wir aber von einer Messung ausgehen wollen, stehen uns vorerst nur die dargestellten Punkte im Intervall $[0,1]$ zur Verfügung und nicht die kontinuierliche Funktion. Mit einer Samplingrate von 16 Messungen pro Sekunde haben wir mit dem Punkt $[0,0]$ insgesamt 17 Messpunkte. Aus den vorangegangenen Überlegungen wissen wir, dass es nur sinnvoll ist, Frequenzen bis 8 Hz zu testen. Die erste Schablone ist also die 1-Hz-Schablone.

$$s_1(t) = \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t)$$

Da der Klang so konstruiert ist, dass er nur aus Sinus-Funktionen aufgebaut ist, reicht uns, wie bereits erwähnt, eine Testung mit Sinus-Schablonen.

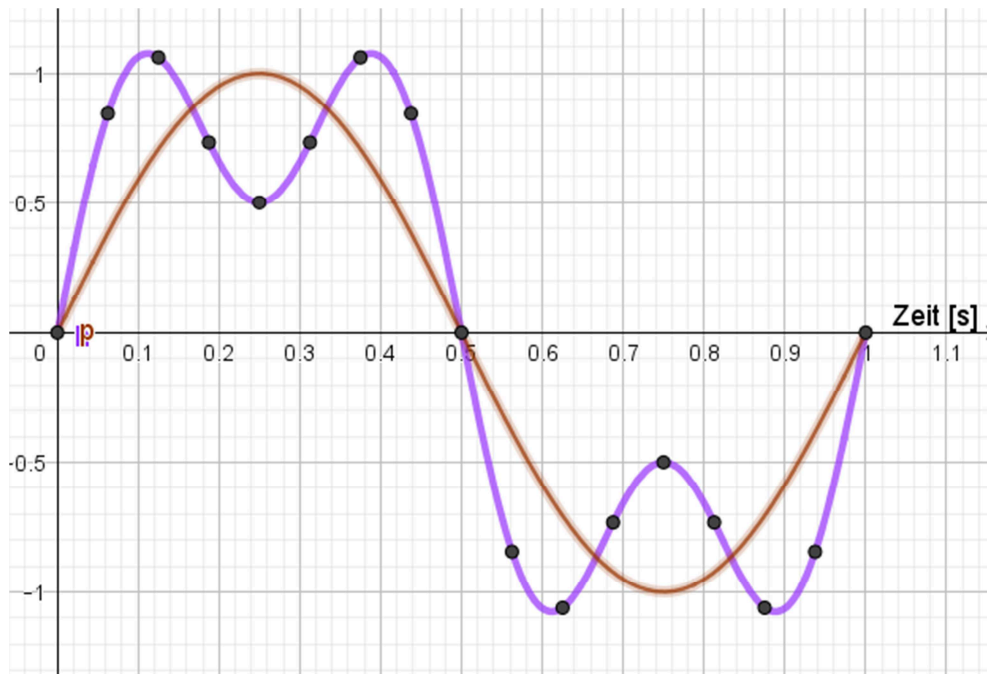


Abbildung 24: Klangkurve des Klangs $a(t)$ (violett) und 1-Hz-Sinus-Schablone (braun)

Optisch passt diese Frequenz schon sehr gut zu unserem Klang, was ein Indiz dafür ist, dass sie maßgeblich am Klang beteiligt ist. Wir wollen nun aber mit mathematischen Werkzeugen, wie das oben beschrieben ist, unsere Schablone testen. Dazu multiplizieren wir die ‚gemessenen‘ Elongationen $a(t)$, also jene des konstruierten Klangs, mit den Elongationen der Schablone $s_1(t)$ zu den entsprechenden Zeiten. Hier wäre vielleicht wichtig, nochmals zu betonen, dass der Klang im Rahmen der Veranschaulichung konstruiert wurde, damit wir dazu entsprechende diskrete Punkte erzeugen können. Die gesamte Kurve wird also nicht benötigt. Diese Vorgehensweise funktioniert somit auch bei tatsächlichen Messkurven, bei denen klarerweise keine kontinuierliche Funktion, sondern nur Messpunkte vorliegen.

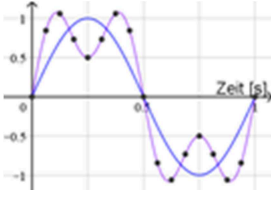
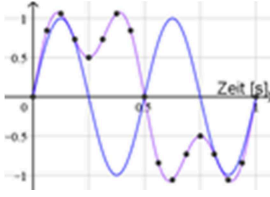
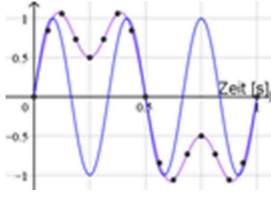
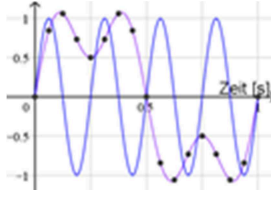
Die Summe aus den Elongationen-Produkten liefert dann einen Wert I_{s_1} , welchen wir die ‚Güte‘ oder die ‚Passgenauigkeit‘ der Schablone nennen könnten. Für sich alleine sagt dieser Wert nicht viel aus, erst im Vergleich mit anderen Schablonengüten bekommt er eine Bedeutung. Er ist dann ein Maß für die Intensität des Tons im

Klang, daher auch die Bezeichnung I_{s_v} . Für die 1-Hz-Sinus-Schablone ist die Berechnung von I_{s_1} in der unten dargestellten Tabelle durchgeführt.

t	$s_1(t)$	$a(t)$	$s_1(t) \cdot a(t)$
0	0,0000	0,0000	0,0000
0,0625	0,3827	0,8446	0,3232
0,125	0,7071	1,0607	0,7500
0,1875	0,9239	0,7325	0,6768
0,25	1,0000	0,5000	0,5000
0,3125	0,9239	0,7325	0,6768
0,375	0,7071	1,0607	0,7500
0,4375	0,3827	0,8446	0,3232
0,5	0,0000	0,0000	0,0000
0,5625	-0,3827	-0,8446	0,3232
0,625	-0,7071	-1,0607	0,7500
0,6875	-0,9239	-0,7325	0,6768
0,75	-1,0000	-0,5000	0,5000
0,8125	-0,9239	-0,7325	0,6768
0,875	-0,7071	-1,0607	0,7500
0,9375	-0,3827	-0,8446	0,3232
1	0,0000	0,0000	0,0000

Tabelle 2: Berechnung der Intensitäten mit der 1-Hz-Sinus-Schablone

Die ‚Güte‘ der Schablone oder die Intensität des Tons mit der Frequenz 1 Hz entspricht dann der Summe der letzten Spalte der obigen Tabelle. Der Wert dieser Summe ist 8. Die unten dargestellte Tabelle enthält die Testung mit allen Schablonen von 1 Hz bis 8 Hz. Die Produktsummenwerte I_{s_v} geben die entsprechenden absoluten Intensitäten an, die erst im direkten Vergleich eine Aussagekraft bekommen.

1-Hz-Schablone	2-Hz-Schablone	3-Hz-Schablone	4-Hz-Schablone
			
$I_{s_1} = 8$	$I_{s_2} = 0$	$I_{s_3} = 4$	$I_{s_4} = 0$

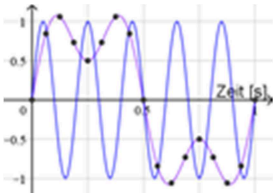
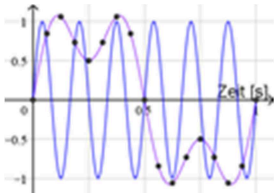
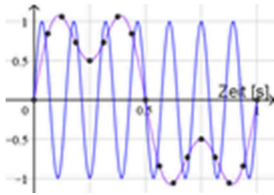
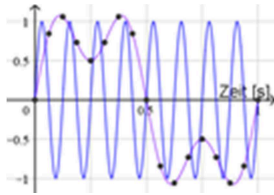
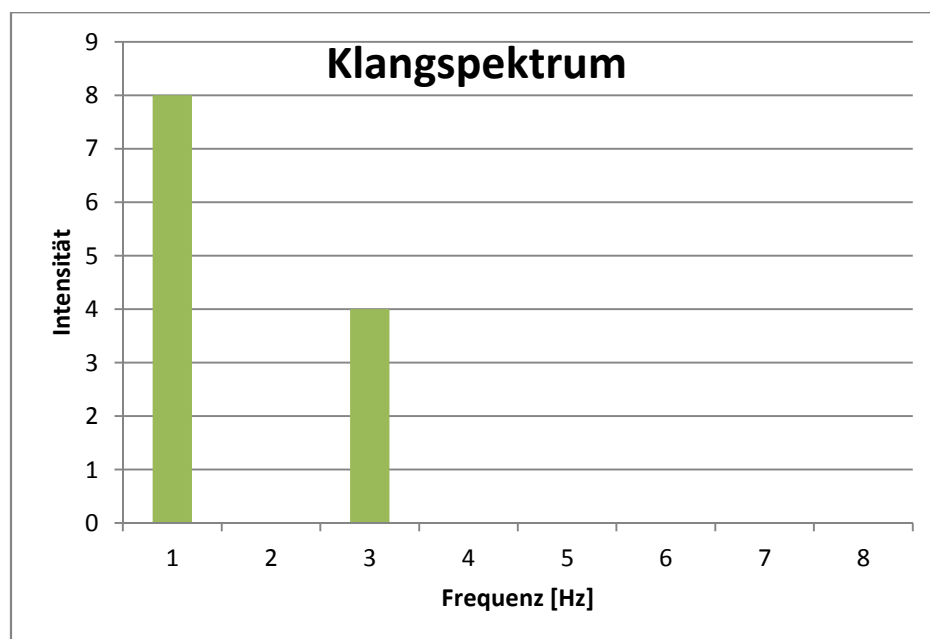
5-Hz-Schablone	6-Hz-Schablone	7-Hz-Schablone	8-Hz-Schablone
			
$I_{s_5} = 0$	$I_{s_6} = 0$	$I_{s_7} = 0$	$I_{s_8} = 0$

Tabelle 3: Darstellung der Sinus-Schablonen und ihrer ‚Güte‘

Wie zu erwarten war, liefert die Analyse das Ergebnis, dass sich der Klang aus den Tönen mit den Frequenzen 1 Hz und 3 Hz zusammensetzt. Außerdem zeigt sie, dass die Intensität des höheren Tons $I_{s_3} = 4$ halb so groß ist wie die des Grundtons $I_{s_1} = 8$. Außerdem kann man erkennen, dass keine der anderen getesteten Frequenzen am Klang beteiligt ist. Für einen konstruierten Klang kann man hier sehen, dass unsere ‚Quasi-Fourieranalyse‘ ihren Zweck perfekt erfüllt und als Ergebnis genau die Frequenzen mit den relativen Intensitäten liefert, die wir für unseren Klang verwendet haben. Trägt man die Intensitäten zu den entsprechenden Schablonen in einem Säulendiagramm auf, erhält man ein erstes, sehr idealisiertes Klangspektrum.

Abbildung 25: Spektrum des künstlichen Klangs $a(t)$, gesampelt mit einer Samplingrate von 16 Hz

An dieser Stelle sollte man in der Klasse dazusagen, dass bei einem realen Klang, der ebenfalls nur aus den Tönen mit 1 Hz und 3 Hz besteht, das Ergebnis leicht anders aussehen wird. Der Grund dafür sind diverse Geräteungenauigkeiten und Messfehler die bei einer realen Messung unvermeidbar sind. Die aus der Messung bestimmten Amplituden werden daher sicherlich nicht dieselben Höhen aufweisen wie jene aus der Veranschaulichung, welche eben aus einer Funktion entnommen wurden. Außerdem müsste man hier auch zusätzlich die Kosinus-Schablonen verwenden, um die Phasenverschiebung zu berücksichtigen, welche in der Veranschaulichung ebenfalls nicht auftritt. Dieser Punkt wird aber in der letzten Einheit noch genauer besprochen. Am Ende dieser Einheit sollen die Schüler und Schülerinnen noch die Möglichkeit bekommen, sich selbst näher mit der dynamischen Veranschaulichung in GeoGebra zu beschäftigen, und eventuell selbst Testungen durchzuführen. Ferner können die Grenzen der Messbarkeit, bzw. die Grenzen eines Modells, aber auch seine Vorteile diskutiert werden. Schließlich wird noch die Zusammenfassung ‚Schritt 2 auf dem Weg zur Fourieranalyse: Klänge rekonstruieren‘ ausgeteilt (siehe Anhang), die helfen soll, die zentralen Punkte dieser Einheit noch einmal Revue passieren zu lassen. In der letzten Einheit geht es dann darum, unser Schablonenmodell an den aufgenommenen Rohdaten der ersten Einheit zu testen und das Ergebnis mit jenem der App zu vergleichen.

3.5 Dritte Einheit (100 Minuten Mathematik)

In dieser letzten Einheit sollen die Jugendlichen mit ihren Rohdaten aus der ersten Einheit selbst die Fourieranalyse durchführen und das Ergebnis ihrer Arbeit mit der Fourieranalyse der App phyphox® vergleichen. Schließlich soll ein Klangspektrum entstehen, dass jenem der App in allen wesentlichen Merkmalen gleicht. Die Schülerinnen und Schüler haben somit einen Eindruck erhalten, welcher Aufwand, aber auch welche Überlegungen hinter der Fourieranalyse stecken. Am Ende der Einheit und damit am Ende der Unterrichtssequenz ‚Klangspektren – eine Anwendung der Fourieranalyse‘ werden weitere Einsatzmöglichkeiten besprochen und vorgestellt.

Feinziele der dritten Einheit

- Die Schülerinnen und Schüler können größere Datenmengen in einem Tabellenkalkulationsprogramm strukturieren, graphisch darstellen, mit ihnen operieren und sie interpretieren.
- Sie können das Schablonenmodell eigenständig auf ihre Daten anwenden und den aufgenommenen Klang dadurch beschreiben.
- Die Schüler und Schülerinnen erkennen Abweichungen ihrer Klangspektren vom automatisch generierten und können Vermutungen über deren Ursachen anstellen. Sie erfahren die Zwischenschritte auf dem Weg zum ‚Endprodukt Fourieranalyse‘ als wichtige Teile eines Ganzen.
- Sie können ihre Ergebnisse in der Gruppe präsentieren und Unterschiede zu anderen Gruppen diskutieren. Sie reflektieren ihren Lernprozess und wissen ihre eigenen Leistungen zu würdigen. Sie sehen das Ergebnis ihrer Arbeit als Motivation für zukünftige mathematische Herausforderungen.
- Sie erkennen den Anwendungscharakter von Mathematik, kennen einige Anwendungen der Fourieranalyse und verstehen ihre Bedeutung im digitalen Zeitalter.

Vorbereitung und Materialien

Auch in dieser Unterrichtseinheit benötigen die Schülerinnen und Schüler Laptops oder Computer mit einem Tabellenkalkulationsprogramm. Außerdem benötigen sie ihre exportierten Daten aus der ersten Unterrichtseinheit, da mit diesen schließlich die Fourieranalyse durchgeführt werden soll. Im Anhang befindet sich die genaue Erläuterung einer durchgeführten Fourieranalyse mit Excel. Die Lehrkraft sollte unbedingt nach dieser Vorlage ein Excel-Blatt erstellen, welches dann zur Orientierung dient. Schüler und Schülerinnen sollten aber im Unterrichtsverlauf ihre eigenen Dokumente bearbeiten. Falls sich das zeitlich nicht ausgehen sollte, kann die Vorlage der Lehrkraft aber auch dazu verwendet werden, die aufgenommenen Klänge der Schülerinnen und Schüler in wenigen Sekunden zu analysieren. Das kann erreicht werden, indem die ersten beiden Spalten durch die entsprechenden Rohdaten ersetzt werden. Da das ‚Programmieren‘ und Visualisieren der Fourieranalyse aber der größte und letzte, damit aber auch vermutlich der am

meisten Freude erweckende Schritt in einer langen Kette von Überlegungen und Vorbereitungen ist, sollte dies wirklich nur Plan B sein. Am Ende der Sequenz wird schließlich noch die Zusammenfassung ‚Schritt 3 auf dem Weg zur Fourieranalyse‘ ausgeteilt, welche sich im Anhang befindet.

Zeittafel

Dauer	Inhalt	Methode	Materialien
15 min	Darstellung der exportierten Daten in einem Tabellenkalkulationsprogramm	L-S-Gespräch, Einzelarbeit, Partnerarbeit	PC oder Laptop mit Excel oder einer anderen Tabellenkalkulationssoftware
40 min	Anwendung des Schablonenmodells auf die Daten der ersten Einheit	Partnerarbeit, Unterstützung durch L	PC oder Laptop mit Excel oder einer anderen Tabellenkalkulationssoftware
15 min	Fehlerdiskussion und Verbesserung des Schablonenmodells	L-S-Gespräch	PC oder Laptop mit Excel oder einer anderen Tabellenkalkulationssoftware
25 min	Präsentation der Ergebnisse	S-Präsentation	Tabellenkalkulationssoftware
5 min	Weitere Anwendungen der Fourieranalyse, Ausblick und Abschluss der Sequenz	L-S-Gespräch	Handout: Schritt 3 auf dem Weg zur Fourieranalyse

Unterrichtsverlauf

Die Schüler und Schülerinnen benötigen nun ihre exportierten Daten der ersten Einheit. Wurde als Dateiformat Excel gewählt, haben die Jugendlichen nun eine Excel Datei mit zwei Tabellenfenstern vor sich. Das erste trägt den Namen *FFT Spectrum* und beinhaltet zwei Spalten: *Frequency (Hz)* und *Absolute Amplitude (a.u.)*. Dieses Fenster stellt daher den Zusammenhang zwischen Frequenz und

absoluter Elongation dar, also bereits die durchgeführte Fourier-Transformation. Die Jugendlichen sollen diese Daten graphisch in einem Punktdiagramm darstellen, sodass das typische Bild des Klangspektrums angezeigt wird, wie es auch am Smartphone bereits sichtbar war. Dieses soll später als Vergleich zur eigenständig durchgeführten Transformation dienen. Nun widmen wir uns dem zweiten Fenster *Raw data*. Auch hier findet man zwei Spalten: *Time (s)* und *Recording (a.u.)*. Stellt man diese Daten graphisch in einem Punktdiagramm dar, wird die Klangkurve deutlich erkennbar. Mit diesen Daten wird nun weitergearbeitet und selbst die Fourieranalyse durchgeführt. Je nachdem, wie viel Erfahrung die Schülerinnen und Schüler bereits mit Tabellenkalkulationsprogrammen haben, muss man ihnen in der folgenden Arbeitsphase mehr oder weniger zur Seite stehen. Eines sollte zuvor aber auf jeden Fall noch geklärt werden: In der Veranschaulichung der letzten Stunde wurden nur Sinus-Schablonen s_v verwendet, da wir bereits wussten, dass unser Klang nur aus Sinus-Funktionen besteht. Hier ist das nicht mehr der Fall, weshalb wir auch die Kosinus-Schablonen c_v verwenden müssen. Das würde aber bedeuten, dass man pro Frequenz zwei unterschiedliche Intensitäten für einen Ton hätte. Um aus den beiden Intensitäten eine einzelne zu bilden, welche in Relation zu den anderen Tönen die korrekte Intensität aufweist, wird die folgende Formel angewendet:

$$I_v = \sqrt{I_{s_v}^2 + I_{c_v}^2}$$

Warum man diese Intensitäten so zu einer zusammenfasst, ist in Kapitel 2.2 näher erläutert. Im Unterricht kann man aber daran erinnern, dass Folgendes gilt:

$$\sqrt{\sin(x)^2 + \cos(x)^2} = 1$$

In der vorherigen Unterrichtseinheit wurde bereits angemerkt, dass in der Messung ein Ton zu unterschiedlichen Anteilen in seiner Kosinus-Form bzw. in seiner Sinus-Form im Klang enthalten ist. Daher müssen wir aus den beiden Intensitäten einen ‚Quasi-Mittelwert‘ berechnen, der diese Tatsache berücksichtigt. Dies gelingt mit der obigen Formel, die alle Schablonenpaare auf einen gemeinsamen Level normiert und so ihre kombinierten Intensitäten vergleichbar macht. Begnügt man sich aber mit einer sehr oberflächlichen Betrachtung und interessiert sich nur für die Position der Peaks, nicht aber für deren Intensität, würde es auch genügen, sich auf eine

Schablonenart zu beschränken. Dabei kann es aber passieren, dass eine Frequenz ‚übersehen‘ wird, nämlich dann, wenn dieser Ton zum größten Teil als Kosinus-Anteil vorliegt und man nur die Sinus-Anteile untersucht und vice versa.

Ein letzter Hinweis, bevor die Jugendlichen selbst mit der Analyse ihrer Daten beginnen können, bezieht sich auf die Excel-Syntax. Da nun nicht einzelne Frequenzen getestet werden sollen, sondern gleich eine Vielzahl, benötigt man eine Excel-Formel, die in einem Schritt die Summe aller Produkte der Messwerte mit den entsprechenden Schablonenelongationen berechnet.

$$= \text{SUMMENPRODUKT}(\text{Array1}; \cos(2\pi v \cdot \text{Array2}))$$

Dabei ist *Array1* der Vektor bzw. die Spalte der Messwerte (Recording) und *Array2* der Vektor der Messzeitpunkte (Time). Diese Bereiche können zuvor definiert werden, dann muss im Befehl nur die gewählte Bezeichnung verwendet werden.

Beispielsweise:

$$= \text{SUMMENPRODUKT}(\text{arrAMP}; \cos(2\pi v \cdot \text{arrZEIT}))$$

Alternativ kann auch die gesamte Spalte markiert werden, was gleichzusetzten ist mit der Schreibweise *erste Zelle: letzte Zelle* der entsprechenden Spalte.

$$= \text{SUMMENPRODUKT}(A2:A2049; \cos(2\pi v \cdot B2:B2049))$$

Das Formelzeichen v steht in all diesen Formeln für den relativen Zellbezug, der auf die Spalte der Testfrequenzen zugreift. Die Schüler und Schülerinnen sollen nun in den Zweier- bzw. Dreierteams, in denen sie in der ersten Einheit die Daten aufgenommen haben, die Fourieranalyse durchführen und mit der bereits durchgeführten Variante der App vergleichen.

Die Spalten A und B der dargestellten Tabelle (Abbildung 26) befinden sich schon in dem Dokument der exportierten Daten der App und gehen bis zur Zeile 2049, da 2048 Messungen durchgeführt werden. In der Spalte C befinden sich jene Frequenzen, welche getestet werden sollen. In diesem Fall sind das die Frequenzen mit den natürlichen Zahlen von 1 Hz bis 2048 Hz. Es spricht aber vorerst nichts

dagegen, diese Spalte weiter zu verlängern und noch höhere Frequenzen bis zur halben Abtastrate zu untersuchen oder beispielsweise nur ganzzahlige Vielfache von 5 Hz zu untersuchen.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Time (s)	Recording	Testfrequen	Cos Anteil	Sin Anteil	Pythagoras		
2	0	0,0033723	1	-0,24787861	-1,00753779	1,03758191		
3	2,083E-05	0,0013021	2	0,14511845	-1,94417736	1,9502139		
4	4,167E-05	-0,002161	3	0,76950571	-2,74615501	2,8525080		
5	0,0000625	-0,006592	4	1,58163914	-3,3574277	3,45079588		
6	8,333E-05	-0,012199	5	2,52478777	-3,73451695	4,50795882		
7	0,0001042	-0,018408						
8								
9								
10	0,0001667	-0,038747	9	6,25398522	-2,66484785	6,79806923		
11	0,0001875	-0,043588	10	6,84949457	-1,849932	7,09491538		

Abbildung 26: Darstellung der Excel-Datei mit entsprechenden Formeln

Die Spalten D und E greifen dann auf die ersten drei Spalten zurück und erzeugen die Intensitäten, die man mit der Kosinus-Schablone bzw. mit der Sinus-Schablone bekommt. In der letzten Spalte F befinden sich die kombinierten Intensitäten aus Sinus- und Kosinus-Schablonen. Spalte F ergibt gemeinsam mit Spalte C das unten abgebildete Klangspektrum.

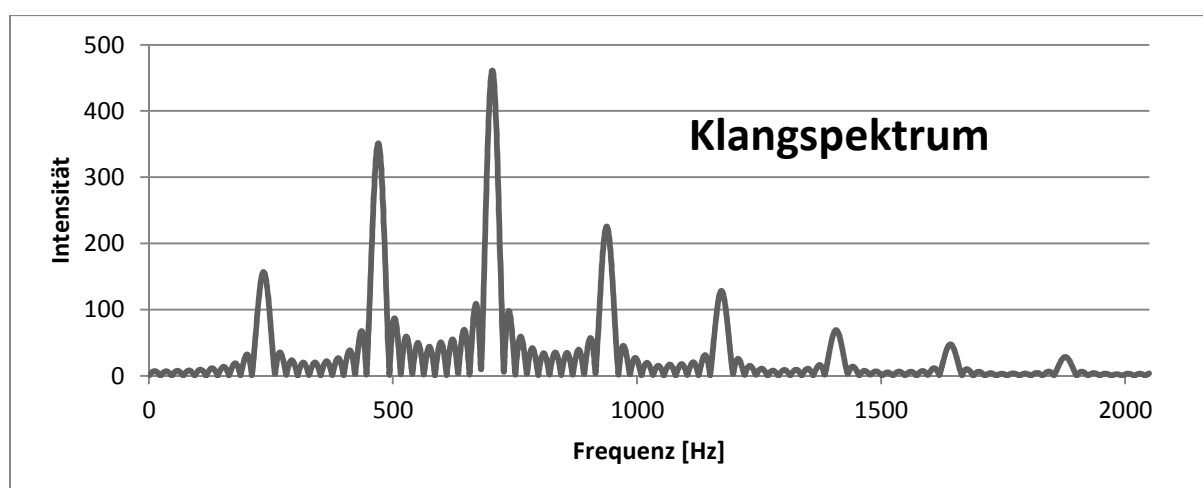


Abbildung 27: Klangspektrum der in Excel durchgeführten Fourieranalyse

Normiert man nun die Intensität auf den Grundton, dividiert also alle Intensitäten durch jene des ersten Peaks, und macht dasselbe beim phyphox®-Klangspektrum, dann lassen sich die beiden vergleichen.

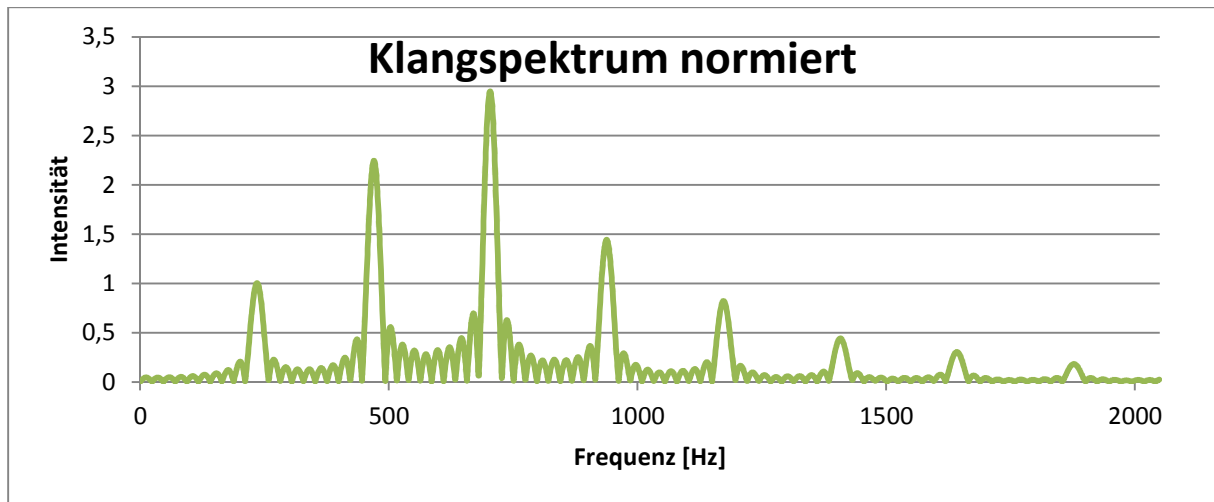


Abbildung 28: Klangspektrum der in Excel durchgeführten Fourieranalyse, normiert auf den Grundton

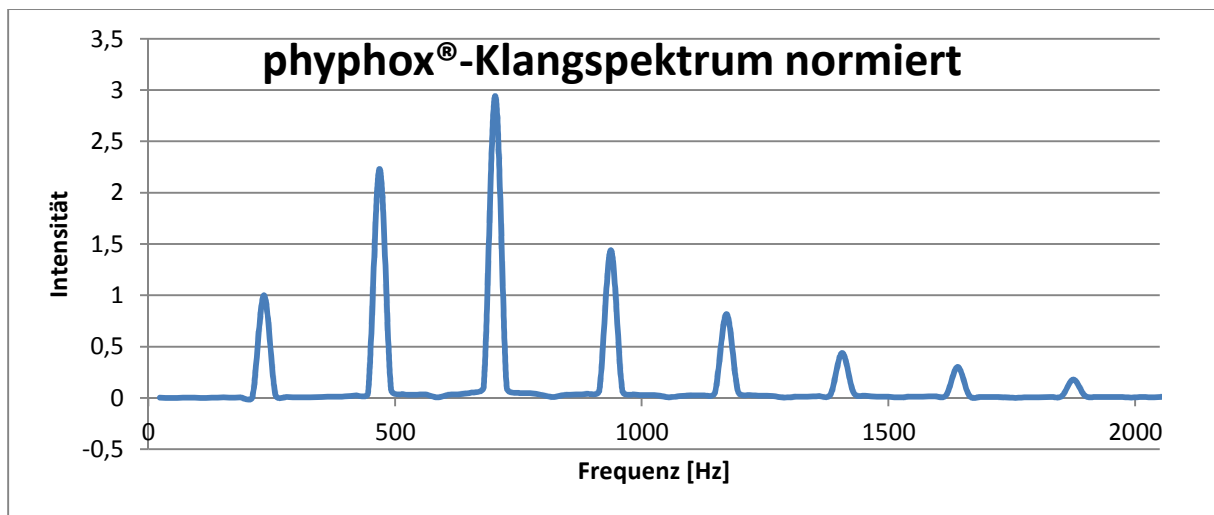


Abbildung 29: Klangspektrum der phyphox®-Analyse, normiert auf den Grundton

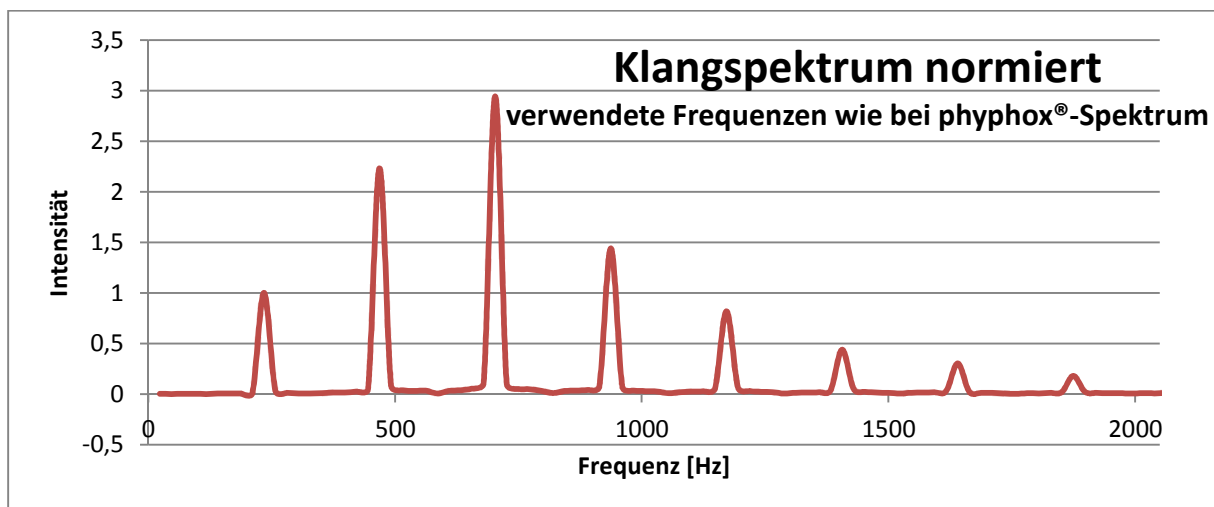


Abbildung 30: Klangspektrum der in Excel durchgeführten Fourieranalyse mit den von phyphox® verwendeten Frequenzen, normiert auf den Grundton

Im direkten Vergleich fallen mehrere Dinge auf. Erstens kann man feststellen, dass die Peaks des selbst erstellten Klangspektrums anscheinend an denselben Positionen wie die entsprechenden Peaks des automatisch von phyphox® erstellten Klangspektrums liegen. Außerdem weisen sie auch die gleichen Höhen auf. Das Schablonen-Modell hat somit gute Arbeit geleistet. Zweitens bemerkt man aber, dass das eigene Klangspektrum mehrere merkwürdige kleinere Zwischenpeaks zwischen den Hauptpeaks aufweist. Bisher wurde nämlich noch nicht berücksichtigt, dass man die zu testenden Frequenzen entsprechend der Samplingrate r_s und der Anzahl an Messdaten N bestimmen muss und nicht beliebig wählen darf, wie das bisher angenommen wurde. Die App arbeitet mit einer Samplingrate von 48 kHz. Diesen Wert kann man leicht bestimmen, indem man die Anzahl der Messdaten durch den Messzeitraum T dividiert.

$$r_s = \frac{N}{T} = \frac{2048}{0,04266667} = 48\,000$$

Die Testfrequenzen müssen dann folgende Gestalt aufweisen:

$$v_k = \frac{k}{T} = \frac{k \cdot r_s}{N} \text{ wobei } n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Warum das so ist, wird in Kapitel 2.5 näher erläutert. Um diese Tatsache im Unterricht plausibel zu machen, könnte man aber salopp sagen, dass wir aufgrund der endlichen Anzahl an Daten nicht beliebige und auch nicht beliebig viele Frequenzen testen können. In unserem Fall haben wir 2048 Messpunkte und eine Abtastrate von 48.000 Hz. Somit lässt sich die erste Frequenz unseres Spektrums berechnen:

$$v_1 = \frac{1 \cdot 48\,000}{2048} = 23,4375 \text{ Hz}$$

Alle weiteren Frequenzen sind ganzzahlige Vielfache dieser Frequenz. Die letzte Frequenz des Spektrums ist:

$$v_{1023} = \frac{1023 \cdot 48\,000}{2048} = 23\,976,5625 \text{ Hz}$$

Möchte man ein feineres Spektrum erhalten, gibt es zwei Möglichkeiten, dies zu erreichen. Entweder könnte man die Samplingrate erhöhen, was bei der App nicht möglich ist, oder man misst über einen längeren Zeitraum, sodass die Anzahl der

Messpunkte steigt. Diese zweite Option ist in der App verfügbar. Nehmen wir nun diese Korrektur in unserer Analyse noch vor, erhalten wir das letzte der oben dargestellten Klangspektren (Abbildungen 30). Dieses unterscheidet sich nicht mehr von dem automatisch generierten der App. Der Algorithmus der App ist somit endgültig entschlüsselt. Da uns in erster Linie die Peaks des Klangspektrums interessieren und diese auch schon in der ersten Version deutlich erkennbar waren, ist diese letzte Korrektur nicht zwingend notwendig. Den Schülerinnen und Schülern wird der Unterschied aber wohl auffallen und somit sollte er zumindest diskutiert werden.

Haben alle ihre Klänge analysiert und visualisiert, bietet sich eine kurze Präsentation an, in der jede Gruppe in wenigen Sätzen ihre Ergebnisse vorstellt. Darin sollte erwähnt werden, welches Instrument und welcher Grundton aufgenommen wurde, wie viele Obertöne erkennbar sind, welche Schwierigkeiten bei der Auswertung auftraten und wie das endgültige Klangspektrum aussieht. Dazu wird es nicht notwendig sein, eine eigene Präsentation zu erstellen – eine Erklärung anhand des fertigen Excel-Blatts sollte ausreichen. Anschließend können dann noch Unterschiede zwischen den Gruppen diskutiert werden. Beispielsweise könnte auffallen, dass bei hohen Tönen der Grundton meist der intensivste Ton des Spektrums ist, während bei tiefen Tönen auch der zweite, dritte oder vierte Oberton die größte Intensität aufweisen kann, wie das auch bei dem oben dargestellten Klang (Abbildungen 27 bis 30) der Fall ist. Am Ende der letzten Einheit sollte unbedingt noch besprochen werden, wo die Fourieranalyse überall Anwendung findet, damit nicht der Eindruck entsteht, dass sie ausschließlich zur Erzeugung von Klangspektren genutzt wird. Schließlich wird noch das Handout ‚Schritt 3 auf dem Weg zur Fourieranalyse: Schablonenmodell im Praxistest‘ ausgeteilt, welches die Grundgedanken der dritten Einheit zusammenfasst.

Wie die Ergebnisse der Fourieranalyse festgehalten werden sollen, liegt im Ermessen der Lehrkraft. Sinnvoll wäre aber zusätzlich zu den drei Zusammenfassungen, die am Ende jeder Einheit ausgegeben wurden, eine Art Portfolio oder ein Protokoll, das die wesentlichen Experimente, weitergehende Überlegungen und Ergebnisse dieser Sequenz beinhaltet. Dieses kann dann in die Benotung miteinbezogen werden und als Lernunterlage für eine vertiefende Matura genutzt werden.

4 Schlussworte

4.1 Zusammenfassung

Klangspektren bieten eine Möglichkeit, den abstrakten Begriff der Fourieranalyse schon auf schulmathematischem Niveau greifbar zu machen. Das vorliegende Unterrichtskonzept soll Oberstufen-Schülerinnen und Schülern eines Physik-Mathematik-Labors oder eines entsprechenden Wahlpflichtfaches Einblicke in die höhere Mathematik geben und die Möglichkeit bieten, Methoden angewandter Mathematik kennenzulernen. In drei Doppelstunden zu je 100 Minuten wird ausgehend vom doch recht intuitiven Phänomen der Klangerzeugung ein Modell zur Analyse von Klängen erarbeitet. In der ersten Einheit wird die Entstehung und Ausbreitung von Klängen besprochen. Ferner wird ein Klangspektrum aufgenommen und qualitativ untersucht. In der Folgeeinheit wird aus den Messergebnissen die Funktion des aufgenommenen Klangs rekonstruiert, bevor in der letzten Einheit die Rohdaten selbst analysiert werden, sodass die Fourieranalyse von Grund auf nachvollzogen werden kann. Die Unterrichtssequenz bietet Schülern und Schülerinnen somit die Erfahrung, dass sich auch etwas derart Komplexes und Ästhetisches wie ein Klang mit Mitteln der Physik und der Mathematik beschreiben lässt.

4.2 Abstract

Sound spectra offer the possibility of making the abstract concept of Fourier analysis tangible already in upper secondary school. The teaching concept presented herein is intended to give upper secondary school pupils who attend a compulsory class that combines mathematics and physics or a corresponding elective subject first insights into higher mathematics and to offer them the possibility of getting to know the methods and ways of thinking of applied mathematics. In three double lessons of 100 minutes each, a model for the analysis of sounds will be developed on the basis of the rather intuitive phenomenon of sound generation. In the first lesson the generation and expansion of sound is discussed and a sound spectrum is recorded. In the follow-up lesson the results of this measurement are used to reconstruct the function of the recorded sound. Finally, the raw data itself is analysed so that the Fourier analysis can be fully comprehended. The teaching sequence thus offers students the experience that something as complex and aesthetic as sound can be expressed as a mathematical equation.

5 Quellenverzeichnis

5.1 Literaturverzeichnis

BHARITKAR, Sunil/ KYRIAKAKIS, Chris (2006): *Immersive Audio Signal Processing*. – New York: Springer-Verlag.

DOKUCHAEV, Nikolai (2016): *On Nyquist-Shannon Theorem with one-sided half of sampling sequence*. – Perth: Curtin University.

LIESEN, Jörg/ MEHRMANN, Volker (2011): *Lineare Algebra – Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis*. – Heidelberg: Vieweg+Teubner Verlag.

SCHWEIZER, Timo (2012): *Sprache und Gehirn – Der auditorische Kortex und seine Bedeutung in der Verarbeitung von Sprache*. – Hamburg: Diplomica Verlag.

SHANNON, Claude (1948): *A Mathematical Theory of Communication*. – The Bell System Technical Journal Vol. 27.

STEIGLITZ, Ken (1996): *A Digital Signal Processing Primer – with Applications to Digital Audio and Computer Music*. – Menlo Park: Addison- Wesley Publishing Company.

5.2 Internetquellen

Letzter Aufruf aller Internetquellen am 27.1.2020

Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft, Systemtheorie Online:
<https://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/teil-b-zeitdiskrete-signale-und-systeme/diskrete-fourier-transformation/grundlagen-der-diskreten-fourier-transformation/inverse-diskrete-fourier-transformierte.html>

RIS, Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten 2015, Fassung vom 14.01.2020:
<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20009288>

DSP Related.com, derivation of the discrete fourier transform:
https://www.dsprelated.com/freebooks/mdft/DFT_Derived.html

StackExchange, Mathematics, Proof of orthonormality of basis of DFT:
<https://math.stackexchange.com/questions/2413218/proof-of-orthonormality-of-basis-of-dft>

The Fact Factor:
https://thefactfactor.com/facts/pure_science/physics/sound-waves/6757/

Abbildung zum Nyquist-Shannon-Abtasttheorem:
https://de.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon-Abtasttheorem#/media/Datei:%20Nyquist_Aliasing.svg

phyphox®-wiki, Experiment: Audio Spectrum:
[https://phyphox.org/wiki/index.php?title=Experiment: Audio Spectrum](https://phyphox.org/wiki/index.php?title=Experiment:_Audio_Spectrum)

5.3 Abbildungsverzeichnis

Alle Abbildungen, bis auf die im Text entsprechend gekennzeichneten, stammen aus den für diese Arbeit eigens angefertigten Dokumenten, Skizzen und Photographien.

1:	Graphische Darstellung der Klang-Funktion	8
2:	Darstellung eines diskreten Messsignals	11
3:	$c(v)$ - Analyse des künstlichen Samples x_{ct}	19
4:	$c(v)$ - Analyse des künstlichen Samples x_{st}	20
5:	$s(v)$ - Analyse des künstlichen Samples x_{st}	20
6:	N_v - Analyse eines realen Samples; Testfrequenzen $v \in \mathbb{N}$	21
7:	N_v - Analyse eines realen Samples; Testfrequenzen $v_k = k \cdot r_s/N$, $k \in \mathbb{N}$	22
8:	Scheinbarer 6 kHz Ton.....	24
9:	6 kHz Ton und 42 kHz Ton.....	24
10:	Aliasing bei einer Samplingrate von 48 kHz.....	26
11:	Ausbreitung von Schallwellen	32
12:	Ausbreitung eines Knalls	32
13:	Sichtbarmachen der Schallwellen	33
14:	Stimmgabel.....	34
15:	Klangbild am Oszilloskop	35
16:	negative und positive Interferenz	37
17:	Experiment Audio Spektrum; Ansicht Rohdaten	38
18:	Experiment Audio Spektrum; Ansicht Spektrum	38
19:	Klangspektrum einer Tenorposaune	41
20:	„Abgeschnittener“ Peak.....	45
21:	rekonstruierter Klang mit zwei und mit acht Obertönen.	47
22:	Zunehmende Signalfrequenz bei gleichbleibender Abtastrate.....	48
23:	Klangkurve des Klangs $a(t)$	52
24:	Klangkurve und 1 Hz-Sinus-Schablone.....	53
25:	Spektrum des künstlichen Klangs $a(t)$	55
26:	Darstellung des Excel-Blatts mit entsprechenden Formeln	61
27:	Fourieranalyse in Excel durchgeführt.....	61
28:	Fourieranalyse in Excel durchgeführt (normiert)	62
29:	phyphox®-Analyse (normiert).....	62
30:	Fourieranalyse in Excel (phyphox®-Frequenzen; normiert).....	62
31:	Peakpositionen und Peakhöhen bestimmen.....	70
32:	Handout zum Nyquist-Shannon-Theorem.....	73
33:	Entstehung eines Klangs durch Überlagerung zweier Töne	74
34:	Analog-zu-digital-Veranschaulichung.....	75
35:	Klangspektrum einer Tenorposaune	75
36:	Darstellung des Schablonenmodells	77
37:	Diskretes Schablonenmodell	77
38:	Excel-Syntax zur Durchführung der Fourieranalyse	79
39:	Fourieranalyse in Excel durchgeführt.....	79
40:	Klangspektrum mit „erlaubten“ Frequenzen (normiert)	80
41:	Interferenz-Animation mit GeoGebra.	81
42:	Visualisierung des Schablonenmodells in GeoGebra	82
43:	Excel-Syntax zur Durchführung der Fourieranalyse	84
44:	Klangspektrum einer Tenorposaune	85

6 Anhang

Name: _____

Versuchsanleitung: Klangspektren aufnehmen

Material:

- Smartphone mit phyphox®
- harmonisches Instrument (kein Schlagwerk, Percussion, etc.)

Durchführung:

Findet einen ruhigen Ort im Physiksaal oder vor dem Physiksaal oder koordiniert euch mit euren Klassenkolleginnen und Kollegen, sodass ihr ungestört mit eurem Smartphone den Klang eures Instrumentes aufnehmen könnt. Verwendet dazu das phyphox®-Experiment *Audio Spektrum*.

Eine Person übernimmt die Rolle des Spielers, die andere die des Experimentators. Wenn gerade niemand anderes einen Ton aufnimmt, spielt der Spieler einen Ton an. Sobald der Ton klingt, startet der Experimentator die Messung über die *Start*-Taste und beendet diese kurz darauf wieder (2 Sekunden Messzeit genügen). Erst dann lässt der Spieler den Ton verklingen. Bei Zupfinstrumenten wird mit der Messung unmittelbar nach dem Zupfen der Saite begonnen. Wiederholt die Messung bis ihr mindestens fünf deutliche Peaks erkennen könnt. Funktioniert das nicht, versucht einen anderen Ton anzupspielen. Sobald ein passendes Spektrum vorliegt, speichert es mit der Option *Zustand speichern*. Tippt man nun auf das aufgenommene Spektrum, kann man unter dem Punkt *Mehr Werkzeuge* die logarithmische Achsenbeschriftung ausschalten. Mit der Funktion *Punkte wählen* können dann Position und Höhe der Peaks ausgelesen werden (Abbildung 31). Bestimmt so alle deutlich erkennbaren Peaks und haltet eure Ergebnisse fest. Verwendet dazu das vorgefertigte Protokoll am Ende dieser Arbeitsanweisung. Der erste Peak entspricht der Frequenz des Grundtons, die weiteren jene der Obertöne.

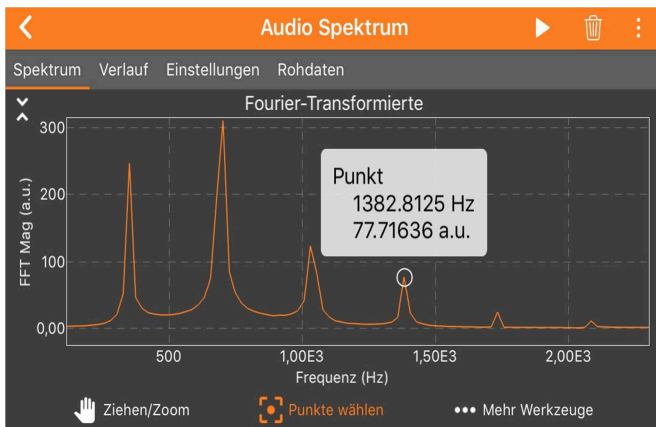


Abbildung 31: Peakpositionen und Peakhöhen mit der Funktion *Punkte wählen* in phyphox® bestimmen

Bestimmt nun den Grundton auf die zweite besprochene Art. Geht dazu in eurer Messung auf die Ansicht *Rohdaten* und bestimmt die Periodendauer möglichst vieler Schwingungen. Dividiert das Ergebnis durch die Anzahl an Schwingungen und ihr erhaltet die Periodendauer einer Schwingung. Der Kehrwert dieses Ergebnisses ist

die Frequenz des Grundtons. Vergleicht dieses Ergebnis mit der Frequenz des Grundtons aus dem Spektrum.

Mit der Option *Daten exportieren* → *Excel* werden die Messwerte (Abweichungen zum Normaldruck) in eine Excel-Tabelle übernommen. Speichert diese Datei so, dass in der nächsten Einheit damit weiter gearbeitet werden kann.

Experimentiert nun selbstständig mit anderen Grundtönen und anderen Instrumenten. Welche Beobachtungen könnt ihr machen, welche Zusammenhänge fallen euch auf? Tauscht euch auch mit anderen Gruppen aus. Orientiert euch dabei an folgenden Leitfragen:

- Ist der Grundton auch jener Ton mit der größten Intensität?
- Kannst du die Anzahl der Obertöne durch die Anspielweise beeinflussen?
- Wie ändern sich die Klangspektren, wenn man einen tiefen und einen hohen Ton auf einem Instrument anspielt?
- Hat derselbe Grundton bei unterschiedlichen Instrumenten die gleichen Obertöne?
- Was fällt dir auf, wenn du die Frequenz des Grundtons mit den Frequenzen der Obertöne vergleichst?
- Was könnte hinter der Bezeichnung *Fourier-Transformierte* stecken? Wie könnte diese Entschlüsselung funktionieren?



Protokoll: Klangspektren aufnehmen

Gruppe: _____ & _____

Datum: _____

Instrument: _____

Angespielter Ton: _____

Dateiname: _____

Peak	Ton	Position (Hz)	Höhe (a.u.)
1	Grundton		
2	1. Oberton		
3	2. Oberton		
4	3. Oberton		
5	4. Oberton		
6	5. Oberton		
7	6. Oberton		
8	7. Oberton		
9	8. Oberton		
10	9. Oberton		

Dauer von ____ Schwingungen $T_{\text{}} = \text{_____}$ Sekunden.

Periodendauer einer Schwingung $T = \text{_____}$ Sekunden.

Frequenz des Grundtons $\nu = \frac{1}{T} = \text{_____}$ Hz.

Beobachtungen und Überlegungen:

Name: _____

Versuchsanleitung: Klänge rekonstruieren

Material:

- Versuchsanleitung: Klangspektren aufnehmen
- gespeichertes phyphox®-Experiment
- PC mit dem Programm GeoGebra

Durchführung:

Rekonstruiere den in der letzten Einheit aufgenommenen Klang mit Hilfe von GeoGebra. Erstelle dazu Funktionen der folgenden Gestalt:

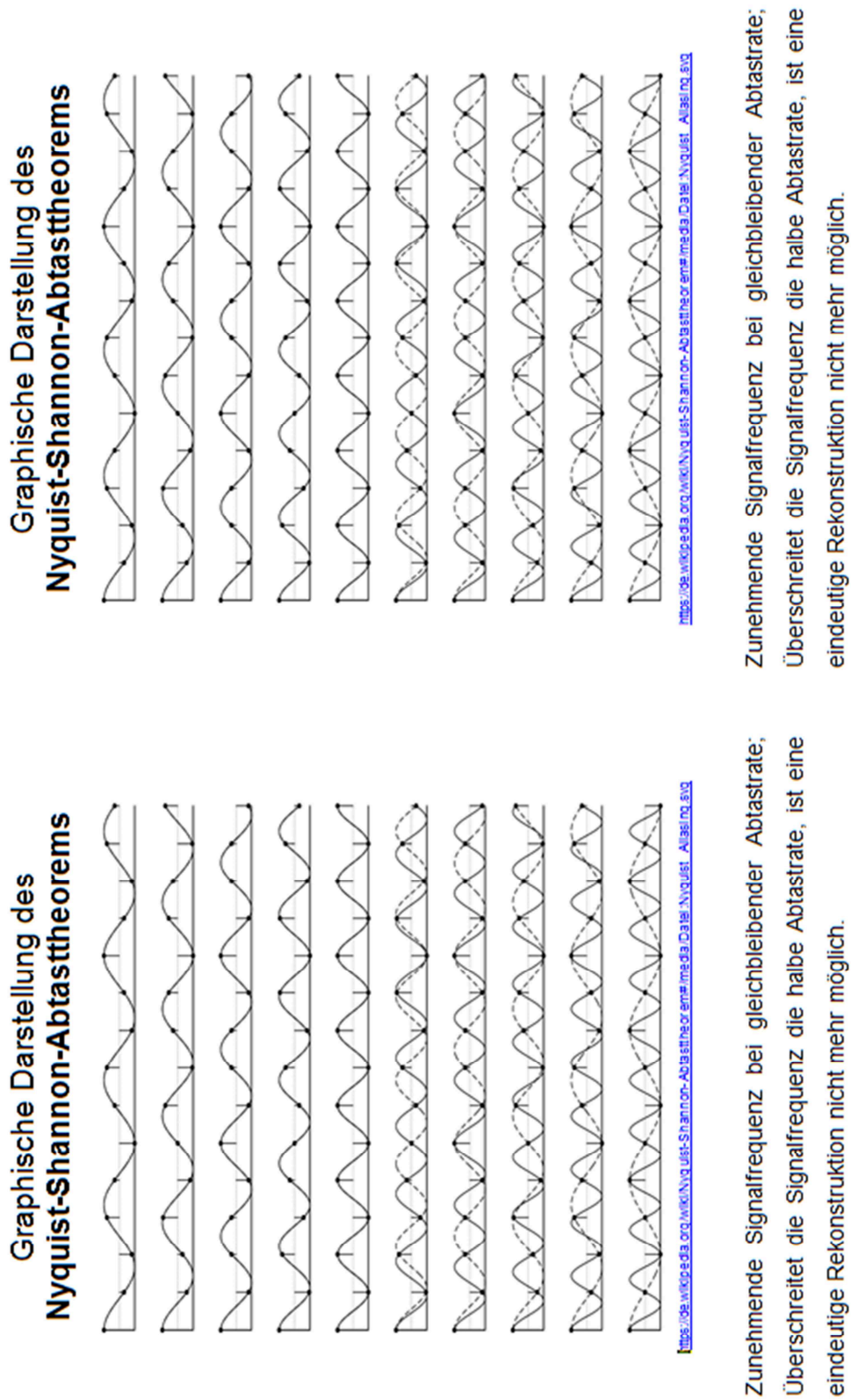
$$f_n(x) = -a_n \sin(2\pi v_n x)$$

Dabei ist a_n die Intensität bzw. die Höhe eines Peaks und v_n die Frequenz des zugehörigen Peaks. Erstelle eine weitere Funktion, welche die Summe der obigen Funktionen darstellt.

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Vergleiche den Graphen dieser Funktion mit dem aus dem Experiment (Ansicht *Rohdaten*). Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten fallen dir auf und was könnte der Grund dafür sein?

Beobachtungen und Überlegungen:

Abbildung 32: Handout zum Nyquist-Shannon-Theorem²¹²¹<https://de.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon-Abtasttheorem>

Schritt 1 auf dem Weg zur Fourieranalyse: Töne und Klänge

Töne und Klänge: Eine harmonische Schwingung des Luftdrucks nehmen wir als reinen Ton wahr. Mathematisch lässt sich diese periodische Schwankung als Sinus- oder Kosinus-Funktion auffassen. Die Überlagerung mehrerer Töne bezeichnen wir als Klang. Die Funktion eines Klangs ist die Summe der ‚Ton-Funktionen‘. Diese Klang-Funktion ist dann periodisch mit der Periodendauer des tiefsten Tons, wobei die Form aber nicht mehr der einer Sinus-Schwingung ähnelt.

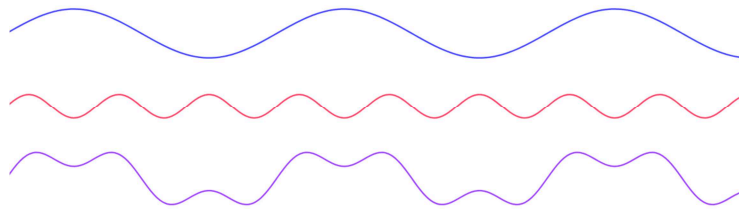


Abbildung 33: Niederfrequenter Ton (blau) und hochfrequenter Ton (rot) ergeben einen Klang (violett), wenn sie gemeinsam erklingen.

Grundton und Obertöne: Wenn man auf einem Instrument einen Ton anspielt, erklingt meistens ein Klang, da zu einem Grundton oft viele Obertöne mitangeregt werden. Die Obertöne haben die Eigenschaft, dass ihre Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Frequenz des Grundtons sind. Bei tiefen Grundtönen kann es vorkommen, dass einer der Obertöne intensiver, sprich lauter, als der Grundton ist. Wir nehmen trotzdem den Grundton wahr, da die Frequenz des Klangs noch immer die des Grundtons ist.

Digitalisierung von Klängen: Bei der Aufnahme von Tönen und Klängen mit Software werden die kontinuierlichen Luftdruckschwankungen in diskrete Signale übersetzt. Diskret bedeutet in diesem Zusammenhang, dass nur endlich viele Messpunkte pro Sekunde aufgenommen werden können. Die Information, wie groß oder klein der Druck zwischen zwei Messpunkten ist, geht verloren. Die untere

Graphik soll das verdeutlichen. Bei genügend Messdaten pro Sekunde kann der digitale Ton wieder rekonstruiert werden.

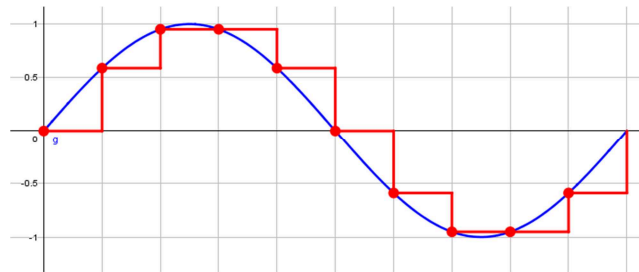


Abbildung 34: Kontinuierliche Luftdruckschwankung (blau); diskreter, digitaler Ton (rot)

Klangspektren lesen: Ein digitaler Klang kann durch die sogenannte Fourieranalyse wieder in seine Töne aufgeschlüsselt werden. Auch die Intensität der ursprünglichen Töne kann damit rekonstruiert werden. Im Gegensatz zur Vermischung der Töne zu einem Klang ist diese Analyse aufwendig und erfordert daher weitreichendere Überlegungen. Vergleichbar wäre dieser Prozess mit dem Mischen von Wassermalfarben. Es ist leicht, unterschiedliche Farben mit unterschiedlichen Anteilen zu vermengen, aber weitaus schwieriger, aus der Mischung die Farben und ihre relativen Anteile herauszulesen. Nimmt man also einen Instrumentenklang auf, liefert die Fourieranalyse ein Spektrum, welches die Anteile einzelner Töne am Klang darstellt. Im Klangspektrum ist somit die Intensität gegen die Frequenz aufgetragen.

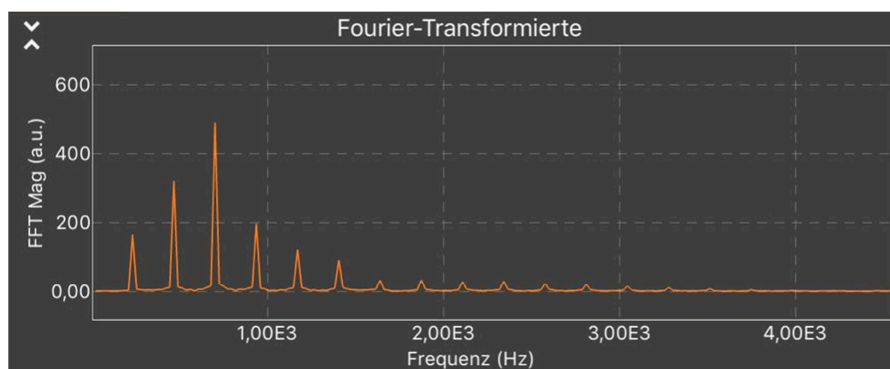


Abbildung 35: Klangspektrum einer Tenorposaune



Schritt 2 auf dem Weg zur Fourieranalyse: Klänge rekonstruieren

Klänge rekonstruieren: Ein Ton ist allein durch seine Tonhöhe eindeutig bestimmt. In einem Klang ist aber zusätzlich seine Intensität, also seine Lautstärke, in Relation zu den anderen beteiligten Tönen von großer Bedeutung. Um einen Klang also rekonstruieren zu können, müssen die Frequenzen und Intensitäten aller beteiligten Töne bekannt sein. Die Klang-Funktion $k(t)$ lässt sich dann als Summe der einzelnen Ton-Funktionen darstellen:

$$k(t) = I_1 \sin(2\pi t v_1) + I_2 \sin(2\pi t v_2) + \dots$$

wobei I_1 die Intensität des Tons mit der Frequenz v_1 Hz ist.

Nyquist-Shannon Abtasttheorem: Bei digitalen Aufnahmeverfahren können nur endlich viele Messdaten pro Sekunde aufgenommen werden. Entsprechend können sehr hohe Frequenzen zwar aufgenommen, aber nicht mehr rekonstruiert werden, da pro Periodendauer zu wenige Punkte festgemacht werden. Das Abtasttheorem besagt, dass es genügt, zwei Messungen pro Periodendauer aufzunehmen, um einen Ton wieder rekonstruieren zu können. Um alle Frequenzen des menschlichen Hörbereichs (~16 Hz bis 20 kHz) später wiedergeben zu können, müssen also 40.000 Messungen pro Sekunde aufgenommen werden.

Das Schablonenmodell: Mit der Fourieranalyse können Klänge dekomponiert, also ihre Töne und deren Intensitäten bestimmt werden. Bildlich gesprochen bedeutet das, dass man eine Vielzahl von Schablonen über den Klang legt und prüft, wie gut jede dieser Schablonen den Klang abdeckt. Bei einer hohen Übereinstimmung hat der Ton, der dieser Schablone entspricht, eine hohe Beteiligung am Klang.

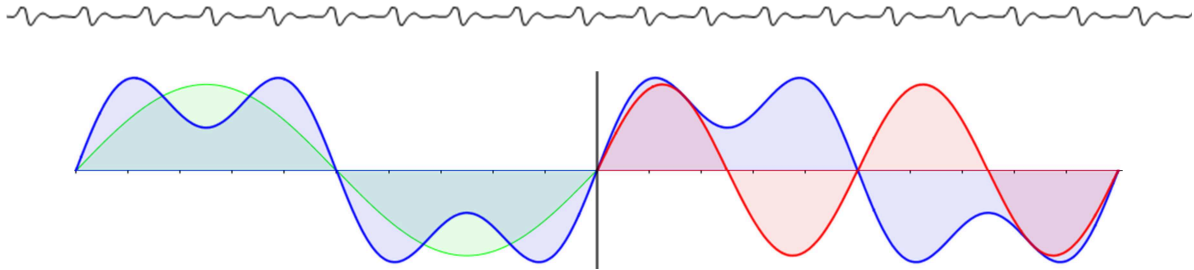


Abbildung 36: links: Die 1-Hz-Schablone (grün) überdeckt großteils die Klangkurve (blau); der Ton mit der Frequenz 1 Hz ist also maßgeblich am Klang beteiligt; rechts: Die 2-Hz-Schablone (rot) passt sehr schlecht zur Klang-Funktion; der Ton mit der Frequenz 2 Hz ist also kaum oder nicht am Klang beteiligt;

Das Testen einer Schablone auf ihre Passgenauigkeit lässt sich mit relativ einfachen Mitteln realisieren. Da nur einzelne Messpunkte vorliegen und keine kontinuierliche Funktion, können wir auch keine kontinuierliche Schablone über den Klang legen. Stattdessen multipliziert man den Funktionswert der Schablone zu jedem Messzeitpunkt mit dem jeweiligen Messwert. Die Summe dieser Produkte beschreibt dann die Passgenauigkeit der Schablone.

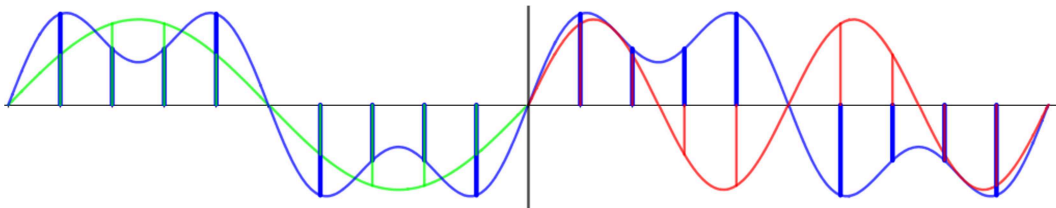


Abbildung 37: links: die Produktsumme aus Messwerten und 1-Hz-Funktionswerten liefert den Wert 5; rechts: die Produktsumme aus Messwerten und 2-Hz-Funktionswerten liefert den Wert 0; die 1-Hz-Schablone passt daher sehr gut, die 2-Hz-Schablone passt überhaupt nicht;

Jeder reale Klang besteht aus Sinus- und Kosinus-Schwingungen, weshalb pro Frequenz zwei Schablonen verwendet werden müssen: eine Sinus- und eine Kosinus-Schablone. Die Funktionswerte der diskreten Sinus-Schablone mit der Testfrequenz ν lassen sich wie folgt darstellen:

$$s_{\nu}(k) = \sin(2\pi\nu t_k)$$

Die Höhe der k -te ‚Stütze‘ entspricht also den Funktionswert der Sinus-Funktion mit ν Hz zum Zeitpunkt t_k , wobei t_k der Zeitpunkt des k -ten Messwerts des zu untersuchenden Klangs ist. Entsprechend lassen sich auch die Funktionswerte der diskreten Kosinus-Schablone darstellen:

$$c_{\nu}(k) = \cos(2\pi\nu t_k)$$

Schritt 3 auf dem Weg zur Fourieranalyse: Schablonenmodell im Praxistest

Realisierung des Schablonenmodells: In der Praxis hat man n Messwerte (Abweichungen vom Normaldruck) eines Klangs, die entsprechend der Samplingrate (Abtastrate) r_s einen zeitlichen Abstand von $1/r_s$ zueinander aufweisen. Die benötigten Funktionswerte der ν -Hz-Schablonen haben daher die entsprechende Gestalt

$$s_\nu(k) = \sin(2\pi\nu k/r_s) \text{ und } c_\nu(k) = \cos(2\pi\nu k/r_s),$$

da diese denselben zeitlichen Abstand aufweisen müssen wie unsere Messwerte. Der Ausdruck k/r_s kann bei einer konkreten Berechnung durch den Zeitpunkt des k -ten Messwerts ersetzt werden, da dieser genau jenem Ausdruck entspricht. Wenn wir den k -ten Messwert unserer Messreihe mit x_k bezeichnen, dann lässt sich die Passgenauigkeit der Frequenz mit ν Hz zu unserem Klang entsprechend unserer vorigen Überlegungen durch die folgenden Produktsummen ausdrücken.

$$I_{s_\nu} = \sum_{k=1}^n x_k s_\nu(k) \text{ bzw. } I_{c_\nu} = \sum_{k=1}^n x_k c_\nu(k)$$

Die tatsächliche Intensität des Tons mit ν Hz lässt sich dann über den folgenden Ausdruck beschreiben:

$$I_\nu = \sqrt{I_{s_\nu}^2 + I_{c_\nu}^2}$$

All diese Berechnungen lassen sich in einem Tabellenkalkulationsprogramm durchführen, sodass keine spezielle Software mehr notwendig ist, um die Fourieranalyse durchzuführen.

Eigene Klangspektren erstellen: Hat man für jeden (beliebigen) Ton die entsprechende Intensität bestimmt lässt, sich das Klangspektrum erstellen. Auf der x-Achse werden die Frequenzen aufgetragen, auf der y-Achse die entsprechenden Intensitäten.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Time (s)	Recording (.Testfrequen	Cos Anteil	Sin Anteil	Pythagoras			
2	0	0,0033723	1	-0,24787861	-1,00753779	1,03758191		
3	2,083E-05	0,0013021	2	0,14511845	-1,9447736	1,9502339		
4	4,167E-05	-0,002161	3	0,76950571	-2,74675501	2,85250801		
5	0,0000625	-0,006592	4	1,58163914	-3,3574277	3,61111111		
6	8,333E-05	-0,012199	5	2,52478777	-3,7345695	4,50795882		
7	0,0001042	-0,018409		=SUMMENPRODUKT(B2:B2049;SIN(2*PI()*C2*A2:A2049))				
8				=SUMMENPRODUKT(B2:B2049;COS(2*PI()*C2*A2:A2049))				
9								

Abbildung 38: Excel-Tabelle mit entsprechender Syntax zur Erstellung des Klangspektrums

Spalte C (x-Achse) und Spalte F (y-Achse) ergeben bei Darstellung in einem Diagramm das folgende Klangspektrum:

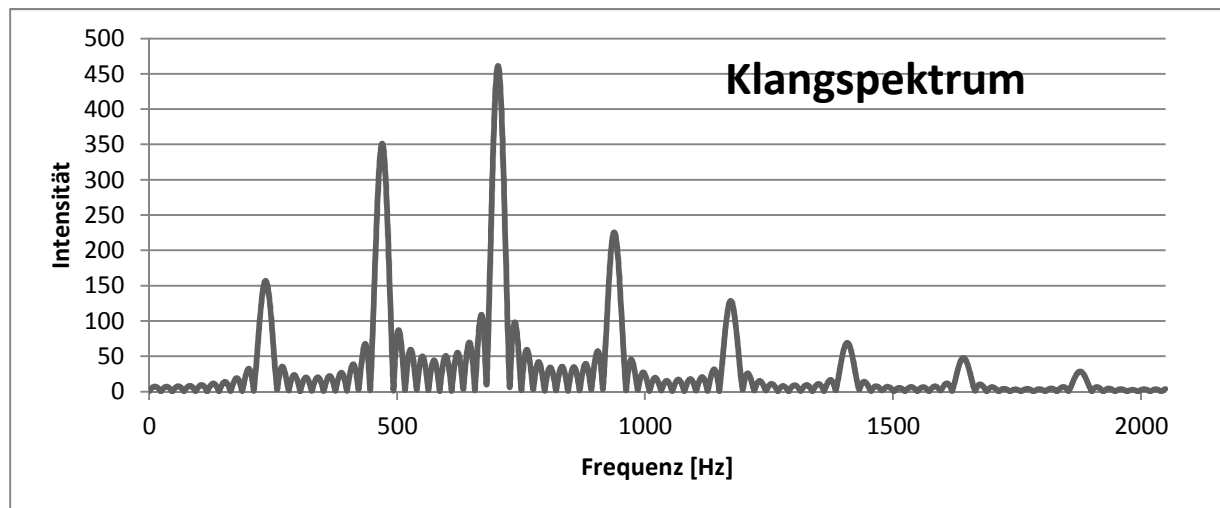


Abbildung 39: Klangspektrum der in Excel durchgeführten Fourieranalyse

Optimierung des Schablonenmodells: Streng genommen dürfen nicht beliebige Frequenzen getestet werden, sondern nur bestimmte Frequenzen in Abhängigkeit der Samplingrate r_s und der Anzahl an Messungen N . Die Testfrequenzen weisen dann die folgende Gestalt auf:

$$v_k = k \cdot \frac{r_s}{N}, k \in \mathbb{N}$$

Werden dann die Intensitäten noch normiert, also durch die Intensität des Grundtons dividiert, ergibt sich ein Spektrum, in dem die relativen Intensitäten gut ersichtlich sind.

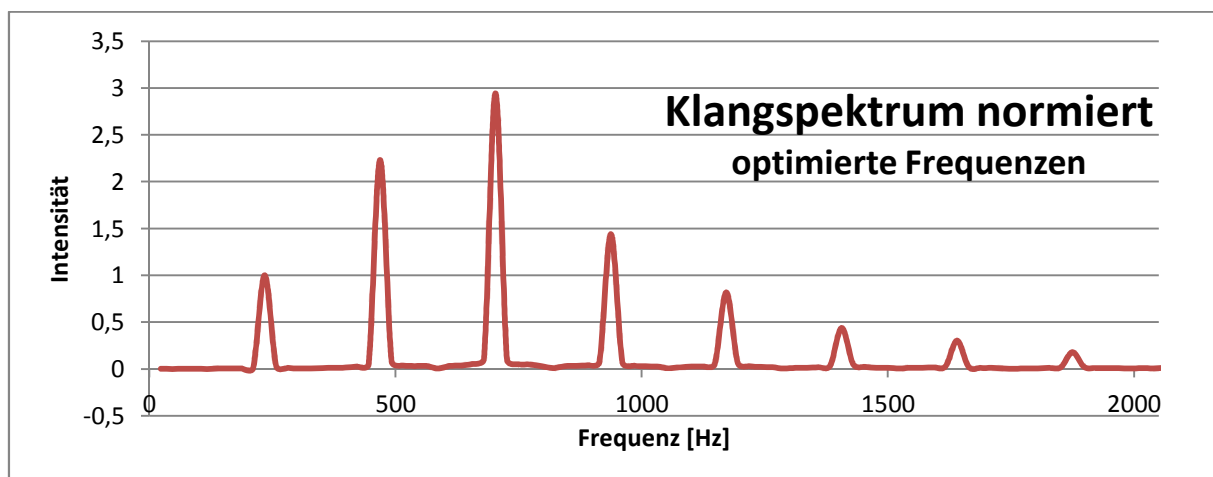


Abbildung 40: Klangspektrum mit ‚erlaubten‘ Frequenzen (normiert)

GeoGebra-Datei zur positiven und negativen Interferenz

Mit GeoGebra lassen sich recht rasch einfache Animationen erstellen. So kann auch die Überlagerung zweier Töne zu einem Klang in wenigen Schritten realisiert und dynamisch dargestellt werden.

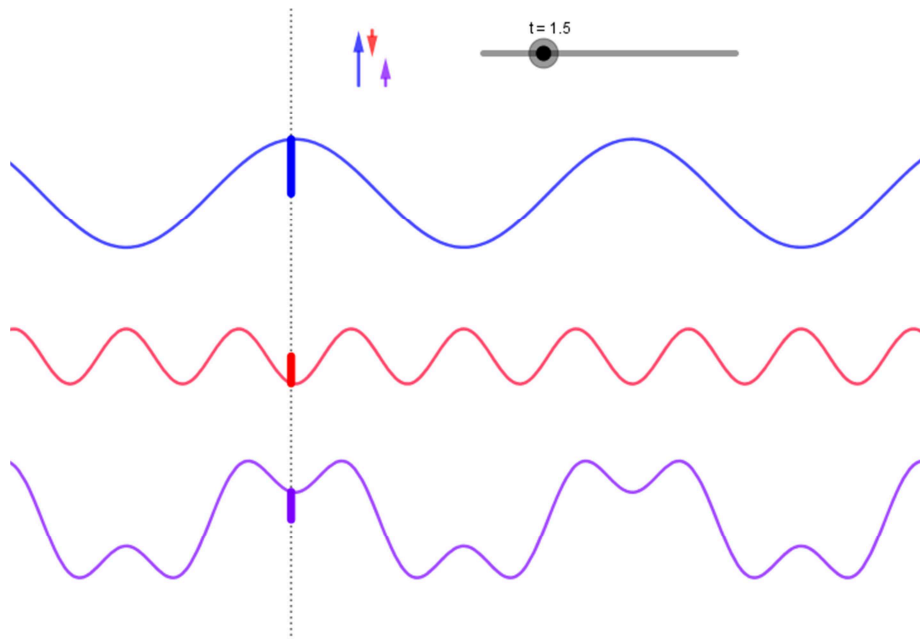


Abbildung 41: Interferenz-Animation mit GeoGebra

Die oberste Kurve wird durch die Funktion $f(x) = \sin(2\pi + t) + 6$ beschrieben. Der letzte Summand trägt lediglich dazu bei, dass die drei Kurven übereinander dargestellt werden. Die mittlere Kurve ist der Graph der Funktion $g(x) = 0,5 \cdot \sin(6\pi + 3t) + 3$. Die Phasenverschiebung t kann durch einen Schieberegler festgelegt werden. Wenn dieser so eingestellt wird, dass er in sehr kleinen Schritten von 0 bis 2π in einer Schleife läuft, entsteht der Eindruck, dass sich die beiden Wellen von rechts nach links durch das Bild bewegen. Der letzte Graph hat die Funktion $p(x) = f(x) + g(x) - 9$. Der Subtrahend hat nur die Aufgabe, die beiden konstanten Summanden der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auszugleichen. Wird dann noch eine senkrechte Gerade konstruiert und die Abstände der Elongationen zur entsprechenden Mittelgeraden realisiert, so kann anschaulich gezeigt werden, wie die Elongation des Klangs durch die Elongationen der einzelnen Töne erzeugt wird. Noch ersichtlicher wird das, wenn man diese Abstände nebeneinander als Vektoren darstellt, wie das oben links neben dem Schieberegler gemacht wurde.

Läuft dann die Animation, erkennt man auf einen Blick, dass die Summe der Tonelongationen immer gleich der Klangelongation ist.

Eine online-Version dieser GeoGebra-Datei findet man unter folgendem Link:

<https://www.geogebra.org/m/qwgwtjwe>

GeoGebra-Datei zum Schablonen-Modell

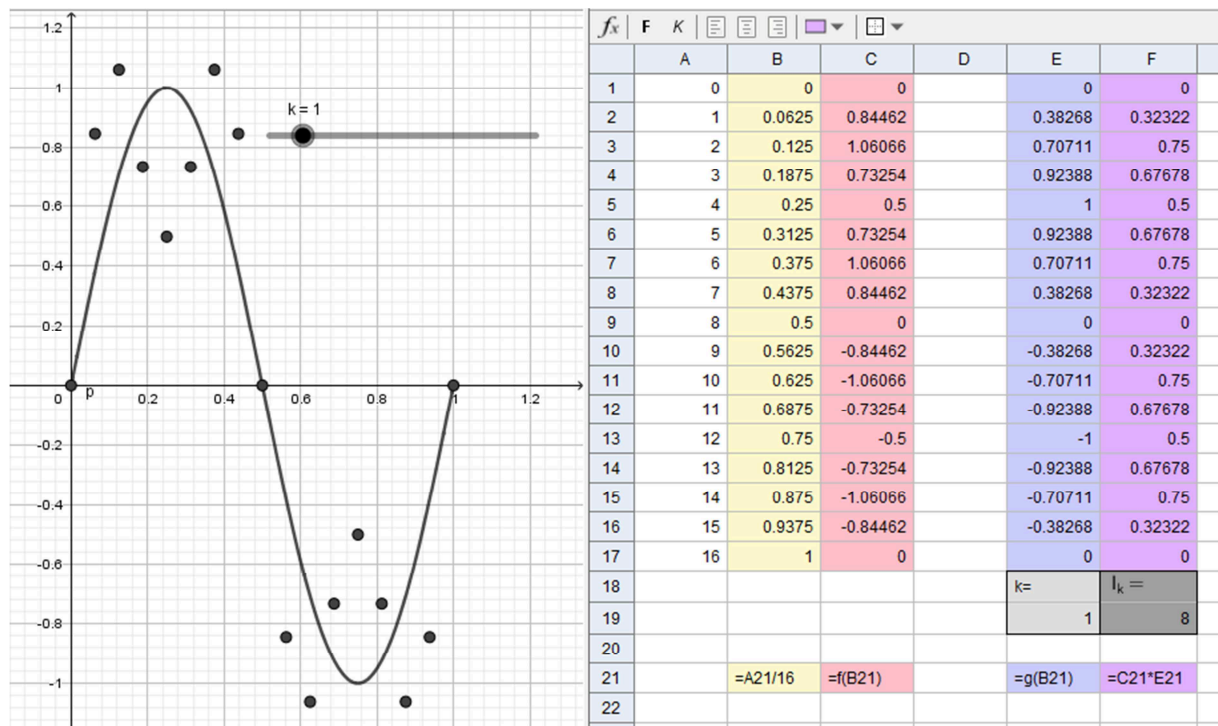


Abbildung 42: Visualisierung des Schablonenmodells in GeoGebra

Die Spalten A bis C werden zur Erstellung des künstlichen Samples verwendet. In Spalte A befindet sich die Nummerierung der ‚Messwerte‘, in Spalte B der Zeitpunkt einer ‚Messung‘ und in Spalte C der Funktionswert zu diesem Zeitpunkt. Bei einer realen Messung sind in Spalte C die Messwerte eingetragen. Für die Erzeugung des synthetischen Samples wird aus den Spalten B und C eine Punkte-Liste generiert. Die Elemente dieser Liste sind in der linken Graphik als dunkelgraue Punkte erkennbar. Der Faktor 1/16 in der Spalte B kommt daher, dass eine Samplingrate von 16 Hz verwendet wird. In Spalte E sind die Funktionswerte der Schablonenfunktion mit der Frequenz k zu den entsprechenden Zeitpunkten eingetragen. Die Frequenz k kann über einen Schieberegler verstellt werden und die natürlichen

Zahlen von null bis acht annehmen. In der letzten Spalte F ist das Produkt aus Spalte C und Spalte E eingetragen. Die Summe der Spalte F befindet sich in Zelle F19 und entspricht der ‚Güte‘ der Schablone mit der Frequenz k Hz bzw. der Intensität des

Tons mit k Hz. In der obigen Abbildung 42 wird gerade die Frequenz mit 1 Hz getestet. Die ‚Güte‘ dieser Schablone hat den Wert 8.

Eine online-Version dieser GeoGebra-Datei findet man unter folgendem Link:

<https://www.geogebra.org/m/tbfmsqwu>

Excel-Datei zur ‚Naiven Fourier-Transformation‘

Exportiert man die Messdaten aus phyphox® als Excel-Datei, erhält man ein Dokument mit zwei Tabellen mit den Namen *FFT Spectrum* und *Raw data*. Stellt man die Daten der ersten Tabelle als Punktdiagramm dar, erhält man, wie der Name schon sagt, die Fourier-Transformation der aufgenommenen Daten. Werden die Daten der zweiten Tabelle dargestellt, sieht man die aufgenommene Klangkurve, also einen periodisch aussehenden Graphen mit 2048 Messpunkten. Es empfiehlt sich gleich in diesem Dokument eine dritte Tabelle anzulegen, um Ergebnisse der eigenen durchgeführten Fourieranalyse mit jener der App rasch vergleichen zu können. In die ersten beiden Spalten dieser dritten Tabelle importiert man die beiden Spalten aus „Raw Data“. In der Spalte C werden dann die Testfrequenzen eingetragen. In erster Linie können das beliebige Frequenzen zwischen null Hz und der halben Samplingrate sein. Es bietet sich daher an, zunächst die natürlichen Zahlen als Testfrequenzen heranzuziehen. In der Spalte D können dann die Kosinus-Anteile berechnet werden. Die mathematische Formel (2.5.3)

$$c(v) = \sum_{t=0}^{N-1} x_t \cos\left(\frac{2\pi vt}{r_s}\right)$$

muss dazu in die folgende Excel-Syntax übersetzt werden:

$$= \text{SUMMENPRODUKT}(A2:A2049; \text{COS}(2 \cdot \text{PI}() \cdot C2 \cdot B2:B2049))$$

Der obige Eintrag soll in der Zelle D2 eingetragen sein. Er liefert den Kosinus-Anteil der Testfrequenz aus Zelle C2 am aufgenommenen Klang. Analog werden in der Spalte D die Sinus-Anteile (2.5.7) mit der entsprechenden Syntax berechnet.

$$s(v) = \sum_{t=0}^{N-1} x_t \sin\left(\frac{2\pi vt}{r_s}\right) \rightarrow$$

$$= \text{SUMMENPRODUKT}(A2:A2049; \text{SIN}(2 \cdot \text{PI}() \cdot C2 \cdot B2:B2049))$$

In der sechsten Spalte wird dann der normierte Anteil für eine Testfrequenz berechnet.

$$N_v = \sqrt{c(v)^2 + s(v)^2} \rightarrow F2 = \text{WURZEL}(D2^2 + E2^2)$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Time (s)	Recording	Testfrequenz	Cos Anteil	Sin Anteil	Pythagoras	
2	0	0,0033723	1	-0,24787861	-1,00753779	1,03758191	
3	2,083E-05	0,0013021	2	0,14511845	-1,9447736	1,950239	
4	4,167E-05	-0,002161	3	0,76950571	-2,7465501	2,8525080	
5	0,0000625	-0,006592	4	1,58163914	-3,3574277	3,7	=WURZEL(D2^2+E2^2)
6	8,333E-05	-0,012199	5	2,52478772	-3,73451695	4,50795882	
7	0,0001042	-0,018408		=SUMMENPRODUKT(B2:B2049;SIN(2*PI()*C2*A2:A2049))			
8				=SUMMENPRODUKT(B2:B2049;COS(2*PI()*C2*A2:A2049))			
9	0,0001158	-0,02227	6	5,85582131		6,38258037	
10	0,0001667	-0,038747	9	6,25398522	-2,66484785	6,79806923	
11	0,0001875	-0,043588	10	6,84949457	-1,849932	7,09491538	
12	0,0002083	-0,047453	11	7,21064067	-0,91022633	7,26786425	
13	0,0002292	-0,050874	12	7,31332704	0,08814388	7,3138582	
14	0,00025	-0,053808	13	7,1517235	1,07512158	7,23208375	
15	0,0002708	-0,05586	14	6,73864382	1,98167034	7,02398305	

Abbildung 43: Excel-Tabelle mit entsprechender Syntax zur Erstellung des Klangspektrums

Der Wert dieser Zelle entspricht dann dem absoluten Anteil des Tons mit der Frequenz aus C2. Ein Punktdiagramm der Spalten C und F liefert somit das vorläufige Spektrum. Ein solches Spektrum weist aber, wie in Kapitel 2.5 näher besprochen wird, merkwürdige kleinere Zwischenpeaks auf. Für den Unterricht mag das kein Problem darstellen, da auch bei diesem Spektrum die Hauptpeaks (Grundton und Obertöne) an den richtigen Stellen liegen und die entsprechenden Höhen aufweisen. Wenn es im Unterricht zeitlich möglich ist, kann man aber mit dem Hintergrundwissen aus Kapitel 2.5. argumentieren, dass die Testfrequenzen die Gestalt

$$v_k = k \cdot \frac{r_s}{N}, k \in \mathbb{N}$$

aufweisen müssen. Mit dieser letzten Korrektur gelingt schließlich die Darstellung des eigentlichen Fourier-Klangspektrums.

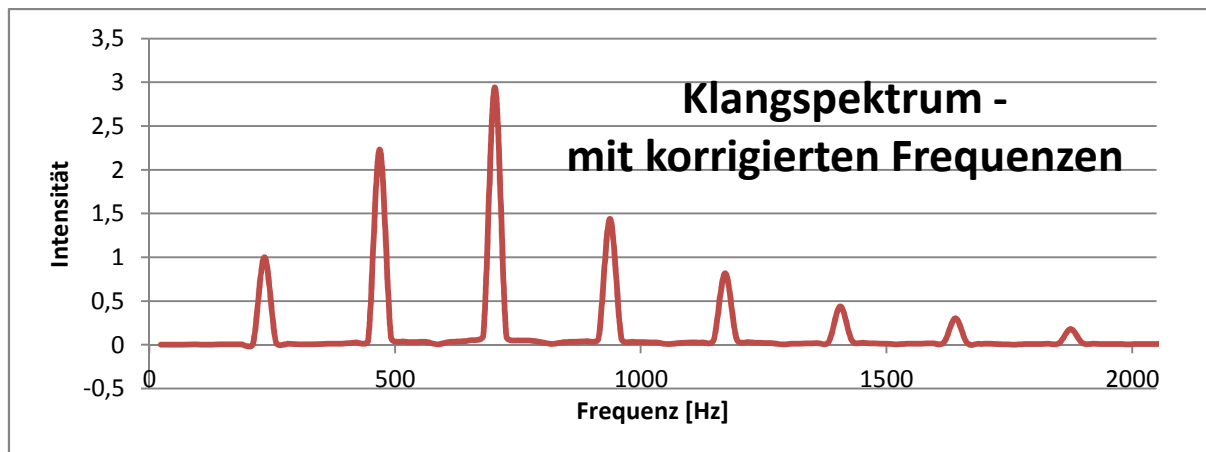


Abbildung 44: Klangspektrum einer Tenorposaune normiert auf den Grundton mit korrigierten Frequenzen